5.2

@David: FILL ME!

5.3

@ Daniel Fill me! (siehe Zettel) Um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist zeigen wir, dass es eine Grammatik gibt die Kontextfrei ist und diese Sprache erzeugt. Diese definieren wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
X^n &= \bigcup^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{a^i b^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
Y^n &= \bigcup^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{c^i d^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
V &= X^n \cup Y^n \cup S \text{mit n } \in \mathbb{N} \\
\Sigma &= \{a, b, c, d\} \\
X'^n &= |^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \ (|^{X \in X^n} \ X) \\
Y'^n &= |^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \ (|^{Y \in Y^n} \ Y) \\
P &= (S, (|^{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \ X^n Y^n)) \cup X'^n \cup Y'^n \\
G &= (V, \Sigma, P, S)
\end{aligned}
$$

G erzeugt L

Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ beliebig und $p \in \mathbb{N}_{\geq 0} : p \leq m + n$ so gilt zu zeigen, dass ein Wort $w \in L$ mit solchen m,n,p und dem sich daraus ergebenden q erzeugt werden kann. Sprich, dass $w \in L(G)$ ist, es gibt also eine Resolution die dieses Wort als Ergebnis hat.

$$
\begin{aligned}
S &\to X^{m+n} Y^{p+q} \\
&\to a^m b^n c^p d^q
\end{aligned}
$$

Dementsprechend ist jedes Wort aus w auch in L(G), also erzeugt G L.

G ist kontextfrei

zu Zeigen

5.4

Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige $u, v \in \Sigma^*$ f(u) das Präfix von f(uv) ist. Hierzu setzen wir u als $u := a_1, ..., a_i$ und v als $v := a_{i+1}, ..., a_n$. Dann gilt nach Definition 1.62:

$$
\begin{aligned}
f(uv) &= \lambda^*(q, uv) \\
&= \lambda^*(q, a_1, ..., a_n) \\
&= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\
&= \lambda(q, a_1)\lambda(\delta(q, a_1), a_2)...\lambda(\delta(q, a_1...a_{i-1}), a_i)\lambda(\delta(q, a_1, ..., a_i), a_{i+1}...\lambda(\delta(q, a_1...a_{n-1})a_n) \\
&= \lambda^*(q, a_1...a_i)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)a_{i+1}...a_n) \\
&= \lambda^*(q, u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v) \\
&= f(u)\lambda^*(\delta(q, a_1....a_i)v)
\end{aligned}
$$

Damit ist f(u) ein Präfix von f(uv), sprich f ist präfixtreu.

Längenbeschränkt

Wir zeigen $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 :| f(w) |\leq k \mid w \mid$ per Induktion über der Länge von w:

Induktionsanfang | w | = 1

Setze $k := max_{x \in (\Sigma \cup \{\emptyset\} \cup \{\epsilon\})}(| f(x) |)$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
| f(w) | &\leq k \\
&= k \mid w \mid
\end{aligned}
$$

Induktionsvoraussetzung | w | = n

$$\exists k \geq 0 :| f(w) |\leq k \mid w \mid$$

Induktionsschluss | w | = n + 1

Sei w = va, so gilt nach Definition von f:

$$\begin{aligned} f(va) &= \lambda^*(q_0, va) \\ &= \lambda^*(q_0, v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \\ &= f(v)\lambda(\delta(q_0, v), a) \end{aligned}$$

Da $\mid f(v) \mid = n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, also ein k' gesetzt werden für das $\mid f(v) \mid \leq k' \mid v \mid$ gilt. Setze nun $k'' := max_{x \in \Sigma}(\mid \lambda(\delta(q_0, v), x) \mid)$ und k := k' + k", so gilt:

$$\begin{aligned} \mid f(w) \mid &= \mid f(v) \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\ &\leq k' \mid v \mid + \mid \lambda(\delta(q_0, v), a) \mid \\ &\leq k' \mid v \mid + k''1 \\ &= (k' + k'') \cdot (\mid v \mid + 1) \\ &= k \mid w \mid \end{aligned}$$

Regulär

Um dies zu zeigen zeigen wir, dass f(L) eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen hat. Hierzu definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $f(\Sigma^*) \subseteq \tau^*$ definiert als:

$$\sim = \{(a, b) \mid \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y\}$$

Es gilt zu zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist:

Reflexiv

$$\begin{aligned} a \sim a &\Longleftrightarrow^{Def. \sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = a \wedge x = y \\ &\Longleftrightarrow^{Setze y := x} \exists x \in \Sigma^* : f(x) = a \\ &\Longleftrightarrow^{Da a \in f(\Sigma^*)} wahr \end{aligned}$$

Symetrisch

$$\begin{aligned} a \sim b &\Longleftrightarrow^{Def.\sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \\ &\Longleftrightarrow^{Umbenennung} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = b \wedge f(y) = a \wedge x = y \\ &\Longleftrightarrow^{Def.\sim} b \sim a \end{aligned}$$

Transitiv

$$\begin{aligned} &a \sim b \wedge b \sim c \\ &\Longleftrightarrow^{Def.\sim} \exists x, y \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \wedge \exists x', y' \in \Sigma^* : f(x') = b \wedge f(y') = c \wedge x' = y' \\ &\Longleftrightarrow^{Setze x' := x} \exists x, y, y' \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y) = b \wedge x = y \wedge f(x) = b \wedge f(y') = c \wedge x = y' \\ &\Longleftrightarrow \exists x, y' \in \Sigma^* : f(x) = a \wedge f(y') = c \wedge y = y' \\ &\Longleftrightarrow^{Def.\sim} a \sim c \end{aligned}$$

Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $f(\Sigma^*)$. Da f eine Funktion ist und einer Eingabe nur eine Ausgabe zugeordnet ist kann die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim$ nur kleiner gleich deren von $=$ sein, denn es fallen durch doppelt getroffene Elemente in $f(\Sigma^*)$ höchstens Äquivalenzklassen zusammen, es entstehen aber keine neuen. Da L aber regulär ist gibt es eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen, also hat f(L) auch eine endliche Anzahl an Äquivalenzklassen und ist damit regulär.