Optimización de Redes de Distribución Energética

Contexto práctico

En una red de distribución energética de la UNE, las subestaciones están interconectadas mediante una red de líneas de transmisión. Cada línea tiene un costo de mantenimiento (ponderación) y una capacidad de transferencia energética. Cuando ocurre un fallo en una línea de transmisión (nada frecuente, por cierto), la red debe reorganizarse dinámicamente (muy dinámico siempre) para minimizar los costos de reparación y garantizar que el suministro energético a las regiones más críticas sea continuo (jaja yeah sure).

El jefe de la UNE desea dividir la red en k grupos independientes (subredes autónomas) durante situaciones de mantenimiento o emergencias, asegurándose de que la desconexión sea lo menos costosa posible (en términos de la suma de los costos de las líneas cortadas).

Adicionalmente, al jefe de la UNE le llegó de las altas esferas la orientación de resolver otra tarea. Se quiere garantizar que existan zonas priorizadas que no sufran cortes de electricidad por su relevancia. Estas zonas pueden incluir hospitales, instituciones importantes como el ICRT, residencias de mandatarios (ya de paso jiji), entre otras. Por ello, se plantea la necesidad de determinar la cantidad mínima de aristas que deben removerse para obtener al menos una componente conexa con exactamente t nodos, representando estas zonas priorizadas.

Formalización del problema

Dado un grafo ponderado $G = (V, E)$, donde:

- V: Conjunto de nodos que representan subestaciones.
- E: Conjunto de aristas que representan líneas de transmisión, cada una con un costo $w(e)$ asociado.
- k: Número de subredes requeridas.
- $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq V$: Subestaciones críticas que deben quedar separadas entre las k subredes.
- t: Tamaño de la componente priorizada.

Problemas:

1. Encontrar un conjunto mínimo de aristas $E' \subseteq E$ tal que al eliminar E':
   a) G se divide en k componentes conexos.
   b) Cada subestación crítica s_i pertenece a una componente diferente.
   c) La suma de los costos de las aristas eliminadas $\sum_{e \in E'} w(e)$ es mínima.
2. Determinar la cantidad mínima de aristas a remover del grafo G tal que quede al menos una componente conexa con exactamente t nodos.

Estrategias de solución

1. **Demostración de NP-Complejidad**: Demostrar que la primera parte del problema es **NP-completo**, utilizando una reducción al problema *Max-Clique*.
2. **Reducción a árboles y solución greedy**: Reducir la primera parte del problema a árboles y diseñar una solución greedy con complejidad $O(n \log n)$.
3. **Algoritmos de aproximación con flujo**: Proponer algoritmos de aproximación basados en técnicas de flujo para resolver la primera parte del problema en grafos generales.
4. **Reducción de la segunda parte del problema a árboles**: Reducir la segunda parte del problema a árboles y resolverlo utilizando programación dinámica.