5.2

Sei G die kontextfreie Sprache von $L = \{w | w^{\top} = w\}$. Sei $G = (S, X, a, b, c, d, P, S)$, wobei P definiert ist durch:

$$S \rightarrow \epsilon | X$$
$$X \rightarrow a|b|c|d|aa|bb|cc|dd|aXa|bXb|cXc|dXd$$

G erzeugt L

Das G die Sprache L erzeugt wird wie folgt induktiv gezeigt:

Induktions Anfang:
Für $w \in L$ mit $|w| \leq 2$ gilt:

$$\text{Für } \epsilon \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow \epsilon$$
$$\text{Für } a \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow a$$
$$\text{Für } b \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow b$$
$$\text{Für } c \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow c$$
$$\text{Für } d \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow d$$
$$\text{Für } aa \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow aa$$
$$\text{Für } bb \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow bb$$
$$\text{Für } cc \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow cc$$
$$\text{Für } dd \in L \text{ gilt } S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow dd$$

Induktions Behauptung:
Es gibt ein $w \in L$ das von der Grammatik erzeugt wird.
Induktions Schluss:
Sei $w \in L$ und von G erzeugbar. Weiter sei $y \in \{a, b, c, d\}$ dann gilt $ywy \in L$ da $(ywy)^{\top} = ywy$. Für $ywy \in L$ gilt $S \rightsquigarrow X \rightsquigarrow yXy$. Nach der Induktionsbehauptung kann w durch G erzeugt werden und damit das X zu einem Ausdruck der in L ist aufgelöst werden.

5.3

Um zu zeigen, dass die Sprache L kontextfrei ist müssen wir eine Grammatik G finden, die L erzeugt und kontextfrei ist.

Sei G gegeben als $G = (\{S, X_1, X_2, X_{2'}, X_3\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ wobei P definiert ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to X_1 \\ X_1 &\to ad \mid aX_1d \mid X_2 \mid X_{2'} \\ X_2 &\to ac \mid aX_2c \mid X_3 \\ X_{2'} &\to bd \mid bX_{2'}d \mid X_3 \\ X_3 &\to bc \mid bX_3c \mid \epsilon \end{aligned}$$

G erzeugt L

Es gilt zu zeigen, dass jedes Wort in L durch G erzeugt werden kann. Hierzu unterscheiden wir den Fall, dass $m \geq q$ ist und den Fall, dass $m \leq q$ ist: Sei $w \in L$, so gilt $\exists m, n, p, q \in \mathbb{N} : w = a^m b^n c^p d^q$.

$m \geq q$

Es gilt ebenfalls:

$$\begin{aligned} &S \vdash_G^{S \to X_1} \\ &X_1 \vdash_G^{\text{q mal } X_1 \to aX_1d} \\ &a^q X_1 d^q \vdash_G^{X_1 \to X_2} \\ &a^q X_2 d^q \vdash_G^{\text{m-q mal } X_2 \to aX_2c} \\ &a^q a^{m-q} X_2 c^{m-q} d^q \vdash_G^{X_2 \to X_3} \\ &a^q a^{m-q} X_3 c^{m-q} d^q \vdash_G^{\text{n-1 mal } X_3 \to bX_3c} \\ &a^q a^{m-q} b^{n-1} X_3 c^{n-1} c^{m-q} d^q \vdash_G^{X_3 \to bc} \\ &a^q a^{m-q} b^{n-1} bcc^{n-1} c^{m-q} d^q = \\ &a^m b^n c^{n+m-q} d^q =^{\text{Da p = m + n -q}} \\ &a^m b^n c^p d^q \end{aligned}$$

$m \leq q$

$$
\begin{aligned}
&S \vdash_G^{S \to X_1} \\
&X_1 \vdash_G^{\text{m mal } X_1 \to aX_1d} \\
&a^m X_1 d^m \vdash_G^{X_1 \to X_{2'}} \\
&a^m X_{2'} d^m \vdash_G^{\text{q-m mal } X_{2'} \to bX_{2'}d} \\
&a^m b^{q-m} X_{2'} d^{q-m} d^m \vdash_G^{X_{2'} \to X_3} \\
&a^m b^{q-m} X_3 d^{q-m} d^m \vdash_G^{\text{p-1 mal } X_3 \to bX_3c} \\
&a^m b^{q-m} b^{p-1} X_3 c^{p-1} d^{q-m} d^m \vdash_G^{X_3 \to bc} \\
&a^m b^{q-m} b^{p-1} bcc^{p-1} d^{q-m} d^m = \\
&a^m b^{p+q-m} c^p d^q =^{\text{Da n = p+q-m}} \\
&a^m b^n c^p d^q
\end{aligned}
$$

Hierbei ist zu beachten, dass falls einer der Werte 0 ist direkt zum nächsten Resolutionsschritt übergegangen wird, bzw dass die Gesamtresolution mit einer Resolution nach einem Ergebnis ohne Variable beendet wird.

G ist kontextfrei

Da alle Regeln aus G die Form haben, dass sie einer Variable eine Transition zuordnen ist diese Grammatik und damit auch die Sprach L kontextfrei.

5.4

Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige $u, v \in \Sigma^*$ f(u) das Präfix von f(uv) ist. Hierzu setzen wir u als $u := a_1, ..., a_i$ und v als $v := a_{i+1}, ..., a_n$. Dann gilt nach Definition 1.62:

$$\begin{aligned}
f(uv) &= \lambda^*(q, uv) \\
&= \lambda^*(q, a_1, ..., a_n) \\
&= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\
&= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{i-1}), a_i)\lambda(\delta(q, a_1, ..., a_i), a_{i+1}...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\
&= \lambda^*(q, a_1...a_i)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)a_{i+1}...a_n) \\
&= \lambda^*(q, u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v) \\
&= f(u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v)
\end{aligned}$$

Damit ist f(u) ein Präfix von f(uv), sprich f ist präfixtreu.

Längenbeschränkt

Wir zeigen $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 :\mid f(w) \mid\leq k \mid w \mid$ per Induktion über der Länge von w:

Induktionsanfang | w | = 1

Setze $k := max_{x\in(\Sigma\cup\{\emptyset\}\cup\{\epsilon\})}(\mid f(x) \mid)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\mid f(w) \mid &\leq k \\
&= k \mid w \mid
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung | w | = n

$$\exists k \geq 0 :\mid f(w) \mid\leq k \mid w \mid$$

Induktionsschluss | w | = n + 1

Sei w = va, so gilt nach Definition von f:

$$\begin{aligned}
f(va) &= \lambda^*(q_0, va) \\
&= \lambda^*(q_0, v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \\
&= f(v)\lambda(\delta(q_0, v), a)
\end{aligned}$$

Da $\mid f(v) \mid = n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, also ein k' gesetzt werden für das $\mid f(v) \mid \leq k' \mid v \mid$ gilt. Setze nun $k'' := max_{x\in\Sigma}(\mid \lambda(\delta(q_0, v), x) \mid)$ und k := k' + k", so gilt:

$$\begin{aligned}
\mid f(w) \mid &= \mid f(v) \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\
&\leq k' \mid v \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\
&\leq k' \mid v \mid + k''1 \\
&= (k' + k'') \cdot (\mid v \mid + 1) \\
&= k \mid w \mid
\end{aligned}$$

Regulär

Um dies zu zeigen zeigen wir, dass f(L) eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen hat. Hierzu definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $f(\Sigma^*) \subseteq \tau^*$ definiert als:

$$\sim = \{(a, b) \mid \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y\}$$

Es gilt zu zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist:

Reflexiv

$$\begin{aligned}
a \sim a &\Longleftrightarrow^{Def. \sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = a \wedge x = y \\
&\Longleftrightarrow^{Setze y := x} \exists x \in \Sigma^* : f(x) = a \\
&\Longleftrightarrow^{Da a \in f(\Sigma^*)} wahr
\end{aligned}$$

Symetrisch

$$\begin{aligned}
a \sim b &\Longleftrightarrow^{Def. \sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \\
&\Longleftrightarrow^{Umbenennung} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = b \wedge f(y) = a \wedge x = y \\
&\Longleftrightarrow^{Def. \sim} b \sim a
\end{aligned}$$

Transitiv

$a \sim b \wedge b \sim c$
$\Longleftrightarrow^{Def. \sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \wedge \exists x', y' \in \Sigma^* : f(x') = b \wedge f(y') = c \wedge x' = y'$
$\Longleftrightarrow^{Setze x' := x} \exists x, y, y' \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \wedge f(x) = b \wedge f(y') = c \wedge x = y'$
$\Longleftrightarrow \exists x, y' \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y') = c \wedge y = y'$
$\Longleftrightarrow^{Def. \sim} a \sim c$

Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $f(\Sigma^*)$. Da f eine Funktion ist und einer Eingabe nur eine Ausgabe zugeordnet ist kann die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim$ nur kleiner gleich deren von $=$ sein, denn es fallen durch doppelt getroffene Elemente in $f(\Sigma^*)$ höchstens Äquivalenzklassen zusammen, es entstehen aber keine neuen. Da L aber regulär ist gibt es eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen, also hat f(L) auch eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen und ist damit regulär.