Demostraciones de NP-Completitud del problema de partición de grafos

Daniel Machado Pérez
Diseño y Análisis de Algoritmos

Índice

1. Demostración de que el problema de decisión es NP-Completo

El problema de decisión se puede definir de la siguiente manera:

Entrada: Un grafo $G = (V, E)$, un número entero positivo k, una función no negativa de pesos sobre las aristas $w(e)$ y un umbral M.

Pregunta: Determinar si es posible particionar G en k componentes conexas de manera que la suma de los pesos de las aristas que conectan nodos de componentes conexas distintas sea a lo sumo M.

Por simplicidad, en lo siguiente llamaremos $P - decision$ a este problema.

1.1. Pertenencia a NP

Para verificar si $P - decision$ pertenece a NP, se necesita demostrar que cualquier solución candidata puede ser verificada en tiempo polinomial.

Dado un grafo $G = (V, E)$, una partición de los vértices en k subconjuntos $S_1, S_2, \dots, S_k$ y un umbral M, se puede verificar en tiempo polinomial si la solución es válida de la siguiente manera:

- Comprobar que la partición es válida, es decir, que cada S_i es no vacío, la unión de todos los S_i es V y las intersecciones son vacías ($S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$). Esto se puede realizar en tiempo $O(|V|)$ usando estructuras para marcar vértices visitados.
- Comprobar que cada subconjunto S_i es una componente conexa. Esto se puede hacer con BFS/DFS en complejidad $O(|V| + |E|)$.
- Comprobar que la suma de los pesos de las aristas que cruzan componentes conexas es menor o igual que M. Esto se resuelve iterando por todas las aristas, y si una arista involucra vértices de subconjuntos distintos, se suma $w(e)$ al total. Al final se verifica si $w(e) \leq M$. La complejidad es $O(|E|)$.

Dado que cada paso se puede realizar en tiempo polinomial, $P - decision$ pertenece a NP.

1.2. NP-Hardness

Procederemos a demostrar que $P - decision$ es NP-Hard mediante una reducción polinomial desde el problema de decisión de **Clique Máximo**, que es NP-Completo.

Recordemos la definición de **Clique Máximo**:
Entrada: Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y $M \in \mathbb{Z}^+$
Pregunta: Determinar si existe un clique en G de tamaño mayor o igual que M.

1.2.1. Reducción desde Clique Máximo

Demostración. Consideremos un grafo no dirigido con pesos de $\{0,1\}$ en las aristas. Encontrar la mínima configuración de aristas que al ser eliminadas particionan el grafo en k componentes conexas, es equivalente a maximizar la cantidad de aristas dentro de cada componente conexa. Supongamos que G tiene un clique H de tamaño $M = |V| - (k-1)$. Entonces el número de aristas entre cualquier vértice $v \notin H$ y $u \in H$ es menor que la cantidad de aristas entre vértices dentro de H, pues en un clique hay una arista entre cualquier par de vértices:

$$\sum_{u \in H, v \notin H} w(e_{uv}) < \sum_{u \in H, v \in H} w(e_{uv})$$

Entonces cuando se divide el grafo en k particiones con una cantidad mínima de aristas de cruce entre componentes conexas, el clique H debe ser una de esas componentes.

$\Rightarrow$ El problema de decisión de **Clique Máximo** puede reducirse en tiempo polinomial a $P - decision$.
Como se sabe que **Clique Máximo** es NP-Completo $\Rightarrow$ $P - decision$ es NP-Hard. □

1.3. NP-Completitud

Dado que $P - decision$ pertenece a NP y es NP-Hard, concluimos que es NP-Completo.
■

2. Demostración de que el problema de optimización es NP-Hard

El problema de optimización se puede definir de la siguiente manera:

Entrada: Un grafo $G = (V, E)$, un número entero positivo k y una función no negativa de pesos sobre las aristas $w(e)$.

Salida: Encontrar una partición de G en k componentes conexas de manera que la suma de los pesos de las aristas que conectan nodos de componentes conexas distintas es mínima.

Por simplicidad, en lo siguiente llamaremos $P - optimization$ a este problema.

2.1. NP-Hardness

Demostración. Como se conoce que dado un problema, si su variante de decisión es NP-Completo entonces su variante de optimización es NP-Hard, y se demostró que $P - decision$ es NP-Completo $\Rightarrow$ $P - optimization$ es NP-Hard. □