7.2

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_1 kontextfrei ist.
So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_1 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_1 erzeugt. Sei n zudem die Pumping-konstante und $\mid z \mid \geq n$, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\exists uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy \\
\Longleftrightarrow &\exists jklmn \in \mathbb{N}_{\geq 0} : z = a^j a^k a^l a^m a^n \\
\Longleftrightarrow &\exists jklmn \in \mathbb{N}_{\geq 0} : z = a^{j+k+l+m+n}
\end{aligned}$$

Da $z \in L_1$ muss (j+k+l+m+n) prim sein. Nach dem Pumping-Lemma muss auch für ein beliebiges i $uv^iwx^iy \in L_1$ sein. Setze i:= (j+l+n), so muss folgendes $z' = uv^{(j+l+n)}wx^{(j+l+n)}y \in L_1$ gelten. Zudem gilt:

$$\begin{aligned}
z' &= uv^{(j+l+n)}wx^{(j+l+n)}y \\
&= a^j a^{(j+l+n)\cdot k} a^l a^{(j+l+n)\cdot m} a^n \\
&= a^{j+(j+l+n)\cdot k+l+(j+l+n)\cdot m+n} \\
&= a^{(j+l+n)\cdot(k+m+1)} \\
&\Longleftrightarrow (j+l+n)\cdot(k+m+1) \text{ prim} \\
&\Longleftrightarrow^1 \text{WSP}
\end{aligned}$$

1) führt zum Widerspruch, da $vx \neq \epsilon \Longleftrightarrow k + m \geq 1$ gilt. Somit ist die Sprache nicht kontextfrei.

7.3

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_2 kontextfrei ist.
So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_2 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_2 erzeugt. Sei n zudem die Pumping-konstante und $\mid z \mid \geq n$, so sei z zerlegt als:

$$
\begin{aligned}
z &:= uvwxy \\
u &:= a^j \\
v &:= b^k \\
w &:= \epsilon \\
x &:= a^j \\
y &:= b^k \\
j &\neq k
\end{aligned}
$$

So ist $z \in L_2$, dementsprechend müsste nach dem Pumping-Lemma ebenfalls $z' = uv^iwx^iy \in L_2$ sein, jedoch gilt:

$$
\begin{aligned}
z' &= uv^iwx^iy \\
&= a^jb^{k \cdot i}\epsilon a^{j \cdot i}b^k
\end{aligned}
$$

Da $k \neq j \Rightarrow (k \cdot i) \neq (j \cdot i)$ ist $z' \notin L_2$, dementsprechend ist die Sprache nicht kontextfrei.

7.4