RIPRENDENDO DISCORSO SULLA LCS: ragionamento "evolutivo" $\simeq$ LCS iterativo $T(n) = \mathcal{P}(X,Y) \rightarrow$ LCS ricorsivo $\rightarrow$ LCS dinamico

Eravamo a: scrivere il problema come combinazione di sottoproblemi.] $n+1 \cdot m+1$, con $n=|X|$ e $m=|Y|$

$\langle\rangle$ $\langle\rangle$

SOTTOPROBLEMI:

$S^{m,n} = \{ \dots S^{m-1,n-1} \dots S^{m,n-k} \dots S^{0,2} \dots \}$ Problema grosso = combinazione di sotto problemi

↓

STESSO PROBLEMA, ISTANZA PIÚ PICCOLA (PREFISSI DI X e Y).

PROBLEMA IN TERMINI RICORSIVI

- Quale dei sottoproblemi sono "caso base"? QUANDO ISTANZA COLLASSA IN: X_i, Y_J dove $i=0 \lor J=0$

  ↳ IN QUESTO CASO $|S^{i,J}| = 0$

- Qual é la regola ricorsiva?

  DATO IL GENERICO SOTTOPROBLEMA (i,J) CON $i>0$ e $J>0$.
  "Assumendo di avere giá risolto i problemi piú piccoli"
  ↳ come nel mergeSort.

  } PREFISSI $(\bar{i}, \bar{J})$: $\bar{i} < i$ e $\bar{J} < J$

  ↓

  $S^{(i,J)} = \{ S^{0,0}, S^{0,1} \dots S^{i,0}, S^{i,1} \dots S^{i,J-1} \}$

REGOLA RICORSIVA:

Teorema: Sia (i,J) una generica coppia con $i>0$ e $J>0$, che individua il sottoproblema X_i e Y_J; Z_k soluzione del sottoproblema i,J, ha forma:

↓

$$\left.\begin{array}{l} X_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel \\ Y_J = \langle y_1, \dots, y_J \rangle \end{array}\right] \rightarrow S^{i,J} = Z_k = \langle z_1, \dots z_k \rangle, \quad z_k = x_i = y_J$$

E Z_{k-1} é soluzione del sottoproblema $S^{i-1,J-1}$

1° PASSO RICORSIVO: $S^{i,J} = S^{(i-1, J-1)} \mid \langle x_i \rangle$ SE $x_i = y_J \rightarrow$ CASO 1

INTRODUZIONE NUOVA VARIABILE:

$S^{i,j}$ → soluzione (sequenza) i,j

$C_{i,j}$ = lunghezza $|S^{i,j}|$ (numero) } "DEFINIRE VAR. PROBLEMA"

↳ MEMORIZZATE (ogni sottoseq. ne ha una), in una MATRICE. → LE VARIABILI DEL PROBLEMA DEFINISCONO LA S.D DA UTILIZZARE.

2° PASSO RICORSIVO:

Soluzione (che supponiamo già di avere)

↑

2) Se $x_i \neq y_j$ ⇒ 2a) Se $z_k \neq x_i$, allora $\boxed{S^{i,j} = S^{i-1,j}}$ ≃ "x_i non sta nella soluzione"

2b) Se $z_k \neq y_j$, allora $\boxed{S^{i,j} = S^{i,j-1}}$ ≃ "y_j non sta nella soluzione"

A priori però → non ho z_k per il confronto } per questo mi affido alla ricorsività doppia:

$$\boxed{S^{i,j} = \max\{S^{i-1,j} ; S^{i,j-1}\}}$$

→ lungh.

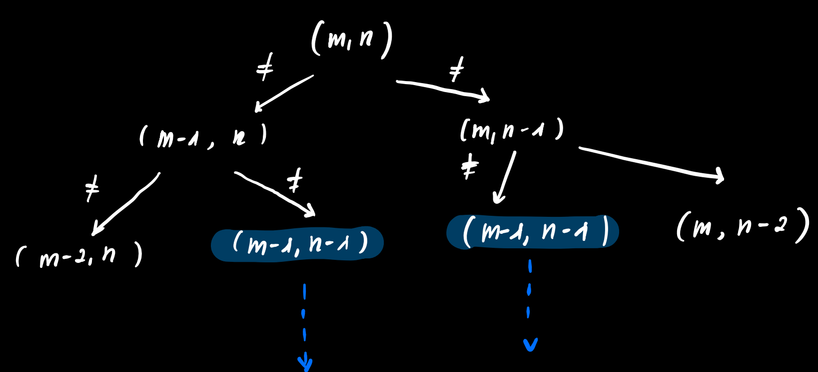
$$\begin{cases} C_{ij} = C_{i-1,j-1} + 1 & \text{se } x_i = y_j \\ C_{i,j} = C_{i-1,j} & \text{se } x_i \neq y_j \\ C_{i,j} = C_{i,j-1} & \text{se } y_j \neq x_i \end{cases} \Bigg] \max(C_{i-1,j} ; C_{i,j-1}) \; ?$$

ALGORITMO RICORSIVO:

```
LCS_R( X; Y; i, j ) {
   if (i=0  V  j=0) }
       return ε ; → <>
   } else {
       if ( xi == yj ) }                      concat.
          return  LCSR(X, Y, i-1, j-1) | xi ;
       } else {
          W = LCS_R (X, Y, i-1, j) ;
          R = LCS_R (X, Y, i, j-1) ;

          if (|W| > |R|) {
               return W ;
          } else {
```

ALBERO:



"campane" uguali!

SPRECO!

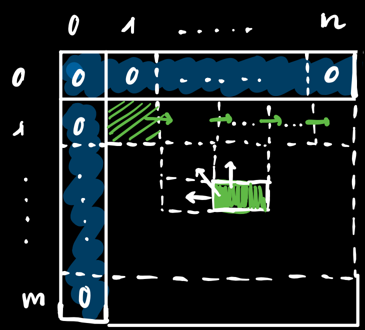
```
            return R ;
        }
    }
}
```

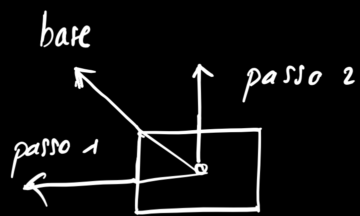
BOTTOM-UP : QUANTE VARIABILI HO NEL PROBLEMA? 2 < i, J

OGNI CASELLA S_{ij}

→ caso base!

→ caso passo!





PROBLEMA "RIDOTTO": Date 2 sequenze, calcolare la LUNGHEZZA della LCS.

$$
\hookrightarrow \begin{cases} i=0 \lor j=0 & c_{ij}=0 \quad \text{se } x_i = y_j \\ c_{i-1,j-1}+1 & \text{se } x_i = y_j \\ \max\{c_{i-1,j} \,;\, c_{i,j-1}\} & \text{se } x_i \neq y_j \end{cases}
$$

→ L'ALGORITMO PURO, QUASI UGUALE A PRIMA.

ALGORITMO BOTTOM-UP : (con matrice)

```
LCS (C_mxn , i, j ) {

    // RIEMPIO CON C. BASE
    for (j=0 to n){
            C_0,j = 0 ;
    }

    // RIEMPIO CASO BASE
    for (i=1 to m){
            C_i,0 = 0;
    }

    for (i=1 to m) {
        for (j=1 to n) {
```

ESEMPIO:

$|X| = \langle a, b, c, b, d, a, b \rangle = 7$

$|Y| = \langle b, d, c, a, b, a \rangle = 6$

		b	d	c	a	b	a
	0	1	2	3	4	5	6
	0						
a	1						
b	2						
c	3						
b	4						
d	5						
a	6						
b	7						

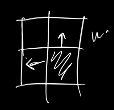
if $(x_i = y_j) \rightarrow c_{i-1,j-1} + 1;$
else $\rightarrow \max\{c_{i-1,j},\ c_{i,j-1}\}$ → riempio la matrice.
}

return $C_{m,n}$.
}

		0	1 (b)	2 (d)	3 (c)	4 (a)	5 (b)	6 (a)
	0							
a	1							
b	2							
c	3							
b	4							
d	5							
a	6							
b	7							

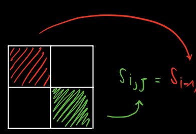
X =	Y =	ε	B	C	D	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
ε →	0	0	0	0	0	0	0	0
A →	1	0	0	0	0	1	0	1
B →	2	0	1	1	1	1	2	2
C →	3	0						
B →	4	0						
D →	5	0						
A →	6	0						
B →	7	0						

se $x_i \neq y_j$



CASO BASE:

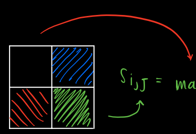
se $x_i = y_j$; $R = LCS(x_{i-1}, y_{j-1}) + 1$



$S_{i,j} = S_{i-1,j-1} + 1$

CASO PASSO:

se $x_i \neq y_j$; $R = \max\{LCS(x_{i-1}; y_j); LCS(x_i; y_{j-1})\}$



$S_{i,j} = \max\{\ \underset{S_{i,j-1}}{■},\ \underset{S_{i-1,j}}{■}\ \}$