7.2

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_1 kontextfrei ist.

So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_1 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_1 erzeugt. Sei g zudem die Pumping-konstante und $\mid z \mid \geq g$, so gilt:

$$\begin{aligned} &\exists uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy \\ \Longleftrightarrow &\exists jklmn \in \mathbb{N}_{\geq 0} : z = a^j a^k a^l a^m a^n \\ \Longleftrightarrow &\exists jklmn \in \mathbb{N}_{\geq 0} : z = a^{j+k+l+m+n} \end{aligned}$$

Da $z \in L_1$ muss (j+k+l+m+n) prim sein. Nach dem Pumping-Lemma muss auch für ein beliebiges i $uv^i wx^i y \in L_1$ sein. Setze i:= (j+l+n), so muss folgendes $z' = uv^{(j+l+n)} wx^{(j+l+n)} y \in L_1$ gelten. Zudem gilt:

$$\begin{aligned} z' &= uv^{(j+l+n)} wx^{(j+l+n)} y \\ &= a^j a^{(j+l+n)\cdot k} a^l a^{(j+l+n)\cdot m} a^n \\ &= a^{j+(j+l+n)\cdot k + l + (j+l+n)\cdot m + n} \\ &= a^{(j+l+n)\cdot(k+m+1)} \\ &\Longleftrightarrow (j+l+n)\cdot(k+m+1) \text{ prim} \\ &\Longleftrightarrow^1 \text{WSP} \end{aligned}$$

1) führt zum Widerspruch, da $vx \neq \epsilon \Longleftrightarrow k+m \geq 1$ gilt. Somit ist die Sprache nicht kontextfrei.

7.3

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_2 kontextfrei ist.
So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_2 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_2 erzeugt. Sei n zudem die Pumping-konstante und $|z| \geq n$, so gilt:

$$\begin{aligned}
z &:= uvwxy \\
u &:= a^j \\
v &:= b^k \\
w &:= \epsilon \\
x &:= a^j \\
y &:= b^k \\
j &\neq k
\end{aligned}$$

So ist $z \in L_2$, dementsprechend müsste nach dem Pumping-Lemma ebenfalls $z' = uv^iwx^iy \in L_2$ sein, jedoch gilt:

$$\begin{aligned}
z' &= uv^iwx^iy \\
&= a^jb^{k \cdot i}\epsilon a^{j \cdot i}b^k
\end{aligned}$$

Da $k \neq j \Rightarrow (k \cdot i) \neq (j \cdot i)$ ist $z' \notin L_2$, dementsprechend ist die Sprache nicht kontextfrei.

7.4

Sei n die Pumping Lemma Zahl zu L. Jedes Wort $ez \in L$ der Länge $\leq n$ lässt sich zerlegen in $uvwxy$ mit den Eigenschaften 1,2,3 des Punmping Lemmas. Da $L \subset \{a\}^*$ für ein Zeichen a gilt, können diese Eigenschaften einfacher formuliert werden: Es gilt $z = a^m = a^k a^l$, wobei $m \geq n$,$k + l = m$,$1 \leq l \leq n$, und $a^k a^{il} \in L$ für $i \in$ N. Für jedes $z \in L$,$|z| \geq n$, insgesamt nur endlich viele l-Werte vor, sagen wir $l_1, l_2, ..., l_p$. Sei $q \geq n$ eine Zahl, die vor allen l_i geteilt wird (etwa $q = n!$); und sei $q' \geq q$ eine"geeignet gewählteSZahl, die wir noch später bestimmen. Betrachte die Sprache

$$L' = \{x \in L||x| \leq q\} \cup \{a^r a^i q | q \leq r \leq q', a^r \in L, i \in \mathrm{N}\}$$

Dann ist L' sicherlich regulär, und es ist klar, dass $L' \subset L$ gilt. Wir zeigen wenn q' genügent großist, dann gilt auch $L \subset L'$. Bis zu Wörtern der Länge $\leq q$ stimmen L und L' überein. Sei nun $z = a^r$ in L gibt mit $q \leq r \leq q'$ und $r \equiv m(\mathrm{mod} q)$.

Damit ist nun alles klar: Wir wählen q' so groß, dass die Wörter in L mit den Längen $q, ..., q'$ alle möglichen Reste modulo q bilden, die unter allen Wörtern in L (der Länge $\geq q$) überhaupt auftreten. Da es nur endlich viele solche Reste gibt, gibt es eine solche endliche Zahl q'.