Solución de subproblemas con estrategia Greedy

1 Algoritmos Greedy propuestos

2 Demostración de correctitud

2.1 Para el caso en que el grafo es un árbol

Recordemos que, en un árbol, al eliminar ciertas aristas se incrementa el número de componentes conexas.

Lemma 1 (Número de componentes en un árbol). *Si eliminamos todas las aristas de un árbol con n vértices, es decir, eliminamos $n-1$ aristas, obtenemos n componentes conexas.*

Proof. Procedemos por inducción en el número de vértices n.

Caso base: Si $n = 2$, un árbol tiene exactamente una arista. Al remover esta única arista, el grafo se divide en 2 componentes conexas, lo cual cumple la afirmación.

Hipótesis de inducción: Supongamos que para un árbol con $n = k-1$ vértices, removiendo $(k-2)$ aristas obtenemos $k-1$ componentes conexas.

Paso inductivo: Consideremos un árbol T con k vértices. Removamos una arista e del árbol. Al hacerlo, el árbol se divide en dos subárboles, digamos T_1 y T_2, que tienen n_1 y n_2 vértices respectivamente, donde $n_1 + n_2 = k$ y ambos $n_1, n_2 \geq 1$. Por la hipótesis de inducción, removiendo $n_1 - 1$ aristas de T_1 se obtienen n_1 componentes conexas y removiendo $n_2 - 1$ aristas de T_2 se obtienen n_2 componentes conexas. En total, removiendo $1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 1 = k - 1$ aristas, obtenemos $n_1 + n_2 = k$ componentes conexas. □

Lemma 2. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con pesos no negativos en sus aristas, y sea la lista de aristas ordenada de forma no decreciente según sus pesos:*

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_{n-1}).$$

Entonces, el conjunto de aristas de menor peso que separa el árbol en k componentes conexas está dado por:

$$C = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}.$$

Proof. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe otro conjunto C' de $k-1$ aristas tal que el peso total $w(C')$ es menor que $w(C)$. Sin embargo, al remover $k-1$ aristas de T, por el resultado del lema anterior, el árbol se divide en k componentes conexas. Como C está formado por las $k-1$ aristas de menor peso, cualquier otro conjunto C' de $k-1$ aristas necesariamente tendrá un peso total mayor o igual a $w(C)$. Esto contradice la hipótesis de que $w(C') < w(C)$, por lo que C debe ser el conjunto deseado. □

Corollary 1. *Sobre árboles, el problema se puede resolver en tiempo polinomial, ya que basta con ordenar las aristas (lo cual se puede hacer en tiempo $O(n \log n)$) y seleccionar las $k-1$ aristas de menor peso.*

2.2 Para el caso en que el grafo es un bosque

Consideremos ahora un bosque, es decir, un grafo disconexo cuyos componentes son árboles.

Proposition 1. *Sea t el número de componentes conexas en un bosque $F = (V, E)$. Para cualquier $n \geq t$, si eliminamos $(n-t)$ aristas del bosque, obtenemos n componentes conexas.*

Proof. Procedemos por inducción en n.

Caso base: Si $n = t$, no eliminamos ninguna arista, y el bosque ya tiene t componentes, lo que cumple la afirmación.

Hipótesis de inducción: Supongamos que para $n = k-1$ (con $k-1 \geq t$), removiendo $(k-1-t)$ aristas se obtienen $k-1$ componentes conexas.

Paso inductivo: Consideremos un bosque F y supongamos que removiendo $(k-1-t)$ aristas se obtienen $k-1$ componentes conexas. Ahora, removamos una arista adicional de uno de los árboles resultantes. Por el lema aplicado a árboles, al remover una arista de ese árbol se incrementa el número de componentes en 1. Así, en total, removiendo $(k-1-t)+1 = k-t$ aristas, obtenemos k componentes conexas. □

Lemma 3. *Sea $F = (V, E)$ un bosque con pesos no negativos en sus aristas, y sean t el número de componentes conexas de F y las aristas ordenadas por la función de peso de forma no decreciente:*

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_{|V|}).$$

Entonces, el conjunto de aristas de menor peso cuya eliminación divide el bosque en k componentes conexas está dado por:

$$C = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-t}\}.$$

Proof. Supongamos, para obtener una contradicción, que existe un conjunto C' de aristas con $|C'| < k-t$ y $w(C') < w(C)$ que, al removerlas, divide el bosque en k componentes conexas. Sin embargo, según la proposición anterior, remover menos de $k-t$ aristas en un bosque con t componentes produce menos de k componentes conexas. Esto contradice la definición de C'. Por lo tanto, C es el conjunto de aristas de menor peso cuya eliminación divide F en k componentes conexas. □

3 Pseudocódigo