Entscheidung - WS 2013/2014

Quantitative Business and Economic Research Institute
Prof. Dr. Alexander Klos
alexander.klos@qber.uni-kiel.de

Lernziele und Gliederung

- Lernziele
  - Kurze Einführung in die Grundlagen rationalen Entscheidens **mit Fokus auf der Anwendung von Entscheidungskalkülen**
  - Darstellung grundlegende Vorgehensweise bei
    - Entscheidungen bei Zielkonflikt
      - Z. B. Gehaltsmaximierung versus Freizeit bei Jobwahl
    - Entscheidungen bei Risiko und einem Ziel
      - Z. B. Soll ein Privatanleger in Aktien oder Renten anlegen?
      - Grundbegriffe der *Erwartungsnutzentheorie*
  - Viel mehr Details, Hintergründe und Erweiterungen: Bachelorwahlveranstaltung „Rationales Entscheiden" im Sommer
- (Fein-)Gliederung
  - 2.1 Vorbemerkungen
  - 2.2 Visualisierung von Entscheidungsproblemen
  - 2.3 Entscheidung bei Sicherheit und mehreren Zielen
  - 2.4 Entscheidung bei Risiko und einem Ziel

Ansätze in der Entscheidungstheorie

Präskriptive Entscheidungstheorie

- Unterstützung bei komplizierten Entscheidungen
- Relevante Fragen
  - Wie sollten Sie sich korrekt verhalten?
  - Wie kann man Menschen helfen, so dass sie sich korrekt verhalten?

Deskriptive Entscheidungstheorie

- Beschreibung und Erklärung des tatsächlichen Entscheidungsverhalten
- Relevante Fragen
  - Wie verhalten sich Entscheider tatsächlich?
  - Warum verhalten Sie sich so?
- Erkenntnisse der deskriptiven Entscheidungsforschung bereichern oft präskriptive Verfahren

Einige Klassifikationen von Entscheidungsproblemen

- Nach dem Zeitbezug
  - Statisch (einstufig) oder dynamisch (mehrstufig)
- Nach der Ereignissicherheit
  - Sicherheit (Kapitel 2.3)
    - Alle Konsequenzen mit Sicherheit bekannt
  - Risiko/Unsicherheit (Kapitel 2.4)
    - Subjektive Wahrscheinlichkeiten bekannt
- Nach der Anzahl der Ziele
  - Ein Ziel (Kapitel 2.4)
  - Mehrere Ziel (Kapitel 2.3)
- Nach der Anzahl der Entscheidungsträger
  - Individualentscheidungen (Kapitel 2)
  - Gruppenentscheidungen
    - Kooperative
    - Nicht-Kooperative (Kapitel 4 und 5)

Grundprinzip: Dekomposition

- Zerlegung des Problems in Komponenten, die einzeln und für sich modelliert werden
  1. Handlungsalternativen
  2. Ziele und Präferenzen
  3. Erwartungen über Umwelteinflüsse
  4. Konsequenzen (Kombination von Alternativen und Umwelteinflüssen)

- Einfaches Beispiel: Würfelspiel, bei einer Sechs 6 Euro Gewinn, sonst ein Euro Verlust
  1. „Spielen“ oder „Nicht-Spielen“
  2. Geld und Spaß
  3. Jeder Zahl des Würfels erscheint mit Wahrscheinlichkeit 1/6
  4. „Nicht-Spielen“: Kein Spaß, keine Vermögensänderung
     „Spielen“: Spaß und Freude über 6 Euro mit Wahrscheinlichkeit 1/6
     Spaß und Ärger über 1 Euro Verlust mit Wahr. 5/6

Einige Begrifflichkeiten zu Präferenzen

- *Präferenzen* sind Einstellungen des Entscheiders zu Handlungsalternativen bzw. zu deren Konsequenzen
  - *Risikopräferenzen* sind Einstellungen zum Risiko von Handlungsalternativen (siehe insbesondere Kap. 2.4)
  - *Zeitpräferenzen* sind Einstellungen zum zeitlichen Anfall von Konsequenzen (siehe Wahlveranstaltung „Rationales Entscheiden“)
- *Attribut* (auch Eigenschaft/Zielgröße/Zielvariable) misst relevante Konsequenzen einer Eigenschaft (z. B. IQ, wenn ein Stellenbewerber besonders intelligent sein soll)
- *Attributausprägung* entspricht einem konkreten Wert (z. B. 117)
- *Zielkonflikt* besteht, wenn es keine Alternative gibt, die hinsichtlich jedes Attributs besser oder nicht schlechter ist
- Präferenzen werden mit Funktionen beschrieben
  - *Wertfunktion*: Entscheidungen unter Sicherheit
  - *Nutzenfunktion*: Entscheidungen unter Unsicherheit

Visualisierung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit – Entscheidungsmatrix

- A: Menge der Handlungsalternativen
  - Zeilen der Matrix sind Alternativen
- S: Menge der möglich, sich ausschließenden Umweltzustände
  - Spalten der Matrix sind Ereignisse/Zustände
- Zusammentreffen einer jeden Alternative $a \in A$ und eines jeden Zustands $s \in S$ führt zu eindeutiger Konsequenz

	s_1	…	s_i	…	s_n
	$p(s_1)$	…	$p(s_i)$	…	$p(s_n)$
a	$a_{11}, \ldots, a_{1m}$	…	$a_{i1}, \ldots, a_{im}$	…	$a_{n1}, \ldots, a_{nm}$
b	$b_{11}, \ldots, b_{1m}$	…	$b_{i1}, \ldots, b_{im}$	…	$b_{n1}, \ldots, b_{nm}$
c	$c_{11}, \ldots, c_{1m}$	…	$c_{i1}, \ldots, c_{im}$	…	$c_{n1}, \ldots, c_{nm}$

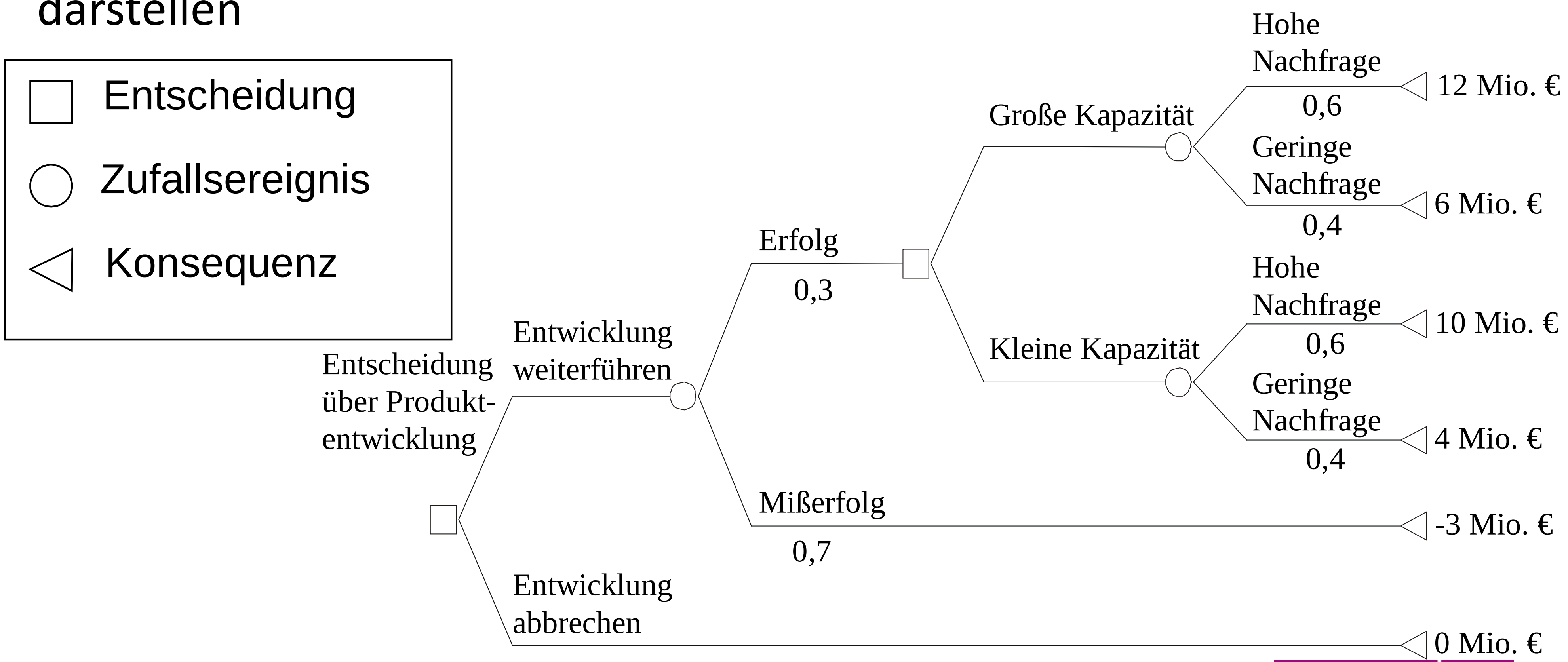
Visualisierung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit – Entscheidungsmatrix

- Beispiel: Forschungs- und Entwicklungsentscheidung
- Ziele sind möglichst hoher Cash-Flow und Anzahl der Patente

	Zustand s_1	Zustand s_2	Zustand s_3
	$p(s_1)$= 20%	$p(s_2)$= 45%	$p(s_3)$= 35%
Alternative a	$a(s_1)$= (1 Mio €, 2 Patente)	$a(s_2)$= (3 Mio €, 8 Patente)	$a(s_3)$= (-2,0 Mio €, 0 Patente)
Alternative b	$b(s_1)$= (6 Mio €, 1 Patent)	$b(s_2)$= (2 Mio €, 5 Patente)	$b(s_3)$= (-1 Mio €, 1 Patent)
Alternative c	$c(s_1)$= (2 Mio €, 3 Patente)	$c(s_2)$= (8 Mio €, 0 Patente)	$c(s_3)$= (-8,0 Mio €, 3 Patente)
Alternative d	$d(s_1)$= (1 Mio €, 3 Patente)	$d(s_2)$= (6 Mio €, 1 Patent)	$d(s_3)$= (-2 Mio €, 2 Patente)

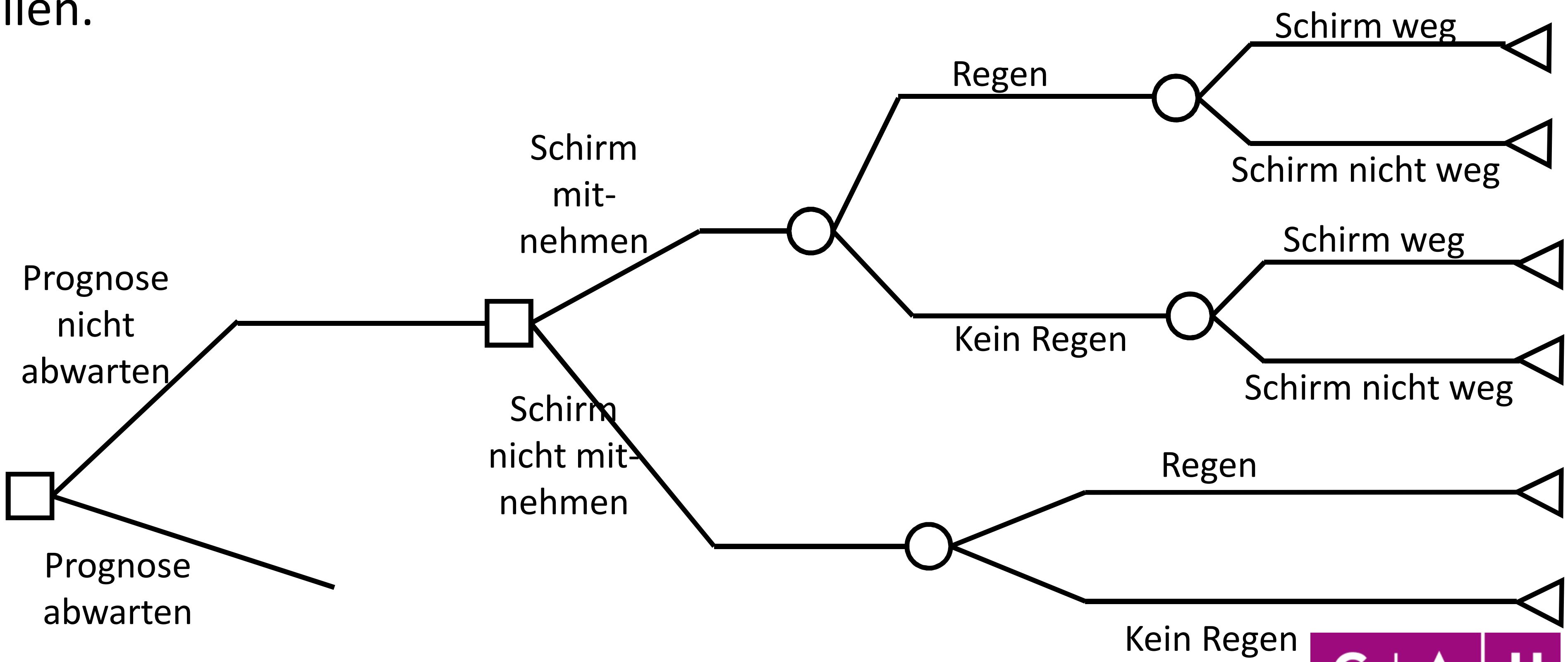
Visualisierung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit – Entscheidungsbaum

- Eignet sich gut für die Darstellung mehrstufiger Entscheidungen
- *Strategie:* Mehrstufige Alternative oder Folge von bedingten Entscheidungen
- *Szenario:* Aus Einzeleinflüssen zusammengesetzte Ereignisse/Zustände
- Alle Strategien und Szenarien lassen sich in einem Entscheidungsbaum darstellen

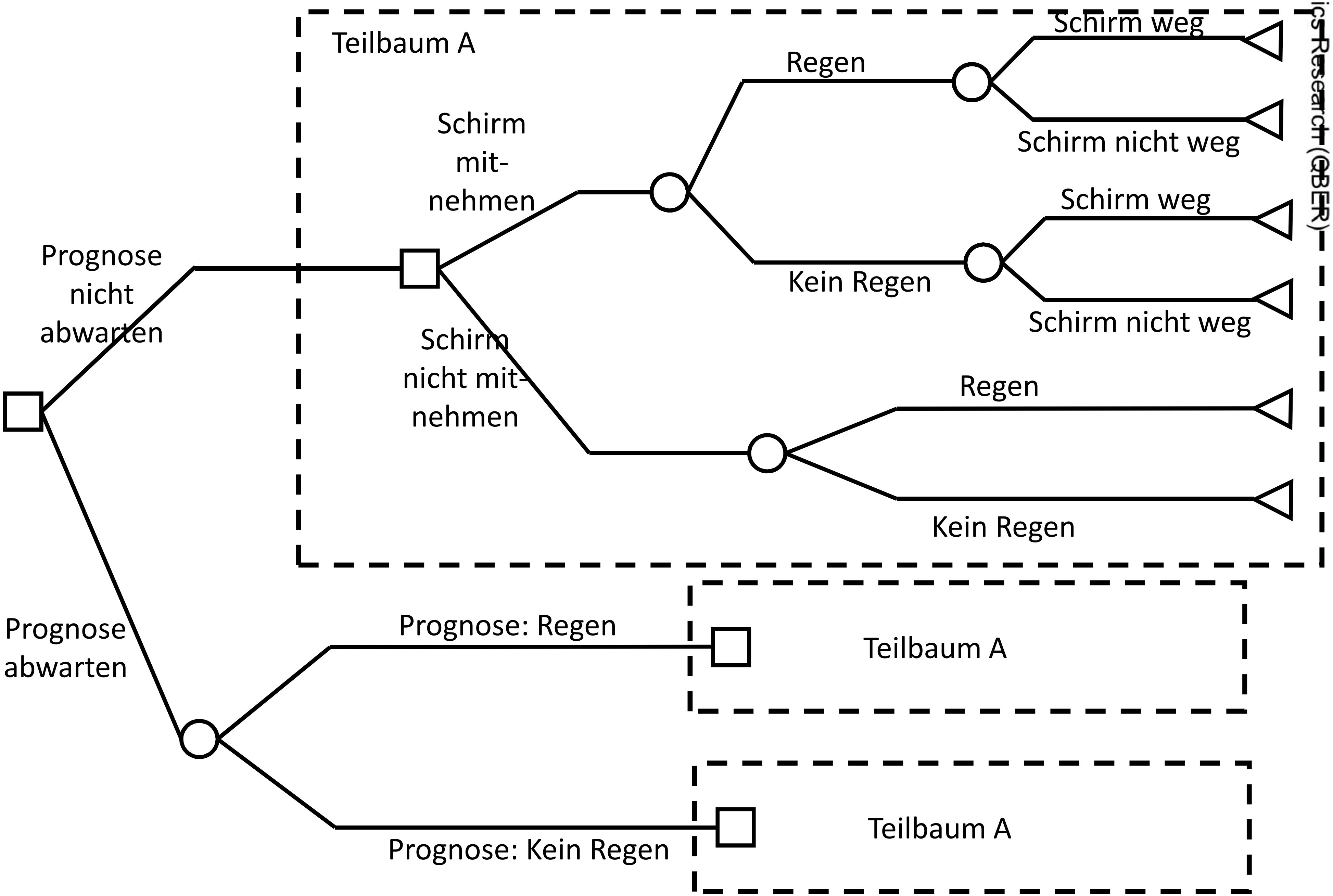


Entscheidungsbaum – Beispiel

Sie wollen einen Stadtbummel machen und überlegen sich, ob Sie einen Regenschirm mitnehmen oder nicht. Falls es regnet und Sie keinen Regenschirm haben, müssen Sie Ihre Kleidung in die Reinigung geben. Andererseits hassen Sie es, einen Schirm zu tragen, und vergessen Schirme häufig in einem Laden. Da gleich im Radio die Wettervorhersage ansteht, überlegen Sie sich, ob Sie noch die Wetterprognose abwarten sollen.



Entscheidungsbaum – Beispiel

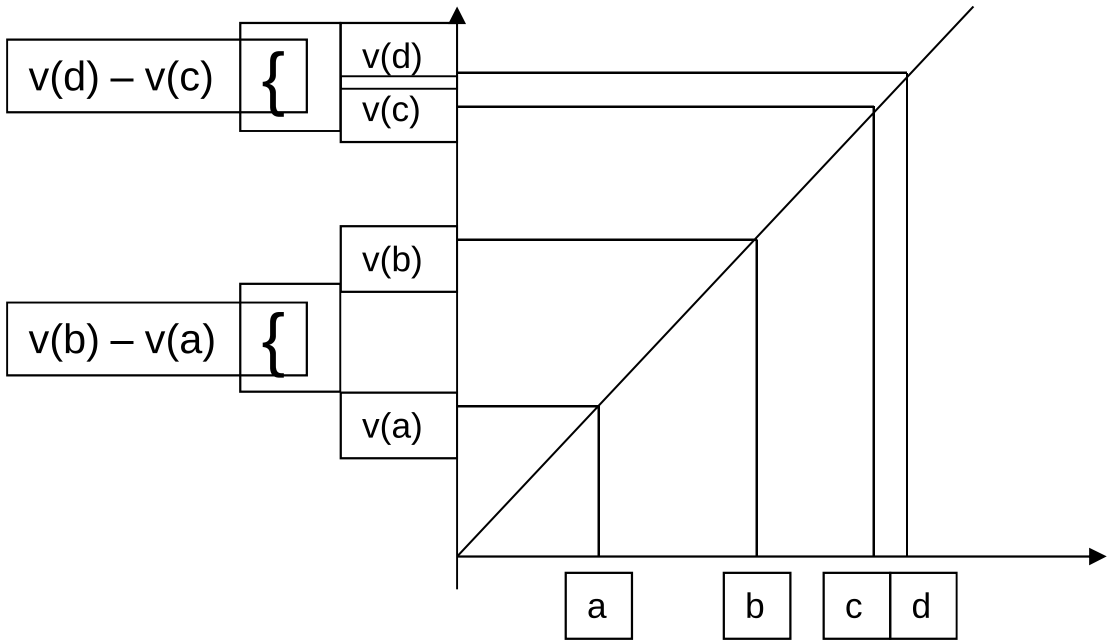


Vorbemerkungen und Begrifflichkeiten

- Gehen wir zunächst von einem Ziel aus
- Ein Entscheider besitzt eine *Präferenz* zwischen zwei Alternativen a, b $\in$ A, wenn er entweder
  - a gegenüber b bevorzugt (a $\succ$ b) oder
  - b gegenüber a bevorzugt (b $\succ$ a) oder
  - wenn er indifferent zwischen a und b ist (a ~ b)
- Eine Präferenz ist *vollständig*, wenn der Entscheider für jedes beliebige Alternativenpaar eine Präferenz besitzt
- Für eine *transitive* Präferenz gilt: Aus $a \succ b$ und $b \succ c$ folgt $a \succ c$
- Eine *Wertfunktion* v ist eine Funktion, die jeder Alternative a eine reelle Zahl derart zuordnet, dass der Wert einer Alternative a genau dann größer als der Wert einer Alternative b ist, falls der Entscheider a gegenüber b präferiert:
  - $v(a) > v(b) \Leftrightarrow a \succ b$
  - a, b $\in$ A (analog für ~, $\prec$)

Messbare Wertfunktionen

- *Messbare Wertfunktionen* erlauben auch die Abbildung der Stärke einer Präferenz
- Eine messbare Wertfunktion *v* muss zusätzlich zu dem Erfordernis in der Definition der ordinalen Wertfunktion die Eigenschaft haben, dass der Übergang von Alternative *a* nach *b* genau dann gegenüber dem Übergang von Alternative *c* nach *d* präferiert wird, wenn die Differenz der Werte von *b* und von *a* größer als die Differenz der Werte von *d* und von *c* ist:
  - $v(b) - v(a) > v(d) - v(c)$
    $\Leftrightarrow \ (a \rightarrow b) \succ (c \rightarrow d)$
  - mit $a, b, c, d \in A$
    (analog für $\sim, \prec$)



Multiattributive Wertfunktionen

- Eine multiattributive Wertfunktion ordnet jeder Alternative einen Wert in Abhängigkeit von ihren Attributsausprägungen zu
- Beispiel:

Alternative	Gehalt	Arbeitszeit
(a) Beratungsfirma	80.000 €	60 Stunden
(b) Universität	50.000 €	40 Stunden
(c) Segellehrer	30.000 €	20 Stunden

- Gesucht ist eine Funktion v, für die gilt:

$$v(a) > v(b) \Leftrightarrow a \succ \mathrm{b}$$

- Eine einfache Lösung wäre eine additive multiattributive Wertfunktion, also

$$v(a) = \sum_{r=1}^{m} w_r v_r(a_r) \qquad \text{mit} \qquad \sum_{r=1}^{m} w_r = 1$$

- w_r: Zielgewichte; a_r: Attributsausprägung bei Alt. a;
  $v_r(a_r)$: Wert der Attributsausprägung

Multiattributive Wertfunktionen: Beispiel

Alternative	Gehalt x_1	Wert von Gehalt $v_1(x_1)$	Arbeitszeit x_2	Wert von Arbeitszeit $v_2(x_2)$
(a) Beratung	80.000 €	1,0	60 Stunden	0,0
(b) Universität	50.000 €	0,6	40 Stunden	0,5
(c) Segellehrer	30.000 €	0,0	20 Stunden	1,0

Mit den Zielgewichten w_1=0,6 und w_2=0,4:

Alternative	Wert von Gehalt $v_1(x_1)$	Gewichteter Wert von Gehalt $w_1v_1(x_1)$	Wert von Arbeitszeit $v_2(x_2)$	Gewichteter Wert von Arbeitszeit $w_2v_2(x_2)$	Gesamtwert $w_1v_1(x_1) + w_2v_2(x_2)$
(a) Beratung	1,0	0,60	0,0	0,00	0,60
(b) Universität	0,6	0,36	0,5	0,20	0,56
(c) Segellehrer	0,0	0,00	1,0	0,40	0,40

Multiattributive Wertfunktionen: Klausur WS 11/12, 2. Termin, Aufgabe 4

In einem Entscheidungsproblem bei Mehrfachzielen (unter Sicherheit) stehen drei Alternativen a, b und c zur Verfügung. Der Entscheider hält drei Ziele für relevant; die Voraussetzungen für die Anwendung des additiven Modells sind erfüllt, d. h. dass die Alternativen mit einer additiven multiattributiven Wertfunktion bewertet werden können. Der nachfolgenden Tabelle können Sie die bereits bewerteten Konsequenzen der drei Alternativen entnehmen:

	Ziel 1	Ziel 2	Ziel 3
Alternative a	1	0	1
Alternative b	0,2	0,75	0,25
Alternative c	0	1	0

a.) Ermitteln Sie jeweils konkrete Gewichte (w_1, w_2, w_3) mit $w_i \geq 0\ \forall i$ und $\Sigma w_i = 1$, so dass Alternative a für den Entscheider optimal ist.

Alternative a: $(w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 0)$

$= (0, 0, 1)$

$= (1/3, 1/3, 1/3)$

Multiattributive Wertfunktionen: Klausur WS 11/12, 2. Termin, Aufgabe 4

	Ziel 1	Ziel 2	Ziel 3
Alternative a	1	0	1
Alternative b	0,2	0,75	0,25
Alternative c	0	1	0

b.) Ermitteln Sie jeweils konkrete Gewichte (w_1, w_2, w_3) mit $w_i \geq 0\ \forall i$ und $\Sigma w_i = 1$, so dass der Entscheider zwischen sämtlichen drei Alternativen indifferent ist.

In Abhängigkeit des Gewichtsvektors (w_1, w_2, w_3) ergeben sich die Alternativenbewertungen zu:

$v(a) = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot 1 = w_1 + w_3;$

$v(b) = w_1 \cdot 0{,}2 + w_2 \cdot 0{,}75 + w_3 \cdot 0{,}25;$

$v(c) = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 0 = w_2.$

Der gesuchte Gewichtsvektor muss das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$v(a) = v(b) \Leftrightarrow w_1 + w_3 = w_1 \cdot 0{,}2 + w_2 \cdot 0{,}75 + w_3 \cdot 0{,}25;$

$v(a) = v(c) \Leftrightarrow w_1 + w_3 = w_2;$

$w_1 + w_2 + w_3 = 1.$

Lösen dieses LGS führt zu dem gesuchten Vektor: (w_1, w_2, w_3) = (0, ½, ½).

Sensitivitätsanalysen

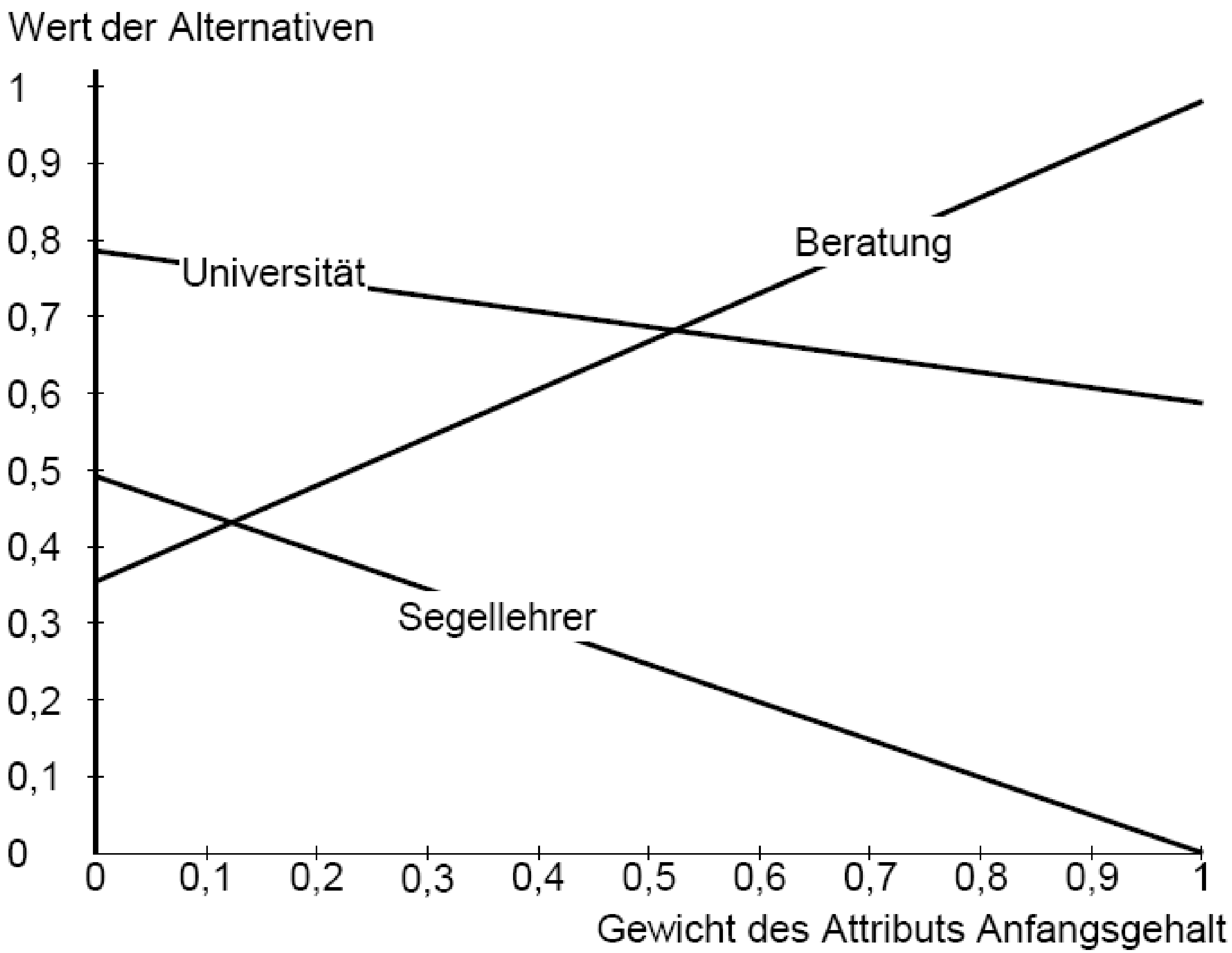
- Wie nehmen hier an, dass es im Beispiel von Folie 14 noch ein drittes Attribut „Urlaubstage" gibt und dass die optimalen Gewichte w_1=0,40 w_2=0,28 und w_3=0,32 anhand einer Befragung bestimmt wurden
- Man sollte sich fragen, wie „sicher" man sich der Entscheidung sein kann
  - Würde beispielsweise eine kleine Veränderung des Zielgewichts für das Attribut Anfangsgehalt die Entscheidung verändern?
- Hierbei ist zu beachten, dass bei einer Variation von w_1 sich die Summe der Entscheidungsgewichte (w_1+w_2+w_3=1) nicht ändern soll
- Eine mögliche Annahme ist, dass das Verhältnis zwischen w_2 und w_3 bei Variation von w_1 konstant bleiben soll, also

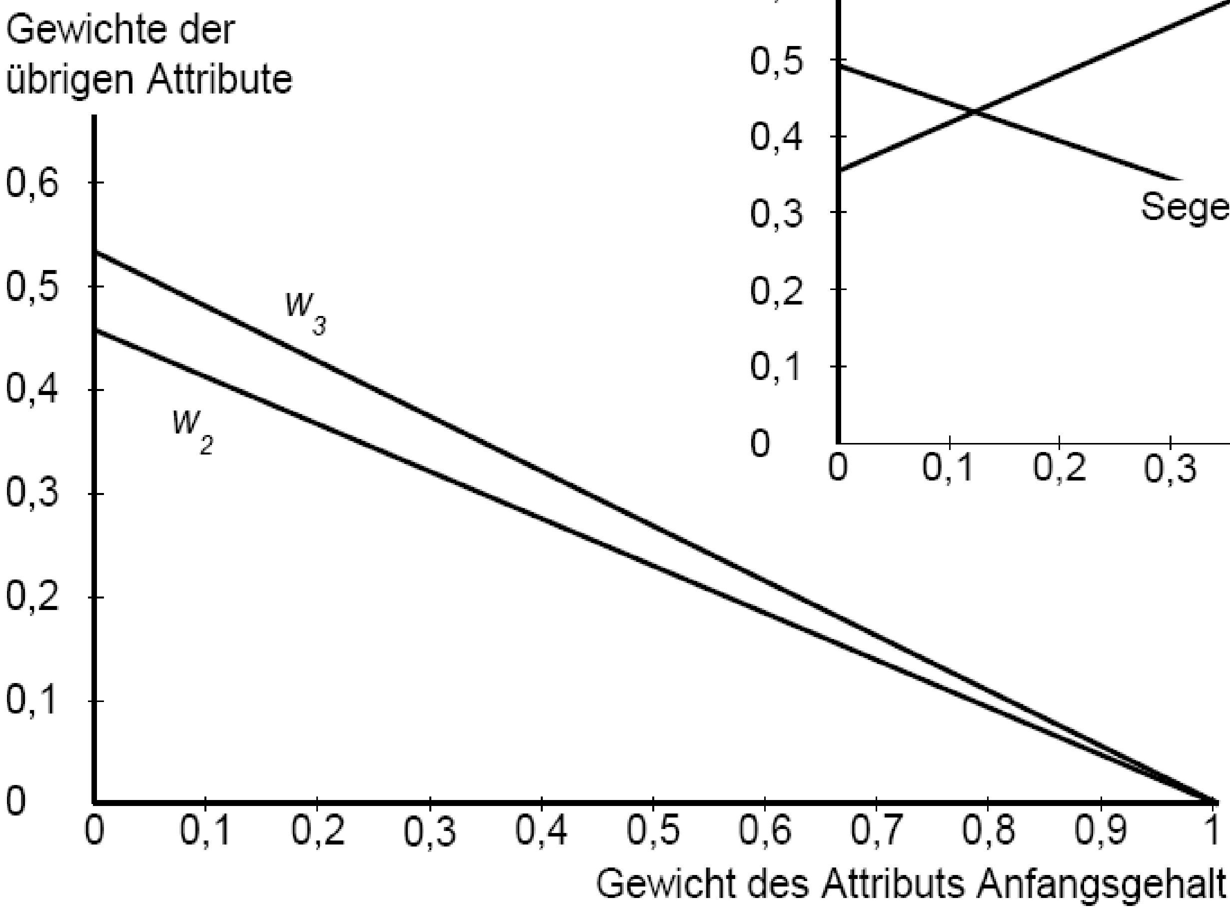
$$w_1 \in [0;1]$$

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{0,28}{0,32}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

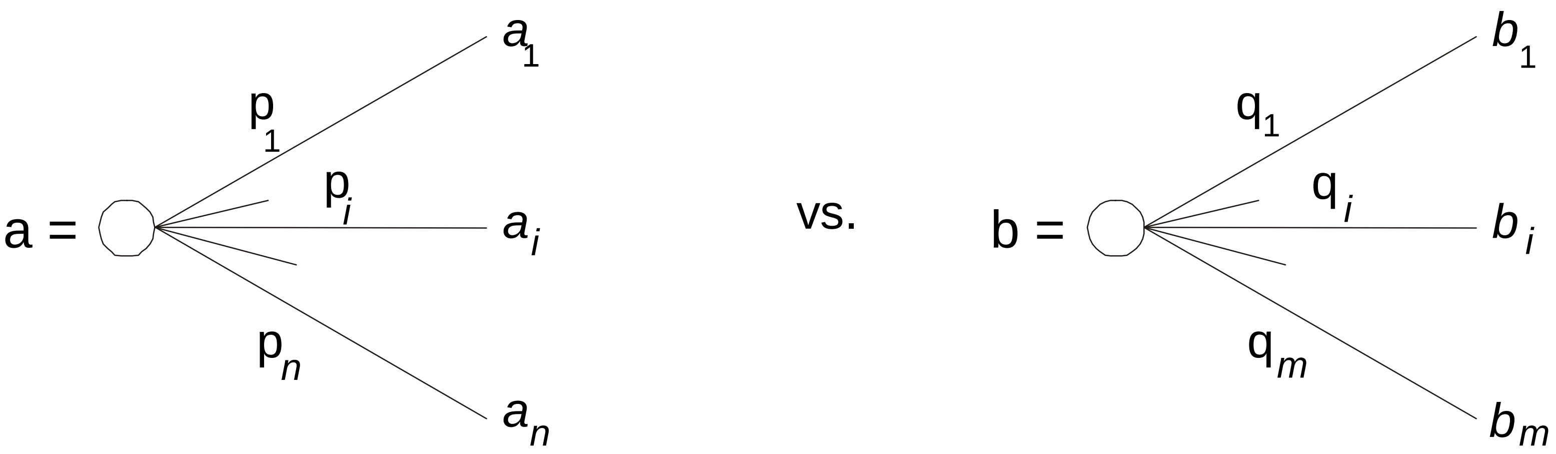
Sensitivitätsanalysen – Grafische Darstellung





Ausgangspunkt

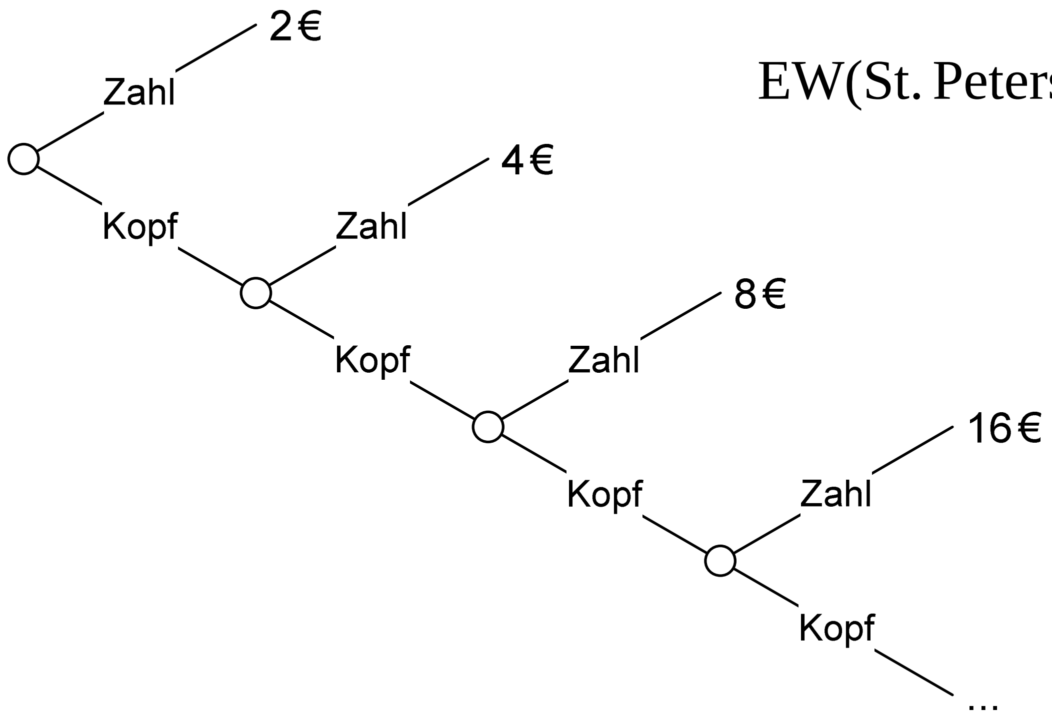
- Bewertung von *riskanten* Alternativen



$(a_1, p_1; \dots ; a_n, p_n)$ $(b_1, q_1; \dots ; b_m, q_m)$

- Präferenz muss offensichtlich von Wahrscheinlichkeiten (Risiko) und Konsequenzen (Wert der Lotterie) abhängen
- Gesucht ist ein Präferenzfunktional, das der am stärksten präferierten Alternative den höchsten Wert zuweist

Warum wird nicht einfach der Erwartungswert betrachtet? – St-Petersburger Spiel



$$\text{EW(St. Petersburger Spiel)} = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot 2^i \text{ Euro}$$

$$= \text{unendlich.}$$

- Auch nach längerem Nachdenken hält es niemand für rational, für die Teilnahme an diesem Spiel eine Million oder mehr zu zahlen
- Im Folgenden wollen wir Anforderungen an das rationalen Entscheiden unter Risiko stellen und daraus das Entscheidungskalkül ableiten

Erwartungsnutzentheorie

Bei Akzeptanz bestimmter Axiome (Anforderungen an „vernünftiges Verhalten“) muss ein rationaler Entscheider die (Erwartungs-)nutzentheorie anwenden

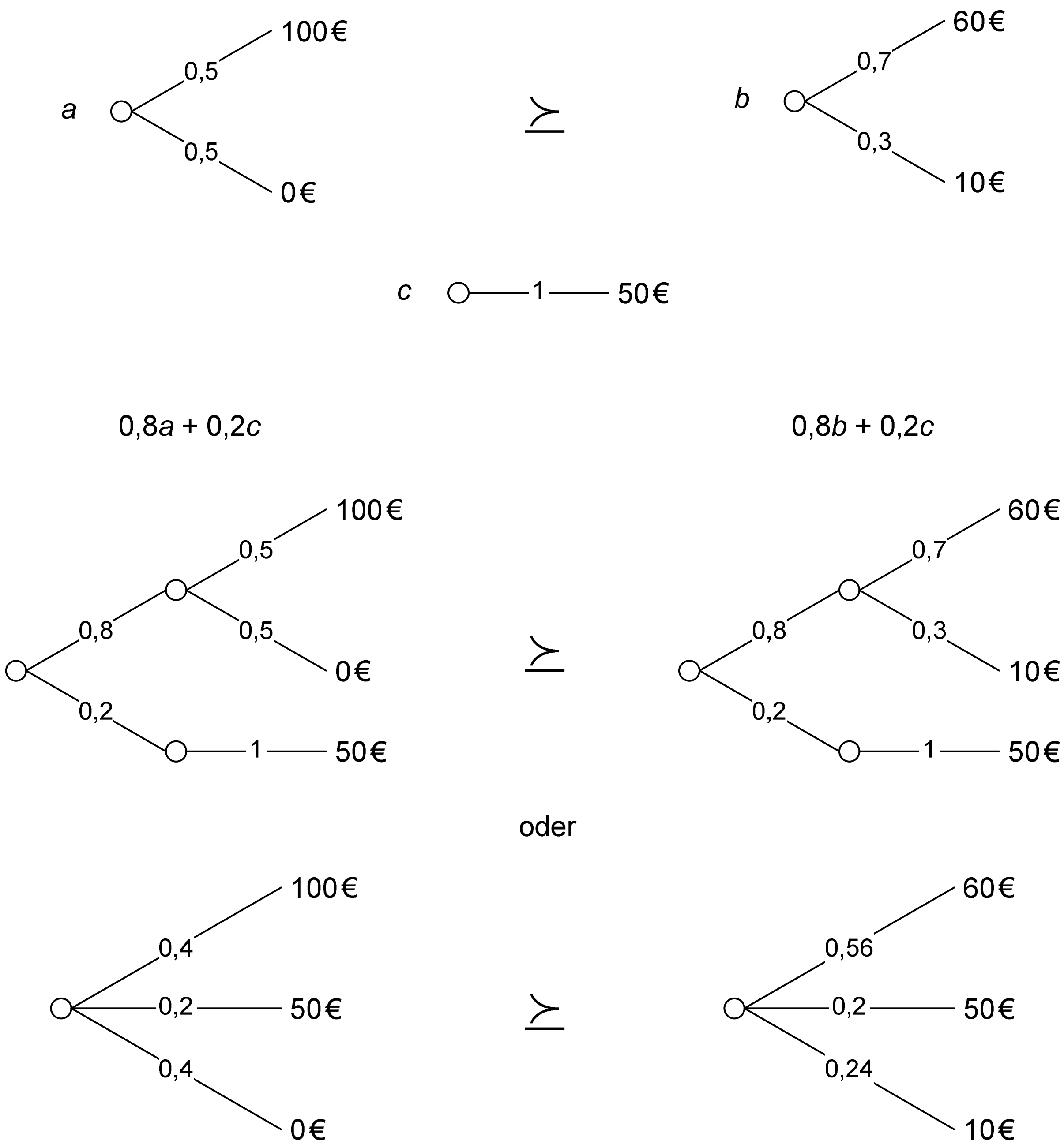
- Wichtig hier insbesondere das Unabhängigkeitsaxiom
  - Präferenz zwischen zwei Lotterien soll sich nicht ändern, wenn beide Lotterien mit einer dritten (irrelevanten) Lotterie kombiniert werden
- Eine Lotterie *a* wird genau dann einer Lotterie *b* vorgezogen, falls der erwartete Nutzen von *a*, EU(*a*) (*E*xpected *U*tility), größer als der erwartete Nutzen der Lotterie *b* ist

$$\mathrm{EU}(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(a_i).$$

- Nutzenfunktion bildet sowohl Einstellungen zum Wert der Konsequenzen als auch zum Risiko der Alternative ab
- Bis auf positive lineare Transformationen eindeutig
  - D. h. $u' = \alpha \cdot u + \beta$ ($\alpha > 0$) ordnet jegliche Lotterien in derselben Weise wie u

Erwartungsnutzentheorie – Unabhängigkeitsaxiom

- Unabhängigkeit
  - Gilt für zwei Lotterien $a \succeq b$, so muss auch für alle Lotterien c und alle Wahrscheinlichkeiten p gelten, dass $p \cdot a + (1 - p) \cdot c \succeq p \cdot b + (1 - p) \cdot c$
  - Präferenz zwischen zwei Lotterien soll sich nicht ändern, wenn beide Lotterien mit einer dritten (irrelevanten) Lotterie kombiniert werden



Berechnung des Erwartungsnutzens – Klausur WS 11/12, 2. Termin, Aufgabe 2

Entscheider Anton ist Erwartungsnutzenmaximierer.

Seine Nutzenfunktion über Geldvermögen lautet $u(x) = \sqrt{x}$.

Im Ausgangszeitpunkt beläuft sich sein Vermögen auf 100. Nun wird ihm ein Spiel angeboten, bei dem er im Erfolgsfall 300 gewinnen, im Misserfolgsfall 75 verlieren kann. Die Wahrscheinlichkeit des Erfolgsfalls werde mit p bezeichnet.

Nehmen Sie zunächst an, dass p = 0,5 gilt.

a.) Berechnen Sie den Erwartungsnutzen für Anton bei Teilnahme an der Lotterie.

$$\boxed{EU(\text{Teilnahme}) = 0{,}5 \times \sqrt{400} + 0{,}5 \times \sqrt{25} = 0{,}5 \times 20 + 0{,}5 \times 5 = 12{,}5}$$

Berechnung des Erwartungsnutzens – Klausur WS 11/12, 2. Termin, Aufgabe 2

$$u(x) = \sqrt{x}$$

b.) Wie groß ist der Erwartungsnutzen von Anton, wenn er nicht an der Lotterie teilnimmt?

$$\boxed{EU(\text{keine Teilnahme}) = 1 \times \sqrt{100} = 10}$$

c.) Wird Anton an der Lotterie bei p=0,5 teilnehmen wollen?

Ja

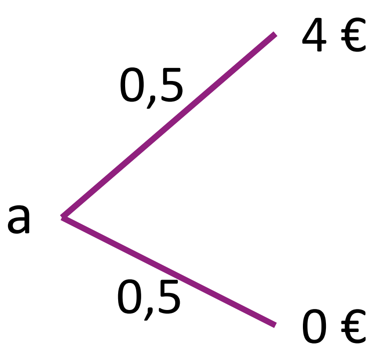
Grundbegriffe der Nutzentheorie

- Argument der Erwartungsnutzentheorie ist das Endvermögen
- Drei Einflussfaktoren auf die Entscheidung
  - Wert und Risiko der Alternativen
  - Risikoaversion des Entscheiders
  - Aktuelles Endvermögen des Entscheiders
- Sicherheitsäquivalent (SÄ(a)) stellt die sichere Konsequenz dar, bei der der Entscheider indifferent zwischen SÄ(a) und der zu beurteilenden Lotterie a ist
  - u(SÄ(a)) = EU(a)
    - Somit gilt auch: $\text{SÄ}(a) = u^{-1}(\text{EU}(a))$
- Die Risikoprämie gibt an, welchen Anteil des Erwartungswerts einer Lotterie a ein Entscheider aufzugeben bereit ist, um das Risiko der Lotterie zu vermeiden
  - $\text{RP}(a) = \text{EW}(a) - \text{SÄ}(a)$

Grundbegriffe der Nutzentheorie – Beispiele

eu(x) = $\sqrt{x}$

Vermögen: W=0 €



$$EU(a) = 0{,}5 \cdot \sqrt{4} + 0{,}5 \cdot \sqrt{0} = 1$$

$$SÄ(a) = u^{-1}(EU(a)) = 1^2 = 1$$

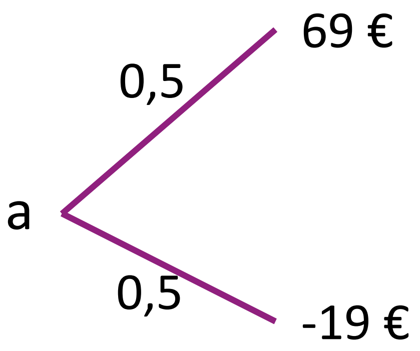
$$\text{oder } \mathrm{u(SÄ(a)) = EU(a)} \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{x}} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$RP(a) = EW(a) - SÄ(a) = 2 - 1$$

---

eu(x) = $\sqrt{x}$

Vermögen: W=100 €



$$EW(a) = 0{,}5 \cdot 169 + 0{,}5 \cdot 81 = 125$$

$$EU(a) = 0{,}5 \cdot \sqrt{169} + 0{,}5 \cdot \sqrt{81} = 11$$

$$SÄ(a) = u^{-1}(EU(a)) = 11^2 = 121$$

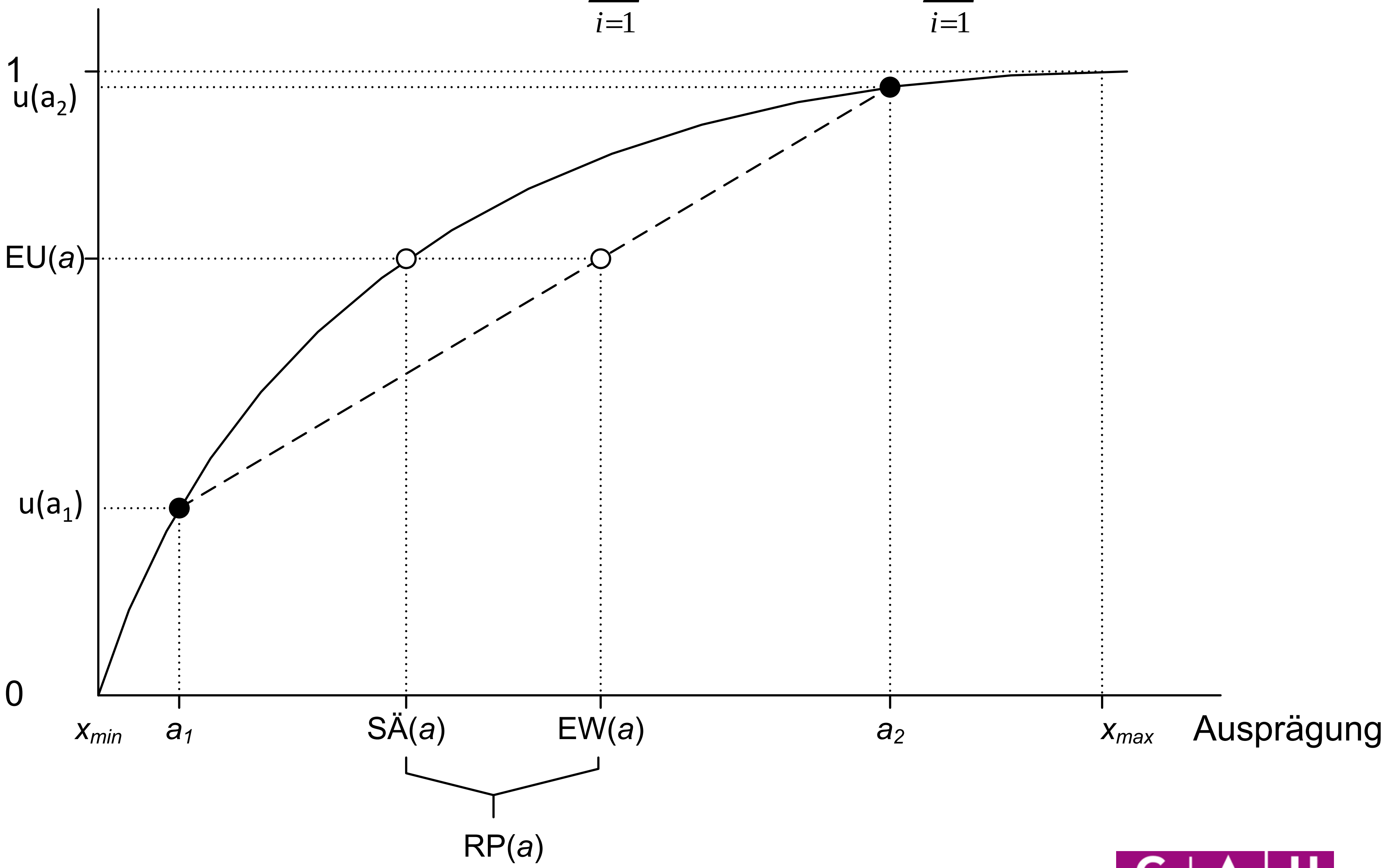
$$\text{oder } \mathrm{u(SÄ(a)) = EU(a)} \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{x}} = 11 \Rightarrow x = 121$$

$$\text{Wir benutzen hier oft}: SÄ(a) = 21$$

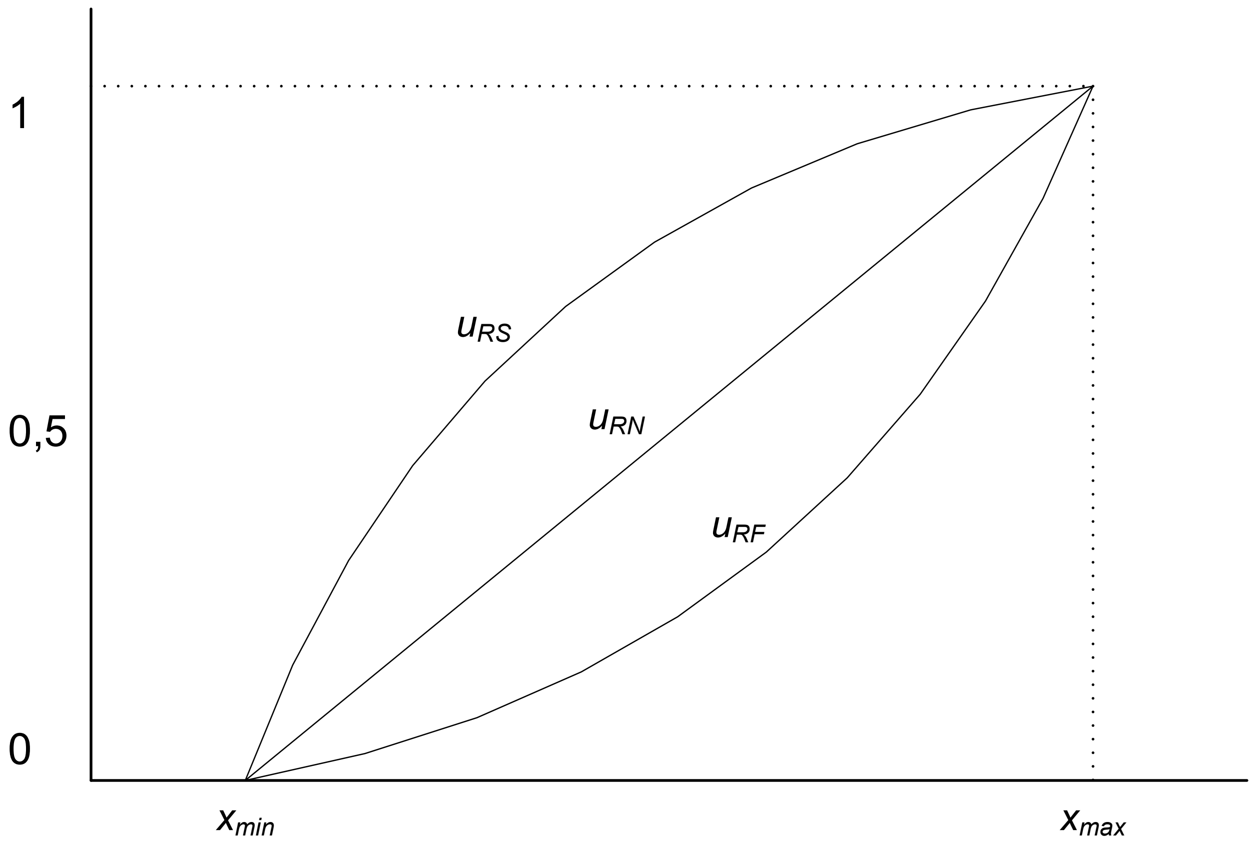
$$RP(a) = EW(a) - SÄ(a) = 125 - 121 = 4$$

Krümmung der Nutzenfunktion und Risikoeinstellung

$$\mathrm{EU}(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i \cdot u(a_i) < u\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i \cdot a_i\right) = u(E(a))$$



Krümmung der Nutzenfunktion und Risikoeinstellung



Nutzenfunktion	RP(= EW – SÄ)	Risikoeinstellung
linear: u_{RN}	$= 0$	Risikoneutral
konkav: u_{RS}	> 0	Risikoscheu
konvex: u_{RF}	< 0	Risikofreudig

Risikoeinstellung – Klausur WS 11/12, 2. Termin, Aufgabe 2

d.) Wie groß muss die Erfolgswahrscheinlichkeit p mindestens sein, damit Anton an dem Spiel teilzunehmen gewillt ist?

$$\boxed{\begin{aligned} &EU_{Teilnahme}(p) \geq EU_{keineTeilnahme} \\ &p \times \sqrt{400} + (1-p)\sqrt{25} \geq 1 \times \sqrt{100} \end{aligned}}$$

$$20p + 5 - 5p \geq 10$$

$$15p \geq 5$$

$$p \geq \frac{1}{3}$$

e.) Ermitteln Sie diejenige Erfolgswahrscheinlichkeit p, bei der der Gewinnerwartungswert des Spiels gerade null beträgt.

$$\boxed{\begin{aligned} &p \times 300 + (1-p) \times (-75) = 0 \\ &300p - 75 + 75p = 0 \\ &375p = 75 \\ &p = 1/5 \end{aligned}}$$

Risikoeinstellung – Klausur WS 11/12, 2. Termin, Aufgabe 2

d.) Wie groß muss die Erfolgswahrscheinlichkeit p mindestens sein, damit Anton an dem Spiel teilzunehmen gewillt ist?

$$p \geq \frac{1}{3}$$

e.) Ermitteln Sie diejenige Erfolgswahrscheinlichkeit p, bei der der Gewinnerwartungswert des Spiels gerade null beträgt.

$$p = {}^{1}\!/_{5}$$

f.) Ist Alois risikoneutral, risikoavers oder risikofreudig?

Risikoavers

Risikoeinstellungsmaß von Arrow und Pratt

- Erlaubt Quantifizierung der Risikoeinstellung
- Absolutes Maß: $r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$
- Relatives Maß: $r^*(x) = x \cdot r(x)$
- Ist der Entscheider risikoavers (risikoneutral/risikofreudig) ist das Risikoeinstellungsmaß positiv (gleich 0/negativ)
- Approximativ gilt: RP ≈ ½ · Var(Lotterie) · *r*(SÄ)
- Interpretation aus dem Bereich Finance
  - Konstante absolute (relative) Risikoaversion
    - Variationen des verfügbaren Vermögens nehmen keinen Einfluss auf das absolute Ausmaß (den relativen Anteil) unsicherer Anlagen eines Investors am Kapitalmarkt im Rahmen seines Gesamtportfolios

Risikoeinstellungsmaß von Arrow und Pratt

- Warum braucht man zwei Maße ?
- Stellen Sie sich die Frage, wie sich die Risikoeinstellung verändert, wenn ein Entscheider reicher wird
- Wir suchen eine Aussage der Form „gleiche Risikoprämie, wenn das gleiche Risiko bei unterschiedlichem Vermögen betrachtet wird.”
- Aber was heißt „gleiches Risiko“?
  - Die Wahrscheinlichkeiten für den Verlust oder den Gewinn eines konstanten Betrages sind identisch
    - Bsp.: 50/50 Chance auf 120€ oder 90€ bei Vermögen 100€ ist genauso riskant wie 50/50 Chance auf 10.020€ oder 9.990€ bei Vermögen 10000€.
    - Führt zu konstanter absoluter Risikoaversion
  - Die Wahrscheinlichkeiten für den Verlust oder den Gewinn einer konstanten prozentualen Vermögensveränderung sind identisch
    - Bsp.: 50/50 Chance auf 120€ oder 90€ bei Vermögen 100€ ist genauso riskant wie 50/50 Chance auf 12.000€ oder 9.000€ bei Vermögen 10.000€
    - Führt zu konstanter relativer Risikoaversion

Risikoeinstellungsmaß von Arrow und Pratt – Beispiele

$$u(x) = \sqrt{x} \longrightarrow \begin{aligned} u(x) &= x^{1/2} \\ u'(x) &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ u''(x) &= -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} = 2x^{-1} = \frac{1}{2x}$$

Fallende absolute Risikoaversion

$$\longrightarrow \quad r^*(x) = x \cdot r(x) = x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Konstante relative Risikoaversion

Risikoeinstellungsmaß von Arrow und Pratt – Beispiele

$$u(x) = -e^{-cx} \longrightarrow \begin{array}{l} u'(x) = ce^{-cx} \\ u''(x) = -c^2 e^{-cx} \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-c^2 e^{-cx}}{ce^{-cx}} = c$$

Konstante absolute Risikoaversion

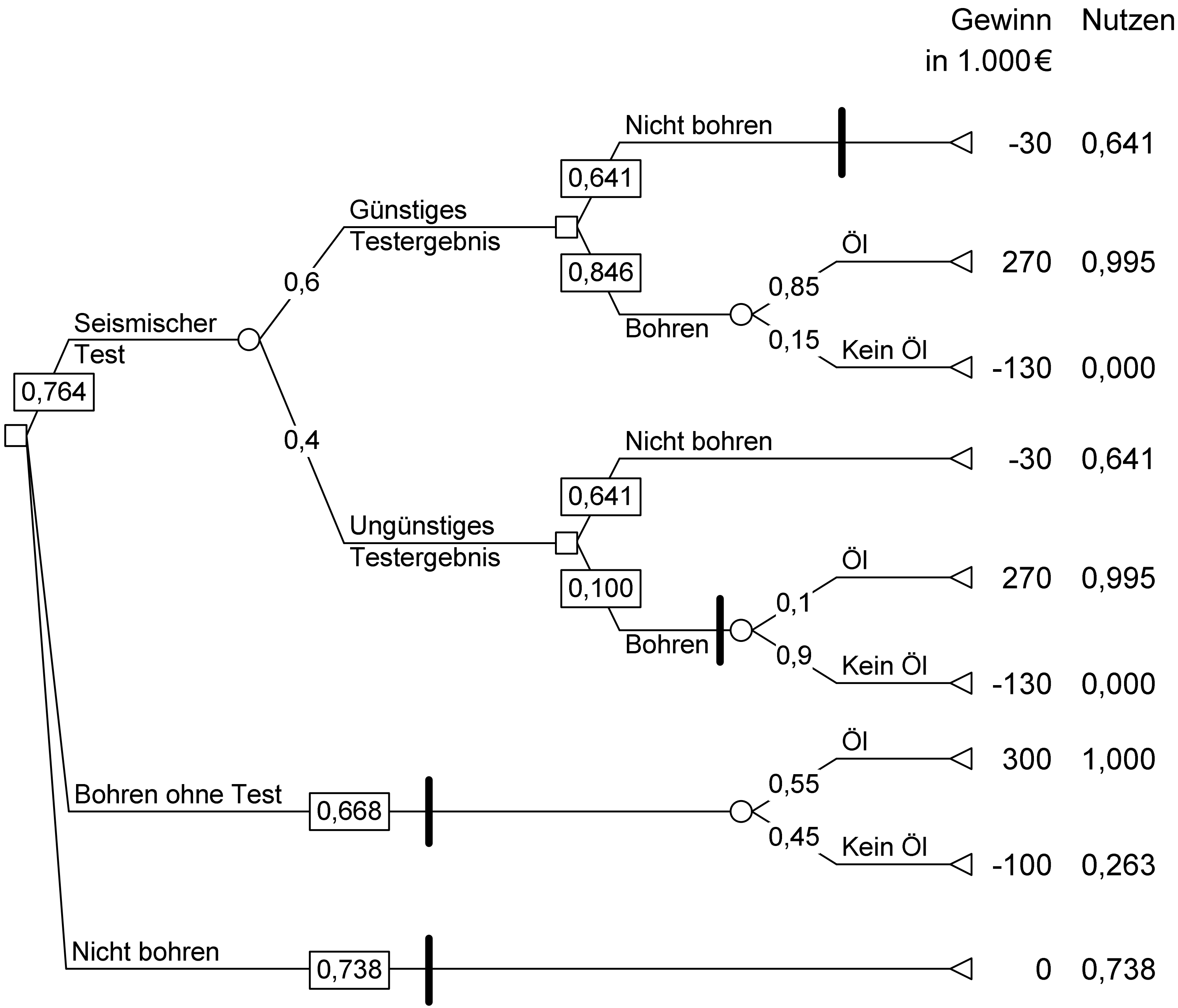
$$\longrightarrow \quad r^*(x) = x \cdot r(x) = x \cdot c$$

Steigende relative Risikoaversion

Bewertung von Strategien in Form eines Entscheidungsbaumes

- Bewertung von mehrstufigen Alternativen (= Strategie) kann analog zum Fall einstufiger Alternativen erfolgen
- Im Entscheidungsbaum kann die Strategie mit dem „Roll-back-Verfahren“ ermittelt werden
  - Zunächst werden die Konsequenzen mittels der Nutzenfunktion bewertet
  - Von den Konsequenzen ausgehend begibt man sich zum nächsten vorgelagerten Entscheidungspunkt
  - Hier wird dann der Erwartungsnutzen aller an diesem Entscheidungspunkt gegebenen Alternativen berechnet. Die Alternative mit dem höchsten Erwartungsnutzen wird ermittelt und alle anderen gestrichen.
  - Nachdem alle Entscheidungspunkte der letzten Stufe auf diese Weise bearbeitet wurden, verfährt man auf der vorletzten Stufe genauso. Am ersten Entscheidungspunkt angelangt, steht dann die optimale Strategie mit dem höchsten Erwartungsnutzen fest.

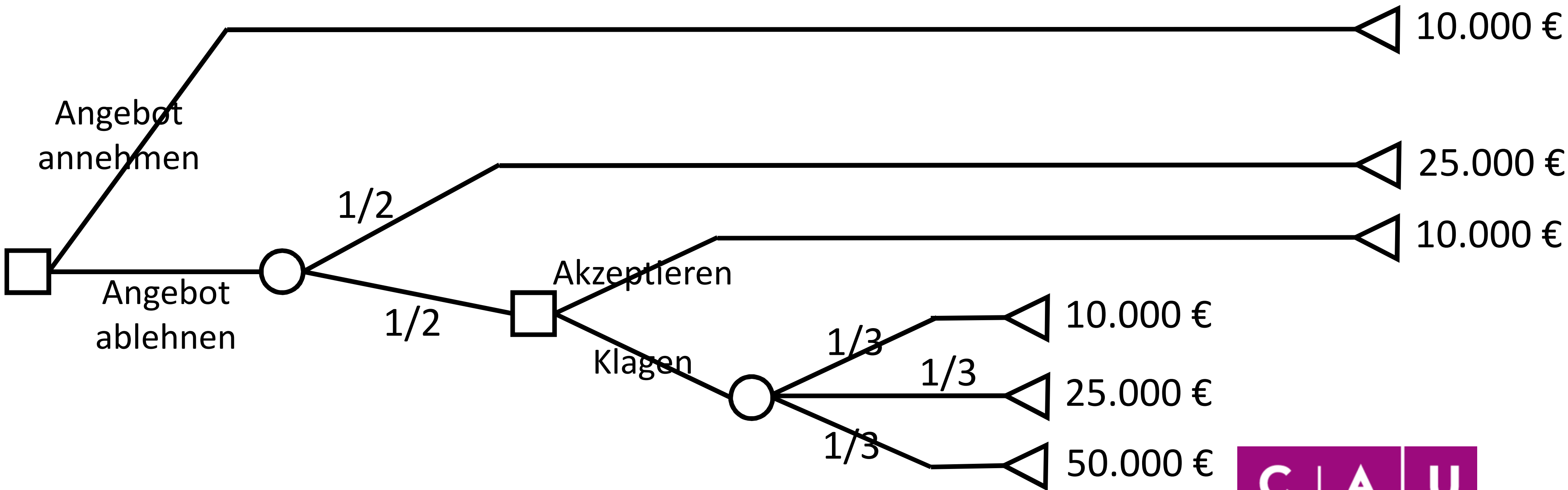
Bewertung von Strategien in Form eines Entscheidungsbaumes – Beispiel



Bewertung von Strategien in Form eines Entscheidungsbaumes – Beispiel

Klaus beschädigt unabsichtlich eine kostbare, in ihrem Wert aber nur schwer schätzbare Vase von Ute. Um den Schaden zu regulieren, macht Klaus' Haftpflichtversicherung Ute ein Angebot über 10.000 €. Ute überlegt, es anzunehmen oder einen Rechtsanwalt einzuschalten, um 50.000 € zu fordern. Ute vermutet, dass die Versicherung darauf mit einem Angebot von 25.000 € reagieren wird oder ihr Angebot von 10.000 € noch einmal wiederholt. Diese beiden Möglichkeiten hält sie für gleich wahrscheinlich. Werden Ute 25.000 € angeboten, so würde sie akzeptieren. Bei Wiederholung des Angebots von 10.000 € kann sie akzeptieren oder den Rechtsweg beschreiten, dessen Ausgang allerdings ungewiss ist. Sie hält 10.000 €, 25.000 € und 50.000 € für gleich wahrscheinlich.

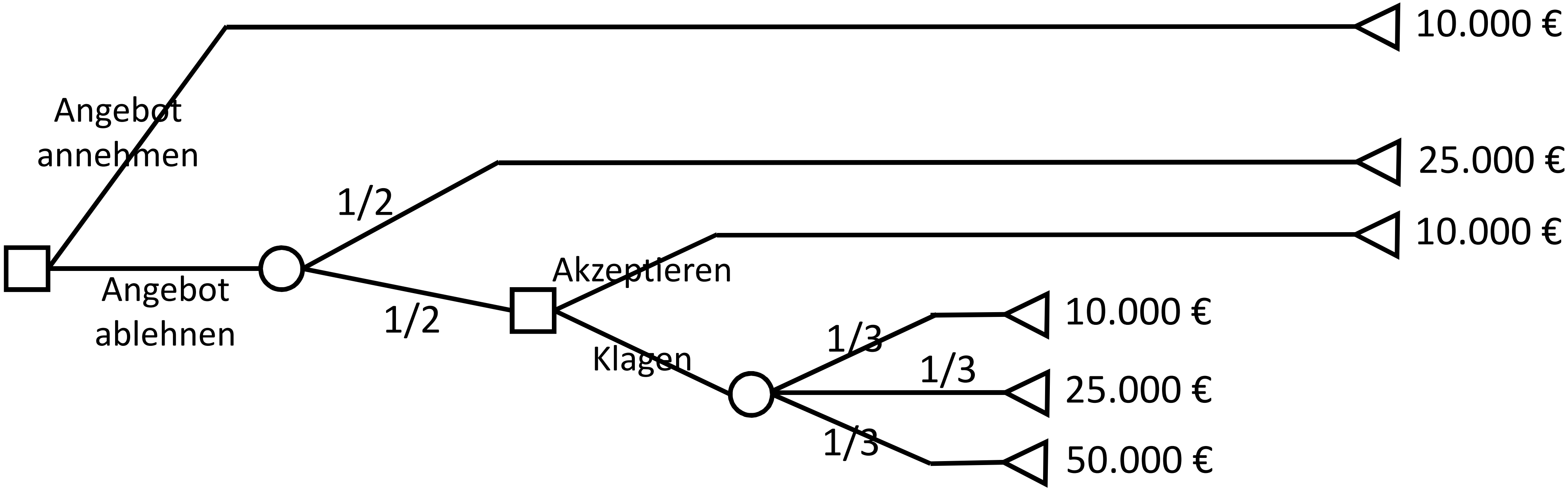
a.) Stellen Sie das Entscheidungsproblem mittels eines Entscheidungsbaums dar.



C | A | U

Bewertung von Strategien in Form eines Entscheidungsbaumes – Beispiel

b.) Skizzieren Sie die drei Strategien, zwischen denen Ute wählen kann.



Strategien:

S_1: Angebot von € 10.000 annehmen

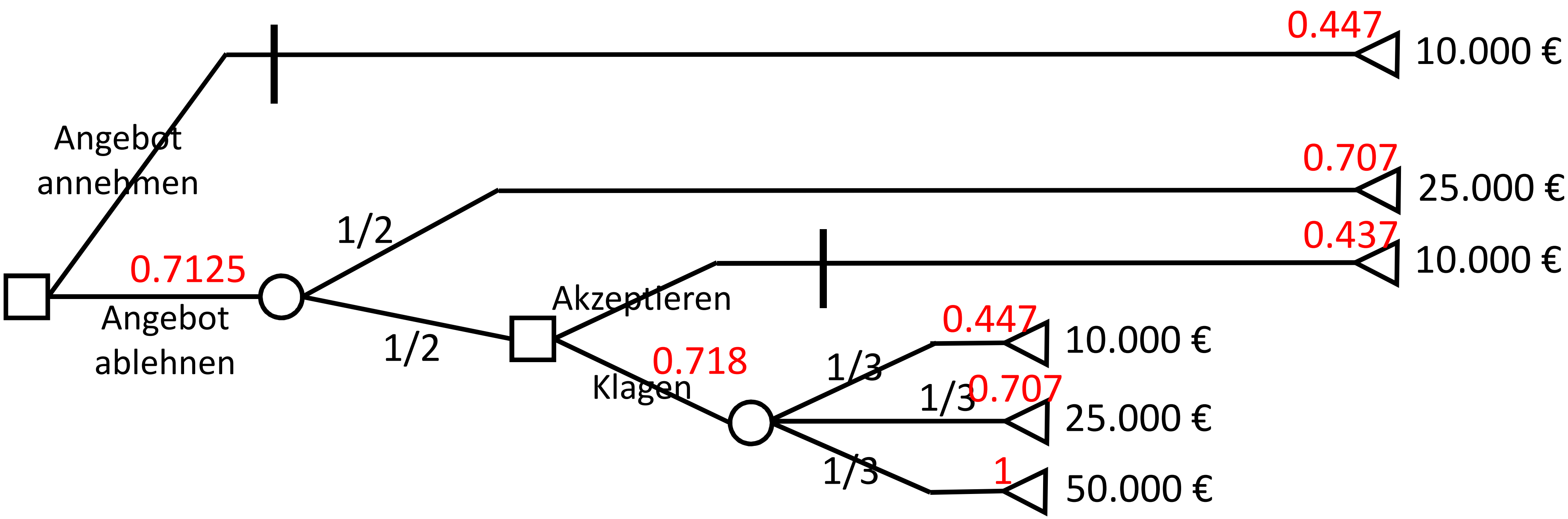
S_2: Angebot ablehnen, falls Angebot wiederholt wird, akzeptieren

S_3: Angebot ablehnen, falls Angebot wiederholt wird, Rechtsweg einschalten

Bewertung von Strategien in Form eines Entscheidungsbaumes – Beispiel

c.) Welche Strategie wird Ute wählen, wenn für sie die folgende Nutzenfunktion gilt (x = Höhe der Entschädigung):

$$u(x) = \sqrt{\frac{x}{50.000}}$$



S$_3$: Angebot ablehnen, falls Angebot wiederholt wird, Rechtsweg einschalten