Seminar Kombinatorik: Turáns Graphtheorem

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit Turáns Graphtheorem, auch Satz von Turán genannt. Dieser ist in der extremalen Graphentheorie einzuordnen und gibt eine obere Schranke für die maximale Anzahl an Kanten in einem p - cliquenfreien Graphen an.
Im Folgenden werde ich zunächst Definitionen für die in den Beweisen verwendeten Begriffe liefern, danach werde ich die drei Beweisen vorstellen, welche den Kern dieser Ausarbeitung bilden.
Zunächst wird das Theorem über eine vollständige Induktion bewiesen, die sich die Struktur der Turán Graphen zu eigen macht.
In dem zweiten vorgestellten Beweis werden wir das Theorem über eine Gewichtsverteilung beweisen.
Der letzte Beweis bedient sich der Annahme der gegebene Graph sei maximal und zeigt schließlich, dass dieser ein Turán Graph sein muss. Dieser erreicht wie sich im folgenden zeigen wird unter gewissen Umständen für die Kantenanzahl die obere Schranke welche im Theorem gegeben ist.

2 Definitionen

2.1 Anmerkungen

Es sei gesagt, dass die Konstante vor sämtlichen Graphen (r - Turán Graph, p - Clique, etc) Element der natürlichen Zahlen ist.

2.2 Ungerichteter Graph

Der ungerichtete Graph G = (V,E) sei definiert als Knotenmenge V

$$V = \{v_1, ..., v_n\}$$

und Kantenmenge E, wobei zwei Knoten v_i, v_j benachbart heißen, falls

$$\{v_i, v_j\} \in E$$

2.3 Grad eines Knotens

Der Grad d_m eines Knotens v_m ist definiert als die Anzahl der benachbarten Knoten, sprich

$$d_m = \quad | \{v_i \mid v_i \in V \wedge \{v_i, v_m\} \in E\} \mid$$

2.4 Vollständiger Graph

Ein Graph G = (V,E) heißt vollständig, falls alle Knoten durch Kanten verbunden sind. Es gilt also

$$E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V \wedge v_i \neq v_j\}$$

2.5 Untergraph von G

Ein Graph G' = (V', E') heißt Untergraph von G = (V, E), falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt.

2.6 p - Clique im Graph G

Ein Graph heißt p - Clique im Graph G, falls er ein vollständiger Untergraph von G mit p Knoten ist.

2.7 Unabhängige Knotenmenge

Eine Menge von Knoten wird als unabhängig bezeichnet, wenn es innerhalb dieser Menge keine Kanten gibt, sondern nur nach Knoten außerhalb dieser.

2.8 r - partiter Graph

Ein r - partiter Graph besteht aus $r \in \mathbb{N}$ disjunkten und unabhängigen Knotenmengen, welche untereinander durch Kanten verbunden sein können. Diese Knotenmengen bilden zudem eine Partition der gesamten Knotenmenge.

2.9 Vollständiger r - partiter Graph

Ein r - partiter Graph wird vollständig genannt, wenn jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist, außer mit denen, die in einer unabhängigen Knotenmenge mit ihm sind.

2.10 r - Turán Graph

Ein r - Turán Graph ist ein vollständiger r - partiter Graph bei dem sich die Größe jeder Partition maximal um 1 unterscheidet.

2.11 Turáns Graphtheorem

Sei $p \in \mathbb{N} \land p \geq 2$, G = (V, E) ein Graph ohne p - Clique und n := $\mid V \mid$, so gilt

$$\mid E \mid \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2} \tag{1}$$

3 Zweiter Beweis: Struktur des Turán Graphs

In diesem Beweis nutzen wir die Struktur eines Turán Graphens aus und beweisen im Folgenden die stärkere Forderung "Sei G ein Graph ohne p - Clique, dann besitzt G höchstens so viele Kanten wie der (p - 1) - Turán Graph".
Aus dieser Behauptung folgt direkt der Satz von Turán, denn ein kantenmaximaler, p - cliqenfreier Graph G=(V,E) mit $\mid V \mid = n$ muss aufgrund der Forderung ein Turán Graph sein.
Dieser hat genau dann die meisten Kanten, wenn alle Partitionen gleich groß sind, was der Fall ist, wenn n durch (p - 1) teilbar ist, es also $\frac{n}{p-1}$ Partitionen gibt. Daraus folgt für die Anzahl der Kanten:

$$\begin{aligned}&\text{Anzahl der Verbindungsmöglichkeiten zwischen (p - 1) Kanten}\\&\cdot \text{(Anzahl der unabh. Teilmenge)}^2 =\\&\binom{p-1}{2}(\frac{n}{p-1})^2 = (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}\end{aligned}$$

und unsere Behauptung ist bewiesen. Nun folgt der Beweis der stärkeren Forderung:

3.1 Sei G ein Graph ohne p - Clique, dann besitzt G höchstens so viele Kanten wie der (p - 1) - Turán Graph

3.1.1 Induktionsanfang:

Beginnen wir mit p = 2, so kann ein Graph G keine Kanten besitzen, da ein 2 - Clique aus einer Kante besteht. Ebendies gilt auch für einen 1 - Turán Graph, dieser bestehet aus einer unabhängigen Teilmenge, hat also ebenfalls keine Kanten.

3.1.2 Induktionvoraussetzung:

Sei G ein Graph ohne p - Clique. Dann besitzt G höchstens so viele Kanten wie der (p - 1) - Turán Graph.

3.1.3 Induktionsschluss:

Sei ein (p + 1)-cliquenfreier Graph G gegeben mit der Knotenmenge V und einer Kantenmenge E. Nun setzen wir v_m so, dass für dessen Grad gilt $d_m := max_{1 \leq j \leq n} d_j$, sprich wir suchen uns einen Knoten mit den meisten Kanten im Graphen aus.

Nun setzen wir S als Menge der Nachbarn von v_m, wodurch $\mid S \mid = d_m$ ist und definieren $T := V \backslash S$. Da alle Knoten aus S mit v_m verbunden sind, $v_m \notin S$ und G (p + 1)-cliquenfrei ist muss S p-cliquenfrei sein.

Definieren wir nun H als neuen Graphen mit identischer Knotenmenge, für den nur die Kanten aus S übernommen werden und jeder Knoten aus S mit jedem aus T verbunden ist. Da in T keine Kanten übernommen werden ist T eine unabhängige Menge in H und damit (p + 1)-cliquenfrei.

Bezeichnen wir den Grad eines Knotens v_j in H als d'_j. Untersucht man nun die Grade in H, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $v_j \in S$

Hier gilt $d'_j \geq d_j$, da keine Kanten entfernt wurden, aber eventuell welche hinzugefügt wurden.

Fall 2: $v_j \in T$

Es gilt $d'_j =^1 \mid S \mid = d_m \geq^2 d_j$.

1. gilt, da jedes Element aus T mit jedem Element aus S eine Kante teilt.

2. gilt, da v_m so gewählt wurde, dass d_m maximal ist.

Hieraus folgt $\forall v_j \in V : d'_j \geq d_j$ und somit auch $\mid E(H) \mid \geq \mid E \mid$.

Da S wie gezeigt p-cliquenfrei ist lässt sich hier die Induktionsvoraussetzung anwenden, sprich S kann maximal so viele Kanten haben wie ein (p - 1) - Turán Graph haben. Dementsprechend lässt sich H' konstruieren als neuer Graph konstruieren, bei dem S ein (p - 1) - Turán Graph ist und wie beim Graphen H jeder Knoten aus T mit jedem aus S verbunden ist. Durch diese Konstruktion ist H' auf jeden Fall ein p - partiter Graph und hat dadurch höchstens so viele Kanten wie ein p-Turán Graph, wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

4 Dritter Beweis: Gewichtsverteilung

In diesem Beweis betrachten wir eine Gewichtsverteilung auf den Knoten des Graphen. Diese notieren wir als $w = (w_1, ..., w_n)$ und es gilt $w_i \geq 0$, sowie $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Des weiteren definieren wir eine Funktion $f(w) = \sum_{\{v_i,v_j\}\in E} w_i w_j$, welche wir zu maximieren versuchen. Wir nutzen diese Funktion, da sie für den ganzen Graphen dann maximal ist, wenn die Gewichte möglichst gleichmäßig verteilt sind.

Setzen wir nun v_i und v_j als zwei nicht benachbarte Knoten mit positiven Gewicht w_i, w_j und fassen das Gewicht ihrer adjazenten Knoten zusammen als s_i, s_j und nehmen $s_i \geq s_j$ an.

Bewegen wir nun das Gewicht von v_j nach v_i, setzen also $w'_i := w_i + w_j$ und $w'_j := 0$, dann ergibt sich für die neue Gewichtung w':

$$\begin{aligned} f(w') &=^1 f(w) + w_j s_i - w_j s_j \\ &= f(w) + (s_i - s_j) w_j \\ &\geq^2 f(w) \end{aligned}$$

1. Dies gilt aufgrund des verschobenen Gewichts. Dieses wird in der Multiplikation auf seitens s_j nicht mehr betrachtet, bei s_i schon. Da w_j für s_j wegfällt wird das Gewicht hier also abgezogen und bei s_i umgekehrt draufgerechnet in der Multiplikation.

2. Dies gilt, da w_j als Ecke mit positiven Gewicht ausgewählt wurde.

Wir können diese Verschiebung nun wiederholen bis es keine nicht-adjazenten Knoten mit positiver Gewichtung mehr gibt und erhalten danach eine optimierte Verteilung, da für jede Umformung $f(w') \geq f(w)$ gilt. Da wir das Gewicht nach bestimmten Anzahl an Verschiebungen innerhalb einer k - Clique verschieben betrachten wir nun wie wir das Gewicht für eine solche Clique optimieren können.

Dies muss nicht zwangsweise die größte Clique sein, aber f wäre dann größer als mit einer kleineren Clique.

Bewegen wir die Gewichte innerhalb einer solchen k - Clique in der Form, dass wir uns zwei Knoten mit positiven Gewicht wählen für die $w_i > w_j > 0$ gilt und ein ε setzen für das $0 < \varepsilon < w_i - w_j$ gilt. Addieren wir ε auf w_j und subtrahieren es von w_i. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} f(w') &=^1 f(w) - w_i w_j + w'_i w'_j \\ &= f(w) - w_i w_j + (w_i - \varepsilon)(w_j + \varepsilon) \\ &= f(w) + \varepsilon(w_i - w_j) - \varepsilon^2 \\ &>^2 f(w) \end{aligned}$$

1. Dies gilt, da in einer Clique alle Knoten miteinander verbunden sind, gleichen sich die Unterschiede für die Funktionswerte für alle Kanten aus, außer der zwischen v_i und v_j. Dementsprechend muss das alte Gewicht abgezogen und das neue addiert werden.

2. Dies gilt, da $0 < \varepsilon < w_1 - w_2$ gilt.

Daher optimiert diese Gewichtsverlagerung die k-Clique bis es keine ungleichen Gewichtungen mehr in ihr gibt. Dass dies irgendwann eintritt ist leicht einzusehen, denn wenn man ε setzt als

$$\varepsilon := w_i - \frac{1}{k}$$

wodurch $w'_i = w_i - \varepsilon = w_i - w_i + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$ gilt, also ein Knoten nach dem anderen die optimale, da gleichmäßige Verteilung einnimmt. Hierzu muss $0 < w_i - \frac{1}{k} < w_i - w_j$, also $w_j < \frac{1}{k} < w_i$ gelten. Wenn man w_i als maximal gewichteten Knoten wählt und w_j als minimal gewichteten, dann muss $\frac{1}{k}$ zwischen beiden liegen muss. Obrige Ungleichung hat gezeigt, dass je näher die Werte der einzelnen Knoten aneinanderliegen desto optimierter ist die Funktion f, wodurch bei einer gleichmäßigen Verteilung das Optimum liegt. Dies liegt an der Eigenschaft der Multiplikation maximal für die Summe der Faktoren zu sein, wenn beide Faktoren gleich groß sind.

In einer k-Clique können maximal $\frac{k(k-1)}{2}$ Kanten sein, also $\frac{\text{Jeder Punkt(Jeder Punkt mit dem er sich verbinden kann}}{\text{Enden einer Kante}}$

Für die Gewichtung ergibt sich also:

$$\begin{aligned} f(w) &=^1 \sum_{v_i,v_j \in E} w_i w_j =^2 \sum_{v_i,v_j \in E} \frac{1}{k^2} \\ &= \mid E \mid \frac{1}{k^2} =^3 \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{k(k-1)}{2k^2} = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k}) \end{aligned}$$

1. Definition von f.
2. Setzung von $w_i := \frac{1}{k}$.
3. Dies gilt, da wie oben erwähnt in einer k-Clique maximal $\frac{k(k-1)}{2}$ Kanten sein.

Da diese Funktion maximal ist wenn k maximal ist und der höchstmögliche Wert für k genau p - 1 ist gilt weiter:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k}) \\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1}) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dies dann auch für die uniforme Verteilung

$$\begin{aligned} \frac{\mid E \mid}{n^2} &= f(w_i = \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1}) \\ \Longleftrightarrow \mid E \mid &= f(w_i = \frac{1}{n}) n^2 \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1}) n^2 \end{aligned}$$

5 Fünfter Beweis: Maximaler Graph und Äquivalenzrelation

In diesem Beweis wird angenommen, dass G ein Graph mit n Knoten und ohne p - Clique ist, welcher die maximale Anzahl an Kanten hat. Um $\mid E \mid \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$ zu zeigen bedient sich dieser Beweis zudem folgender Behauptung:

Behauptung: G enthält keine drei Knoten u,v,w mit $\{v, w\} \in E$, aber $\{u, v\} \notin E$ und $\{u, w\} \notin E$

Diese Behauptung beweisen wir durch Widerspruch. Hierzu unterteilen wir das Problem in zwei Fälle:

Fall 1: $d(u) < d(v) \vee d(u) < d(w)$

Nehmen wir an, dass d(u) < d(v) gilt, denn u und v sind austauschbar. Entfernen wir nun u, verdopplen wir v und nennen den neuen Knoten v', wobei alle Kanten ebenfalls kopiert werden, sodass v' die selben Nachbarn wie v hat. Der hieraus entstehende Graph G' hat ebenfalls keine p-Clique, da v' lediglich doppelte, so zu sagen parallele Verbindungen hinzufügt, eine bestehende Clique also nicht erweitert wird. Hieraus ergibt sich für die Kantentzahl:

$$\mid E(G') \mid = \mid E(G) \mid + d(v) - d(u) >^{\text{da } d(u)<d(v)} \mid E(G) \mid$$

Da G ein maximaler Graph ist, ist dies ein Widerspruch.

Fall 2: $d(u) \geq d(v) \wedge d(u) \geq d(w)$

Hier kopieren wir u zwei mal, da es vom Grad her maximal ist, wobei wie im ersten Fall die Kanten mitkopiert werden und entfernen dann v und w. Der hieraus entstehende Graph kann wieder keine p-Clique haben, da er eine bestehende Clique durch die Veränderung nicht erweitern würde. Für die Anzahl der Kanten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mid E(G') \mid &= \mid E(G) \mid + 2d(u) - (d(v) + d(w) - 1) \\ &> \mid E(G) \mid \end{aligned}$$

Hierbei ergeben sich die $2d(u)$ durch das doppelte Kopieren von u, die $-(d(v) + d(w) - 1)$ vom entfernen von v und w, sowie der Kante vw. Die Ungleichung gilt, da $d(u) \geq d(v) \wedge d(u) \geq d(w)$ gilt. Da G' nun mehr Kanten hat G ergibt sich wieder ein Widerspruch, womit die Behauptung bewiesen wäre.

Definieren wir $u \sim v :\Longleftrightarrow \{u, v\} \notin E(G)$, so ist dies dank der bewiesenen Behauptung eine Äquivalenzrelation:

Reflexiv:

$$u \sim u \Longleftrightarrow^{1} \{u, u\} \notin E(G)$$

1. Dies gilt, da die hier betrachteten Graphen keine Kanten mit gleichem Start und Zielknoten erlauben.

Transitiv:

$$u \sim v \land v \sim w \Longrightarrow^1 u \sim w$$

1. Dies ist exakt die oben bewiesene Behauptung.

Symetrisch:

$$\begin{aligned} u \sim v &\Rightarrow \{u, v\} \notin E(G) \\ &\Rightarrow \; v \sim u \end{aligned}$$

Für den Graphen G bilden die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ die verschiedenen Partitionen, wodurch G ein r - partiter Graph ist. Da er p - cliquenfrei und maximal ist muss er aus p - 1 Partitionen bestehen, daher ist G ein vollständiger (p - 1) - partiter Graph. Das bedeutet, wenn wir zeigen können, dass ein (p-1) - Turán Graph mindestens so viele Kanten wie ein vollständiger (p - 1) - partiter Graph, dann folgt daraus, dass die Anzahl der Kanten von G genau wie in Beweis zwei ableitbar sind, sprich Turáns Graphtheorem gilt.

5.1 Ein r - Turán Graph hat immer mindestens so viele Kanten wie ein entsprechender r - patiter Graph

Es ist zu zeigen, dass die Anzahl der Kanten in einem vollständigen r - partiten Graphen $K_{n_1,\dots,n_r}$ genau dann maximal ist, wenn $\mid n_i - n_j \mid \leq 1$ f.a. i,j $\in [1, r]$ gilt.

Wir nehmen für unseren r-partiten Graphen an, dass $\mid n_i - n_j \mid > 1$, also $n_1 \geq n_2 + 2$ gilt. Verschieben wir eine Ecke aus V_1 in die Ecke V_2, so erhalten wir einen Graphen $K_{n_1-1,n_2+1,\dots,n_{p-1}}$. Dieser besitzt aufgrund der Verschiebung $(n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2$ mehr Knoten als der ursprüngliche Graph, denn es gilt

$$\begin{aligned} (n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2 &= n_1 n_2 - n_2 + n_1 - 1 - n_1 n_2 \\ &= n_1 - n_2 - 1 \\ &\geq^1 n_2 + 2 - n_2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

1. Dies gilt, da $n_1 \geq n_2 + 2$ vorausgesetzt wird.

Daher hat ein Turán Graph mindestens so viele Kanten wie ein entsprechender r - patiter Graph, wodurch Turáns Graphtheorem gilt.