

## Übung 3

### Aufgabe 1

$T_1 : T_0 +$  Abschlussaxiom für Wertebereich + Gleichheitsaxiome

a)

$/lnot = (a1, c4)$

Gib Interpretation I an, die Modell von  $T_1$  ist, aber nicht von  $\neg = (a1, c4) \leadsto \neg = (a1, c4)$  nicht ableitbar (Satz von Gödel).

I.  $Dom = Konst_A$  als Beispiel, ext wie angegeben ext(=) wie üblich.  $K :$

$Konst_A \Rightarrow Dom$  mit  $k(c) = \begin{cases} a1, & \text{wenn } c = c4 \\ c, & \text{sonst} \end{cases}$ .

Nach Konstruktion gilt:

- $T_0$  erfüllt
- Gleichheitsaxiom erfüllt, insbesondere  $= (a1, c4)$ , da  $k(c4) = a1$
- Abschlussaxiom erfüllt

Aber

$$\begin{aligned} & \not\models_I \neg = (a1, c4) \\ & \Diamond nicht \models_i \neg = (a1, c4) \\ & \Diamond nichtnicht \models_i = (a1, c4) \\ & \Diamond \models_i = (a1, c4) \end{aligned} \tag{1}$$

b)

$\neg do(a0)$

I. Dom wie oben,  $k = \text{id}$ ,  $\text{ext}(do) = \{m, q, d, a0\}$

I erfüllt  $T_2$ , Gleichheits, Abschluss und Eindeutigkeitsaxiome

Aber

$$\begin{aligned}
 & \not\models_I \neg do(a0) \\
 & \Diamond \text{nicht} \models_I \neg do(a0) \\
 & \Diamond \text{nichtnicht} \models_I do(a0) \\
 & \Diamond \models_I do(a0) \\
 & ||a0||_I^\rho = (a0) \in \text{ext}(do)
 \end{aligned} \tag{2}$$

## Aufgabe 2

$f_1$  : Sei  $\rho$  eine Belegung mit  $\rho(X) = \text{einbruch}$ ,  $\rho(Z) = \text{pathologie}$ . Dann gilt  $(\rho(X), \text{offen}, \rho(Z)) \in \text{ext}(\text{akte})$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 & \models_{I,\rho} \text{akte}(X, \text{offen}, Z) \\
 & \text{nichtnicht} \models_{I,\rho} \text{akte}(X, \text{offen}, Z) \\
 & \text{nicht} \models_{I,\rho} \neg \text{akte}(X, \text{offen}, Z) \\
 & \text{nicht} \models_{I,\rho} (\forall Z)(\neg \text{akte}(X, \text{offen}, Z)) \\
 & \models_{I,\rho} \neg (\forall Z)(\neg \text{akte}(X, \text{offen}, Z)) \\
 & \models_{I,\rho} (\exists Z)(\text{akte}(X, \text{offen}, Z)) \\
 & \models_{I,\rho} (\exists X)(\exists Z)(\text{akte}(x, \text{offen}, Z))
 \end{aligned} \tag{3}$$

analog mit X

$f_2$  : Sei  $f' := le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y)$ .

Sei  $f'' = (X_1, X_2)$

Sei  $\rho$  eine Belegung.

**1.Fall**

$$\begin{aligned}
 & \rho(X_1) = \rho(X_2) \\
 & \models_{I,\rho} f'_2 \\
 & \models_{I,\rho} \neg f'_2 \vee f''_2 \\
 & \models_{I,\rho} f'_2 \Rightarrow f''_2 \\
 & (\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y) \Rightarrow (X_1, X_2))
 \end{aligned} \tag{4}$$

**2. Fall**  $\rho(X_1) = \rho(X_2)$

Es gilt:  $ext(le) = \{(skinner, mulder), (skinner, scully)\}$

Mit  $\rho(X_1) = \rho(X_2)$  folgt:

$$\begin{aligned}
 & nicht(X_1, Y) \in ext(le) \vee nicht(X_2, Y) \in ext(le) \\
 & nicht((X_1, Y) \in ext(le) \wedge (X_2, Y) \in ext(le)) \\
 & nicht \models_{I,\rho} f'_2 \\
 & \models_{I,\rho} \neg f'_2 \\
 & \models_{I,\rho} \neg f'_2 \vee f''_2 \\
 & \models_{I,\rho} \neg(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y) \Rightarrow (X_1, X_2))
 \end{aligned} \tag{5}$$

### Aufgabe 3

$f_1$ :

$$\begin{aligned}
 & \vdash akte(krycek, of fen, psychologie)^1 \\
 & \vdash (\exists Z)(akte(krycek, of fen, Z)) \\
 & \vdash (\exists X)(\exists Z)(akte(X, of fen, Z))
 \end{aligned} \tag{6}$$

$f_2$ : Es sei  $K_{le} = \{(skinner, mulder), (skinner, scully)\}$

- 1)  $(\forall X_1)(\forall Y_1)(le(X_1, Y_1) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, mulder)) \vee (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, scully)))$
- 2)  $(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_2, Y_2) \Rightarrow (= (X_2, skinner) \dots$
- 3)  $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_1, Y_1) \wedge le(X_2, Y_2) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, mulder)) \vee (= (X_1, skinner) \wedge = (Y_1, scully)) \wedge (= (X_2, skinner) \wedge = (Y_2, mulder)) \vee (= (X_2, skinner) \wedge = (Y_2, scully)))$
- 4)  $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall X_2)(\forall Y_2)(le(X_1, Y_1) \wedge le(X_2, Y_2) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \vee (= (X_1, skinner) \wedge = (X_2, skinner) \vee = (X_2, skinner)))$
- 5)  $\dots le(X_1, Y_1) \wedge le(X_2, Y_2) \wedge (Y_1 Y_2) \Rightarrow \dots$
- 6)  $(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y) \Rightarrow (= (X_1, skinner) \vee = (X_1, skinner) \wedge =$

- $(X_2, skinner) \vee = (X_2, skinner)$   
7)  $\dots \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (X_2, skinner))$   
8)  $\dots \Rightarrow (= (X_1, skinner) \wedge = (skinner, X_2))$   
9)  $(\forall X_1)(\forall X_2)(\forall Y)(le(X_1, Y) \wedge le(X_2, Y) \Rightarrow = (X_1, X_2))$

## Aufgabe 4

Überprüfen bei Existenzquantor und Implikation oder bei Allquantor und keine Implikation entsteht oft unfug

$$(\forall s, w_1, f_1, w_2, f_2)((STUDENT(s, w_1, f_1) \wedge STUDENT(s, w_2, f_2)) \Rightarrow STUDENT(s, w_1, f_2))$$

## Übung 4

**Typ 5:**  $q_1(\dots), \dots, q_n(\dots) : - . (n \geq 1) \rightsquigarrow$  ist ungenaues Wissen, disjunktive Information

**Beispiel** :  $BEARB(\text{Black}, \text{Einbruch}), BEARB(\text{Black}, \text{Krycek}) :- . (T_K \rightsquigarrow T'_K)$   
 $\neg BEARB(\text{Black}, \text{Einbruch})$ . In  $T_K$  wahr  $\rightsquigarrow T'_K$  inkonsistent.

$\rightsquigarrow$  **notwendig:** Abänderung des Vollständigkeitsaxioms:  $\neg BEARB(\text{Black}, \text{Einbruch})$  und  $\neg BEARB(\text{Black}, \text{Krycek})$  dürfen nicht mehr ableitbar sein.

## Verändertes Vollständigkeitsaxiom

$$(\forall X)(\forall Y)(BEARB(X, Y) \Rightarrow \quad (7)$$

$$= (X, \text{Scully}) \wedge = (Y, \text{Einbruch})) \vee \quad (8)$$

$$= (X, \text{Black}) \wedge = (Y, \text{Einbruch})) \vee \quad (9)$$

$$= (X, \text{Black}) \wedge = (Y, \text{Krycek})) \vee \quad (10)$$

Füge  $T'_K$  das Literal  $\neg BEARB(\text{Black}, \text{Einbruch})$  hinzu  $\Rightarrow BEARB(\text{Black}, \text{Krycek})$  ableitbar.

**Typ 6:**

**Beispiel**  $ERM(X, \text{Sonderermittlung}), ERM(X, \text{Psychologie}) :- AKTE(V, W, \text{Psychologie}), BEARBEITET(X, V)$ . Gilt nicht in  $T_K$  (s. Scully)  $\leadsto$  Hinzufügen führt zu inkonsistenten Theorie

Streichen von Tupeln als Option, Ergänzung des Vollständigkeitsaxioms:

$$(\forall V)(\forall W)(\forall X)(\forall Y)(ERM(X, Y) \Rightarrow (= (X, \text{Black}) \wedge = (Y, \text{Sonderermittlung}))) \quad (11)$$

$$\vee \dots \vee \quad (12)$$

$$\vee (= (Akte(V, W, \text{Psychologie}) \wedge BEARBEITET(X, V)) \wedge = (Y, \text{Sonderermittlung})) \quad (13)$$

$$\vee (= (Akte(V, W, \text{Psychologie}) \wedge BEARBEITET(X, V)) \wedge = (Y, \text{Psychologie})) \quad (14)$$

## A3

a)  $(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)(\neg(AKTE(X, \text{offen}, Z) \wedge AKTE(X, \text{geloest}, Z)))$

b)  $(\exists X)(\exists Y)(LTD\_ERMITTLER(X, Y))$ .

Versuch:  $LTD\_ERMITTLER(X, Y) :- .$  // Funktioniert nicht, weil  $X=Y$  möglich

c) Typ 4: 2 mal

d)  $(\forall E)(AKTE(Krycek, \text{offen}, E) \Rightarrow BEARBEITET(Mulder, Krycek))$  (Typ 4)

e)  $(\forall N)(\forall A)(ERMITTLER(N, A) \Rightarrow (= (A, \text{Sonderermittlung}) \vee (\exists M)(LERM(N, M)) \vee (\exists F)(BEARBEITET(N, F))))$  f)  $(\forall N)(\forall F)(BEARR(N, F) \Rightarrow (\exists E)(AKTE(F, \text{offen}, E)))$   
 $(\forall N)(\forall F)(BEARR(N, F) \Rightarrow \neg(\exists E)(AKTE(F, \text{geloest}, E)))$

## Übung 4/5

### Aufgabe 1

a)

$\tau_1(M) = \{x - 1/x \in M, x \neq 1\}$ . Fixpunkt:  $\emptyset$

b)

Bei Hannes nachsehen

c)

$$\tau_3(M) = R \setminus M$$

Sei  $R = \{1\}$ ,  $A = \{2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , also  $A \subseteq B$

$$\tau_3(A) = \{1\} \tau_3(B) = \emptyset \text{ also } \tau_3(A) \subseteq \tau_3(B)$$

$R = \emptyset \rightsquigarrow \tau_3(\emptyset) = \emptyset \rightsquigarrow \emptyset$  ist Fixpunkt

$$R = \emptyset, m \in M \rightsquigarrow m \notin \tau_3(M) \rightsquigarrow \tau_3(M) \neq M$$

d)

$$\tau_{\omega_4}(M) = \{1\} \cup \{2x/x \in M\}$$

$A \subseteq B, a \in \tau_{\omega_4}(A) \rightsquigarrow a = 1 \text{ oder } (\exists a' \in M)(a = 2a') \rightsquigarrow (\exists a \in B)(a = 2a') \rightsquigarrow a' \in \tau_{\omega_4}(B)$

$$\{1\} \cup \{2^i/i \geq 0\} = \{1\} \cup \{2 \cdot 1\} \cup \{2 \cdot 2x/x = 2^i, i \geq 0\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{2x/x = 2^i, i \geq 1\} = \{2x/x = 2^i, i \geq 0\}$$

## Aufgabe 2

1)

$$I_1 \cap I_2$$

$$r : q(\dots) : \neg p_1(\dots), \dots, p_m(\dots) \in P_R$$

**Fall 1**  $p_1(\dots), \dots, p_m(\dots) \in I_1, q(\dots) \in I_1$

$(\exists p_i(\dots))(j \in \{1, \dots, m\} \wedge p_j \notin I_2) \rightsquigarrow I_1 \cap I_2$  erfüllt r, da nicht alle  $p_j \in I_1 \cap I_2$

**Fall 2**  $p_1(\dots), \dots, p_m(\dots), q(\dots) \in I_1, I_2$

Alles drin, kein Problem

**Fall 3**  $\{p_{i_1}(\dots), \dots, p_{i_k}\} \subseteq \{p_1(\dots), \dots, p_m(\dots)\}$  von  $I_1$  erfüllt.  $\rightsquigarrow$  höchstens  $p_{i_1}(\dots), \dots, p_{i_k}$  von  $I_1 \cap I_2$  erfüllt  $\Rightarrow$  r von  $I_1 \cap I_2$  erfüllt.

2)

Gegenbeispiel:

$$p(i) : \neg p(a), p(b).$$

$ext_{I_1}(p) = \{p(a)\}, ext_{I_2}(p) = \{p(b)\}, ext_{I_1 \cup I_2}(p) = \{p(a), p(b)\}$

$p(c)$  müsste drin sein, fehlt aber, daher kein Modell.

3)

✓

4)

Gegenbeispiel:

$P = \{p(a)\}$  Belegung  $\rho$ , es gilt aber  $\emptyset \neq p(a)$ . Ein Programm mit einem Fakt drin, führt zu einem nicht leeren Herbrand Universum

5)

Siehe Hannes