7.2

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_1 kontextfrei ist. So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_1 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_1 erzeugt. Zerteilt man ein $z \in L(G_1)$, sodass $z = uvwxy$ gilt und setzt man nun die Variablen $u := w := x := y := \epsilon$, so ist keine der Bedingungen des Pumping-Lemmas verletzt und es gilt:

$$z \in L_1 \Rightarrow z \in L(G_1) \iff z = uvwxy = v \iff \exists k \in \mathbb{N} : \text{k ist prim} \wedge v = a^k \quad (1)$$

Wenden wir nun das Pumping-Lemma an, so muss ebenfalls gelten

$$v^2 \in L(G_1) \iff \exists k' : \text{k' ist prim} \wedge v^2 = a^{k'} \quad (2)$$

Da dieses $k' = k \cdot 2$ sein müsste ist dies keine Primzahl mehr, es gibt also einen Widerspruch

7.3

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_2 kontextfrei ist. So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_2 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_2 erzeugt. Zerteilt man ein $z \in L(G_2)$, sodass $z = uvwxy$ gilt und setzt man nun die Variablen $u := y := \epsilon$, $v := ab$, $w := a$ und $x := b$, so ist keine der Bedingungen des Pumping-Lemmas verletzt und es gilt:

$$v^2wx^2 = abababb \notin L(G_2) \iff v^2wx^2 \notin L_2 \quad (3)$$

Dies ist ein Widerspruch zum Pumping-Lemma.

7.4