6.2)

Akzeptierte Ausdrücke:

$ba(a^*b^*)^*$

$bb(a^*b^*)^*$

$aaa(a^*b^*)^*$

$aab(a^*b^*)^*$

$aba(a^*b^*)^*$

$abb(a^*b^*)^*$

Daraus ableitbare Grammatik:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X \\ X &\rightarrow aY|bQ \\ Y &\rightarrow aQ|bQ \\ Q &\rightarrow a|b|aQ|bQ \end{aligned}$$

6.3)

Schritt 1:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAA|BbB \\ A &\rightarrow Bb|Ba|a \\ B &\rightarrow bBC|bAC \\ C &\rightarrow Bb|a \end{aligned}$$

Schritt 2:

$$\begin{aligned}
S &\to X_aAA|BX_bB \\
A &\to BX_b|BX_a|a \\
B &\to X_bBC|X_bAC \\
C &\to BX_b|a \\
X_a &\to a \\
X_b &\to b
\end{aligned}$$

Schritt 3:

$$\begin{aligned}
S &\to X_aA_1|BB_1 \\
A_1 &\to AA \\
B_1 &\to X_bB \\
A &\to BX_b|BX_a|a \\
B &\to X_bB_2|X_bA_2 \\
B_2 &\to BC \\
A_2 &\to AC \\
C &\to BX_b|a \\
X_a &\to a \\
X_b &\to b
\end{aligned}$$

6.4)

Die durch die gegeben Grammatik erzeugte Sprache ist definiert durch:

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid \quad | w |_a = | w |_b \wedge \forall u, v \in \Sigma^* : u \cdot v = w \Rightarrow | u |_a \geq | u |_b\} \tag{1}$$

Nun gilt es zu zeigen, dass L = L(G) ist. Dies zeigen wir per Induktion:

$w \in L \Rightarrow w \in L(G)$

Induktionsanfang

Sei $\mid w \mid = 0$, so folgt daraus, dass $w = \epsilon$ sein muss. Dementsprechend kann w von S aus resolviert werden, ist also in L.
Für w gilt ebenfalls $w = 0 = \mid w \mid_a = \mid w \mid_b$. Da es lediglich ein u und v gibt, sodass $\epsilon = uv$ gilt und zwar $\epsilon := u := v$.

Induktionsvoraussetzung

$w \in L \wedge \mid w \mid = n \Rightarrow w \in L(G)$

Induktionsschluss

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mid w \mid = n+2 \geq 2$. Dann ist w = aubv mit $u, v \in L$, da w mit einem a beginnen muss, um die Bedingung $\forall u, v \in \Sigma^* : uv = w \Rightarrow \mid u \mid_a \geq \mid u \mid_b$ zu erfüllen. Dementsprechend muss es aber Ableitungen geben, sodass gilt:

$$\begin{aligned} S &\vdash^* aSbS \\ &= aubv \\ &= w \end{aligned}$$

$w \in L(G) \Rightarrow w \in L$

Induktionsanfang

Sei $\mid w \mid = 0$, so folgt daraus, dass $w = \epsilon$ sein muss. Dementsprechend kann w von S aus resolviert werden, ist also in L.
Für w gilt ebenfalls $w = 0 = \mid w \mid_a = \mid w \mid_b$. Da es lediglich ein u und v gibt, sodass $\epsilon = uv$ gilt und zwar $\epsilon := u := v$.

Induktionsvoraussetzung

$w \in L(G) \wedge \mid w \mid = n \Rightarrow w \in L$

Induktionsschluss

Sei w der Länge n+2, so muss es im Vergleich zu einem w' der Länge n eine weitere Resolution der Form

$$S \vdash aSbS$$

geben. Dementsprechend muss es in w Teilwörter geben, sodass w = aubv gilt. Das beide Resolvierbar sind wissen wir da $| u | \leq n \wedge | v | \leq n \wedge | uv | = n$ gilt. Daher gilt auch $| u |_a = | u |_b$ und $| v |_a = | v |_b$. Also gilt $| w |_a = 1 + | uv |_a = 1 + | uv |_b = | w |_b$. Da a vor b angefügt wurde gilt ebenfalls

$$\forall x, y \in \Sigma^* : x \cdot y = w \Rightarrow | x |_a \geq | y |_b \tag{2}$$

Dementsprechend ist $w \in L$.