

FLOYD WARSHALL

FAGADAU DANIEL

845279



FLOYD WARSHALL

Dato un grafo orientato e pesato $G = (V, E)$ con W matrice dei pesi dove $\forall i, j \ w_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \text{peso arco } (i, j) & \text{se } (i, j) \in E \\ \infty & \text{se } (i, j) \notin E \end{cases}$

PROBLEMA: Calcolare $\forall (i, j)$ il peso di un cammino minimo da i a j .

SOLUZIONE: Algoritmo di FW che è un algoritmo di programmazione dinamica.

Di conseguenza dobbiamo definire i sotto problemi e le loro istanze.

Il sottoproblema k -esimo sarà definito come:

$\forall (i, j)$ tutti i cammini da i a j con vertici intermedi $\in \{1, \dots, k\}$

ATTENZIONE: **NON** significa con k vertici intermedi!

Soluzione sotto problema: $D^{(k)} = (d_{i,j}^{(k)})_{i,j \in V}$

Soluzione problema originale: $D^{(n)} = (d_{i,j}^{(n)})_{i,j \in V}$

CASO BASE

$k = 0$

$$\forall (i, j) \in V^2 \ d_{i,j}^{(0)} w_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \text{peso arco } (i, j) & \text{se } (i, j) \in E \\ \infty & \text{se } (i, j) \notin E \end{cases}$$

Di conseguenza, $D^{(0)} = W$.

CASO PASSO

$k > 0$

Assumiamo di aver già calcolato i sotto problemi più piccoli.

$$d_{i,j}^{(k)} = \min\{d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}\}$$

ATTENZIONE: Nello svolgimento degli esercizi di questo tipo spesso conviene pensare prima al caso passo, suddividendolo in due sotto casi; $k \in$ cammino minimo e $k \notin$ cammino minimo, unendoli poi alla fine in un'unica equazione ricorsiva e stabilendo poi il caso base.

ESERCIZI VISTI

LUNGHEZZA $\leq L$

Dato un grafo $G = (V, E, W)$ pesato, orientato e senza cappi e dato un intero $L > 0$, calcolare $\forall (i, j) \in V^2$ il peso di un cammino minimo da i a j di lunghezza $\leq L$

INPUT: $G = (V, E, W)$ L

SOTTO PROBLEMA: definito da $k \in \{0, \dots, n\}$ e da $l \in \{0, \dots, L\}$

$\forall (i, j) \in V^2$ calcolare il peso di un cammino minimo da i a j

- utilizzando vertici intermedi appartenenti a $\{1, \dots, k\}$
- di lunghezza $\leq l$

DEFINIZIONE VARIABILI

Per ogni sotto problema avremo quindi una variabile $D^{(k,l)} = (d_{i,j}^{(k,l)})$ dove $\forall (i, j) d_{i,j}^{(k,l)}$ è il peso del cammino minimo da i a j con vertici intermedi $\in \{1, \dots, k\}$ di lunghezza $\leq l$.

CASO BASE (k, l) con $k = 0$

$$d_{i,j}^{(0,l)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

CASO PASSO (k, l) con $k > 0 \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}$

Caso 1: $k \notin$ cammino minimo $\rightarrow d_{i,j}^{(k,l)} = d_{i,j}^{(k-1,l)}$

Caso 2: $k \in$ cammino minimo \rightarrow Da i a k ho un cammino $\leq l_1$, da k a j $\leq l_2$, devo far in modo che il cammino che scelgo sia $l_1 + l_2 \leq l$

$$e_1 : d_{i,j}^{(k,l)} = \min \{ d_{i,k}^{(k-1,l_1)} + d_{k,j}^{(k-1,l_2)} \} \text{ con } l_1 \in \{1, \dots, l\}, l_2 \in \{1, \dots, l\} \text{ e } l_1 + l_2 \leq l$$

Tuttavia questo vale solo per $l > 1$.

Se $l = 1$ e $k \in$ cammino minimo, $d_{i,j}^{(k,l)} = \infty$ poiché non esiste un cammino di lunghezza 1 che abbia $k > 0$ vertici intermedi.

Quindi nel caso 2 avremo:

$$e_2 : d_{i,j}^{(k,l)} = \begin{cases} \min_{(l_1, l_2) \in \{0, \dots, l\}^2 : l_1 + l_2 \leq l} \{ d_{i,k}^{(k-1,l_1)} + d_{k,j}^{(k-1,l_2)} \} & \text{se } l > 1 \\ \infty & \text{se } l = 1 \end{cases}$$

Questo è ovviamente nel caso 2, noi dobbiamo prendere il migliore tra il caso 1 e il caso 2 (*in questo caso il minimo*).

EQUAZIONE DI RICORRENZA

$$d_{i,j}^{(k,l)} = \min \{ e_1, e_2 \}$$

SOLUZIONE

La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n, L)}$.

R ARCHI ROSSI

Dato un grafo $G = (V, E, W, \text{col})$ senza cappi dove $\text{col}: E \rightarrow \{\text{Red}, \text{Blue}\}$ calcolare $\forall (i, j) \in V^2$ il peso di un cammino minimo da i a j con esattamente 3 archi rossi. ($R = 3, n = |V|$).

INPUT: $G = (V, E, W, \text{col})$ R

SOTTO PROBLEMA: definito da $k \in \{0, \dots, n\}$ e $r \in \{0, \dots, R\}$

$\forall (i, j) \in V^2$ calcolare il peso di un cammino minimo da i a j con vertici intermedi $\in \{0, \dots, k\}$ con esattamente r archi rossi.

DEFINIZIONE VARIABILI: per ogni sottoproblema abbiamo $D^{(k,r)} = (d_{i,j}^{(k,r)})$.

CASO BASE $k = 0 \wedge r \in \{0, \dots, R\}$

Caso 1: $r = 0$

$$d_{i,j}^{(0,0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \wedge \text{col}(i, j) \neq \text{Red} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ATTENZIONE: varrà infinito anche se l'arco esiste ma è di colore rosso in questo caso.

Caso 2: $r = 1$

$$d_{i,j}^{(0,1)} = \begin{cases} \infty & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \wedge \text{col}(i, j) = \text{Red} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ATTENZIONE: Voglio un cammino che abbia 1 arco rosso; se $i = j$ l'arco non c'è, di conseguenza non posso avere un cammino con 1 arco rosso.

Caso 3: $r > 1$

$$d_{i,j}^{(0,r)} = \infty$$

ATTENZIONE: In questo caso viene sempre infinito poiché con 0 vertici intermedi posso avere al più un arco, di conseguenza non avrò mai un cammino con $r > 1$ archi rossi.

CASO PASSO $k > 0 \wedge r \in \{0, \dots, R\}$

Caso 1: $k \notin$ cammino minimo

$$e_1 : d_{i,j}^{(k,r)} = d_{i,j}^{(k-1,r)}$$

Caso 2: $k \in$ cammino minimo

$$e_2 : d_{i,j}^{(k,r)} = \min_{(r_1, r_2) \in \{0, \dots, r\}^2 : r_1 + r_2 = r} (d_{i,k}^{(k-1,r_1)} + d_{k,j}^{(k-1,r_2)})$$

EQUAZIONE DI RICORRENZA

$$d_{i,j}^{(k,r)} = \min\{e_1, e_2\}$$

Un ulteriore caso base potrebbe essere se $r > k + 1$, in quel caso sicuramente non posso avere r archi rossi, ma possiamo anche lasciare così le equazioni.

SOLUZIONE

La soluzione del problema originale sarà in $D^{(n, R)}$.

ESISTE CAMMINO CON COLORI ALTERNATI

Dato un grafo orientato $G = (V, E, \text{col})$ senza cappi dove $\text{col}: E \rightarrow \{\text{Red}, \text{Blue}\}$ stabilire $\forall (i, j) \in V^2$ se \exists un cammino da i a j nel quale non vi siano 2 archi consecutivi Red.

INPUT: $G = (V, E, \text{col})$

SOTTOPROBLEMA: definito da $k \in \{0, \dots, n\}$

DEFINIZIONE VARIABILI: Per ogni sotto problema abbiamo $D^{(k)} = (d_{i,j}^{(k)})$ dove $d_{i,j}^{(k)}$ vale TRUE sse \exists un cammino da i a j senza 2 archi rossi consecutivi con vertici intermedi $\in \{0, \dots, k\}$.

Notiamo che per poter dire se possiamo unire due cammini (*nel caso in cui $k \in$ cammino minimo ad esempio*) dobbiamo sapere con che archi iniziano e finiscono i vari cammini; ci **manca informazione!**

La soluzione è quindi introdurre un **problema ausiliario** leggermente modificato;

Dato un grafo orientato $G = (V, E, \text{col})$ senza cappi dove $\text{col}: E \rightarrow \{\text{Red}, \text{Blue}\}$ **e data** $(a, b) \in \{\text{Red}, \text{Blue}\}^2$ stabilire $\forall (a, b) \in \{\text{Red}, \text{Blue}\}^2, \forall (i, j) \in V^2$ se \exists un cammino da i a j nel quale non vi siano 2 archi consecutivi Red **e con colore del primo arco = a e colore dell'ultimo arco = b .**

SOTTOPROBLEMA AUSILIARIO: definito da $k \in \{0, \dots, n\}$ e da $a, b \in \{\text{Red}, \text{Blue}\}$

DEFINIZIONE VARIABILI: Per ogni sotto problema abbiamo $D^{(k, a, b)} = (d_{i,j}^{(k, a, b)})$ dove $d_{i,j}^{(k, a, b)}$ vale TRUE sse \exists un cammino da i a j senza 2 archi rossi consecutivi con vertici intermedi $\in \{0, \dots, k\}$ e con colore primo arco = a e con colore ultimo arco = b .

CASO BASE: $k = 0$

$$\forall (a, b) \in \{R, B\}^2 : d_{i,j}^{(0, a, b)} = \begin{cases} FALSE & \text{se } i = j \\ TRUE & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \wedge \text{col}(i, j) = a \wedge \text{col}(i, j) = b \\ FALSE & \text{altrimenti} \end{cases}$$

CASO PASSO: $k > 0 \forall (a, b)$

Caso 1: $k \notin$ cammino minimo

$$e_1 : d_{i,j}^{(k, a, b)} = d_{i,j}^{(k-1, a, b)}$$

Caso 2: $k \in$ cammino minimo

$$e_2 : d_{i,j}^{(k, a, b)} = \bigvee_{(c,d) \in \{R, B\}^2 : (c,d) \neq \{R, R\}} (d_{i,j}^{(k-1, a, c)} \wedge d_{i,j}^{(k-1, d, b)})$$

EQUAZIONE DI RICORRENZA:

$$d_{i,j}^{(k, a, b)} = e_1 \vee e_2$$

SOLUZIONE PB AUX: $\forall (a, b)$ la soluzione del PB AUX definito da (a, b) è $D^{(n, a, b)}$

SOLUZIONE PB DATO: $D_{i,j} = \bigvee_{(a,b) \in \{R, B\}^2} (d_{i,j}^{(n, a, b)})$

ATTENZIONE: Da notare come nella soluzione **non** escludiamo le coppie $\{R, R\}$ come facciamo nel caso passo; in quel caso lo facciamo perché se unissimo un cammino che finisce col rosso e uno che inizia col rosso avremmo due archi rossi consecutivi, nella soluzione finale non ci importa se il cammino minimo inizi e finisca col rosso, basta che non ce ne siano di consecutivi!