5.2

G

Sei G gegeben als $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit V = S,A,B,C,D, Σ = a,b,c,d und
P = { (S,A),(S, B), (S, C), (S, D), (S, a), (S, b), (S, c), (S, d), (S, ε), (A, (aSa)), (B, (bSb)), (C, (cSc)), (D, (dSd)) }

Kontextfrei

Dies gilt, da für alle $(\alpha, \beta) \in P$ gilt, dass $\alpha \in V$ ist. Dementsprechend ist die Grammatik Kontextfrei.

L = L(G)

Dies zeigen wir, indem wir zeigen, dass alle $w' \in L(G)$ exakt die Bedingung von L erfüllen.
Sei $w \in L$ beliebig, so gilt für die Induktion:

$\mid w \mid = 1$

In diesem Fall kann für w lediglich gelten $w \in (\{\emptyset, \varepsilon\} \cup \Sigma)$. Von $w = \emptyset$ oder $w = \varepsilon$ gilt sowohl, dass sie in L sind, als auch das sie in L(G) sind, denn diese sind in jeder Grammatik. (¡= ????? Don't know just guessed) Für $w \in \Sigma$ gilt dass diese in L sind, da ein Buchstabe umgedreht weiterhin der selbe ist. Zudem gilt, dass dieser in L(G) ist, da für $(S, X) \in P$ gilt, dass jedes Element aus Σ in X ist. Dementsprechend gilt dies für solche w.

Induktionsvoraussetzung: $\mid w \mid = n$

$\forall w \in L(G) : w \in L$ (Ist das die richtige Behauptung?)

Induktionsschritt: $\mid w \mid = n + 1$

zu Zeigen

5.3

Um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist zeigen wir, dass es eine Grammatik gibt die Kontextfrei ist und diese Sprache erzeugt. Diese definieren wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X^n &= \bigcup^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{a^i b^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
Y^n &= \bigcup^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{c^i d^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
V &= X^n \cup Y^n \cup S \text{mit n } \in \mathbb{N} \\
\Sigma &= \{a, b, c, d\} \\
X'^n &= |^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \; (|^{X \in X^n} \; X) \\
Y'^n &= |^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \; (|^{Y \in Y^n} \; Y) \\
P &= (S, (|^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \; X^n Y^n)) \cup X'^n \cup Y'^n \\
G &= (V, \Sigma, P, S)
\end{aligned}
$$

G erzeugt L

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ beliebig und $p \in \mathbb{N}_{\geq 0} : p \leq m + n$ so gilt zu zeigen, dass ein Wort $w \in L$ mit solchen m,n,p und dem sich daraus ergebenden q erzeugt werden kann. Sprich, dass $w \in L(G)$ ist, es gibt also eine Resolution die dieses Wort als Ergebnis hat.

$$
\begin{aligned}
S &\to X^{m+n} Y^{p+q} \\
&\to a^m b^n c^p d^q
\end{aligned}
$$

Dementsprechend ist jedes Wort aus w auch in L(G), also erzeugt G L.

G ist kontextfrei

zu Zeigen

5.4

Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige $u, v \in \Sigma^*$ f(u) das Präfix von f(uv) ist. Hierzu setzen wir u als $u := a_1, ..., a_i$ und v als $u := a_{i+1}, ..., a_n$. Dann gilt nach Definition 1.62:

$$\begin{aligned}
f(uv) &= \lambda^*(q, uv) \\
&= \lambda^*(q, a_1, ..., a_n) \\
&= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\
&= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{i-1}), a_i)\lambda(\delta(q, a_1, ..., a_i), a_{i+1}...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\
&= \lambda^*(q, a_1...a_i)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)a_{i+1}...a_n) \\
&= \lambda^*(q, u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v) \\
&= f(u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v)
\end{aligned}$$

Damit ist f(u) ein Präfix von f(uv), sprich f ist präfixtreu.

Längenbeschränkt

Wir zeigen $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 :| f(w) |\leq k \mid w \mid$ per Induktion über der Länge von w:

Induktionsanfang | w | = 1

Setze $k := max_{x\in(\Sigma\cup\{\emptyset\}\cup\{\epsilon\})}(| f(x) |)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
| f(w) | &\leq k \\
&= k \mid w \mid
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung | w | = n

$$\exists k \geq 0 :| f(w) |\leq k \mid w \mid$$

Induktionsschluss | w | = n + 1

Sei w = va, so gilt nach Definition von f:

$$\begin{aligned} f(va) &= \lambda^*(q_0, va) \\ &= \lambda^*(q_0, v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \\ &= f(v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \end{aligned}$$

Da $\mid f(v) \mid= n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, also ein k' gesetzt werden für das $\mid f(v) \mid\leq k' \mid v \mid$ gilt. Setze nun $k'' := max_{x\in\Sigma}(\mid \lambda(\delta(q_0, v), x) \mid)$ und k := k' + k", so gilt:

$$\begin{aligned} \mid f(w) \mid &=\mid f(v) \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\ &\leq k' \mid v \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\ &\leq k' \mid v \mid + k''1 \\ &= (k' + k'') \cdot (\mid v \mid +1) \\ &= k \mid w \mid \end{aligned}$$

Regulär

zu Zeigen: Ist L regulär, so ist auch f(L) regulär