7.2

Wir beweisen per Gegenbeweis und nehmen hierzu an, dass L_1 kontextfrei ist.
So lässt sich das Pumping-Lemma anwenden und es gibt eine kontextfreie Grammatik G_1 mit k Variablen und rechter Regelseite der Länge $\leq k$ die L_1 erzeugt. Zerteilt man ein $z \in L(G_1)$, sodass $z = uvwxy$ gilt. Setzt man nun die Variablen $u := w := x := y := \epsilon$, so ist keine der Bedingungen des Pumping-Lemmas verletzt. Weiterhin gilt

$$z \in L_1 \Rightarrow z \in L(G_1) \iff z = uvwxy = v \iff \exists k \in \mathbb{N} : \text{k ist prim} \land v = a^k \quad (1)$$

Wenden wir nun das Pumping-Lemma an, so muss ebenfalls gelten

$$v^2 \in L(G_1) \iff \exists k' : \text{k' ist prim} \land v^2 = a^{k'} \quad (2)$$

Da dieses $k' = k \cdot 2$ sein müsste ist dies keine Primzahl mehr, es gibt also einen Widerspruch.

7.3

7.4