Aufgabe 4.2

Sei das Gleichungssystem GS(a) gegeben als:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0X_0 + 1X_0 + 0X_1 = 0^*1^*0X_1 \\ X_1 &= 0X_2 \\ X_2 &= 0X_2 + 1X_2 + \varepsilon = 0^*1^*\varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

Dies lässt sich umformen als

$$\begin{aligned} X_0 &= 0^*1^*0X_1 \\ &= 0^*1^*0(0X_2) \\ &= 0^*1^*00(0^*1^*\varepsilon) \\ &= 0^*1^*000^*1^* \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 4.3

Wir beweisen dies per Induktion über die Wortlänge:

Induktionsanfang

Sei $w \in L$ und $\mid w \mid= 1$, so gilt

$$w = a = w^R \tag{3}$$

Somit ist w^R regulär.

Induktionsvoraussetzung

Sei L regulär, $w \in L$ und $\mid w \mid= n$, so ist w^R regulär.

Induktionsschluss

Sei $\mid w \mid= n + 1$, so gilt:

$$w = a_1 ... a_{n+1} \tag{4}$$

Also gilt für w^R

$$\begin{aligned} w^R &= a_{n+1} a_n ... a_1 \\ &= a_{n+1} + a_n ... a_1 \end{aligned} \tag{5}$$

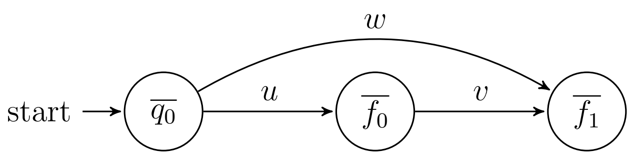
a_{n+1} ist per Induktionsanfang regulär und $a_n ... a_1$ per Induktionsvoraussetzung. Dementsprechend sind beide zusammen ebenfalls regulär.

Da alle $w \in L^R$ regulär sind, wenn L regulär ist gilt die Behauptung.

Aufgabe 4.4

Sei A DEA der regulären Sprache L. Und sei $\overline{A}$ der dazu gehörige Äquivalenzklassen DEA von A.
Sei $\overline{A}$ wie folgt definiert: $\overline{A} = (\overline{Q}, \sum, \overline{q_0}, \overline{\delta}, \overline{F})$

Nach der Definition von MIN(L) darf es folgenden Teil Automaten nicht geben:



Mit $\overline{f_0}, \overline{f_1} \in \overline{F}$.
$\delta^*(\overline{q_0}, u) = \overline{f_0}$ da $u \in L$
$\delta^*(\overline{f_0}, v) = \overline{f_1}$ da $w \in L$

Da es nach Def von MIN keine derartige Zerlegung geben darf gibt es in MIN(L) kein $\overline{f_0}$ derart, wie vorher definiert. Also Fallen Zustände des Äquivalenzklassen DEA von L weg, wenn man MIN() darauf anwendet. Daher ist auch der Index der Äquivalenzklassen endlich und nach dem Satz von Nerode ist MIN(L) regulär.