Lógica Computacional

Aula Teórica 15: Dedução Natural em Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

3 de novembro de 2023

Quantificador Universal: é fácil eliminar

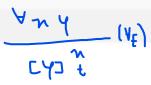
Eliminação do quantificador Universal

Se todos os indivíduos do universo satisfazem uma certa propriedade, então cada um em particular satisfaz essa propriedade.

$$\frac{\forall \mathbf{w} \ \mathsf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{w})}{\mathsf{P}(\mathbf{w}, \mathbf{z})} \qquad \frac{\mathcal{D}}{[\varphi]_t^x} \ (\forall_E)$$

t livre para $x \in \varphi$.

Eliminação do Quantificador Universal



A seguinte árvore não é uma derivação de $\{\forall_x \exists_y (x < y)\} \vdash \exists_y (y < y)$

$$\frac{\forall_x \exists_y (x < y)}{\exists_y (y < y)} (\forall_E)$$

O problema é que y não é livre para x em $\exists_y (x < y)$.

Eliminação do Quantificador Universal

$$\{\forall_x (P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$$

$$\frac{\forall_x \left(P(x) \to Q(x)\right)^1}{P(a) \to Q(a)} \stackrel{(\forall_E)}{\longrightarrow} P(a)^2}{Q(a)} (\to_E)$$

Introdução do Quantificador Existencial

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo satisfaz uma propriedade, então existe algum indivíduo do universo que satisfaz essa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D}}{\left[\varphi\right]_{t}^{x}} \left(\exists_{I}\right)$$

t livre para x em φ .

Introdução do Quantificador Existencial

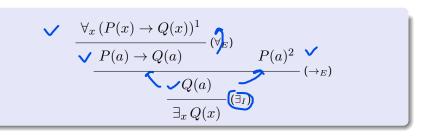
A seguinte árvore não é uma derivação de $\{\forall_x Eq(x,x)\} \vdash \exists_y \forall_x Eq(y,x)$

$$\frac{\forall_x Eq(x,x)}{\exists_y \forall_x Eq(y,x)} (\forall_E)$$

O problema é que x não é livre para y em $\forall_x Eq(y,x)$.

Introdução do quantificador Existencial

$$\{\forall_x (P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash \exists_x Q(x)$$



Quantificador Universal: como introduzir?

Já introduzimos as duas regras mais simples:

- Eliminação do Universal
- Introdução do Existencial

Faltam as duas regras com condições mais complicadas:

- Introdução do Universal
- Eliminação do Existencial

Quantificador Universal



Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{\left[\varphi\right]_{y}^{x}}{\forall_{x}\,\varphi}}\left(\forall_{I}\right)$$

Onde:

- $oldsymbol{0}$ y não ocorre livre nas hipóteses abertas de \mathcal{D} ;
- \checkmark 2 se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

Quantificador Universal: como introduzir?

$$\{\forall_y (P(y) \to Q(y)), \forall_y P(y)\} \vdash \forall_x Q(x)$$

$$\frac{\forall_{y} \left(P(y) \to Q(y)\right)^{1}}{P(x) \to Q(x)} (\forall_{E}) \quad \frac{\forall_{y} P(y)^{2}}{P(x)} (\forall_{E}) \\ \frac{Q(x)}{\forall_{x} Q(x)} (\forall_{I})$$

x é uma entidade arbitrária porque não ocorre nas hipóteses

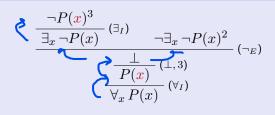
Quantificador Universal: condições

$$\frac{\forall_x (P(x) \to Q(x))^1}{P(x) \to Q(x)} (\forall_E) \qquad P(x)^2}{\frac{Q(x)}{\forall_x Q(x)} (\forall_I)} (\to_E)$$

Esta árvore não é uma prova: a variável x na hipótese P(x) representa uma entidade concreta (apesar de desconhecida), pelo que não pode ser abstraida.

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses fechadas?



É uma prova válida para $\{\neg \exists_x \neg P(x)\} \vdash \forall_x P(x)$ porque x apenas aparece livre numa hipótese fechada!

Quantificador Universal: como introduzir?

Podemos abstrair usando outra variável.

Se temos Q(y) e y é arbitrário então podemos concluir $\forall_x Q(x)$.

$$\{\forall_x\,\forall_y\,P(x,y)\}\vdash\forall_y\,\forall_x\,P(y,x)$$

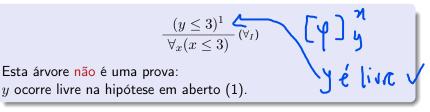
$$\frac{\frac{\forall_{x} \forall_{y} P(x,y)^{1}}{\forall_{y} P(z,y)} (\forall_{E})}{\frac{P(z,x)}{\forall_{x} P(z,x)} (\forall_{I})} (\forall_{I})$$

$$\frac{\nabla_{x} \forall_{y} P(x,y)^{1}}{\nabla_{y} \nabla_{x} P(y,x)} (\forall_{I})$$

Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

• y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal D$ não é satisfeita.



Quando abstraímos uma variável, ela tem de ser genérica.

Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

 $\ \, \textbf{2} \ \, \text{se} \,\, x \neq y \,\, \text{então} \,\, y \notin VL(\varphi)$

não é satisfeita.

$$\frac{\frac{\forall_{y} (y \geq y)}{(y \geq y)}}{\forall_{x} (x \geq y)} (\forall_{I})}{(\forall_{I})}$$

$$\exists_{y} \forall_{x} (x \geq y)} (\exists_{I})$$

Esta árvore não é uma prova:

$$[(x \ge y)]_y^x = (y \ge y)$$
, mas y ocorre livre em $(x \ge y)$.

Quando abstraímos uma variável, devemos abstrair todas as suas ocorrências.

Quantificador Existencial: como eliminar?

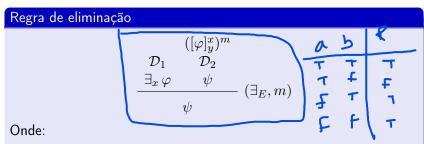
Ideia

Se a partir de $\varphi(y)$ com y um elemento genérico, conseguirmos concluir ψ (que não depende y), então podemos concluir ψ a partir de $\exists \varphi(x)$.

Requisitos

- O indivíduo concreto que se assume ter a propriedade φ deve ser genérico: não pode estar (livre) nas hipóteses abertas.
- 2 a propriedade a concluir não depende do indivíduo.

Quantificador Existencial



- y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de \mathcal{D}_2 distintas de $[\varphi]_y^x$
- ✓ ② se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ ;

Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte não é uma prova de $\{\exists_x \, Par(x), \forall_x \, (Par(x) \rightarrow Par(sq(x)))\} \vdash \forall_x \, Par(sq(x))$

O problema é que a variável x ocorre livre no nó Par(sq(x)).

Eliminação do Existencial: condições

A árvore seguinte não é uma prova de $\{P(a),Q(x)\} \vdash \exists_x (P(x) \land Q(x))$

$$\frac{P(a)^{1}}{\exists_{x} P(x)} (\exists_{I}) \frac{P(x)^{3} Q(x)^{2}}{P(x) \wedge Q(x)} (\land_{I}) }{\exists_{x} (P(x) \wedge Q(x))} (\exists_{I})
\downarrow \exists_{x} (P(x) \wedge Q(x)) (\exists_{E}, 3)$$

O problema é que a variável \boldsymbol{x} ocorre livre na hipótese aberta $Q(\boldsymbol{x}).$

Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte não é uma prova de $\{\exists_x (Par(x) \land (y=3))\} \vdash \exists_z (Par(z) \land (z=3))$

$$\frac{(\exists_x (Par(x) \land (y=3)))^1 \qquad \frac{(Par(y) \land (y=3))^2}{\exists_z (Par(z) \land (z=3))}}{\exists_z (Par(z) \land (z=3))} \stackrel{(\exists_I)}{(\exists_{E}, 2)}$$

Note-se que
$$Par(y) \wedge (y=3) = [Par(x) \wedge (y=3)]_y^x$$
.

O problema é que a variável y é diferente de x mas ocorre livre em $Par(x) \wedge (y=3)$.

Regras dos quantificadores

∀ - Eliminação

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{\forall_x \, \varphi}{[\varphi]_t^x}} \, (\forall_E)$$

- t livre para x em φ

∃ - Introdução

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{[\varphi]_t^x}{\exists_x \, \varphi}} \, (\exists_I)$$

- t livre para x em φ

∀ - Introdução

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{[\varphi]_y^x}{\forall_x \varphi}} \ (\forall_I)$$

- y não ocorre livre em hipóteses abertas de ${\mathcal D}$
- se $x \neq y$ então $y \not\in VL(\varphi)$

∃ - Eliminação

$$\begin{array}{ccc}
& ([\varphi]_y^x)^m \\
\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\
& \exists_x \varphi & \psi \\
& \psi & (\exists_E, m)
\end{array}$$

- y não ocorre livre em ψ nem nas hipóteses abertas de \mathcal{D}_2 que não $[arphi]_{yy}^x$
- se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ
- a marca m apenas fecha (eventualmente) hipóteses $[\varphi]_n^x$ em \mathcal{D}_2

Exemplos

Prove, usando Dedução Natural, os seguintes resultados: