# Lógica Computacional

## Aula Teórica 15: Dedução Natural em Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

3 de novembro de 2023

# Quantificador Universal: é fácil eliminar

## Eliminação do quantificador Universal

Se todos os indivíduos do universo satisfazem uma certa propriedade, então cada um em particular satisfaz essa propriedade.

$$\frac{\forall w \, P(w', w)}{P(w', z)}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \dfrac{\forall_x \varphi}{[\varphi]^x_t} \; (\forall_E) \end{array}$$

$t$ livre para $x$ em $\varphi$.

# Eliminação do Quantificador Universal

$$\frac{\forall x\, \psi}{[\psi]^{x}_{t}}\,(\forall_E)$$

$x \to y$

A seguinte árvore **não** é uma derivação de
$\{\forall_x \exists_y (x < y)\} \vdash \exists_y (y < y)$

$$\frac{\forall_x \exists_y (x < y)}{\exists_y (y < y)}\,(\forall_E)$$

O problema é que $y$ não é livre para $x$ em $\exists_y (x < y)$.

# Eliminação do Quantificador Universal

$$\{\forall_x (P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$$

$$\dfrac{\dfrac{\forall_x (P(x) \to Q(x))^1}{P(a) \to Q(a)}\,(\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\,(\to_E)$$

# Introdução do Quantificador Existencial

## Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo satisfaz uma propriedade, então existe algum indivíduo do universo que satisfaz essa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]_t^x\end{array}}{\exists_x \varphi}\ (\exists_I)$$

$\boxed{t \text{ livre para } x \text{ em } \varphi.}$

# Introdução do Quantificador Existencial

A seguinte árvore não é uma derivação de $\{\forall_x Eq(x,x)\} \vdash \exists_y \forall_x Eq(y,x)$

$$\frac{\forall_x Eq(x,x)}{\exists_y \forall_x Eq(y,x)}\ (\forall_E)$$

O problema é que $x$ não é livre para $y$ em $\forall_x Eq(y,x)$.

# Introdução do quantificador Existencial

$$\{\forall_x\,(P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash \exists_x\, Q(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x\,(P(x) \to Q(x))^1}{P(a) \to Q(a)}\,(\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\,(\to_E)}{\exists_x\, Q(x)}\,(\exists_I)$$

## Quantificador Universal: como introduzir?

Já introduzimos as duas regras mais simples:

- Eliminação do Universal
- Introdução do Existencial

Faltam as duas regras com condições mais complicadas:

- Introdução do Universal
- Eliminação do Existencial

# Quantificador Universal

$\forall_x \varphi \longrightarrow [\varphi]_y^x$

## Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]_y^x\end{array}}{\forall_x\, \varphi}\ (\forall_I)$$

Onde:

1. $y$ não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$;
2. ✓ se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

$D \rightarrow \neg VL$ $\quad D \wedge VL \quad \forall_x\ P(x,y)$

$\neg D \vee \neg VL$

# Quantificador Universal: como introduzir?

$$\{\forall_y\,(P(y) \to Q(y)), \forall_y\,P(y)\} \vdash \forall_x\,Q(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_y\,(P(y) \to Q(y))^1}{P(x) \to Q(x)}\,(\forall_E) \qquad \dfrac{\forall_y\,P(y)^2}{P(x)}\,(\forall_E)}{Q(\color{red}{x})}\,(\to_E)}{\forall_x\,Q(x)}\,(\forall_I)$$

$x$ é uma entidade arbitrária porque não ocorre nas hipóteses

# Quantificador Universal: condições

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x\,(P(x) \to Q(x))^1}{P(x) \to Q(x)}\,(\forall_E) \qquad P(x)^2}{Q(x)}\,(\to_E)}{\forall_x\,Q(x)}\,(\forall_I)$$

Esta árvore não é uma prova:
a variável $x$ na hipótese $P(x)$ representa uma entidade concreta (apesar de desconhecida), pelo que não pode ser abstraida.

# Quantificador Universal: como introduzir?

## E se há variáveis livres nas hipóteses fechadas?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P(x)^3}{\exists_x \neg P(x)}\,(\exists_I) \qquad \neg\exists_x \neg P(x)^2}{\bot}\,(\neg_E)}{P(x)}\,(\bot, 3)}{\forall_x P(x)}\,(\forall_I)$$

É uma prova válida para $\{\neg\exists_x \neg P(x)\} \vdash \forall_x P(x)$ porque $x$ apenas aparece livre numa hipótese fechada!

# Quantificador Universal: como introduzir?

Podemos abstrair usando outra variável.

Se temos $Q(y)$ e $y$ é arbitrário então podemos concluir $\forall_x Q(x)$.

$$\{\forall_x \forall_y P(x,y)\} \vdash \forall_y \forall_x P(y,x)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall_x \forall_y P(x,y)^1}{\forall_y P(z,y)}\ (\forall_E)}{P(z,x)}\ (\forall_E)}{\forall_x P(z,x)}\ (\forall_I)}{\forall_y \forall_x P(y,x)}\ (\forall_I)$$

$[\varphi]^{y}_{z}$

$y \to z$

# Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

1. $y$ não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$

não é satisfeita.

$$\frac{(y \leq 3)^1}{\forall_x (x \leq 3)} (\forall_I)$$

$[\varphi]^x_y$

y é livre ✓

Esta árvore não é uma prova:
$y$ ocorre livre na hipótese em aberto (1).

Quando abstraímos uma variável, ela tem de ser genérica.

# Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

2. se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

não é satisfeita.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_y\,(y \geq y)}{(y \geq y)}\,(\forall_E)}{\forall_x\,(x \geq y)}\,(\forall_I)}{\exists_y\,\forall_x\,(x \geq y)}\,(\exists_I)$$

Esta árvore não é uma prova:
$[(x \geq y)]_y^x = (y \geq y)$, mas $y$ ocorre livre em $(x \geq y)$.

Quando abstraímos uma variável, devemos abstrair todas as suas ocorrências.

# Quantificador Existencial: como eliminar?

## Ideia

Se a partir de $\varphi(y)$ com $y$ um elemento genérico, conseguirmos concluir $\psi$ (que não depende $y$), então podemos concluir $\psi$ a partir de $\exists\varphi(x)$.

## Requisitos

1. O indivíduo concreto que se assume ter a propriedade $\varphi$ deve ser genérico: não pode estar (livre) nas hipóteses abertas.
2. a propriedade a concluir não depende do indivíduo.

# Quantificador Existencial

## Regra de eliminação

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & ([\varphi]^x_y)^m \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists_x\,\varphi & \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists_E, m)$$

| a | b | P |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

Onde:

1. $y$ não ocorre livre nem em $\psi$ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $[\varphi]^x_y$
2. ✓ se $x \neq y$ então $y$ não ocorre livre em $\varphi$;
3. ✓ a marca $m$ apenas fecha (eventualmente) hipóteses $[\varphi]^x_y$ em $\mathcal{D}_2$.

# Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte não é uma prova de
$\{\exists_x\, Par(x), \forall_x\, (Par(x) \to Par(sq(x)))\} \vdash \forall_x\, Par(sq(x))$

$$\dfrac{\dfrac{(\exists_x\, Par(x))^1 \qquad \dfrac{\boxed{Par(x)^3} \qquad \dfrac{\boxed{(\forall_x\, (Par(x) \to Par(sq(x))))^2}}{Par(x) \to Par(sq(x))}\,(\forall_E)}{Par(sq(x))}\,(\to_E)}{Par(sq(x))}\,(\exists_E, 3)}{\forall_x\, Par(sq(x))}\,(\forall_I)$$

x livre

O problema é que a variável $x$ ocorre livre no nó $Par(sq(x))$.

# Eliminação do Existencial: condições

A árvore seguinte não é uma prova de
$\{P(a), Q(x)\} \vdash \exists_x \,(P(x) \wedge Q(x))$

?!!

$$\dfrac{\dfrac{P(a)^1}{\exists_x\, P(x)}\,(\exists_I) \qquad \dfrac{\dfrac{P(x)^3 \qquad Q(x)^2 \;\; 3}{P(x) \wedge Q(x)}\,(\wedge_I)}{\exists_x\,(P(x) \wedge Q(x))}\,(\exists_I)}{\exists_x\,(P(x) \wedge Q(x))}\,(\exists_E, 3)$$

O problema é que a variável $x$ ocorre livre na hipótese aberta $Q(x)$.

# Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte não é uma prova de
$\{\exists_x (Par(x) \wedge (y = 3))\} \vdash \exists_z(Par(z) \wedge (z = 3))$

$$\dfrac{(\exists_x (Par(x) \wedge (y = 3)))^1 \qquad \dfrac{(Par(y) \wedge (y = 3))^2}{\exists_z(Par(z) \wedge (z = 3))}\,(\exists_I)}{\exists_z(Par(z) \wedge (z = 3))}\,(\exists_E, 2)$$

Note-se que $Par(y) \wedge (y = 3) = [Par(x) \wedge (y = 3)]^x_y$.

O problema é que a variável $y$ é diferente de $x$ mas ocorre livre em $Par(x) \wedge (y = 3)$.

# Regras dos quantificadores

## ∀ - Eliminação

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \forall_x\,\varphi\end{matrix}}{[\varphi]^x_t}\;(\forall_E)$$

- $t$ livre para $x$ em $\varphi$

## ∃ - Introdução

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ [\varphi]^x_t\end{matrix}}{\exists_x\,\varphi}\;(\exists_I)$$

- $t$ livre para $x$ em $\varphi$

## ∀ - Introdução

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ [\varphi]^x_y\end{matrix}}{\forall_x\,\varphi}\;(\forall_I)$$

- $y$ não ocorre livre em hipóteses abertas de $\mathcal{D}$
- se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

## ∃ - Eliminação

$$\frac{\begin{matrix}\\ \mathcal{D}_1\\ \exists_x\,\varphi\end{matrix}\qquad\begin{matrix}([\varphi]^x_y)^m\\ \mathcal{D}_2\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\;(\exists_E, m)$$

- $y$ não ocorre livre em $\psi$ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ que não $[\varphi]^x_y$
- se $x \neq y$ então $y$ não ocorre livre em $\varphi$
- a marca $m$ apenas fecha (eventualmente) hipóteses $[\varphi]^x_y$ em $\mathcal{D}_2$

# Exemplos

Prove, usando Dedução Natural, os seguintes resultados:

1. $\{\forall_x\,(P(x) \wedge Q(x))\} \vdash \forall_x\,P(x) \wedge \forall_x\,Q(x)$
2. $\{\exists_x\,(P(x) \vee Q(x))\} \vdash \exists_x\,P(x) \vee \exists_x\,Q(x)$
3. $\{\exists_x\,\neg P(x)\} \vdash \neg\forall_x\,P(x)$
4. $\{\neg\forall_x\,\neg\varphi\} \vdash \exists_x\,\varphi$
5. $\{\exists_x(T(x) \wedge S(x)),\, \forall_x(S(x) \rightarrow L(x,b))\} \vdash \exists_x\exists_y L(x,y)$