

5.2

@David: FILL ME!

5.3

Um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist zeigen wir, dass es eine Grammatik gibt die Kontextfrei ist und diese Sprache erzeugt. Diese definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
 X^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{a^i b^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
 Y^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{c^i d^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
 V &= X^n \cup Y^n \cup S \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\
 \Sigma &= \{a, b, c, d\} \\
 X'^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} (|^{X \in X^n} X) \\
 Y'^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} (|^{Y \in Y^n} Y) \\
 P &= (S, (|^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} X^n Y^n)) \cup X'^n \cup Y'^n \\
 G &= (V, \Sigma, P, S)
 \end{aligned}$$

G erzeugt L

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ beliebig und $p \in \mathbb{N}_{\geq 0} : p \leq m + n$ so gilt zu zeigen, dass ein Wort $w \in L$ mit solchen m, n, p und dem sich daraus ergebenden q erzeugt werden kann. Sprich, dass $w \in L(G)$ ist, es gibt also eine Resolution die dieses Wort als Ergebnis hat.

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow X^{m+n} Y^{p+q} \\
 &\rightarrow a^m b^n c^p d^q
 \end{aligned}$$

Dementsprechend ist jedes Wort aus w auch in $L(G)$, also erzeugt $G L$.

G ist kontextfrei

zu Zeigen

5.4

Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige $u, v \in \Sigma^*$ $f(u)$ das Präfix von $f(uv)$ ist. Hierzu setzen wir u als $u := a_1, \dots, a_i$ und v als $v := a_{i+1}, \dots, a_n$. Dann gilt nach Definition 1.62:

$$\begin{aligned}
 f(uv) &= \lambda^*(q, uv) \\
 &= \lambda^*(q, a_1, \dots, a_n) \\
 &= \lambda(q, a_1) \lambda(\delta(q, a_1), a_2) \dots \lambda(\delta(q, a_1 \dots a_{n-1}), a_n) \\
 &= \lambda(q, a_1) \lambda(\delta(q, a_1), a_2) \dots \lambda(\delta(q, a_1 \dots a_{i-1}), a_i) \lambda(\delta(q, a_1, \dots, a_i), a_{i+1} \dots \lambda(\delta(q, a_1 \dots a_{n-1}), a_n) \\
 &= \lambda^*(q, a_1 \dots a_i) \lambda^*(\delta(q, a_1 \dots a_i) a_{i+1} \dots a_n) \\
 &= \lambda^*(q, u) \lambda^*(\delta(q, a_1 \dots a_i) v) \\
 &= f(u) \lambda^*(\delta(q, a_1 \dots a_i) v)
 \end{aligned}$$

Damit ist $f(u)$ ein Präfix von $f(uv)$, sprich f ist präfixtreu.

Längenbeschränkt

Wir zeigen $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 : |f(w)| \leq k \mid w \mid$ per Induktion über der Länge von w :

Induktionsanfang $\mid w \mid = 1$

Setze $k := \max_{x \in (\Sigma \cup \{\emptyset\} \cup \{\epsilon\})} (|f(x)|)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 |f(w)| &\leq k \\
 &= k \mid w \mid
 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung $\mid w \mid = n$

$$\exists k \geq 0 : |f(w)| \leq k \mid w \mid$$

Induktionsschluss $|w| = n + 1$

Sei $w = va$, so gilt nach Definition von f :

$$\begin{aligned} f(va) &= \lambda^*(q_0, va) \\ &= \lambda^*(q_0, v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \\ &= f(v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \end{aligned}$$

Da $|f(v)| = n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, also ein k' gesetzt werden für das $|f(v)| \leq k' |v|$ gilt. Setze nun $k'' := \max_{x \in \Sigma} (|\lambda(\delta(q_0, v), x)|)$ und $k := k' + k''$, so gilt:

$$\begin{aligned} |f(w)| &= |f(v)| + |\lambda(\delta(q_0, v), a)| \\ &\leq k' |v| + |\lambda(\delta(q_0, v), a)| \\ &\leq k' |v| + k'' \cdot 1 \\ &= (k' + k'') \cdot (|v| + 1) \\ &= k |w| \end{aligned}$$

Regulär

zu Zeigen: Ist L regulär, so ist auch $f(L)$ regulär