

# Lógica Computacional

## Aula Teórica 5: Dedução Natural em Lógica Proposicional

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

28 de setembro de 2023

# Sistema dedutivo

## Objectivo

Determinar a validade de raciocínios ou de fórmulas:

- manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas
- sem recorrer à semântica

## Sistema Dedutivo

É um conjunto de regras

- são chamadas regras de inferência
- permitam inferir novas fórmulas a partir de outras fórmulas
- regras sem hipóteses dizem-se axiomas

# Provas

## Prova formal ou derivação

Dado um sistema dedutivo, uma prova formal ou derivação de uma fórmula  $\varphi$  a partir de um conjunto de fórmulas  $\Gamma$  é uma sequência finita de fórmulas de  $F_P$  tal que:

- o último elemento da sequência é  $\varphi$
- cada elemento da sequência é:
  - um elemento de  $\Gamma$  ou
  - obtido de anteriores usando uma das regras de inferência

## Notação

Sendo  $\Gamma$  um conjunto de hipóteses e  $\varphi$  uma conclusão a provar,

$$\Gamma \vdash \varphi$$

indica que a partir de  $\Gamma$  se consegue construir uma prova para  $\varphi$ .

# Propriedades

## Terminologia

- Se  $\Gamma \vdash \varphi$  então  $\varphi$  diz-se consequência de  $\Gamma$ ;
- Se  $\emptyset \vdash \varphi$  então  $\varphi$  diz-se teorema do sistema dedutivo  
escreve-se  $\vdash \varphi$

## Correção de Sistema Dedutivo

Só permite provar de tautologias e consequências semânticas

- Se  $\vdash \varphi$  então  $\models \varphi$
- Se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$  então  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$

## Completude de Sistema Dedutivo

Permite provar todas as tautologias e consequências semânticas

- Se  $\models \varphi$  então  $\vdash \varphi$
- Se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$  então  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$

# Dedução Natural: a ideia

## Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore:
  - árvores de derivação
- Cada árvore é construída a partir de árvores singulares (folhas)
- Novo nível da árvore obtido aplicando uma regra de inferência.
- As etiquetas dos nós da árvore são fórmulas.
  - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros);
  - A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas;
  - A fórmula na raiz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

# Dedução Natural para Lógica Proposicional

## Regras do sistema $\mathcal{N}$

- Os conectivos  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  têm regras associadas para:
  - Eliminação
  - Introdução
- $\perp$  tem uma regra associada

## Marcas

A cada hipótese/folha é associada uma marca (número natural)

- fórmulas diferentes têm marcas diferentes
- hipótese **fechada**: a sua marca é usada numa regra da árvore
- há quatro regras que fecham hipóteses:
  - Regra do absurdo
  - Introdução da negação
  - Introdução da implicação
  - Eliminação da disjunção
- hipótese diz-se **aberta** se não está fechada

# Dedução Natural para Lógica Proposicional

## Consequência no sistema $\mathcal{N}$

Uma fórmula  $\varphi$  é consequência em  $\mathcal{N}$  de um conjunto  $\Gamma$  de fórmulas, denotado  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}} \varphi$ , se existe árvore de derivação tal que:

- A raiz da árvore é  $\varphi$
- todas as hipóteses abertas da árvore estão contidas em  $\Gamma$

Quando for claro, podemos omitir  $\mathcal{N}$  e escrever apenas  $\vdash$

## Teoremas no sistema $\mathcal{N}$

Se  $\emptyset \vdash \varphi$  então escrevemos apenas  $\vdash \varphi$  e dizemos que  $\varphi$  é teorema do sistema  $\mathcal{N}$ .

## As regras

- Introdução e Eliminação da conjunção
- Eliminação da implicação
- Introdução da disjunção
- Eliminação da negação

não manipulam as marcas, pelo que, por isso, as podemos considerar mais simples.



Para concluir  $\varphi \wedge \psi$  é preciso ter provado cada um deles

## Regra da Introdução da Conjunção

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_I)$$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi \wedge \psi}{\psi} \quad (\wedge_{E_e})$$

# Exemplo de derivação

Podemos já provar que  $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \vdash \varphi_2 \wedge \varphi_1$

$$\frac{\frac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_2} (\wedge_{E_e}) \quad \frac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1} (\wedge_{E_d})}{\varphi_2 \wedge \varphi_1} (\wedge_I)$$

Conectivo  $\rightarrow$ 

Se já provámos  $\varphi$  e  $\varphi \rightarrow \psi$ , podemos concluir  $\psi$

## Regra da Eliminação da Implicação

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} (\rightarrow E)$$

# Exemplo de derivação

Podemos provar que  $\{(\varphi_1 \wedge \varphi_2), (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)\} \vdash \varphi_3$

$$\frac{\frac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_2} (\wedge_{E_e}) \quad (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)^2}{\varphi_3} (\rightarrow_E)$$

# Conectivo $\vee$

Se já provámos  $\varphi$  (ou  $\psi$ ), podemos concluir  $\varphi \vee \psi$

## Regras da Introdução da Disjunção

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_{I_d})$$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \psi}{\varphi \vee \psi} (\vee_{I_e})$$

# Exemplo de derivação

Podemos provar que  $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$

$$\frac{\frac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1} (\wedge_{E_d})}{\varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{I_d})$$

Conectivo  $\neg$ 

Se conseguimos derivar uma fórmula  $\varphi$  e a sua negação  $\neg\varphi$  então é porque temos um absurdo  $\perp$ .

## Regra da Eliminação da Negação

$$\frac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi & \neg\varphi \end{array}}{\perp} (\neg_E)$$



# Exemplo de derivação

Podemos provar que  $\{\varphi_1, (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2), \neg\varphi_2\} \vdash \perp$

$$\frac{\frac{\varphi_1^1 \quad (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)^2}{\varphi_2} (\rightarrow_E) \quad \neg\varphi_2^3}{\perp} (\neg_E)$$

# Regras de $\mathcal{N}$

## Nota

As regras até agora apresentadas não mencionam as marcas.  
Só as regras restantes mencionam as marcas:

- Eliminação da disjunção
- Introdução da implicação
- Regra do absurdo
- Introdução da negação

# Conectivo $\vee$

Para concluir  $\psi$  a partir de  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ , temos que raciocinar por casos: obter  $\psi$  quer no caso  $\varphi_1$ , quer no caso  $\varphi_2$

## Regra da Eliminação da Disjunção

$$\frac{\begin{array}{ccc} & [\varphi_1]^m & [\varphi_2]^n \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi \end{array}}{\psi} (\vee_E, m, n)$$

As marcas  $m$  e  $n$  da justificação da regra:

- 1  $m$  (resp.  $n$ ) é marca de uma ou mais hipóteses  $\varphi_1$  (resp.  $\varphi_2$ ) que estavam abertas na árvore  $\mathcal{D}_2$  (resp.  $\mathcal{D}_3$ )
- 2 é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore.

Depois de aplicar a regra,  $[\varphi_1]^m$  e  $[\varphi_2]^n$  ficam fechadas.

Em  $\mathcal{D}_2$  só podemos fechar  $\varphi_1$  e em  $\mathcal{D}_3$  só podemos fechar  $\varphi_2$ .

# Exemplo de derivação

Provar que  $\{(\varphi_1 \vee \varphi_2), (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3), (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)\} \vdash \varphi_3$

$$\frac{(\varphi_1 \vee \varphi_2)^1 \quad \frac{(\varphi_1)^2 \quad (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3)^3}{\varphi_3} (\rightarrow E) \quad \frac{(\varphi_2)^4 \quad (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)^5}{\varphi_3} (\rightarrow E)}{\varphi_3} (\vee E, 2, 4)$$

# Atenção: Exemplo que **não** é derivação

$$\frac{(\varphi_1 \vee \varphi_2)^1 \quad \frac{(\varphi_1)^{\cancel{2}} \quad (\varphi_2)^{\cancel{3}}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_I) \quad \frac{(\varphi_1)^{\cancel{2}} \quad (\varphi_2)^{\cancel{3}}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_I)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} (\vee_{E,2,3})$$

Provaria que  $\{\varphi_1 \vee \varphi_2\} \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$

**Mas**, a regra  $\vee_{E,2,3}$  fechou uma hipótese em  $\mathcal{D}_2$  que não era  $\varphi_1$

Logo esta árvore **não** é uma derivação válida no sistema  $\mathcal{N}$ .

# Conectivo $\rightarrow$

Se, fixando  $\varphi$  como hipótese (eventualmente), conseguirmos derivar  $\psi$ , então provámos que  $\varphi \rightarrow \psi$

## Regra da Introdução da Implicação

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_{I,m})$$

A marca  $m$  associada à justificação da regra  $\rightarrow_{I,m}$ :

- ① é marca de uma ou mais hipóteses  $\varphi$  que estavam abertas; **ou**
- ② é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore.

Depois de aplicar a regra, a hipótese  $[\varphi]^m$  fica fechada.

# Exemplo de derivação

Provar que  $\{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_3\} \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_3$

$$\frac{\frac{\varphi_1 \text{?}}{\varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{Id}) \quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_3^2}{\varphi_3} (\rightarrow_E)$$
$$\frac{\varphi_3}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_3} (\rightarrow_I, 1)$$

# Exemplo de derivação

Provar que  $\{\varphi_2\} \vdash (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$

$$\frac{(\varphi_2)^1}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} (\rightarrow_I, \textcolor{red}{2})$$

Aplicação de  $\rightarrow_I$  menciona hipótese  $\varphi_1$  (com marca 2) que não ocorre na árvore.



# Conectivo $\perp$

Se (eventualmente) se considera por hipótese  $\neg\varphi$  e se deriva (eventualmente recorrendo a outras hipóteses) o absurdo, a hipótese (se usada) era falsa, e provou-se  $\varphi$ .

## Regra do absurdo

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\varphi} (\perp, m)$$

A marca  $m$  associada à justificação da regra:

- 1 é marca de uma ou mais hipóteses  $\neg\varphi$  que estavam abertas; ou
- 2 é uma marca nova, i.e., que não ocorre na árvore.

Depois de aplicar a regra, a hipótese  $[\neg\varphi]^m$  fica fechada.

Conectivo  $\perp$ Provar que  $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ 

$$\frac{\neg\varphi^1 \quad \neg\neg\varphi^2}{\frac{\perp}{\varphi} (\perp, 1)} (\neg E)$$

# Exemplo de derivação

Provar que  $\vdash (\perp \rightarrow \varphi)$

$$\frac{\frac{\perp \text{ } \cancel{f}}{\varphi} (\perp, \textcolor{red}{2})}{\perp \rightarrow \varphi} (\rightarrow_1)$$

Aplicação de  $\perp$ , 2 menciona hipótese  $\neg\varphi$  (com marca 2) que não ocorre na árvore.

Não há hipóteses abertas, logo  $\perp \rightarrow \varphi$  é teorema de  $\mathcal{N}$ .

# Conectivo $\neg$

Se se considera por hipótese  $\varphi$  e se deriva (eventualmente recorrendo a outras hipóteses) o absurdo, a hipótese era falsa, e provámos a negação da fórmula, isto é,  $\neg\varphi$ .

## Regra da introdução da negação

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} \quad (\neg_I, m)$$

A marca  $m$  associada à justificação da regra:

- 1 é marca de uma ou mais hipóteses  $\varphi$  que estavam abertas

Depois de aplicar a regra, a hipótese  $[\varphi]^m$  fica fechada.

Conectivo  $\neg$ 

Provar que  $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$$\frac{\varphi^1 \quad \neg\varphi^2}{\perp} (\neg_E)$$
$$\frac{\perp}{\neg\neg\varphi} (\neg_I, 2)$$

# Correcção e Completude de $\mathcal{N}$

## Teorema da Correção e Completude da Dedução Natural

Dada uma fórmula  $\varphi \in F_P$  e conjunto de fórmulas  $\Gamma \subseteq F_P$ , então:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{N}} \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma \models \varphi$$

## Como usar a Correção do Sistema $\mathcal{N}$ ?

Ao provarmos que  $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}} \varphi$ , construindo uma árvore de derivação, a Correção do Sistema  $\mathcal{N}$  permite concluir que  $\Gamma \models \varphi$ .

# Exemplo

Como provar que  $\{\neg p \rightarrow q\} \models \neg q \rightarrow p$  usando o Sistema  $\mathcal{N}$ ?

Provando primeiro que  $\{\neg p \rightarrow q\} \vdash_{\mathcal{N}} \neg q \rightarrow p$

$$\frac{\frac{\neg p \rightarrow q^1 \quad \neg p^2}{q} (\rightarrow_E) \quad \neg q^3}{\perp} (\neg_E)$$
$$\frac{\perp}{p} (\perp, 2)$$
$$\frac{p}{\neg q \rightarrow p} (\rightarrow_I, 3)$$

Pela Correção do Sistema  $\mathcal{N}$ , podemos concluir que:

$$\{\neg p \rightarrow q\} \models \neg q \rightarrow p$$

# Mais um exemplo

Provar que  $\models p \vee \neg p$  usando o Sistema  $\mathcal{N}$ ?

$$\frac{\frac{\frac{p}{p \vee \neg p} (\vee_{Id}) \quad \neg(p \vee \neg p)}{\perp} (\neg_E)}{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg p} (\neg_I, 1)}{p \vee \neg p} (\vee_{Ie}) \quad \neg(p \vee \neg p)}{\perp} (\neg_E)} (\perp, 2)$$

Pela Correção do Sistema  $\mathcal{N}$ , podemos concluir que  $\models p \vee \neg p$



# Exercícios

Prove, usando o Sistema  $\mathcal{N}$ , que:

- $\{\varphi \vee \psi, (\varphi \rightarrow \delta), (\psi \rightarrow \delta)\} \models \delta$
- $\vdash (\psi \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \gamma)$
- $\models \varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)$
- $\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \models \neg(\varphi \vee \psi)$