5.2

G

Sei G gegeben als $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit V = S,A,B,C,D, Σ = a,b,c,d und
P = { (S,(A | B | C | D | a | b | c | d | ε)), (A, (aSa)), (B, (bSb)), (C, (cSc)), (D, (dSd)) }

Kontextfrei

Dies gilt, da für alle $(\alpha, \beta) \in P$ gilt, dass $\alpha \in V$ ist. Dementsprechend ist die Grammatik Kontextfrei.

L = L(G)

Dies zeigen wir, indem wir zeigen, dass alle $w' \in L(G)$ exakt die Bedingung von L erfüllen.
Sei $w \in L$ beliebig, so gilt für die Induktion:

$\mid w \mid = 1$

In diesem Fall kann für w lediglich gelten $w \in (\{\emptyset, \varepsilon\} \cup \Sigma)$. Von $w = \emptyset$ oder $w = \varepsilon$ gilt sowohl, dass sie in L sind, als auch das sie in L(G) sind, denn diese sind in jeder Grammatik. (¡= ????? Don't know just guessed) Für $w \in \Sigma$ gilt dass diese in L sind, da ein Buchstabe umgedreht weiterhin der selbe ist. Zudem gilt, dass dieser in L(G) ist, da für $(S, X) \in P$ gilt, dass jedes Element aus Σ in X ist. Dementsprechend gilt dies für solche w.

Induktionsvoraussetzung: $\mid w \mid = n$

$\forall w \in L(G) : w \in L$ (Ist das die richtige Behauptung?)

Induktionsschritt: $\mid w \mid = n + 1$

zu Zeigen

5.3

Um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist zeigen wir, dass es eine Grammatik gibt die Kontextfrei ist und diese Sprache erzeugt. Diese definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
X^n &= \bigcup^{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \{a^ib^j \mid \exists i,j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i+j=n\} \\
Y^n &= \bigcup^{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \{c^id^j \mid \exists i,j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i+j=n\} \\
V &= X^n \cup Y^n \cup S\text{mit n } \in \mathbb{N} \\
\Sigma &= \{a,b,c,d\} \\
X'^n &= |^{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \; (|^{X\in X^n} \; X) \\
Y'^n &= |^{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \; (|^{Y\in Y^n} \; Y) \\
P &= (S, (|^{n\in\mathbb{N}_{\geq 0}} \; X^nY^n)) \cup X'^n \cup Y'^n \\
G &= (V, \Sigma, P, S)
\end{aligned}$$

G erzeugt L

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ beliebig und $p \in \mathbb{N}_{\geq 0} : p \leq m+n$ so gilt zu zeigen, dass ein Wort $w \in L$ mit solchen m,n,p und dem sich daraus ergebenden q erzeugt werden kann. Sprich, dass $w \in L(G)$ ist, es gibt also eine Resolution die dieses Wort als Ergebnis hat.

$$\begin{aligned}
S &\to X^{m+n}Y^{p+q} \\
&\to a^mb^nc^pd^q
\end{aligned}$$

Dementsprechend ist jedes Wort aus w auch in L(G), also erzeugt G L.

G ist kontextfrei

zu Zeigen

5.4