

5.2

@David: FILL ME!

5.3

Um zu zeigen, dass die Sprache L kontextfrei ist müssen wir eine Grammatik G finden, die L erzeugt und kontextfrei ist.

Sei G gegeben als $G = (\{S, X_1, X_2, X_{2'}, X_3\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ wobei P definiert ist durch:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X_1 \\ X_1 &\rightarrow ad \mid aX_1d \mid X_2 \mid X_{2'} \\ X_2 &\rightarrow ac \mid aX_2c \mid X_3 \\ X_{2'} &\rightarrow bd \mid bX_{2'}d \mid X_3 \\ X_3 &\rightarrow bc \mid bX_3c \end{aligned}$$

G erzeugt L

Es gilt zu zeigen, dass jedes Wort in L durch G erzeugt werden kann. Hierzu unterscheiden wir den Fall, dass $m \geq q$ ist und den Fall, dass $m \leq q$ ist:

$$m \geq q$$

$$zZ$$

$$m \leq q$$

$$zZ$$

G ist kontextfrei

zu Zeigen

5.4

Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige $u, v \in \Sigma^*$ $f(u)$ das Präfix von $f(uv)$ ist. Hierzu setzen wir u als $u := a_1, \dots, a_i$ und v als $v := a_{i+1}, \dots, a_n$. Dann gilt nach Definition 1.62:

$$\begin{aligned}
 f(uv) &= \lambda^*(q, uv) \\
 &= \lambda^*(q, a_1, \dots, a_n) \\
 &= \lambda(q, a_1) \lambda(\delta(q, a_1), a_2) \dots \lambda(\delta(q, a_1 \dots a_{n-1}), a_n) \\
 &= \lambda(q, a_1) \lambda(\delta(q, a_1), a_2) \dots \lambda(\delta(q, a_1 \dots a_{i-1}), a_i) \lambda(\delta(q, a_1, \dots, a_i), a_{i+1} \dots \lambda(\delta(q, a_1 \dots a_{n-1}), a_n) \\
 &= \lambda^*(q, a_1 \dots a_i) \lambda^*(\delta(q, a_1 \dots a_i) a_{i+1} \dots a_n) \\
 &= \lambda^*(q, u) \lambda^*(\delta(q, a_1 \dots a_i) v) \\
 &= f(u) \lambda^*(\delta(q, a_1 \dots a_i) v)
 \end{aligned}$$

Damit ist $f(u)$ ein Präfix von $f(uv)$, sprich f ist präfixtreu.

Längenbeschränkt

Wir zeigen $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 : |f(w)| \leq k |w|$ per Induktion über der Länge von w :

Induktionsanfang $|w| = 1$

Setze $k := \max_{x \in (\Sigma \cup \{\emptyset\} \cup \{\epsilon\})} (|f(x)|)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 |f(w)| &\leq k \\
 &= k |w|
 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung $|w| = n$

$$\exists k \geq 0 : |f(w)| \leq k |w|$$

Induktionsschluss $|w| = n + 1$

Sei $w = va$, so gilt nach Definition von f :

$$\begin{aligned} f(va) &= \lambda^*(q_0, va) \\ &= \lambda^*(q_0, v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \\ &= f(v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \end{aligned}$$

Da $|f(v)| = n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, also ein k' gesetzt werden für das $|f(v)| \leq k' + |v|$ gilt. Setze nun $k'' := \max_{x \in \Sigma} (|\lambda(\delta(q_0, v), x)|)$ und $k := k' + k''$, so gilt:

$$\begin{aligned} |f(w)| &= |f(v)| + |\lambda(\delta(q_0, v), a)| \\ &\leq k' + |v| + |\lambda(\delta(q_0, v), a)| \\ &\leq k' + |v| + k'' \cdot 1 \\ &= (k' + k'') \cdot (|v| + 1) \\ &= k + |w| \end{aligned}$$

Regulär

Um dies zu zeigen zeigen wir, dass $f(L)$ eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen hat. Hierzu definieren wir die Äquivalenzrelation \sim auf $f(\Sigma^*) \subseteq \tau^*$ definiert als:

$$\sim = \{(a, b) \mid \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y\}$$

Es gilt zu zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist:

Reflexiv

$$\begin{aligned} a \sim a &\iff^{Def. \sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = a \wedge x = y \\ &\iff^{Setze y := x} \exists x \in \Sigma^* : f(x) = a \\ &\iff^{Da a \in f(\Sigma^*)} \text{wahr} \end{aligned}$$

Symmetrisch

$$\begin{aligned}
a \sim b &\iff^{Def.\sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \\
&\iff^{Umbenennung} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = b \wedge f(y) = a \wedge x = y \\
&\iff^{Def.\sim} b \sim a
\end{aligned}$$

Transitiv

$$\begin{aligned}
a \sim b \wedge b \sim c &\iff^{Def.\sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \wedge \exists x', y' \in \Sigma^* : f(x') = b \wedge f(y') = c \wedge x' = y' \\
&\iff^{Setze x' := x} \exists x, y, y' \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \wedge f(x) = b \wedge f(y') = c \wedge x = y' \\
&\iff \exists x, y' \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y') = c \wedge x = y' \\
&\iff^{Def.\sim} a \sim c
\end{aligned}$$

Somit ist \sim eine Äquivalenzrelation auf $f(\Sigma^*)$. Da f eine Funktion ist und einer Eingabe nur eine Ausgabe zugeordnet ist kann die Anzahl der Äquivalenzklassen von \sim nur kleiner gleich deren von $=$ sein, denn es fallen durch doppelt getroffene Elemente in $f(\Sigma^*)$ höchstens Äquivalenzklassen zusammen, es entstehen aber keine neuen. Da L aber regulär ist gibt es eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen, also hat $f(L)$ auch eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen und ist damit regulär.