

## 5.2

### G

Sei  $G$  gegeben als  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $V = S, A, B, C, D$ ,  $\Sigma = a, b, c, d$  und  
 $P = \{ (S, A), (S, B), (S, C), (S, D), (S, a), (S, b), (S, c), (S, d), (S, \varepsilon), (A, (aSa)), (B, (bSb)), (C, (cSc)), (D, (dSd)) \}$

### Kontextfrei

Dies gilt, da für alle  $(\alpha, \beta) \in P$  gilt, dass  $\alpha \in V$  ist. Dementsprechend ist die Grammatik Kontextfrei.

### $L = L(G)$

Dies zeigen wir, indem wir zeigen, dass alle  $w' \in L(G)$  exakt die Bedingung von  $L$  erfüllen.

Sei  $w \in L$  beliebig, so gilt für die Induktion:

$$|w| = 1$$

In diesem Fall kann für  $w$  lediglich gelten  $w \in (\{\emptyset, \varepsilon\} \cup \Sigma)$ . Von  $w = \emptyset$  oder  $w = \varepsilon$  gilt sowohl, dass sie in  $L$  sind, als auch dass sie in  $L(G)$  sind, denn diese sind in jeder Grammatik. (I= ????? Don't know just guessed) Für  $w \in \Sigma$  gilt dass diese in  $L$  sind, da ein Buchstabe umgedreht weiterhin der selbe ist. Zudem gilt, dass dieser in  $L(G)$  ist, da für  $(S, X) \in P$  gilt, dass jedes Element aus  $\Sigma$  in  $X$  ist. Dementsprechend gilt dies für solche  $w$ .

**Induktionsvoraussetzung:**  $|w| = n$

$\forall w \in L(G) : w \in L$  (Ist das die richtige Behauptung?)

**Induktionsschritt:**  $|w| = n + 1$

zu Zeigen

### 5.3

Um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist zeigen wir, dass es eine Grammatik gibt die Kontextfrei ist und diese Sprache erzeugt. Diese definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
 X^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{a^i b^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
 Y^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \{c^i d^j \mid \exists i, j \in \mathbb{N}_{\geq 0} : i + j = n\} \\
 V &= X^n \cup Y^n \cup S \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\
 \Sigma &= \{a, b, c, d\} \\
 X'^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} (|^{X \in X^n} X) \\
 Y'^n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} (|^{Y \in Y^n} Y) \\
 P &= (S, (\bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} X^n Y^n)) \cup X'^n \cup Y'^n \\
 G &= (V, \Sigma, P, S)
 \end{aligned}$$

#### G erzeugt L

Seien  $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  beliebig und  $p \in \mathbb{N}_{\geq 0} : p \leq m + n$  so gilt zu zeigen, dass ein Wort  $w \in L$  mit solchen  $m, n, p$  und dem sich daraus ergebenden  $q$  erzeugt werden kann. Sprich, dass  $w \in L(G)$  ist, es gibt also eine Resolution die dieses Wort als Ergebnis hat.

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow X^{m+n} Y^{p+q} \\
 &\rightarrow a^m b^n c^p d^q
 \end{aligned}$$

Dementsprechend ist jedes Wort aus  $w$  auch in  $L(G)$ , also erzeugt  $G$   $L$ .

#### G ist kontextfrei

zu Zeigen

## 5.4

### Präfixtreu

Es gilt zu zeigen, dass für beliebige  $u, v \in \Sigma^*$   $f(u)$  das Präfix von  $f(uv)$  ist. Hierzu setzen wir  $u$  als  $u := a_1, \dots, a_i$  und  $v$  als  $u := a_{i+1}, \dots, a_n$ . Dann gilt nach Definition 1.62:

$$\begin{aligned}
 f(q, uv) &= f(q, a_1, \dots, a_n) \\
 &= f(q, a_1)f(\delta(q, a_1), a_2) \dots f(\delta(q, a_1 \dots a_{n-1}), a_n) \\
 &= f(q, a_1)f(\delta(q, a_1), a_2) \dots f(\delta(q, a_1 \dots a_{i-1}), a_i)f(\delta(q, a_1, \dots, a_i), a_{i+1} \dots f(\delta(q, a_1 \dots a_{n-1}), a_n) \\
 &= f(q, a_1 \dots a_i)f(\delta(q, a_1 \dots a_i), a_{i+1} \dots a_n) \\
 &= f(q, u)f(\delta(q, a_1 \dots a_i)v)
 \end{aligned}$$

Damit ist  $f$  also präfixtreu.

### Längenbeschränkt

zu Zeigen:  $\forall w \in \Sigma^* : \exists : k \geq 0 : |f(w)| \leq k |w|$

### Regulär

zu Zeigen: Ist  $L$  regulär, so ist auch  $f(L)$  regulär