10.2

x ÷ y

```
x := x + 1;
LOOP x
#   Increase z unless x == 0
    k := 0;
    LOOP x DO BEGIN
       k := 1;
    END
    z := z + k;
#   Substract divisor from dividend
    LOOP y DO BEGIN
       x := x - 1;
    END
END
z := z - 1;
```

x mod y

```
# get clones of variables for calculation
a := a + x;
b := b + y;
a := a + 1;
LOOP a BEGIN
#   Increase z unless a == 0
    k := 0;
    LOOP a BEGGIN
      k := 1;
    END
    z := z + k;
#   Substract divisor from dividend
    LOOP b BEGIN
      a := a - 1;
    END
END
z := z - 1;
LOOP z BEGIN
    LOOP y BEGIN
```

```
17     j := j + 1;
18   END
19 END
20 LOOP j BEGIN
21   x := x - 1;
22 END
```

10.3

Sei P das gegebene Programm und beschreibe P_n die nte Programmzeile und $P_{n,m}$ das Teilprogramm von der nten bis zur mten Programmzeile, so gilt:

Sei k der kleinste Wert für den $pr_1([P_{6,12}]^k(n+1,0,1,n,0)) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
[P](n,0,0,0,0) &= [P_{2,14}](n+1,0,0,0,0) \\
&= [P_{3,14}](n+1,0,0,0,0) \\
&= [P_{4,14}](n+1,0,1,0,0) \\
&= [P_{5,14}](n+1,0,1,n,0) \\
&= [P_14]([P_{5,12}](n+1,0,1,n,0)) \\
&= [P_14]([P_{6,12}]^k(n+1,0,1,n,0))
\end{aligned}$$

$[P_{6,12}]$ ist hierbei definiert als

$$\begin{aligned}
[P_{6,12}](n,m,o,p,0) &= [P_{7,12}](n,m+1,o,p,0) \\
&= [P_{8,12}](n,m+1,o,p,0) \\
&= [P_{11,12}]([P_9]^{m+1}(n,m+1,o,p,0)) \\
&= [P_{11,12}](n,m+1,o,p,o\cdot(m+1)) \\
&= [P_{12}](n,m+1,o\cdot(m+1),p,o\cdot(m+1)) \\
&= (n,m+1,o\cdot(m+1),n-o\cdot(m+1),o\cdot(m+1))
\end{aligned}$$

Insgesamt berechnet [P](n) das kleinste m für das gilt $n \leq m!$.

10.4

Um zu zeigen, dass jede $While$-berechenbare Funktion $While_0$-berechenbar ist, muss für jede Teilfunktion aus dem $While$ Programm, die es nicht in der $While_0$ definition gibt ein äquivalentes Teilprogramm in $While_0$ From gefunden werden. Zu zeigen ist:

$$X_i := 0 \leftrightarrow X_i := 0 - 1 \tag{1}$$
$$X_i := X_j + X_k \leftrightarrow X_i := X_j;\ \text{loop } X_k \text{ begin } X_i := x_i + 1 \text{ end}; \tag{2}$$
$$X_i := X_j - X_k \leftrightarrow X_i := X_j;\ \text{loop } X_k \text{ begin } X_i := x_i - 1 \text{ end}; \tag{3}$$
$$X_i := X_j \leftrightarrow X_i := x_j + 1;\ X_i := X_i - 1; \tag{4}$$
$$\text{loop } X_i \text{ begin } Q \text{ end} \leftrightarrow X_k := X_i;\ \text{while } X_k > 0 \text{ do begin } Q;\ X_k := X_k - 1 \text{ end} \tag{5}$$

Beweis zu 1.:

$$\begin{aligned} x_i := 0 &\leftrightarrow [P](n_1, n_2, ...) = (n_1, ..., n_{i-1}, 0, n_{i+1}, ...) \\ &\leftrightarrow (n_1, ..., n_{i-1}, 0 - 1, n_{i+1}, ...) \\ &\leftrightarrow x_i := 0 - 1 \end{aligned}$$

Beweis zu 4.:
Sei $[Q_1]$ die Funktion die die Semantik von $x_i := x_j + 1$ und $[Q_2]$ die Semantik von $X_i := X_i - 1$ beschreibt.

$$\begin{aligned} X_i := X_j &\leftrightarrow [P](n_1, n_2, ...) = (n_1, ..., n_{i-1}, n_j, n_{i+1}, ...) \\ &= (n_1, ..., n_{i-1}, n_j + 1 - 1, n_{i+1}, ...) \\ &\leftrightarrow [Q_2]([Q_1](n_1, n_2, ...) \\ &\leftrightarrow X_i := X_j + 1;\ X_i := X_i - 1 \end{aligned}$$

Beweis zu 5.:

$$\begin{aligned} \text{loop } X_i \text{ begin } Q \text{ end} &\leftrightarrow [P](n_1, n_2, ...) = [Z]^{n_i}(n_1, n2, ...) \\ &= ([A]([Q](n_1, ...)))^{n_i} \\ &= [Z]^n(n_1, n_2, ...)) \text{ für das kleinste } n \text{ mit } pr_i([Z]^n(n_1, n_2, ...)) = 0 \end{aligned}$$

da n_i mal $n_i - 1 = 0$

Beweis zu 2.:

$$\begin{aligned} X_i := X_j + X_k &\leftrightarrow [P](n_1, n_2, ...) = (n_1, ...n_i - 1, n_j + n_k, n_i + 1, ...) \\ &= (n_1, ...n_{i-1}, n_j + 1, n_{i+1}, ...)^{n_j} \\ &\leftrightarrow X_i := X_j;\ \text{loop } X - k \text{ begin } X_j := X_i + 1 \text{ end} \end{aligned}$$

Da $X_i := X_j;$ loop $X - k$ begin $X_j := X_i + 1$ end wie schon bewiesen in $While_0$ liegt liegt auch $X_i := X_j + X_k$ in $While_0$. Der Beweis zu 3. ist analog.