Lógica Computacional

Aula Teórica 9

Resolução proposicional: Propriedades e estratégias de prova

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

13 de outubro de 2023

Correcção e Completude da Resolução

Teorema da Correção e Completude da Resolução

Dada $\varphi \in F_P$ com FNC(φ), então:

$$\emptyset \in Res^*(\varphi) \text{ se e só se } \varphi \text{ é contraditória}$$

Verificação de natureza da fórmula

Qual a natureza de $\varphi \in F_P$?

1. Colocar na FNC
2. Aplicar Lema das disjunções para verificar se é válida
3. Se não for válida, usar Resolução para verificar se é possível ou contraditória

Resolução e Validade

Objetivo do algoritmo de Resolução

Verificar se uma dada fórmula é contraditória ou não.

Resolução para verificar validade

Podemos usar Resolução para verificar a validade de fórmula?

Proposição

$$\varphi \text{ é válida} \quad \text{se e só se} \quad \neg\varphi \text{ é contraditória}$$

Corolário

Dada uma fórmula $\varphi \in F_P$, tem-se que:

$$\varphi \text{ é válida} \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \in \mathrm{Res}^*(\neg\varphi)$$

Resolução e Consequência Semântica

Resolução para verificar Consequência Semântica

Podemos usar Resolução para verificar Consequência Semântica?

Proposição

$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$ se e só se $(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i) \wedge (\neg\varphi)$ é contraditória

Corolário

Dadas fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi \in F_P$, tem-se que:

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \in \mathrm{Res}^*((\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i) \wedge (\neg\varphi))$$

Objectivo

Procedimento automático

- Pretende-se encontrar formas de implementar o método de resolução, de forma a que seja mais eficiente.
- No caso de uma fórmula φ ser contraditória:
  - não queremos ter de calcular todo o conjunto $Res^*(\varphi)$
  - queremos uma prova simples que mostre que $\emptyset \in Res^*(\varphi)$
  - com que ordem calculamos os resolventes de forma a obter $\emptyset$?
  - estratégias ad-hoc não são (necessariamente) eficientes

Sistemas de prova

Sistema de prova

Um sistema de prova sobre F_P é um conjunto de regras de inferência.

Prova formal ou derivação

Dado um sistema de prova sobre F_P, uma prova formal ou derivação de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas $\mathcal{C}$ é uma sequência finita de fórmulas de F_P tal que:

- o último elemento da sequência é φ
- cada elemento da sequência é:
  - um elemento de $\mathcal{C}$ ou
  - obtido de anteriores usando uma das regras de inferência

Resolução

Sistema $\mathcal{R}$

$\emptyset$ pode ser derivado no Sistema $\mathcal{R}$ a partir de um conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas se existir uma sequência finita de cláusulas tal que:

- a última cláusula da sequência é $\emptyset$
- cada cláusula da sequência é:
  - uma cláusula de $\mathcal{C}$ ou
  - obtido de duas cláusulas anteriores usando Resolução

A sequência é uma prova no Sistema $\mathcal{R}$ de $\emptyset$ a partir de $\mathcal{C}$.
É também chamada uma *refutação* por Resolução de $\mathcal{C}$.

Notas

- Em cada passo colocamos a justificação para esse passo
- Numeramos a sequência para ser mais fácil referir um elemento anterior

Exemplo de prova por resolução

Seja $\mathcal{C} = \{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}\}$

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{p, q, \neg r\}$	C_1
2	$\{p, q, r\}$	C_4
3	$\{p, q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, \neg q\}$	C_2
5	$\{p\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg p\}$	C_3
7	$\emptyset$	Res: 5 e 6

Resultados

Teorema

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ).
Se existe uma prova no Sistema $\mathcal{R}$ de $\emptyset$ a partir do conjunto de cláusulas que representa φ, então $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$.

Aplicação

Pelo Teorema da Correção do algoritmo de Resolução, podemos mostrar que uma formula φ é contraditória fazendo uma prova no Sistema $\mathcal{R}$ de $\emptyset$ a partir do conjunto das cláusulas de φ.

Corolário - Correção do Sistema $\mathcal{R}$

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ).
Se existe uma prova no Sistema $\mathcal{R}$ de $\emptyset$ a partir do conjunto de cláusulas que representa φ, então φ é contraditória.

Estratégias de resolução

Com que ordem/estratégia aplicamos a regra da Resolução para derivar $\emptyset$?

Uma estratégia de Resolução

Resolução Negativa

Diz-se que uma prova por Resolução segue a estratégia de Resolução Negativa ou Resolução-N, se em todas as aplicações da regra da Resolução nessa prova pelo uma das cláusulas só tem literais negativos.

Exemplo de Resolução-N

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

Resolução-N, solução 1

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg r\}$	C_4
2	$\{\neg p, r\}$	C_2
3	$\{\neg p\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, q\}$	C_1
5	$\{q\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg s\}$	C_5
7	$\{\neg q, s\}$	C_3
8	$\{\neg q\}$	Res: 6 e 7
9	$\emptyset$	Res: 5 e 8

Outro exemplo de Resolução-N

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

Resolução-N, solução 2

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg s\}$	C_5
2	$\{\neg q, s\}$	C_3
3	$\{\neg q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{\neg r\}$	C_4
5	$\{\neg p, r\}$	C_2
6	$\{\neg p\}$	Res: 4 e 5
7	$\{p, q\}$	C_1
8	$\{q\}$	Res: 6 e 7
9	$\emptyset$	Res: 3 e 8

Propriedade da Resolução-N

Teorema da Completude da Resolução-N

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ). Então,

$$\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$ pode ser derivado por Resolução-N a partir de φ

Outra estratégia de Resolução

Resolução Linear

Diz-se que uma prova por Resolução segue a estratégia de Resolução Linear ou Resolução-L, se cada aplicações da regra da Resolução é aplicada ao resolvente obtido no passo anterior.

Exemplo de Resolução-L

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

Resolução-L, solução 1

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg p, r\}$	C_2
2	$\{\neg r\}$	C_4
3	$\{\neg p\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, q\}$	C_1
5	$\{q\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg q, s\}$	C_3
7	$\{s\}$	Res: 5 e 6
8	$\{\neg s\}$	C_5
9	$\emptyset$	Res: 7 e 8

Exemplo de Resolução-L

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

Resolução-L, solução 2

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg q, s\}$	C_3
2	$\{\neg s\}$	C_5
3	$\{\neg q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, q\}$	C_1
5	$\{p\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg p, r\}$	C_2
7	$\{r\}$	Res: 5 e 6
8	$\{\neg r\}$	C_4
9	$\emptyset$	Res: 7 e 8

Este e a anterior são provas por Resolução-N?

Propriedade da Resolução-L

Teorema da Completude da Resolução-L

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ). Então,

$$\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$ pode ser derivado por Resolução-L a partir de φ

Resolução-LN

Será que podemos combinar as duas estratégias?
Podemos sempre fazer Resolução-LN ?
Exemplo: $\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg s\}, \{\neg r\}\}$

Resolução-LN?

Pela estratégia N temos de começar de C_4 ou de C_5.

- Começando com C_4: juntamente com C_3 obtém-se $\{\neg q\}$. Depois usamos C_1 e obtemos $\{p\}$. Teríamos de usar C_2. Falha a estratégia N
- Começando com C_5: juntamente com C_2 obtém-se $\{\neg p\}$. Depois usamos C_1 e obtemos $\{q\}$. Teríamos de usar C_3. Falha a estratégia N

Por Resolução-LN não dá.

A estratégia LN não é universal!

Fórmulas de Horn

Recordar

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ). Se cada cláusula em φ contém no máximo um literal positivo, então φ diz-se uma fórmula de Horn.

Teorema

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ). Se φ é uma fórmula de Horn então

$$\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$ pode ser derivado por Resolução-LN a partir de φ

Resolução-SLD

Terminologia

- Cláusula só com literais negativos diz-se *objetivo*
- Cláusula só com um literal positivo diz-se *determinada*
- Na aplicação de Resolução-N temos de escolher, de uma cláusula objetivo, que literal negativo vai se usado para calcular o próximo resolvente
- Chama-se *função de seleção* a uma estratégia de escolha do literal negativo a usar
- A função de seleção deve ser *invariante* para qualquer função de substituição (não pode depender dos símbolos).

Resolução-SLD

A Resolução-SLD (Linear e Determinada, com Selector) é a Resolução-LN com uma função de seleção.

Exemplo de Resolução-SLD

A Resolução-SLD está na base da programação em lógica.

Teorema

Seja $\varphi \in F_P$ tal que FNC(φ). Se φ é uma fórmula de Horn então

$$\emptyset \in \mathsf{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$ pode ser derivado por Resolução-SLD a partir de φ

Exemplo de Resolução-SLD

$\mathcal{C} = \{\{\neg p, s\}, \{p, \neg q\}, \{q\}, \{\neg r, \neg s\}, \{r, \neg t\}, \{t\}\}$
É fórmula de Horn. Vamos usar Resolução-SLD com seletor "à direita" (selecionar o literal mais à direita):

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg r, \underline{\neg s}\}$	C_4
2	$\{\neg p, s\}$	C_1
3	$\{\neg p, \underline{\neg r}\}$	Res: 1 e 2
4	$\{r, \neg t\}$	C_5
5	$\{\neg p, \underline{\neg t}\}$	Res: 3 e 4
6	$\{t\}$	C_6
7	$\{\underline{\neg p}\}$	Res: 5 e 6
8	$\{p, \neg q\}$	C_2
9	$\{\underline{\neg q}\}$	Res: 7 e 8
10	$\{q\}$	C_3
11	$\emptyset$	Res: 9 e 10

Outro exemplo de Resolução-SLD

$\mathcal{C} = \{\{\neg p, \neg q, t\}, \{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg t\}\}$
É fórmula de Horn. Vamos usar Resolução-SLD com seletor "à esquerda" (selecionar o literal mais à esquerda):

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\underline{\neg t}\}$	C_4
2	$\{\neg p, \neg q, t\}$	C_1
3	$\{\underline{\neg p}, \neg q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p\}$	C_2
5	$\{\underline{\neg q}\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg p, q\}$	C_3
7	$\{\underline{\neg p}\}$	Res: 5 e 6
8	$\{p\}$	C_2
9	$\emptyset$	Res: 7 e 8

Verificação de natureza da fórmula

Qual a natureza de $\varphi \in F_P$?

1. Colocar na FNC
2. Aplicar Lema das disjunções para verificar se é válida
3. Se não for válida, usar Resolução para verificar se é possível ou contraditória:
   - Se suspeitarmos que a fórmula é contraditória, podemos tentar usar o Sistema $\mathcal{R}$:
     - Se for fórmula de Horn usamos Resolução-SLD
     - Caso contrário podemos usar Resolução-N ou Resolução-L
   - Em caso de dúvida, podemos sempre calcular Res^*

Exercícios

Qual a natureza das seguintes fórmulas?

- $(p \to (r \wedge q)) \wedge ((s \wedge q) \to r) \wedge \neg(r \to p)$
- $(p \to q) \wedge \neg(p \to (r \vee q))$