

# Deduktive Datenbanksysteme

**Problem:** Transitiver Abschluss ist in PL1 nicht formulierbar (mit zustandsabhängiger Formulierung möglich)

**Diskussion:**

Typ 5:  $q_1(\dots), \dots, q_n(\dots) : -.$

Typ 6:  $q_1(\dots), \dots, q_n(\dots) : -p_1(\dots), \dots, p_m(\dots).$

$\Rightarrow$  Übungsaufgabe

Nur Typ 1 und Typ 4:  $q(\dots) : -p_1(\dots), \dots, p_n(\dots), n \geq 0$  (ist die Hornklauselform und wird bei definiten Datenbanken genutzt)

## Definite Datenbanken

$$\begin{aligned} q(\dots) &: -.\text{(Fakt)} \\ q(\dots) &: -p_1(\dots), \dots, p_n(\dots).\text{(deduktive Regel, } p_{1-n} \text{ Teilziele)} \end{aligned} \quad (1)$$

- Mit IBen (Integritätsbedingungen) (+ Typ2, Typ3) ( $: -p_1(\dots), \dots, p_n(\dots)$ )
- Typ5 + Typ6  $\Rightarrow$  **Disjunktive Datenbank**
- Definite Datenbank + negative Atome im Rumpf von Hornklauseln erlaubt  $\Rightarrow$  Volles Datalog

## Formulierung von Anfragen

Klauseln vom Typ:  $: -p_1(\dots), \dots, p_n(\dots)$ , geschrieben  $? - p_1(\dots), \dots, p_n(\dots)$

Beispiele:

- $? - ag(X, m).$ 
  - Bedeutung: Welche Kurse bietet 'm' an?
  - DRC: (x) / ANGEBOT(X, m)
- $? - ag(a3, m).$ 
  - Bedeutung: Bietet 'm' den Kurs 'a3' an?
  - DRC: () / ANGEBOT(a3, m)
- $? - ag(X, m), bl(X, s, j).$

- Bedeutung: Gib alle von 'm' angebotene Kurse, die 's' als Wiederholer belegt hat
- DRC:  $(x) / \text{ANGEBOT}(x, 'm') \wedge \text{BELEGUNG}(x, 's', 'y')$
- Wie ist  $(x) / \text{ANGEBOT}(x, 'm') \wedge (\exists y) \text{BELEGUNG}(x, 's', y)$  formulierbar?
  - Bedeutung: Gib die Dozenten der von s als Wiederholer belegte Kurse
  - Formulierung:  $? - Ksm(X)$ .  
 $Ksm(X) : -ag(X, m), bl(X, s, y)$
  - Bequemer:  $? - ag(X, Y*), bl(X, s, y)$ ., \* Kennzeichnet die Ausgabevariable

In Anfragesprachen werden Vergleichsausdrücke benötigt. Dazu sind in Datalog spezielle vordefinierte Prädikate vorhanden. Für jeden Vergleichsoperator wird die Existenz eines solchen Prädikates angenommen.

Zunächst: Beschränkte Variablen in Regeln. Sei eine Regel r gegeben:

- Jede Variable, die als Argument in einem gewöhnlichen Prädikat im Rumpf von r vorkommt ist beschränkt.
- Jede Variable, die in einem Teilziel  $X = c$  oder  $c = X$  von r vorkommt, ist beschränkt.
- Eine Variable X ist beschränkt, wenn sie in einem Teilziel  $X = Y$  oder  $Y = X$  von r vorkommt mit Y ist schon als beschränkt bekannt.

### Definition: sicher

Eine Regel heißt sicher, wenn alle in ihr vorkommenden Variablen beschränkt sind.

### Beispiele:

- $Kls(X, Y) : -bl(Z, s, j), ag(Z, Y), X = Z$ . **sicher**
- $vsj(X, Y) : -bl(Y, s, j)$ . **nicht sicher** (X ist nicht beschränkt)
- $vs(X, Y) : -vs(X, Z), kp(Z, Y)$ . **sicher, wenn vs terminiert**
- $kla(Z, Y) : -bl(Z, V, j), ag(Z, Y), V \neq s$ . **sicher**

**Bemerkung:** Falls keine Build-in Prädikate erlaubt sind (/vorkommen):  
 Eine Regel ist sicher genau dann wenn jede Variable im Kopf der Regel auch im Rumpf der Regel vorkommt.

### Definition: Datalog Programm

Ein Datalog-Programm  $P$  (ohne IBen(Integritätsbedingungen)) ist eine endliche Menge von Horn-Klauseln mit Jedes  $d \in P$  ist entweder

- ein Fakt  $q(\dots)$ . ohne Variable
- eine sichere Regel  $q(\dots) : \neg p_1(\dots), \dots, p_n(\dots)$ . mit  $q \in iPraedikat$

Ein  $d \in P$  heißt auch **Datalog-Klausel** Alle Fakten zu extensionalen Prädikaten sind als in DB-Relationen gespeichert zu denken.

**Beispiel** Datenbankzustand:

$$\begin{aligned}
 &ag(a1, m). \\
 &kp(c2, a0). \\
 &\dots \\
 &rb(a1, r1, t1) (Kurs\ a1\ im\ Raum\ r1\ zu\ t1) \\
 &rb(a3, r2, t4)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Angebot:

Kursnummer	Dozent
a1	m
...	...

Kursplan:

Kursnummer	Voraussetzung
c2	a0
...	...

Raumbelegung:

Kursnummer	Raum	Zeit
a1	r1	t1
...	...	...

Belegung:

Kursnummer	Teilnehmer	Wiederholer
a1	s	j
...	...	
	...	

$$vs(X, Y) : \neg Kp(X, Y).$$

$$vs(X, Y) : \neg vs(X, Z), Kp(Z, Y).$$

$$stdpl(W, X, Y, Z) : \neg bl(X, W, V), rb(X, Y, Z).$$

$$ueberschneidungen(X, Y) : \neg Kp(Z, X), Kp(Z, Y), rb(X, V, T), rb(Y, W, T), X \neq Y. \quad (3)$$

## Deklarative Semantik

Extensionale Prädikate eines Programms (ext. Rel, ext. DB): EDB

Intentionale Prädikate eines Programms (int. Rel, int. DB): IDB

**Bedeutung** Bedeutung eines Datalog-Programms P: Menge derjenigen Grundatome zu den intentionalen Prädikaten von P, die logisch aus P gefolgert werden können. (Jedes Modell von P ist auch ein Modell von  $f \in F$ ). Mit Zielklausel  $g(\dots)$ ,  $g \in Praed$ : Aus P logisch folgbare Grundatome zu g, die von  $g(\dots)$  subsummiert

(überdeckt) werden.  $\frac{g(a, X)}{g(a, b)}$   
 $\frac{g(a, X)}{g(a, c)}$

In P werden Werte aus Wertebereichen verwendet, ebenso in Darstellung der extensionalen Prädikate als DB-Relation. Daher können wir  $Kont_A$  und Dom identifizieren. Mithilfe der Herbrand Interpretation kann die Semantik festgelegt werden (ist möglich).

**Herbrand-Interpretation /-Modelle** Gewöhnliche Interpretation:

$$\begin{aligned} Konst_A &= \{a, b\}, Dom = \{\circ, \square\} \\ k(a) &= \circ \\ k(b) &= \square \\ ext(p(\cdot, \cdot)) &= \{(\circ, \square), (\square, \square)\} \end{aligned} \quad (4)$$

eine mögliche Herbrand-Interpretation (passt dazu)

$$\begin{aligned}
 Konst_A &= Dom = \{a, b\} \\
 k(a) &= a \\
 k(b) &= b \\
 ext(p(.,.)) &= \{(a, b), (b, b)\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Entsprechende Herbrand-Interpretation. Betrachte alle Paare zu  $p(.,.)$ , teste gemäß gegebener (gewöhnlicher) Interpretation in  $ext(p(.,.))$ .

$$\begin{aligned}
 Konst_A &= \{a, b\}, Dom = \{\circ, \square\} \\
 k(a) &= \square \\
 k(b) &= \square \\
 ext(p(.,.)) &= \{(\circ, \square), (\square, \square)\}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$(a, a)$  wird zu  $(\square, \square) \in ext(p(.,.))$

Herbrand-Interpretation

$$\begin{aligned}
 Konst_A &= Dom = \{a, b\} \\
 k(a) &= a \\
 k(b) &= b \\
 ext(p(.,.)) &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Bei beiden Interpretationen sind die gleichen Formeln gültig bei Beschränkung auf quantorenfreie Formeln ohne Variablen (und ohne Funktionen).

**Beispiel** Erste Interpretation:  $p(a, b) \wedge p(b, a) \Rightarrow (\square, \square) \in ext(p(.,.)) \wedge \dots$  bzw.  $(a, b) \in ext(p(.,.)) \wedge (b, a) \in ext(p(.,.))$

Menge von Konstanten und Prädikatsymbolen ist endlich, daher ist die Anzahl der möglichen Herbrand-Interpretationen endlich.

### Satz von Gödel / Skolem (Herbrand, 1930)

Eine Klauselmengen  $P$  hat ein Modell genau dann wenn  $P$  hat ein Herbrand-Modell. Daraus folgt, dass ein Verfahren analog zu Wahrheitstabellen in der Aussagenlogik möglich ist.

**Beispiel**  $F = \{p(a) \Rightarrow q(b), p(a) \wedge q(b)\}, q(b)?$

p	q	$p(a) \Rightarrow q(b)$ erfüllt?	$p(a) \wedge q(b)$ erfüllt?	$p(a) \Rightarrow q(b)$ und $p(a) \wedge q(b)$ erfüllt?
$\{\}$	$\{\}$	✓	-	-
$\{\}$	$\{a\}$	✓	-	-
$\{\}$	$\{b\}$	✓	✓	✓
$\{\}$	$\{a, b\}$	✓	✓	✓
$\{a\}$	$\{\}$	-	✓	-
...	...	...	...	....
$\{b\}$	$\{b\}$	✓	✓	✓

Jedes Modell von F ist auch ein Modell von  $q(b)$ , d.h.  $q(b)$  kann aus F logisch gefolgert werden. Gilt bei Klauselmengen, aber **Vorsicht bei allgemeinen Formeln**.

**Beispiel:**  $\{p(a), (\exists X)(\neg p(X))\}$  Formelmenge, keine Klauselmenge

Modell (vgl. Übung):

$$\begin{aligned} Dom &= \{0, 1\} \\ k(a) &= 0 \\ ext(p(.)) &= \{(0)\} \end{aligned} \tag{8}$$

**Aber:** Es gibt kein durch **ext** bestimmtes Herbrand-Modell:

1.  $ext(p(.)) = \{(a)\}, Konst = Dom = \{a\}$
2.  $ext(p(.)) = \{\}$

Herbrand-Modell muss genügend viele Elemente enthalten, damit der Satz von Gödel / Skolem gelten kann. **Skolemisierung** bedeutet, dass man alle Existenzquantoren durch Funktionen ersetzt:

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(\exists y)(F) \rightsquigarrow (\forall x_1, \dots, x_n)(F[f(x_1, \dots, x_n)/y]) \tag{9}$$

### Bemerkung: Skolemisierung

Jede Formel der PL1 Logik kann man in einer erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform umformen:

1. Pränexnormalform

2. Umformungen à la  $(\forall x_1, \dots, x_n)(\exists y)(F) \rightsquigarrow (\forall x_1, \dots, x_n)(F[f(x_1, \dots, x_n)/y])$   
mit jeweils einem neuen Funktionssymbol

Dies ist eine Art “Materialisierung” der durch den Existenzquantor gebundenen Variablen.

**Beispiel (von oben)**  $\{p(a), \neg p(y)^1\}$  erfüllbar  $\iff \{p(a), (\exists X)(\neg p(X))\}$  erfüllbar

**Vorsicht:** Semantische Äquivalenz von Formeln und ihren Skolem-Normalformen im Allgemeinen nicht gegeben.

Skolem-NF:  $(\exists X)(p(X)) : p(a)$  Interpretation I mit

$$\begin{aligned} Dom &= \{1, 2\} \\ k(a) &= 1 \\ ext(p(.)) &= \{(2)\} \end{aligned} \tag{10}$$

$\rightsquigarrow \models_I (\exists X)(p(X))$  Belegung von X mit allen Elementen aus Dom, d.h. auch mit 2.  
Aber  $\not\models_I p(a)$ , da  $(1) \notin ext(p(.))$ .

### Im Kontext von Datalog

- Herbrand-Universum: Konst
- Herbrand-Basis (HB): Menge aller Grundatome  
( $\rightsquigarrow EDB^2, IDB^3$  (Fakten in der Datenbank und solche die Ableitbar sind)  $\subset HB$ )
- Herbrand-Interpretation: (Konst, id, ext), d.h. jedes Konstantensymbol wird als es selbst interpretiert. (Verglichen mit relationaler Interpretation, dort  $k$  ist Bijektion)
- Jede Herbrand-Interpretation ist eindeutig bestimmt durch  $ext$  (Extension, Ausprägung), da Konst und id unveränderlich sind
- Jedes Prädikat ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Grundatome, für die es “wahr” liefert.
- extentional: genaue Antwort in Tupel
- intentional: Beispielsweise Formeln als Antworten

---

<sup>1</sup>neue Variable

<sup>2</sup>gegeben durch Datenbankzustand

<sup>3</sup>muss ausgerechnet / gefolgert werden

**Definition: Herbrand-Interpretation**

Einfache Definition: Eine Herbrand-Interpretation ist eine Teilmenge der Herbrand-Basis.

**Beispiel Kursverwaltung**

$$\begin{aligned} \text{Aus DB-Rel. KURSPLAN} &\rightsquigarrow kp \in ePräd \\ vs(X, Y) : -kp(X, Y) &\rightsquigarrow vs \in iPräd \end{aligned} \quad (11)$$

**Gesucht:** Durch Programm P bestimmte Grundatome (Fakten).

**Definition: Grundatom**

Ein Grundatom  $f$  ist eine logische folgerung einer Menge  $D$  von Datalog Klauseln (z.B.  $D \models f$ )  $\diamond_{Def}$ . Jedes Herbrand Modell von  $D$  ist auch ein Modell von  $f$ .

Da  $f$  ein Grundatom ist gilt  $D \models f \implies f$  ist in jedem Herbrand-Modell von  $D$  enthalten. Das heißt  $f \in \bigcap \{I \mid I \text{ Herbrand-Modell von } D\}$ .

Sei  $f \in \bigcap \{I \mid I \text{ Herbrand-Modell von } D\}$ , dann ist  $f$  ein Grundatom und jedes Modell von  $D$  auch in Modell von  $f$ .

**Definition: Menge aller Konsequenzen**

$$cons(D) =_{def} \{f \in HB_D \mid D \models f\}$$

**Satz 1.1**

$$cons(D) = \bigcap \{I \mid I \text{ Herbrand-Modell von } D\}$$

Aufgrund der Eigenschaften unserer Regel ist der Schnitt /  $cons(D)$  ein Modell, dies gilt es zu beweisen:

Da  $cons(D) \subseteq HB_D$ , ist  $cons(D)$  eine Herbrand-Interpretation.

**Satz 1.2**

$cons(D)$  ist ein Herbrand-Modell von  $D$ .



**Beweis**

**z.Z.** Jedes  $d \in D$  ist gültig in dieser Interpretation, also  $cons(D) \models_{cons(D)} d$ .

**Beweis** Falls  $d$  ein Grundatom ist gehört  $d$  zu jedem Herbrandmodell von  $D$ , daraus folgt  $d \in cons(D)$ .

Sei  $d$  eine Regel  $q(\dots) : -p_1(\dots), \dots, p_m(\dots)$ . Sei  $\varrho$  eine Belegung für die Variable von  $d$ . *Annahme:*  $(\forall 1 \leq i \leq m)(\|p_i(\cdot)\|^{\varrho} \in cons(D))$ , sonst  $d$  gültig unter  $cons(D)$ . Für jedes Herbrand-Modell  $I$  von  $D$  gilt, dann  $\|p_i(\cdot)\|^{\varrho} \in I, i = 1, \dots, m$  und damit  $\|q(\cdot)\|^{\varrho} \in cons(D)$ , da  $d$  eine Horn-Klausel ist. (Der Schluss ist z.B. für  $d = q_1(\dots), q_2(\dots) : -p_1(\dots), \dots, p_n(\dots)$  nicht möglich.)

Damit  $D \models_{cons(D)} \|q(\dots)\|^{\varrho} \in cons(D)$ . Wir erhalten, dass  $cons(D)$  ein Herbrand-Modell von  $D$  ist. Da  $d$  beliebig gewählt wird folgt der Satz.

$cons(D)$  ist offensichtlich eindeutig bestimmt und das kleinste Herbrand-Modell von  $D$ . Damit: Semantik eines Datalog-Programms  $P$  ist gegeben durch das kleinste Herbrand-Modell von  $P$  oder (äquivalent) durch  $cons(P) = \{f \in HB_P \mid O \models f\}$ .

**Beispiel**  $r \in ePräd, p, q \in iPräd, Konst = \{1, 2, 3\}$ .

**Fakten:**

$$\begin{aligned} & r(1). \\ & p(X) : -q(X). \\ & q(X) : -r(X). \end{aligned} \tag{12}$$

**Herbrand-Modelle:**

$$\begin{aligned} & \{r(1), p(1), q(1)\} \\ & \{r(1), p(1), q(1), q(2), p(2)\} \\ & \{r(1), p(1), q(1), q(2), p(2), p(3)\} \end{aligned} \tag{13}$$

**Fixpunkt-Semantik**

Deklarative Semantik liefert keinen brauchbaren Algorithmus. Die Fixpunkt-Semantik führt direkt zu einem Algorithmus für die schrittweise Berechnung des kleinsten Herbrand-Modells.

$$\begin{aligned}
c &\in ac \\
\tau(c) &\subseteq \tau(ac) \\
\tau(c) &= c! \\
\tau(c) &= ac
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
c &\in bc \\
\tau(c) &\subseteq \tau(bc) \\
\tau(c) &= c! \\
\tau(c) &= bc
\end{aligned} \tag{15}$$

Dies ist ein Widerspruch

**P Datalog-Programm**  $\tau_P$  liefert Fakten von P vereinigt mit Fakten, die in einem Schritt aus der Argumentenmenge von  $\tau_P$  mit den Regeln von P abgeleitet werden können.

## Ableitung in einem Schritt

### Definition: Substitution

Eine Substitution ist eine endliche Menge der Form

$$\{X_1/t_1, \dots, X_n/t_n\}, X_1, \dots, X_n \text{ unterschiedliche Variablen, } t_1, \dots, t_n \text{ Terme, } X_i \neq t_i \tag{16}$$

Falls alle  $t_i$  Konstanten ist dies eine **Grundsubstitution**.

Sei  $\theta$  eine Substitution,  $t$  ein Term (Variable oder Konstante), so gilt

$$t\theta =_{def} \begin{cases} t_i, & \text{falls } t/t_i \in \theta \\ t, & \text{sonst} \end{cases} \tag{17}$$

Sei  $L$  ein Literal,  $L\theta$  bezeichnet dasjenige Literal, das aus  $L$  entsteht, indem alle Variablen  $X_i$  mit  $t_i$  für die  $X_i/t_i \in \theta$  gilt, simultan durch  $t_i$  ersetzt werden. Analog  $d\theta$  für eine Datalog-Klausel  $d$ .

**Beispiel**

$$L = p(X, Y, a), \theta = \{X/a, Y/X\} L\theta = p(a, X, a) \quad (18)$$

Sei D eine Menge von Datalog Klauseln. In einem Schritt aus D ableitbare Menge von Fakten:

$$fakt_1(D) = \{f \in HB_D | (\exists Regel L_0 : -L_1, \dots, L_n) (\exists Sicht \theta) (\{L_1\theta, \dots, L_n\theta\} \subseteq D \wedge f = L_0\theta)\} \quad (19)$$

(Annahme: built-in Prädikate geeignet berücksichtigt  $\Rightarrow$  Algorithmus FAKT\_1)

Definiere  $\tau_P | 2^{HB} \Rightarrow 2^{HB}$ .  $\tau_P(I) =_{def} P_F \cup fakt_1(P_R \cup I)$ .  $P_f$  = Menge der Fakten von P.  $P_P$  Menge von Regeln von P.

**Satz 1.3**

Für jedes Datalog-Programm P ist  $\tau_P$  eine monotone Transformation auf  $(2^{HB}, \subseteq)$ .

**Beweis**

Seien  $I_1, I_2 \in HB_P$  mit  $I_1 \subseteq I_2$ . z.Z.:  $\tau_P(I_1) \subseteq \tau_P(I_2)$ .

Sei  $f \in \tau_P(I_1)$ . Falls  $f \in P_F$ , dann gilt auf  $f \in \tau_P(I_2)$ .  $f \in fakt_1(P_R \cup I_1)$  da  $I_1 \subseteq I_2$ , gilt  $P_R \cup I_1 \subseteq P_R \cup I_2$  und somit  $f \in fakt_1(P_R \cup I_2)$  wg. Monotonie von Fakt\_1 auf  $(2^{HB}, \subseteq)$ .

**Beispiel**

$$\begin{aligned} P &= p(1) \\ &= p(2). \\ &= r(1). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} q(X) &: -s(X), r(X). \\ s(X) &: -p(X). \end{aligned}$$

$$\leadsto_{\tau_P} T_P(\emptyset)$$

$$\begin{aligned} p_1 \\ p_2 \\ r_1 \end{aligned} \quad (21)$$

$\leadsto_{T_P}(\dots)$ 

$$\begin{array}{l}
 p_1 \\
 p_2 \\
 r_1 \\
 s(1)(\text{fakt\_1}) \\
 s(2)(\text{fakt\_1})
 \end{array} \tag{22}$$

 $\leadsto_{T_P}(\dots)$ 

$$\begin{array}{l}
 p_1 \\
 p_2 \\
 r_1 \\
 s(1) \\
 s(2) \\
 q(1)(\text{fakt\_1})
 \end{array} \tag{23}$$

## Satz 1.4

Für jedes Datalog-Programm  $P$  gilt  $\text{cons}(P) = \text{lf}_p(\tau_P)$  (lf = least fixpunkt).

## Beweis

:

1)  $\text{cons}(P)$  ist ein Fixpunkt von  $\tau_P$ .

$\tau_P(\text{cons}(P)) = P_F \cup \text{fakt\_1}(P_R \cup \text{cons}(P))$ .  $\text{cons}(P)$  ist kleinstes Herbrand-Modell von  $P$ , d.h. alle Regeln sind gültig unter  $\text{cons}(P) \Rightarrow \text{fakt\_1}(P_R \cup \text{cons}(P)) = \text{cons}(P) \setminus P_F$ . (und kein Fakt kann aus  $\text{cons}(P)$  entfernt werden, ohne dass die Modelliereigenschaft verloren geht.)  $\Rightarrow \tau_P(\text{cons}(P)) = P_F \cup \text{cons}(P) \setminus P_F = \text{cons}(P)$

2)  $\text{cons}(P)$  ist minimaler Fixpunkt von  $\tau_P$ . Annahme:  $(\exists I \subseteq \text{cons}(P))(\tau_P(I) = I)$ .  $\text{cons}(P)$  ist minimales Herbrand-Modell  $\Rightarrow I$  ist kein Herbrand-Modell. Da  $P_F \subseteq I$  wg. Annahme  $\tau_P(I) = I$  folgt mindestens eine Regel ist nicht erfüllt, d.h.  $(\exists h_0, \cdot, h_n \in P_R)(\exists \text{Substitution } \theta)(\{h_1\theta, \dots, L_n(\theta)\} \subseteq I \wedge L_1\theta \notin I)$ . Aber

$L_0 \in \text{fakt}_1(P_R \cup I)$  nach Definitio von fakt\_1. Da auch  $L_0\theta \in P_F$  wegen  $P_F \subseteq I$ , folgt  $\tau_P(I) \neq I$ . Nach Fixpunkttheorem (Kuaster / Tarski) ist minimaler Fixpunkt von  $\tau_P$  kleinster Fixpunkt von  $\tau_P$ .

## Vorgehensweise bei Fixpunktberechnung

bottom-up

### Bezeichnung: Forward-chaining

Da “ $\Leftarrow$ ” die natürliche Richtung für die Anwendung von Regeln ist. Da Regeln sicher sind ist  $L_i\theta$  stets ein Fakt  $\theta_i$ . Betrachte Eignung der Methode zur Anfrageauswertung, z.B. ?- vs(c4, y). “Alle Kurse, die Voraussetzung von Kurs c4 sind”

**Ineffizient** Berechnung des  $lf_p$  und anschließende Suche zu vs(c4, y) passende Fakten  $\Rightarrow$  Vermeide möglichst Berechnung nicht relevanter Fakten (später).

Starte mit Zielklausel, Suche ein Regel die zu einem Atom der Klausel passt. Ersetze das Atom durch angepassten Rumpf der gewählten Regel, neue Anfrage, iterieren.

### Bezeichnung: Backward-chaining

#### Beispiel

$$\begin{aligned} P &= p(1) \\ &= p(2). \\ &= r(1). \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} q(X) &: \neg s(X), r(X). \\ s(X) &: \neg p(X). \end{aligned}$$

## Prozedurale Semantik

Beweistheoretische Sicht, übertragen auf Datalog Programm P aufgefasst als Theorie 1. Stufe

Semantik:  $\{f \in HB_P \mid P \vdash f\}$

Wie können Ableitungen (Beweise) von Fakten systematisch durchgeführt werden?

Regeln:

$$\begin{aligned}
 (1) & \text{ } vs(X, Y) : \neg Kp(X, Y). \\
 (2) & \text{ } vs(X, Y) : \neg vs(X, Z), kp(Z, Y). \\
 & P = \{Kp(c4, a3), \dots, kp(c2, a0), (1), (2)\}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Zeige  $P \vdash vs(c4, a0)$ .

$$\begin{aligned}
 (1) & = (\forall X)(\forall Y)(kp(X, Y) \Rightarrow vs(X, Y)) \\
 (2) & = (\forall x)(\forall Y)(\forall Z)(vs(X, Z) \wedge kp(Z, Y) \Rightarrow vs(X, Y))
 \end{aligned} \tag{26}$$

## Beweis

### Idee

- Erzeuge alle Beweismuster (Suchbäume)
- Suche Belegungen für die Variable, so dass alle Blätter zu Fakten aus P werden
- jede solche Belegung erzeugt einen Beweisbaum.

**Zunächst** Suche nach “passenden” Köpfen von Regeln erfordert Definition.

### Definition: Unifizierbar

Seien  $L_1$  und  $L_2$  heißen **unifizierbar**, wenn  $(\exists \text{ Substitution } \Theta)(L_1\Theta = L_2\Theta)$ .  $\Theta$  heißt dann **Unifikator**.

**Beispiel**  $L_1 = vs(X, Z)$

$L_2 = cs(X, Y)$

$\Theta = \{Z/Y\}$  und  $\Theta = \{Y/Z\}$  sind Unifikatoren von dem Paar  $L_1, L_2$ , aber auch  $\Theta = \{X/a, Y/a, Z/a\}$ . Die ersten beiden sind spezifischer als das letzte

$L_1 = q(X, Y, c)L_2 = q(W, b, Z)$  Unifikation z.B.:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1 & = \{X/WY/bZ/c\} \\
 \Theta_2 & = \{X/T, W/T, y/b, Z/c\} \\
 \Theta_3 & = \{X/a, W/a, Y/b, Z/c\}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Nicht unifizierbar:  $L_1 = q(X, c, U)L_2 = q(W, G, Z)$  oder  $L_1 = q(X, a, X)L_2 = q(b, Y, Y)$

### Definition: Komposition

Sei  $\Theta = \{X_1/t_1, \dots, X_n/t_n\}, \varsigma = \{Y_1/n_1, \dots, Y_m/t_m\}$  Substitutionen.  
Die Komposition  $\Theta\varsigma$  von  $\Theta$  und  $\varsigma$  erhält man aus

$$X_1/t_1\varsigma, \dots, X_m/t_m\varsigma, Y_1/n_q, \dots, Y_m/n_m \quad (28)$$

Durch Streichen von Elementedn der Form  $Z/Z$  sowie  $Y_i/n_i$  mit  $Y_i = X_j$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$

**Beispiel**  $\theta = \{X/a, Y/W\}\varsigma = \{X/bmY/V, W/Z\}$   
 $\Theta\varsigma = \{X/a, YZ, W/Z\}$

### Definition: allgemeinere Substitution

Seien  $\Theta, \varsigma$  Substitutionen,  $\Theta$  heißt allgemeiner als  $\varsigma \diamond (\exists \text{Substitution } \delta)(\Theta\delta = \varsigma)$ .  
Seine  $L_1, L_2$  Literale. Ein allgemeinsten Unifikator (mgu) von  $L_1 \text{ in } L_2$  ist ein Unifikator von  $L_1 \text{ und } L_2$ , der allgemeiner als alle anderen Unifikatoren ist.

**Beispiel**  $\Theta_2$  ist allgemeiner als  $\Theta_3$ ; betrachte  $\delta = \{T/a\}$ , es gilt  $\Theta_2\delta = \Theta_3$ .  
 $\Theta_1$  ist allgemeiner als  $\Theta_2, \delta = \{W/T\}$ . mgu ist i.A. nicht eindeutig bestimmt.  
 $L_1 = p(X, X)L_2 = p(V, W)$  mgu:

$$\begin{aligned} &\{X/W, V/W\} \\ &\{X/V, W/V\} \\ &\{V/X, W/X\} \end{aligned} \quad (29)$$

**Beispiel**  $L_1 = q(X, Y, c)^4 L_2 = q(W, b, Z)^5$

### Suchbaum

(Beweismuster zu einem Programm P)

---

<sup>4</sup>t1, t2, t3  
<sup>5</sup>k1 k2 k3

- Wurzel ist mit einem "Ziel"  $g = p(t_1, \dots, t_n), p \in iPr \dots ad$ , bekannt.
- Knoten entlang eines Pfades von der Wurzel aus sind abwechselnd mit Atome und Regeln benannt. (Ziel-, Regelknoten)
- Alle Blattknoten sind mit Atomen benannt
- Sei  $k$  ein mit einem Atom  $a(s_1, \dots, s_l)$  benannter Knoten (keine Blattknoten), dann ist der unmittelbare Nachfolger von  $k$  mit einer Regel von  $P$  benannt, deren Kopf mit  $q(s_1, \dots, s_l)$  unifizierbar ist
- sei  $k'$  ein mit einer Regel  $r = L_0 : -L_1, \dots, L_m$  benannter Knoten der unmittelbare Vorgänger von  $k'$  sei mit  $q(s_1, \dots, s_l)$  benannt. Dann hat  $k'$   $m$  unmittelbare Nachfolger, die mit  $I_1 mgu(q(s_1, \dots, s_l), I_0), \dots, I_m mgu(q(s_1, \dots, s_l), I_0)$  benannt sind. Dabei sind  $I_0, \dots, I_m$  Atome, die aus  $L_1, \dots, L_m$  durch eventuelle Umbenennung von Variablen hervorgehen (die Variablen seien stets so umbenannt, dass sie im Baum eindeutig sind).

## Beispiel

### Suchbaum $\rightarrow$ Beweisbaum

Gegeben Sei der Suchbaum  $S$  und eine Grundsubstitution  $\Theta$  mit folgenden Eigenschaften:

- $\Theta$  ordnet jeder Variable in  $S$  ein Konstantensymbol aus der Menge der in  $P$  vorkommenden Konstantensymbole zu.
- Für jedes Blatt von  $S$  gilt, dass  $\Theta$ , angewandt auf die Benennung des Blattes, einen Fakt aus  $P_F$  liefert (build-in-Prädikate seien entsprechend berücksichtigt)

**Beweisbaum**  $B$  entsteht aus  $S$  durch Anwendung von  $\Theta$  auf alle Benennungen von Zielknoten.  $B$  repräsentiert einen Beweis für  $g\Theta$ ,  $g$  benennung der Wurzel von  $S$ .

### Beispiel:

$$\Theta = \{X/c4, Y/a0, Zc2, Z'/a3\} \quad (30)$$

$$kp(c4, a3), kp(a3, c2), kp(c2, a0) \text{ Fakten} \quad (31)$$

$$(32)$$



**Bezeichnung** : Voller Beweisbaum

### Systematische Erzeugung der Suchbäume

Sukzessive alle Bäume der Tiefe 1,2, ... Erzeugen (breadth first)

**Definition: Tiefe eines Baums** maximale Anzahl von Zielknoten auf einem Pfad von einem Blattknoten zur Wurzel. Entsprechend Knoten der Tiefe  $i$ , Ebene  $i$  eines Baumes. Zusätzlich: Spezielle Suchbäume (Tiefe 0) für Fakten aus  $P$ .

**Beispiel** : Ziel  $g = vs(c4, y)$

- **Tiefe 1:**  $vs(c4, y)$ ,  $\Theta$ , kein Beweisbaum
- **Tiefe 2:**  $vs(c4, y)$   
 $kp(c4, y)$ ,  $\{y/a3\}$

### Offensichtlich

- Zu jedem endlichen Beweise, der mit Grundatomen “Startet”, kann ein entsprechender Beweisbaum auf den beschriebenen Weg erhalten werden.
- Zu jedem Fakt  $f \in cons(P)$  gibt es einen endlichen Beweis, der mit Grundatomen startet, siehe Fixpunktberechnung  $\rightarrow$  voller Beweisbaum

$\Rightarrow$  Methode Suchbaum / Beweisbaum ist vollständig.

Da ein Beweisbaum mit  $g\Theta$  als Benennung der Wurzel einen Beweis für  $g\Theta$  darstellt

$\Rightarrow$  Methode Suchbaum / Beweisbaum ist korrekt.

### Satz 1.5

Sei  $P$  ein Datalog-Programm. Die Suchbaum / Beweisbaum Methode, angewand auf alle Ziele  $q(X_1, \dots, X_{Stelligkeit(q)})$ ,  $q$  intentionales Prädikatesymbol von  $P$ , liefert  $cons(P)$  als Ergebnis

**Frage:** Abbruchkriterium bei der Erzeugung von Suchbäumen

Es gilt

- Beweisbäume sind isomorph zu den Suchbäumen, aus denen sie erzeugt wurden
- Zu jedem Fakt  $f \in cons(P)$  gibt es einen vollen Beweisbaum, in dem auf jeder Zielknotenebene ein neuer Fakt (neues Teilziel) auftritt

**Beweis** Sei B ein voller Beweisbaum, der diese Eigenschaft nicht erfüllt. Dann gibt es ein  $i$ , so dass in B auf Ebene  $i$  nur Fakten auftreten, die schon auf vorhergehenden Ebenen auftreten. Die Teilbäume von B mit Wurzel auf Ebene  $i$  können “höher gehängt” werden  $\Rightarrow$  Es gibt einen äquivalenten, vollen Beweisbaum mit geringerer Tiefe.

- Es gibt nur endlich viele verschiedene Grundatome, die aus den Prädikaten und Konstantensymbolen gebildet werden können. Konkret: Seien  $ap(p)$  die Anzahl verschiedener Prädikatensymbole die in  $p$  vorkommen
- $ak(p)$  die Anzahl verschiedener Konstantensymbole, die in  $P$  vorkommen

Dann ist  $max.fakt(P) = ap(P) * ak(P)^{max.st(P)}$  eine obere Schranke für die Anzahl verschiedener Grundatome. **Damit:**

### Satz 1.6

Die Suchbaum / Beweisbaum Methode bleibt vollständig für ein Programm  $P$ , wenn nur Bäume mit max. Tiefe  $max.fakt(P)$  betrachtet werden. Statt breadth first andere Vorgehensweise denkbar:

- Depth first mit Abbruch bei  $max.fakt(P)$  und backtracking
- Dynamische Abbruchbedingungen, abhängig von erzeugten Faktenmenge (limit 10)
- Erkennen und Ausnutzen identischer (Teil-) Zielknoten ( $\leadsto$  gerichteter, azyklischer Graph)

Zusammenfassen von Such und Beweisbäumen, Berücksichtigung von Fakten aus  $P_F \Rightarrow$  frühzeitiges Erkennen von Suchbäumen zu denen keine Beweisbäume existieren

Sei  $g$  das Ziel (Wurzelbenennung), dann erzeugt ein Baum der mit der leeren Menge endet, genau ein Ergebnis.

$g\Theta_1, \dots, \Theta_n, (\Theta_1, \dots, \Theta_n$  die in dieser Reihenfolge angewandten Unifikatoren (von der Wurzel aus)  
(33)

$\Theta = \Theta_1, \dots, \theta_n$  heißt Antwortsubstitution.  
(34)