8.2

Sei a $= (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ eine Turingmaschine mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{3'}, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c, a', b', c', \Box\}$ und $F = \{q_4\}$. Sei zudem δ bestimmt durch:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, \Box) &= (\Box, r, q_0) \mid \text{ignoriere Lücken auf der Suche nach a}\\
\delta(q_0, a) &= (a', r, q_1) \mid \text{a wurde gefunden, suche ein b}\\
\delta(q_0, a') &= (a', r, q_0) \mid \text{suche das nächste a}\\
\delta(q_0, b') &= (b', l, q_{3'}) \mid \text{alle a wurden verarbeitet, teste ob das Wort korrekt ist}\\
\delta(q_1, a) &= (a, r, q_1) \mid \text{suche das nächste b}\\
\delta(q_1, a') &= (a', r, q_1) \mid \text{suche das nächste b}\\
\delta(q_1, b) &= (b', r, q_2) \mid \text{b wurde gefunden, suche ein c}\\
\delta(q_2, b) &= (b, r, q_2) \mid \text{suche das nächste c}\\
\delta(q_2, b') &= (b', r, q_2) \mid \text{suche das nächste c}\\
\delta(q_2, c) &= (c', r, q_2) \mid \text{c wurde gefunden, gehe wieder an den Anfang}\\
\forall X \in \Gamma \backslash \Box : \delta(q_3, X) &= (X, l, q_3) \mid \text{gehe an den Anfang}\\
\delta(q_3, \Box) &= (\Box, r, q_0) \mid \text{Anfang des Wortes gefunden, suche das nächste a}\\
\forall X \in \Gamma \backslash \Box : \delta(q_{3'}, X) &= (X, l, q_{3'}) \mid \text{gehe an den Anfang}\\
\delta(q_{3'}, \Box) &= (\Box, r, q_4) \mid \text{Anfang des Wortes gefunden, überprüfe die Verarbeitung}\\
\forall X \in \Gamma \backslash (\Box \cup \Sigma) : \delta(q_4, X) &= (X, r, q_4) \mid \text{überprüfe ob nur verarbeitete Symbole auftauchen}\\
\delta(q_4, \Box) &= (\Box, r, q_5) \mid \text{Ende des Wortes und kein Eingabesymbol wurde gefunden}
\end{aligned}
$$

so gilt $L(a) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

8.3

Sei $\mathfrak{A}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben, dann kann man die passende Grammatik $G = (\{S, [q_0 Z_0 q_0], [q_0 X q_0], [q_0 X q_1]\}, \{0, 1\}, P, S)$ konstruieren. Dabei sei P wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
S &\to [q_0 Z_0 q_0] \big| [q_0 Z_0 q_1] \\
[q_0 Z_0 q_0] &\to 0[q_0 X q_0][q_0 Z_0 q_0] \big| 0[q_0 X q_1][q_1 Z_0 q_0] \\
[q_0 Z_0 q_1] &\to 0[q_0 X q_0][q_0 Z_0 q_1] \big| 0[q_0 X q_1][q_1 Z_0 q_1] \\
[q_0 X q_0] &\to 0[q_0 X q_0][q_0 X q_0] \big| 0[q_0 X q_1][q_1 X q_0] \\
[q_0 X q_1] &\to 0[q_0 X q_0][q_0 X q_1] \big| 0[q_0 X q_1][q_1 X q_1] \big| 1 \\
[q_1 Z_0 q_1] &\to \epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\to [q_0 Z_0 q_1] \\
[q_0 Z_0 q_1] &\to 0[q_0 X q_1][q_1 Z_0 q_1] \\
[q_0 X q_1] &\to 0[q_0 X q_0][q_0 X q_1] \big| 1 \\
[q_1 Z_0 q_1] &\to \epsilon
\end{aligned}
$$

8.4

Behauptung

Der Schnitt einer kontextfreien Sprache mit einer regulären ist kontextfrei.

Beweis

Sei L_1 eine kontextfreie Sprache, so existiert ein Kellerautomat a_1, sodass $L(a_1) = L_1$ gilt. Sei $a_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma, q_{0_1}, Z_0, \Delta_1, F_1)$
Sei L_2 eine reguläre Sprache, so existiert ein NEA $a_{2'}$, sodass $L(a_{2'}) = L_2$ gilt. Da man nach Satz 1.19 zu jedem NEA $a_{2'}$ einen DEA a_2 finden kann, sodass gilt $a_{2'} = a_2 \Rightarrow L(a_2) = L_2$. Sei $a_2 = (Q_2, \Sigma, q_{0_2}, \Delta_2, F_2)$
Nach Bemerkung 1.9 ist der Schnitt zweier NEAs der Schnitt beider Sprachen, demnach gilt es zu zeigen, dass $L(a_1 \times a_2)$ kontextfrei ist. Nun lässt sich ein Produktautomaten a_3 so konstruieren, dass gilt: $a_1 \times a_2 = a_3 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, (q_{0_1} \times q_{0_2}), Z_0, \Delta, (F_1 \times F_2))$, wobei Δ definiert, sodass gilt

$$\forall((q_1, a, \beta), (p_1, \gamma)) \in \Delta_1 \wedge (q_2, a, p_2) \in \Delta_2 : (((q_1, q_2), a, \beta), ((p_1, p_2), \gamma)) \in \Delta$$

und

$$\forall((q_1,\epsilon,\beta),(p_1,\gamma)) \in \Delta_1 \wedge (q_2,\delta,q_2) \in \Delta_2 : (((q_1,q_2),\epsilon,\beta),((p_1,q_2),\gamma)) \in \Delta$$

Damit ist a_3 ein Kellerautomat, also ist $L(a_3)$ kontextfrei, dadurch gilt die Behauptung. $\square$