Lógica Computacional

Aula Teórica 19: Exercícios de Resolução em Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

17 de novembro de 2023

Resolventes de Primeira Ordem

Seja:

- C_1 e C_2 duas cláusulas sem variáveis em comum
- A_1 e A_2 duas fórmulas atómicas tal que $A_1 \in C_1$ e $\neg A_2 \in C_2$
- $\{A_1, A_2\}$ é unificável
- σ o unificador mais geral de $\{A_1, A_2\}$

Então, a cláusula

$$[(C_1 - \{A_1\}) \cup (C_2 - \{\neg A_2\})]^\sigma$$

é um resolvente de C_1 e C_2.

E se duas cláusulas partilharem variáveis?

Aplicamos substituição a uma delas (ou às duas) mudando o nome das variáveis, de modo a não terem variáveis em comum.

Resolução em primeira ordem

O sistema dedutivo da Resolução é semelhante ao caso proposicional.
Dada uma fórmula φ tal que $FNS(\varphi)$, uma refutação de φ é uma sequência $C_1 \ldots C_n$ de cláusulas tal que:

- $C_n = \emptyset$

Cada C_i é:

- Uma das cláusulas de φ, ou
- obtida de cláusulas anteriores usando Resolução, ou
- renomeação de variáveis de cláusulas anteriores ou de φ

Teorema

Seja φ tal que $FNS(\varphi)$. Então:
φ é contraditória se e só se existe refutação de φ.

Nota: há casos patológicos em que uma definição mais geral de resolvente é necessária, mas não vamos explorar aqui.

Resolução e consequência semântica

Teorema

Dadas fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi, \gamma \in F_\Sigma^X$ então:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$$

se e só se

existe refutação de γ^S, com $\gamma = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi)$

Provar correcto um raciocínio

Como proceder?

1. Traduzir a afirmação para Lógica de Primeira Ordem:
   - $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$
2. Converter $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi)$ para FNCP.
3. Converter depois para FNS.
4. Usar resolução e encontrar refutação.

Representação do raciocínio

Base de conhecimento

1. Amigo do meu amigo, meu amigo é.
2. A amizade é uma relação simétrica.
3. O João é amigo do Rui.
4. A Ana é amiga do Rui.

Será que do conhecimento anterior se pode inferir que:

5. O João é amigo da Ana

Assinatura a usar

Considere-se uma assinatura de primeira ordem tal que:

- $\{joao, rui, ana\} \subseteq SF_0$
- $\{Amigo\} \subseteq SP_2$

Representação do raciocínio

Tradução para Lógica de Primeira Ordem

1. Amigo do meu amigo, meu amigo é.
$$\varphi_1 = \forall_x \forall_y \forall_z ((Amigo(x, y) \wedge Amigo(y, z)) \rightarrow Amigo(x, z))$$
2. A amizade é uma relação simétrica.
$$\varphi_2 = \forall_x \forall_y (Amigo(x, y) \rightarrow Amigo(y, x))$$
3. O João é amigo do Rui.
$$\varphi_3 = Amigo(joao, rui)$$
4. A Ana é amiga do Rui.
$$\varphi_4 = Amigo(ana, rui)$$
5. O João é amigo da Ana
$$\varphi_5 = Amigo(joao, ana)$$

Representação do raciocínio

Afirmação a provar

Base de conhecimento (1)-(4) tem como consequência (5) , isto é:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$$

Vamos usar usar Resolução para provar que

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \neg\varphi_5$$

é contraditória.

Conversão para FNS

Para conjunções, podemos colocar cada elemento na FNCP e depois tratamos de colocar os quantificadores no início da fórmula.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall_x \forall_y \forall_z ((Amigo(x,y) \wedge Amigo(y,z)) \rightarrow Amigo(x,z)) \\
&\equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg (Amigo(x,y) \wedge Amigo(y,z)) \vee Amigo(x,z)) \\
&\equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg Amigo(x,y) \vee \neg Amigo(y,z) \vee Amigo(x,z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \forall_x \forall_y (Amigo(x,y) \rightarrow Amigo(y,x)) \\
&\equiv \forall_x \forall_y (\neg Amigo(x,y) \vee Amigo(y,x))
\end{aligned}$$

φ_3, φ_4 e $\neg\varphi_5$ já estão na FNCP.

Conversão para FNS

Trocando os nomes das variáveis quantificadas, obtemos então:

$$\forall_{x_0}\forall_{x_1}\forall_{x_2}(\neg Amigo(x_0, x_1) \vee \neg Amigo(x_1, x_2) \vee Amigo(x_0, x_2)) \wedge$$
$$\forall_{x_3}\forall_{x_4}(\neg Amigo(x_3, x_4) \vee Amigo(x_4, x_3)) \wedge$$
$$Amigo(joao, rui) \wedge Amigo(ana, rui) \wedge \neg Amigo(joao, ana)$$

Movendo os quantificadores para o início da fórmula, obtemos:

$$\forall_{x_0}\forall_{x_1}\forall_{x_2}\forall_{x_3}\forall_{x_4}($$
$$(\neg Amigo(x_0, x_1) \vee \neg Amigo(x_1, x_2) \vee Amigo(x_0, x_2)) \wedge$$
$$(\neg Amigo(x_3, x_4) \vee Amigo(x_4, x_3)) \wedge$$
$$Amigo(joao, rui) \wedge Amigo(ana, rui) \wedge \neg Amigo(joao, ana))$$

Está na FNS.

Representação em cláusulas

Temos então 5 cláusulas:

$$C_1 = \{\neg Amigo(x_0, x_1),\ \neg Amigo(x_1, x_2),\ Amigo(x_0, x_2)\}$$
$$C_2 = \{\neg Amigo(x_3, x_4),\ Amigo(x_4, x_3)\}$$
$$C_3 = \{Amigo(joao, rui)\}$$
$$C_4 = \{Amigo(ana, rui)\}$$
$$C_5 = \{\neg Amigo(joao, ana)\}$$

Resolução: o conjunto de cláusulas é contraditório

$$C_1 = \{\neg Amigo(x_0, x_1),\ \neg Amigo(x_1, x_2),\ Amigo(x_0, x_2)\}$$
$$C_2 = \{\neg Amigo(x_3, x_4),\ Amigo(x_4, x_3)\}$$
$$C_3 = \{Amigo(joao, rui)\}$$
$$C_4 = \{Amigo(ana, rui)\}$$
$$C_5 = \{\neg Amigo(joao, ana)\}$$

	Dedução	Justificação
1	$\{\neg A(joao, ana)\}$	C_5
2	$\{(\neg A(x_0, x_1),\ \neg A(x_1, x_2),\ A(x_0, x_2))\}$	C_1
3	$\{(\neg A(joao, x_1),\ \neg A(x_1, ana)\}$	Res(1,2) $\{x_0/joao,\ x_2/ana\}$
4	$\{A(joao, rui)\}$	C_3
5	$\{\neg A(rui, ana)\}$	Res(3,4) $\{x_1/rui\}$
6	$\{\neg A(x_3, x_4),\ A(x_4, x_3)\}$	C_2
7	$\{\neg A(ana, rui)\}$	Res(5,6) $\{x_3/ana,\ x_4/rui\}$
8	$\{A(ana, rui)\}$	C_4
9	$\emptyset$	Res(7,8)

Mais um exemplo

Mostre, usando Resolução, a seguinte consequência semântica:

$$\{\exists_x P(f(x)), \exists_x P(x) \to (\forall_x S(x) \vee \forall_x Q(x)), \exists_x \neg S(x)\} \models Q(a)$$

Vamos mostrar que a seguinte fórmula é contraditória:

$$\varphi = \exists_x P(f(x)) \wedge (\exists_x P(x) \to (\forall_x S(x) \vee \forall_x Q(x))) \wedge \exists_x \neg S(x) \wedge \neg Q(a)$$

Vamos começar por colocar na FNCP:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \exists_x P(f(x)) \wedge (\neg\exists_x P(x) \vee (\forall_x S(x) \vee \forall_x Q(x))) \wedge \exists_x \neg S(x) \wedge \neg Q(a) && [\textbf{passo}(1)]\\
&\equiv \exists_x P(f(x)) \wedge (\forall_x \neg P(x) \vee (\forall_x S(x) \vee \forall_x Q(x))) \wedge \exists_x \neg S(x) \wedge \neg Q(a) && [\textbf{passo}(2)]\\
&\equiv \exists_{x_1} P(f(x_1)) \wedge (\forall_{x_2} \neg P(x_2) \vee \forall_{x_3} S(x_3) \vee \forall_{x_4} Q(x_4)) \wedge \exists_{x_5} \neg S(x_5) \wedge \neg Q(a) && [\textbf{passo}(3)]\\
&\equiv \exists_{x_1}\forall_{x_2}\forall_{x_3}\forall_{x_4}\exists_{x_5}(P(f(x_1)) \wedge (\neg P(x_2) \vee S(x_3) \vee Q(x_4)) \wedge \neg S(x_5) \wedge \neg Q(a)) && [\textbf{passo}(4)]
\end{aligned}$$

Esta última fórmula está na FNP. Na verdade está na FNCP.

Colocar na FNS

$$\forall_{x_2}\forall_{x_3}\forall_{x_4}(P(f(b)) \wedge (\neg P(x_2) \vee S(x_3) \vee Q(x_4)) \wedge \neg S(g(x_2, x_3, x_4)) \wedge \neg Q(a))$$

Resolução: o conjunto de cláusulas é contraditório

$$C_1 = \{P(f(b))\}$$
$$C_2 = \{\neg P(x_2), S(x_3), Q(x_4)\}$$
$$C_3 = \{\neg S(g(x_2, x_3, x_4))\}$$
$$C_4 = \{\neg Q(a)\}$$

	Dedução	Justificação
1	$\{P(f(b))\}$	C_1
2	$\{\neg P(x_2), S(x_3), Q(x_4)\}$	C_2
3	$\{S(x_3), Q(x_4)\}$	Res(1,2) $\{x_2/f(b)\}$
4	$\{\neg Q(a)\}$	C_4
5	$\{S(x_3)\}$	Res(3,4) $\{x_4/a\}$
6	$\{\neg S(g(x_6, x_7, x_8))\}$	$C_3\{x_2/x_6, x_3/x_7, x_4/x_8\}$
7	$\emptyset$	Res(5,6)$\{x_3/g(x_6, x_7, x_8)\}$

Resolução: exercícios

Usando resolução, mostre que:

1. $\exists_x \forall_y P(x,y) \models \forall_y \exists_x P(x,y)$
2. $\models \exists_x \forall_y \forall_z ((P(y) \rightarrow Q(z)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x)))$
3. $\{\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)\} \models \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$