5.2

@David: FILL ME!

5.3

Um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist zeigen wir, dass es eine Grammatik gibt die Kontextfrei ist und diese Sprache erzeugt. Diese definieren wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X^n &= \bigcup^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{a^i b^j \mid \exists i,j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i+j=n\} \\
Y^n &= \bigcup^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{c^i d^j \mid \exists i,j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i+j=n\} \\
V &= X^n \cup Y^n \cup S \text{mit n } \in \mathbb{N} \\
\Sigma &= \{a,b,c,d\} \\
X'^n &= |^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \ (|^{X \in X^n} \ X) \\
Y'^n &= |^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \ (|^{Y \in Y^n} \ Y) \\
P &= (S, (|^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \ X^n Y^n)) \cup X'^n \cup Y'^n \\
G &= (V, \Sigma, P, S)
\end{aligned}
$$

G erzeugt L

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ beliebig und $p \in \mathbb{N}_{\geq 0} : p \leq m+n$ so gilt zu zeigen, dass ein Wort $w \in L$ mit solchen m,n,p und dem sich daraus ergebenden q erzeugt werden kann. Sprich, dass $w \in L(G)$ ist, es gibt also eine Resolution die dieses Wort als Ergebnis hat.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow X^{m+n} Y^{p+q} \\
&\rightarrow a^m b^n c^p d^q
\end{aligned}
$$

Dementsprechend ist jedes Wort aus w auch in L(G), also erzeugt G L.

G ist kontextfrei

zu Zeigen

5.4

Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige $u, v \in \Sigma^*$ f(u) das Präfix von f(uv) ist. Hierzu setzen wir u als $u := a_1, ..., a_i$ und v als $u := a_{i+1}, ..., a_n$. Dann gilt nach Definition 1.62:

$$\begin{aligned} f(uv) &= \lambda^*(q, uv) \\ &= \lambda^*(q, a_1, ..., a_n) \\ &= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\ &= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{i-1}), a_i)\lambda(\delta(q, a_1, ..., a_i), a_{i+1}...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\ &= \lambda^*(q, a_1...a_i)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)a_{i+1}...a_n) \\ &= \lambda^*(q, u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v) \\ &= f(u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v) \end{aligned}$$

Damit ist f(u) ein Präfix von f(uv), sprich f ist präfixtreu.

Längenbeschränkt

Wir zeigen $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 :| f(w) |\leq k \mid w \mid$ per Induktion über der Länge von w:

Induktionsanfang | w | = 1

Setze $k := max_{x \in (\Sigma \cup \{\emptyset\} \cup \{\epsilon\})}(| f(x) |)$, so gilt:

$$\begin{aligned} | f(w) | &\leq k \\ &= k \mid w \mid \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung | w | = n

$$\exists k \geq 0 :| f(w) |\leq k \mid w \mid$$

Induktionsschluss | w | = n + 1

Sei w = va, so gilt nach Definition von f:

$$\begin{aligned} f(va) &= \lambda^*(q_0, va) \\ &= \lambda^*(q_0, v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \\ &= f(v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \end{aligned}$$

Da $\mid f(v) \mid = n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, also ein k' gesetzt werden für das $\mid f(v) \mid \leq k' \mid v \mid$ gilt. Setze nun $k'' := max_{x \in \Sigma}(\mid \lambda(\delta(q_0, v), x) \mid)$ und k := k' + k", so gilt:

$$\begin{aligned} \mid f(w) \mid &= \mid f(v) \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\ &\leq k' \mid v \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\ &\leq k' \mid v \mid + k''1 \\ &= (k' + k'') \cdot (\mid v \mid + 1) \\ &= k \mid w \mid \end{aligned}$$

Regulär

zu Zeigen: Ist L regulär, so ist auch f(L) regulär