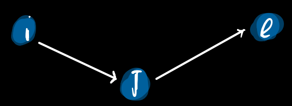
- CHIUSURA TRANSITIVA (RIPASSO):

$G=(V,E)$ $E \subseteq V \times V$ E é una relazione su V.

- Immaginiamo la situazione:



$(i,j) \in E$

$(j,l) \in E$ → se mi trovo in questa situazione la relazione non rispetta la proprietà transitiva.

ma $(l,i) \notin E$!

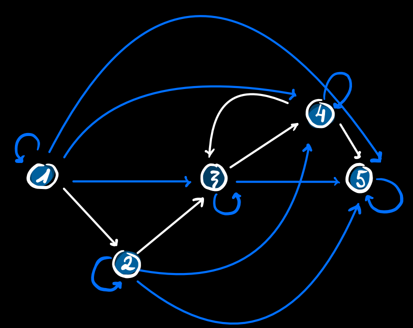
- Nel nostro problema:

Dato un grafo $G=(V,E)$. → Determinare $G^*=(V,E^*)$ (chiusura transitiva di G).

E^* é il più piccolo sottoinsieme di $V \times V$

- contenente E ($E \subseteq E^*$)
- t.c. E^* é una chiusura transitiva.

esempio:



AL GRAFO ORIGINALE G, CON E ⇝ Aggiungo n archi x renderlo transitivo.

Perché metto anche i cappi?

$E^* = \{(i,j) \in V \times V \mid \exists$ un cammino minimo da i a j$\}$

DEF $G=(V,E)$

La chiusura transitiva di G è

$G^* = (V, E^*)$ dove

$E^* = \{(i,j) \in V \times V \mid \exists$ un cammino da i a j$\} \supseteq E$.

PB: ⇝ é una variante di FLOYD-WARSHALL (siamo ancora in un problema di decisione).

ISTANZA $G=(V,E)$

SOLUZIONE $G^* = (V,E^*)$ cioé calcolare E^*

$S=(s_{ij})$ $i \in \{1 \dots n\} \wedge j \in \{1 \dots n\}$

↓

che é una matrice

$$s_{ij} = \begin{cases} \text{true} & \text{se esiste un cammino } i \leadsto j \text{ in } G \\ \text{false} & \text{Altrimenti in } G \end{cases}$$

$E^* = \{(i,j) \in V \times V \mid s_{ij} = \text{true}\}$

SOTTOPROBLEMA $k \in \{0 \dots n\}$ $\forall (i,j) \in V \times V$ stabilire se esiste in G un cammino minimo tra i a j, con vertici intermedi $\in \{0 \dots k\}$.

ISTANZA $\forall (i,j) \in V \times V$ $s_{ij}^{(k)} =$ T, se ↑ ; F, altrimenti. $i \in \{1 \dots n\}$, $j \in \{1 \dots n\}$

SOLUZIONE (guarda pdf prof.)

CASO BASE

$\forall (i,j) \in V \times V \quad S_{ij}^{(0)} = \begin{cases} true & \text{se } i = j \\ true & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \quad \text{(ARCO DIRETTO)} \\ false & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \end{cases}$

CASO PASSO $k > 0$

$\forall (i,j) \in V \times V \quad S_{i,j}^{(k)}$ può essere:

1) $k \notin$ $i \rightsquigarrow j$, allora:

$S_{ij}^{(k)} = S_{ij}^{(k-1)}$

2) $k \in$ $i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j$

$S_{ij}^{(k)} = S_{ik}^{(k-1)} \wedge S_{kj}^{(k-1)}$

PER ENTRARE IN 1 O 2: MI MANCA SAPERE SE $k \in$ OPPURE $k \notin$ CAMMINO MINIMO.
NON POSSO SAPERLO A PRIORI. USO "SIBILLA CUMANA".

$\forall (i,j) \in V^2 \quad S_{ij}^{(k)} = S_{ij}^{k-1}$ OR $(S_{ik}^{k-1} \wedge S_{kj}^{k-1})$

$S^{(k)} = S_{ij}^{(k)}$

Calcolo: $S^0, S^1, S^2 \dots S^{(k)}$ ed ottengo tutti i cammini.

Algo bottom-up:

```
For (i = 1 to n)
    For (j = 1 to n)
        if (i = j) ∨ (i ≠ j ∧ (i,j) ∈ E)
            S_ij^(0) = TRUE;
        else
            S_ij^(0) = FALSE;

For (k = 1 to n)
    For (i = 1 to n)
        For (j = 1 to n)
            S_ij^(k) = S_ij^(k-1) ∨ (S_ik^(k-1) ∧ S_kj^(k-1))

return S(n).
```

ND manca qualcosa → appunti Dennunzio.

* FLOYD-WHARSHALL CON VERTICI COLORATI.

(V, E, W, col) $\quad col : V \longrightarrow \{\text{"rosso"}, \text{"blu"}\}$

$\forall (i,j) \in V \times V \longrightarrow$ calcolare il peso di un cammino minimo senza 2 vertici consecutivi dello stesso colore.

Rifacciamo Floyd-Warshall modificato.

Sottoproblema F-W:

$k \in \{0 \dots n\}$ $\forall (i,j)$ calcolare peso di un cammino minimo, dove non ci sono mai v. consecutivi dello stesso colore e $\underline{\text{con vertici intermedi} \in \{1 \dots k\}}$.

Memorizziamo in $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$

Caso base k=0

$$\forall (i,j) \in V^2, \quad d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \quad (1 \text{ solo } v) \quad i = j \\ w_{ij} & \text{se } i \neq j \ \wedge \ (i,j) \in E \ \wedge \ col(i) \neq col(j) \quad i \longrightarrow j \\ \infty & \text{se } i \neq j \ \wedge \ (i,j) \in E \ \wedge \ col(i) = col(j) \quad i \longrightarrow j \\ \infty & \text{se } (i,j) \notin E \quad i \quad j \end{cases}$$

Passo ricorsivo k>0

(supponendo già risolti i pb. più piccoli)

$\forall (i,j) \in V^2, \quad d_{ij}^{(k)} =$

- Caso $k \notin$ $\quad i \rightsquigarrow j$.

$$d_{i,j}^{(k)} = d_{i,j}^{(k-1)}$$

- caso $k \in$ $\quad i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j$

$$d_{i,j}^{(k)} = d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$$

$k \in$ o $k \notin$? uso la "SIBILLA CUMANA" / RICORRENZA

$\forall (i,j) \in V^2$

$d_{ij}^{(k)} = \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$ = i colori subentrano solo nel caso base.
Il resto è uguale a Floyd-Wharshall.