9.2

$\mathfrak{A} = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{1, 0\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, q_0, \Box, \{q_f\})$
Dabei ist δ wie folgt definiert:

$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, r)$Suche das LSB (least significant bit)
$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, r)$Suche das LSB (least significant bit)
$\delta(q_0, \Box) = (q_1, \Box, l)$Found the LSB (least significant bit)
$\delta(q_1, 0) = (q_f, 1, l)$Wenn das LSB 0 ist addiere einen drauf und wir sind fertig
$\delta(q_1, 1) = (q_1, 0, l)$Wenn das LSB 1 ist setze es auf 0 und addiere es auf das nächste Element
$\delta(q_1, \Box) = (q_f, 1, n)$Wenn das Wort zu kurz ist setze eine 1 vor das MSB (most significant bit)

Dabei dient q_0 zum bewegen des Lese/Schreibkopfes nach ganz rechts zum kleinsten Bit und q_1 addiert 1 und ändert alle Bits von rechts nach links.

9.3

Bei dieser Aufgabe nehmen wir an, dass das Bit mit der geringsten Wertigkeit ganz rechts auf dem Band liegt. $\mathfrak{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}, \{1, 0\}, \{0, 1, \Box\}, \delta, q_0, \Box, \{q_f\})$
Dabei ist Δ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, \{0, 0\}) &= (q_0, \{1, 0\}, rr) \\
\delta(q_0, \{0, 1\}) &= (q_0, \{1, 1\}, rr) \\
\delta(q_0, \{0, \square\}) &= (q_0, \{1, \square\}, rn) \\
\delta(q_0, \{1, 0\}) &= (q_0, \{0, 0\}, rr) \\
\delta(q_0, \{1, 1\}) &= (q_0, \{0, 1\}, rr) \\
\delta(q_0, \{1, \square\}) &= (q_0, \{0, \square\}, rn) \\
\delta(q_0, \{\square, 0\}) &= (q_0, \{\square, 0\}, nr) \\
\delta(q_0, \{\square, 1\}) &= (q_0, \{\square, 1\}, nr) \\
\delta(q_0, \{\square, \square\}) &= (q_1, \{\square, \square\}, ll)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_1, \{0, \square\}) &= (q_2, \{1, \square\}, ln) \\
\delta(q_1, \{1, \square\}) &= (q_1, \{0, \square\}, ln) \\
\delta(q_1, \{\square, \square\}) &= (q_2, \{1, \square\}, ln)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_2, \{0, \square\}) &= (q_2, \{0, \square\}, rn) \\
\delta(q_2, \{1, \square\}) &= (q_2, \{1, \square\}, rn) \\
\delta(q_2, \{\square, \square\}) &= (q_3, \{\square, \square\}, nn)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_3, \{0, 0\}) &= (q_3, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{0, 1\}) &= (q_3, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{1, 0\}) &= (q_3, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{1, 1\}) &= (q_4, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{\square, 0\}) &= (q_3, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{\square, 1\}) &= (q_3, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{1, \square\}) &= (q_3, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{0, \square\}) &= (q_3, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_3, \{\square, \square\}) &= (q_f, \{\square, \square\}, ll)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(q_4, \{0, 0\}) &= (q_3, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{0, 1\}) &= (q_4, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{1, 0\}) &= (q_4, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{1, 1\}) &= (q_4, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{\square, 0\}) &= (q_3, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{\square, 1\}) &= (q_4, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{0, \square\}) &= (q_3, \{1, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{1, \square\}) &= (q_4, \{0, \square\}, ll) \\
\delta(q_4, \{\square, \square\}) &= (q_f, \{\square, \square\}, ll)
\end{aligned}
$$

In q_0 wandern beide Lese-/Schreibköpfe zum kleinsten Bit beider Zahlen und invertiert dabei die Zahl auf Band 1.
In q_1 wird 1 auf die Zahl auf Band 1 addiert. In q_2 werden der Lese und Schreibkopf wieder zum kleinsten Bit der ersten Zahl bewegt. In q_3 werden beide Zahlen Bitweise addiert ohne Übertrag. In q_4 werden beide Zahlen unter Berücksichtigung eines Übertragsbit bitweise addiert.

9.4

Sei L eine deterministisch kontextfreie Sprache so gibt es einen DPDA $a = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$ für den gilt $L = L(a)$. Um zu zeigen, dass Min(L) deterministisch kontextfrei ist gilt es zu zeigen, dass ein DPDA a' existiert für welchen Min(L) = L(a') gilt.

Sei $a' = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta', F)$ mit Δ' definiert als:

$$\Delta' = \{(q, a, \gamma, \gamma*, q') \mid (q, a, \gamma, \gamma*, q') \in \Delta \land q \notin F\}$$

Somit gilt für jedes von a' erkannte Wort u, dass es kein Wort gibt, welches u als Präfix hat. Dies ist eben die Bedingung der minimalen Sprache, dementsprechend gilt L(a') = Min(L), daher ist Min(L) kontextfrei.