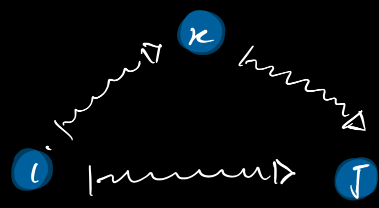
* CAMMINO MINIMO SENZA VERTICI CONSECUTIVI ROSSI:

1.1 Problema PB

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $v \in V$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.



ISTANZA:

$G = (V, E, W, col)$

$col : V \mapsto \{R, N\}$ (rosso, nero)

SOLUZIONE:

$\forall (i, j) \in V^2$

"peso di un cammino p da i a j in cui non compaiono 2 vertici consecutivi rossi."

PER RISOLVERLO, MI APPOGGIO AL PROBLEMA-AUX DEFINITO DA:

$k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\forall (i, j)$

$D^{(k)} \to$ matrice di:

$d_{i,j}^{(k)} =$ "peso minimo di un cammino da i a j, e con vertici intermedi $\in \{1, \dots, k\}$"

CASO BASE:

$k = 0$:

Quando $k = 0$, le possibilità sono:

$$\begin{cases} W(i,j) & \text{SE } (i,j) \in E \wedge (col(i) \neq R \vee col(j) \neq R) \wedge i \neq j \\ \infty & \text{SE } (i,j) \notin E \wedge (i \neq j) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CASO PASSO:

Supponendo risolti i sotto-problemi generici del caso base, l'aumento di complessità equivale ad aggiungere un nodo k all'insieme dei possibili intermedi.

Il passaggio per il nuovo nodo può migliorare o peggiorare i cammini minimi trovati fino ad ora. Ne consegue che i casi passo, sono:

$k > 0$ ∧

- **$k \notin P$** → se non migliora un percorso da i a j già calcolato con $k-1$ nodi intermedi.

  In questo caso p non fa parte della soluzione.
  In formule:

$$d_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{(k-1)}$$

- **$k \in P$** → se invece migliora la soluzione, allora il cammino da i a j con k intermedio, risulta essere la "concatenazione" del cammino da i a k e da k a j.

  In formule:

$$d_{ij}^{(k)} = d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$$

Per stabilire, senza sapere a priori se $k \in P$ oppure $k \notin P$:

$$d_{ij}^{(k)} = \min \left\{ d_{ij}^{(k-1)} , d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$$

ALGORITMO: (sul pdf, scriverlo qui è lungo).

SOLUZIONE:

Le equazioni di ricorrenza precedentemente calcolate, ci permettono di ottenere tutti i $d_{ij}^{(n)}$, $\forall (i,j) \in V^2$.

⇝ LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA è costituita da tutti i valori di $D^{(n)}$.

→ ESISTENZA DI CAMMINI, SENZA VERTICI CONSECUTIVI ROSSI

2.1 Problema PB

Dato un grafo $G = (V, E, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $v \in V$ un colore, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$, l'esistenza di un cammino p da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.

↳ RISPETTO A PRIMA É UN PROBLEMA DI ESISTENZA.

Vogliamo sapere:

1) COEFFICIENTI PER RISOLVERE IL PROBLEMA
2) SCRIVERE LA/LE EQUAZIONE/I DI RICORRENZA PER IL CASO BASE
3) " " IL CASO RICORSIVO.
4) QUAL É IL VALORE DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DATO.
5) SCRIVERE L'ALGORITMO BOTTOM-UP DELLA SOLUZIONE.
6) SCRIVERE L'ALGORITMO CHE RICOSTRUISCE IL SOTTO-INSIEME.

coefficienti) $D^{(k)}$ = macro-variabile, matrice di elementi $d_{ij}^{(k)}$:

$d_{ij}^{(k)}$ = micro-variabile = "Esistenza di un cammino da i a j con le possibili nodi intermedi".

caso base) $k = 0$

$$d_{ij}^{0} = \begin{cases} 1, & \text{SE } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge (col(i) \neq \text{"R"} \vee col(j) \neq \text{"R"}) \\ 1, & \text{SE } i = j \wedge (i,j) \in E \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

caso passo) $k > 0 \wedge$:

- $k \in p$, ALLORA $d_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{(k-1)}$

- $k \notin P$, ALLORA $d_{ij}^{(k)} = d_{ik}^{(k-1)} \wedge d_{kj}^{(k-1)}$

NON SAPENDO SE $k \in P \vee k \notin P$, L'EQUAZIONE DI RICORRENZA DEL C. PASSO DIVENTA:

$$d_{ij}^{(k-1)} \vee \left(d_{ik}^{(k-1)} \wedge d_{kj}^{(k-1)} \right)$$

Valore soluzione)

$D^{(n)} \rightarrow \forall (i,j) \in V^2$ so $\rightarrow$ se esiste $i \rightsquigarrow j$, con k intermedi.

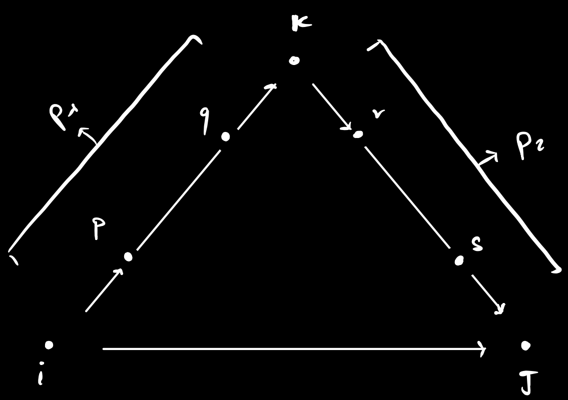
Algoritmo bottom-up) PDF

3 Cammini minimi senza archi consecutivi rossi

3.1 Problema PB

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : E \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $(i, j) \in E$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui non vi siano due archi consecutivi di colore rosso.

Approccio un po' diverso dai problemi precedenti.
In questo caso abbiamo bisogno di un problema ausiliario:



- Perché ho bisogno di un sottoproblema?

p1 e p2 possono anche non avere individualmente 2 archi consecutivi rossi, ma la loro unione sì!

Se (q, k) e (k, r) son entrambi rossi, il nuovo cammino $p = p_1 + p_2$ non rispetta la condizione del problema.

↳ genero un cammino "sbagliato".

Le nuove informazioni che mi servono sono i COLORI DEGLI ARCHI INIZIALI e TERMINALI nei cammini p_1 e p_2.

Almeno → posso controllare che (q, k) → finale di p_1 e (k, r) → iniziale p_2 siano compatibili.

↳ Problema aux: $d_{ijab}^{(k)}$

Poi nel problema originale il minimo da i a j sarà:

$$\min \{ d_{ijab}^{(n)}, \text{ con } a, b \in (N \times R) \}$$