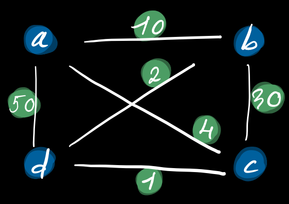
TSP (traveling salesman problem) → esempio di non applicabilità del GREEDY

Dato: **G** = (V,E) **completo** e **pesato**.

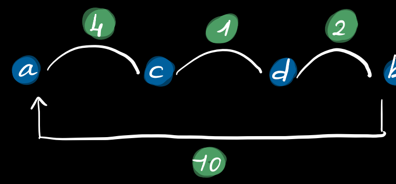
Determinare: un percorso tra i vertici t.c.:

- Passi una ed una sola volta per i vertici
- Abbia costo totale minimo.

esempio:

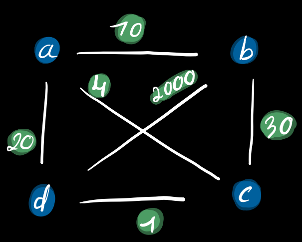


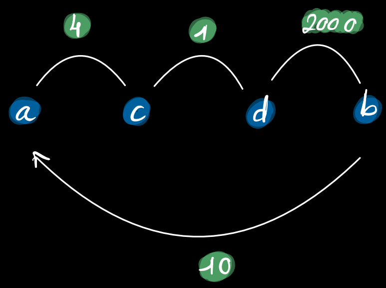
il percorso: HA PESO 17



→ ho preso ogni volta l' arco con peso minore.

Controesempio:





Non funziona perchè → scegliendo un percorso rispetto ad un altro, escludo altre possibilità. Prendendo una decisione <u>ottima localmente</u>, escludo altre decisioni ottime <u>globalmente</u>.

↳ Te greedy non mi permette di avere una visione "globale", perché prende sempre la "decisione migliore al momento".

PROBLEMA DEL BALLO:

$U = \{u_1, u_2 \dots u_n\}$ = "altezze uomini"

$D = \{d_1, d_2 \dots d_n\}$ = "altezze donne"

$$\min \sum_{i=1}^{n} |u_i - d_i|$$

IDEA:

Prendiamo ogni u_i e cerchiamo tra le d_J, quella t.c: $|u_i - d_J| \to$ minore possibile, ne facciamo una coppia e la aggiungiamo all' insieme soluzione.

* Questo GREEDY FUNZIONA?

Ancora una volta, NO. Controesempio:

$U = \{15, 4\}$

$D = \{10, 21\}$

$\to S = \{(15,10) ; (4, 21)\}$ diff $(S) = 5 + 17 = 24$

Se avessi preso $\{(15, 21) ; (4, 10)\}$ diff $(S) = 6 + 6 = 12$

* SE ORDINIAMO FUNZIONA? (più alto con più alta etc...)

Non funziona comunque:

(Formula tu un controes. il prof. ha sbagliato).

* Nemmeno qui il greedy funziona!

Input: numero n intero.
Output: Minimo numero di banconote usando 20, 10, 5 e 1 €.

↳ while "possibile"

$s = s +$ banconota - 20

.... così per ogni banconota ...

QUESTO FUNZIONA?

Sì → il GREEDY Funziona, perché la scelta "locale" è ottima per forza.

SE INVECE le banconote fossero 12, 8, 1?

NON funziona più il greedy:

$19 =$ 1 banconota da 12 + 7 banconote da 1

↳ NO! $8 > 4$!!!

$19 =$ 2 banconote da 8 + 2 banconote da 1

Perché ora non funziona?

- Nel primo → le banconote sono multiple.
  Non mettere la 20 → Implica sostituirla con 2 da 10.
  Peggioro per forza.

- Nel secondo → Non sono multiple.
  Potrei non peggiorare. Non mettere 12 → può riempire il "gap" in maniera migliore con 2 banconote da 8.

Morale → occhio! Le decisioni locali sono sempre le migliori?

Bin packing : problema dei "bagagli"

$O = \{o_1, o_2 \dots o_n\}$ $\quad$ $W = \{w_1, w_2 \dots w_n\}$

Ho <u>tanti contenitori</u> con capacità L.

Voglio minimizzare il # di contenitori.

Approccio GREEDY :

- Ordino i pesi in modo decrescente.
- Inserisco dal più pesante al meno pesante.

Controesempio

$W = \{5, 5, 3, 3, 3, 3\}$ $\qquad$ $(5, 5,)$ $(3, 3, 3)$ $(3, 3)$ CON GREEDY

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ $(5, 3, 3)$ $(5, 3, 3)$ SENZA GREEDY

$L = 11$

* Mi precludo altre scelte, che potevano darmi un risultato migliore.

COME CAPIRE QUANDO POSSO USARE GREEDY:

Consideriamo:

$\langle E, F \rangle$, dove $F \subseteq \mathcal{P}(E)$ → sottoinsieme dell'insieme delle parti.

Questa coppia é un **sistema di indipendenza**, se:

$\forall A \in F, \quad B \subseteq A \Rightarrow B \in F$

* QUESTO É IL REQUISITO MINIMO PER AVERE UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE.

Noi vorremmo la **migliore per una funzione peso.**

Aggiungiamo una funzione peso: $w: E \to \mathbb{R}^+ \rightarrow w: \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$

$A \in F \quad w(A) = \sum_{i \in A} w(e_i)$

Voglio determinare $S \in F$ t.c. $\max/_{\min} \; w(S)$.

* con un algoritmo Greedy

$S = \phi$ → ordinati per valore/peso.

ordino (E); $\cancel{\theta}(n\log n)$

For $i = 1$ to N: $\theta(n)$

IF $\{S \cup e_i\} \in F$ → "non sfondare per peso"

$S = S \cup \{e_i\}$

Return S;

$T(n) = \theta(n \log n)$

la costruzione della soluzione → "pezzo per pezzo"

↳ se un "elemento" rispetta l'IF → SICURAMENTE STA NELLA SOLUZIONE.

Nel caso questo "modus operandi" decada → NON FUNZIONA IL GREEDY.

MATROIDE: Formalizzazione dell' approccio greedy

$\langle E, F \rangle$ é un matroide, se: (sistema di indipendenza.)

$A, B \in F$ t.c. $|B| = |A| + 1 \Rightarrow \exists b \in (B - A)$ t.c. $A \cup \{b\} \in F$

TEOREMA DI RADO:

$\langle E, F \rangle$ é matroide, se:

$\forall w : E \to \mathbb{R}^+ \to$ greedy standard restituisce l'ottimo per $\langle E, F \rangle, w$

OCCHIO → se un problema non é traducibile in un matroide, puó comunque essere possibile risolverlo con un greedy.

Ma non per ogni funzione peso. In questi casi dimostro.

ESEMPIO:

$\langle E, F \rangle$

E = insieme finito

$F = \{ A \mid A \subseteq E$ t.c. $|A| \leq k \}$

É un matroide?

- É un sistema di indipendenza?

  $\forall A \in F, \quad B \subseteq A \Rightarrow B \in F$ → sì, se ogni A é t.c. $|A| \leq k$,

  a maggior ragione $|B| \leq |A| \leq k$.

- É un matroide?

  $A, B \in F$ t.c. $|B| = |A| + 1 \Rightarrow \exists b \in (B - A)$ t.c. $A \cup \{b\} \in F$

  $|B| = |A| + 1$; $A, B \in F$; $|B| \leq k$

  $|A| = |B| - 1$; $\underbrace{A \leq k - 1}$

↳ se aggiungo 1 $A = k \in F$

Sì, è un matroide.