Übung 3

Aufgabe 1

$T_1 : T_0+$ Abschlussaxiom für Wertebereich + Gleichheitsaxiome

a)

$/lnot = (a1, c4)$
Gib Interpretation I an, die Modell von T_1 ist, aber nicht von $\neg = (a1, c4) \rightsquigarrow \neg = (a1, c4)$ nicht ableitbar (Satz von Gödel).

I. $Dom = Konst_A$ als Beispiel, ext wie angegeben ext(=) wie üblich. $K : Konst_A \Rightarrow Dom$ mit $k(c) = \begin{cases} a1, & \text{wenn } c = c4 \\ c, & \text{sonst} \end{cases}$.

Nach Konstruktion gilt:

- T_0 erfüllt
- Gleichheitsaxiom erfüllt, insbesondere $= (a1, c4)$, da $k(c4) = a1$
- Abschlussaxiom erfüllt

Aber

$$\begin{aligned} \not\models_I \neg &= (a1, c4) \\ \Diamond nicht \models_i \neg &= (a1, c4) \\ \Diamond nichtnicht \models_i &= (a1, c4) \\ \Diamond \models_i &= (a1, c4) \end{aligned} \tag{1}$$

b)

$\neg do(a0)$

I. Dom wie oben, k = id, $ext(do) = \{m, q, d, a0\}$
I erfüllt T_2, Gleichheits, Abschluss und Eindeutigkeitsaxiome

Aber

$$\begin{aligned} &\not\models_I \neg do(a0) \\ \Diamond nicht &\models_I \neg do(a0) \\ \Diamond nichtnicht &\models_I do(a0) \\ \Diamond &\models_I do(a0) \\ ||a0||_I^\rho &= (a0) \in ext(do) \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 2

f_1 : Sei ρ eine Belegung mit $\rho(X) = einbruch, \rho(Z) = pathologie$. Dann gilt $(\rho(X), offen, \rho(Z)) \in ext(akte)$
Also gilt:

$$\begin{aligned} &\models_{I,\rho} akte(X, offen, Z) \\ nichtnicht &\models_{I,\rho} akte(X, offen, Z) \\ nicht &\models_{I,\rho} \neg akte(X, offen, Z) \\ nicht &\models_{I,\rho} (\forall Z)(\neg akte(X, offen, Z)) \\ &\models_{I,\rho} \neg(\forall Z)(\neg akte(X, offen, Z)) \\ &\models_{I,\rho} (\exists Z)(akte(X, offen, Z)) \\ &\models_{I,\rho} (\exists X)(\exists Z)(akte(x, offen, Z)) \end{aligned} \tag{3}$$

analog mit X

f_2 : Sei $f' :_2= le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y)$.
Sei $f_2'' = (X_1, X_2)$
Sei ρ eine Belegung.

1.Fall

$$\begin{aligned} &\rho(X_1) = \rho(X_2) \\ &\models_{I,\rho} f_2' \\ &\models_{I,\rho} \neg f_2' \vee f_2'' \\ &\models_{I,\rho} f_2' \Rightarrow f_2'' \\ (\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1,Y) \wedge le(X_2,Y) \Rightarrow (X_1,X_2) \end{aligned} \tag{4}$$

2. Fall $\rho(X_1) = \rho(X_2)$
Es gilt: $ext(le) = \{(skinner, mulder), (skinner, scully)\}$

Mit $\rho(X_1) = \rho(X_2)$ folgt:

$$\begin{aligned} &nicht(X_1,Y) \in ext(le) \vee nicht(X_2,Y) \in ext(le) \\ &nicht((X_1,Y) \in ext(le) \wedge (X_2,Y) \in ext(le) \\ &nicht \models_{I,\rho} f_2' \\ &\models_{I,\rho} \neg f_2' \\ &\models_{I,\rho} \neg f_2' \vee f_2'' \\ &\models_{I,\rho} \neg(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1,Y) \wedge le(X_2,Y) \Rightarrow = (X_1,X_2)) \end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe 3

f_1:

$$\begin{aligned} &\vdash akte(krycek, offen, psychologie)^1 \\ &\vdash (\exists Z)(akte(krycek, offen, Z)) \\ &\vdash (\exists X)(\exists Z)(akte(X, offen, Z)) \end{aligned} \tag{6}$$

f_2: Es sei $K_{le} = \{(skinner, mulder), (skinnerscully)\}$
1) $(\forall X_1)(\forall Y_1)(le(X_1,Y_1) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, mulder)) \vee (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, scully))$
2) $(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_2,Y_2) \Rightarrow (= (X_2, skinner) \cdots$
3) $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_1,Y_1) \wedge (le(X_2,Y_2) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, mulder)) \vee (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, scully)) \wedge (= (X_2, skinner) \wedge = (Y_2, mulder)) \vee (= (X_2, skinner) \wedge = (Y_2, scully))$
4) $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_1,Y_1) \wedge (le(X_2,Y_2) \Rightarrow = (X_1, skinner) \vee (= (X_1, skinner) \wedge = (X_2, skinner) \vee = (X_2, skinner)$
5) $\cdots le(X_1,Y_1) \wedge le(X_2,Y_2) \wedge (Y_1 Y_2) \Rightarrow \cdots$
6) $(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1,Y) \wedge le(X_2,Y) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \vee = (X_1, skinner) \wedge =$

$(X_2, skinner) \vee = (X2, skinner))$
7) $\cdots \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (X2, skinner))$
8) $\cdots \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (skinner, X2))$
9) $(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y) \Rightarrow = (X_1, X_2))$

Aufgabe 4

Überprüfen bei Existenzqauntor und implikation oder bei allquantor und keine implikation ensteht oft unfug

$(\forall s, w_1, f_1, w_2, f_2)((STUDENT(s, w_1, f_1) \wedge STUDENT(s, w_2, f_2)) \Rightarrow STUDENT(s, w_1, f_2))$

Übung 4

Typ 5: $q_1(\cdots), \cdots, q_n(\cdots)$: $-$. (n ¿ 1) $\rightsquigarrow$ ist ungenaues Wissen, disjunktive Information

Beispiel : BEARB(Black, Einbruch), BEARB(Black, Krycek) :- . ($T_K \rightsquigarrow T'_K$)
¬BEARB(Black, Einbruch). In T_K wahr $\rightsquigarrow T'_K$ inkonsistent.

$\rightsquigarrow$ **notwendig:** Abänderung des Vollständigkeitsaxioms: $\neg BEARB(Black, Einbruch)$ und $\neg BEARB(Black, Krycek)$ dürfen nicht mehr ableitbar sein.

Verändertes Vollständigkeitsaxiom

$$(\forall X)(\forall Y)(BEARB(X, Y) \Rightarrow \tag{7}$$
$$= (X, Scully) \wedge = (Y, Einbruch)) \vee \tag{8}$$
$$= (X, Black) \wedge = (Y, Einbruch)) \vee \tag{9}$$
$$= (X, Black) \wedge = (Y, Krycek)) \vee \tag{10}$$

Füge T'_K das Literal ¬BEARB(Black, Einbruch) hinzu $\Rightarrow$ BEARB(Black, Krycek) ableitbar.

Typ 6:

Beispiel ERM(X, Sonderermittlung), ERM(X, Psychologie) :- AKTE(V,W, Psychologie), BEARBEITER(X,V). Gilt nicht in T_K (s. Scully) $\rightsquigarrow$ Hinzufügen führt zu inkonsistenten Theorie

Streichen von Tupeln als Option, Ergänzung des Vollständigkeitsaxioms:

$$(\forall V)(\forall W)(\forall X)(\forall Y)(ERM(X,Y) \Rightarrow (= (X, Black) \wedge = (Y, Sonderermittlung)) \tag{11}$$

$$\vee \cdots \vee \tag{12}$$

$$\vee (= (Akte(V,W,Psychologie) \wedge BEARBEITET(X,V)) \wedge = (Y, Sonderermittlung)) \tag{13}$$

$$\vee (= (Akte(V,W,Psychologie) \wedge BEARBEITET(X,V)) \wedge = (Y, Psychologie))) \tag{14}$$

A3

a) $(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)(\neg(AKTE(X, offen, Z) \wedge AKTE(X, geloest, Z)))$
b) $(\exists X)(\exists Y)(LTD\_ERMITTLER(X,Y))$.
Versuch: LTD_ERMITTLER(X,Y) :- . // Funktioniert nicht, weil X=Y möglich
c) Typ 4: 2 mal
d) $(\forall E)(AKTE(Krycek, offen, E) \Rightarrow BEARBEITET(Mulder, Krycek))$ (Typ 4)
e) $(\forall N)(\forall A)(ERMITTLER(N,A) \Rightarrow (= (A, Sonderermittlung) \vee (\exists M)(LERM(N,M)) \vee (\exists F)(BEARBEITET(N,F))))$ f) $(\forall N)(\forall F)(BEARR(N,F) \Rightarrow (\exists E)(AKTE(F, offen, E)))$
$(\forall N)(\forall F)(BEARR(N,F) \Rightarrow \neg(\exists E)(AKTE(F, geloest, E)))$

Übung 4/5

Aufgabe 1

a)

$\tau_1(M) = \{x - 1/x \in M, x \neq 1\}$. Fixpunkt: $\emptyset$

b)

Bei Hannes nachsehen

c)

$\tau_3(M) = R \backslash M$
Sei $R = \{1\}, A = \{2\}, B = \{1, 2\}$, also $A \subseteq B$
$\tau_3(A) = \{1\}\tau_3(B) = \emptyset$ also $\tau_3(A) \subseteq \tau_3(B)$
$R = \emptyset \rightsquigarrow \tau_3(\emptyset) = \emptyset \rightsquigarrow \emptyset$ ist Fixpunkt
$R = \emptyset, m \in M \rightsquigarrow m \notin \tau_3(M) \rightsquigarrow \tau_3(M) \neq M$

d)

$tau_4(M) = \{1\} \cup \{2x/x \in M\}$
$A \subseteq B, a \in tau_4(A) \rightsquigarrow a = 1\text{oder}(\exists a' \in M)(a = 2a') \rightsquigarrow (\exists a \in B)(a = 2a') \rightsquigarrow a' \in tau_4(B)$
$\{1\} \cup \{2^i/i \geq 0\} = \{1\} \cup \{2 \cdot 1\} \cup \{2 \cdot 2x/x = 2^i, i \geq 0\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{2x/x = 2^i, i \geq 1\} = \{2x/x = 2^i, i \geq 0\}$

Aufgabe 2

1)

$I_1 \cap I_2$
$r : q(\cdots) : -p_1(\cdots), \cdots, p_m(\cdots) \in P_R$

Fall 1 $p_1(\cdots), \cdots, p_m(\cdots) \in I_1, q(\cdots) \in I_1$
$(\exists p_i(\cdots))(j \in \{1, \cdots, m\} \wedge p_j \notin I_2) \rightsquigarrow I_1 \cap I_2$ erfüllt r, da nicht alle $p_j \in I_1 \cap I_2$

Fall 2 $p_1(\cdots), \cdots, p_m(\cdots), q(\cdots) \in I_1, I_2$
Alles drin, kein Problem

Fall 3 $\{p_{i_1}(\cdots), \cdots, p_{i_k}\} \subseteq \{p_1(\cdots), \cdots, p_m(\cdots\})$ von I_1 erfüllt. $\rightsquigarrow$ höchstens $p_{i_1}(\cdots), \cdots, p_{i_k}$ von $I_1 \cap I_2$ erfüllt $\Rightarrow$ r von $I_1 \cap I_2$ erfüllt.

2)

Gegenbeispiel:
$p(i) : -p(a), p(b).$

$ext_{I_1}(p) = \{p(a)\}, ext_{I_2}(p) = \{p(b)\}, ext_{I_1 \cup I_2}(p) = \{p(a), p(b)\}$
p(c) müsste drin sein, fehlt aber, daher kein Modell.

3)

✓

4)

Gegenbeispiel:
$P = \{p(a)\}$ Belegung ρ, es gilt aber $\emptyset \neq p(a)$. Ein Programm mit einem Fakt drin, führt zu einem nicht leeren Herbrand Universum

5)

Siehe Hannes