Lógica Computacional

Capítulo 1 - Lógica Proposicional

Paula Gouveia e F. Miguel Dionísio
Instituto Superior Técnico

Capítulo 1

Lógica proposicional

1.1 Introdução

A lógica proposicional, à qual este capítulo é dedicado, pode ser vista como a parte da lógica que se ocupa do estudo do comportamento dos conectivos lógicos e das regras que os manipulam. As fórmulas são construídas apenas a partir de símbolos proposicionais e de conectivos lógicos. Os símbolos proposicionais representam proposições (atómicas) cuja estrutura interna é, neste contexto, irrelevante.

É importante estudar em primeiro lugar a lógica proposicional porque muitos dos conceitos e técnicas envolvidos estão também presentes em lógicas mais sofisticadas e, numa primeira abordagem, a sua compreensão torna-se mais fácil quando é apresentada neste contexto mais simples.

Neste capítulo são apresentados, em primeiro lugar, os aspectos sintácticos e semânticos da lógica proposicional. De seguida, apresenta-se um primeiro sistema dedutivo para a lógica proposicional: o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$. Como exemplo de outros sistemas dedutivos para a lógica proposicional que podem também ser encontrados na literatura, apresentam-se depois, de um modo mais sucinto, os seguintes sistemas dedutivos: o sistema de sequentes $\mathcal{S}_p$ (e a sua variante $\mathcal{S}'_p$), o sistema de *tableaux* $\mathcal{T}_p$ e o sistema de tipo Hilbert $\mathcal{H}_p$.

O capítulo está organizado como se segue. Na secção 1.2 introduzem-se os aspectos sintácticos e na secção 1.3 os aspectos semânticos. Na secção 1.4 apresenta-se o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$. Na secção 1.5 apresenta-se o sistema de sequentes $\mathcal{S}_p$ (e a sua variante $\mathcal{S}'_p$), sendo o sistema de $\mathcal{T}_p$ apresentado na secção 1.6 e o sistema $\mathcal{H}_p$

na secção 1.7. No final de algumas secções são propostos exercícios sobre os assuntos nelas apresentados. Os assuntos expostos nas secções com a indicação ($\star$) têm um carácter mais técnico e podem ser omitidos numa primeira leitura.

1.2 Sintaxe

Nesta secção apresentam-se os aspectos sintácticos da lógica proposicional. O objectivo é definir uma linguagem formal que estabeleça a sintaxe das fórmulas proposicionais.

Para definir uma linguagem formal há que escolher o alfabeto da linguagem e há que estabelecer quais são as palavras que constituem essa linguagem. Estas palavras são usualmente designadas fórmulas quando a linguagem formal está, como é o caso, associada a uma lógica. O alfabeto da linguagem é um conjunto de símbolos e cada fórmula é uma sequência finita de símbolos do alfabeto.

Começa-se então por apresentar a noção de alfabeto proposicional.

Definição 1.2.1 Alfabeto proposicional sobre P
Dado um conjunto numerável P, o *alfabeto proposicional sobre* P designa-se por Alf_P e é constituído por

- cada um dos elementos de P;
- o símbolo $\perp$ (absurdo, contradição, falso ou falsidade);
- os conectivos lógicos $\rightarrow$ (implicação), $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção);
- os parênteses esquerdo e direito: (e).

Cada elemento de P diz-se *símbolo proposicional*. ■

Assume-se fixado um conjunto numerável P. Os símbolos proposicionais em P e o símbolo $\perp$ são utilizados para representar proposições (asserções ou afirmações). Como se verá adiante, o símbolo $\perp$ é usado para representar uma contradição. A partir dos símbolos proposicionais e de $\perp$ podem construir-se fórmulas proposicionais utilizando os conectivos lógicos acima referidos. Estas fórmulas permitem representar proposições (asserções ou afirmações) mais complexas.

Cada fórmula é uma sequência finita de símbolos em Alf_P, mas nem toda a sequência deste tipo é uma fórmula. Para completar a definição da linguagem formal pretendida, há agora que estabelecer quais são as fórmulas que constituem a linguagem proposicional, isto é, qual é a sintaxe das fórmulas proposicionais.

Definição 1.2.2 Linguagem proposicional induzida por Alf_P
A *linguagem proposicional* induzida por Alf_P designa-se por F_P e é o conjunto definido indutivamente da seguinte forma:

- $p \in F_P$ qualquer que seja $p \in P$;
- $\perp \in F_P$;
- $(\varphi \to \varphi') \in F_P$, $(\varphi \wedge \varphi') \in F_P$, $(\varphi \vee \varphi') \in F_P$ quaisquer que sejam $\varphi, \varphi' \in F_P$.

Os elementos de F_P são as *fórmulas* da linguagem proposicional induzida por Alf_P.
■

Para simplificar a exposição é usual omitirem-se os parênteses mais exteriores das fórmulas.

Exemplo 1.2.3 Sendo p, q, r, s e t símbolos proposicionais em P tem-se que

- p
- $p \wedge q$
- $r \to s$
- $(q \vee s) \to t$

são exemplos de fórmulas em F_P. Por seu lado, não são fórmulas em F_P as sequências

- $p\wedge$
- $\to q$
- $p \vee qr$

As fórmulas $p \wedge q$, $r \rightarrow s$ e $(p \vee s) \rightarrow t$ permitem representar novas proposições ou asserções construídas a partir das representadas por p, q, r, s e t.

Pode considerar-se, por exemplo, que p representa a asserção "eu estou atrasada", q representa a asserção "o meu automóvel está avariado", r representa a asserção "eu tenho febre", s representa a asserção "eu estou doente"e t representa a asserção "eu fico em casa". Neste caso, como se verá adiante com mais detalhe, a fórmula $p \wedge q$ permite representar a asserção "eu estou atrasada e o meu automóvel está avariado", a fórmula $r \rightarrow s$ permite representar a asserção "se eu tenho febre então eu estou doente"e a fórmula $(q \vee s) \rightarrow t$ permite representar a asserção "se o meu automóvel está avariado ou eu estou doente então eu fico em casa". Note-se que em alternativa ao uso de letras como símbolos proposicionais, também se poderiam ter escolhido directamente "eu estou atrasada", "o meu automóvel está avariado", etc. como símbolos proposicionais. ∎

Os conectivos lógicos introduzidos no alfabeto, neste caso $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$, são designados conectivos primitivos. A partir destes, outros conectivos podem ser definidos por abreviatura. Para ilustrar a noção de conectivo definido por abreviatura, optou-se por introduzir neste texto os conectivos $\neg$ (negação) e $\leftrightarrow$ (equivalência) por abreviatura. Considera-se também a abreviatura $\top$. Como se verá adiante, $\top$ representa uma asserção que é sempre verdadeira.

Definição 1.2.4 Abreviaturas
Sendo $\varphi, \varphi' \in F_P$:

- $\neg\varphi =_{abv} \varphi \rightarrow \bot$;
- $\varphi \leftrightarrow \varphi' =_{abv} (\varphi \rightarrow \varphi') \wedge (\varphi' \rightarrow \varphi)$;
- $\top =_{abv} \neg\bot$. ∎

A introdução de abreviaturas facilita a escrita das fórmulas. Por exemplo, usando a abreviatura $\neg$ a fórmula $((\varphi \rightarrow \bot) \wedge \varphi') \rightarrow \bot$ pode ser escrita de modo mais simples como $\neg((\neg\varphi) \wedge \varphi')$. Usando as abreviaturas $\neg$ e $\leftrightarrow$, pode-se abreviar a fórmula $((\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow (\varphi' \vee \varphi'')) \wedge ((\varphi' \vee \varphi'') \rightarrow (\varphi \rightarrow \bot))$ escrevendo $(\neg\varphi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \varphi'')$.

Como se verá adiante (ver Exercício 1.3.14), os conectivos $\wedge$ e $\vee$ poderiam também ter sido introduzidos apenas como abreviatura e não como conectivos primitivos.

Na sequência serão por vezes necessárias as seguintes noções relativas a fórmulas.

Definição 1.2.5 Complexidade de fórmulas
A função *complexidade* $c : F_P \to \mathbb{N}_0$ define-se indutivamente do seguinte modo:

- $c(\varphi) = 0$ para cada $\varphi \in P \cup \{\perp\}$;
- $c(\varphi' \to \varphi'') = c(\varphi' \wedge \varphi'') = c(\varphi' \vee \varphi'') = c(\varphi') + c(\varphi'') + 1$
$\varphi', \varphi'' \in F_P$.

Sendo $\varphi \in F_P$, a *complexidade de* φ é $c(\varphi)$. ■

Exemplo 1.2.6 Considere-se a fórmula $(q \vee s) \to t \in F_P$ em que $p, q, t \in P$. A complexidade desta fórmula é 2: $c((q \vee s) \to t) = c((q \vee s)) + c(t) + 1 = c(q) + c(s) + 1 + c(t) + 1 = 2$. ■

Definição 1.2.7 Fórmula atómica
Uma fórmula $\varphi \in F_P$ diz-se *atómica* se $c(\varphi) = 0$. ■

Definição 1.2.8 Subfórmulas
Para cada $\varphi \in F_P$, o *conjunto das subfórmulas de* φ denota-se por $Sbf(\varphi)$ e define-se indutivamente como se segue.

- $Sbf(\varphi) = \{\varphi\}$ para cada $\varphi \in P \cup \{\perp\}$;
- se φ é $\varphi' \to \varphi''$, $\varphi' \wedge \varphi''$ ou $\varphi' \vee \varphi''$ então $Sbf(\varphi) = Sbf(\varphi') \cup Sbf(\varphi'') \cup \{\varphi\}$.

Cada elemento de $Sbf(\varphi)$ é uma *subfórmula de* φ. Uma *subfórmula estrita de* φ é uma subfórmula de φ distinta de φ. $Smb(\varphi)$ denota o conjunto dos símbolos proposicionais que ocorrem em φ, isto é, o conjunto $Sbf(\varphi) \cap P$. ■

Exemplo 1.2.9 Considere-se de novo a fórmula $(q \vee s) \to t \in F_P$ em que $p, q, t \in P$.

- $Sbf((q \vee s) \to t) = \{(q \vee s) \to t, q \vee s, q, s, t\}$;
- $q \vee s$, q, s, t são as subfórmulas estritas de $(q \vee s) \to t$;
- $Smb((q \vee s) \to t) = \{q, s, t\}$. ■

1.3 Semântica

Nesta secção apresentam-se os aspectos semânticos da lógica proposicional. Introduz-se primeiro a noção de estrutura de interpretação e depois a noção de satisfação de fórmula por estrutura de interpretação. Seguem-se as noções de fórmula possível, válida e contraditória e por fim a noção de consequência semântica.

Uma estrutura de interpretação atribui uma interpretação, ou denotação, a cada símbolo proposicional. Essa denotação corresponde a um valor de verdade. Neste texto escolhe-se para conjunto de valores de verdade, ou domínio das interpretações ou denotações, o conjunto $\{0, 1\}$. O valor 1 é usado quando se pretende que o símbolo represente uma asserção verdadeira e 0 quando se pretende que o símbolo represente uma asserção falsa.

Definição 1.3.1 Estrutura de interpretação sobre P
Uma *estrutura de interpretação* (ou *valoração*) sobre o conjunto de símbolos proposicinais P é uma função $V : P \to \{0, 1\}$. ■

Define-se de seguida a noção de satisfação de fórmula por estrutura de interpretação. Uma fórmula pode ser ou não satisfeita por uma estrutura de interpretação e pode ser satisfeita por uma dada estrutura mas não o ser por uma outra.

A satisfação de uma fórmula por uma estrutura de interpretação depende da interpretação que essa estrutura atribui aos símbolos proposicionais presentes nessa fórmula, ou seja, depende dos valores de verdade que a estrutura atribui a cada um desses símbolos. Depende também dos conectivos lógicos presentes na fórmula e do significado, da interpretação, que se associa a cada conectivo. Embora a interpretação dos símbolos proposicionais possa variar de estrutura para estrutura, o significado dos conectivos é fixo e tem um carácter funcional, no sentido em que a satisfação de uma fórmula por uma estrutura depende apenas da satisfação das suas subfórmulas estritas por essa estrutura. A interpretação de $\perp$ é também fixa.

Definição 1.3.2 Satisfação de fórmula
Seja V uma estrutura de interpretação sobre P. A noção de *satisfação de* $\varphi \in F_P$ por V denota-se por

$$V \Vdash \varphi$$

e define-se indutivamente como se segue:

- para cada $p \in P$, $V \Vdash p$ se $V(p) = 1$;
- não se verifica $V \Vdash \perp$;
- $V \Vdash \varphi \to \varphi'$ se sempre que $V \Vdash \varphi$ então $V \Vdash \varphi'$;
- $V \Vdash \varphi \wedge \varphi'$ se $V \Vdash \varphi$ e $V \Vdash \varphi'$;
- $V \Vdash \varphi \vee \varphi'$ se $V \Vdash \varphi$ ou $V \Vdash \varphi'$.

Sendo $\varphi \in F_P$ e V uma estrutura de interpretação sobre P, $V \nVdash \varphi$ é uma abreviatura de "não se verifica $V \Vdash \varphi$", o que significa que φ não é satisfeita por V.

Se $V \Vdash \varphi$, diz-se também que φ é interpretada como verdadeira por V e se $V \nVdash \varphi$ diz-se que é interpretada como falsa.

Dado $\Phi \subseteq F_P$, V *satisfaz* Φ, o que se denota por

$$V \Vdash \Phi$$

se $V \Vdash \varphi$ para toda a fórmula $\varphi \in \Phi$. ■

Exemplo 1.3.3 Sejam $\{p, q, r, s\} \subseteq P$ e $V : P \to \{0, 1\}$ uma estrutura de interpretação sobre P tal que $V(p) = 1$, $V(q) = 0$, $V(r) = 0$ e $V(s) = 1$. Tem-se que

- $V \Vdash p$ pois $V(p) = 1$;
- $V \nVdash q$ pois $V(q) = 0$;
- $V \nVdash \perp$ pois nenhuma valoração satisfaz $\perp$;
- $V \nVdash p \wedge q$ pois $V \nVdash q$;
- $V \Vdash r \to s$ pois $V \Vdash s$;
- $V \Vdash q \to \perp$ pois $V \nVdash q$;
- $V \nVdash r \vee (p \wedge q)$ pois $V \nVdash r$ e $V \nVdash p \wedge q$. ■

Observação 1.3.4 Relativamente ao conectivo $\neg$ (negação), e como seria de esperar, sendo $\varphi \in F_P$ e V uma qualquer estrutura de interpretação, tem-se que $V \Vdash \neg\varphi$ se e só se $V \nVdash \varphi$.

Uma definição alternativa à apresentada para a noção $V \Vdash \varphi \to \varphi'$ é a seguinte: $V \Vdash \varphi \to \varphi'$ se e só se $V \nVdash \varphi$ ou $V \Vdash \varphi'$. Obviamente, ambas as noções são equivalentes. ■

As fórmulas em que ocorrem conectivos lógicos permitem representar asserções mais complexas, e são construídas à custa das asserções mais simples representadas pelos símbolos proposicionais e $\perp$. Atribuir um valor de verdade aos símbolos proposicionais por intermédio de uma estrutura de interpretação corresponde a atribuir um valor de verdade às asserções que esses símbolos representam. A veracidade ou falsidade das asserções representadas pelas fórmulas mais complexas depende desses valores de verdade e dos conectivos que nelas ocorrem. Uma asserção é verdadeira no contexto de uma certa estrutura de interpretação se a fórmula que a representa é satisfeita por essa estrutura e é falsa se a fórmula não é satisfeita.

Exemplo 1.3.5 Recorde-se o Exemplo 1.2.3 no qual é assumido que o símbolo p representa a asserção "eu estou atrasada", o símbolo q representa a asserção "o meu automóvel está avariado", o símbolo s representa a asserção "eu estou doente"e o símbolo t representa a asserção "eu fico em casa".

A fórmula $p \wedge q$ permite representar a asserção "eu estou atrasada e o meu automóvel está avariado". Suponha-se que a estrutura V é tal que $V(p) = V(q) = 1$. Isto corresponde a assumir que as asserções "eu estou atrasada"e "o meu automóvel está avariado"são verdadeiras. O facto de $V \models p \wedge q$ significa que a asserção "eu estou atrasada e o meu automóvel está avariado"é verdadeira neste contexto em que são verdadeiras as asserções "eu estou atrasada"e "o meu automóvel está avariado". Considerando a estrutura V' tal que $V'(p) = 1$ e $V'(q) = 0$, tal corresponde agora a assumir que a asserção "o meu automóvel está avariado"é falsa. Tem-se que $V' \not\models p \wedge q$ e portanto a asserção "eu estou atrasada e o meu automóvel está avariado"é falsa neste novo contexto.

A fórmula $(q \vee s) \rightarrow t$ permite representar a asserção "se o meu automóvel está avariado ou eu estou doente então eu fico em casa". Suponha-se que a estrutura V é tal que $V(t) = 1$. Isto corresponde a assumir que a asserção "eu fico em casa"é verdadeira. $V \models (q \vee s) \rightarrow t$ o que significa que a asserção "se o meu automóvel está avariado ou eu estou doente então eu fico em casa"é verdadeira neste contexto em que é verdadeiras a asserção 'eu fico em casa". Considerando a estrutura V' tal que $V'(q) = 1$ e $V'(t) = 0$, tal corresponde agora a assumir que a asserção "o meu automóvel está avariado"é verdadeira e que a asserção "eu fico em casa"é falsa. Tem-se que $V' \not\models (q \vee s) \rightarrow t$ e portanto a asserção "se o meu automóvel está avariado ou eu estou doente então eu fico em casa"é falsa neste outro contexto. ■

Seguem-se a noções de fórmula possível, fórmula contraditória e de fórmula válida.

Uma fórmula possível é uma fórmula que *pode ser* interpretada como verdadeira, isto é, é possível encontrar uma forma de atribuir valores de verdade aos símbolos proposicionais que faz com que a fórmula seja interpretada como verdadeira. Uma fórmula contraditória é uma fórmula que *nunca pode ser* interpretada como verdadeira, ou seja, não é possível encontrar uma interpretação para os símbolos proposicionais que permita interpretar como verdadeira esta fórmula. Uma fórmula válida (ou tautologia) é uma fórmula que *é sempre* interpretada como verdadeira, ou seja, qualquer que seja a interpretação para os símbolos proposicionais que se considere, a fórmula é sempre interpretada como verdadeira. Pode dizer-se, informalmente, que uma tautologia representa uma verdade universal pois é interpretada como verdadeira independentemente do contexto ou situação em que é interpretada.

Definição 1.3.6 FÓRMULA POSSÍVEL, CONTRADITÓRIA E VÁLIDA
Seja $\varphi \in F_P$.

- φ diz-se *possível* se existe uma estrutura de interpretação V sobre P que satisfaz φ;
- φ diz-se *contraditória* (ou *impossível*) se nenhuma estrutura de interpretação sobre P satisfaz φ;
- φ diz-se *válida*, o que se denota por

  $$\models \varphi$$

  se todas as estruturas de interpretação V sobre P satisfazem φ. As fórmulas proposicionais válidas são também designadas *tautologias*.

Algumas destas noções podem ser estendidas também a conjuntos de fórmulas: sendo $\Phi \subseteq F_P$, Φ diz-se *possível* se existe uma estrutura de interpretação V sobre P que satisfaz todas as fórmulas em Φ e Φ diz-se *contraditório* (ou *impossível*) caso contrário.

Usa-se a notação $\not\models \varphi$ para indicar que φ não é fórmula válida. ∎

Segue-se a noção de consequência semântica entre um conjunto de fórmulas Φ e uma fórmula φ. A noção de consequência semântica é importante porque representa (ao nível das fórmulas) a noção de raciocínio válido entre asserções: o facto de φ ser consequência semântica de Φ assegura que uma asserção representada por φ será verdadeira sempre que o sejam as asserções representadas pelas fórmulas em Φ.

Definição 1.3.7 CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA
Sendo $\Phi \subseteq F_P$, a fórmula $\varphi \in F_P$ diz-se *consequência semântica de* Φ, o que se denota por

$$\Phi \models \varphi$$

se para cada estrutura de interpretação V sobre P, se $V \Vdash \Phi$ então $V \Vdash \varphi$.

Usa-se a notação $\Phi \not\models \varphi$ para indicar que a fórmula φ não é consequência semântica do conjunto Φ. ∎

Exemplo 1.3.8 Seja $\{p, q, r, s\} \subseteq P$. Tem-se que

- são fórmulas possíveis
  - p
  - $q \to \perp$
  - $p \wedge q$
  - $r \vee (p \wedge q)$
  - $p \to (q \to p)$
- são fórmulas contraditórias
  - $\perp$
  - $p \wedge (\neg p)$
  - $(r \to s) \wedge (r \wedge (\neg s))$
- se uma fórmula é contraditória então não é uma fórmula possível
- se uma fórmula é possível então não é uma fórmula contraditória
- são fórmulas válidas
  - $\top$
  - $p \vee (\neg p)$
  - $\perp \to p$
  - $(p \wedge q) \to q$
  - $p \to (q \to p)$
- não são fórmulas válidas

  - $r \vee (p \wedge q)$
  - $(p \vee q) \rightarrow p$

- $\{p \wedge q\} \models p$
  ou seja, p é consequência semântica de $\{p \wedge q\}$
- $\{p \rightarrow q\} \models (\neg q) \rightarrow (\neg p)$
  ou seja, $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ é consequência semântica de $\{p \rightarrow q\}$
- $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
  ou seja, $p \rightarrow r$ é consequência semântica de $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$
- $\{p \vee q\} \not\models p$
  ou seja, p não é consequência semântica de $\{p \vee q\}$
- $\{p \rightarrow q\} \not\models q \rightarrow p$
  ou seja, $q \rightarrow p$ não é consequência semântica de $\{p \rightarrow q\}$. ■

Exemplo 1.3.9 Recorde-se de novo o Exemplo 1.2.3 no qual é assumido que o símbolo r representa a asserção "eu estou com febre "e o símbolo s representa a asserção "eu estou doente".

A fórmula $r \rightarrow s$ permite representar a asserção "se eu estou com febre então eu estou doente". Tem-se que $\{r, r \rightarrow s\} \models s$. Isto significa é um raciocínio válido o seguinte raciocínio: "sabendo que tenho febre e que sempre que tenho febre então estou doente posso concluir que estou doente". ■

A proposição seguinte mostra que para determinar se uma fórmula φ é ou não satisfeita por uma dada estrutura de interpretação V, basta saber qual o valor que V atribui aos símbolos proposicionais presentes em φ. Isto significa que dadas duas estruturas de interpretação V e V' (sobre P), tem-se que se ambas atribuem os mesmos valores aos símbolos proposicionais presentes em φ então $V \Vdash \varphi$ se e só se $V' \Vdash \varphi$.

Proposição 1.3.10
Sejam V e V' duas estruturas de interpretação sobre P. Para cada $\varphi \in F_P$, se $V(p) = V'(p)$ para cada $p \in \mathit{Smb}(\varphi)$ então $V \Vdash \varphi$ se e só se $V' \Vdash \varphi$.

Prova: A prova utiliza o princípio de indução aplicado ao conjunto F_P definido indutivamente.

Base: Existem dois casos a considerar: (i) φ é $\perp$ e (ii) $\varphi \in P$. O caso (i) é trivial porque, pela Definição 1.3.2, $V \not\Vdash \perp$ e $V' \not\Vdash \perp$. O caso (ii) é também trivial porque, uma vez $V(p) = V'(p)$ para cada $p \in Smb(\varphi)$, $V(\varphi) = V'(\varphi)$ e portanto, pela Definição 1.3.2, $V \Vdash \varphi$ se e só se $V' \Vdash \varphi$.

Passo: Existem três casos a considerar: (i) φ é $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, (ii) φ é $\varphi_1 \vee \varphi_2$ e (iii) φ é $\varphi_1 \to \varphi_2$.

Suponha-se então que $V(p) = V'(p)$ para cada $p \in Smb(\varphi)$. Então, tendo em conta a Definição 1.2.8, tem-se em cada um dos casos que $V(p) = V'(p)$ para cada $p \in Smb(\varphi_1) \cup Smb(\varphi_2)$. Tem agora que se provar que, em cada caso, $V \Vdash \varphi$ se e só se $V' \Vdash \varphi$.

A hipótese de indução permite concluir, em cada caso, que $V \Vdash \varphi_1$ se e só se $V' \Vdash \varphi_1$ e $V \Vdash \varphi_2$ se e só se $V' \Vdash \varphi_2$.

(i) Se $V \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ então, $V \Vdash \varphi_1$ e $V \Vdash \varphi_2$ e portanto, pelo parágrafo anterior, $V' \Vdash \varphi_1$ e $V' \Vdash \varphi_2$ pelo que $V' \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. O recíproco é idêntico.

(ii) e (iii) Raciocínio semelhante ao apresentado em (i). ■

Tendo em conta a Proposição 1.3.10, uma forma óbvia de determinar se uma dada fórmula φ é válida consiste em considerar todas as possíveis combinações de valores que podem ser atribuídos aos símbolos proposicionais presentes em φ (assumindo, para simplificar, que se $\perp \in Sbf(\varphi)$ então $\perp$ é também um símbolo proposicional a que se tem de atribuir sempre o valor 0) e determinar, se em cada caso, a fórmula é satisfeita. Tal pode ser conseguido fazendo uma tabela, usualmente designada *tabela de verdade* como se ilustra seguidamente.

Exemplo 1.3.11 Seja $\{p, q\} \subseteq P$. Considerando a fórmula $\varphi = (p \wedge q) \to q$ tem-se que $Smb(\varphi) = \{p, q\}$. Tendo em conta a Proposição 1.3.10, para determinar se todas as estruturas de interpretação sobre P satisfazem φ basta analisar o que acontece no caso de a p e q ser atribuído o valor 1, no caso de a p e q ser atribuído o valor 0 e nos casos em que lhes são atribuídos valores diferentes. Há assim que analisar 4 casos diferentes. Pode para tal fazer-se uma tabela como a apresentada na Figura 1.1.

A tabela tem tantas colunas quantas as subfórmulas de φ; tem tantas linhas quantas as possíveis combinações de valores que os símbolos proposicionais em $Smb(\varphi)$ podem tomar e mais uma linha (a primeira) onde se indicam as subfórmulas de φ começando pelos símbolos proposicionais e $\perp$ (se existisse). Em cada uma das linhas (a partir da segunda) indicam-se, nas colunas correspondentes, as diferentes com-

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
1	1	1	1
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1

Figura 1.1: Tabela de verdade para $(p \wedge q) \to q$

binações de valores que podem ser atribuídos aos símbolos proposicionais (se existir $\perp$, o seu valor será sempre 0).

Na segunda linha, por exemplo, indica-se que se atribui a p e q o valor 1. Nas outras colunas desta segunda linha (as colunas correspondentes a cada uma das outras subfórmulas de φ) coloca-se 1 se estas valorações satisfazem a fórmula que se encontra na primeira linha dessa coluna e 0 caso contrário. É fácil de determinar se a fórmula em causa é satisfeita ou não, usando a Definição 1.3.2, uma vez que na tabela vai estar também a informação acerca da satisfação de todas as suas subfórmulas. Note-se que esta linha é representativa de todas as valorações que atribuem o valor 1 aos símbolos proposicionais p e q. Como se disse, da Proposição 1.3.10 resulta que todas estas valorações se comportam da mesma forma face à satisfação de φ (e das suas subfórmulas).

As outras linhas preenchem-se de modo semelhante. Obviamente, para determinar se φ é válida basta consultar as diferentes linhas da coluna correspondente a esta fórmulas e verificar se todas elas são 1. Este é o caso da tabela apresentada e portanto φ é válida.

Segue-se um outro exemplo correspondente à fórmula $\psi = (p \wedge q) \to \perp$. A tabela é agora a apresentada na Figura 1.2 e portanto, dado que nas linhas correspondentes à coluna de ψ existe um 0, ψ não é válida. ∎

Tendo em conta os parágrafos anteriores, pode agora abordar-se a questão da *decidibilidade da lógica proposicional*: a lógica proposicional é decidível, ou mais precisamente, o problema de saber se uma fórmula é ou não válida é decidível.

Informalmente[1], um problema é decidível se existe um algoritmo de decisão para

[1] Para uma definição mais rigorosa do conceito de problema/predicado decidível consultar, por exemplo, [6].

p	q	$\perp$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow \perp$
1	1	0	1	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1

Figura 1.2: Tabela de verdade para $(p \wedge q) \rightarrow \perp$

o problema, isto é, um conjunto finito de instruções/passos executáveis em tempo finito, que permite obter em tempo finito uma resposta afirmativa ou negativa sobre o problema em causa. Em particular, o problema de saber se uma fórmula proposicional é ou não válida é decidível se existir um algoritmo que, dada uma fórmula arbitrária, permita obter um resposta afirmativa ou negativa sobre a sua validade.

Com efeito, dada uma fórmula φ é sempre possível (embora nem sempre muito eficiente) construir uma tabela de verdade para a fórmula pois (i) o conjunto $Sbf(\varphi)$ é finito e (ii) é sempre possível determinar em tempo finito se uma valoração satisfaz um fórmula. Após a construção da tabela basta consultar as linhas correspondentes à coluna de φ: a fórmula é válida se todas as linhas são 1 e não é válida caso contrário.

Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos nesta secção.

Exercício 1.3.12 Sejam $\{p, q, r\} \subseteq P$ e ψ_1, ψ_2 fórmulas arbitrárias de F_P. De entre as fórmulas seguintes indique as que são possíveis, as que são contraditórias e as que são válidas

1. $p \rightarrow (q \vee r)$
2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
3. $(q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p$
4. $((\neg p) \rightarrow q) \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))$
5. $p \rightarrow (p \wedge q)$

6. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
7. $(p \vee q) \rightarrow p$
8. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow (\neg q))$
10. $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg q))$
11. $(p \vee (\neg r)) \wedge (q \rightarrow p) \wedge ((\neg r) \rightarrow q) \wedge (\neg p)$
12. $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$
13. $\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$
14. $(\neg \psi_1) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$
15. $\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$
16. $(\psi_1 \rightarrow \psi_1) \rightarrow ((\neg \psi_2) \rightarrow (\neg \psi_1))$
17. $(\neg \psi_1) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$
18. $((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_1) \rightarrow \psi_1$

■

Exercício 1.3.13 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 designam fórmulas arbitrárias de F_P. Verifique se são ou não correctas as afirmações seguintes. No caso de não serem correctas contrua contra-exemplos apropriados, supondo, nesse caso, que ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 designam símbolos proposicionais

1. $\models (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_3)) \rightarrow ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_3))$
2. $\models (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow ((\neg \psi_2) \rightarrow (\neg \psi_1))$
3. $\{\psi_1 \rightarrow \psi_2, \psi_2 \rightarrow \psi_3, \psi_4 \rightarrow \psi_3\} \models \psi_1 \rightarrow \psi_4$
4. $\{\neg(\psi_2 \vee (\neg \psi_3)) \leftrightarrow (\neg \psi_4), \psi_4\} \models \psi_3 \rightarrow (\psi_2 \vee \psi_1)$
5. $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \rightarrow \psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_3\} \models \psi_4 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

6. $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_3 \to \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4\} \models \psi_1 \vee \psi_3$
7. $\{\psi_1 \to (\psi_3 \wedge \psi_4), (\psi_2 \vee \psi_3) \to \psi_4\} \models \psi_4 \to \psi_1$
8. $\{\psi_1, \psi_2 \to \psi_3, \neg(\psi_1 \wedge \psi_3)\} \models \neg\psi_2$ ∎

Exercício 1.3.14 Mostre que para cada estrutura de interpretação V se tem que

- $V \models \varphi \to \perp$ se e só se $V \models \neg\varphi$
- $V \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ se e só se $V \models (\neg\varphi_1) \to \varphi_2$
- $V \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ se e só se $V \models \neg(\varphi_1 \to (\neg\varphi_2))$. ∎

1.4 Sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$

Nesta secção apresenta-se um sistema dedutivo para a lógica proposicional: o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$. Ao longo das secções seguintes poderá ser útil o leitor ter presente alguns dos conceitos que se encontram reunidos no apêndice **??**, nomeadamente, os conceitos relativos às noções de árvore e árvore etiquetada.

1.4.1 Sistemas dedutivos

Dada uma qualquer fórmula proposicional, é importante conseguir determinar se esta é ou não válida, pois tal significa determinar se qualquer asserção por ela representada é ou não sempre verdadeira. Determinar se uma fórmula é ou não válida pode ser conseguido por via semântica, analisando o que acontece para cada estrutura de interpretação. Uma outra forma consiste em seguir uma via sintáctica, recorrendo a um *sistema dedutivo*. Neste caso apenas se manipulam os símbolos que ocorrem nas fórmulas, não estando envolvidas quaisquer interpretações.

Naturalmente é também relevante saber se uma fórmula φ é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Φ. Como foi referido, a noção de consequência semântica está associada ao conceito de raciocínio válido: o facto de φ ser consequência semântica Φ assegura que qualquer asserção representada por φ é verdadeira sempre que o forem as asserções representadas pelas fórmulas em Φ. Tal como no caso da validade, saber se uma fórmula φ é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Φ pode ser conseguido por via semântica, mas pode também ser conseguido por manipulação simbólica das fórmulas utilizando um sistema dedutivo.

Existem vários sistemas dedutivos para a lógica proposicional, tendo cada um as suas características próprias, as suas vantagens e as suas desvantagens.

Um sistema dedutivo é tipicamente constituído por *axiomas* e por *regras de inferência*, mas existem também sistemas dedutivos que só têm regras de inferência (o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$ é um deles). O que são os axiomas e as regras de inferência depende do sistema dedutivo em causa mas envolvem sempre uma ou várias fórmulas da linguagem.

A partir dos axiomas (se existirem) e das regras de inferência constroem-se *derivações* ou *deduções* do sistema. Novamente, o que é uma derivação ou dedução depende do sistema dedutivo em consideração. Por exemplo, em certos sistemas uma dedução é apenas uma sequência de fórmulas mas, noutros sistemas, uma derivação pode ser apresentada como uma árvore (etiquetada).

Em certas situações pode dizer-se que uma dada derivação é, em particular, uma derivação de uma determinada fórmula φ no sistema em causa. Numa derivação de uma fórmula podem ainda estar presentes hipóteses (fórmulas verificando certas condições que dependem do sistema considerado). Se numa derivação de φ estão presentes hipóteses, diz-se que φ é, nesse sistema, *consequência* do conjunto das hipóteses. Uma fórmula φ para a qual exista uma derivação sem hipóteses é um *teorema* desse sistema dedutivo.

Para que possa ser útil para estabelecer validade ou consequência semântica, um sistema dedutivo deve ter propriedades que relacionem de modo adequado certas derivações do sistema com certas noções semânticas. Uma propriedade importante é a que é usualmente designada por *correcção*. Um sistema com esta propriedade é designado *sistema correcto*. Em geral, um sistema diz-se correcto se sempre que uma fórmula φ é consequência de um conjunto de hipóteses Φ nesse sistema, então φ é também consequência semântica de Φ. Ao estabelecer num sistema correcto que φ é consequência de um conjunto de hipóteses Φ pode também concluir-se, pela correção do sistema, que φ é consequência semântica de Φ. Assim, é possível estabelecer consequência semântica através apenas da manipulação simbólica de fórmulas proporcionada pelos axiomas e regras de inferência, sem se recorrer portanto explicitamente a quaisquer noções semânticas. Considerações semelhantes se aplicam ao caso particular de o conjunto de hipóteses ser vazio, caso em que o facto de uma fórmula ser teorema do sistema permite concluir que é fórmula válida. A correcção de um sistema dedutivo é, em geral, uma propriedade cuja prova é relativamente fácil.

Refira-se que certos autores definem a noção de sistema correcto exigindo apenas que todos os teoremas do sistema sejam fórmulas válidas. Outros autores consideram a versão referida no parágrafo anterior, designando os sistemas que verificam apenas esta outra versão como sistemas *fracamente correctos* (ou como tendo a propriedade *correcção fraca*). É também esta a opção tomada neste texto, isto é, a noção de correcção utilizada corresponde à versão atrás apresentada.

Uma outra propriedade desejável num sistema dedutivo é a *completude*. Em geral, um sistema diz-se *completo* se sempre que uma fórmula φ é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Φ então φ é consequência nesse sistema do conjunto de hipóteses Φ. A prova de completude de um sistema dedutivo é, em geral, mais elaborada que a prova de correcção.

Tal como no caso da correcção, certos autores definem a noção de completude exigindo apenas que todas as fórmulas válidas sejam teoremas. Outros autores consideram a versão referida atrás, designando esta nova versão como sistema *fracamente completo* (ou como tendo a propriedade *completude fraca*). Uma vez mais, é também esta a opção tomada neste texto, ou seja, a noção de completude utilizada corresponde à versão que primeiro de apresentou.

Para terminar, refira-se ainda que, relativamente à noção de sistema completo, existem outros textos que usam essa designação para sistemas tais que, para cada fórmula φ, se tem que ou φ é teorema do sistema ou $\neg\varphi$ é teorema do sistema. Neste texto, e seguindo vários outros autores, esta propriedade não é assim designada, estando sim relacionada com a noção de conjunto coerente maximal (Definição 1.4.32). Existe ainda na literatura uma outra variante no que diz respeito à noção de completude fraca: para certos autores um sistema é fracamente completo quando, para cada conjunto *finito* Φ, se φ é consequência semântica Φ então φ é consequência de Φ no sistema.

Nesta secção apresenta-se um sistema dedutivo para a lógica proposicional: o sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$.

Sistemas de dedução natural para a lógica clássica (proposicional e primeira ordem) foram introduzidos pela primeira vez nos anos 30 por S. Jáskowski [11] e por G. Gentzen [10] (neste último caso também para a lógica intuicionista).

Existem na literatura diferentes modos de apresentar sistemas de dedução natural. Em certos textos como, por exemplo, [10], [12], [15] e [14], as deduções construídas são árvores. Foi esta a versão adoptada neste texto tendo-se em particular optado por uma apresentação semelhante à que se encontra em [14]. Noutros casos como, por exemplo, [11] e [7], as deduções são essencialmente sequências de fórmulas com alguns detalhes adicionais.

Na subsecção 1.4.2 faz-se uma apresentação do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ de uma forma mais ou menos informal, análoga à que é comum encontrar na literatura, e decidiu-se fazer uma apresentação gradual através de diversos exemplos cujo objectivo é ir ilustrando de uma forma progressiva os aspectos mais importantes do sistema dedutivo. Esta apresentação proporciona ao leitor a descrição dos aspectos essenciais do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ e permite que o leitor possa construir com facilidade derivações no sistema. Pretendeu-se também neste texto apresentar este assunto de um modo mais preciso, estabelecendo definições rigorosas das várias noções envolvidas. O leitor interessado pode encontrar essa descrição na subsecção 1.4.4. As provas de correcção e completude do sistema encontram-se na secção 1.4.5. Na secção 1.4.6 são propostos diversos exercícios.

A construção de derivações em $\mathcal{N}_p$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este assunto é abordado no capítulo **??**.

1.4.2 O sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$

No âmbito do sistema $\mathcal{N}_p$ são construídas árvores, as quais são usualmente designadas *árvores de dedução* ou *árvores de derivação* ou ainda, mais simplesmente, *deduções* ou *derivações*. Cada árvore de dedução é uma árvore etiquetada que verifica determinadas propriedades. As árvores de dedução são construídas partindo de árvores singulares e utilizando sucessivamente regras de inferência. A aplicação das regras de inferência permite obter novas deduções a partir de outras deduções. As etiquetas dos nós das árvores são constituídas, como seria de esperar, por fórmulas de F_P mas também incluem determinado tipo de informação complementar. As fórmulas associadas às folhas das árvores de dedução desempenham neste contexto o papel de hipóteses. A estas fórmulas estão associadas marcas. Às fórmulas dos outros nós pode também estar associada informação sobre marcas de hipóteses. A fórmula relativa ao nó raiz é a conclusão da árvore.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo 1.4.1 A árvore d

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1^{\;1} \qquad\qquad \psi_1 \to \psi_2^{\;2}}{\psi_2}\to E \qquad\qquad \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)^{\;3}}{\psi_3 \wedge \psi_4}\to E}{\psi_3}\wedge E_d$$

é uma árvore de dedução do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ (neste contexto, as árvores são usualmente representadas com as folhas acima da raiz). Estas árvores de dedução podem também ser designadas árvores de derivação e constituem as deduções (ou derivações) deste sistema.

A conclusão da árvore de dedução é a fórmula ψ_3 (a fórmula associada ao nó raiz) pelo que se diz que a árvore constitui uma dedução (ou derivação) de ψ_3 em $\mathcal{N}_p$. As fórmulas ψ_1, $\psi_1 \to \psi_2$ e $\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)$ (as fórmulas relativas às folhas da árvore) são as hipóteses da árvore de dedução. A cada hipótese está associado um natural, o qual constitui a marca da respectiva hipótese. Nos exemplos que irão sendo apresentados as marcas das hipóteses são naturais mas poder-se-iam utilizar outros tipos de marcas. Uma dedução pode ter várias hipóteses iguais pois pode acontecer que a folhas distintas esteja associada a mesma fórmula. Neste caso, as respectivas marcas poderão ser iguais ou diferentes. No entanto, a hipóteses distintas devem corresponder marcas distintas. Caso esta condição não seja verificada diz-se que existe *conflito de marcas*. Deste modo, as deduções de $\mathcal{N}_p$ têm de ser sempre deduções sem conflitos de marcas. A necessidade de considerar estas marcas associadas às hipóteses será detalhada mais adiante.

Os traços horizontais correspondem a aplicações de regras de inferência. Neste caso foram aplicadas as regras $\to E$ (duas vezes) e a regra $\wedge E_d$. A designação $\to E$ significa "eliminação da implicação"e a designação $\wedge E_d$ significa "eliminação da conjunção à direita". A indicação das regras aplicadas não é estritamente obrigatória, mas facilita a análise das derivações.

A construção desta árvore pode decorrer da seguinte forma:

(i) consideram-se as árvores singulares

$$\psi_1^{\;1} \qquad \text{e} \qquad \psi_1 \to \psi_2^{\;2}$$

cujos nós são etiquetados com as hipóteses ψ_1 e $\psi_1 \to \psi_2$ e respectivas marcas. A notação $\psi_1{}^1$ constitui um modo simples de representar que ao nó está associada a fórmula ψ_1 e a marca 1, o mesmo acontecendo no caso de $\psi_1 \to \psi_2{}^2$.

(ii) partindo das árvores singulares consideradas em (i) e por aplicação da regra $\to E$, obtém-se a árvore

$$\frac{\psi_1{}^1 \qquad\qquad \psi_1 \to \psi_2{}^2}{\psi_2}\to E$$

cuja raiz tem associada a fórmula ψ_2 (a indicação de que foi aplicada a regra $\to E$ é usualmente representada do lado direito do traço horizontal);

(iii) partindo da árvore obtida em (ii) e da árvore singular a cujo nó está associada a outra hipótese e respectiva marca, isto é, $\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)^{\,3}$, e novamente por aplicação da regra $\to E$ obtém-se a árvore

$$\frac{\dfrac{\psi_1{}^1 \qquad\qquad \psi_1 \to \psi_2{}^2}{\psi_2}\to E \qquad\qquad \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)^{\,3}}{\psi_3 \wedge \psi_4}\to E$$

cuja raiz tem associada a fórmula $\psi_3 \wedge \psi_4$;

(iv) finalmente, partindo da árvore obtida em (iii) e por aplicação da regra $\wedge E_d$, obtém-se a árvore final d.

Foi atrás referido que a dedução apresentada no início deste exemplo constitui uma dedução de ψ_3. Detalhando um pouco mais, pode ainda dizer-se que ela constitui uma dedução, ou derivação, de ψ_3 *a partir de um certo conjunto de hipóteses*. São as marcas das hipóteses e o facto de estas marcas ocorrerem ou não em nós interiores da árvore que permitem dizer qual é esse conjunto de hipóteses. Como neste caso as marcas só estão presentes nas folhas, diz-se que todas as hipóteses estão *abertas*, ou que nenhuma hipótese foi *eliminada*, e o referido conjunto de hipóteses é $\{\psi_1, \psi_1 \to \psi_2, \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)\}$, ou seja, o *conjunto constituído por todas as hipóteses abertas.* Adiante se verá como se *eliminam* (ou *fecham*) hipóteses. Utiliza-se usualmente a notação

$$\{\psi_1, \psi_1 \to \psi_2, \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_3$$

para representar o facto de existir uma dedução em ψ_3 em $\mathcal{N}_p$ a partir do conjunto de hipóteses referido. ■

No exemplo anterior foram utilizadas as regras $\to E$ e $\wedge E_d$. Segue-se a descrição destas regras.

Regra $\to E$ (eliminação da implicação)

A regra $\to E$ permite concluir φ_2 a partir de φ_1 e $\varphi_1 \to \varphi_2$, ou, mais precisamente, permite obter uma derivação de φ_2 a partir de derivações de φ_1 e de $\varphi_1 \to \varphi_2$. O raciocínio subjacente a esta regra é conhecido como *modus ponens* e significa informalmente o seguinte: sabendo que a partir da asserção α se pode concluir a asserção β e sabendo que α se verifica então pode concluir-se que β se verifica. A regra é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi_1 & \varphi_1 \to \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_2} \to E$$

onde os elementos acima do traço horizontal correspondem às derivações às quais vai ser aplicada a regra: a derivação com conclusão φ_1 (à esquerda) e a derivação com conclusão $\varphi_1 \to \varphi_2$ (à direita). Para que a nova árvore não tenha conflito de marcas (dadas quaisquer duas folhas distintas, se as fórmulas correspondentes são distintas então as marcas correspondentes também o são) é necessário exigir que estas duas derivações não tenham conflito de marcas entre si (dada uma qualquer folha de uma delas e uma qualquer folha da outra, se as fórmulas correspondentes são distintas então as marcas correspondentes também o são).

Esta regra tem aridade 2, ou é uma regra binária (pois a nova derivação é obtida a partir de duas outras derivações). ∇

<u>Regra $\wedge E_d$</u> (eliminação da conjunção à direita)

A regra $\wedge E_d$ permite obter uma derivação de φ_1 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Informalmente esta regra representa o raciocínio seguinte: se as asserções α e β se verificam então, em particular, verifica-se α.

A regra é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_1}\ \wedge E_d$$

onde acima do traço horizontal se encontra representada a árvore com conclusão $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ à qual vai ser aplicada a regra. Esta regra tem aridade 1, ou é uma regra unária (pois, neste caso, é apenas necessária uma única derivação para obter a nova derivação). ∇

Como seria de esperar existe uma regra semelhante a $\wedge E_d$ mas em que a eliminação é realizada à esquerda.

<u>Regra $\wedge E_e$</u> (eliminação da conjunção à esquerda)

A regra $\wedge E_e$ é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_2}\ \wedge E_e$$

sendo em tudo análoga à regra $\wedge E_d$. ∇

Nos exemplos seguintes ilustra-se uma outra regra relacionada com a implicação.

Exemplo 1.4.2 A árvore d_1

$$\dfrac{\dfrac{\psi_1 \wedge {\psi_2}^{1}}{\psi_1}\wedge E_d}{(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_1}\rightarrow I, 1$$

é uma outra árvore de dedução do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ e, portanto, uma outra dedução ou derivação neste sistema. É, em particular, uma derivação da fórmula $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_1$. Na construção desta árvore foi utilizada a regra $\wedge E_d$ e a regra $\rightarrow I$. A designação $\rightarrow I$ significa "introdução da implicação". Note-se que a marca 1 está associada à hipótese $\psi_1 \wedge \psi_2$ e também se encontra associada à aplicação da regra $\rightarrow I$. Esta situação está relacionada com o facto de a regra $\rightarrow I$ permitir *eliminar* ou *fechar* hipóteses.

A ideia subjacente à regra $\rightarrow I$ está associada ao procedimento mais comum para estabelecer asserções do tipo "se α então β": assumir a asserção α como hipótese e tentar concluir a asserção β. Naturalmente que se para concluir β apenas é necessária a hipótese α então a prova da asserção "se α então β"não depende de quaisquer assumpções prévias. No caso em que forem também necessárias hipóteses distintas de α então a prova da asserção "se α então β"depende dessas assumpções adicionais. Em ambos os casos a hipótese α pode ser vista como uma hipótese *auxiliar*, isto é, uma hipótese que é utilizada temporariamente para se conseguir concluir β (com o propósito de estabelecer "se α então β").

Voltando à dedução apresentada no início, tem-se que a árvore d_2

$$\dfrac{\psi_1 \wedge {\psi_2}^{1}}{\psi_1}\wedge E_d$$

é precisamente uma dedução de ψ_1 assumindo a hipótese $\psi_1 \wedge \psi_2$. Conclui-se então $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_1$ construindo a árvore d_1, por aplicação da regra $\rightarrow I$. A aplicação da regra $\rightarrow I$ corresponde assim à introdução da implicação entre $\psi_1 \wedge \psi_2$ e ψ_1, dada uma derivação de ψ_1 a partir da hipótese $\psi_1 \wedge \psi_2$.

Quando se obtém a derivação de ψ_1 a partir de $\psi_1 \wedge \psi_2$, pode dizer-se que a hipótese $\psi_1 \wedge \psi_2$ já "cumpriu o seu papel". A fórmula $\psi_1 \wedge \psi_2$ (o antecedente da implicação em causa) pode ser vista como uma hipótese *auxiliar* que é utilizada para derivar ψ_1 (com o propósito de estabelecer $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_1$). Assim, a aplicação da regra deve conduzir à *eliminação* (ou ao *fecho*) desta hipótese auxiliar. Tal eliminação é efectuada associando ao nó raiz da árvore d_1 informação que indica a hipótese que se elimina. Tal informação é precisamente a marca da hipótese e é por este motivo que se torna necessário associar marcas às hipóteses. A marca associada à hipótese $\psi_1 \wedge \psi_2$ é 1 e é por isso que este natural se encontra junto a $\to I$ (embora, em rigor, a marca faça parte da etiqueta do nó, ela é usualmente representada junto da designação da regra). Note-se que, neste caso, apenas existe uma hipótese correspondente à formula $\psi_1 \wedge \psi_2$, mas pode haver mais (ou nenhuma) como se verá adiante.

No caso geral, dada uma árvore de dedução, consideram-se *eliminadas* ou *fechadas* todas hipóteses da árvore cujas marcas se encontrem associadas a nós interiores da árvore. Esses nós serão sempre resultantes da aplicação da regra $\to I$ ou da aplicação de uma de duas outras regras que também conduzem à eliminação de hipóteses e que serão descritas mais adiante.

Como foi referido, as hipóteses de uma árvore de dedução que não são fechadas dizem-se *abertas*. Dada uma árvore de dedução do sistema $\mathcal{N}_p$, diz-se que ela constitui uma dedução (ou derivação) em $\mathcal{N}_p$ da fórmula associada ao nó raiz (a conclusão da árvore) a partir do conjunto das hipóteses *abertas*. No caso particular do conjunto das hipóteses abertas ser vazio, isto é, no caso de não existirem hipóteses abertas, diz-se que a conclusão da árvore é um *teorema* do sistema $\mathcal{N}_p$.

No caso deste exemplo, a árvore d_1 é derivação de $(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_1$ a partir do conjunto vazio de hipóteses abertas e portanto a fórmula $(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_1$ é um teorema de $\mathcal{N}_p$. A notação

$$\vdash_{\mathcal{N}_p} (\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_1$$

é usada para representar este facto. ∎

No próximo exemplo apresenta-se mais uma derivação envolvendo a regra $\to I$.

Exemplo 1.4.3 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1^{\;1} \qquad\qquad \psi_1 \to \psi_2^{\;2}}{\psi_2}\,{\to}E \qquad\qquad \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)^{\;3}}{\psi_3 \wedge \psi_4}\,{\to}E}{\psi_3}\,\wedge E_d$$

$$\dfrac{}{\psi_1 \to \psi_3}\;{\to}I,1$$

é uma derivação do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$. Esta árvore é obtida a partir da árvore d do Exemplo 1.4.1, por aplicação da regra $\to I$ e eliminando a hipótese ψ_1. A árvore d tem três hipóteses abertas e constitui uma derivação de ψ_3 a partir do conjunto de hipóteses $\{\psi_1, \psi_1 \to \psi_2, \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)\}$. A árvore aqui apresentada tem duas hipóteses abertas e constitui uma derivação de $\psi_1 \to \psi_3$ a partir do conjunto de hipóteses $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)\}$.

A derivação d do Exemplo 1.4.1 pode ser interpretada como uma derivação de ψ_3 a partir da hipótese ψ_1, usando como hipóteses adicionais as fórmulas $\psi_1 \to \psi_2$ e $\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)$ ou, dito de outro modo, d revela que a partir de ψ_1 é possível derivar ψ_3 se se considerarem também as referidas hipóteses adicionais. Daqui resulta então a conclusão de que, sob as hipóteses $\psi_1 \to \psi_2$ e $\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)$, se deriva $\psi_1 \to \psi_3$.

Naturalmente que também a partir da referida árvore d se pode obter, por exemplo, uma derivação de $(\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_3$ a partir ψ_1 e $\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)$. Basta para isso aplicar a regra $\to I$ mas eliminando agora a hipótese $\psi_1 \to \psi_2$.

A partir da árvore d, e por sucessivas aplicações da regra $\to I$, pode obter-se ainda a seguinte derivação

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1^{\,1} \qquad \psi_1 \to \psi_2^{\,2}}{\psi_2}\;{\to}E \qquad \psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)^{\,3}}{\psi_3 \wedge \psi_4}\;{\to}E}{\psi_3}\;\wedge E_d}{\psi_1 \to \psi_3}\;{\to}I,1}{(\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)) \to (\psi_1 \to \psi_3)}\;{\to}I,3}{(\psi_1 \to \psi_2) \to ((\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4)) \to (\psi_1 \to \psi_3))}\;{\to}I,2$$

a qual constitui uma derivação de $(\psi_1 \to \psi_2) \to ((\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4) \to (\psi_1 \to \psi_3))$ a partir de um conjunto vazio de hipóteses, o que significa que esta fórmula é um teorema do sistema dedutivo. ∎

Descreve-se agora a regra $\rightarrow I$.

Regra $\rightarrow I$ (introdução da implicação)

A regra $\rightarrow I$ permite obter uma derivação para $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ dada uma derivação de φ_2 a partir de um conjunto de hipóteses contendo, eventualmente, φ_1. É usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^{\,m}\\ \mathcal{D}\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\rightarrow I, m$$

onde acima do traço horizontal se encontra representada a derivação cuja conclusão é φ_2 e tem (eventualmente) hipóteses abertas correspondentes à fórmula φ_1 e à marca m. Esta marca m envolvida na aplicação da regra deverá verificar uma de duas situações:

(i) é a marca de uma ou mais hipóteses abertas correspondentes à fórmula φ_1 (o antecedente da implicação obtida) ou

(ii) é uma marca que não ocorre na derivação a que se aplica a regra (ou seja, é uma marca *nova*).

Quando se pretende fazer referência directa ao antecedente da implicação e/ou à marca envolvida diz-se, por vezes, que a nova derivação é obtida por aplicação da regra $\rightarrow I$ com fórmula φ_1 e marca m. Esta regra tem aridade 1.

A regra $\rightarrow I$ constitui o primeiro exemplo de regras que permitem eliminação de hipóteses. A notação $[\varphi_1]^{\,m}$ significa que na árvore a que se aplica a regra poderão (ou não, como se ilustra adiante) existir hipóteses abertas correspondentes a φ_1 e com marca m. É importante notar, portanto, que na aplicação desta regra nem sempre têm de ser eliminadas hipóteses. O exemplo seguinte ilustra estas situações.

Exemplo 1.4.4 A árvore

$$\cfrac{\cfrac{{\psi_1}^{1}}{\psi_2 \to \psi_1}\to I, 2}{\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)}\to I, 1$$

é uma árvore de dedução do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$. A conclusão é $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$. Tem uma hipótese fechada que corresponde à fórmula ψ_1 e não tem hipóteses abertas. Constitui uma dedução de $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$ a partir do conjunto vazio de hipóteses e, portanto, $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$ é um teorema do sistema $\mathcal{N}_p$.

O que se pretende ilustrar com este exemplo é o facto de a regra $\to I$ poder ser aplicada eliminando um conjunto vazio de hipóteses. Com efeito, a primeira aplicação da regra $\to I$ não elimina hipóteses pois não existem hipóteses com marca 2. Este caso de aplicação da regra corresponde informalmente ao seguinte raciocínio: se se assume que se verifica a asserção β, então é trivial concluir β a partir de uma qualquer asserção α e, portanto, é trivial concluir "se α então β"independentemente de qual a asserção α que se considere.

Uma outra forma de proceder em situações deste tipo seria não introduzir marca alguma. Por uma questão de uniformidade no tratamento de regras que eliminam hipóteses, não foi neste texto tomada esta opção.

Um outro aspecto que merece atenção é o facto de nada impedir que ao aplicar a regra $\to I$ se utilize uma marca nova (isto é, uma marca que não ocorre na árvore) em situações em que se poderiam eliminar hipóteses. A árvore

$$\cfrac{\cfrac{{\psi_1}^{1}}{\psi_2 \to \psi_1}\to I, 2}{\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)}\to I, 3$$

é também uma árvore de dedução do sistema $\mathcal{N}_p$. A conclusão é $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$ e tem uma hipótese aberta que corresponde à fórmula ψ_1. Constitui uma dedução de $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$ a partir de $\{\psi_1\}$. Como é óbvio, a hipótese ψ_1 é irrelevante para a derivação de $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$, no sentido em que é possível fazer uma derivação na qual esta hipótese é eliminada. Mas, como se sabe, ao estabelecer um dado resultado não é incorrecto considerar mais hipóteses do que as estritamente necessárias para esse fim. Apesar deste tipo de derivações ser permitido, em geral não são extensivamente utilizadas. ∎

O próximo exemplo ilustra mais duas regras relacionadas com a conjunção bem assim como mais alguns aspectos relativos a marcas de hipóteses.

Exemplo 1.4.5 A árvore d_1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{\psi_1}^{1} \quad \psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^{2}}{\psi_2 \wedge \psi_3}\to E}{\psi_2}\wedge E_d}{\psi_1 \to \psi_2}\to I, 1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{\psi_1}^{1} \quad \psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^{2}}{\psi_2 \wedge \psi_3}\to E}{\psi_3}\wedge E_e}{\psi_1 \to \psi_3}\to I, 1}{(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)}\wedge I$$

é uma dedução de $(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)$ a partir de $\{\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)\}$ em $\mathcal{N}_p$.

Na construção da árvore foram usadas, para além das regras já conhecidas, mais uma regra relacionada com a conjunção: a regra $\wedge I$, "introdução da conjunção". Esta regra permitiu construir uma derivação de $(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)$ a partir de derivações de $\psi_1 \to \psi_2$ e $\psi_1 \to \psi_3$.

Pretende-se também ilustrar com este exemplo, o caso em que existem hipóteses iguais em folhas distintas. Com efeito, a árvore tem duas hipóteses abertas, correspondendo ambas à fórmula $\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)$. Tem também duas hipóteses fechadas, correspondendo ambas à fórmula ψ_1. Esta situação é por vezes descrita dizendo que $\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)$ (ou ψ_1) foi usada como hipótese duas vezes, ou que a hipótese foi usada duas vezes. Por vezes, quando existem várias folhas com a mesma fórmula φ, fala-se simplesmente *na hipótese* φ.

Um outro pormenor relacionado com a existência de hipóteses iguais é o facto de, como já havia sido referido, hipóteses iguais poderem ter marcas diferentes. À primeira vista poderá parecer que esta situação não é de grande utilidade, mas como se verá adiante, existem situações em que tal se revela importante. Assim, a árvore d_2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1{}^{1} \quad \psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^{2}}{\psi_2 \wedge \psi_3}\,{\to}E}{\psi_2}\,{\wedge}E_d}{\psi_1 \to \psi_2}\,{\to}I,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1{}^{3} \quad \psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^{4}}{\psi_2 \wedge \psi_3}\,{\to}E}{\psi_3}\,{\wedge}E_e}{\psi_1 \to \psi_3}\,{\to}I,3}{(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)}\,{\wedge}I$$

na qual uma das hipóteses ψ_1 tem agora marca 3 e uma das hipóteses $\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)$ tem agora a marca 4, é também uma árvore de dedução de $\mathcal{N}_p$ e tem a mesma conclusão, as mesmas hipóteses fechadas e as mesmas hipóteses abertas que d_1. A árvore d_2 constitui também uma dedução de $(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)$ a partir do conjunto de hipóteses $\{\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)\}$. ■

Regra $\wedge I$ (introdução da conjunção)

A regra $\wedge I$ permite obter uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ a partir de uma derivação de φ_1 e de uma derivação de φ_2. Informalmente representa o raciocínio seguinte: se as asserções α e β se verificam então verifica-se a sua conjunção.

A regra é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,\wedge I$$

onde os elementos acima do traço horizontal representam, à semelhança das regras já apresentadas, as derivações de φ_1 e de φ_2. Tal como no caso da regra $\to I$, há que exigir que estas duas derivações não tenham conflito de marcas entre si para que a nova derivação não tenha conflito de marcas.

A regra tem aridade 2. ∇

O próximo exemplo ilustra uma das regras relativas à disjunção.

Exemplo 1.4.6 A árvore

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\psi_1\,^1$}
\AxiomC{$\psi_1 \to \psi_2\,^2$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{ψ_2}
\RightLabel{$\vee I_d$}
\UnaryInfC{$\psi_2 \vee \psi_3$}
\RightLabel{$\to I, 1$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)$}
\end{prooftree}$$

é uma árvore de dedução do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$. Constitui uma derivação de $\psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)$ a partir de $\{\psi_1 \to \psi_2\}$.

Este exemplo ilustra a utilização da regra $\vee I_d$, "introdução da disjunção à direita". Esta regra permitiu obter uma derivação de $\psi_2 \vee \psi_3$ a partir de uma derivação de ψ_2. Como seria de esperar existe uma regra semelhante que permite a introdução à esquerda. ∎

<u>Regra $\vee I_d$</u> (introdução da disjunção à direita)

A regra $\vee I_d$ permite obter uma derivação de $\varphi_1 \vee \varphi_2$ a partir de uma derivação de φ_1. Informalmente representa o raciocínio seguinte: se a asserção α se verifica então também se verifica a disjunção de α com outra qualquer asserção.

Esta regra é usualmente representado do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee I_d$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. A fórmula φ_2 pode ser qualquer, não necessitando de ter qualquer relação directa com as fórmulas que ocorrem na derivação de φ_1. Quando se pretende fazer referência directa a esta nova fórmula diz-se, por vezes, que a nova derivação é obtida por aplicação da regra $\vee I_d$ com fórmula φ_2. Esta regra tem aridade 1. ∇

<u>Regra $\vee I_e$</u> (introdução da disjunção à esquerda)

A regra $\vee I_e$ é usualmente representada do seguinte modo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee I_e$$

sendo em tudo análoga à regra $\vee I_d$. ∇

Os exemplos que se apresentam de seguida ilustram a única regra do sistema $\mathcal{N}_p$ relativa a $\perp$.

Exemplo 1.4.7 A árvore d_1

$$\dfrac{\dfrac{\psi \to \perp^{1} \qquad (\psi \to \perp) \to \perp^{2}}{\perp}\to E}{\psi}\perp, 1$$

constitui uma derivação de ψ a partir de $\{(\psi \to \perp) \to \perp\}$ (note-se que a hipótese $\psi \to \perp$ se encontra fechada), ou, utilizando a abreviatura relativa à negação, uma derivação de ψ a partir de $\{\neg(\neg\psi)\}$. Ilustra a utilização da regra $\perp$, ou regra do absurdo, uma outra regra que também permite a eliminação de hipóteses. A árvore d_2

$$\dfrac{\dfrac{\neg\psi^{1} \qquad \neg(\neg\psi)^{2}}{\perp}\to E}{\psi}\perp, 1$$

corresponde à mesma derivação mas usa agora a abreviatura relativa à negação.

A ideia subjacente à regra $\perp$ está associada a um raciocínio *por absurdo*. Uma forma de estabelecer uma asserção β é raciocinar por absurdo, ou seja, assumir, *por absurdo*, que esta asserção não se verifica, isto é, admitir $\neg\beta$ e, a partir desta assumpção, tentar encontrar uma contradição, uma situação absurda. Encontrada essa situação pode então dizer-se que não é possível a não verificação de β e, portanto, como se pretendia, a asserção β fica estabelecida. Naturalmente, este raciocínio é também aplicado para estabelecer que a partir de uma dada asserção α se pode concluir uma certa asserção β. Neste caso, assume-se a hipótese α e admite-se, *por absurdo*, que β não se verifica, (isto é, $\neg\beta$). Encontrada a situação absurda pode então dizer-se que, assumindo α, não é possível a não verificação de β e, portanto, como se pretendia, a partir da asserção α conclui-se necessariamente β. Em ambos os casos a asserção $\neg\beta$ pode ser vista como uma hipótese auxiliar que é utilizada para chegar à situação absurda.

Voltando à derivação em causa neste exemplo, tem-se que a árvore d_3

$$\dfrac{\neg\psi^{1} \qquad \neg(\neg\psi)^{2}}{\perp}\to E$$

corresponde precisamente à derivação de $\perp$ (símbolo de absurdo) a partir de $\neg(\neg\psi))$ e de $\neg\psi$. É possível então concluir ψ construindo a árvore d_2, por aplicação da regra $\perp$ e eliminando a hipótese $\neg\psi$.

A aplicação da regra $\perp$ corresponde aqui à conclusão de que a partir de $\neg(\neg\psi))$ se pode concluir ψ pelo facto de a partir de $\neg(\neg\psi))$ e de $\neg\psi$ se poder derivar o absurdo. A aplicação da regra conduz também à *eliminação* da hipótese $\neg\psi$, isto é, à eliminação da hipótese auxiliar correspondente à negação da conclusão ψ obtida. Tal eliminação é efectuada como já foi indicado no caso da regra $\rightarrow I$, ou seja, utilizando marca da hipótese.

Tal como no caso da regra $\rightarrow I$, a aplicação da regra $\perp$ pode conduzir à eliminação de várias hipóteses (correspondentes à mesma fórmula, naturalmente). Pode também dar-se o caso de nenhuma hipótese ser eliminada (quando se utiliza uma marca nova). Um exemplo desta situação é

$$\cfrac{\cfrac{\perp^{\,1}}{\psi}\ \perp, 2}{\perp \rightarrow \psi}\ \rightarrow I, 1$$

que constitui uma derivação de $\perp \rightarrow \psi$ a partir de um conjunto vazio de hipóteses. A regra $\perp$ vai ser seguidamente descrita no caso geral. ∎

<u>Regra $\perp$</u> (absurdo)

A regra $\perp$ permite obter uma derivação para φ dada uma derivação de $\perp$ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) $\neg\varphi$ (ou $\varphi \rightarrow \perp$, se não se usar a abreviatura). è usualmente representada do seguinte modo

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^{\,m}\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}\ \perp, m$$

onde acima do traço horizontal se encontra representada a derivação cuja conclusão é $\perp$ e tem (eventualmente) hipóteses abertas correspondentes à fórmula $\neg\varphi$ e à marca m. Esta marca m envolvida na aplicação da regra deverá verificar uma de duas situações:

(i) é a marca de uma ou mais hipóteses abertas correspondentes à fórmula $\neg\varphi$ ou

(ii) é uma marca que não ocorre na derivação de $\perp$ (ou seja, é uma marca *nova*).

Por vezes, diz-se também que a nova derivação é obtida por aplicação da regra $\to I$ com fórmula φ e marca m. Esta regra tem aridade 1.

Note-se que a derivação para φ obtida por aplicação da regra $\perp$ tem como hipóteses abertas todas as hipóteses abertas de $\mathcal{D}$ excepto (eventualmente) $\neg\varphi$. ∇

O próximo exemplo ilustra mais alguns detalhes relacionados com raciocínios por absurdo.

Exemplo 1.4.8 Suponha-se que se pretende mostrar que $\{\psi_1 \to \psi_2, \neg\psi_2\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \neg\psi_1$. Uma forma de o fazer consiste em construir uma derivação que corresponda a uma prova por absurdo, considerando como hipótese auxiliar $\neg(\neg\psi_1)$ (ou seja, a negação da conclusão pretendida). Um exemplo de uma tal derivação é a árvore d_1 seguinte.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\psi_2^{\;4} \qquad \dfrac{\psi_1 \to \psi_2^{\;3} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg\psi_1)^{\;1} \qquad \neg\psi_1^{\;2}}{\perp}\;{\to}E}{\psi_1}\;\perp,2}{\psi_2}\;{\to}E}{\perp}\;{\to}E}{\neg\psi_1}\;\perp,1$$

(note-se que em d_1 a regra $\to E$ pode, de facto, ser aplicada às hipóteses $\neg(\neg\psi_1)$ e $\neg\psi_1$ porque $\neg(\neg\psi_1)$ é, em particular, uma abreviatura de $(\neg\psi_1) \to \perp$).

Mas quando se pretende informalmente concluir $\neg\psi_1$ a partir de $\psi_1 \to \psi_2$ e $\neg\psi_2$ fazendo um raciocínio por absurdo, a hipótese auxiliar que geralmente se considera é ψ_1 (e não $\neg(\neg\psi_1)$). No âmbito do sistema $\mathcal{N}_p$ não é possível construir uma derivação correspondente usando a regra $\perp$ (pois para concluir $\neg\psi_1$ com a regra $\perp$, a hipótese auxiliar a eliminar tem de ser $\neg(\neg\psi_1)$). No entanto, é possível construir uma derivação em $\mathcal{N}_p$ de $\neg\psi_1$ a partir de $\psi_1 \to \psi_2$ e $\neg\psi_2$ usando a hipótese auxiliar ψ_1, como a seguinte árvore d_2 ilustra.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\psi_2^{\;3} \qquad \dfrac{\psi_1 \to \psi_2^{\;1} \qquad \psi_1^{\;2}}{\psi_2}\,\to E}{\perp}\,\to E}{\neg\psi_1}\,\to I, 1$$

Com efeito, em d_2, obtém-se a conclusão $\neg\psi_1$ e elimina-se a hipótese auxiliar ψ_1, não por aplicação da regra $\perp$, mas por aplicação da regra $\to I$, pois $\neg\psi_1$ é na verdade uma abreviatura de $\psi_1 \to \perp$. ■

Segue-se um último exemplo de utilização da regra $\perp$.

Exemplo 1.4.9 A árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\psi \vee (\neg\psi))^{\;1} \qquad \dfrac{\psi^{\;2}}{\psi \vee (\neg\psi)}\,\vee I_d}{\perp}\,\to E}{\neg\psi}\,\to I, 2}{\psi \vee (\neg\psi)}\,\vee I_e \qquad \neg(\psi \vee (\neg\psi))^{\;1}}{\perp}\,\to E}{\psi \vee (\neg\psi)}\,\perp, 1$$

é uma derivação do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ e constitui uma derivação de $\psi \vee (\neg\psi)$ a partir do conjunto vazio de hipóteses, o que significa que $\psi \vee (\neg\psi)$ (que representa a lei do terceiro excluído) é teorema do sistema.

A aplicação da regra $\perp$ corresponde aqui à conclusão de que se pode concluir $\psi \vee (\neg\psi)$ pelo facto de se poder derivar o absurdo a partir de $\neg(\psi \vee (\neg\psi))$. ∎

Seguem-se os dois últimos exemplos que ilustrarão a última regra do sistema dedutivo: a regra da eliminação da disjunção.

Exemplo 1.4.10 A árvore

$$\dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)^{\,1} \qquad \dfrac{\psi_1 \wedge \psi_2^{\,2}}{\psi_1}\,\wedge E_d \qquad \dfrac{\psi_1 \wedge \psi_3^{\,3}}{\psi_1}\,\wedge E_d}{\psi_1}\,\vee E, 2, 3$$

é uma árvore de dedução do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$. Constitui uma derivação de ψ_1 a partir de $(\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)$. Ilustra a utilização da regra $\vee E$, "eliminação da disjunção". Esta regra possibilita também a eliminação de hipóteses como se percebe a partir da indicação de marcas.

A ideia subjacente a esta regra está associado a um raciocínio *por casos*. Com efeito, para estabelecer uma asserção β tomando como hipótese uma asserção do tipo "α_1 ou α_2"pode ser feito um raciocínio por casos, isto é, (i) estabelecer β a partir de α_1 e (ii) estabelecer β a partir de α_2. As hipóteses α_1 e α_2 são hipóteses auxiliares que se utilizam ao examinar os dois casos possíveis.

Voltando exemplo apresentado tem-se, precisamente, que

$$\dfrac{\psi_1 \wedge \psi_2^{\,2}}{\psi_1}\,\wedge E_d$$

corresponde à situação referida em (i) e a árvore

$$\dfrac{\psi_1 \wedge \psi_3^{\,3}}{\psi_1}\,\wedge E_d$$

corresponde à situação descrita em (ii). Partindo das derivações correspondentes aos dois casos, conclui-se então ψ_1 construindo a árvore inicialmente apresentada, por aplicação da regra $\vee$ e eliminando as hipóteses com marcas 2 e 3.

A aplicação da regra $\vee$ corresponde assim à conclusão de que se ψ_1 se pode derivar de $\psi_1 \wedge \psi_2$ e se ψ_1 se pode derivar de $\psi_1 \wedge \psi_3$ então da disjunção das duas fórmulas pode estabelecer-se ψ_1. A aplicação da regra conduz também à *eliminação* das hipóteses $\psi_1 \wedge \psi_2$ e $\psi_1 \wedge \psi_3$ isto é, à eliminação das hipóteses auxiliares correspondentes a cada um dos casos que se tem de analisar. Tal eliminação é efectuada, como já foi indicado nos casos anteriores, utilizando as marcas das hipóteses. Existem alguns pormenores relacionados com estas marcas que é necessário ter em atenção e que serão discutidos no exemplo seguinte. ∎

Exemplo 1.4.11 A árvore

$$\dfrac{{\psi_1 \vee \psi_2}^1 \qquad \dfrac{{\psi_1}^2 \quad {\psi_1 \to \psi_3}^3}{\psi_3}\to E \qquad \dfrac{{\psi_2}^4 \quad {\psi_2 \to \psi_3}^5}{\psi_3}\to E}{\psi_3}\vee E, 2, 4$$

constitui uma derivação de ψ_3 a partir de $\{\psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \to \psi_3, \psi_2 \to \psi_3\}$.

Pode ver-se esta derivação como uma derivação de ψ_3 a partir da disjunção $\psi_1 \vee \psi_2$ usando as hipóteses adicionais $\psi_1 \to \psi_3$ e $\psi_2 \to \psi_3$. A primeira destas hipóteses é utilizada na análise do caso correspondente à derivação de ψ_3 a partir da hipótese auxiliar ψ_1 e a segunda na análise do caso correspondente à derivação de ψ_3 a partir da hipótese auxiliar ψ_2.

Como é natural, quando se aplica a regra $\vee E$, só se devem eliminar as hipóteses auxiliares correspondentes a cada um dos casos que se tem de analisar, isto é, as hipóteses correspondentes às duas fórmulas que constituem a disjunção. As hipóteses adicionais eventualmente utilizadas nas derivações correspondentes à análise dos dois casos, não devem ser eliminadas. Assim, no exemplo apresentado, as hipóteses $\psi_1 \to \psi_3$ e $\psi_2 \to \psi_3$ não são eliminadas.

Neste ponto, existe um detalhe que merece atenção. Note-se que se, por exemplo, se tivesse utilizado ψ_1 como hipótese adicional na (sub)derivação da direita, esta hipótese não poderia ser eliminada por aplicação da regra $\vee E$ (pois nessa (sub)derivação o que está a analisar é caso em que assume ψ_2). Nessa situação, à tal hipótese ψ_1 teria de estar associada uma marca distinta de 2, para que com a aplicação da regra $\vee E$ apenas fosse fechada a hipótese ψ_1 associada à outra (sub)derivação. Como é óbvio, o mesmo se passaria no caso de ψ_2 ser utilizada nesta outra sub(derivação) ou no caso de ψ_1 ou ψ_2 (ou ambas) serem utilizadas na derivação que conduz a $\psi_1 \vee \psi_2$ (neste caso esta fórmula é directamente uma folha da árvore, mas poderia não o ser). Esta é uma situação que ilustra o caso em que é útil ter a possibilidade de ter marcas diferentes associadas a hipóteses que correspondem à mesma fórmula.

Considere-se como exemplo a árvore seguinte.

$$\dfrac{{\psi_1 \vee \psi_2}^1 \qquad \dfrac{{\psi_1}^2 \quad {\psi_2}^3}{\psi_1 \wedge \psi_2}\wedge I \qquad \dfrac{{\psi_1}^2 \quad {\psi_2}^3}{\psi_1 \wedge \psi_2}\wedge I}{\psi_1 \wedge \psi_2}\vee E, 2, 3$$

Esta árvore *não constitui uma derivação* em $\mathcal{N}_p$. Com efeito, na (sub)derivação da direita, isto é, na (sub)derivação destinada a analisar o caso em que ψ_2 se verifica, utiliza-se a hipótese ψ_1 com marca 2 (a mesma marca que é utilizada para ψ_1 na (sub)derivação ao centro, destinada a analisar o caso em que é ψ_1 que se verifica). Deste modo, ao eliminar a hipótese (auxiliar) ψ_1 na (sub)derivação ao centro com a regra $\vee E$, está-se também a eliminar, indevidamente, a hipótese ψ_1 na (sub)derivação da direita. Comentário análogos se podem fazer relativamente a ψ_2. Note-se que se esta árvore constituísse uma dedução no sistema $\mathcal{N}_p$, ter-se-ia que era possível derivar $\psi_1 \wedge \psi_2$ a partir de $\psi_1 \vee \psi_2$ o que, como facilmente se conclui, é algo que não pode ser permitido sob pena de se perder a propriedade de correcção do sistema dedutivo.

Tal como nos casos das outras regras que envolvem eliminação de hipóteses, também a aplicação da regra $\vee E$ pode conduzir à eliminação de várias hipóteses ou nenhuma (se forem utilizadas marcas novas). ∎

Regra $\vee E$ (eliminação da disjunção)

A regra $\vee E$ permite obter uma derivação para ψ a partir de (a) uma derivação de $\varphi_1 \vee \varphi_2$, (b) uma derivação de ψ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) φ_1 e (c) uma derivação de ψ a partir de um conjunto de hipóteses contendo (eventualmente) φ_2. Esta situação é usualmente representada do seguinte modo

$$\cfrac{\begin{array}{ccc} & [\varphi_1]^{m'} & [\varphi_2]^{m''} \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi \end{array}}{\psi}\ \vee E, m', m''$$

onde os diferentes elementos têm o significado já esperado. Associada à aplicação desta regra estão as marcas m' e m'' as quais devem ser tais que garantam que na dedução que resulta da aplicação desta regra só se tornarão fechadas hipóteses de $\mathcal{D}_2$ correspondentes à fórmula φ_1 e hipóteses de $\mathcal{D}_3$ correspondentes à fórmula φ_2. Assim, as hipóteses abertas da nova dedução são todas as hipóteses abertas da derivação de $\mathcal{D}_1$, todas as hipóteses abertas da derivação de $\mathcal{D}_2$ excepto, eventualmente, φ_1 e todas as hipóteses abertas da derivação de $\mathcal{D}_3$ excepto, eventualmente, φ_2.

Tal como no caso da regra $\rightarrow I$, para que a nova derivação não tenha conflito de marcas, há que exigir que as três derivações às quais se aplica a regra não tenham conflito de marcas entre si.

Por vezes, quando se pretende fazer referência directa à conclusão da nova derivação e/ou às marcas envolvidas, diz-se também que a nova derivação é obtida por aplicação da regra $\vee E$ com fórmula ψ e marcas m' e m''. Esta regra tem aridade 3. ∇

Fazendo um resumo do que foi sendo exposto ao longo da secção, apresentam-se agora conjuntamente todas as regras de inferência do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$. Na regra $\perp$ utilizou-se a abreviatura relativa à negação.

$$\cfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ \wedge I \qquad \cfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1}\ \wedge E_d \qquad \cfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}}{\varphi_2}\ \wedge E_e$$

$$\cfrac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^m \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\ \rightarrow I, m \qquad \cfrac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 & \varphi_1 \end{array}}{\varphi_2}\ \rightarrow E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]^m\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\ \perp, m \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi_1\end{matrix}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee I_d \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ \vee I_e$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\\ \mathcal{D}_1\\ \varphi_1 \vee \varphi_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi_1]^{m'}\\ \mathcal{D}_2\\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi_2]^{m''}\\ \mathcal{D}_3\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ \vee E, m', m''$$

Regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$

As regras de introdução, ou seja, as regras $\wedge I$, $\rightarrow I$, $\vee I_d$ ou $\vee I_e$, são por vezes designadas I-regras. As regras de eliminação, ou seja, as regras $\vee E$, $\rightarrow E$, $\wedge E_d$ ou $\wedge E_e$ são, por sua vez, designadas E-regras.

Recordam-se agora brevemente os noções mais relevantes.

Considerando, por exemplo, a regra $\wedge E_d$, os elementos acima do traço horizontal representam uma árvore de dedução cuja raiz tem como fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. É a árvore à qual vai ser aplicada a regra. O traço horizontal corresponde à aplicação da regra, isto é, à construção de uma nova árvore de dedução, por extensão da anterior, acrescentando como novo nó raiz um nó a que está associada a fórmula φ_1. Esta regra tem aridade 1. O caso da regra $\wedge E_d$ é análogo tal como os casos das regras $\vee I_d$ e $\vee I_e$.

A regra $\wedge I$ é semelhante só que agora a nova dedução é obtida a partir de duas outras deduções tendo assim esta regra aridade 2. Recorde-se que para que a nova árvore não tenha *conflito de marcas* (i.e., dadas quaisquer duas folhas distintas, se as fórmulas correspondentes são distintas então as marcas correspondentes também o são) é necessário exigir que estas duas deduções não tenham conflito de marcas entre si, isto é, dada uma qualquer folha de uma delas e uma qualquer folha da outra, se as fórmulas correspondentes são distintas então as marcas correspondentes também o são.

Na regra $\to I$, os elementos acima do traço horizontal representam uma árvore de dedução tal que:

- à raiz está associada a fórmula φ_2
- poderão ou não existir hipóteses abertas correspondentes à fórmula φ_1 e cuja marca é m (este facto é representado pela notação $[\varphi_1]^m$).

A nova árvore construída por aplicação da regra é obtida por extensão da anterior acrescentando como novo nó raiz um nó a que está associada a fórmula $\varphi_1 \to \varphi_2$, informação sobre a regra aplicada ($\to I$) e, através da marca m, informação sobre as hipóteses (eventualmente) eliminadas (tal como no caso da designação da regra aplicada, a marca é representada do lado direito do traço horizontal). A marca m tem de verificar necessariamente uma das seguintes condições:

(i) m é a marca associada a hipóteses *abertas* de $\mathcal{D}$ correspondentes à fórmula φ_1 ou

(ii) m não ocorre na árvore $\mathcal{D}$, isto é, é uma marca *nova*.

A notação $[\varphi_1]^m$ relembra ainda que na nova árvore *todas* as hipóteses correspondentes à fórmula φ_1 e que têm associada a marca m são hipóteses fechadas (ou eliminadas). Esta regra tem aridade 1.

O caso da regra $\perp$ é em tudo semelhante.

No caso das outras regras a interpretação é semelhante. No caso particular da *regra* $\to E$, há que garantir que as duas deduções a que é aplicada a regra não têm conflito de marcas entre si.

No caso particular da regra $\vee E$, há também que garantir o requisito relativo ao conflito de marcas. Para além disso as marcas m' e m'' devem garantir que na árvore que vai construída só se tornarão fechadas hipóteses de $\mathcal{D}_2$ correspondentes à fórmula φ_1 e hipóteses de $\mathcal{D}_3$ correspondentes à fórmula φ_2. Esta regra tem aridade 3.

Pode agora estabelecer-se a seguinte definição.

Definição 1.4.12 SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{N}_p$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}_p$ é constituído pelas regras de inferência $\wedge I$, $\to I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\vee E$, $\to E$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$ e $\perp$.

As *árvores de dedução* (ou *árvores de derivação*) de $\mathcal{N}_p$ são construídas partindo de árvores singulares e usando sucessivamente regras de inferência apropriadas.

A fórmula associada à raiz de uma árvore de dedução d é a *conclusão* da dedução. Sendo φ a conclusão de d, diz-se que d é uma dedução para φ em $\mathcal{N}_p$ (ou no sistema $\mathcal{N}_p$). As fórmulas associadas à folhas de uma dedução d são as *hipóteses*, ou *assumpções*, de d. Se em d a marca correspondente a uma dada folha não está associada à aplicação de uma regra $\rightarrow I$, $\perp$ ou $\vee E$, a fórmula associada a essa folha é uma *hipótese aberta*. Caso contrário, a referida fórmula é uma *hipótese fechada*.

Sendo $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$ a notação

$$\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$$

usa-se para afirmar que existe uma *dedução de φ a partir de Φ em $\mathcal{N}_p$*, isto é, que existe uma dedução de $\mathcal{N}_p$ cuja conclusão é φ e cujo conjunto das hipóteses abertas está contido em Φ. Nesta situação diz-se que φ é *consequência de Φ em $\mathcal{N}_p$*. Por sua vez,

$$\vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$$

usa-se para afirmar que existe *prova de φ em $\mathcal{N}_p$*, isto é, uma dedução de φ a partir de $\emptyset$ em $\mathcal{N}_p$ (uma dedução cuja conclusão é φ e que não tem hipóteses abertas). Nesta situação diz-se que φ é *teorema de $\mathcal{N}_p$*. ■

As árvores de dedução ou derivação são frequentemente designadas simplesmente por deduções ou derivações.

Como foi anteriormente referido, na literatura é comum encontrar os sistemas de dedução natural descritos do modo mais ou menos informal que foi seguido nesta secção. Esta descrição permite ao leitor compreender os aspectos essenciais do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$ e construir com facilidade derivações no sistema. Como neste texto se pretendeu também apresentar este assunto de um modo mais preciso, estabelecendo definições mais rigorosas das várias noções envolvidas, o leitor interessado pode encontrar na subsecção 1.4.4 a exposição referida.

Termina-se esta secção com algumas observações sobre determinadas características de certas deduções do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$. Da definição de $\mathcal{N}_p$ decorre que é possível que numa dedução exista uma fórmula que seja introduzida a certa altura e imediatamente eliminada, como no seguinte fragmento de dedução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi_1}}{\psi_2 \to \psi_1}\to I, 2 \qquad \psi_2{}^3}{\dfrac{\psi_1}{\vdots}}\to E$$

Esta parte da dedução não é muito interessante, pois nada foi "ganho"com a utilização destas duas regras. A fórmula $\psi_2 \to \psi_1$ parece não ter tido utilidade. Se um fórmula é introduzida e imediatamente eliminada então poderá fazer sentido pensar que não deveria sequer ter sido introduzida. As deduções em que não há fórmulas nestas condições são designadas deduções normais. Estas deduções normais têm uma característica interessante: uma dedução normal evolui das hipóteses para a conclusão de uma forma mais ou menos directa sem "desvios"desnecessários. De um modo geral, as hipóteses são primeiro decompostas nas suas subfórmulas por sucessivas aplicações de regras de eliminação e estas subfórmulas são depois combinadas para formar a conclusão por sucessivas aplicações de regras de introdução. Respeitando algumas condições, prova-se que uma dedução pode ser transformada numa dedução normal. Optou-se por não abordar este assunto nesta secção, mas o leitor interessado pode consultar o Apêndice **??** onde esta questão é apresentada com detalhe.

Mostra-se ainda no Apêndice **??** que as deduções normais satisfazem uma propriedade que é usualmente considerada como uma "boa"propriedade dos sistemas dedutivos: numa dedução normal de $\varphi \in F_P$ a partir de $\Phi \subseteq F_P$, todas as fórmulas que aparecem ao longo da dedução (excepto hipóteses eliminadas pela regra $\perp$ e a premissa $\perp$ desta regra) são subfórmulas de φ ou de Φ. Esta propriedade revela que, na procura de uma dedução normal de φ a partir de Φ, não é necessário recorrer a fórmulas "estranhas"a φ ou Φ. Este tipo de propriedade pertence a uma classe de propriedades de sistemas dedutivos usualmente designadas por propriedades estruturais.

1.4.3 Exemplos de deduções em $\mathcal{N}_p$

Apresentam-se de seguida alguns exemplos adicionais de derivações no sistema $\mathcal{N}_p$.

1.4.3.1 Prova inversa

Uma forma de construir derivações em sistemas de dedução natural consiste em partir da conclusão para as hipóteses, ou seja, fazer uma construção em "sentido inverso", que se designa por prova inversa[2]. Esta forma de construir derivações é relevante, em particular, para a construção de derivações no ambiente *Isabelle*, como adiante se verá.

Começa-se por ilustrar a prova inversa por intermédio de um exemplo simples. Supondo que em $\mathcal{N}_p$ se pretende derivar $(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3$ a partir das hipóteses ψ_1, ψ_2 e ψ_3, há que construir uma árvore derivação com conclusão $(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3$ e cujas hipóteses (abertas) são ψ_1, ψ_2 e ψ_3. Esta árvore é obtida usando a prova inversa da forma que se descreve de seguida.

- Na prova inversa a árvore é construída começando pela raiz à qual está associada a fórmula $(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3$ (conclusão), ou seja, começa-se pela árvore singular:

$$(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3$$

- O passo seguinte corresponde a escolher uma regra de inferência que tenha $(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3$ por conclusão. Existirão normalmente várias escolhas possíveis. Tendo em conta a estrutura desta fórmula (e as hipóteses) é razoável escolher a regra de introdução da conjunção. Aplicando esta regra (no sentido inverso) obtém-se a árvore seguinte

$$\dfrac{\psi_1 \wedge \psi_2 \qquad\qquad \psi_3{}^{3}}{(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3}\ \wedge I$$

  onde se associou a marca 3 à fórmula ψ_3 por esta ser uma das hipóteses.

- Falta derivar $\psi_1 \wedge \psi_2$. Procedendo do mesmo modo e escolhendo mais uma vez a regra da introdução da conjunção obtém-se a derivação pretendida:

[2] Do inglês *backward proof*.

$$\dfrac{\dfrac{\psi_1{}^1 \qquad \psi_2{}^2}{\psi_1 \wedge \psi_2}\wedge I \qquad \psi_3{}^3}{(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3}\wedge I$$

A construção de derivações em $\mathcal{N}_p$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este ambiente de desenvolvimento de provas é apresentado no capítulo **??**, que o leitor interessado poderá consultar desde já.

1.4.4 O sistema $\mathcal{N}_p$ revisitado ($\star$)

Neste texto, pretendeu-se também apresentar o sistema $\mathcal{N}_p$ de um modo mais preciso, estabelecendo definições rigorosas para as várias noções envolvidas. É este o objectivo desta subsecção.

Antes de apresentar o sistema dedutivo, e para facilitar a exposição, quer no caso deste sistema quer nos casos dos sistemas que serão apresentados nos próximos capítulos, é necessário introduzir algumas notações e definições auxiliares. É útil ter presente a definição de árvore etiquetada e demais conceitos e notações a ela associados (ver apêndice **??**).

Notação 1.4.13 Sendo F um conjunto de fórmulas e M um conjunto (o conjunto das marcas), E_F^M denota o conjunto $F \times \mathcal{P}(M)$ e designa-se conjunto das etiquetas sobre F e M. ∎

Dado um conjunto de símbolos proposicionais P e um conjunto de marcas M (que usualmente se assume numerável), as árvores de dedução, ou deduções, do sistema $\mathcal{N}_p$ são árvores etiquetadas em $E_{F_P}^M$ (ou $E_{F_P}^M$-árvores).

Definição 1.4.14 Fórmula e conjunto de marcas de um nó
Sendo $a = (arv, etq)$ uma E_F^M-árvore e $n \in N_a$, $etq(n)\downarrow_1$ diz-se *fórmula de* n e denota-se por $frm(n)$ e $etq(n)\downarrow_2$ diz-se *conjunto das marcas de* n e denota-se por $mrc(n)$. Cada $m \in mrc(n)$ é uma *marca de* n e se $mrc(n) = \{m\}$ então m é *a marca de* n.

Sendo $N \subseteq N_a$, consideram-se os conjuntos $Frm(N) = \bigcup_{n \in N}\{frm(n)\}$, $Mrc(N) = \bigcup_{n \in N} mrc(n)$ e ainda $Frm_a = Frm(N_a)$ e $Mrc_a = Mrc(N_a)$. ■

Definição 1.4.15 FOLHAS FECHADAS E FOLHAS ABERTAS
Seja $a = (arv, etq)$ uma E_F^M-árvore e $n \in Flh_a$. A folha n diz-se *fechada* se existe um nó $n' \in Pred(n)\backslash\{n\}$ tal que $mrc(n) \subseteq mrc(n')$ e diz-se *aberta* se não é fechada. Fch_a denota o conjunto de todas as folhas de a que são fechadas e Abt_a denota o conjunto de todas as folhas de a que são abertas.

A fórmula $frm(n)$ diz-se *aberta* (*fechada*) em a se $n \in Abt_a$ ($n \in Fch_a$). ■

Notação 1.4.16 Sendo a uma E_F^M-árvore, $\varphi \in F$ e $m \in M$ usa-se a seguinte notação :

- $Abt_a^{\varphi} = \{n \in Abt_a : frm(n) = \varphi\}$;
- $Abt_a^{\varphi,m} = \{n \in Abt_a : frm(n) = \varphi, m \in mrc(n)\}$. ■

O conjunto Frm_a é o conjunto das fórmulas que estão presentes nas etiquetas dos nós da árvore. O conjunto Mrc_a é o conjunto das marcas que existem nas etiquetas dos nós da árvore; o conjunto Abt_a^{φ} é o conjunto das folhas abertas a que corresponde a fórmula φ; o conjunto $Abt_a^{\varphi,m}$ é o conjunto das folhas abertas a que corresponde a fórmula φ e a marca m.

Como foi referido anteriormente, nas árvores de dedução de $\mathcal{N}_p$, a hipóteses distintas têm de estar associadas marcas distintas. A noção de conflito de marcas é introduzida para se poder assegurar este requisito. A construção de uma árvore de dedução a partir de outras árvores de dedução apenas será possível se não houver conflitos de marcas entre estas e a árvore de dedução resultante será também uma árvore sem conflitos de marcas.

Definição 1.4.17 CONFLITO DE MARCAS

1. Seja a uma $E_F^{R,M}$-árvore. Diz-se que *não há conflito de marcas em a* ou que *a é uma árvore sem conflito de marcas* se se verifica a seguinte condição: se $mrc(n') = mrc(n'')$ então $frm(n') = frm(n'')$, quaisquer que sejam $n', n'' \in Flh_a$.
2. Sejam $k \in I\!N$ e $a_1, \ldots, a_k$ $E_F^{R,M}$-árvores. Diz-se que *não há conflito de marcas entre $a_1, \ldots, a_k$* ou que $a_1, \ldots, a_k$ *são árvores sem conflito de marcas entre*

si se quaisquer que sejam $1 \leq i, j \leq k$ se verifica a seguinte condição: se $mrc(n') = mrc(n'')$ então $frm(n') = frm(n'')$, quaisquer que sejam $n' \in Flh_{a_i}$ e $n'' \in Flh_{a_j}$. ■

A não existência de conflito de marcas numa árvore implica que nas folhas dessa árvore a marcas iguais tenham de corresponder fórmulas iguais (ou, o que é o mesmo, se a duas folhas correspondem fórmulas diferentes então essas folhas têm conjuntos de marcas diferentes).

Estas noções estendem-se a várias árvores. A não existência de conflito de marcas entre várias árvores implica também que nessas árvores se duas folhas (pertencentes ou não à mesma árvore) têm fórmulas diferentes então têm necessariamente conjuntos de marcas diferentes. Note-se que nesta definição, a condição diz respeito a uma só árvore nos casos $i = j$. Consequentemente, decorre da definição que se várias árvores não têm conflitos de marcas entre si então cada uma delas é também uma árvore sem conflitos de marcas.

Segue-se agora a definição do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$. Em primeiro lugar apresentam-se as regras de inferência. Neste ponto, convém ter presente as noções e notações relativas à extensão e união de árvores apresentadas no capítulo **??**. Assumem-se fixados um conjunto P contável de símbolos proposicionais e um conjunto numerável M de marcas.

Definição 1.4.18 SISTEMA $\mathcal{N}_p$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}_p$ é constituído pelas regras de inferência seguintes. Cada regra de inferência corresponde a um conjunto de pares $(A\,,\,a)$ em que A é um conjunto de $E^M_{F_P}$-árvores (sem conflito de marcas entre si) e a é uma $E^M_{F_P}$-árvore, a árvore obtida por aplicação da regra às árvores em A.

- <u>REGRA $\wedge I$</u>: $(\{a_1, a_2\}\ ,\ \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \emptyset))$
  com $frm(\nu_{a_1}) = \varphi_1$ e $frm(\nu_{a_2}) = \varphi_2$;

- <u>REGRA $\wedge E_d$</u>: $(\{a\}\ ,\ a^\frown(\varphi_1, \emptyset))$
  com $frm(\nu_{a_1}) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$;

- <u>REGRA $\wedge E_e$</u>: $(\{a\}\ ,\ a^\frown(\varphi_2, \emptyset))$
  com $frm(\nu_a) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$;

- <u>Regra $\to I$</u>: $(\{a\}\ ,\ a^\frown(\varphi_1 \to \varphi_2, \{m\}))$
  com $frm(\nu_a) = \varphi_2$, $\varphi_1 \in F_P$ e $m \in M$ tais que se $m \in Mrc_a$ então $Abt_a^{\varphi_1,m} \neq \emptyset$;

- <u>Regra $\to E$</u>: $(\{a_1, a_2\}\ ,\ \bigsqcup\{a_1, a_2\}^\frown(\varphi_2, \emptyset))$
  com $frm(\nu_{a_1}) = \varphi_1 \to \varphi_2$ e $frm(\nu_{a_2}) = \varphi_1$;

- <u>Regra $\perp$</u>: $(\{a\}\ ,\ \bigsqcup\{a_1{}^\frown(\varphi, \{m\}))$
  com $frm(\nu_a) = \perp$ e $m \in M$ tal que se $m \in Mrc_a$, então $Abt_a^{\neg\varphi,m} \neq \emptyset$;

- <u>Regra $\vee I_d$</u>: $(\{a\}\ ,\ a^\frown(\varphi_1 \vee \varphi_2, \emptyset))$
  com $frm(\nu_a) = \varphi_1$ e $\varphi_2 \in F_P$; neste caso diz-se que árvore na segunda componente do par é obtida por aplicação da regra $\vee I_d$ com fórmula φ_2;

- <u>Regra $\vee I_e$</u>: $(\{a\}\ ,\ a^\frown(\varphi_1 \vee \varphi_2, \emptyset))$
  com $frm(\nu_a) = \varphi_2$ e $\varphi_1 \in F_P$; neste caso diz-se que árvore na segunda componente do par é obtida por aplicação da regra $\vee I_e$ com fórmula φ_1;

- <u>Regra $\vee E$</u>: $(\{a_1, a_2, a_3\}\ ,\ \bigsqcup\{a_1, a_2, a_3\}^\frown(\psi, \{m', m''\}))$
  com

  - $frm(\nu_{a_1}) = \varphi_1 \vee \varphi_2$, $frm(\nu_{a_2}) = frm(\nu_{a_3}) = \psi$
  - $Mrc(Abt_{a_1}^{\varphi_1} \cup Abt_{a_1}^{\varphi_2}) \cap Mrc(Abt_{a_2}^{\varphi_1} \cup Abt_{a_3}^{\varphi_2}) = \emptyset$
  - $Mrc(Abt_{a_3}^{\varphi_1}) \cap Mrc(Abt_{a_2}^{\varphi_1}) = \emptyset$ e $Mrc(Abt_{a_3}^{\varphi_2}) \cap Mrc(Abt_{a_2}^{\varphi_2}) = \emptyset$
  - $m', m'' \in M$ são tais que se $m' \in \bigcup_{1 \leq i \leq 3} Mrc_{a_i}$ então $Abt_{a_2}^{\varphi_1,m'} \neq \emptyset$ e se $m'' \in \bigcup_{1 \leq i \leq 3} Mrc_{a_i}$ então $Abt_{a_3}^{\varphi_2,m''} \neq \emptyset$;

  neste caso diz-se que árvore na segunda componente do par é obtida por aplicação da regra $\vee E$ com fórmula ψ e marcas m' e m''. ■

As condições sobre marcas que são impostas na definição das regras de inferência $\to I$, $\perp$ e $\vee E$ visam assegurar que as condições que foram descritas na secção 1.4.2 relativas às marcas e às hipóteses que são ou não fechadas/eliminadas por aplicação das regras são de facto verificadas em cada árvore de dedução. Cada regra de inferência corresponde a um conjunto de pares, designados instâncias da regra. Cada aplicação de uma regra corresponde à utilização de uma instância dessa regra.

Segue-se agora a noção de conjunto de árvores de dedução do sistema $\mathcal{N}_p$.

Definição 1.4.19 ÁRVORES DE DEDUÇÃO DE $\mathcal{N}_p$
O conjunto das *árvores de dedução* (ou *árvores de derivação*) de $\mathcal{N}_p$ denota-se por $D_{\mathcal{N}_p}$ e define-se indutivamente como se segue:

- Se d é $E^M_{F_P}$-árvore singular tal que o conjunto de marcas do seu nó é também singular então $d \in D_{\mathcal{N}_p}$.
- Se $d_1 \in D_{\mathcal{N}_p}$ e d é uma $E^M_{F_P}$-árvore obtida a partir de d_1 por aplicação da regra $\rightarrow I$, $\vee I_d$, $\vee I_e$, $\wedge E_d$, $\wedge E_e$ ou $\perp$ então $d \in D_{\mathcal{N}_p}$.
- Se $d_1, d_2 \in D_{\mathcal{N}_p}$ e d é uma $E^M_{F_P}$-árvore obtida a partir de d_1 e d_2 por aplicação da regra $\wedge I$ ou $\rightarrow E$ então $d \in D_{\mathcal{N}_p}$.
- Se $d_1, d_2, d_3 \in D_{\mathcal{N}_p}$ e d é uma $E^M_{F_P}$-árvore obtida a partir de d_1, d_2, d_3 por aplicação da regra $\vee E$ então $d \in D_{\mathcal{N}_p}$. ∎

Definição 1.4.20 CONCLUSÃO E HIPÓTESES DE ÁRVORE DE DEDUÇÃO
Sendo $d \in D_{\mathcal{N}_p}$ e $n \in Flh_d$: $frm(n)$ é uma *hipótese* ou *assumpção* de d, $frm(\nu_d)$ é a *conclusão* de d e designa-se $conc(d)$ e o conjunto das hipóteses abertas de d designa-se H_d e é o conjunto $\{frm(n) : n \in Abt_d\}$. ∎

Definição 1.4.21 CONSEQUÊNCIA EM $\mathcal{N}_p$ E TEOREMA DE $\mathcal{N}_p$
Sendo $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$:

- uma *dedução de φ a partir Φ no sistema* $\mathcal{N}_p$ (ou *em* $\mathcal{N}_p$) é uma dedução $d \in \mathcal{N}_p$ tal que $conc(d) = \{\varphi\}$ e $H_d \subseteq \Phi$; uma *prova de φ no sistema* $\mathcal{N}_p$ (ou *em* $\mathcal{N}_p$) é uma dedução $d \in \mathcal{N}_p$ tal que $conc(d) = \{\varphi\}$ e $H_d = \emptyset$;
- φ é *consequência de Φ em* $\mathcal{N}_p$, o que se denota por $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$, se existe uma dedução de φ a partir Φ em $\mathcal{N}_p$;
- φ é *teorema de* $\mathcal{N}_p$, o que se denota por $\vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$, se existe uma prova de φ em $\mathcal{N}_p$. ∎

Das definições relativas às regras de inferência e ao conjunto de deduções do sistema decorre que qualquer árvore de dedução em $D_{\mathcal{N}_p}$ é uma árvore sem conflito de marcas. Tem-se assim o resultado seguinte. Este resultado é utilizado na secção 1.4.5.

Lema 1.4.22
Se $d \in D_{\mathcal{N}_p}$ então d é uma árvore sem conflito de marcas.

Prova: O resultado é facilmente obtido tendo em conta as Definições 1.4.18 e 1.4.19. ■

Segue-se o resultado que é usualmente conhecido como metateorema da dedução.

Proposição 1.4.23
Sendo $\varphi, \psi \in F_P$ e $\Phi \subseteq F_P$, tem-se que se $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi \to \varphi$.

Prova: Se $\Phi \cup \{\psi\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$ então existe $d \in D_{\mathcal{N}_p}$ tal que $conc(d) = \varphi$ e $H_d \subseteq \Phi \cup \{\psi\}$.

Se $H_d \subseteq \Phi$ então a partir de d por aplicação da regra $\to I$ com fórmula ψ e marca $m \in M \backslash Mrc_d$ obtém-se uma dedução $d' \in D_{\mathcal{N}_p}$ tal que $conc(d') = \psi \to \varphi$ e $H_{d'} \subseteq \Phi$, o que estabelece o resultado pretendido.

Se $\psi \in H_d$ e existe $m \in M$ tal que $mrc(n) = \{m\}$ para cada $n \in Abt_d^\psi$ (ou seja, todas as hipóteses abertas de d correspondentes a ψ têm associada a mesma marca m), então, a partir de d, por aplicação da regra $\to I$ com fórmula ψ e marca m, obtém-se uma dedução $d' \in D_{\mathcal{N}_p}$ tal que $conc(d') = \psi \to \varphi$ e $H_{d'} \subseteq \Phi$, pois todas as hipóteses relativas à fórmula ψ são eliminadas. Fica assim estabelecido também o resultado pretendido.

Se $\psi \in H_d$ e não é verificada a condição do parágrafo anterior, considere-se $m \in M \backslash Mrc_d$ (ou seja, m é uma marca nova, uma marca que não é utilizada em d) e $\overline{d} \in D_{\mathcal{N}_p}$ idêntica a d mas tal que $mrc(n) = \{m\}$ para cada $n \in Abt_{\overline{d}}^\psi$. Tem-se então que: (i) todas as hipóteses abertas de $\overline{d}$ correspondentes a ψ têm agora associada a mesma marca m; (ii) $\overline{d}$ não tem conflito de marcas pois, como m é uma marca nova, não existe a possibilidade de haver uma outra hipótese correspondente a uma fórmula distinta de ψ que tenha também associada a marca m; (iii) $conc(\overline{d}) = \varphi$ e (iv) $H_{\overline{d}} = H_d$ pois, de novo porque m é marca nova e porque só vai substituir as marcas das folhas abertas de d correspondentes a ψ, todas as hipóteses fechadas de d continuam fechadas em $\overline{d}$ (e as hipóteses abertas de d continuam abertas em $\overline{d}$). Deste modo, $\overline{d}$ é de facto uma árvore de $D_{\mathcal{N}_p}$ e encontra-se nas condições do parágrafo anterior pelo que, usando um raciocínio semelhante, pode estabelecer-se o resultado pretendido. ■

1.4.5 Correcção e completude do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$

Para que um sistema dedutivo para lógica proposicional possa ser útil para estabelecer consequência semântica ou validade, o sistema tem de ter propriedades que relacionem de modo adequado certas derivações com certas noções semânticas.

Como já foi atrás referido, uma propriedade importante é a usualmente designada por correcção, sendo um sistema dedutivo com esta propriedade designado sistema correcto. Em geral, um sistema dedutivo diz-se correcto se sempre que uma fórmula φ é consequência no sistema de um conjunto de fórmulas Φ então φ é consequência semântica de Φ. Uma outra propriedade desejável num sistema dedutivo é a propriedade usualmente designada por completude. Em geral, um sistema diz-se completo se sempre que uma fórmula φ é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Φ então φ é consequência de Φ nesse sistema.

O sistema $\mathcal{N}_p$ é correcto: se φ é consequência de Φ em $\mathcal{N}_p$ então φ é consequência semântica de Φ. O sistema $\mathcal{N}_p$ é também completo: se φ é consequência semântica de Φ então φ é consequência de Φ em $\mathcal{N}_p$. Assim, as noções de consequência em $\mathcal{N}_p$ e de consequência semântica coincidem. O conjunto dos teoremas de $\mathcal{N}_p$ é precisamente o conjunto de todas as tautologias.

A prova da correcção de $\mathcal{N}_p$ é apresentada na subsecção 1.4.5.1. A prova da completude é apresentada na secção 1.4.5.2. Para simplificar a exposição, não se apresenta neste texto a prova da completude do sistema $\mathcal{N}_p$ mas apenas a prova de completude da restrição do sistema $\mathcal{N}_p$ ao caso em que não estão presentes os conectivos $\wedge$ e $\vee$. A extensão desta prova a $\mathcal{N}_p$ não apresenta dificuldades de maior e deixa-se como exercício ao leitor.

1.4.5.1 Correcção de $\mathcal{N}_p$

Nesta subsecção prova-se a correcção do sistema $\mathcal{N}_p$. A prova da correcção do sistema $\mathcal{N}_p$ (Proposição 1.4.27) tem por base o facto de todas as regras de inferência do sistema $\mathcal{N}_p$ serem correctas (Proposição 1.4.25).

Uma regra de $\mathcal{N}_p$ diz-se correcta se a conclusão de uma dedução é consequência semântica do conjunto das suas hipóteses abertas, sempre que esta dedução seja uma dedução obtida por aplicação da regra a um conjunto de deduções que também tenham esta propriedade. A partir deste resultado prova-se então que em qualquer dedução de $\mathcal{N}_p$ a conclusão é consequência semântica do conjunto das suas hipóteses abertas. Com efeito, é trivial verificar para cada dedução singular que a sua conclusão é consequência semântica do conjunto das suas hipóteses abertas. Como qualquer outra dedução de $\mathcal{N}_p$ é obtida a partir de deduções singulares por aplicação sucessiva de regras de inferência, o facto de toda as regras serem correctas permite concluir facilmente que a conclusão de qualquer dedução de $\mathcal{N}_p$ é consequência semântica do conjunto das suas hipóteses abertas. Consequentemente, se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$ então $\Phi \models \varphi$.

Apresentam-se agora definições mais rigorosas das noções referidas no parágrafo anterior, bem como as provas dos resultados mencionados. Na prova destes resultados é importante ter presente que das definições anteriores decorre que as árvores de dedução de $\mathcal{N}_p$ são árvores sem conflitos de marcas (Lema 1.4.22). É também útil recordar as seguintes notações: $D_{\mathcal{N}_p}$ denota o conjunto das árvores de dedução do sistema $\mathcal{N}_p$ e, sendo d uma dedução em $D_{\mathcal{N}_p}$, $conc(d)$ denota a conclusão de d (a fórmula associada à raiz de d) e H_d denota o conjunto das hipóteses abertas de d.

Definição 1.4.24 Correcção de regras de inferência
Uma regra de inferência do sistema $\mathcal{N}_p$ diz-se *correcta* se, sendo n a aridade da regra, se tem que

$$\text{se } H_{d_i} \models conc(d_i) \text{ para cada } 1 \leq i \leq n \text{ então } H_d \models conc(d)$$

sempre que d seja uma árvore obtida por aplicação da regra às árvores $d_1, \ldots, d_n$. ■

Proposição 1.4.25
Todas as regras do sistema $\mathcal{N}_p$ são correctas.

Prova: Há que fazer a prova para cada uma das regras do sistema. Para cada uma há que (i) identificar qual a relação entre as hipóteses abertas das árvores envolvidas e (ii) provar que a conclusão da árvore obtida por aplicação da regra é consequência semântica das suas hipóteses abertas, assumindo que a mesma propriedade é verificada por cada árvore a que se aplicou da regra.

Regra $\rightarrow I$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\rightarrow I$ com fórmula ψ a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = \varphi$, tem-se que $conc(d) = \psi \rightarrow \varphi$. Neste caso tem-se que $H_{d_1} \subseteq H_d \cup \{\psi\}$. Assumindo que $H_{d_1} \models \varphi$ há que mostrar que $H_d \models \psi \rightarrow \varphi$. Considere-se uma valoração arbitrária V tal que $V \Vdash H_d$. Supondo que $V \Vdash \psi$, então $V \Vdash H_d \cup \{\psi\}$ e portanto $V \Vdash H_{d_1}$. Consequentemente, $V \Vdash \varphi$ pelo que $V \Vdash \psi \rightarrow \varphi$. Conclui-se assim que $H_d \models \psi \rightarrow \varphi$.

Regra $\vee I_d$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\vee I_d$ com fórmula ψ a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = \varphi$, tem-se que $conc(d) = \varphi \vee \psi$. Neste caso

$H_d = H_{d_1}$. Assumindo que $H_{d_1} \models \varphi$ há que mostrar que $H_d \models \varphi \vee \psi$. Considere-se uma valoração arbitrária V tal que $V \Vdash H_d$. Assim $V \Vdash H_{d_1}$ e consequentemente $V \Vdash \varphi$, pelo que $V \Vdash \varphi \vee \psi$. Conclui-se assim que $H_d \models \varphi \vee \psi$.

Regra $\vee I_e$: prova idêntica ao caso anterior.

Regra $\wedge E_d$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\wedge E_d$ a partir de d_1, pelo que, sendo $conc(d_1) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, tem-se que $conc(d) = \varphi_1$. Neste caso $H_d = H_{d_1}$. Assumindo que $H_{d_1} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ há que mostrar que $H_d \models \varphi_1$. Considere-se uma valoração arbitrária V tal que $V \Vdash H_d$. Assim $V \Vdash H_{d_1}$ e consequentemente $V \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, pelo que $V \Vdash \varphi_1$. Conclui-se assim que $H_d \models \varphi_1$.

Regra $\wedge E_e$: prova idêntica ao caso anterior.

Regra $\perp$: Suponha-se que d foi obtida por aplicação da regra $\perp$ com fórmula ψ a partir de d_1. Tem-se que $conc(d_1) = \perp$ e $conc(d) = \psi$. Neste caso $H_{d_1} \subseteq H_d \cup \{\neg\psi\}$. Assumindo que $H_{d_1} \models \perp$ há que mostrar que $H_d \models \psi$. Considere-se uma valoração arbitrária V tal que $V \Vdash H_d$. Se $V \Vdash \neg\psi$ então $V \Vdash H_{d_1}$. Deste modo, como $H_{d_1} \models \perp$, tem-se $V \Vdash \perp$. Chega-se assim a um absurdo, e portanto, necessariamente, $V \Vdash \psi$. Conclui-se assim que $H_d \models \psi$.

Regra $\wedge I$: Suponha-se que d foi construída por aplicação da regra $\wedge I$ a partir de d_1 e d_2, pelo que, sendo $conc(d_1) = \varphi_1$ e $conc(d_2) = \varphi_2$, tem-se que $conc(d) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Neste caso $H_d = H_{d_1} \cup H_{d_2}$. Assumindo que $H_{d_1} \models \varphi_1$ e $H_{d_2} \models \varphi_2$ há que mostrar que $H_d \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Considere-se uma valoração arbitrária V tal que $V \Vdash H_d$. Tem-se que $V \Vdash H_{d_1}$ e $V \Vdash H_{d_2}$ e consequentemente, $V \Vdash \varphi_1$ e $V \Vdash \varphi_2$ pelo que que $V \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Conclui-se assim que $H_d \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Regra $\rightarrow E$: prova semelhante ao caso anterior.

Regra $\vee E$: Suponha-se que d foi construída por aplicação da regra $\vee E$ com fórmula ψ a partir de d_1, d_2 e d_3. Suponha-se ainda que $conc(d_1) = \varphi' \vee \varphi''$, $conc(d) = conc(d_2) = conc(d_3) = \psi$, d_2 é a árvore na qual se vão, eventualmente, eliminar hipóteses φ' e d_3 é a árvore na qual se vão, eventualmente, eliminar hipóteses φ''. Neste caso, $H_{d_1} \subseteq H_d$, $H_{d_2} \subseteq H_d \cup \{\varphi'\}$ e $H_{d_3} \subseteq H_d \cup \{\varphi'\}$. Assumindo que $H_{d_1} \models \varphi' \vee \varphi''$, $H_{d_2} \models \psi$ e $H_{d_3} \models \psi$ há que mostrar que $H_d \models \psi$. Considere-se uma valoração arbitrária V tal que $V \Vdash H_d$. Como $H_{d_1} \subseteq H_d$, $V \Vdash H_{d_1}$ e portanto $V \Vdash \varphi' \vee \varphi''$. Suponha-se que $V \Vdash \varphi'$ (o outro caso é semelhante). Como $H_{d_2} \subseteq H_d \cup \{\varphi'\}$ e $V \Vdash H_d \cup \{\varphi'\}$, tem-se que $V \Vdash H_{d_2}$ e consequentemente $V \Vdash \psi$. Conclui-se assim que $H_d \models \psi$. ∎

Proposição 1.4.26

Para cada dedução $d \in D_{\mathcal{N}_p}$ tem-se que $H_d \models conc(d)$.

Prova: A prova utiliza o princípio de indução aplicado ao conjunto $D_{\mathcal{N}_p}$ (definido indutivamente na Definição 1.4.19).

Base: Há que provar que sendo d uma árvore singular então $H_d \models conc(d)$. Neste caso tem-se que H_d é o conjunto singular constituído pela fórmula $conc(d)$ e portanto trivialmente $H_d \models conc(d)$.

Passo: Seja $d \in D_{\mathcal{N}_p}$ árvore não singular. Existem várias possibilidades a considerar cada uma correspondendo a uma das regras. Apresenta-se aqui apenas a prova correspondente a uma delas, sendo os outros casos em tudo semelhantes.

Suponha-se que d foi obtida a partir de duas árvores $d_1, d_2 \in D_{\mathcal{N}_p}$ por aplicação da regra $\wedge I$. Há que mostrar que $H_d \models conc(d)$ assumindo a hipótese de indução $H_{d_1} \models conc(d_1)$ e $H_{d_2} \models conc(d_2)$. Este resultado é consequência directa da Proposição 1.4.25. ■

Segue-se agora o enunciado e prova da correcção de $\mathcal{N}_p$

Proposição 1.4.27
O sistema $\mathcal{N}_p$ é correcto, ou seja, sendo $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$ tem-se que

$$\text{se } \Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi \text{ então } \Phi \models \varphi.$$

Prova: Pretende-se mostrar que se $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$ então para qualquer valoração V tal que $V \Vdash \Phi$ se tem que $V \Vdash \varphi$. Suponha-se que então que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p} \varphi$ e seja V uma valoração arbitrária tal que $V \Vdash \Phi$. Pela Definição 1.4.21, existe $d \in D_{\mathcal{N}_p}$ tal que $conc(d) = \varphi$ e $H_d \subseteq \Phi$. Pela Proposição 1.4.26, $H_d \models conc(d)$. Dado que $V \Vdash H_d$ tem-se que $V \Vdash \varphi$. ■

1.4.5.2 Completude de $\mathcal{N}_p$ ($\star$)

Nesta subsecção prova-se a completude de uma restrição do sistema $\mathcal{N}_p$ (que não afecta a expressividade da lógica).

Como frequentemente acontece, a prova de completude é usualmente mais trabalhosa do que a prova da correcção sendo necessário introduzir algumas noções e provar alguns resultados preliminares. Para simplificar a exposição, a prova de completude aqui apresentada é relativa a uma restrição do sistema $\mathcal{N}_p$. Esta restrição, que será designada por $\mathcal{N}'_p$, está relacionada com a linguagem utilizada. A linguagem apenas inclui fórmulas construídas a partir dos símbolos em $P \cup \{\perp\}$ e do conectivo $\rightarrow$ (e portanto só existirão as regras $\rightarrow I$, $\rightarrow E$ e $\perp$). Isto não constitui uma restrição importante na expressividade da lógica pois, como é conhecido, os outros conectivos podem-se definir como abreviatura a partir dos aqui considerados ($\varphi_1 \vee \varphi_2 =_{abv} (\neg\varphi_1) \rightarrow \varphi_2$ e $\varphi_1 \wedge \varphi_2 =_{abv} \neg(\varphi_1 \rightarrow (\neg\varphi_2))$). A extensão desta prova ao caso de $\mathcal{N}_p$ não é difícil e deixa-se como exercício ao leitor interessado (Exercício 1.4.43).

Devido à restrição da linguagem é necessário considerar as seguintes noções.

Definição 1.4.28 ALFABETO Alf'_P E LINGUAGEM INDUZIDA POR Alf'_P
O alfabeto proposicional Alf'_P contém todos os símbolos de Alf_P excepto os conectivos $\vee$ e $\wedge$. A *linguagem proposicional induzida por* Alf'_P designa-se por F'_P e tem definição análoga à apresentada para F_P. ∎

Observação 1.4.29 Naturalmente, assumem-se também para o caso de F'_P todas as definições e notações envolvendo fórmulas de F_P anteriormente apresentadas. Em geral, no que se refere a notações, acrescentar-se-á uma plica ($'$) às notações utilizadas anteriormente.

Pode agora definir-se o sistema dedutivo $\mathcal{N}'_p$ para o qual vai ser provado o resultado de completude.

Definição 1.4.30 SISTEMA $\mathcal{N}'_p$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{N}'_p$ é constituído pelas regras de inferência $\rightarrow I$, $\rightarrow E$ e $\perp$ onde se assumem as regras definidas como no sistema $\mathcal{N}_p$. ∎

Observação 1.4.31 Todas as definições e notações relativas ao sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$ apresentadas anteriormente podem como é natural ser adaptadas para o caso do sistema $\mathcal{N}'_p$. ∎

Inicia-se agora a prova dos resultados que vão conduzir à prova da completude do sistema $\mathcal{N}'_p$. A prova da completude do sistema (Proposição 1.4.39) tem por base

(i) a noção de conjunto (de fórmulas) coerente e de conjunto (de fórmulas) coerente maximal (Definição 1.4.32) e o facto de qualquer conjunto coerente estar contido num conjunto coerente maximal (Proposição 1.4.34)

(ii) o facto de, para cada conjunto coerente maximal, existir uma valoração que satisfaz todas as fórmulas do conjunto (Corolário 1.4.38).

Para concluir que $\mathcal{N}_p'$ é completo pode então fazer-se o raciocínio seguinte. Dado um conjunto de fórmulas Φ e uma fórmula φ, se $\Phi \not\vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi$ prova-se que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é um conjunto coerente. Por (i), este conjunto pode ser estendido a um conjunto coerente maximal. Por (ii), existe uma valoração que satisfaz, em particular, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ e portanto $\Phi \not\models \varphi$. Consequentemente, se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi$.

Definição 1.4.32 Conjunto coerente e conjunto coerente maximal
Sendo $\Phi \subseteq F_P'$

- Φ diz-se *coerente* se $\Phi \not\vdash_{\mathcal{N}_p'} \perp$; Φ diz-se *incoerente* se não é coerente;
- Φ diz-se *coerente maximal* se se verificam as condições seguintes
  - Φ é coerente;
  - para cada $\varphi \in F_P'$ tem-se que $\varphi \in \Phi$ ou $\neg\varphi \in \Phi$. ■

Proposição 1.4.33

1. O sistema $\mathcal{N}_p'$ é coerente, i.e., $\not\vdash_{\mathcal{N}_p'} \perp$.
2. Se $\Phi \subseteq F_P'$ é coerente então não existe $\varphi \in F_P'$ tal que $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq \Phi$.
3. Se $\Phi \subseteq F_P'$ é coerente, então, para cada $\varphi \in F_P'$, tem-se que $\Phi \cup \{\varphi\}$ é coerente ou $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é coerente.

Prova:
1. Se não fosse coerente então $\perp$ seria um teorema do sistema e porque o sistema é correcto, seria uma tautologia. Assim qualquer que fosse a valoração V, ter-se-ia $V \Vdash \perp$ o que contradiz a definição de satisfação de fórmula.

2. A asserção resulta trivialmente da dedução

$$\frac{\varphi \to \perp^{\;1} \qquad\qquad \varphi^{\;2}}{\perp} \to E$$

que permite concluir que se $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$ e portanto não seria coerente.

3. Suponha-se, por absurdo, que não se verifica nenhuma das duas situações. Então $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$ e $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$. Pelo metateorema da dedução (Proposição 1.4.23), $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi \to \perp$ e $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} (\neg\varphi) \to \perp$ (isto é, $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} (\varphi \to \perp) \to \perp$. Pode assim construir-se uma dedução

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \varphi \to \perp\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ (\varphi \to \perp) \to \perp\end{array}}{\perp} \to E$$

onde se assume que as hipóteses abertas de $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ estão contidas em Φ, que permite concluir que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$ o que contradiz o facto de Φ ser coerente. ∎

Proposição 1.4.34
Qualquer conjunto $\Phi \subseteq F'_P$ que seja coerente pode ser estendido a um conjunto $\Phi^\star \subseteq F'_P$ que é coerente maximal.

Prova: O conjunto F'_P é numerável. Este facto é consequência de $Alf'_P{}^*$ ser um conjunto numerável (pois Alf'_P é não vazio e contável) e de F'_P ser infinito e subconjunto de $Alf'_P{}^*$.

Considere-se uma enumeração φ_0, φ_1, φ_2, ... das fórmulas de F'_P. A partir desta enumeração constrói-se a sucessão Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... de conjuntos de fórmulas do seguinte modo: $\Phi_0 = \Phi$ e, para cada $i \geq 0$, $\Phi_{i+1} = \Phi_i$ se $\Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ é incoerente e $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ caso contrário.

Facilmente se prova, por indução, que Φ_i é coerente para cada $i \geq 0$. Basta ter em conta que Φ_0 é coerente e que, por construção, se Φ_i é coerente então Φ_{i+1} é coerente.

Seja $\Phi^\star = \bigcup_{i \geq 0} \Phi_i$. Mostra-se seguidamente que este conjunto é coerente maximal.

Suponha-se que $\Phi^\star$ não é coerente. Pela Definição 1.4.32, $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$ e portanto existe $d \in D_{\mathcal{N}'_p}$ tal que $H_d \subseteq \Phi^\star$ e $conc(d) = \perp$. Como por definição d é finita, H_d é finito e portanto existe um subconjunto finito de $\Phi^\star$ a partir do qual se deriva $\perp$. Tendo em conta a construção de $\Phi^\star$, tem-se que existirá um certo $j \geq 0$ tal que $H_d \subseteq \Phi_j$. Assim, $\Phi_j \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$ o que contradiz o facto de Φ_j ser coerente. Conclui-se então que $\Phi^\star$ é coerente.

Suponha-se que existe uma fórmula φ_i, $i \geq 0$, tal que $\varphi_i \notin \Phi^\star$. Neste caso, tendo em conta a construção de $\Phi^\star$, $\Phi_i \cup \{\varphi_i\}$ não é coerente e $\varphi_i \notin \Phi_{i+1}$. Pela Proposição 1.4.33, $\Phi_i \cup \{\neg\varphi_i\}$ é coerente. Tendo em conta a enumeração de F'_P apresentada tem-se que $\neg\varphi_i = \varphi_j$ para algum $j \geq 0$, $j \neq i$. Tendo em conta a construção da sucessão de conjuntos de fórmulas tem-se que Φ_{j+1} foi construído a partir de Φ_j e φ_j. Se $j < i$, então necessariamente $\Phi_j \cup \{\varphi_j\}$ é coerente pois, caso contrário, como $\Phi_j \subseteq \Phi_i$ ter-se-ia $\Phi_i \cup \{\varphi_j\}$ incoerente. Assim sendo, $\varphi_j \in \Phi_{j+1}$ e portanto $\neg\varphi_i \in \Phi^\star$. Finalmente, se $j > i$, $\Phi_i \subseteq \Phi_j$ e portanto $\Phi_j \cup \{\varphi_i\}$ é incoerente. Como Φ_j é coerente, pela Proposição 1.4.33, $\Phi_j \cup \{\neg\varphi_i\}$ é coerente e portanto de novo se tem que $\varphi_j \in \Phi_{j+1}$ o que significa que $\neg\varphi_i \in \Phi^\star$. Conclui-se então que para cada $\varphi \in F'_P$, $\varphi \in \Phi^\star$ ou $\neg\varphi \in \Phi^\star$. ∎

Proposição 1.4.35
Sejam $\Phi^\star \subseteq F'_P$ um conjunto coerente maximal e $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in F'_P$. Então

(i) $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi$ se e só se $\varphi \in \Phi^\star$;

(ii) $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Phi^\star$ se e só se sempre que $\varphi_1 \in \Phi^\star$ então $\varphi_2 \in \Phi^\star$.

Prova: (i) Se $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi$ e $\varphi \notin \Phi^\star$ então, dado que $\Phi^\star$ é coerente maximal, ter-se-ia que $\neg\varphi \in \Phi^\star$ (isto é $\varphi \to \bot \in \Phi^\star$). Poderia então construir-se uma dedução (usando uma marca m conveniente)

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix} \qquad \varphi \to \bot^{\,m}}{\bot} \to E$$

onde as hipóteses abertas de $\mathcal{D}$ estão contidas em $\Phi^\star$, que permitiria concluir que $\Phi^\star$ não é coerente o que contradiria a hipótese.

Se $\varphi \in \Phi^\star$ então, trivialmente, $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi$. Basta considerar a árvore de dedução singular cuja fórmula do seu único nó é φ.

(ii) Se $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Phi^\star$ e $\varphi_1 \in \Phi^\star$ então a dedução

$$\dfrac{\varphi_1 \to \varphi_2^{\;1} \qquad \varphi_1^{\;2}}{\varphi_2} \to E$$

permite concluir que $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi_2$. Por (i), $\varphi_2 \in \Phi^\star$.

Suponha-se agora que se $\varphi_1 \in \Phi^\star$ então $\varphi_2 \in \Phi^\star$. Se $\varphi_2 \in \Phi^\star$, a dedução

$$\dfrac{\varphi_2^{\;1}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\,{\to}I,2$$

permite concluir que $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi_1 \to \varphi_2$ o que, por (i), significa que $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Phi^\star$. Se $\varphi_2 \not\in \Phi^\star$, então, necessariamente, $\varphi_1 \not\in \Phi^\star$. Dado que $\Phi^\star$ é coerente maximal, $\varphi_1 \to \bot \in \Phi^\star$ e a dedução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1 \to \bot^{\;4} \qquad \varphi_1^{\;3}}{\bot}\,{\to}E}{(\varphi_2 \to \bot) \to \bot}\,{\to}I,1 \qquad \varphi_2 \to \bot^{\;2}}{\bot}\,{\to}E}{\varphi_2}\,\bot,2}{\varphi_1 \to \varphi_2}\,{\to}I,3$$

permite concluir que $\varphi_1 \to \bot \vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi_1 \to \varphi_2$ e portanto $\Phi^\star \vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi_1 \to \varphi_2$. Por (i), $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Phi^\star$. ■

Definição 1.4.36 VALORAÇÃO CANÓNICA
Dado um conjunto $\Phi^\star \subseteq F_P'$ coerente maximal, a *valoração canónica induzida por* $\Phi^\star$ *designa-se* $V_{\Phi^\star}$ e define-se da seguinte forma: para cada $p \in P$, $V_{\Phi^\star}(p) = 1$ se $p \in \Phi^\star$ e $V_{\Phi^\star}(p) = 0$ caso contrário. ■

Proposição 1.4.37
Seja $\Phi^\star \subseteq F_P'$ um conjunto coerente maximal. Então, para cada $\varphi \in F_P'$, $\varphi \in \Phi^\star$ se e só se $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi$.

Prova: A prova utiliza o princípio de indução aplicado ao conjunto (definido indutivamente) F_P'.

Base: Seja $\varphi \in P$. Se $\varphi \in \Phi^\star$ então, pela Definição 1.4.36, $V_{\Phi^\star}(\varphi) = 1$ e portanto $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi$. Reciprocamente, se $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi$, $V_{\Phi^\star}(\varphi) = 1$ e portanto, pela Definição 1.4.36, $\varphi \in \Phi^\star$. O caso $\varphi = \perp$ é trivial em ambos os sentidos porque, por um lado, $\perp \notin \Phi^\star$ pois este conjunto é coerente e, por outro, por definição de satisfação de fórmula, $V_{\Phi^\star} \nVdash \perp$.

Passo: Existe apenas um caso a considerar que é φ ser $\varphi_1 \to \varphi_2$. Recorde-se que, pela Proposição 1.4.35, $\varphi \in \Phi^\star$ se e só se sempre que $\varphi_1 \in \Phi^\star$ então $\varphi_2 \in \Phi^\star$ (ou, de modo equivalente, $\varphi_1 \notin \Phi^\star$ ou $\varphi_2 \in \Phi^\star$). Suponha-se então que $\varphi \in \Phi^\star$ e que $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi_1$. Por hipótese de indução, $\varphi_1 \in \Phi^\star$ e portanto, pelo resultado acima referido, $\varphi_2 \in \Phi^\star$. Pela hipótese de indução, $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi_2$ e, consequentemente, $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi$. Reciprocamente, suponha-se que $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi$ e portanto $V_{\Phi^\star} \nVdash \varphi_1$ ou $V_{\Phi^\star} \Vdash \varphi_2$. No primeiro caso, pela hipótese de indução, $\varphi_1 \notin \Phi^\star$ pelo que, tendo em conta o resultado acima mencionado, $\varphi \in \Phi^\star$. O segundo caso tem prova semelhante. ∎

Corolário 1.4.38
Se $\Phi^\star \subseteq F'_P$ é coerente maximal então $V_{\Phi^\star} \Vdash \Phi^\star$.

Prova: Imediato a partir da Proposição 1.4.37. ∎

Pode agora apresentar-se finalmente o resultado de completude desejado.

Proposição 1.4.39
O sistema $\mathcal{N}'_p$ é completo, ou seja, sendo $\Phi \subseteq F'_P$ e $\varphi \in F'_P$,

$$\text{se } \Phi \models \varphi \text{ então } \Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi.$$

Prova: Pretende-se mostrar que se para qualquer valoração V, $V \Vdash \Phi$ implica que $V \Vdash \varphi$ então se tem que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi$. Mostra-se que se $\Phi \nvdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi$ então existe uma valoração V tal que $V \Vdash \Phi$ mas $V \nVdash \varphi$.

Suponha-se que então que $\Phi \nvdash_{\mathcal{N}'_p} \varphi$. Se $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ for incoerente, $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{N}'_p} \perp$ e, pelo metateorema da dedução (Proposição 1.4.23), $\Phi \vdash_{\mathcal{N}'_p} (\varphi \to \perp) \to \perp)$. Pode assim construir-se uma dedução (usando uma marca m conveniente)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ (\varphi \to \perp) \to \perp\end{array} \qquad \varphi \to \perp^{\,m}}{\perp}\;{\to}E}{\varphi}\;\perp, m$$

onde as hipóteses abertas de $\mathcal{D}$ estão contidas em Φ, que permite concluir que $\Phi \vdash_{\mathcal{N}_p'} \varphi$. Chega-se assim a uma contradição pelo que, necessariamente, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é coerente. Pela Proposição 1.4.34, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ pode ser estendido a um conjunto $(\Phi \cup \{\neg\varphi\})^\star$ que é coerente maximal. Sendo V a valoração canónica induzida por $(\Phi \cup \{\neg\varphi\})^\star$, tem-se $V \Vdash (\Phi \cup \{\neg\varphi\})^\star$ pelo Corolário 1.4.38. Assim, $V \Vdash \Phi$ e $V \Vdash \neg\varphi$, ou seja, $V \nVdash \varphi$. ■

1.4.6 Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos ao longo desta secção.

Exercício 1.4.40 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 designam fórmulas arbitrárias de F_P. Mostre que:

1. $\vdash_{\mathcal{N}_p} \neg(\psi_1 \wedge (\neg\psi_1))$
2. $\vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_1 \vee (\neg\psi_1)$
3. $\{\neg\psi_1\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_1 \to \psi_2$
4. $\{\neg(\psi_1 \wedge \psi_2), \psi_1\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \neg\psi_2$
5. $\{\neg(\psi_1 \vee \psi_2)\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \neg\psi_1$
6. $\{\psi_2 \to \psi_3\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_1 \wedge \psi_2 \to \psi_3$
7. $\{\psi_1 \to \psi_2\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)$
8. $\vdash_{\mathcal{N}_p} ((\psi_1 \to \psi_3) \wedge (\psi_2 \to \psi_3)) \to (\psi_1 \vee \psi_2) \to \psi_3$
9. $\vdash_{\mathcal{N}_p} ((\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1) \to \psi_1$
10. $\vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3) \to (\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)$
11. $\vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_1 \vee (\psi_2 \wedge \psi_3) \to (\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_1 \vee \psi_3)$
12. $\vdash_{\mathcal{N}_p} (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1))$
13. $\{\psi_1 \to \psi_2, (\neg\psi_1) \to \psi_2\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_2$
14. $\vdash_{\mathcal{N}_p} (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_1) \vee \psi_2)$

15. $\vdash_{\mathcal{N}_p} (\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)) \rightarrow ((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_2))$

16. $\vdash_{\mathcal{N}_p} (\neg(\psi_1 \vee \psi_2)) \rightarrow ((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2))$

17. $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \rightarrow \psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_3\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_4 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

18. $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_3,\ \ \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_1)),\ \ \psi_5 \wedge (\neg\psi_4),\ \ \psi_5 \rightarrow \psi_2\ \vdash\ \psi_3$

19. $\{(\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2,\ \psi_1 \rightarrow (\neg\psi_5),\ \psi_3 \rightarrow (\psi_4 \vee \psi_5),\ \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_3)\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_3 \rightarrow \psi_2$

20. $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3,\ \psi_4 \wedge (\neg\psi_5),\ (\neg\psi_5) \wedge ((\neg(\psi_5 \vee \psi_1)) \rightarrow \psi_6),\ \psi_2 \wedge (\neg\psi_3)\} \vdash_{\mathcal{N}_p} \psi_6$ ■

Exercício 1.4.41 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios propostos no Exercício 1.4.40 usando agora a ferramenta *Isabelle*. ■

Exercício 1.4.42 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 designam fórmulas arbitrárias de F_P. Recorrendo às propriedades do sistema $\mathcal{N}_p$ mostre que:

1. $\models ((\psi_1 \rightarrow \psi_3) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_3)) \rightarrow ((\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3)$

2. $\{\psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_3, \neg(\psi_1 \wedge \psi_3)\} \models \neg\psi_2$

3. $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \rightarrow \psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_3\} \models \psi_4 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

4. $\{(\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2, \psi_1 \rightarrow (\neg\psi_5), \psi_3 \rightarrow (\psi_4 \vee \psi_5), \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_3)\} \models \psi_3 \rightarrow \psi_2$

5. $\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3) \models (\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)$

6. $\psi_1 \vee (\psi_2 \wedge \psi_3) \models (\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_1 \vee \psi_3)$

7. $\{(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_3,\ \ \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_1)),\ \ \psi_5 \wedge (\neg\psi_4),\ \ \psi_5 \rightarrow \psi_2\} \models \psi_3$

8. $\{(\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2,\ \psi_1 \rightarrow (\neg\psi_5),\ \psi_3 \rightarrow (\psi_4 \vee \psi_5),\ \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_3)\} \models \psi_3 \rightarrow \psi_2$

9. $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3,\ \psi_4 \wedge (\neg\psi_5),\ (\neg\psi_5) \wedge ((\neg(\psi_5 \vee \psi_1)) \rightarrow \psi_6),\ \psi_2 \wedge (\neg\psi_3)\} \models \psi_6$ ■

Exercício 1.4.43 Estenda a prova de completude de $\mathcal{N}'_p$ apresentada na secção 1.4.5.2 de modo a obter uma prova de completude do sistema $\mathcal{N}'_p$. ■

1.5 Sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$

Nesta secção apresenta-se um outro sistema dedutivo para a lógica proposicional, o sistema $\mathcal{S}_p$. Tal como no caso do sistema de dedução natural são também manipuladas árvores etiquetadas mas, neste contexto, as etiquetas são *sequentes* e as regras de inferência são naturalmente diferentes das regras do sistema $\mathcal{N}_p$. Este sistema é usualmente designado sistema de sequentes (ou sistema de sequentes de Gentzen) ou ainda cálculo de sequentes.

Sistemas de sequentes (para a lógica clássica e intuicionista) foram propostos pela primeira vez por G. Gentzen em [10], mas diversas variantes ao trabalho original têm sido propostas. O sistema $\mathcal{S}_p$ aqui apresentado é semelhante à formulação original. Como exemplo de uma das referidas variantes, apresenta-se também nesta secção o sistema $\mathcal{S}'_p$.

Os livros [9] e [14] são exemplos de outros textos onde se podem encontrar descrições de sistemas de sequentes.

A construção de derivações em $\mathcal{S}_p$ pode também ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este assunto é abordado no capítulo **??**.

Na secção 1.5.1, descrevem-se os sequentes. Na secção 1.5.2, é apresentado o sistema $\mathcal{S}_p$ e o sistema $\mathcal{S}'_p$ é apresentado na secção 1.5.3. Na secção 1.5.4 são discutidas as propriedades de correcção e completude destes dois sistemas dedutivos. Na secção 1.5.5 são propostos diversos exercícios.

1.5.1 Sequentes

Assume-se fixado o conjunto de símbolos proposicionais P.

Definição 1.5.1 SEQUENTE
Um *sequente* sobre F_P é um par (Ant, Cns) onde Ant, Cns são sequências de fórmulas. A sequência Ant é o *antecedente* do sequente e a sequência Cns é o *consequente* do sequente. O conjunto de todos sequentes sobre F_P designa-se por Sqt_P. ■

Um sequente é constituído por duas sequências de fórmulas, uma das quais é designada antecedente sendo a outra designada consequente.

Notação 1.5.2 Usa-se a notação

$$Ant \Longrightarrow Cns$$

para o sequente $(Ant, Cns) \in Sqt_P$. Se, em particular, Ant a sequência vazia, ε, pode usar-se também

$$\Longrightarrow Cns$$

e, do mesmo modo,

$$Ant \Longrightarrow$$

quando Cns é ε. Naturalmente, $\Longrightarrow$ corresponde ao caso em que o $Ant = Cns = \varepsilon$. Para facilitar a leitura, é usual separar as fórmulas por vírgulas nas sequências Ant e Cns, pelo que

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Longrightarrow \psi_1, \ldots, \psi_m$$

representa um sequente em que Ant é a sequência $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ e Cns a sequência $\psi_1 \ldots \psi_m$, $n, m \in \mathbb{N}_0$. O caso em que $n = 0$ ou $m = 0$ corresponde ao caso em que $Ant = \varepsilon$ ou $Cns = \varepsilon$.

Por vezes será também útil a notação

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \psi_1, \ldots, \psi_m, \Delta'$$

onde $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ são sequências de fórmulas e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m \in F_P$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, que denota o sequente cujo antecedente resulta de concatenar as sequências Γ, $\varphi'_1 \ldots \varphi'_n$ e Γ', por esta ordem, e o consequente é obtido de modo semelhante. Se algumas das sequências Γ, Γ', Δ ou Δ' forem vazias omite-se a referência a essas sequências na notação acima. Por exemplo,

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \psi_1, \ldots, \psi_m, \Psi'$$

representa o caso em que $\Gamma = \varepsilon$. Se $n = 0$ ter-se-á, naturalmente,

$$\Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \psi_1, \ldots, \psi_m, \Delta'$$

e de modo análogo para caso de $m = 0$ e de $n = m = 0$.

Em muitas situações será necessário falar na conjunção e/ou disjunção dos elementos do antecedente $Ant = \varphi_1 \ldots \varphi_n$, o que, no caso de $n \neq 0$, é, como se espera, $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ e $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$, respectivamente. No caso em que $n = 0$ a disjunção é $\top$ e a conjunção é $\perp$. Idênticas observações se podem naturalmente fazer relativamente ao consequente. ∎

Exemplo 1.5.3 Sendo $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$

- $p_1 \wedge p_2, p_3 \Longrightarrow p_1, p_4$
- $p_1 \vee p_2 \Longrightarrow p_1$
- $p_1, p_3 \Longrightarrow$
- $\Longrightarrow p_1 \wedge p_4$

são exemplos de sequentes. ■

Definição 1.5.4 SEQUENTE VÁLIDO E SEQUENTE FALSIFICÁVEL
Seja $Ant \Longrightarrow Cns$ em Sqt_P tal que $Ant = \varphi_1 \dots \varphi_n$ e $Cns = \psi_1 \dots \psi_m$, $n, m \in I\!N_0$.

- Uma valoração V *satisfaz* $Ant \Longrightarrow Cns$, o que se denota por

  $$V \Vdash Ant \Longrightarrow Cns$$

  se $V \Vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \dots \vee \psi_m$.

- $Ant \Longrightarrow Cns$ é *válido*, o que se denota por

  $$\models Ant \Longrightarrow Cns$$

  se, para cada valoração V sobre P se tem que V satisfaz $Ant \Longrightarrow Cns$.

- $Ant \Longrightarrow Cns$ é *falsificável*, se não é válido, isto é, se existe uma valoração V tal que $V \not\Vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \dots \vee \psi_m$ ou seja, $V \Vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge (\neg\psi_1) \wedge \dots \wedge (\neg\psi_m)$; nestas condições diz-se que V *falsifica* o sequente. ■

Observação 1.5.5 Note-se que da Definição 1.5.4 resulta que, sendo $Ant \Longrightarrow Cns$ em Sqt_P tal que $Ant = \varphi_1 \dots \varphi_n$ e $Cns = \psi_1 \dots \psi_m$, com $n, m \in I\!N_0$,

- se $n = 0$ o sequente $\Longrightarrow Cns$ é válido se a fórmula $\psi_1 \vee \dots \vee \psi_m$ é válida e é falsificável se a fórmula $(\neg\psi_1) \wedge \dots \wedge (\neg\psi_m)$ é possível;
- se $m = 0$ o sequente $Ant \Longrightarrow$ é válido se a fórmula $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ é contraditória e é falsificável se a fórmula $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ é possível;
- se $n = m = 0$ o sequente é falsificável. ■

Exemplo 1.5.6 Sendo $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$

- $p_1 \wedge p_2, p_3 \Longrightarrow p_1, p_4$ é um sequente válido;
- os sequentes
  - $p_1 \vee p_2 \Longrightarrow p_1$
  - $p_1, p_3 \Longrightarrow$
  - $\Longrightarrow p_1 \wedge p_4$

  são falsificáveis. ∎

Do que ficou exposto resulta que, neste contexto, o sequente

$$Ant \Longrightarrow Cns$$

com $Ant = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ e $Cns = \psi_1 \ldots \psi_m$, $n, m \in I\!N_0$, pode ser informalmente interpretado como $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$, no caso em que tanto o sequente como o consequente são sequências não vazias. No caso do antecedente ser a sequência vazia, tem-se $(\perp \to \perp) \to \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$ e no caso do consequente ser a sequência vazia tem-se $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \perp$.

Um sequente é válido se, para cada valoração V, se V satisfaz todas as fórmulas do antecedente então V satisfaz *pelo menos uma* fórmula do consequente e é falsificável se existe uma valoração V que satisfaz todas as fórmulas do antecedente e *não* satisfaz *nenhuma fórmula* do consequente.

Note-se que da Observação 1.5.5 resulta que se se considerar em particular o sequente $\Longrightarrow \varphi$, com $\varphi \in F_P$, tem-se que $\Longrightarrow \varphi$ *é sequente válido se e só se* φ *é uma fórmula válida*. Como se verá adiante, o sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$ permite determinar, através de manipulação simbólica de sequentes e fórmulas neles envolvidas, se um dado sequente é um sequente válido. Consequentemente, a avaliação da validade de uma fórmula proposicional pode ser conseguida através do sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$.

Sendo $\Gamma = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ uma sequência não vazia de fórmulas de F_P e $\varphi \in F_P$, $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ é válido se e só se $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi$ é fórmula válida. Consequentemente, $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ é válido se e só se $\Phi \models \varphi$, onde Φ é o conjunto das fórmulas presentes em Γ. Assim, o sistema $\mathcal{S}_p$ pode naturalmente ser também utilizado para avaliar se uma fórmula é consequência semântica de um conjunto de fórmulas.

1.5.2 Sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$

Nesta secção apresenta-se o sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$. Neste momento, após o estudo do sistema dedutivo $\mathcal{N}_p$, o leitor já se encontra mais familiarizado com o conceito de sistema dedutivo e demais conceitos associados. Por esta razão o sistema $\mathcal{S}_p$ é aqui apresentado de um modo mais sucinto do que o escolhido para apresentar o sistema $\mathcal{N}_p$ nas secções anteriores.

O sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$ é constituído por um conjunto de axiomas e diversas regras de inferência. À semelhança do sistema $\mathcal{N}_p$, as deduções de $\mathcal{S}_p$ são também árvores etiquetadas (as árvores de dedução ou derivação) e são construídas a partir de árvores singulares usando as regras de inferência do sistema. As etiquetas das árvores são agora sequentes. Tal como no sistema $\mathcal{N}_p$, existem regras de inferência associadas a cada conectivo. Estas regras são usualmente designadas por regras lógicas. Mas em $\mathcal{S}_p$ estão também presentes outro tipo de regras, em particular, regras que permitem eliminar fórmulas duplicadas nas sequências que constituem os antecedentes ou os consequentes dos sequentes, que permitem mudar a ordem das fórmulas nessas sequências e que permitem introduzir-lhe novas fórmulas arbitrárias. Estas regras são usualmente designadas por regras estruturais.

Exemplo 1.5.7 A partir, por exemplo, da árvore de dedução singular

$$\psi_1, \psi_3 \Longrightarrow \psi_2$$

obtém-se a árvore de dedução

$$\dfrac{\psi_1, \psi_3 \Longrightarrow \psi_2}{\psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2} \to D$$

por aplicação da regra $\to D$. A partir desta e da árvore singular

$$\psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$$

obtém-se

$$\dfrac{\dfrac{\psi_1, \psi_3 \Longrightarrow \psi_2}{\psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2} \to D \qquad \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2}{\psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2} \vee E$$

por aplicação da regra $\vee E$. Esta árvore é de novo uma árvore de dedução em $\mathcal{S}_p$.

Designe-se por conclusão de uma árvore de dedução o sequente associado à sua raiz. Note-se que a regra $\to D$ ("implicação à direita") permitiu a partir de uma árvore de dedução com conclusão $\psi_1, \psi_3 \Longrightarrow \psi_2$ obter uma árvore de dedução com conclusão $\psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$ (observe-se a fórmula $\psi_1 \to \psi_2$ no consequente). Esta árvore de é uma extensão da árvore de dedução de partida.

Por seu lado, a regra $\vee E$ ("disjunção à esquerda") permitiu obter uma árvore de dedução com conclusão $\psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$ (observe-se a fórmula $\psi_3 \vee \psi_4$ no antecedente) a partir de uma árvore de dedução com conclusão $\psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$ e de outra com conclusão $\psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$. ■

A regra $\to D$ é usualmente representada da seguinte forma

$$\frac{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \to \psi} \to D$$

em que $\varphi, \psi \in F_P$ e Γ e Δ são sequências finitas de fórmulas em F_P. O sequente abaixo da linha horizontal é sequente associado à raiz da dedução que se obtém por aplicação da regra. O sequente acima da linha horizontal é o sequente associado à raiz da dedução de partida.

A regra $\vee E$ é usualmente representada da seguinte forma

$$\frac{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad \psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \vee E$$

onde os diferentes elementos têm o significado esperado. Neste caso para aplicar a regra são necessárias duas deduções. Cada sequente acima da linha horizontal é o sequente associado à raiz de cada uma das deduções de partida.

Para ilustrar mais algumas regras de inferência de $\mathcal{S}_p$ e, em particular, algumas das regras estruturais apresenta-se mais um exemplo.

Exemplo 1.5.8 Considere-se a árvore de dedução seguinte.

$$\psi_4 \Longrightarrow \psi_4 \qquad \frac{\psi_1, \psi_3 \Longrightarrow \psi_2}{\psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2} \to D \qquad \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi_3 \vee \psi_4,\, \psi_4 \Longrightarrow \psi_4}\,enfE}{\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_4}\,trcE \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2}\,\vee E}{\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2}\,enfE}{\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_4 \wedge (\psi_1 \to \psi_2)}\,\wedge D$$

Para além das regras já referidas no Exemplo 1.5.7, foi usada, em particular, a regra $\wedge D$ ("conjunção à direita"). Esta regra permitiu obter uma árvore de dedução com conclusão $\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_4 \wedge (\psi_1 \to \psi_2)$ (observe-se a conjunção no consequente), partindo de uma árvore de dedução cuja conclusão é $\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_4$ e de outra cuja conclusão é $\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$.

Foram aplicadas também duas regras estruturais: a regra *enfE* ("enfraquecimento à esquerda") e a regra *trcE* ("troca à esquerda"). Partindo-se de uma qualquer árvore de dedução, a regra *enfE* permite obter uma árvore de dedução cuja conclusão é idêntica à da árvore de dedução de partida mas em cujo antecedente é incluída uma fórmula arbitrária. Partindo-se de uma qualquer árvore de dedução cuja conclusão tenha pelo menos duas fórmulas no antecedente, a regra *trcE* permite obter uma árvore de dedução cuja conclusão é a da árvore de dedução de partida mas em que duas fórmulas consecutivas do antecedente trocam de posição.

Na dedução anterior merece ainda referência o sequente $\psi_4 \Longrightarrow \psi_4$ na etiqueta de uma das folhas. Este sequente corresponde a um axioma do sistema $\mathcal{S}_p$. Em particular, são axiomas deste sistema todos os sequentes deste tipo, isto é, quer o antecedente quer o consequente têm uma só fórmula, que é a mesma em ambas as sequências. O sistema $\mathcal{S}_p$ tem ainda outro tipo de axioma, o qual envolve o símbolo $\perp$, como adiante se ilustrará.

Pode ainda dizer-se que esta árvore de dedução corresponde a uma dedução (ou derivação) do sequente $\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$ no sistema $\mathcal{S}_p$. Uma das folhas corresponde a um axioma, mas as outras não, não sendo assim uma árvore de prova em $\mathcal{S}_p$. Uma árvore de prova em $\mathcal{S}_p$ é uma árvore de dedução na qual a cada folha corresponde um axioma. ■

Os exemplos seguintes correspondem a deduções que são árvores de prova.

Exemplo 1.5.9 Considere-se agora a dedução seguinte.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1 \Longrightarrow \psi_1}{\psi_2,\, \psi_1 \Longrightarrow \psi_1}\, enfE}{\psi_1 \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1} \to D}{\Longrightarrow \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)} \to D$$

Esta dedução corresponde a uma árvore de prova em $\mathcal{S}_p$, pois à sua única folha está associado um axioma. Como adiante se verá com mais detalhe, a conclusão de qualquer árvore de prova é um sequente válido. ∎

Exemplo 1.5.10 Na árvore de dedução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\psi_1 \Longrightarrow \psi_1}{\psi_2, \psi_1 \Longrightarrow \psi_1}\, enfE}{\psi_1, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1}\, trcE \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\perp \Longrightarrow}{\perp \Longrightarrow \psi_1}\, enfD}{\psi_2, \perp \Longrightarrow \psi_1}\, enfE}{\perp, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1}\, trcE}{\psi_1 \vee \perp,\, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1} \vee E}{\psi_2,\, \psi_1 \vee \perp \Longrightarrow \psi_1}\, trcE}{\psi_1 \vee \perp \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1} \to D$$

está presente o outro tipo de axiomas do sistema $\mathcal{S}_p$: o sequente $\perp \Longrightarrow$. Como a cada uma das folhas desta árvore de dedução corresponde um axioma, esta árvore de dedução é também uma árvore de prova. ∎

As regras *enfE* e *trcE* referidas nos exemplos anteriores são usualmente representadas como segue
tendo os diferentes elementos o significado esperado.

Os axiomas do sistema $\mathcal{S}_p$ são os sequentes seguintes, usualmente designados Ax e $\perp E$, respectivamente.

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ enfE \qquad \frac{\Gamma,\, \varphi, \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\, \psi, \varphi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}\ trcE$$

$$\varphi \Longrightarrow \varphi \qquad \text{e} \qquad \perp \Longrightarrow$$

Axiomas do sistema $\mathcal{S}_p$

As demais regras lógicas do sistema são: regra $\wedge E1$ e regra $\wedge E2$ ("conjunção à esquerda"1 e 2), regra $\vee D1$ e regra $\vee D2$ ("disjunção à esquerda"1 e 2) e $\rightarrow D$ ("implicação à direita"). A representação gráfica usual de todas as regras lógicas de $\mathcal{S}_p$ é apresentada na sequência. Nestas, bem como em todas as outras regras de inferência deste sistema, é usual designar os sequentes representados acima da linha horizontal por premissas da regra e designar por conclusão da regra o sequente abaixo desta linha.

$$\frac{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ \wedge E1 \qquad \frac{\psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ \wedge E2$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \wedge \psi}\ \wedge D \qquad \frac{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad \psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ \vee E$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \vee \psi}\ \vee D1 \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \vee \psi}\ \vee D2$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \qquad \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta'}{\varphi \rightarrow \psi,\, \Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \Delta'}\ \rightarrow E \qquad \frac{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \psi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow D$$

Regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$: regras lógicas

As demais regras estruturais do sistema são: regra *enfD* ("enfraquecimento à direita), regra *cntE* ("contracção à esquerda), regra *cntD* ("contracção à direita) e regra *trcD* ("troca à direita). A representação gráfica usual de todas as regras lógicas e de todas as regras estruturais de $\mathcal{S}_p$ é apresentada na sequência.

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ enfE \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi}\ enfD$$

$$\frac{\varphi, \varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\ cntE \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi, \varphi}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi}\ cntD$$

$$\frac{\Gamma,\, \varphi, \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\, \psi, \varphi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}\ trcE \qquad\qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi, \psi,\, \Delta'}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \psi, \varphi,\, \Delta'}\ trcD$$

Regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$: regras estruturais

Por último existe ainda a regra *corte*.

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \qquad\qquad \varphi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \Delta'}\ corte$$

Regras de inferência do sistema $\mathcal{S}_p$: regra *corte*

A regra do corte é relevante, em particular, quando se pretende (re)utilzar lemas numa dedução. Por exemplo, se se pretende construir uma árvore de prova para o sequente $\Gamma \Longrightarrow \varphi$ e já se dispõe de uma árvore de prova para $\Gamma \Longrightarrow \psi$, bastará construir uma árvore de prova para $\psi \Longrightarrow \varphi$ e depois usar a regra *corte*.

Na construção de deduções em $\mathcal{S}_p$ como tem vindo a ser ilustrada, começa-se pelas folhas e vão-se aplicando as regras de inferência. É também possível fazer a construção em sentido inverso, ou seja, começando pela raiz da dedução. Esta forma de construir deduções é até a mais frequentemente utilizado para desenvolver algoritmos de demonstração automática, como se verá adiante. Recorde-se que este modo de proceder já foi referido no contexto do sistema $\mathcal{N}_p$, tendo sido designado por prova inversa.

Assim, para construir uma árvore de dedução a cuja raiz esteja associado o sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, pode também proceder-se como se segue:

(i) começa-se com uma árvore singular cuja raiz tem por etiqueta $\Gamma \Longrightarrow \Delta$;

(ii) em cada passo seguinte, para cada nó folha da árvore procura-se uma regra de inferência cuja conclusão corresponda à etiqueta da folha; se a regra for unária acrescenta-se um nó sucessor directo desse nó folha o qual terá por etiqueta a premissa da regra; se a regra for binária acrescentam-se dois nós sucessores directos desse nó folha e cada um terá por etiqueta uma das premissas da regra;

Neste caso é também usual representar-se a árvore com a raiz no topo, estando esta representação mais de acordo com o modo como a árvore é agora construída.

Exemplo 1.5.11 A dedução seguinte corresponde à dedução apresentada no Exemplo 1.5.10

$$
\dfrac{\psi_1 \vee \bot \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1}{\dfrac{\psi_2,\, \psi_1 \vee \bot \Longrightarrow \psi_1}{\dfrac{\psi_1 \vee \bot,\, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1}{\dfrac{\psi_1, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1}{\dfrac{\psi_2, \psi_1 \Longrightarrow \psi_1}{\psi_1 \Longrightarrow \psi_1}\,enfE}\,trcE \qquad \dfrac{\bot, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1}{\dfrac{\psi_2, \bot \Longrightarrow \psi_1}{\dfrac{\bot \Longrightarrow \psi_1}{\bot \Longrightarrow}\,enfD}\,enfE}\,trcE}\,\vee E}\,trcE}\,\to D
$$

mas agora representada com a raiz no topo. ∎

Apresenta-se agora com mais rigor as definições dos conceitos ilustrados atrás, bem como de outros com eles relacionados. Começa-se pela definição das regras de inferência e dos axiomas. Os axiomas são sequentes e as regras de inferência correspondem a tuplos de sequentes com duas ou três componentes.

Definição 1.5.12 SISTEMA $\mathcal{S}_p$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{S}_p$ é constituído pelos seguintes axiomas e regras de inferência.
Axiomas:

- $\varphi \Longrightarrow \varphi$ $\qquad Ax$
- $\perp \Longrightarrow$ $\qquad \perp E$

com $\varphi \in F_P$.

Regras de inferência:

- <u>REGRA *enfE*</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA *enfD*</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi\,)$
- <u>REGRA *cntE*</u>: $(\,\varphi, \varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA *cntD*</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi \;,\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi\,)$
- <u>REGRA *trcE*</u>: $(\,\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta \;,\; \Gamma, \psi, \varphi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA *trcD*</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Delta' \;,\; \Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \Delta'\,)$
- <u>REGRA *corte*</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \;,\; \varphi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta' \;,\; \Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \Delta'\,)$
- <u>REGRA $\wedge E1$</u>: $(\,\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \varphi \wedge \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA $\wedge E2$</u>: $(\,\psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \varphi \wedge \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA $\wedge D$</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \;,\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \;,\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi\,)$
- <u>REGRA $\vee E$</u>: $(\,\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta \;,\; \varphi \vee \psi, \Gamma \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA $\vee D1$</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \;,\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi\,)$
- <u>REGRA $\vee D2$</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \;,\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi\,)$

- <u>Regra $\rightarrow E$</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \;\;,\;\; \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta' \;\;,\;\; \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta, \Delta'\,)$
- <u>Regra $\rightarrow D$</u>: $(\,\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi \;\;,\;\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi\,)$

onde $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ representam sequências de fórmula em F_P e φ, ψ representam fórmulas em F_P. As regras definidas como pares são *regras unárias* e as outras são *regras binárias*. Em cada regra, o sequente correspondente à última componente de cada tuplo é a *conclusão* da regra e os outros sequentes são as *premissas* da regra. A fórmula explicitamente indicada na conclusão da regra é a *fórmula principal* da regra. As fórmulas explicitamente indicadas nas premissas são as *fórmulas secundárias*. As outras fórmulas das premissas são as *fórmulas extra*. ∎

Cada axioma corresponde a um conjunto de sequentes com as características indicadas. Cada um desses sequentes é uma instância do axioma. De modo análogo, cada regra de inferência corresponde a um conjunto de tuplos de sequentes, sendo cada um desses tuplos uma instância da regra.

Como é natural, não serão necessárias todas as regras acima referidas se certos conectivos forem apenas definidos como abreviatura. Se, por exemplo, os conectivos $\wedge$ e $\vee$ forem definidos como abreviatura, apenas são necessárias as regras $\rightarrow E$ e $\rightarrow D$. As outras regras aqui apresentadas surgirão depois como regras derivadas. Dado que anteriormente se consideraram primitivos os conectivos $\wedge$ e $\vee$, optou-se por também manter esta opção nesta secção.

Seguem-se as definições de árvore de dedução e de árvore de prova. Recordem-se as noções e notações relativas a árvores introduzidas em **??**.

Definição 1.5.13 Árvores de dedução em $\mathcal{S}_p$
O conjunto das árvores de dedução (*árvores de derivação, deduções ou derivações*) de $\mathcal{S}_p$ denota-se por $D_{\mathcal{S}_p}$ e define-se indutivamente como se segue:

- se d é uma Sqt_P-árvore singular então $d \in D_{\mathcal{S}_p}$;
- se $d_1 \in D_{\mathcal{S}_p}$ e a etiqueta da sua raiz é premissa de uma regra de inferência unária de $\mathcal{S}_p$ cuja conclusão é $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ então $d = d_1{}^\frown\, \Gamma \Longrightarrow \Delta \in D_{\mathcal{S}_p}$;
- se $d_1, d_2 \in D_{\mathcal{S}_p}$ e as etiquetas das suas raízes são as premissas de uma regra de inferência binária de $\mathcal{S}_p$ cuja conclusão é $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ então $d = \bigsqcup\{d_1, d_2\}^\frown\, \Gamma \Longrightarrow \Delta \in D_{\mathcal{S}_p}$.

Nos dois últimos casos, diz-se que d foi obtida a partir de d_1 (ou de d_1 e d_2) por aplicação da regra em questão. O sequente que constitui a etiqueta da raiz de uma árvore de dedução $d \in D_{\mathcal{S}_p}$ é a *conclusão* da árvore de dedução. Diz-se que $d \in D_{\mathcal{S}_p}$ é uma árvore de dedução (de derivação, dedução ou derivação) para o sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ se este sequente é a conclusão de d. ∎

Definição 1.5.14 Árvores de prova de $\mathcal{S}_p$
O conjunto das *árvores de prova de* $\mathcal{S}_p$ denota-se por $D^{\vdash}_{\mathcal{S}_p}$ e define-se indutivamente à semelhança do conjunto $D_{\mathcal{S}_p}$ mas na primeira condição exige-se que a etiqueta do nó da árvore singular seja um axioma de $\mathcal{S}_p$. Diz-se que um sequente *tem uma prova em* $\mathcal{S}_p$ se existe uma árvore de prova $d \in D^{\vdash}_{\mathcal{S}_p}$ cuja conclusão é esse sequente. ∎

Segue-se a definição de teorema de $\mathcal{S}_p$.

Definição 1.5.15 Teorema de $\mathcal{S}_p$
O sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ é *teorema* de $\mathcal{S}_p$, o que se denota por $\vdash_{\mathcal{S}_p} \Gamma \Longrightarrow \Delta$, se $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ tem uma prova em $\mathcal{S}_p$. ∎

Exemplo 1.5.16 Tendo em conta as deduções apresentadas no Exemplo 1.5.9 e no Exemplo 1.5.10, os sequentes

$$\Longrightarrow \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$$

e

$$\psi_1 \vee \bot \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1$$

são teoremas de $\mathcal{S}_p$. ∎

Podem ser derivadas no âmbito de $\mathcal{S}_p$ regras de inferência para os conectivos $\neg$ e $\leftrightarrow$. Apresentam-se seguidamente a regras relativas ao conectivo $\neg$: a regra $\neg E$ e a regra $\neg D$, usando a representação gráfica usual.

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}\,\neg E \qquad\qquad \dfrac{\varphi, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg\varphi}\,\neg D$$

Deixa-se como exercício as regras relativas a $\leftrightarrow$.

A construção de deduções em $\mathcal{S}_p$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este ambiente de desenvolvimento de provas é apresentado no capítulo **??**, que o leitor interessado poderá consultar desde já.

1.5.3 Sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$

Nesta secção apresenta-se o sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$, o qual é uma variante do sistema $\mathcal{S}_p$. O sistema $\mathcal{S}'_p$ permite em muitas situações a construção de deduções mais pequenas do que as de $\mathcal{S}_p$, isto é, com menos aplicações de regras. Os axiomas Ax e $\perp E$ são semelhantes aos de $\mathcal{S}_p$, mas não se exige que exista apenas uma única fórmula no antecedente e, no caso de Ax, no consequente. No caso $\perp E$ basta que $\perp$ ocorra no antecedente e, no caso de Ax, basta que exista uma fórmula que ocorra simultaneamente no antecedente e no consequente. Não estão presentes as regras de enfraquecimento. A fórmula a que se aplica regra pode estar em qualquer posição das sequências, pelo que as regras de troca também não são utilizadas. Neste sistema todas as fórmulas que estão presentes numa dedução são subfórmulas das fórmulas que ocorrem na conclusão. Não está assim presente a regra *corte*. Quando existe uma conjunção no antecedente, ao construir uma dedução da raiz para as folhas, não tem de se escolher qual das fórmulas da conjunção será necessária para se vir a obter uma eventual árvore de prova, isto é, não é necessário escolher entre a regra $\wedge E1$ e a regra $\wedge E2$, pois existe apenas uma regra relacionada com a ocorrência de uma conjunção no antecedente. Considerações semelhantes podem também fazer-se quando existe uma disjunção no consequente. Não está também presente a regra da contracção.

O sistema $\mathcal{S}'_p$ facilita a concepção de algoritmos de demonstração automática para a lógica proposicional. Dado um qualquer sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, constrói-se uma dedução para $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, da raiz para as folhas, aplicando sucessivamente regras de $\mathcal{S}'_p$ relacionadas com as fórmulas não atómicas que estão presentes nos sequentes associados às folhas das deduções que vão sendo obtidas. Cada nova fórmula que é introduzida por aplicação de uma regra (fórmula secundária) é mais simples do que a fórmula principal da regra, pelo que se garante que, num dado momento, apenas existem fórmulas atómicas nas folhas da dedução. Como se verá adiante, se esta dedução é uma árvore de prova, então $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ é sequente válido. Caso contrário, é possível construir um valoração que falsifica $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ a partir do sequente associado a qualquer uma das folhas que não é axioma.

Apresentam-se na sequência as regras do sistema $\mathcal{S}'_p$, representadas graficamente da forma usual.

$$\frac{\Gamma,\, \varphi, \psi\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\, \varphi \wedge \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}\ \wedge E \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi, \psi,\, \Delta'}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \vee \psi,\, \Delta'}\ \vee D$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi,\, \Delta' \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \psi,\, \Delta'}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \wedge \psi,\, \Delta'}\ \wedge D \qquad \frac{\Gamma,\, \varphi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta \qquad \Gamma,\, \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\, \varphi \vee \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}\ \vee E$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \varphi,\, \Delta \qquad \psi,\, \Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta}\ \to E \qquad \frac{\varphi,\, \Gamma \Longrightarrow \psi,\, \Delta, \Delta'}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\, \varphi \to \psi,\, \Delta'}\ \to D$$

Regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$

Seguem-se as definições mais rigorosas dos axiomas e das regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$, as definições de árvores de dedução e de prova e a definição de teorema de $\mathcal{S}'_p$. Referem-se ainda as noções de árvore esgotada e de contra-exemplo. Observe-se que estes dois últimos conceitos não estavam presentes no sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$.

Definição 1.5.17 SISTEMA $\mathcal{S}'_p$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{S}'_p$ é constituído por
Axiomas:

- $\Gamma,\, \varphi,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta,\, \varphi,\, \Delta'$ $\qquad Ax$
- $\Gamma,\, \perp,\, \Gamma' \Longrightarrow \Delta$ $\qquad \perp E$

com $\varphi \in F_P$.

Regras de inferência:

- <u>REGRA $\wedge E$</u>: $(\,\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta \;\;,\;\; \Gamma, \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA $\wedge D$</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \Delta' \;\;,\;\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \Delta' \;\;,\;\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \Delta'\,)$
- <u>REGRA $\vee E$</u>: $(\,\Gamma, \varphi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta \;\;,\;\; \Gamma, \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta \;\;,\;\; \Gamma, \varphi \vee \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA $\vee D$</u>: $(\,\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Delta' \;\;,\;\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi, \Delta'\,)$
- <u>REGRA $\rightarrow E$</u>: $(\,\Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \varphi, \Delta \;\;,\;\; \psi, \Gamma, \Gamma' \Longrightarrow \Delta \;\;,\;\; \Gamma, \varphi \rightarrow \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta\,)$
- <u>REGRA $\rightarrow D$</u>: $(\,\varphi, \Gamma \Longrightarrow \psi, \Delta, \Delta' \;\;,\;\; \Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi, \Delta'\,)$

onde $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ representam sequências de fórmula em F_P e φ, ψ representam fórmulas em F_P. As noções de *regra unária* e *regra binárias*, de *premissas* e *conclusão* de regra bem como a de *fórmula principal*, *fórmulas secundárias* e *fórmulas extra* são como em $\mathcal{S}_p$. ∎

Definição 1.5.18 ÁRVORES DE DEDUÇÃO, ÁRVORES DE PROVA E TEOREMA DE $\mathcal{S}'_p$
O conjunto das *árvores de dedução* (*árvores de derivação, deduções ou derivações*) de $\mathcal{S}'_p$ denota-se por $D_{\mathcal{S}'_p}$ e define-se como no caso de $\mathcal{S}_p$. O mesmo se passa com o conjunto das *árvores de prova de* $\mathcal{S}'_p$, que se denota por $D^{\vdash}_{\mathcal{S}'_p}$. A noção de *teorema* de $\mathcal{S}'_p$ define-se como no caso de $\mathcal{S}_p$. ∎

Definição 1.5.19 ÁRVORES ESGOTADAS E ÁRVORES DE CONTRA-EXEMPLO
Sendo $d \in D_{\mathcal{S}'_p}$

- d é uma *árvore esgotada* se a etiqueta de cada folha de d é um axioma ou é um sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ tal que as fórmulas presentes em Γ e Δ são símbolos proposicionais ou $\perp$;
- d é uma *árvore de contra-exemplo* se existe uma folha de d cuja etiqueta é um sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ que não é um axioma e tal que as fórmulas presentes em Γ e Δ símbolos proposicionais ou $\perp$. ∎

A razão da designação "árvore de contra-exemplo"advém do facto de, como se verá adiante, ser possível a partir deste tipo de árvore encontrar uma valoração que falsifica a conclusão da árvore (ver Proposição 1.5.28). Uma árvore esgotada é uma árvore de prova ou é uma árvore de contra-exemplo.

Apresentam-se de seguida alguns exemplos. Tal como em $\mathcal{S}_p$ pode escolher-se entre representar e/ou construir as deduções começando pelas folhas ou pela raiz.

Exemplo 1.5.20 As árvores de dedução seguintes são árvores de dedução em $\mathcal{S}'_p$ para os sequentes para os quais se apresentaram anteriormente deduções em $\mathcal{S}_p$. Optou-se por representar as deduções com a raiz acima das folhas.

$$\begin{array}{c}
\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_4 \wedge (\psi_1 \to \psi_2) \\
\hline
\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_4 \qquad
\begin{array}{c}
\psi_4,\, \psi_3 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2 \\
\hline
\begin{array}{c}
\psi_4, \psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2 \\
\hline
\psi_1, \psi_4, \psi_3 \Longrightarrow \psi_2
\end{array}\ {\to} D
\qquad \psi_4, \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2
\end{array}\ \vee E
\end{array}\ \wedge D$$

Esta dedução é uma árvore de contra-exemplo, mas não é uma árvore esgotada. Para se obter uma árvore esgotada bastaria usar a rega $\to D$ no folha $\psi_4, \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2$.

A seguinte dedução é uma árvore de prova e, consequentemente, árvore esgotada. A sua conclusão, o sequente $\Longrightarrow \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$ é um teorema de $\mathcal{S}'_p$.

$$\begin{array}{c}
\Longrightarrow \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1) \\
\hline
\psi_1 \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1 \\
\hline
\psi_2,\, \psi_1 \Longrightarrow \psi_1
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \to D \\ \\ \to D \\ \\ \end{array}$$

Esta última dedução é de novo uma árvore de prova e a sua conclusão, o sequente $\psi_1 \vee \bot \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1$, é um teorema de $\mathcal{S}'_p$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\psi_1 \vee \bot \Longrightarrow \psi_2 \to \psi_1 \\
\hline
\psi_2,\, \psi_1 \vee \bot \Longrightarrow \psi_1
\end{array}\ {\to} D \\
\hline
\psi_2, \psi_1 \Longrightarrow \psi_1 \qquad\qquad \psi_2, \bot \Longrightarrow \psi_1
\end{array}\ \vee E$$

■

Exemplo 1.5.21 Apresenta-se neste exemplo mais uma dedução d em $D_{\mathcal{S}'_p}$, de novo representada com a raiz no topo.

$$\dfrac{\Longrightarrow (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))}{\dfrac{\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3) \Longrightarrow (\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3)}{\dfrac{\psi_1 \to \psi_2,\, \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3) \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_3}{\dfrac{\psi_1,\, \psi_1 \to \psi_2,\, \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3) \Longrightarrow \psi_3}{\dfrac{\psi_2,\, \psi_1,\, \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3) \Longrightarrow \psi_3}{\psi_2,\, \psi_1 \Longrightarrow \psi_1,\, \psi_3 \qquad \dfrac{\psi_2 \to \psi_3,\, \psi_2,\, \psi_1 \Longrightarrow \psi_3}{\psi_2, \psi_1 \Longrightarrow \psi_2, \psi_3 \qquad \psi_3, \psi_2, \psi_1 \Longrightarrow \psi_3}\to E}\to E \qquad \psi_1,\, \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3) \Longrightarrow \psi_1, \psi_3}\to E}\to D}\to D}\to D$$

A conclusão de d é $\Longrightarrow (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))$. Esta dedução é uma árvore de prova e portanto este sequente é um teorema de $\mathcal{S}'_p$. ∎

Em $\mathcal{S}'_p$ podem ser derivadas regras de inferência relativas ao conectivo $\neg$ semelhantes à apresentadas para o sistema $\mathcal{S}_p$. As regras relativas a $\leftrightarrow$ serão também semelhantes.

A construção de deduções em $\mathcal{S}'_p$ também pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*.

1.5.4 Correcção e completude de $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}'_p$

Nesta secção apresentam-se os resultados de correcção e completude dos sistemas $\mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}'_p$. Neste sistema os resultados de correcção e completude vão envolver apenas as noções de teorema do sistema e sequente válido.

Por serem mais fáceis de estabelecer, começa-se por apresentar os resultados de correcção e completude do sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$, passando depois aos de $\mathcal{S}_p$.

1.5.4.1 Correcção e completude de $\mathcal{S}'_p$

O resultado de correcção de $\mathcal{S}'_p$ estabelece que todo o teorema de $\mathcal{S}'_p$ é um sequente válido. Este resultado (Proposição 1.5.24) decorre dos seguintes factos:

(i) todos axiomas de $\mathcal{S}'_p$ são válidos (Proposição 1.5.22)

(ii) todas as regras de inferência de $\mathcal{S}'_p$ são correctas, ou seja, se as premissas são sequentes válidos então a conclusão é sequente válido (Proposição 1.5.23).

Dado que um teorema de $\mathcal{S}'_p$ é um sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ para o qual existe uma árvore de prova, é facil concluir usando (i) e (ii) que $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ é um sequente válido, pois todas as folhas dessa árvore são axiomas (portanto sequentes válidos) e as diferentes regras de inferência usadas na sua construção preservam a validade de sequentes.

Proposição 1.5.22
Os axiomas de $\mathcal{S}'_p$ são sequentes válidos.

Prova: Existem dois casos a considerar.

Caso Ax: neste caso o antecedente e o consequente têm uma fórmula em comum e portanto, tendo em conta a Definição 1.5.4, trivialmente se conclui que qualquer valoração satisfaz o sequente.

Caso $\perp E$: neste caso o antecedente contém $\perp$ logo trivialmente se conclui que qualquer valoração não satisfaz o antecedente do axioma e portanto, recordando novamente a Definição 1.5.4, tem-se que qualquer valoração satisfaz o sequente. ∎

Proposição 1.5.23
As regras de inferência de $\mathcal{S}'_p$ são correctas, ou seja, a conclusão de uma regra de inferência é sequente válido se e só se todas as premissas dessa regra são sequentes válidos (ou, de modo equivalente, a conclusão é falsificável se e só se alguma das premissas é falsificável).

Prova: Far-se-á apenas a prova para duas das regras deixando as outras como exercício. Para facilitar a exposição, em expressões seguintes que envolvam a operação de união de conjuntos e a sequência de fórmulas Γ (Γ', Δ, Δ'), assume-se que (Γ', Δ, Δ') representa o conjunto de todas as fórmulas presentes na sequência.

Regra $\wedge E$: Se a valoração V falsifica $\Gamma, \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta$ então, tendo em conta a Definição 1.5.4, V satisfaz todas as fórmulas em $\{\varphi \wedge \psi\} \cup \Gamma \cup \Gamma'$ e não satisfaz nenhuma das fórmulas em Δ. Assim sendo, V satisfaz φ e ψ e portanto V também falsifica a conclusão da regra $\Gamma, \varphi, \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta$.

Reciprocamente, se a valoração V falsifica $\Gamma, \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta$ então V satisfaz todas as fórmulas em $\{\varphi, \psi\} \cup \Gamma \cup \Gamma'$ e não satisfaz nenhuma das fórmulas em Δ. Assim sendo, V satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e portanto V também falsifica a premissa da regra $\Gamma, \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Longrightarrow \Delta$.

Regra $\wedge D$: Se a valoração V falsifica $\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \Delta'$ então, tendo em conta a Definição 1.5.4, V satisfaz todas as fórmulas em Γ e não satisfaz nenhuma das fórmulas em $\{\varphi \wedge \psi\} \cup \Delta \cup \Delta'$. Então V não satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e portanto V não satisfaz φ ou V não satisfaz ψ. No primeiro caso V falsifica a premissa $\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \Delta'$ e no segundo caso a premissa $\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi, \Delta'$.

Reciprocamente, se a valoração V falsifica, por exemplo, $\Gamma \Longrightarrow \Delta, \varphi, \Delta'$ então V satisfaz todas as fórmulas em Γ e não satisfaz nenhuma das fórmulas em $\{\varphi\} \cup \Delta \cup \Delta'$. Como V não satisfaz φ então V não satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e portanto V falsifica a conclusão da regra. O outro caso é semelhante. ■

Em rigor, para mostrar a correcção do sistema não é necessário a prova da equivalência bastando a prova de que se as premissas são sequentes válidos então a conclusão é sequente válido (ou, de modo equivalente, se a conclusão é falsificável então alguma das premissas é falsificável). No entanto o resultado recíproco vai ser útil para a prova da completude pelo que se apresentou desde já.

Proposição 1.5.24
O sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$ é correcto:

$$\text{se } \vdash_{\mathcal{S}'_p} \Gamma \Longrightarrow \Delta \text{ então } \models \Gamma \Longrightarrow \Delta$$

isto é, se um sequente é teorema de $\mathcal{S}'_p$ então o sequente é válido.

Prova: Se um sequente é teorema de $\mathcal{S}'_p$ então existe uma prova para esse sequente, isto é, existe uma árvore de prova de $\mathcal{S}'_p$ cuja conclusão é esse sequente. Mostra-se então que a conclusão de qualquer árvore de prova é um sequente válido. A prova utiliza o princípio de indução aplicado ao conjunto indutivo $D^{\vdash}_{\mathcal{S}'_p}$. ■

No corolário seguinte, e em outras situações semelhantes, para simplificar a exposição usa-se a mesma notação para representar um conjunto de fórmulas e uma sequência constituída pelos elementos desse conjunto.

Corolário 1.5.25
Sejam $\varphi \in F_P$ e $\Phi \subseteq F_P$ finito.

1. Se o sequente $\Longrightarrow \varphi$ é teorema de $\mathcal{S}'_p$ então $\models \varphi$.

2. Se o sequente $\Phi \Longrightarrow \varphi$ é teorema de $\mathcal{S}'_p$ então $\Phi \models \varphi$. ■

Apresenta-se agora o resultado de completude de $\mathcal{S}'_p$, ou seja, o resultado que estabelece que se um sequente é válido então esse sequente é um teorema de $\mathcal{S}'_p$. Merece referência o facto de os resultados que conduzem à prova da completude deste sistema serem bastante diferentes daqueles que se utilizam no caso da prova de completude do sistema de dedução natural $\mathcal{N}_p$. No caso de $\mathcal{S}'_p$ a completude do sistema dedutivo (Proposição 1.5.29) resulta essencialmente dos seguintes factos:

(i) é sempre possível construir uma dedução esgotada para um qualquer sequente (Proposição 1.5.26);

(ii) se o sequente correspondente a uma das folhas de uma dedução é falsificável então a respectiva conclusão também é falsificável, pelo que a conclusão de uma árvore de contra-exemplo é sempre falsificável (Proposições 1.5.27 e 1.5.28).

Dado um sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ válido e considerando uma árvore esgotada para $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ esta só pode ser uma árvore de prova ou uma árvore de contra-exemplo. Neste último caso, por (ii), o sequente seria falsificável o que contradiz o facto de ser válido, pelo que a árvore é necessariamente uma árvore de prova e portanto $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ é teorema de $\mathcal{S}'_p$.

Proposição 1.5.26
Dado um sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ é sempre possível construir uma árvore esgotada de $\mathcal{S}'_p$ cuja conclusão seja $\Gamma \Longrightarrow \Delta$.

Prova (esboço): Para obter uma árvore esgotada cuja raiz seja etiquetada com um certo sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ constrói-se uma dedução começando pela raiz, como já foi explicado atrás, mas só se procuram regras de inferência cuja conclusão seja a etiqueta de uma folha caso esta não seja um axioma. A construção termina quando a etiqueta de cada folha é axioma ou não é conclusão de nenhuma regra de inferência (note-se que um sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ não é conclusão de nenhuma regra se e só se as fórmulas em Γ e Δ são todas elementos de $P \cup \{\perp\}$).

Seja a complexidade de um sequente a soma das complexidades das fórmulas na concatenação do antecedente com o consequente. O procedimento acima esboçado termina sempre. Basta ter em conta que (a) a complexidade de um sequente é um valor inteiro positivo ou nulo e (b) a complexidade de uma premissa de uma regra é sempre estritamente menor que a complexidade da conclusão da regra. Assim, a aplicação do segundo passo conduz a sequentes cuja complexidade é estritamente menor que a do sequente etiqueta da folha a que é aplicada a regra.

Quando o procedimento termina ter-se-á que as folhas da árvore construída têm por etiqueta axiomas ou sequentes $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ tal que Γ e Δ incluem apenas símbolos proposicionais ou $\perp$, ou seja, a árvore construída é uma árvore esgotada. ∎

Proposição 1.5.27
Para cada $d \in D_{\mathcal{S}'_p}$, se o sequente etiqueta de uma das folhas de d é falsificável então a conclusão de d é falsificável.

Prova: A prova utiliza o princípio de indução aplicado ao conjunto indutivo $D_{\mathcal{S}'_p}$ e recorre à Proposição 1.5.23. ∎

Proposição 1.5.28
Se $d \in D_{\mathcal{S}'_p}$ é uma árvore de contra-exemplo então a conclusão de d é um sequente falsificável.

Prova: Se d é uma árvore de contra-exemplo então existe uma folha cuja etiqueta $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ não é axioma e as fórmulas em Γ e Δ pertencem a $P \cup \{\perp\}$. O caso em que Γ e Δ são ambas vazias é trivial. Caso contrário, a valoração V que tal que $V(p) = 1$ para cada p em Γ e $V(p) = 0$ para cada p em Δ falsifica o sequente. Pela Proposição 1.5.27, a conclusão de d é falsificável. ∎

Proposição 1.5.29
O sistema $\mathcal{S}'_p$ é completo:

$$\text{se} \models \Gamma \Longrightarrow \Delta \text{ então } \vdash_{\mathcal{S}'_p} \Gamma \Longrightarrow \Delta$$

isto é, se um sequente é válido então é teorema de $\mathcal{S}'_p$.

Prova : Seja $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ um sequente em Sqt_P válido. Pela Proposição 1.5.26, é possível construir uma árvore esgotada cuja conclusão é $\Gamma \Longrightarrow \Delta$. Uma árvore esgotada ou é uma árvore de prova ou uma árvore de contra-exemplo. Se a árvore obtida fosse uma árvore de contra-exemplo, pela Proposição 1.5.28, $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ seria falsificável o que contraria a hipótese de ser válido. Deste modo a árvore que se obtém é necessariamente uma árvore de prova e portanto, o sequente é teorema de $\mathcal{S}'_p$. ∎

Corolário 1.5.30
Sejam $\varphi \in F_P$ e $\Phi \subseteq F_P$ finito.

1. Se $\models \varphi$ então o sequente $\Longrightarrow \varphi$ é teorema de $\mathcal{S}_p'$.
2. Se $\Phi \models \varphi$ então o sequente $\Phi \Longrightarrow \varphi$ é teorema de $\mathcal{S}_p'$. ∎

As propriedades do sistema $\mathcal{S}_p'$ referidas ao longo desta secção permitem concluir que a este sistema está associado um algoritmo de decisão para a lógica proposicional, mais precisamente, um algoritmo de decisão para o problema de saber se uma fórmula proposicional é ou não válida. Sendo $\varphi \in F_P$, da Proposição 1.5.26 e respectiva prova, decorre que dado o sequente $\Longrightarrow \varphi$ é sempre possível construir em tempo finito uma árvore esgotada de $\mathcal{S}_p'$ cuja conclusão seja este sequente. Como uma árvore esgotada ou é uma árvore de prova ou uma árvore de contra-exemplo, as Proposições 1.5.24 e 1.5.28 permitem concluir da validade ou não validade de $\Longrightarrow \varphi$ e consequentemente de φ. Raciocinando de modo análogo, observações semelhantes podem ser feitas relativamente à questão da consequência semântica.

1.5.4.2 Correcção e completude de $\mathcal{S}_p$

Apresentam-se nesta secção os resultados de correcção e completude do sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$.

A prova de correcção é semelhante à efectuada no caso do sistema $\mathcal{S}_p'$. No entanto, no caso de $\mathcal{S}_p$, há que ter em conta que no âmbito da correcção das regras de inferência a equivalência entre a validade da conclusão e a validade das premissas não se verifica. Tem-se apenas que a validade das premissas implica a validade da conclusão (o que, como referido, é o que basta para provar a correcção do sistema dedutivo). O facto desta equivalência não existir é um dos motivos que leva a que a prova de completude não possa ser efectuada como em $\mathcal{S}_p'$. Embora a prova de completude de $\mathcal{S}_p$ possa realizada sem recurso às propriedades de outros sistemas dedutivos (para detalhes, ver, por exemplo, [9]), opta-se aqui por fazer uma prova mais simples, que recorre aos resultados já provados para $\mathcal{S}_p'$.

Começa-se pelo resultado de correcção.

Proposição 1.5.31
Os axiomas de $\mathcal{S}_p$ são sequentes válidos e as regras de inferência de $\mathcal{S}_p$ são correctas, ou seja, se todas as premissas de uma regra são sequentes válidos então a conclusão dessa regra de inferência é sequente válido (ou, de modo equivalente, a conclusão é falsificável então alguma das premissas é falsificável).

Prova: As provas são semelhantes às apresentadas no caso de $\mathcal{S}'_p$ e deixam-se como exercício. ■

Note-se que nem sempre a validade da conclusão implica a validade das premissas. Considerando, por exemplo, a instância $(\,\psi_1 \Longrightarrow \psi_3 \to \psi_2 \;\; , \;\; \psi_2, \psi_1 \Longrightarrow \psi_3 \to \psi_2\,)$ da regra *enf E*, é fácil perceber que a conclusão é um sequente válido mas a premissa não é.

Proposição 1.5.32
O sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$ é correcto:

$$\text{se} \vdash_{\mathcal{S}_p} \Gamma \Longrightarrow \Delta \text{ então} \models \Gamma \Longrightarrow \Delta$$

isto é, se um sequente é teorema de $\mathcal{S}_p$ então o sequente é válido.

Prova: Semelhante à apresentada para $\mathcal{S}'_p$. ■

Como é natural a relação entre teoremas de $\mathcal{S}'_p$ e validade de fórmulas e consequência semântica apresentada no Corolário 1.5.25 verifica-se também no caso do sistema $\mathcal{S}_p$.

Trata-se agora a questão da completude do sistema $\mathcal{S}_p$. Como foi referido, a prova aqui apresentada é uma prova relativamente simples que vai usar a completude do sistema $\mathcal{S}'_p$.

Proposição 1.5.33
Se existe uma árvore de prova em $\mathcal{S}'_p$ para o sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ então existe uma árvore de prova em $\mathcal{S}_p$ para o sequente $\Gamma \Longrightarrow \Delta$.

Prova (esboço): Para construir uma árvore de prova em $\mathcal{S}_p$ a partir de uma árvore de prova em árvore de prova em $\mathcal{S}'_p$ há que ter em conta os seguintes pontos: (i) as fórmulas principais e secundárias das regras de inferência de $\mathcal{S}_p$ encontram-se na maior parte dos casos no início da sequência antecedente ou no fim da sequência consequente, mas mas no caso de $\mathcal{S}'_p$, em geral, elas podem estar numa qualquer posição; (ii) as regras relacionadas com a conjunção à esquerda e com a disjunção à direita são diferentes nos dois sistemas; (iii) os axiomas dos dois sistemas são diferentes.

Relativamente à posição das fórmulas principais e secundárias das regras, a utilização das regras *trcE* e *trcD* permite colocar tais fórmulas nas posições correctas.

Considere-se por exemplo o seguinte fragmento de uma árvore de prova de $\mathcal{S}'_p$ (representada com a raiz no topo)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi_1 \to \psi_2, \Delta'\end{array}}{\begin{array}{c}\psi_1, \Gamma \Longrightarrow \psi_2, \Delta, \Delta'\\ \vdots\end{array}} \to D$$

em que Δ' não é a sequência vazia. Este fragmento pode ser substituído pelo seguinte

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi_1 \to \psi_2, \Delta'\\ \hline \vdots \\ \hline \Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_1 \to \psi_2 \\ \hline \psi_1, \Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_2, \\ \hline \vdots \\ \hline \psi_1, \Gamma \Longrightarrow \psi_2, \Delta, \Delta' \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ trcD \\ \\ trcD \\ \\ \to D \\ \\ trcD \\ \\ trcD \end{array}$$

no qual só estão presentes regras de $\mathcal{S}_p$.

Relativamente à diferença entre as regras relativas à conjunção à esquerda e à disjunção à direita, note-se que o seguinte fragmento de uma árvore de prova de $\mathcal{S}'_p$ (representada com a raiz no topo)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi_1 \vee \psi_2, \Delta'\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi_1, \psi_2, \Delta'\\ \vdots\end{array}} \vee D$$

pode ser substituído pelo seguinte

$$
\begin{array}{cl}
\vdots & \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi_1 \vee \psi_2, \Delta' & \\
\cline{1-1}
 & trcD \\
\vdots & \\
\cline{1-1}
 & trcD \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_1 \vee \psi_2 & \\
\cline{1-1}
 & cntD \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \vee \psi_2 & \\
\cline{1-1}
 & \vee D1 \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 & \\
\cline{1-1}
 & trcD \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_1, \psi_1 \vee \psi_2, & \\
\cline{1-1}
 & \vee D2 \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \Delta', \psi_1, \psi_2 & \\
\cline{1-1}
 & trcD \\
\vdots & \\
\cline{1-1}
 & trcD \\
\Gamma \Longrightarrow \Delta, \psi_1, \psi_2, \Delta' & \\
\vdots &
\end{array}
$$

no qual só estão presentes regras de $\mathcal{S}_p$. Raciocínio análogo pode ser feito relativamente a $\wedge E$.

Relativamente aos axiomas, suponha-se que a uma árvore de prova de $\mathcal{S}'_p$ já haviam sido realizadas todas as modificações referidas acima, e que, na árvore obtida, existem folhas etiquetadas por axiomas $\varphi_1, \ldots, \varphi, \ldots, \varphi_n \Longrightarrow \psi_1, \ldots, \varphi, \ldots, \psi_m$ ou $\varphi_1, \ldots, \perp, \ldots, \varphi_n \Longrightarrow \psi_1, \ldots, \psi_m$ de $\mathcal{S}'_p$ que não são axioma de $\mathcal{S}'_p$. Usando as regras *enf E* e *enf D*, juntamente com as regras *trcE* e *trcD*, é fácil prolongar essa árvore (fazendo a construção da raiz para as folhas) por forma a obter uma árvore de prova em $\mathcal{S}_p$ na qual vão aparecer agora os axiomas $\varphi \Longrightarrow \varphi$ ou $\perp \Longrightarrow$. ∎

Proposição 1.5.34
O sistema dedutivo $\mathcal{S}_p$ é completo:

$$\text{se} \models \Gamma \Longrightarrow \Delta \text{ então} \vdash_{\mathcal{S}_p} \Gamma \Longrightarrow \Delta$$

isto é, se um sequente é válido então é teorema de $\mathcal{S}_p$.

Prova: Se $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ é sequente válido então, pela completude de $\mathcal{S}'_p$ existe uma árvore de prova de $\mathcal{S}'_p$ para $\Gamma \Longrightarrow \Delta$. Pela Proposição 1.5.33, existe também uma árvore de prova para $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ em $\mathcal{S}_p$. ∎

1.5.5 Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 1.5.35 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_6 designam fórmulas arbitrárias de F_P. Mostre que os sequentes seguintes são teoremas de $\mathcal{S}_p$:

1. $\Longrightarrow \neg(\psi_1 \wedge (\neg\psi_1))$
2. $\Longrightarrow \psi_1 \vee (\neg\psi_1)$
3. $\neg\psi_1 \Longrightarrow \psi_1 \to \psi_2, \psi_1$
4. $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2), \psi_1 \Longrightarrow \neg\psi_2$
5. $\neg(\psi_1 \vee \psi_2) \Longrightarrow \neg\psi_1$
6. $\psi_2 \to \psi_3 \Longrightarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \to \psi_3$
7. $\psi_1 \to \psi_2 \Longrightarrow \psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)$
8. $\Longrightarrow ((\psi_1 \to \psi_3) \wedge (\psi_2 \to \psi_3)) \to (\psi_1 \vee \psi_2) \to \psi_3$
9. $\Longrightarrow ((\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1) \to \psi_1$
10. $\Longrightarrow \psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3) \to (\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)$
11. $\Longrightarrow \psi_1 \vee (\psi_2 \wedge \psi_3) \to (\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_1 \vee \psi_3)$
12. $\Longrightarrow (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1))$
13. $\psi_1 \to \psi_2, (\neg\psi_1) \to \psi_2 \Longrightarrow \psi_2, \psi_3$
14. $\Longrightarrow (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_1) \vee \psi_2)$
15. $\Longrightarrow (\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_2))$

16. $\Longrightarrow (\neg(\psi_1 \vee \psi_2)) \rightarrow ((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2))$

17. $(\psi_3 \wedge \psi_4) \rightarrow \psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_3 \Longrightarrow \psi_4 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1), \psi_3$

18. $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_3,\ \ \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_1)),\ \ \psi_5 \wedge (\neg\psi_4),\ \ \psi_5 \rightarrow \psi_2 \Longrightarrow \psi_3$

19. $(\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2,\ \psi_1 \rightarrow (\neg\psi_5),\ \psi_3 \rightarrow (\psi_4 \vee \psi_5),\ \psi_4 \rightarrow (\neg\psi_3) \Longrightarrow \psi_3 \rightarrow \psi_2$

20. $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3,\ \psi_4 \wedge (\neg\psi_5),\ (\neg\psi_5) \wedge ((\neg(\psi_5 \vee \psi_1)) \rightarrow \psi_6),\ \psi_2 \wedge (\neg\psi_3) \Longrightarrow \psi_6$ ■

Exercício 1.5.36 Repita o Exercício 1.5.35 mas agora relativamente a $\mathcal{S}'_p$. ■

Exercício 1.5.37 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios apresentados no Exercício 1.5.35 e usando agora a ferramenta *Isabelle*. ■

Exercício 1.5.38 Mostre que os sequentes seguintes não são teoremas do sistema dedutivo $\mathcal{S}'_p$.

1. $\psi_1 \rightarrow \psi_2, \psi_3 \rightarrow \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \vee \psi_3$

2. $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3 \Longrightarrow \psi_2 \rightarrow \psi_3$

3. $\psi_1 \rightarrow ((\neg\psi_2) \vee \psi_3), (\neg\psi_2) \rightarrow (\neg\psi_1) \Longrightarrow \psi_3$ ■

Exercício 1.5.39 Recorrendo às propriedades do sistema $\mathcal{S}'_p$, verifique se são válidos os sequentes apresentados no Exercício 1.5.35 e ainda os sequentes

1. $\psi_1 \rightarrow \psi_2, \psi_2 \Longrightarrow \psi_1$

2. $\psi_1 \rightarrow \psi_2, \psi_3 \rightarrow \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4 \Longrightarrow \psi_1 \vee \psi_3$

3. $\psi_1, \psi_2 \rightarrow \psi_3, \neg(\psi_1 \wedge \psi_3) \Longrightarrow \neg\psi_2$

4. $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3 \Longrightarrow \psi_2 \rightarrow \psi_3$

5. $\psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \vee \psi_3 \Longrightarrow \psi_2 \vee \psi_3$

6. $\psi_2 \rightarrow \psi_3 \Longrightarrow (\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow \psi_3$

7. $\psi_1 \rightarrow ((\neg\psi_2) \vee \psi_3), (\neg\psi_2) \rightarrow (\neg\psi_1) \Longrightarrow \psi_3$

8. $\psi_3 \to \psi_4, (\neg\psi_3) \to (\neg\psi_1), (\neg\psi_4) \to (\neg\psi_2) \Longrightarrow (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)$

Nos casos em que os sequentes não são válidos, apresente uma valoração que os falsifique. ∎

Exercício 1.5.40 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 designam fórmulas arbitrárias de F_P. Recorrendo às propriedades do sistema $\mathcal{S}'_p$ verifique se:

1. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1) \to \psi_1$
2. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_3)) \to (\psi_1 \to \psi_3)$
3. $\models (\psi_1 \to (\neg\psi_1)) \to \psi_2$
4. $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_2\} \models \psi_1$
5. $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_3 \to \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4\} \models \psi_1 \vee \psi_3$
6. $\{\psi_1, \psi_2 \to \psi_3, \neg(\psi_1 \wedge \psi_3)\} \models \neg\psi_2$
7. $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \to \psi_1, \psi_2 \to \psi_3\} \models \psi_4 \to (\psi_2 \to \psi_1)$
8. $\{\psi_3 \to \psi_4, (\neg\psi_3) \to (\neg\psi_1), (\neg\psi_4) \to (\neg\psi_2)\} \models (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)$
9. $\{(\neg\psi_1) \to \psi_2, \psi_1 \to (\neg\psi_5), \psi_3 \to \psi_4 \vee \psi_5, \psi_4 \to (\neg\psi_3)\} \models \psi_3 \to \psi_2$ ∎

Exercício 1.5.41 Suponha que o conectivo $\leftrightarrow$ não é definido por abreviatura.

1. Estenda o sistema de dedução natural $\mathcal{S}_p$ com as regras apropriadas a este conectivo.
2. Mostre que as regras definidas em 1 são correctas. ∎

Exercício 1.5.42 O conectivo $\oplus$ (disjunção exclusiva) pode ser definido por abreviatura da seguinte forma: $\psi_1 \oplus \psi_2 =_{abv} ((\neg\psi_1) \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$. Suponha que o conectivo $\oplus$ não é definido por abreviatura.

1. Estenda o sistema de dedução natural $\mathcal{S}_p$ com as regras apropriadas a este conectivo.
2. Mostre que as regras definidas em 1 são correctas. ∎

Exercício 1.5.43 Considere apenas o caso particular dos sequentes que têm consequente singular, ou seja, o consequente tem uma única fórmula. Suponha ainda que $\neg$ é um conectivo primitivo.

Considere o sistema dedutivo com as regras $\wedge E$, $\wedge D$, $\vee E$, $\vee D$, $\rightarrow D$, $\rightarrow E$, $\neg E$, $\neg D$ em que

- Regra $\vee D$

$$\frac{\neg\varphi, \Phi \Longrightarrow \psi}{\Phi \Longrightarrow \varphi \vee \psi}$$

- Regra $\rightarrow E$

$$\frac{\neg\varphi, \Phi \Longrightarrow \gamma \qquad \psi, \Phi \Longrightarrow \gamma}{\varphi \rightarrow \psi, \Phi \Longrightarrow \gamma} \rightarrow E$$

- Regra $\neg E$

$$\frac{\neg\psi, \Phi \Longrightarrow \varphi}{\neg\varphi, \Phi \Longrightarrow \psi}$$

- Regra $\neg D$

$$\frac{\varphi, \Phi \Longrightarrow \bot}{\Phi \Longrightarrow \neg\varphi}$$

e todas as outras regras e axiomas são análogos aos de $\mathcal{S}'_p$, com a restrição de apenas envolverem sequentes com consequente singular.

1. Mostre que este sistema dedutivo é correcto, isto é, mostre que se um sequente $\Gamma \Longrightarrow \psi$ é teorema do sistema então $\Gamma \Longrightarrow \psi$ é sequente é válido.

2. Mostre que este sistema dedutivo é completo, isto é, mostre que se um sequente $\Gamma \Longrightarrow \psi$ é válido então $\Gamma \Longrightarrow \psi$ é teorema do sistema.

   Sugestão: Comece por mostrar que

   - dado um qualquer sequente com consequente singular é sempre possível construir uma árvore de dedução que tem esse sequente na raiz e em que cada folha corresponde a um axioma ou a um sequente $\Gamma' \Longrightarrow \gamma$ tal que cada fórmula em Γ' é uma fórmula atómica ou a negação de uma fórmula atómica, Γ' não contém simultaneamente uma fórmula atómica e a sua negação e γ é uma fórmula atómica;

     (na construção de árvores de dedução dê prioridade às regras distintas de $\neg E$, ou seja, a regra $\neg E$ só é aplicada se mais nenhuma regra se pode aplicar, e para além disso aplique a regra $\neg E$ apenas se a correspondente conclusão tem fórmula principal $\neg\varphi$ em que ou φ não é fórmula atómica ou φ pertence ao antecedente da conclusão)
   - um sequente $\Gamma' \Longrightarrow \gamma$ com as características descritas na alínea anterior é falsificável;
   - em cada uma das regras do sistema, se uma das premissas é falsificável então a conclusão é falsificável;

   Conclua que o sistema dedutivo é completo. ∎

1.6 Sistema dedutivo $\mathcal{T}_p$

Nesta secção apresenta-se um outro sistema dedutivo para a lógica proposicional: um sistema de *tableaux* aqui designado $\mathcal{T}_p$. Tal como nos casos dos sistemas dedutivos apresentados anteriormentes, são manipuladas árvores etiquetadas, mas as etiquetas são, neste caso, conjuntos (não vazios) de fórmulas.

Tableaux para lógica proposicional (e de primeira ordem) têm a sua origem nas ideias desenvolvidas por G. Gentzen em [10] que deram origem, em particular, ao sistema de sequentes $\mathcal{T}_p$ apresentado na secção 1.5. Ao longo do tempo várias modificações foram sendo introduzidas e em [4, 5] E. Beth apresenta os chamados *sistemas de tableaux* os quais são ulteriormente desenvolvidos por R. Smullyan em [13].

Os livros [2, 7, 8, 3, 1] são exemplos de outros textos onde se podem encontrar descrições de sistemas de *tableaux* para a lógica proposicional (entre outras).

Tal como no caso dos sistemas anteriores, a construção de derivações em $\mathcal{T}_p$ pode também ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este assunto é abordado no capítulo **??**.

Na secção 1.6.1 é apresentado o sistema dedutivo $\mathcal{T}_p$ e na secção 1.6.2 são discutidas as propriedades de correcção e completude deste sistema dedutivo. Na secção 1.6.3 são propostos alguns exercícios.

1.6.1 Sistema dedutivo

Na literatura, os sistemas de *tableaux* são quase sempre definidos em contextos em que o conectivo $\neg$ é primitivo. Esta opção é também tomada neste texto. Deste modo, a linguagem proposicional considerada nesta secção é definida como anteriormente mas, como se disse, considerando $\neg$ como conectivo primitivo. No final da secção faz-se referência às alterações a introduzir ao sistema $\mathcal{T}_p$ por forma a obter um sistema de *tableaux* nos casos em que a linguagem proposicional não inclui o conectivo $\neg$.

Considera-se fixado o conjunto de símbolos proposicionais P.

Definição 1.6.1
$F_P^{\neg}$ é o conjunto de fórmulas definido indutivamente do modo usual considerando $\neg$ como conectivo primitivo. ■

Cada *tableau* é uma árvore etiquetada em $\mathcal{P}(F_P^{\neg})$, isto é, uma árvore cujas etiquetas dos nós são conjuntos de fórmulas em $F_P^{\neg}$. Estas árvores são construídas partindo de uma árvore singular e aplicando sucessivamente certas regras de inferência. Estas regras são usualmente designadas por regra $\wedge$, regra $\neg\wedge$, regra $\vee$, regra $\neg\vee$, regra $\rightarrow$, regra $\neg\rightarrow$ e regra $\neg\neg$. Se Φ é a etiqueta da raiz do *tableau* diz-se que este é um *tableau* para Φ.

O sistema $\mathcal{T}_p$ é um sistema de *refutação*. A ideia subjacente é que cada ramo de um *tableau* t corresponde a uma tentativa de encontrar uma valoração que satisfaça o conjunto Φ associado à raiz de t. Em certos casos essas tentativas falham (ou porque uma tal valoração deveria satisfazer $\perp$, ou porque deveria satisfazer simultaneamente uma dada fórmula e sua negação). Quando todas as tentativas falham, pode concluir-se que não existe nenhuma valoração que satisfaça Φ. Assim, para determinar se uma fórmula φ é válida, pode considerar-se um *tableau* para $\Phi = \{\neg\varphi\}$. Cada ramo de t corresponde a uma tentativa de encontrar uma valoração que satisfaça $\neg\varphi$, ou seja, corresponde a uma tentativa de encontrar um contra-exemplo, ou de refutar, a asserção representada por φ. Se todas as tentativas falham, não existe um tal valoração e portanto φ é válida.

Dado um *tableau* t, a aplicação da regra $\wedge$, da regra $\neg\vee$, da regra $\neg\rightarrow$ ou da regra $\neg\neg$ (designadas regras *unárias*) acrescenta a uma certa folha de t um nó sucessor, nó esse que é etiquetado com um determinado conjunto de fórmulas que vai depender da regra em causa. No caso da aplicação das outras regras (designadas regras *binárias*) são acrescentados a uma certa folha de t dois nós sucessores directos, cada um deles etiquetado com um conjunto adequado de fórmulas.

O facto de se poder aplicar ou não uma dada regra a uma *tableau* t depende das fórmulas presentes nas etiquetas dos nós de t. Por exemplo, se, como a seguir de descreve, uma fórmula $\varphi \wedge \psi$ estiver presente na etiqueta de um nó de um ramo r de um *tableau* t

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\ldots} \\ \hline \{\ldots,\varphi\wedge\psi,\ldots\} & \ldots \\ \cline{1-1} \ldots & \\ \cline{1-1} \Psi & \end{array}$$

pode aplicar-se a t a regra $\wedge$. À folha de r, que tem etiqueta Ψ, será acrescentado um nó sucessor ao qual é atribuída a etiqueta $\{\varphi,\psi\}$.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\ldots} \\ \hline \{\ldots,\varphi\wedge\psi,\ldots\} & \ldots \\ \cline{1-1} \ldots & \\ \cline{1-1} \Psi & \\ \cline{1-1} \{\varphi,\psi\} & \end{array}$$

Considerando agora o caso em que, por exemplo, é a fórmula $\neg(\varphi \wedge \psi)$ que está presente na etiqueta de um nó de t, isto é,

$$\begin{array}{c}
\Phi \\ \hline
\ldots \\ \hline
\{\ldots, \neg(\varphi \wedge \psi), \ldots\} \qquad\qquad \ldots \\ \hline
\ldots \\ \hline
\Psi \\ \hline
\{\varphi, \psi\}
\end{array}$$

pode aplicar-se a t a regra $\neg\wedge$. À folha de r serão agora acrescentados dois nós sucessores que terão como etiqueta $\{\neg\varphi\}$ e $\{\neg\psi\}$, respectivamente, obtendo-se assim o *tableau*

$$\begin{array}{c}
\Phi \\ \hline
\ldots \\ \hline
\{\ldots, \neg(\varphi \wedge \psi), \ldots\} \qquad\qquad \ldots \\ \hline
\ldots \\ \hline
\Psi \\ \hline
\{\neg\varphi\} \qquad\qquad \{\neg\psi\}
\end{array}$$

As regras de inferência de $\mathcal{T}_p$ acima referidas são usualmente representadas graficamente como se descreve de seguida. A fórmula acima da linha horizontal é a fórmula que deve estar presente num ramo da árvore para se poder aplicar a regra. As fórmulas abaixo da linha representam as fórmulas que vão estar presentes na(s) etiqueta(s) do(s) novo(s) nó(s). Os casos em que está presente o símbolo | correspondem aos casos em que são acrescentados dois nós (regras binárias). A fórmula à esquerda de | constitui a etiqueta de um dos nós e a fórmula à direita a etiqueta do outro. Nos outros casos é apenas acrescentado um nó (regras unárias), sendo as respectivas etiquetas constituídas pela(s) fórmula(s) indicada(s). A designação da regra está presente à direita do traço horizontal.

<u>Regra $\wedge$</u>

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi}\ \wedge$$

<u>Regra $\neg\wedge$</u>

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \quad | \quad \neg\psi}\ \neg\wedge$$

<u>Regra $\neg\vee$</u>

$$\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi, \neg\psi}\ \neg\vee$$

<u>Regra $\vee$</u>

$$\frac{\varphi \vee \psi}{\varphi \quad | \quad \psi}\ \vee$$

<u>Regra $\neg\rightarrow$</u>

$$\frac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi, \neg\psi}\ \neg\rightarrow$$

<u>Regra $\rightarrow$</u>

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi \quad | \quad \psi}\ \rightarrow$$

<u>Regra $\neg\neg$</u>

$$\frac{\neg(\neg\varphi)}{\varphi}\ \neg\neg$$

Regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{T}_p$

Como seria de esperar não serão necessárias todas as regras acima referidas se certos conectivos forem apenas definidos como abreviatura. Seguindo a opção já tomada na secção anterior, mantiveram-se aqui $\wedge$ e $\vee$ como conectivos primitivos.

As regras de inferência do sistema $\mathcal{T}_p$ acima apresentadas podem ser definidas de um modo mais rigoroso como se segue. Para tal revela-se útil introduzir a seguinte notação. Recorde-se a definição de substituição de subárvore com raiz n apresentada em **??**.

Notação 1.6.2 Sejam a uma $\mathcal{P}(F_P^{\neg})$-árvore, r um ramo de a, n_r a folha de r, $\varphi \in F_P^{\neg}$ e $\Phi, \Psi \subseteq F_P^{\neg}$.

- $F(r)$ é o conjunto das fórmulas presentes nas etiquetas dos nós de r;
- $a[r;\Phi]$ denota uma $\mathcal{P}(F_P^{\neg})$-árvore $a[n_r \leftarrow a']$ onde a' é a $\mathcal{P}(F_P^{\neg})$-árvore com dois nós cuja raiz tem etiqueta igual à de n_r e o outro nó tem etiqueta Φ;
- $a[r;\Phi,\Psi]$ tem significado semelhante ao caso anterior mas a raiz de a' tem agora dois sucessores directos tendo um etiqueta Φ e outro etiqueta Ψ. ∎

Cada regra de inferência corresponde a um conjunto de tuplos (φ, Θ) ou $(\varphi, \Theta_1, \Theta_2)$ com $\varphi \in F_P^{\neg}$ e $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \subseteq \mathcal{P}(F_P^{\neg})$.

Definição 1.6.3 Sistema $\mathcal{T}_p$
O sistema $\mathcal{T}_p$ é constituído pelas regras de inferência seguintes.

- <u>Regra $\wedge$</u>: $(\,\varphi \wedge \psi\,,\ \{\varphi, \psi\}\}\ )$;
- <u>Regra $\neg\wedge$</u>: $(\,\neg(\varphi \wedge \psi)\,,\ \{\neg\varphi\},\ \{\neg\psi\}\ )$
- <u>Regra $\vee$</u>: $(\,\varphi \vee \psi\,,\ \{\varphi\},\ \{\psi\}\ )$
- <u>Regra $\neg\vee$</u>: $(\,\neg(\varphi \vee \psi)\,,\ \{\neg\varphi, \neg\psi\}\ )$
- <u>Regra $\rightarrow$</u>: $(\,\varphi \rightarrow \psi\,,\ \{\neg\varphi\},\ \{\psi\}\ )$
- <u>Regra $\neg\rightarrow$</u>: $(\,\neg(\varphi \rightarrow \psi)\,,\ \{\varphi, \neg\psi\}\ )$
- <u>Regra $\neg\neg$</u>: $(\,\neg(\neg\varphi)\,,\ \{\varphi\}\ )$

onde $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(F_P^{\neg})$. As regras $\wedge$, $\neg\vee$, $\neg \rightarrow$ e $\neg\neg$ são designadas regras *unárias* e as outras regras são designadas regras *binárias*. ∎

Cada tuplo (φ, Θ) ou $(\varphi, \Theta_1, \Theta_2)$ de uma regra de inferência constitui uma instância da regra e cada aplicação da regra corresponde à utilização de uma instância da regra.

Segue-se agora a definição de *tableau* em $\mathcal{T}_p$. Os *tableaux* de $\mathcal{T}_p$ constituem as derivações (ou deduções) do sistema $\mathcal{T}_p$.

Definição 1.6.4 TABLEAUX DE $\mathcal{T}_p$
O conjunto dos *tableaux* de $\mathcal{T}_p$ define-se indutivamente como se segue:

- todas as $\mathcal{P}(F_P^{\neg})$-árvore singulares a cujo nó esteja associado um conjunto não vazio e finito são *tableaux* de $\mathcal{T}_p$;
- se t é um *tableau* de $\mathcal{T}_p$, (φ, Θ) é uma instância de uma regra unária de $\mathcal{T}_p$, r é um ramo de t tal que $\varphi \in F(r)$ então a árvore $t[r; \Theta]$ é um *tableau* de $\mathcal{T}_p$;
- se t é um *tableau* de $\mathcal{T}_p$, $(\varphi, \Theta_1, \Theta_2)$ é uma instância de uma regra binária de $\mathcal{T}_p$, r é um ramo de t tal que $\varphi \in F(r)$ então a árvore $t[r; \Theta_1, \Theta_2]$ é um *tableau* de $\mathcal{T}_p$.

Em cada um dos casos, diz-se que o novo *tableau* foi obtido por aplicação da (instância da) regra ao *tableau* t.

Dado um tableau t de $\mathcal{T}_p$ e sendo Φ a etiqueta da sua raiz, diz-se que t *é um tableau para* Φ. Se Φ é um conjunto singular $\{\varphi\}$ diz-se também que t *é um tableau para* φ. ∎

Apresentam-se seguidamente dois exemplos de *tableaux* de $\mathcal{T}_p$. As chavetas das etiquetas dos nós são usualmente omitidas quando se representam graficamente os *tableaux*.

Exemplo 1.6.5 Apresenta-se seguidamente um exemplo de um *tableau* de $\mathcal{T}_p$. É usual omitirem-se os parênteses das etiquetas dos nós e, tal como nos sistemas $\mathcal{N}_p$ e $\mathcal{S}_p$, é usual indicar-se à direita dos traços horizontais que separam cada nó dos seus sucessores as regras que foram utilizadas.

$$\frac{(\neg\psi_1) \vee \psi_2 \ , \ \neg(\psi_2 \rightarrow \psi_1)}{\qquad} \ \neg \rightarrow$$

$$
\cfrac{\psi_2,\ \neg\psi_1}{\neg\psi_1 \qquad\qquad \psi_2}\ \vee
$$

O tableau apresentado é um tableau para $\{(\neg\psi_1) \vee \psi_2, \neg(\psi_2 \to \psi_1)\}$. ∎

Exemplo 1.6.6 Segue-se um outro exemplo de um *tableau* de $\mathcal{T}_p$.

$$
\cfrac{\neg((\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3)))}{\cfrac{\begin{array}{c}\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3),\\ \neg((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))\end{array}}{\cfrac{\begin{array}{c}\psi_1 \to \psi_2,\\ \neg(\psi_1 \to \psi_3)\end{array}}{\cfrac{\psi_1,\ \neg\psi_3}{\neg\psi_1 \qquad \cfrac{\psi_2 \to \psi_3}{\neg\psi_1 \qquad \cfrac{\psi_2}{\neg\psi_2 \qquad \psi_3}\ \to}\ \to}\ \to}\ \neg\to}\ \neg\to}\ \neg\to
$$

Sendo $\varphi = (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))$, o tableau acima é um tableau para $\neg\varphi$. ∎

Definição 1.6.7 Tableau fechado e tableau aberto
Sendo t um *tableau* de $\mathcal{T}_p$ e r um ramo de t:

- r diz-se *fechado* se $\perp \in F(r)$ ou $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq F(r)$ para alguma fórmula $\varphi \in F_P^{\neg}$; r diz-se *aberto* se não é fechado;
- t diz-se *tableau fechado* se todos os ramos de t são ramos fechados; t diz-se *tableau aberto* se não é fechado. ∎

Exemplo 1.6.8 O *tableau* apresentado no Exemplo 1.6.5 é aberto. O *tableau* apresentado no Exemplo 1.6.6 é fechado. ∎

Definição 1.6.9 CONJUNTO CONFUTADO
O conjunto $\Phi \subseteq F_P^{\neg}$ diz-se *confutado* se existe um tableau fechado de $\mathcal{T}_p$ para Φ. ■

Exemplo 1.6.10 Tendo em conta o tableau apresentado no Exemplo 1.6.5, o conjunto $\{(\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3)))\}$ é confutado. ■

Um conjunto confutado Φ é um conjunto para o qual se pode construir um *tableau* fechado. Como se verá na subsecção 1.6.2, isto significa que o conjunto não é possível. Cada ramo r de um *tableau* corresponde a uma tentativa de encontrar uma valoração que satisfaça Φ (no sentido em que se as fórmulas em $F(r)\backslash\Phi$ forem satisfeitas por uma certa valoração então Φ também é). Um ramo fechado corresponde a uma tentativa falhada porque obrigaria a que a valoração satisfizesse $\perp$ ou uma certa fórmula e a sua negação. Se todos os ramos de um *tableau* t para Φ são fechados isso significa que todas as tentativas falharam e, portanto, Φ não é possível. No caso particular de $\Phi = \{\neg\varphi\}$, a fórmula φ é válida. Neste caso, cada ramo do *tableau* corresponde a uma tentativa de refutar φ (pois é uma tentativa de verificar $\neg\varphi$) e se todas as tentativas falham então não é possível refutar a fórmula.

A construção de *tableaux* em $\mathcal{T}_p$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este ambiente de desenvolvimento de provas é apresentado no capítulo **??**, que o leitor interessado poderá consultar desde já.

A terminar esta secção faz-se referência às alterações que se podem fazer ao sistema $\mathcal{T}_p$ para se obter um sistema dedutivo semelhante, quando a linguagem não inclui o conectivo como primitivo. As modificações a introduzir são simples: as regras $\neg\neg$, $\neg \to$, $\neg\vee$ e $\neg\wedge$ são removidas e um ramo é considerado fechado apenas quando inclui $\perp$.

1.6.2 Correcção e completude de $\mathcal{T}_p$

Neste secção apresentam-se os resultados de correcção e completude do sistema $\mathcal{T}_p$.

Tal como nos casos anteriores, a correcção relaciona noções sintácticas com noções semânticas, mas, neste caso, na definição de correção a noção de consequência semântica está presente apenas de forma indirecta. O resultado de correcção do sistema $\mathcal{T}_p$ estabelece que todo o conjunto confutado é um conjunto impossível. Mas daqui resulta, em particular, que se $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ for conjunto confutado então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$

é um conjunto impossível, pelo que φ é consequência semântica de Φ. Se Φ for o conjunto vazio, φ é fórmula válida.

Como se tinha já referido anteriormente, o sistema $\mathcal{T}_p$ é um sistema de refutação: para saber se uma fórmula φ é válida tenta-se construir um *tableau* fechado para a sua negação, isto é, tenta mostrar-se que $\{\neg\varphi\}$ é um conjunto confutado. Cada ramo do *tableau* é uma tentativa de construir um contra-exemplo da asserção que φ representa, isto é, uma tentativa de construir uma valoração que verifique $\neg\varphi$. Se existe um *tableau* fechado para $\neg\varphi$ e tal significa que todas as tentativas para encontrar um tal contra-exemplo falharam e portanto $\neg\varphi$ é fórmula impossível, ou seja, φ é uma fórmula válida. Quando $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ é conjunto confutado, é porque existe um *tableau* fechado para o conjunto $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ e cada ramo do *tableau* corresponde agora a uma tentativa de encontrar uma valoração que satisfaça Φ mas não satisfaça φ. Se todas as tentativas falham, não existe uma tal valoração e portanto $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é um conjunto impossível pelo que φ é consequência semântica de Φ.

O resultado de correcção do sistema resulta dos seguintes factos:

(i) se r é ramo fechado de um *tableau* então $F(r)$ é impossível (Proposição 1.6.12);

(ii) todas regras de inferência de $\mathcal{T}_p$ são correctas, ou seja, se existe um ramo r de t tal que $F(r)$ é possível então, se t' é um *tableau* obtido a partir de t por aplicação de uma das regras de inferência, existe também um ramo r' de t' tal que $F(r')$ é possível (Proposição 1.6.13).

Usando (i) e (ii) prova-se então que todo o conjunto confutado é impossível (na Proposição 1.6.14 e Corolário 1.6.15). Recorde-se que um conjunto Φ é confutado se existe um *tableau* t para Φ fechado. Então, se Φ fosse possível, obviamente que o *tableau* singular correspondente à raiz de t teria um ramo cujas fórmulas constituiriam um conjunto possível. Assim, por (ii), teriam também um ramo com esta propriedade cada um dos outros *tableaux* que se vão obtendo ao aplicar sucessivamente as regras que levam à construção de t. Em particular, t teria também um tal ramo. Mas, por (i), tal não pode acontecer, porque todos os ramos de t são fechados. Este raciocínio permite assim concluir que todo o conjunto confutado é impossível.

Apresentam-se agora as provas mais rigorosas destes resultados. Para facilitar a exposição, introduz-se a noção de α-fórmula e β-fórmula.

Definição 1.6.11 α-FÓRMULAS E β-FÓRMULAS

- Se φ é do tipo $\neg(\neg\varphi')$, $\varphi' \wedge \varphi''$, $\neg(\varphi' \vee \varphi'')$ ou $\neg(\varphi' \to \varphi'')$ com $\varphi', \varphi'' \in F_P^{\neg}$, então φ é *α-fórmula*. Para cada α-fórmula φ define-se o conjunto $\kappa_1(\varphi)$ do seguinte modo:
  - $\kappa_1(\neg(\neg\varphi')) = \{\varphi'\}$;
  - $\kappa_1(\varphi' \wedge \varphi'') = \{\varphi', \varphi''\}$;
  - $\kappa_1(\neg(\varphi' \vee \varphi'')) = \{\neg\varphi', \neg\varphi''\}$;
  - $\kappa_1(\neg(\varphi' \to \varphi'')) = \{\varphi', \neg\varphi''\}$.
- Se φ é do tipo $\varphi' \vee \varphi''$, $\neg(\varphi' \wedge \varphi'')$ ou $\varphi' \to \varphi''$, com $\varphi', \varphi'' \in F_P^{\neg}$, então φ é *β-fórmula*. Para cada β-fórmula φ definem-se os conjuntos $\kappa_1(\varphi)$ e $\kappa_2(\varphi)$ do seguinte modo:
  - $\kappa_1(\varphi' \vee \varphi'') = \{\varphi'\}$ e $\kappa_2(\varphi' \vee \varphi'') = \{\varphi''\}$;
  - $\kappa_1(\neg(\varphi' \wedge \varphi'')) = \{\neg\varphi'\}$ e $\kappa_2(\neg(\varphi' \wedge \varphi'')) = \{\neg\varphi''\}$;
  - $\kappa_1(\varphi' \to \varphi'')) = \{\neg\varphi'\}$ e $\kappa_2(\varphi' \to \varphi'')) = \{\varphi''\}$. ■

Proposição 1.6.12
Sejam t um *tableau* de $\mathcal{T}_p$ e r um ramo de t.

1. Se r é ramo fechado então $F(r)$ é impossível.
2. Seja r um ramo aberto tal que, para cada $\psi \in F(r)$, se ψ é α-fórmula então $\kappa_1(\psi) \subseteq F(r)$ e se ψ é β-fórmula então $\kappa_1(\psi) \subseteq F(r)$ ou $\kappa_2(\psi) \subseteq F(r)$. Tem-se que $F(r)$ é possível e qualquer estrutura de interpretação sobre P que satisfaça $F(r) \cap (\{p, \neg p : p \in P\})$ satisfaz φ.

Prova: 1. Trivial tendo em conta a definição de ramo fechado.

2.(a) Seja V uma estrutura de interpretação sobre P que satisfaça $F(r) \cap (\{p, \neg p : p \in P\})$. Prova-se, por indução na complexidade das fórmulas, que $V \Vdash \psi$ qualquer que seja $\psi \in F(r)$ $(c(\neg\psi) = c(\psi) + 1)$.

Base: Como r não é fechado $\psi \neq \perp$. Se $\psi \in P$ então $V \Vdash q$.

Passo: Seja $\psi \in F(r)$ tal que $c(\psi) > 0$. Se ψ é α-fórmula ou é β-fórmula, $\kappa_i(\psi) \subseteq$ para algum $1 \leq i \leq 2$. Por hipótese de indução, $V \Vdash \kappa_i(\psi)$ e portanto, facilmente se prova que, para cada um dos vários casos possíveis, $V \Vdash \psi$. Se ψ não é α-fórmula nem β-fórmula então $\psi = \neg\psi'$ com $\psi' \in P$. Assim $\psi \in \{p, \neg p : p \in P\}$ e portanto $V \Vdash \psi$.

(b) Considere-se estrutura de interpretação $V : P \to \{0,1\}$ tal que, para cada $p \in P$, $V(p) = 1$ se $p \in F(r)$ e $V(p) = 0$ caso contrário. Seja $\psi \in F(r) \cap (\{p, \neg p : p \in P\})$. Como r não é fechado, $\psi \neq \perp$. Se $\psi \in P$ então $V \Vdash \psi$. Se $\psi = \neg\psi'$ com $\psi' \in P$, então, porque r não é fechado, $\psi' \notin F(r)$ e portanto $V(\psi') = 0$ o que significa que $V \Vdash \psi$. Conclui-se assim que V satisfaz $F(r) \cap (\{p, \neg p : p \in P\})$. Por (a), V satisfaz $F(r)$ e portanto $F(r)$ é possível. ■

Para provar o resultado de correcção do sistema só é necessário o resultado 1 da Proposição 1.6.12. O resultado 2 é usado na completude.

Proposição 1.6.13
As regras de inferência de $\mathcal{T}_p$ são correctas, o que, neste contexto, significa que se t é um *tableau* de $\mathcal{T}_p$ e existe um ramo r de t tal que $F(r)$ é possível então, se t' é um *tableau* obtido a partir de t por aplicação de uma das regras de inferência de $\mathcal{T}_p$, existe também um ramo r' de t' tal que $F(r')$ é possível.

Prova: Há que fazer a prova para cada uma das regras.

Regra $\neg\neg$: A regra é aplicada quando $\neg(\neg\psi) \in F(\overline{r})$ para certo ramo $\overline{r}$ de t. Da aplicação da regra resulta que todos os ramos de t são ramos de t', com excepção de $\overline{r}$, e que as etiquetas dos nós comuns a t e t' são as mesmas. O ramo $\overline{r}$ é substituído pelo ramo $\overline{r}'$ e $F(\overline{r}') = F(\overline{r}) \cup \{\psi\}$. Assim, se o ramo r de t tal que $F(r)$ é possível não é o ramo $\overline{r}$ então o ramo r' de t' pretendido pode ser o próprio r. Se for o ramo $\overline{r}$, então, qualquer estrutura de interpretação que satisfaz $F(\overline{r})$, satisfaz $\neg(\neg\psi)$ e portanto satisfaz ψ. Consequentemente, $\overline{r}'$ é o ramo pretendido.

Regra $\vee$: O raciocínio é semelhante ao anterior. Neste caso a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$ e o ramo $\overline{r}$ é substituído por $\overline{r}'_1$ e $\overline{r}'_2$ verificando $F(\overline{r}'_1) = F(\overline{r}) \cup \{\varphi\}$ e $F(\overline{r}'_2) = F(\overline{r}) \cup \{\psi\}$.

Os outros casos são semelhantes e deixam-se como exercício. ■

Proposição 1.6.14
Seja t um *tableau* de $\mathcal{T}_p$ para Φ.

1. Se Φ é possível então existe uma ramo r de t tal que $F(r)$ é possível.

2. Se t é fechado então Φ é impossível.

Prova: 1. A prova decorre por indução no conjunto (indutivamente definido) dos *tableaux* de $\mathcal{T}_p$.

Base: Imediato dado que t é um tableau singular para Φ e portanto o seu único ramo r é tal que $F(r) = \Phi$.

Passo: A prova faz-se considerando as diferentes regras de inferência e usando a Proposição 1.6.13.

2. Imediato a partir de 1. ∎

Corolário 1.6.15
O sistema dedutivo $\mathcal{T}_p$ é correcto, isto é, se $\Phi \subseteq F_P^{\neg}$ é confutado então Φ é impossível.

Prova: Se Φ é confutado existe um *tableau* fechado para Φ. Pela Proposição 1.6.14, Φ é um conjunto impossível. ∎

A proposição seguinte relaciona conjuntos confutados com validade e consequência semântica.

Proposição 1.6.16
Sejam $\Phi \subseteq\in F_P^{\neg}$ e finito e $\varphi \in F_P^{\neg}$.

1. Se $\{\neg\varphi\}$ é confutado então $\models \varphi$.

2. Se $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é confutado então $\Phi \models \varphi$.

Prova: 1. Pelo Corolário 1.6.15, $\{\neg\varphi\}$ é impossível pelo que qualquer valoração satisfaz necessariamente φ.

2. Pelo Corolário 1.6.15, $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é impossível pelo que qualquer valoração que satisfaça Φ não pode satisfazer $\neg\varphi$ e portanto satisfaz necessariamente φ. ∎

Trata-se agora a questão da completude do sistema $\mathcal{T}_p$. O resultado de completude de $\mathcal{T}_p$ também envolve a noção de consequência semântica apenas de modo indirecto. O resultado de completude de $\mathcal{T}_p$ estabelece que se um conjunto finito de fórmulas é impossível então é conjunto confutado (Proposição 1.6.18). Daqui decorre, em particular, que sendo φ consequência semântica de Φ, então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é conjunto impossível, pelo que $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é conjunto confutado.

A prova da completude de $\mathcal{T}_p$ é de certo modo semelhante à prova de completude do sistema $\mathcal{S}'_p$ e resulta essencialmente dos seguintes factos:

(i) é sempre possível construir-se um *tableau* para Φ tal que cada ramo r ou é fechado ou é tal que para cada $\psi \in F(r)$, se ψ é α-fórmula então $\kappa_1(\psi) \subseteq F(r)$ e se ψ é β-fórmula então $\kappa_1(\psi) \subseteq F(r)$ ou $\kappa_2(\psi) \subseteq F(r)$ (Proposição 1.6.17);

(ii) se r satisfaz a segunda das condições referidas em (i) então $F(r)$ é um conjunto possível (Proposição 1.6.12).

A partir de (i) e (ii) estabelece-se a completude de $\mathcal{T}_p$ (na Proposição). Com efeito, dado um conjunto impossível Φ, e considerando um *tableau* para Φ com as características referidas em (i), este tem necessariamente de ser um *tableau* fechado. Com efeito, se assim não fosse, por (ii), existiria um ramo r tal que $F(r)$ seria um conjunto possível e portanto, em particular, $\Phi \subseteq F(r)$ seria possível.

Apresentam-se agora as provas dos resultados referidos.

Proposição 1.6.17
Dado um conjunto $\Phi \subseteq F_P^{\neg}$ finito é sempre possível construir-se um *tableau* para Φ tal que cada ramo r de t ou é fechado ou é tal que para cada $\psi \in F(r)$, se ψ é α-fórmula então $\kappa_1(\psi) \subseteq F(r)$ e se ψ é β-fórmula então $\kappa_1(\psi) \subseteq F(r)$ ou $\kappa_2(\psi) \subseteq F(r)$.

Prova: Esboça-se seguidamente o modo de proceder para construir um *tableau* com as características indicadas:

– começa-se com um *tableau* singular para Φ

– em cada passo seguinte, procura-se um nó n da árvore em cuja etiqueta exista uma α-fórmula ou uma β-fórmula φ relativamente à qual ainda não tenha sido aplicada qualquer regra; consideram-se todos os ramos abertos que contenham esse nó e prolongam-se cada um desses ramos com um nó etiquetado com $\kappa_1(\varphi)$, no caso de ser α-fórmula, ou, no caso de ser β-fórmula, com dois nós, ambos sucessores directos da folha do ramo, os quais são etiquetados, respectivamente, com $\kappa_1(\varphi)$ e $\kappa_2(\varphi)$; referencia-se de algum modo esta fórmula φ do nó n por forma a que não volte a ser considerada de novo para aplicação da regra

– a construção termina quando todos os ramos estão fechados ou já não existem α-fórmulas ou β-fórmulas nas condições do ponto anterior.

O procedimento acima esboçado termina sempre. Basta ter em conta que (i) Φ é um conjunto finito, (ii) a complexidade de cada uma das fórmulas em $\kappa_1(\varphi)$ (e

$\kappa_2(\varphi)$ quando for o caso) é menor que a complexidade de φ e que (b) a complexidade das α-fórmulas ou β-fórmulas é sempre maior ou igual a 1. Quando o procedimento termina ter-se-á o *tableau* com as características pretendidas. ∎

Proposição 1.6.18
O sistema $\mathcal{T}_p$ é completo, isto é, se $\Phi \subseteq F_P^{\neg}$ (finito) é impossível então Φ é confutado.

Prova: Pela Proposição 1.6.17, é possível construir um *tableau* t de $\mathcal{T}_p$ para Φ tal que cada ramo r de t ou é fechado ou satisfaz as condições do resultado 2. da Proposição 1.6.12. Se existe um ramo r que não é fechado, então, por este resultado, existe uma valoração que satisfaz Φ, o que contradiz a hipótese de Φ ser impossível. Então todos os ramos são fechados, pelo que t é fechado e portanto Φ é confutado. ∎

Proposição 1.6.19
Sejam $\Phi \subseteq\in F_P^{\neg}$ e finito e $\varphi \in F_P^{\neg}$.

1. Se $\models \varphi$ então $\{\neg\varphi\}$ é confutado.
2. Se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é confutado.

Prova: Imediato tendo em conta a Proposição 1.6.18. ∎

1.6.3 Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 1.6.20 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_6 designam fórmulas arbitrárias de $F_P^{\neg}$. Verifique se seguintes conjuntos são conjuntos confutados.

1. $\{\neg(\psi_1 \vee (\neg\psi_1))\}$
2. $\{\psi_2 \to \psi_3, \neg((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3)\}$
3. $\{\neg(\psi_1 \wedge \psi_2), \psi_1, \neg(\neg\psi_2)\}$
4. $\{\neg(\psi_1 \vee \psi_2), \neg(\neg\psi_1)\}$
5. $\{\neg(((\psi_1 \to \psi_3) \wedge (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3))\}$
6. $\{\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3), \neg((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))\}$

7. $\{\psi_1 \vee (\psi_2 \wedge \psi_3), \neg((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_1 \vee \psi_3))\}$
8. $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3, \neg(\psi_2 \to \psi_3)\}$
9. $\{\neg((\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)))\}$
10. $\{\psi_1 \to \psi_2, (\neg\psi_1) \to \psi_2, \neg\psi_2\}$
11. $\{\neg((\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_1) \vee \psi_2))\}$
12. $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_3 \to \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4, \neg(\psi_1 \vee \psi_3)\}$
13. $\{\psi_1 \to ((\neg\psi_2) \vee \psi_3),\ \ \neg\psi_3,\ \ (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)\}$
14. $\{\neg((\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_2)))\}$
15. $\{\neg((\neg(\psi_1 \vee \psi_2)) \to ((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2)))\}$
16. $\{\psi_1 \to \psi_2,\ \ (\neg\psi_3) \to (\neg\psi_2),\ \ \psi_3 \to (\neg\psi_4),\ \ \neg((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_4))\}$
17. $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \to \psi_1, \psi_2 \to \psi_3, \psi_4, \neg(\psi_2 \to \psi_1)$
18. $\{\psi_1 \to \psi_2,\ \ \neg\psi_2, \neg\psi_3,\ \ (\neg\psi_1) \to \psi_3,\ \ (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_3)\}$
19. $\{(\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_3,\ \ \psi_4 \to (\neg\psi_1)),\ \ \psi_5,\ \ \neg\psi_4,\ \ \psi_5 \to \psi_2,\ \ \neg\psi_3\}$
20. $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3, \psi_4 \wedge (\neg\psi_5), (\neg\psi_5) \wedge ((\neg(\psi_5 \vee \psi_1)) \to \psi_6), \psi_2 \wedge (\neg\psi_3), \neg\psi_6\}$ ■

Exercício 1.6.21 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios propostos no Exercício 1.6.20 usando a ferramenta *Isabelle*. ■

Exercício 1.6.22 Recorrendo às propriedades do sistema $\mathcal{T}_p$, verifique se são possíveis ou contraditórios os conjuntos apresentados no Exercício 1.5.35 e ainda os conjuntos

1. $\{\psi_1 \to \psi_2, \neg(\psi_1 \vee \psi_3), \psi_3 \to \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4\}$
2. $\{\psi_1, \psi_2 \to \psi_3, \neg(\psi_1 \wedge \psi_3), \neg(\neg\psi_2)\}$
3. $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3, \neg(\psi_2 \to \psi_3)\}$
4. $\{\psi_1 \vee \psi_2, \psi_1 \vee \psi_3, \neg\psi_2, \neg\psi_3\}$

5. $\{\psi_2 \to \psi_3, \psi_1 \vee \psi_2, \neg\psi_3\}$
6. $\{\psi_1 \to ((\neg\psi_2) \vee \psi_3), (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1), \neg\psi_3\}$
7. $\{\psi_3 \to \psi_4, (\neg\psi_3) \to (\neg\psi_1), (\neg\psi_4) \to (\neg\psi_2), (\neg\psi_2), \psi_1\}$ ■

Para cada conjunto possível encontre uma valoração que satisfaça o conjunto.

Para cada conjunto Φ contraditório, diga o que pode concluir sobre consequência semântica entre fórmulas φ tais que $\varphi \in \Phi$ ou $\neg\varphi \in \Phi$.

Exercício 1.6.23 Na sequência ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 designam fórmulas arbitrárias de F_P. Recorrendo às propriedades do sistema $\mathcal{T}_p$ verifique se:

1. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1) \to \psi_1$
2. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_3)) \to (\psi_1 \to \psi_3)$
3. $\models (\psi_1 \to (\neg\psi_1)) \to \psi_2$
4. $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_2\} \models \psi_1$
5. $\{\psi_1 \to \psi_2, \psi_3 \to \psi_4, \psi_2 \vee \psi_4\} \models \psi_1 \vee \psi_3$
6. $\{\psi_1, \psi_2 \to \psi_3, \neg(\psi_1 \wedge \psi_3)\} \models \neg\psi_2$
7. $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \to \psi_1, \psi_2 \to \psi_3\} \models \psi_4 \to (\psi_2 \to \psi_1)$
8. $\{\psi_3 \to \psi_4, (\neg\psi_3) \to (\neg\psi_1), (\neg\psi_4) \to (\neg\psi_2)\} \models (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)$
9. $\{(\neg\psi_1) \to \psi_2, \psi_1 \to (\neg\psi_5), \psi_3 \to \psi_4 \vee \psi_5, \psi_4 \to (\neg\psi_3)\} \models \psi_3 \to \psi_2$ ■

Exercício 1.6.24 Suponha que o conectivo $\leftrightarrow$ não é definido por abreviatura.

1. Estenda o sistema de dedução natural $\mathcal{T}_p$ com as regras apropriadas a este conectivo.
2. Mostre que as regras definidas em 1 são correctas. ■

Exercício 1.6.25 O conectivo $\oplus$ (disjunção exclusiva) pode ser definido por abreviatura da seguinte forma: $\psi_1 \oplus \psi_2 =_{abv} ((\neg\psi_1) \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$. Suponha que o conectivo $\oplus$ não é definido por abreviatura.

1. Estenda o sistema de dedução natural $\mathcal{T}_p$ com as regras apropriadas a este conectivo.

2. Mostre que as regras definidas em 1 são correctas. ■

Exercício 1.6.26 Prove que o sistema de *tableaux* referido no final da secção 1.6.1 (em que se assume que o conectivo $\neg$ não é primitivo) é correcto e completo. ■

1.7 Sistema dedutivo $\mathcal{H}_p$

Nesta secção apresenta-se um último sistema dedutivo para a lógica proposicional, o sistema $\mathcal{H}_p$, usualmente designado como sistema de tipo Hilbert. Neste caso as derivações não são árvores mas apenas sequências de fórmulas.

Existem diversas variantes de sistemas deste tipo para a lógica proposicional. As diferenças entre esses sistemas residem nas fórmulas que são escolhidas para axiomas do sistema. Como seria de esperar, se se consideram diferentes conjuntos de conectivos primitivos, os axiomas terão de ser diferentes. No entanto, mesmo para um mesmo conjunto de conectivos primitivos, podem existir diferentes sistemas deste tipo. O conteúdo das próximas secções segue a variante apresentada em [14].

1.7.1 Sistema dedutivo

Considere-se fixado um conjunto de símbolos proposicionais P. No contexto deste sistema dedutivo assume-se que se trabalha com o conjunto de fórmulas F'_P definido anteriormente. Recorde-se que neste caso apenas se assumem como primitivos $\perp$ e o conectivo $\rightarrow$.

Apresenta-se seguidamente o sistema dedutivo $\mathcal{H}_p$. Este sistema é constituído por vários axiomas e uma única regra de inferência. Recorde-se que $\neg\varphi =_{abv} \varphi \rightarrow \perp$.

Definição 1.7.1 SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{H}_p$
O *sistema dedutivo* $\mathcal{H}_p$ é constituído por

Axiomas:

- $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$ A1
- $(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3))$ A2

- $\bot \rightarrow \varphi_1$ A3
- $(\neg(\neg\varphi_1)) \rightarrow \varphi_1$ A4

onde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ representam fórmulas em F'_P.

Regra de inferência:

- Regra MP (*modus ponens*): $(\{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \varphi_1\}, \varphi_2)$
  com $\varphi_1, \varphi_2 \in F'_P$; $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ e φ_1 são as premissas da regra e φ_2 é a conclusão da regra. ∎

Cada axioma de $\mathcal{H}_p$ corresponde a um conjunto de fórmulas de F'_P, designando-se cada uma delas por instância do axioma. A regra de inferência corresponde a um conjunto de pares formados por um subconjunto de F'_P e uma fórmula F'_P, constituindo cada deles uma instância da regra. É também usual representar a regra *modus ponens* como se segue

$$\frac{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \qquad \varphi_1}{\varphi_2}\ \text{MP}$$

Como referido, as derivações em $\mathcal{H}_p$ são sequências de fórmulas. Cada fórmula da sequência é uma instância de um axioma ou resulta da aplicação (de uma instância) da regra MP a fórmulas que a precedem na sequência.

Definição 1.7.2 Derivação em $\mathcal{H}_p$
Sejam $\Phi \subseteq F'_P$ e $\varphi \in F'_P$. Uma *derivação de* φ *em* $\mathcal{H}_p$ *a partir de* Φ é uma sequência $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, $n \in I\!N$, de fórmulas em F'_P tal que φ_n é φ e, para cada $1 \leq i \leq n$, verifica-se alguma das seguintes condições: (i) φ_i é uma instância de um axioma, (ii) $\varphi_i \in \Phi$ (caso em que se diz que φ_i é uma hipótese) e (iii) φ_i é conclusão de uma instância da regra de inferência MP com premissas em $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\}$. ∎

Exemplo 1.7.3 Sendo $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in F'_P$, um exemplo de derivação de $\psi_1 \rightarrow \psi_3$ a partir de $\Phi = \{\psi_1 \rightarrow \psi_2, \psi_2 \rightarrow \psi_3\}$ em $\mathcal{H}_p$ é

1. $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ hipótese
2. $\psi_2 \rightarrow \psi_3$ hipótese

3. $(\psi_2 \to \psi_3) \to (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3))$ A1

4. $\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)$ MP 2,3

5. $(\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))$ A2

6. $(\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3)$ MP 4,5

7. $\psi_1 \to \psi_3$ MP 1,6

■

Definição 1.7.4 Consequência em $\mathcal{H}_p$
Sejam $\Phi \subseteq F'_P$ e $\varphi \in F'_P$. A fórmula φ é consequência de Φ em $\mathcal{H}_p$, o que se denota por $\Phi \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi$, se existe uma derivação de φ em $\mathcal{H}_p$ a partir de Φ. Sendo $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ usa-se também a notação $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi$. ■

Definição 1.7.5 Teorema de $\mathcal{H}_p$
A fórmula $\varphi \in F'_P$ diz-se *teorema* de $\mathcal{H}_p$, o que se denota por $\vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi$, se existe uma derivação de φ em $\mathcal{H}_p$ a partir de $\emptyset$. ■

Proposição 1.7.6 Metateorema da dedução
Considerando fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \in F'_P$, $n \in I\!N_0$, tem-se que

$$\text{se } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi \text{ então } \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi_n \to \varphi.$$ ■

O metateorema da dedução permite concluir, em particular, que $\varphi \to \varphi'$ é teorema de $\mathcal{H}_p$ se se encontrar uma derivação para φ' a partir de φ, ou seja, tomando φ como hipótese. A prova desta proposição é deixada como exercício ao leitor (Exercício 1.7.12).

A construção de derivações em $\mathcal{H}_p$ pode ser efectuada computacionalmente usando o ambiente de desenvolvimento de provas *Isabelle*. Este ambiente de desenvolvimento de provas é apresentado no capítulo **??**, que o leitor interessado poderá consultar desde já.

1.7.2 Correcção e completude de $\mathcal{H}_p$

Nesta secção faz-se referência à correcção e completude do sistema $\mathcal{H}_p$.

O resultado de correcção do sistema $\mathcal{H}_p$ estabelece que se a fórmula φ é consequência do conjunto de fórmulas Φ em $\mathcal{H}_p$ então φ é consequência semântica de Φ (e portanto todo o teorema de $\mathcal{H}_p$ é uma fórmula válida), e resulta do facto de (i) os axiomas de $\mathcal{H}_p$ serem fórmulas válidas e de (ii) a conclusão da regra MP ser consequência semântica das suas premissas (Proposição 1.7.7). Como uma derivação de φ é uma sequência de fórmulas construída a partir de axiomas, fórmulas em Φ e aplicações de regras de inferência, os resultados (i) e (ii) permitem estabelecer o resultado de correcção pretendido (Proposição 1.7.8).

Proposição 1.7.7

1. Os axiomas de $\mathcal{H}_p$ são fórmulas válidas.
2. $\{\varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2\} \models \varphi_2$, para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in F'_P$.

Prova: 1. Considere-se o axioma A1. Seja V uma valoração. Se $V \Vdash \varphi_1$ então $V \Vdash \varphi_2 \to \varphi_1$ e portanto $V \Vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1)$. Se $V \nVdash \varphi_1$ então, de novo, $V \Vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1)$. Consequentemente, o axioma A1 é uma fórmula válida. Os outros casos deixam-se como exercício ao leitor.

2. Trivial. ■

Proposição 1.7.8 CORRECÇÃO DO SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{H}_p$
O sistema dedutivo $\mathcal{H}_p$ é correcto, ou seja, dados $\Phi \subseteq F'_P$ e $\varphi \in F'_P$,

$$\text{se } \Phi \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi \text{ então } \Phi \models \varphi$$

Prova: A prova decorre por indução no comprimento das derivações recorrendo à Proposição 1.7.7. ■

O resultado de completude do sistema $\mathcal{H}_p$ estabelece que se a fórmula φ é consequência semântica do conjunto de fórmulas Φ então φ é consequência de Φ em $\mathcal{H}_p$ (e portanto toda a fórmula válida é teorema de $\mathcal{H}_p$). A prova da propriedade de completude do sistema dedutivo $\mathcal{H}_p$ é bastante mais elaborada do que a prova da correcção e não irá ser aqui detalhada. O leitor interessado poderá consultar, por exemplo, [2]. Refira-se, no entanto, que muitas das provas de completude do sistema $\mathcal{H}_p$ que se encontram na literatura têm uma estrutura semelhante à da prova de completude do sistema $\mathcal{N}_p$ anteriormente apresentada neste texto.

Proposição 1.7.9 Completude do sistema dedutivo $\mathcal{H}_p$
O sistema dedutivo $\mathcal{H}_p$ é completo, isto é, dados $\Phi \subseteq F'_P$ e $\varphi \in F'_P$,

$$\text{se } \Phi \models \varphi \text{ então } \Phi \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi. \qquad \blacksquare$$

A prova desta proposição é deixada como exercício ao leitor (Exercício 1.7.13).

1.7.3 Exercícios

Propõem-se seguidamente alguns exercícios sobre os assuntos expostos.

Exercício 1.7.10 Na sequência ψ_1, ψ_2 e ψ_3 designam fórmulas arbitrárias de F'_P. Mostre que:

1. $\vdash_{\mathcal{H}_p} \psi_1 \to (\psi_2 \to (\psi_1 \to \psi_2))$
2. $\vdash_{\mathcal{H}_p} \psi_1 \to \psi_1$
3. $\vdash_{\mathcal{H}_p} \psi_1 \to (\neg(\neg\psi_1))$
4. $\{\neg\psi_1\} \vdash_{\mathcal{H}_p} \psi_1 \to \psi_2$
5. $\{\psi_2\} \vdash_{\mathcal{H}_p} \psi_1 \to \psi_2$
6. $\{\psi_1 \to (\neg\psi_3)\} \vdash_{\mathcal{H}_p} (\psi_3 \to \psi_1) \to (\neg\psi_3)$
7. $\vdash_{\mathcal{H}_p} (\psi_1 \to (\neg\psi_2)) \to (\psi_2 \to (\neg\psi_1))$
8. $\vdash_{\mathcal{H}_p} (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\psi_2 \to \psi_3) \to (\psi_1 \to \psi_3))$
9. $\vdash_{\mathcal{H}_p} ((\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1) \to \psi_1$ $\blacksquare$

Exercício 1.7.11 Após a leitura do capítulo **??**, volte a resolver os exercícios anteriores usando a ferramenta *Isabelle*. $\blacksquare$

Exercício 1.7.12 Apresente uma prova para a Proposição 1.7.6, isto é, mostre que se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi$ então $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi_n \to \varphi$, sendo $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \in F'_P$, $n \in \mathbb{N}_0$. Sugestão: Faça uma prova por indução no número de elementos da derivação que permite dizer que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi$. O axioma A1 é relevante na prova de certos casos da base de indução, bem assim como o facto de $\varphi \to \varphi$ ser teorema de $\mathcal{H}_p$. O axioma A2 é relevante na prova do passo de indução. $\blacksquare$

Exercício 1.7.13 Apresente uma prova para a Proposição 1.7.9, isto é, mostre que, sendo $\Phi \subseteq F'_P$ e $\varphi \in F'_P$, se $\Phi \models \varphi$ então $\Phi \vdash_{\mathcal{H}_p} \varphi$.

Sugestão: Um conjunto $\Psi \subseteq F'_P$ é $\mathcal{H}_p$-coerente se $\Psi \not\vdash_{\mathcal{H}_p} \perp$ e é $\mathcal{H}_p$-coerente maximal se é coerente e, para cada $\Psi' \subseteq F'_P$ $\mathcal{H}_p$-coerente, se $\Psi \subseteq \Psi'$ então $\Psi = \Psi'$. Mostre que:

(i) $\Psi \subseteq F'_P$ é $\mathcal{H}_p$-coerente maximal se Ψ é coerente e, para cada $\psi \in F'_P$, $\psi \in \Psi$ ou $\neg\psi \in \Psi$;

(ii) se $\Psi \subseteq F'_P$ é $\mathcal{H}_p$-coerente maximal então $\psi_1 \rightarrow \psi_2 \in \Psi$ se se $\psi_1 \in \Psi$ então $\psi_2 \in \Psi$;

(iii) se $\Psi \subseteq F'_P$ é $\mathcal{H}_p$-coerente então existe $\Psi' \subseteq F'_P$ $\mathcal{H}_p$-coerente maximal tal que $\Psi \subseteq \Psi'$ (recorde a construção feita no contexto da prova de completude do sistema $\mathcal{N}_p$);

(iv) se $\Psi \subseteq F'_P$ é $\mathcal{H}_p$-coerente então existe existe uma valoração V que satisfaz todas as fórmulas de Ψ (recorde a construção feita no contexto da prova de completude do sistema $\mathcal{N}_p$). ∎

Bibliografia

[1] M. D Agostino, D. Gabbay, R. Hahnle, and J. Possega (eds). *Handbook of tableau methods*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[2] J. Bell and M. Machover. *A Course in Mathematical Logic*. North-Holland, 1977.

[3] M. Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. Prentice Hall, 1993.

[4] E. Beth. *Semantic construction of intuitionistic logic*. North-Holland, 1956.

[5] E. Beth. *The Foundations of Mathematics*. N. V. Nort Holland, 1959.

[6] R. Epstein and W. Carnielli. *Computability: computable functions, logic and the foundations of mathematics*. Wadsworth, 2000. 2a edição.

[7] M. Fitting. *Proof methods for modal and intutionistic logics*. Reidel, 1983.

[8] M. Fitting. *First-order logic and automated theorem proving*. Springer Verlag, 1990.

[9] J. Gallier. *Logic for computer science*. John Wiley & Sons, 1987.

[10] G. Gentzen. Untersuchungen über das logishe schliessen i, ii. *Mathematische Zeitschrift*, 39:176–210, 405–431, 1935.

[11] S. Jáskowsski. On the rules of supposition in formal logic. *Studia Logica*, 1:5–32, 1934.

[12] D. Prawitz. *A Course in Mathematical Logic*. Almqvist & Wiksell, 1965.

[13] R. Smullyan. *First-Order Logic*. Springer Verlag, 1968.

[14] A. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, 1996.

[15] D. van Dalen. *Logic and structure*. Springer-Verlag, 1994.