Übung 3

Aufgabe 1

$T_1 : T_0 +$ Abschlussaxiom für Wertebereich + Gleichheitsaxiome

a)

$/lnot = (a1, c4)$
Gib Interpretation I an, die Modell von T_1 ist, aber nicht von $\neg = (a1, c4) \rightsquigarrow \neg = (a1, c4)$ nicht ableitbar (Satz von Gödel).

I. $Dom = Konst_A$ als Beispiel, ext wie angegeben ext(=) wie üblich. $K : Konst_A \Rightarrow Dom$ mit $k(c) = \begin{cases} a1, & \text{wenn } c = c4 \\ c, & \text{sonst} \end{cases}$.

Nach Konstruktion gilt:

- T_0 erfüllt
- Gleichheitsaxiom erfüllt, insbesondere $= (a1, c4)$, da $k(c4) = a1$
- Abschlussaxiom erfüllt

Aber

$$\begin{aligned} \not\models_I \neg &= (a1, c4) \\ \Diamond nicht \models_i \neg &= (a1, c4) \\ \Diamond nichtnicht \models_i &= (a1, c4) \\ \Diamond \models_i &= (a1, c4) \end{aligned} \tag{1}$$

b)

$\neg do(a0)$

I. Dom wie oben, k = id, $ext(do) = \{m, q, d, a0\}$
I erfüllt T_2, Gleichheits, Abschluss und Eindeutigkeitsaxiome

Aber

$$\begin{aligned}
&\not\models_I \neg do(a0) \\
\Diamond nicht &\models_I \neg do(a0) \\
\Diamond nichtnicht &\models_I do(a0) \\
\Diamond &\models_I do(a0) \\
||a0||_I^\rho &= (a0) \in ext(do)
\end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 2

f_1 : Sei ρ eine Belegung mit $\rho(X) = einbruch, \rho(Z) = pathologie$. Dann gilt $(\rho(X), offen, \rho(Z)) \in ext(akte)$
Also gilt:

$$\begin{aligned}
&\models_{I,\rho} akte(X, offen, Z) \\
nichtnicht &\models_{I,\rho} akte(X, offen, Z) \\
nicht &\models_{I,\rho} \neg akte(X, offen, Z) \\
nicht &\models_{I,\rho} (\forall Z)(\neg akte(X, offen, Z)) \\
&\models_{I,\rho} \neg(\forall Z)(\neg akte(X, offen, Z)) \\
&\models_{I,\rho} (\exists Z)(akte(X, offen, Z)) \\
&\models_{I,\rho} (\exists X)(\exists Z)(akte(x, offen, Z))
\end{aligned} \tag{3}$$

analog mit X

f_2 : Sei $f' :_2= le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y)$.
Sei $f_2'' = (X_1, X_2)$
Sei ρ eine Belegung.

1.Fall

$$\begin{aligned} &\rho(X_1) = \rho(X_2) \\ &\models_{I,\rho} f_2' \\ &\models_{I,\rho} \neg f_2' \vee f_2'' \\ &\models_{I,\rho} f_2' \Rightarrow f_2'' \\ (\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1,Y) \wedge le(X_2,Y) \Rightarrow (X_1,X_2) \end{aligned} \tag{4}$$

2. Fall $\rho(X_1) = \rho(X_2)$
Es gilt: $ext(le) = \{(skinner, mulder), (skinner, scully)\}$

Mit $\rho(X_1) = \rho(X_2)$ folgt:

$$\begin{aligned} &nicht(X_1,Y) \in ext(le) \vee nicht(X_2,Y) \in ext(le) \\ &nicht((X_1,Y) \in ext(le) \wedge (X_2,Y) \in ext(le) \\ &nicht \models_{I,\rho} f_2' \\ &\models_{I,\rho} \neg f_2' \\ &\models_{I,\rho} \neg f_2' \vee f_2'' \\ &\models_{I,\rho} \neg(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1,Y) \wedge le(X_2,Y) \Rightarrow = (X_1,X_2)) \end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe 3

f_1:

$$\begin{aligned} &\vdash akte(krycek, offen, psychologie)^1 \\ &\vdash (\exists Z)(akte(krycek, offen, Z)) \\ &\vdash (\exists X)(\exists Z)(akte(X, offen, Z)) \end{aligned} \tag{6}$$

f_2: Es sei $K_{le} = \{(skinner, mulder), (skinnerscully)\}$
1) $(\forall X_1)(\forall Y_1)(le(X_1,Y_1) \Rightarrow (=(X_1, skinner) \wedge =(Y_1, mulder)) \vee (=(X_1, skinner) \wedge =(Y_1, scully))$
2) $(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_2,Y_2) \Rightarrow (=(X_2, skinner) \cdots$
3) $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_1,Y_1) \wedge (le(X_2,Y_2) \Rightarrow (=(X_1, skinner) \wedge =(Y_1, mulder)) \vee (=(X_1, skinner) \wedge =(Y_1, scully)) \wedge (=(X_2, skinner) \wedge =(Y_2, mulder)) \vee (=(X_2, skinner) \wedge =(Y_2, scully))$
4) $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_1,Y_1) \wedge (le(X_2,Y_2) \Rightarrow = (X_1, skinner) \vee (=(X_1, skinner) \wedge =(X_2, skinner) \vee =(X_2, skinner)$
5) $\cdots le(X_1,Y_1) \wedge le(X_2,Y_2) \wedge (Y_1Y_2) \Rightarrow \cdots$
6) $(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1,Y) \wedge le(X_2,Y) \Rightarrow (=(X_1, skinner) \vee =(X_1, skinner) \wedge =$

$(X_2, skinner) \vee = (X2, skinner))$
7) $\dots \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (X2, skinner))$
8) $\dots \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (skinner, X2))$
9) $(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y) \Rightarrow = (X_1, X_2))$

Aufgabe 4

Überprüfen bei Existenzqauntor und implikation oder bei allquantor und keine implikation ensteht oft unfug

$(\forall s, w_1, f_1, w_2, f_2)((STUDENT(s, w_1, f_1) \wedge STUDENT(s, w_2, f_2)) \Rightarrow STUDENT(s, w_1, f_2))$