Analisi e progetto di algoritmi

Esercizi di programmazione dinamica su grafi

Notazione

Nel documento che segue si utilizzerà la notazione introdotta in Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. *Introduzione agli algoritmi e alle strutture dati*, terza edizione. McGraw-Hill, di seguito *Cormen*, capitolo 25. Per chiarezza si precisa che in un grafo $G = (V, E)$ i vertici appartenenti a V, con $|V| = n$ verranno indicati con $1, 2, \ldots, n$.

Per ogni esercizio presentato andremo a definire il problema principale `PB`, un insieme di variabili che andranno a contenere la soluzione ed, eventualmente, un problema ausiliario `P'`. Dopo aver compreso qual è la strategia di risoluzione del problema definiremo le equazioni di ricorrenza e l'implementazione, tramite pseudocodice, dell'algoritmo.

Per semplicità, in tutti i grafi considerati nei seguenti esercizi non ci sono cappi

1 Cammini minimi senza vertici consecutivi rossi

1.1 Problema PB

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $v \in V$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.

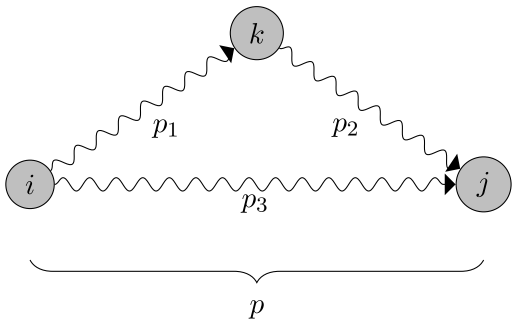

Figura 1: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$. p potrebbe non contenere il vertice k e quindi essere formato da un singolo cammino p_3 oppure potrebbe contenere tale vertice e quindi essere formato da due sottocammini p_1 e p_2 rispettivamente da i a k e da k a j. In qualsiasi caso, siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 che di p_3 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$

Per affrontare questo problema si utilizza una variante dell'*algoritmo di Floyd-Warshall*, cfr *Cormen* 25.3. Come per l'algoritmo di *Floyd-Warshall*, il sottoproblema generico è definito da un numero naturale $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Questo numero definisce l'insieme al quale appartengono i vertici intermedi di un qualunque cammino. Precisamente, fissato k, per una coppia qualsiasi di vertici $i, j \in V$, consideriamo tutti i cammini da i a j i cui vertici intermedi appartengono a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e si vuole calcolare il peso di un cammino minimo da i a j in cui non vi siano due vertici consecutivi di colore rosso. Si può osservare da subito che la soluzione del sottoproblema k-esimo è ottenibile (si illustrerà in seguito esattamente come) a partire dalla soluzione del sottoproblema $(k-1)$-esimo. Infatti, per la generica coppia (i, j), il cammino p potrebbe contenere il vertice k oppure potrebbe non contenerlo (come mostrato in Fig.1). Nel primo caso, p è un cammino da i a j formato da due sottocammini p_1, p_2 rispettivamente da i a k e da k a j: p non contiene due vertici consecutivi rossi se e solo se né p_1 né p_2 ne contengono. Nel secondo caso, invece, p è un cammino da i a j (denotato con p_3) che non passa per il vertice k: p non contiene due vertici consecutivi rossi se e solo se p_3 non ne contiene. Pertanto, il peso del cammino minimo p (elemento della soluzione del sottoproblema k-esimo relativo alla coppia (i, j)) è dato dal valore minimo fra la somma dei cammini p_1 e p_2 (elementi della soluzione del sottoproblema $(k-1)$-esimo relativi a (i, k) e (k, j)) e il peso del cammino p_3 (elemento della soluzione del sottoproblema $(k-1)$-esimo relativo a (i, j)).

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

1.2 Sottoproblema k-esimo di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.

1.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k)}(i, j)$, così definita:

$d^{(k)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che non contiene due vertici consecutivi di colore rosso.

Nota bene. Pertanto al sottoproblema k-esimo è associata la macrovariabile $D^{(k)}$ che è una matrice di n righe e di n colonne il cui generico elemento è $d^{(k)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

1.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare per ogni coppia (i, j) il valore di $d^{(k)}(i, j)$. Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots, D^{(k-1)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1)}$).

Per ogni coppia (i, j), come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$?

1.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i, j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j)$.

1.3.1 Passo ricorsivo: k > 0

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$. Consideriamo una generica coppia (i, j). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$. Pertanto, il peso $d^{(k)}(i, j)$ del cammino di interesse varrà:

$$d^{(k-1)}(i, j) \qquad \text{se } k \notin p$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto dai due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig.1. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della sottostruttura ottima**], il peso $d^{(k)}(i, j)$ sarà:

$$d^{(k-1)}(i, k) + d^{(k-1)}(k, j) \qquad \text{se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo, pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i due valori ottenuti nei due casi. Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad d^{(k)}(i,j) = \min\{e_1, e_2\}} \tag{1}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k)}$ del problema k-esimo (i cui elementi sono espressi in (1)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2)}, \ldots, D^{(0)}$.

1.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Si consideri la generica coppia di vertici (i,j). Si osservi che un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ nel caso in cui $k = 0$, è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Per calcolarne il peso, occorre controllare se i due vertici siano o meno di colore rosso. In particolare il peso del cammino richiesto sarà quindi il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i,j) (se questo esiste), nel caso in cui almeno un vertice tra i e j non sia rosso. Chiaramente se entrambi i vertici hanno colore rosso si attribuirà peso infinito al cammino da i a j (in particolare se esiste l'arco $(i,j) \in E$). Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: il peso del cammino deve essere posto a 0. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti:**

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad d^{(0)}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge [col(i) \neq R \vee col(j) \neq R] \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}} \tag{2}$$

1.4 Soluzione del problema PB

A questo punto le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n)}(i,j)$, per ogni $i,j \in V$. Per ogni coppia di (i,j) di vertici, tale valore risultante è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j in cui non vi sono due vertici consecutivi di colore rosso. Come di consueto il valore ∞ sta ad indicare che non esiste alcun cammino da i a j che soddisfi le richieste. Pertanto, **la soluzione del problema** `PB` **è costituita da tutti i valori contenuti in** $D^{(n)}$.

1.5 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d^{(n)}(i,j)$, per ogni valore di $i, j \in V$ è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite. Lo pseudocodice che implementa quanto abbiamo visto è mostrato nell'Algoritmo 1. La complessità dell'algoritmo risulta essere $\mathcal{O}(n^3)$.

Algorithm 1 Cammini minimi senza vertici consecutivi rossi.

```
procedure FW-No-Red-Pair(V, E, col())
    n ← |V|
    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to n do
            if i = j then
                d^(0)(i, j) ← 0
            else if (i, j) ∈ E ∧ [col(i) ≠ R ∨ col(j) ≠ R] then
                d^(0)(i, j) ← w_{i,j}
            else
                d^(0)(i, j) ← ∞
    for k ← 1 to n do
        for i ← 1 to n do
            for j ← 1 to n do
                e_1 ← d^(k−1)(i, j)
                e_2 ← d^(k−1)(i, k) + d^(k−1)(k, j)
                d^(k)(i, j) ← min{e_1, e_2}
    return d^(n)
```

2 Esistenza di cammini senza vertici consecutivi rossi

2.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $v \in V$ un colore, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$, l'esistenza di un cammino p da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.

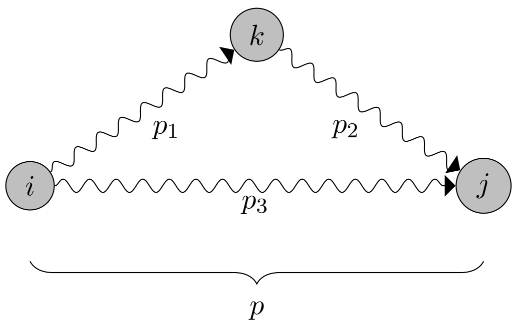

Figura 2: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$. p potrebbe non contenere il vertice k e quindi essere formato da un singolo cammino p_3 oppure potrebbe contenere tale vertice e quindi essere formato da due sottocammini p_1 e p_2 rispettivamente da i a k e da k a j. In qualsiasi caso, siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 che di p_3 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$

Per affrontare questo problema si utilizza una variante dell'*algoritmo di Floyd-Warshall*, cfr *Cormen* 25.3. Come per l'algoritmo di *Floyd-Warshall*, il sottoproblema generico è definito da un numero naturale $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Questo numero definisce l'insieme al quale appartengono i vertici intermedi di un qualunque cammino. Precisamente, fissato k, per una coppia qualsiasi di vertici $i, j \in V$, consideriamo tutti i cammini da i a j i cui vertici intermedi appartengono a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e si vuole determinare l'esistenza di un cammino da i a j in cui non vi siano due vertici consecutivi di colore rosso. Si può osservare da subito che la soluzione del sottoproblema k-esimo è ottenibile (si illustrerà in seguito esattamente come) a partire dalla soluzione del sottoproblema $(k-1)$-esimo. Infatti, per la generica coppia (i, j), il cammino p potrebbe contenere il vertice k oppure potrebbe non contenerlo (come mostrato in Fig.2). Nel primo caso, p è un cammino da i a j formato da due sottocammini p_1, p_2 rispettivamente da i a k e da k a j: p non contiene due vertici consecutivi rossi se e solo se né p_1 né p_2 ne contengono. Nel secondo caso, invece, p è un cammino da i a j (denotato con p_3) che non passa per il vertice k: p non contiene due vertici consecutivi rossi se e solo se p_3 non ne contiene. Pertanto, l'esistenza del cammino p senza due vertici consecutivi rossi (ossia l'elemento della soluzione del sottoproblema k-esimo relativo alla coppia (i, j)) si ottiene a partire dall'esistenza dei cammini p_1 e p_2 (elementi della soluzione del sottoproblema $(k-1)$-esimo relativi a (i, k) e (k, j)) oppure dall'esistenza del cammino p_3 (elemento della soluzione del sottoproblema $(k-1)$-esimo relativo a (i, j)).

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

2.2 Sottoproblema k-esimo di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, col)$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso.

2.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k)}(i, j)$, così definita:

$d^{(k)}(i, j)$ vale *True* se esiste un cammino dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che non contiene due vertici consecutivi di colore rosso; *False* altrimenti.

Nota bene. Pertanto al sottoproblema k-esimo è associata la macro-variabile $D^{(k)}$ che è una matrice di n righe e di n colonne il cui generico elemento è $d^{(k)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

2.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare per ogni coppia (i, j) il valore di $d^{(k)}(i, j)$. Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots, D^{(k-1)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1)}$).

Per ogni coppia (i, j), come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$?

2.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i, j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j)$.

2.3.1 Passo ricorsivo: k > 0

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$. Consideriamo una generica coppia (i, j). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Pertanto, esiste un cammino da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ senza due vertici consecutivi di colore rosso se e solo se esiste un cammino dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ senza due vertici consecutivi di colore rosso. Pertanto, il valore $d^{(k)}(i, j)$ del cammino di interesse sarà:

$$d^{(k-1)}(i, j) \quad \text{se } k \notin p$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto dai due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig.2. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Dunque, esiste un cammino dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e senza due vertici consecutivi di colore rosso se e solo se esiste un cammino dal vertice i al vertice k con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ e senza due vertici consecutivi di colore rosso ED esiste anche un cammino dal vertice k al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ e senza due vertici consecutivi di colore rosso [**proprietà della sottostruttura ottima**]. Pertanto, il valore $d^{(k)}(i, j)$ sarà:

$$d^{(k-1)}(i, k) \wedge d^{(k-1)}(k, j) \qquad \text{se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo, pertanto l'esistenza del cammino si ottiene come l'**or logico** tra i due valori ottenuti nei due casi. Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\, (i, j) \in V \times V, \quad d^{(k)}(i, j) = e_1 \vee e_2} \tag{3}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k)}$ del problema k-esimo (i cui elementi sono espressi in (3)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2)}, \ldots, D^{(0)}$.

2.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Si consideri la generica coppia di vertici (i, j). Si osservi che un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ nel caso in cui $k = 0$, è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Per determinarne l'esistenza, occorre controllare se i due vertici siano o meno di colore rosso. In particolare, il cammino richiesto esiste se e solo se i vertici i e j sono collegati da un arco e almeno uno dei due vertici non è di colore rosso. Chiaramente se entrambi i vertici hanno colore rosso, il cammino richiesto non esiste. Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: l'esistenza del cammino deve essere posta a *True*. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti:**

$$\boxed{\forall\, (i, j) \in V \times V, \quad d^{(0)}(i, j) = \begin{cases} True & \text{se } i = j \\ True & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \wedge [col(i) \neq R \vee col(j) \neq R] \\ False & \text{altrimenti} \end{cases}} \tag{4}$$

2.4 Soluzione del problema `PB`

A questo punto le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n)}(i, j)$, per ogni $i, j \in V$. Per ogni coppia (i, j) di vertici, tale valore risultante indica l'esistenza di un cammino dal vertice i al vertice j in cui non vi sono due vertici consecutivi di colore rosso. Pertanto, **la soluzione del problema `PB` è costituita da tutti i valori contenuti in** $D^{(n)}$.

2.5 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d^{(n)}(i, j)$, per ogni valore di $i, j \in V$ è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite. Lo pseudocodice che implementa quanto abbiamo visto è mostrato nell'Algoritmo 2. La complessità dell'algoritmo risulta essere $\mathcal{O}(n^3)$.

Algorithm 2 Cammini minimi senza vertici consecutivi rossi (esistenza).

```
procedure FW-No-Red-Pair-Ex(V, E, col())
    n ← |V|
    for i ← 1 to n do
        for j ← 1 to n do
            if i = j ∨ (i, j) ∈ E ∧ [col(i) ≠ R ∨ col(j) ≠ R] then
                d^(0)(i, j) ← True
            else
                d^(0)(i, j) ← False
    for k ← 1 to n do
        for i ← 1 to n do
            for j ← 1 to n do
                e_1 ← d^(k−1)(i, j)
                e_2 ← d^(k−1)(i, k) ∧ d^(k−1)(k, j)
                d^(k)(i, j) ← e_1 ∨ e_2
    return d^(n)
```

3 Cammini minimi senza archi consecutivi rossi

3.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : E \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $(i, j) \in E$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui non vi siano due archi consecutivi di colore rosso.

Per affrontare questo problema si cerca di utilizzare il ragionamento applicato nella risoluzione dell'esercizio sui *cammini minimi senza vertici rossi consecutivi* (Sezione 1).

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

3.2 Sottoproblema k-esimo di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$, in cui non ci siano archi consecutivi di colore rosso.

3.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k)}(i, j)$ così definita:

$d^{(k)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che non contiene due archi consecutivi di colore rosso.

Al sottoproblema k-esimo è quindi associata la macro-variabile $D^{(k)}$, il cui generico elemento è $d^{(k)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

3.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k)}(i,j)$ per ogni coppia (i,j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0)}, D^{(1)} \ldots, D^{(k-1)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1)}$).

Per ogni coppia (i,j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k)}(i,j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots, D^{(k-1)}$?

Ci accorgeremo che manca informazione per poter risolvere il problema. Infatti, per una generica coppia (i,j) di vertici, consideriamo un qualunque cammino p da i a j con vertici intermedi appartenenti a $\{1,\ldots,k\}$ e che non contiene due archi consecutivi rossi. Supponiamo che il vertice k appartenga al cammino e che siano già stati calcolati tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$. Una rappresentazione della situazione considerata è mostrata in Fig.3. Il cammino p, può essere visto come composizione dei cammini p_1 e p_2. Prima ancora di affrontare la minimalità di p rispetto alla minimalità di p_1 e p_2, osserviamo che benché, per definizione, i cammini p_1 e p_2 non abbiano due archi consecutivi rossi, non si ha la certezza che lo stesso accada per p. Potrebbe infatti verificarsi che l'ultimo arco del cammino p_1 (l'arco (s,k) in Fig.3) ed il primo arco del cammino p_2 (l'arco (k,t) in Fig.3) siano entrambi rossi. In questa situazione p non rispetterebbe la richiesta di essere un cammino senza due archi consecutivi rossi. Tutte le altre situazioni (cioè le situazioni in cui almeno uno tra (s,k) e (k,t) è nero) determinano un cammino p che soddisfa la suddetta richiesta. È quindi evidente che manca informazione per riuscire a considerare la situazione di decomporre p in sottocammini p_1 e p_2 che soddisfano la sopra citata richiesta.

Come si risolve il problema della mancanza di informazione?

3.3 Introduzione del problema ausiliario `P'` di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi e $col : E \mapsto \{R, N\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i,j) \in V \times V$ e per ogni coppia di colori $(a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}$ il peso di un cammino minimo p da i a j in cui non ci siano due archi consecutivi di colore rosso e che abbia il primo arco di colore uguale ad a e l'ultimo arco di colore uguale a b.

Quali sono i sottoproblemi associati a `P'`?

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito un sottoproblema di `P'`.

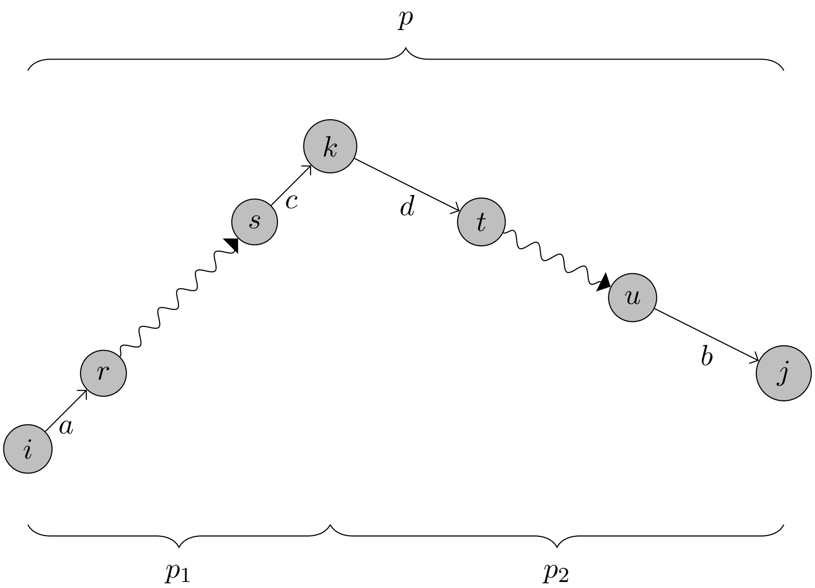

Figura 3: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$. In figura, (i, r) è il primo arco (di colore a) sia di p che di p_1, (u, j) è l'ultimo arco (di colore b) sia di p che di p_2, l'arco (s, k) (di colore c) è l'ultimo arco di p_1 e l'arco (k, t) (di colore d) è il primo arco di p_2.

3.4 Sottoproblema k-esimo di `P'`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ e per ogni coppia di colori $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$, in cui non ci siano archi consecutivi di colore rosso, che abbia il primo arco di colore uguale ad a e l'ultimo arco di colore uguale a b.

3.4.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia di vertici $(i, j) \in V \times V$ e per ogni coppia di colori $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$ introduciamo la variabile $d^{(k)}(i, j, a, b)$, così definita:

$d^{(k)}(i, j, a, b)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$, senza due archi consecutivi di colore rosso, con il primo arco di colore a e l'ultimo arco di colore b.

Nota bene. Al sottoproblema k-esimo è associata la macro-variabile $D^{(k)}$ che è una matrice multidimensionale il cui generico elemento è $d^{(k)}(i, j, a, b)$, corrispondente alla quadrupla (i, j, a, b) formata dai vertici i e j e dai colori a e b. La matrice $D^{(k)}$ contiene quindi $n \cdot n \cdot 2 \cdot 2 = 4n^2$ elementi.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

3.4.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j, a, b)$ per ogni quadrupla (i, j, a, b) con $(i, j) \in V \times V$ e $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$. Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1)}$).

Per ogni quadrupla (i, j, a, b) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j, a, b)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$?

3.5 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna quadrupla (i, j, a, b) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore $d^{(k)}(i, j, a, b)$.

3.5.1 Passo ricorsivo: $\mathbf{k > 0}$

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$. Consideriamo la generica quadrupla (i, j, a, b). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ e che soddisfa tutte le richieste (senza due archi consecutivi rossi, con colore del primo arco uguale ad a e colore dell'ultimo arco uguale a b) è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme

$\{1, 2, \ldots, k\}$ e che soddisfa le medesime richieste. Pertanto, il peso $d^{(k)}(i, j, a, b)$ del cammino di interesse sarà

$$d^{(k-1)}(i, j, a, b) \qquad \text{se } k \notin p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 3. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k)}(i, j, a, b)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2 indicati in Fig. 3. A questo punto, come argomentato prima di introdurre il problema ausiliario, occorre considerare che vi sono diverse possibili coppie di sottocammini p_1 e p_2 che danno luogo ad un cammino p che soddisfi le richieste (senza due archi consecutivi rossi, con colore del primo arco uguale ad a e colore dell'ultimo arco uguale a b). Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 nelle quali almeno un arco tra (s, k) e (k, t) non è rosso. Denotando con c e d rispettivamente i colori di questi due archi, avremo quindi le 3 coppie di sottocammini da considerare definite dalle 3 coppie di colori (c, d) tali che $c \neq R$ oppure $c \neq R$. Per la proprietà della minimalità, ciascuna coppia di sottocammini p_1, p_2 determinerà un cammino p di peso uguale a $d^{(k-1)}(i, k, a, c) + d^{(k-1)}(k, j, d, b)$. Per una generica quadrupla (i, j, a, b), si hanno quindi 3 possibili valori di peso per un cammino p che soddisfi le sopra citate richieste:

$$d^{(k-1)}(i, k, a, R) + d^{(k-1)}(k, j, N, b)$$
$$d^{(k-1)}(i, k, a, N) + d^{(k-1)}(k, j, R, b)$$
$$d^{(k-1)}(i, k, a, N) + d^{(k-1)}(k, j, N, b)$$

Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produrrà il più piccolo valore tra questi 3 e tale valore sarà proprio il peso $d^{(k)}(i, j, a, b)$ richiesto nel caso $k \in p$. Pertanto, $d^{(k)}(i, j, a, b)$ sarà dato da

$$\min_{(c,d) \in \{R,N\}^2 | c \neq R \vee d \neq R} \left\{ d^{(k-1)}(i, k, a, c) + d^{(k-1)}(k, j, d, b) \right\} \qquad \text{se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo. Pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i due valori ottenuti nei due casi. Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \forall\,(a,b) \in \{R,N\}^2, \quad d^{(k)}(i,j,a,b) = \min\{e_1, e_2\}} \tag{5}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k)}$ del problema k-esimo (i cui elementi sono espressi in (3.5.1)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2)}, \ldots, D^{(0)}$.

3.5.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Consideriamo la generica quadrupla (i,j,a,b). Possiamo innanzitutto osservare che, nel caso in cui $k = 0$, un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1,\ldots,k\}$ e che soddisfi le altre richieste (senza due archi consecutivi di ugual colore, con colore del primo arco uguale ad a e con colore dell'ultimo arco uguale a b) è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Inoltre, il peso del cammino richiesto sarà il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i,j), se tale arco esiste ed il suo colore coincide sia con a che con b (in quanto primo ed ultimo arco coincidono e quindi i colori a e b devono coincidere e devono inoltre coincidere con il colore preassegnato all'arco dalla funzione *col*). Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. In tutte le altre situazioni si attribuirà valore ∞ al peso del cammino. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall(i,j) \in V \times V, \forall(a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}, \\ \qquad d^{(0)}(i,j,a,b) = \begin{cases} w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge a = b = col(i,j) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}} \tag{6}$$

3.6 Soluzione del problema `PB`.

Occorre stabilire come ricavare per ogni coppia (i,j) di vertici il peso di un cammino minimo da i a j senza due archi consecutivi rossi. Chiamiamo

$d_{\mathsf{PB}}(i,j)$ tale peso. Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n)}(i,j,a,b)$, per ogni coppia (i,j) di vertici e per ogni coppia (a,b) di colori. Pertanto, per ogni coppia (i,j) di vertici, ci sono 4 possibili valori:

$v_1 = d^{(n)}(i,j,R,R)$

$v_2 = d^{(n)}(i,j,R,N)$

$v_3 = d^{(n)}(i,j,N,R)$

$v_4 = d^{(n)}(i,j,N,N)$

ciascuno dei quali è associato alla specifica coppia di colori che indica il colore del primo e dell'ultimo arco del cammino. Per ogni coppia (i,j) il peso $d_{\mathsf{PB}}(i,j)$ richiesto è dato dal più piccolo tra questi 4 valori. **La soluzione è quindi composta da n^2 elementi, uno per ciascuna coppia (i,j) di vertici, e ciascun elemento $d_{\mathsf{PB}}(i,j)$ della soluzione ha come valore il più piccolo tra v_1, v_2, v_3 e v_4.**:

$$\forall (i,j) \in V \times V, \qquad d_{\mathsf{PB}}(i,j) = \min \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

3.7 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d_{\mathsf{PB}}(i,j)$, per ogni valore di $i,j \in V$ è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite. Lo pseudocodice che implementa quanto abbiamo visto è mostrato nell'Algoritmo 3. La complessità dell'algoritmo risulta essere $\mathcal{O}(n^3)$. Si noti che la complessità risulta essere $\mathcal{O}(n^3)$ poichè l'insieme dei colori è di dimensione fissata (ossia 2). Nel caso in cui l'insieme dei colori avesse dimensione generica C, la complessità dell'algoritmo risulterebbe $\mathcal{O}(n^3 \cdot C^4)$ (C^4 in quanto si cicla con 4 **for** innestati sull'insieme C, con le variabili a, b, c e d).

Algorithm 3 Cammini minimi senza archi consecutivi rossi.

procedure FW-No-Cons-Red-Edges($V, E, col()$)
  $n \leftarrow |V|$
  for $i \leftarrow 1$ to n **do**
    for $j \leftarrow 1$ to n **do**
      for $a \in \{R, B\}$ **do**
        for $b \in \{R, B\}$ **do**
          if $i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge a = b = col(i,j)$ **then**
            $d^{(0)}(i,j,a,b) \leftarrow w_{i,j}$
          else
            $d^{(0)}(i,j,a,b) \leftarrow \infty$
  for $k \leftarrow 1$ to n **do**
    for $i \leftarrow 1$ to n **do**
      for $j \leftarrow 1$ to n **do**
        for $a \in \{R, B\}$ **do**
          for $b \in \{R, B\}$ **do**
            $e_1 \leftarrow d^{(k-1)}(i,j,a,b)$
            $e_2 \leftarrow \texttt{Minimo}(k,i,j,a,b)$
            $d^{(k)}(i,j,a,b) \leftarrow \min\{e_1, e_2\}$
  for $i \leftarrow 1$ to n **do**
    for $j \leftarrow 1$ to n **do**
      $v_1 \leftarrow d^{(n)}(i,j,R,R)$
      $v_2 \leftarrow d^{(n)}(i,j,R,N)$
      $v_3 \leftarrow d^{(n)}(i,j,N,R)$
      $v_4 \leftarrow d^{(n)}(i,j,N,N)$
      $d_{\texttt{PB}}(i,j) \leftarrow \min\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
  return $d_{\texttt{PB}}$

procedure Minimo(k, i, j, a, b)
  $m \leftarrow \infty$
  for $c \in \{R, B\}$ **do**
    for $d \in \{R, B\}$ **do**
      if $c \neq R \vee d \neq R$ **then**
        $x \leftarrow d^{(k-1)}(i,k,a,c) + d^{(k-1)}(k,j,d,b)$
        if $x < m$ **then**
          $m \leftarrow x$
  return m

4 Esistenza di cammini senza archi consecutivi rossi

4.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi e $col : E \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $(i, j) \in E$ un colore, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino da i a j in cui non vi siano due archi consecutivi di colore rosso.

Per affrontare questo problema si cerca di utilizzare il ragionamento applicato nella risoluzione dell'esercizio sull'*esistenza di un cammino senza vertici rossi consecutivi* (Sezione 2).

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

4.2 Sottoproblema k-esimo di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, col)$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ l'esistenza di un cammino p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$, in cui non ci siano archi consecutivi di colore rosso.

4.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k)}(i, j)$ così definita:

$d^{(k)}(i, j)$ vale *True* se esiste un cammino dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che non contiene due archi consecutivi di colore rosso, *False* altrimenti.

Al sottoproblema k-esimo è quindi associata la macro-variabile $D^{(k)}$, il cui generico elemento è $d^{(k)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

4.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j)$ per ogni coppia (i, j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0)}, D^{(1)} \ldots, D^{(k-1)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1)}$).

Per ogni coppia (i, j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots, D^{(k-1)}$?

Ci accorgeremo che manca informazione per poter risolvere il problema. Infatti, per una generica coppia (i, j) di vertici, consideriamo un qualunque cammino p da i a j con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ e che non contiene due archi consecutivi rossi. Supponiamo che il vertice k appartenga al cammino e che siano già stati calcolati tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$. Una rappresentazione della situazione considerata è mostrata in Fig.4. Il cammino p, può essere visto come composizione dei cammini p_1 e p_2. Prima ancora di affrontare la minimalità di p rispetto alla minimalità di p_1 e p_2, osserviamo che benché, per definizione, i cammini p_1 e p_2 non abbiano due archi consecutivi rossi, non si ha la certezza che lo stesso accada per p. Potrebbe infatti verificarsi che l'ultimo arco del cammino p_1 (l'arco (s, k) in Fig.4) ed il primo arco del cammino p_2 (l'arco (k, t) in Fig.4) siano entrambi rossi. In questa situazione p non rispetterebbe la richiesta di essere un cammino senza due archi consecutivi rossi. Tutte le altre situazioni (cioè le situazioni in cui almeno uno tra (s, k) e (k, t) è nero) determinano un cammino p che soddisfa la suddetta richiesta. È quindi evidente che manca informazione per riuscire a considerare la situazione di decomporre p in sottocammini p_1 e p_2 che soddisfano la sopra citata richiesta.

Come si risolve il problema della mancanza di informazione?

4.3 Introduzione del problema ausiliario `P'` di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi e $col : E \mapsto \{R, N\}$, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ e per ogni coppia di colori $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$ l'esistenza di un cammino p da i a j in cui non ci siano due archi consecutivi di colore rosso e che abbia il primo arco di colore uguale ad a e l'ultimo arco di colore uguale a b.

Quali sono i sottoproblemi associati a `P'`?

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito un sottoproblema di `P'`.

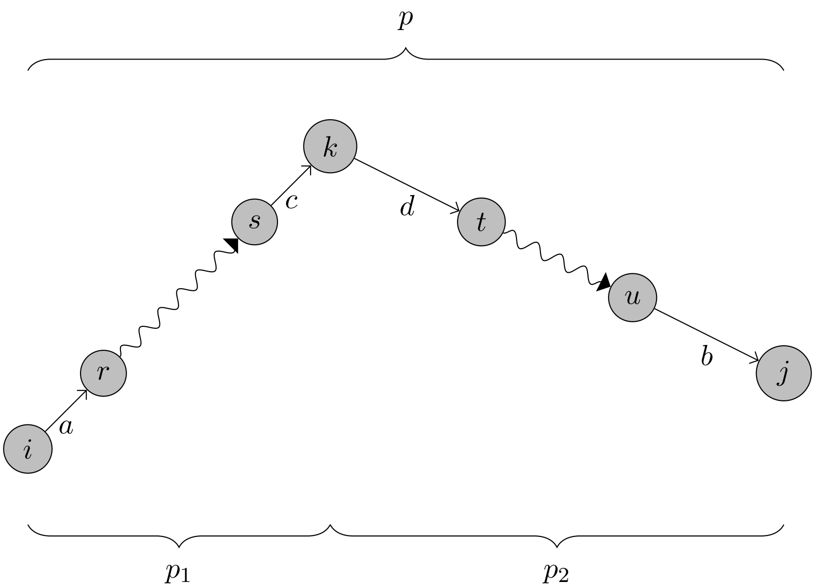

Figura 4: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$. In figura, (i, r) è il primo arco (di colore a) sia di p che di p_1, (u, j) è l'ultimo arco (di colore b) sia di p che di p_2, l'arco (s, k) (di colore c) è l'ultimo arco di p_1 e l'arco (k, t) (di colore d) è il primo arco di p_2.

4.4 Sottoproblema k-esimo di `P'`

Dato un grafo $G = (V, E, col)$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si vuole determinare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ e per ogni coppia di colori $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$ l'esistenza di un cammino p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$, in cui non ci siano archi consecutivi di colore rosso, che abbia il primo arco di colore uguale ad a e l'ultimo arco di colore uguale a b.

4.4.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia di vertici $(i, j) \in V \times V$ e per ogni coppia di colori $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$ introduciamo la variabile $d^{(k)}(i, j, a, b)$, così definita:

$d^{(k)}(i, j, a, b)$ vale *True* se esiste un cammino minimo dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$, senza due archi consecutivi di colore rosso, con il primo arco di colore a e l'ultimo arco di colore b, *False* altrimenti.

Nota bene. Al sottoproblema k-esimo è associata la macro-variabile $D^{(k)}$ che è una matrice multidimensionale il cui generico elemento è $d^{(k)}(i, j, a, b)$, corrispondente alla quadrupla (i, j, a, b) formata dai vertici i e j e dai colori a e b. La matrice $D^{(k)}$ contiene quindi $n \cdot n \cdot 2 \cdot 2 = 4n^2$ elementi.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

4.4.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j, a, b)$ per ogni quadrupla (i, j, a, b) con $(i, j) \in V \times V$ e $(a, b) \in \{R, N\} \times \{R, N\}$. Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1)}$).

Per ogni quadrupla (i, j, a, b) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k)}(i, j, a, b)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$?

4.5 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna quadrupla (i, j, a, b) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore $d^{(k)}(i, j, a, b)$.

4.5.1 Passo ricorsivo: $\mathbf{k > 0}$

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in $D^{(0)}, \ldots, D^{(k-1)}$. Consideriamo la generica quadrupla (i, j, a, b). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Quindi esiste un cammino dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che soddisfa tutte le richieste (senza due archi consecutivi rossi, con colore del primo arco uguale ad a e colore dell'ultimo arco uguale a b) solamente se esiste un cammino da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-$

$1\}$ e che soddisfa le medesime richieste. Pertanto, il valore $d^{(k)}(i,j,a,b)$ del cammino di interesse sarà

$$d^{(k-1)}(i,j,a,b) \qquad\qquad \text{se } k \notin p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 4. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Dunque, l'esistenza del cammino p dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1,2,\ldots,k\}$ e che soddisfa tutte le richieste (senza due archi consecutivi rossi, con colore del primo arco uguale ad a e colore dell'ultimo arco uguale a b) dipende dall'esistenza dei cammini p_1 E dall'esistenza del cammino p_2. A questo punto, come argomentato prima di introdurre il problema ausiliario, occorre considerare che vi sono diverse possibili coppie di sottocammini p_1 e p_2 che danno luogo ad un cammino p che soddisfi le richieste (senza due archi consecutivi rossi, con colore del primo arco uguale ad a e colore dell'ultimo arco uguale a b). Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 nelle quali almeno un arco tra (s,k) e (k,t) non è rosso. Denotando con c e d rispettivamente i colori di questi due archi, avremo quindi le 3 coppie di sottocammini da considerare definite dalle 3 coppie di colori (c,d) tali che $c \neq R$ oppure $c \neq R$. Per una generica quadrupla (i,j,a,b), si hanno quindi 3 possibili valori di esistenza per un cammino p che soddisfi le sopra citate richieste:

$$d^{(k-1)}(i,k,a,R) \wedge d^{(k-1)}(k,j,N,b)$$
$$d^{(k-1)}(i,k,a,N) \wedge d^{(k-1)}(k,j,R,b)$$
$$d^{(k-1)}(i,k,a,N) \wedge d^{(k-1)}(k,j,N,b)$$

Per ricavare l'esistenza del cammino p è ora sufficiente considerare uno qualsiasi di questi valori (basta che almeno per una coppia (c,d) il cammino esista). Pertanto, $d^{(k)}(i,j,a,b)$ sarà dato da

$$\bigvee_{(c,d)\in\{R,N\}^2 | c\neq R \vee d\neq R} \left\{ d^{(k-1)}(i,k,a,c) \wedge d^{(k-1)}(k,j,d,b) \right\} \qquad \text{se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino. Pertanto l'esistenza del cammino si ottiene come l'**or logico** tra i due valori ottenuti nei due casi. Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \forall\,(a,b) \in \{R,N\}^2, \quad d^{(k)}(i,j,a,b) = e_1 \vee e_2} \tag{7}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k)}$ del problema k-esimo (i cui elementi sono espressi in (4.5.1)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2)}, \dots, D^{(0)}$.

4.5.2 Caso base: k = 0

Consideriamo la generica quadrupla (i,j,a,b). Possiamo innanzitutto osservare che, nel caso in cui $k = 0$, un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \dots, k\}$ e che soddisfi le altre richieste (senza due archi consecutivi di ugual colore, con colore del primo arco uguale ad a e con colore dell'ultimo arco uguale a b) è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Per determinarne l'esistenza, occorre controllare che tale arco esista ed il suo colore coincida sia con a che con b (in quanto primo ed ultimo arco coincidono e quindi i colori a e b devono coincidere e devono inoltre coincidere con il colore preassegnato all'arco dalla funzione col). Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. In tutte le altre situazioni il cammino non esiste. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall(i,j) \in V \times V, \forall(a,b) \in \{R,N\} \times \{R,N\}, \\ \qquad d^{(0)}(i,j,a,b) = \begin{cases} True & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge a = b = col(i,j) \\ False & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}} \tag{8}$$

4.6 Soluzione del problema PB.

Occorre stabilire come determinare per ogni coppia (i,j) di vertici l'esistenza di un cammino da i a j senza due archi consecutivi rossi. Chiamiamo $d_{\texttt{PB}}(i,j)$ tale esistenza. Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n)}(i,j,a,b)$, per ogni coppia (i,j) di vertici e per ogni coppia (a, b) di colori. Pertanto, per ogni coppia (i, j) di vertici, ci sono 4 possibili valori:

$v_1 = d^{(n)}(i, j, R, R)$

$v_2 = d^{(n)}(i, j, R, N)$

$v_3 = d^{(n)}(i, j, N, R)$

$v_4 = d^{(n)}(i, j, N, N)$

ciascuno dei quali è associato alla specifica coppia di colori che indica il colore del primo e dell'ultimo arco del cammino. Per ogni coppia (i, j), l'esistenza $d_{\mathtt{PB}}(i, j)$ richiesta è data dall'**or logico** tra questi 4 valori (basta che ne esista uno). **La soluzione è quindi composta da n^2 elementi, uno per ciascuna coppia (i, j) di vertici, e ciascun elemento $d_{\mathtt{PB}}(i, j)$ della soluzione ha come valore:**

$$\forall (i, j) \in V \times V, \qquad d_{\mathtt{PB}}(i, j) = v_1 \vee v_2 \vee v_3 \vee v_4$$

4.7 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d_{\mathtt{PB}}(i, j)$ per ogni valore di $i, j \in V$, risulta una variante dell'algoritmo presentato nel precedente esercizio (esercizio 3) ed è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite.

5 Cammini minimi con esattamente 3 archi rossi

5.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : E \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $(i, j) \in E$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui vi siano esattamente 3 archi rossi.

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e per ciascun $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

5.2 Sottoproblema di dimensione (k, r) di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $r \in \{0, \dots, 3\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \dots, k\}$, in cui ci siano esattamente r archi rossi.

5.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Siano $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $r \in \{0, \dots, 3\}$ e si consideri il sottoproblema di dimensione (k, r).

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k,r)}(i, j)$ così definita:

$d^{(k,r)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \dots, k\}$ e che contiene esattamente r archi rossi.

Nota bene. Al sottoproblema (k, r)-esimo è quindi associata la macrovariabile $D^{(k,r)}$, il cui generico elemento è $d^{(k,r)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

Osservazione. Si noti che quando $r > k+1$, non può esistere un cammino da i a j con vertici intermedi nell'insieme $\{1, \ldots, k\}$ ed esattamente r archi di colore rosso. Infatti, il cammino può contenere al massimo k vertici intermedi e quindi essere composto da massimo $k+1$ archi: non è dunque possibile che il cammino sia composto da esattamente r $(> k+1)$ archi rossi.

5.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ per ogni coppia (i,j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$).

Per ogni coppia (i,j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$?

5.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i,j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore $d^{(k,r)}(i,j)$.

5.3.1 Passo ricorsivo: $\mathbf{k > 0}$

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in

$$D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$$

Consideriamo la generica coppia (i,j). Supponiamo inoltre che $r \leq k+1$. Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ e che contiene esattamente r archi rossi, è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che soddisfa le medesime richieste. Pertanto, il peso $d^{(k,r)}(i,j)$ del cammino di interesse

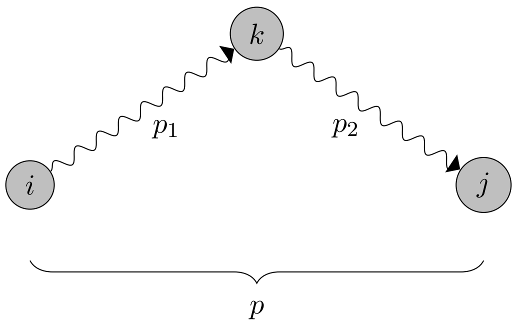

Figura 5: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \dots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \dots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \dots, k-1\}$.

sarà

$$d^{(k-1,r)}(i,j) \qquad \text{se } k \notin p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 5. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,r)}(i,j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 che, unitamente, contengono esattamente r archi rossi. Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,r)}(i,j)$ sarà dato da

$$\min_{(r_1,r_2)\in\{0,\dots,r\}^2 \mid r_1+r_2=r} \left\{ d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j) \right\} \text{ se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo. Pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i valori ottenuti nei casi precedenti (a seconda del colore di k).

Supponiamo ora che $r > k+1$. Come osservato in precedenza, quando $r > k+1$, non può esistere il cammino richiesto.

Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \forall k \in \{1,\ldots,n\}, \forall r \in \{0,\ldots,3\}, \quad d^{(k,r)}(i,j) = \begin{cases} \min\{e_1, e_2\} & \text{se } r \leq k+1 \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}} \tag{9}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k,r)}$ del problema (k,r)-esimo (i cui elementi sono espressi in (9)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1,0)},\ldots,D^{(k-1,r)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2,0)},\ldots,D^{(k-2,r)}$, ..., $D^{(0,0)},\ldots,D^{(0,r)}$.

5.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Consideriamo la generica coppia (i,j). Possiamo innanzitutto osservare che, nel caso in cui $k = 0$, un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1,\ldots,k\}$ e che contiene esattamente r archi rossi è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Inoltre, il peso del cammino richiesto sarà il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i,j), se tale arco esiste, è rosso e si richiede che il cammino contenga esattamente 1 arco di colore rosso oppure se tale arco esiste, è nero e si richiede che il cammino contenga esattamente 0 archi di colore rosso. Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: il peso del cammino può essere posto a 0 solamente se $r = 0$. In tutte le altre situazioni si attribuirà valore ∞ al peso del cammino. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall(i,j) \in V \times V, \\ d^{(0,0)}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \land (i,j) \in E \land col(i,j) = N \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\ d^{(0,1)}(i,j) = \begin{cases} w_{i,j} & \text{se } i \neq j \land (i,j) \in E \land col(i,j) = R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\ d^{(0,2)}(i,j) = \infty \\ d^{(0,3)}(i,j) = \infty \end{array}} \tag{10}$$

5.4 Soluzione del problema `PB`.

Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n,3)}(i,j)$, per ogni coppia (i,j) di vertici. Tale valore è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j che contiene esattamente 3 archi rossi. Come di consueto, il valore ∞ sta ad indicare che non esiste alcun cammino da i a j che soddisfi le richieste. Considerando tutti i $d^{(n,3)}(i,j)$, è possibile ottenere la soluzione al problema. Pertanto, **la soluzione del problema `PB` è costituita da tutti i valori contenuti in $D^{(n,3)}$**.

5.5 Implementazione

L'algoritmo, espresso in pseudo–codice, che calcola i valori $d^{(n,3)}(i,j)$, per ogni valore di $i,j \in V$ è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite. Lo pseudocodice che implementa quanto abbiamo visto è mostrato nell'Algoritmo 4. La complessità dell'algoritmo risulta essere $\mathcal{O}(n^3)$. Si noti che la complessità risulta essere $\mathcal{O}(n^3)$ poichè il numero di archi rossi è fissato (ossia 3). Nel caso in cui questo numero avesse dimensione generica R, la complessità dell'algoritmo risulterebbe $\mathcal{O}(n^3 \cdot R^3)$.

Algorithm 4 Cammini minimi con esattamente tre archi rossi.

procedure FW-3-RedEdges($V, E, col()$)
    $n \leftarrow |V|$
    for $r \leftarrow 0$ to 3 **do**
        for $i \leftarrow 1$ to n **do**
            for $j \leftarrow 1$ to n **do**
                if $r = 0$ **then**
                    if $i = j$ **then**
                        $d^{(0,r)}(i,j) \leftarrow 0$
                    else if $i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = N$ **then**
                        $d^{(0,r)}(i,j) \leftarrow w_{i,j}$
                    else
                        $d^{(0,r)}(i,j) \leftarrow \infty$
                else if $r = 1$ **then**
                    if $i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i,j) = R$ **then**
                        $d^{(0,r)}(i,j) \leftarrow w_{i,j}$
                    else
                        $d^{(0,r)}(i,j) \leftarrow \infty$
                else
                    $d^{(0,r)}(i,j) \leftarrow \infty$
    for $k \leftarrow 1$ to n **do**
        for $r \leftarrow 0$ to 3 **do**
            for $i \leftarrow 1$ to n **do**
                for $j \leftarrow 1$ to n **do**
                    $e_1 \leftarrow d^{(k-1,r)}(i,j)$
                    $e_2 \leftarrow$ `Minimo`(k,r,i,j)
                    $d^{(k,r)}(i,j) \leftarrow \min\{e_1, e_2\}$
    return $d^{(n,3)}$

procedure Minimo(k, r, i, j)
    $m \leftarrow \infty$
    for $r_1 \leftarrow 0$ to r **do**
        for $r_2 \leftarrow 0$ to r **do**
            if $r_1 + r_2 = r$ **then**
                $x \leftarrow d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j)$
                if $x < m$ **then**
                    $m \leftarrow x$
    return m

6 Cammini minimi con al più due archi rossi

6.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : E \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $(i, j) \in E$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui vi siano al più due archi rossi.

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e per ciascun $r \in \{0, 1, 2\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

6.2 Sottoproblema di dimensione (k, r) di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$, in cui ci siano al più r archi rossi.

6.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Siano $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$ e si consideri il sottoproblema di dimensione (k, r).

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k,r)}(i, j)$ così definita:

$d^{(k,r)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che contiene al più r archi rossi.

Nota bene. Al sottoproblema (k, r)-esimo è quindi associata la macro-variabile $D^{(k,r)}$, il cui generico elemento è $d^{(k,r)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

6.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ per ogni coppia (i,j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$).

Per ogni coppia (i,j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$?

6.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i,j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore $d^{(k,r)}(i,j)$.

6.3.1 Passo ricorsivo: $\mathbf{k > 0}$

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in

$$D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$$

Consideriamo la generica coppia (i,j). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ e che contiene al più r archi rossi, è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che soddisfa le medesime richieste. Pertanto, il peso $d^{(k,r)}(i,j)$ del cammino di interesse sarà

  $$d^{(k-1,r)}(i,j) \qquad \text{se } k \notin p$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 6. Poichè k non è

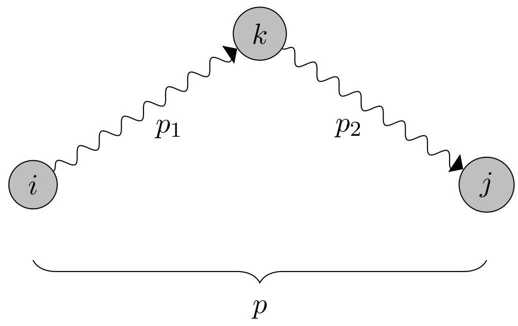

Figura 6: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$.

un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 che, unitamente, contengono al più r archi rossi. Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato da

$$\min_{(r_1,r_2)\in\{0,\ldots,r\}^2 | r_1+r_2\leq r} \left\{ d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j) \right\} \text{ se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo. Pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i valori ottenuti nei casi precedenti. Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\, (i,j) \in V \times V, \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \forall r \in \{0, \ldots, 2\}, \quad d^{(k,r)}(i,j) = \min\{e_1, e_2\}} \tag{11}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k,r)}$ del problema (k, r)-esimo (i cui elementi sono espressi in (11)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1,0)}, \ldots, D^{(k-1,r)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2,0)}, \ldots, D^{(k-2,r)}, \ldots, D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}$.

6.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Consideriamo la generica coppia (i, j). Possiamo innanzitutto osservare che, nel caso in cui $k = 0$, un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ e che contiene esattamente r archi rossi è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Inoltre, il peso del cammino richiesto sarà il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i, j), se tale arco esiste ed è nero oppure se esiste e si richiede che il cammino contenga al più 1 o 2 archi di colore rosso (in questi ultimi casi, non ci interessa il colore dell'arco). Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: il peso del cammino deve essere posto a 0. In tutte le altre situazioni si attribuirà valore ∞ al peso del cammino. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti**:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\forall (i, j) \in V \times V, \\
d^{(0,0)}(i, j) &= \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \wedge col(i, j) = N \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\
d^{(0,1)}(i, j) &= \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\
d^{(0,2)}(i, j) &= \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i, j) \in E \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
}
\tag{12}
$$

6.4 Soluzione del problema `PB`.

Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n,2)}(i, j)$, per ogni coppia (i, j) di vertici. Tale valore è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j che contiene al più 2 archi rossi. Come di consueto, il valore ∞ sta ad indicare che non esiste alcun cammino da i a j che soddisfi le richieste. Considerando tutti i $d^{(n,2)}(i, j)$, è possibile ottenere la soluzione al problema. Pertanto, **la soluzione del problema `PB` è costituita da tutti i valori contenuti in** $D^{(n,2)}$.

6.5 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d^{(n,2)}(i,j)$ per ogni valore di $i, j \in V$, risulta una variante dell'algoritmo presentato nel precedente esercizio (esercizio 5) ed è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite.

7 Cammini minimi con esattamente tre vertici rossi (estremi esclusi)

7.1 Problema PB

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $i \in V$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui vi siano esattamente tre vertici rossi (estremi esclusi).

Quali sono i sottoproblemi associati a PB*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e per ciascun $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ è definito un sottoproblema di PB.

7.2 Sottoproblema di dimensione (k, r) di PB

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$, in cui ci siano esattamente r vertici rossi (estremi esclusi).

7.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Siano $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ e si consideri il sottoproblema di dimensione (k, r).

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k,r)}(i, j)$ così definita:

$d^{(k,r)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che contiene esattamente r vertici rossi (estremi esclusi).

Nota bene. Al sottoproblema (k, r)-esimo è quindi associata la macrovariabile $D^{(k,r)}$, il cui generico elemento è $d^{(k,r)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

7.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ per ogni coppia (i,j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$).

Per ogni coppia (i,j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$?

7.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i,j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore $d^{(k,r)}(i,j)$.

7.3.1 Passo ricorsivo: k > 0

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in

$$D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}, \ldots, D^{(k-1,0)} \ldots, D^{(k-1,r)}$$

Consideriamo la generica coppia (i,j). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ (in realtà, come vedremo, le situazioni sono 3).

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ e che contiene esattamente r vertici rossi, è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che soddisfa le medesime richieste. Pertanto, il peso $d^{(k,r)}(i,j)$ del cammino di interesse sarà

$$d^{(k-1,r)}(i,j) \qquad \text{se } k \notin p$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$ e $col(k) = R$. Se k è un vertice intermedio del cammino p ed è colorato di rosso, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 7. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 che, unitamente, contengono esattamente $r-1$ vertici rossi (estremi esclusi) in quanto, essendo il vertice k rosso, una volta uniti i due cammini, il vertice k diventa un vertice intermedio (e non più un estremo). Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato da

  $$\min_{(r_1,r_2)\in\{0,\ldots,r-1\}^2 | r_1+r_2=r-1} \left\{ d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j) \right\} \text{ se } k \in p \wedge col(k) = R$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_{2a}.

  Si noti che, nel caso in cui $r = 0$, si dovrebbe richiedere $r_1 + r_2 = -1$. Questo caso deve essere, pertanto, gestito separatamente. Dato che il vertice k è colorato di rosso e si sta considerando il caso in cui tale vertice appartiene al cammino, se viene richiesto che il cammino contenga esattamente 0 vertici rossi, la soluzione deve essere ∞. Riassumendo, $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato da

  $$\begin{cases} e_{2a} & \text{se } r > 0 \\ \infty & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

- $k \in p$ e $col(k) = B$. Se k è un vertice intermedio del cammino p ed è colorato di nero, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 7. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere

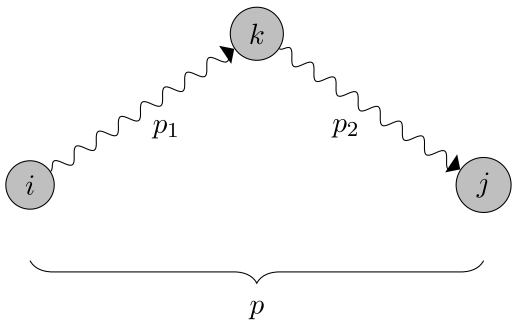

Figura 7: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$.

il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 che, unitamente, contengono esattamente r vertici rossi (estremi esclusi) in quanto il vertice k è nero. Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,r)}(i,j)$ sarà dato da

$$\min_{(r_1,r_2)\in\{0,\ldots,r\}^2 | r_1+r_2=r} \left\{ d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j) \right\} \quad \text{se } k \in p \wedge col(k) = B$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_3.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo. Pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i valori ottenuti nei casi precedenti (a seconda del colore di k). Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \forall k \in \{1,\ldots,n\}, \forall r \in \{0,\ldots,3\}, \quad d^{(k,r)}(i,j) = \begin{cases} \min\{e_1, e_2\} & \text{se } col(k) = R \\ \min\{e_1, e_3\} & \text{se } col(k) = B \end{cases}} \tag{13}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k,r)}$ del problema (k,r)-esimo (i cui elementi sono espressi in (13)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1,0)}, \ldots, D^{(k-1,r)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2,0)}, \ldots, D^{(k-2,r)}, \ldots, D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}$.

7.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Consideriamo la generica coppia (i,j). Possiamo innanzitutto osservare che, nel caso in cui $k = 0$, un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ e che contiene esattamente r vertici rossi è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Inoltre, il peso del cammino richiesto sarà il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i, j), se tale arco esiste e si richiede che il cammino contenga esattamente 0 vertici di colore rosso (si ricorda che gli estremi devono essere esclusi e non possono essere considerati). Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: il peso del cammino deve essere posto a 0 solamente se $r = 0$. In tutte le altre situazioni si attribuirà valore ∞ al peso del cammino. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (i,j) \in V \times V, \forall r \in \{0, \ldots, 3\} \\ \qquad d^{(0,r)}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \wedge r = 0 \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge r = 0 \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}} \tag{14}$$

7.4 Soluzione del problema PB.

Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n,3)}(i, j)$, per ogni coppia (i, j) di vertici. Tale valore è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j che contiene esattamente 3 vertici rossi (estremi esclusi). Come di consueto, il valore ∞ sta ad indicare che non esiste alcun cammino da i a j che soddisfi le richieste. Considerando tutti i $d^{(n,3)}(i, j)$, è possibile ottenere la soluzione al problema. Pertanto, **la soluzione del problema PB è costituita da tutti i valori contenuti in $D^{(n,3)}$**.

7.5 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d^{(n,3)}(i, j)$ per ogni valore di $i, j \in V$, risulta una variante degli algoritmi presentati in precedenza ed è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite.

8 Cammini minimi con esattamente tre vertici rossi (estremi inclusi)

8.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $i \in V$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui vi siano esattamente tre vertici rossi (estremi inclusi).

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e per ciascun $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

8.2 Sottoproblema di dimensione (k, r) di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$, in cui ci siano esattamente r vertici rossi (estremi inclusi).

8.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Siano $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ e si consideri il sottoproblema di dimensione (k, r).

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k,r)}(i, j)$ così definita:

$d^{(k,r)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$ e che contiene esattamente r vertici rossi (estremi inclusi).

Nota bene. Al sottoproblema (k, r)-esimo è quindi associata la macrovariabile $D^{(k,r)}$, il cui generico elemento è $d^{(k,r)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

8.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ per ogni coppia (i,j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \dots, D^{(0,r)}, \dots, D^{(k-1,0)} \dots, D^{(k-1,r)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1,0)} \dots, D^{(k-1,r)}$).

Per ogni coppia (i,j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k,r)}(i,j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0,0)}, \dots, D^{(0,r)}, \dots, D^{(k-1,0)} \dots, D^{(k-1,r)}$?

8.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i,j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore $d^{(k,r)}(i,j)$.

8.3.1 Passo ricorsivo: k > 0

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in

$$D^{(0,0)}, \dots, D^{(0,r)}, \dots, D^{(k-1,0)} \dots, D^{(k-1,r)}$$

Consideriamo la generica coppia (i,j). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1, \dots, k\}$ (in realtà, come vedremo, le situazioni sono 3).

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \dots, k-1\}$ e che contiene esattamente r vertici rossi, è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \dots, k\}$ e che soddisfa le medesime richieste. Pertanto, il peso $d^{(k,r)}(i,j)$ del cammino di interesse sarà

$$d^{(k-1,r)}(i,j) \qquad \text{se } k \notin p$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$ e $col(k) = R$. Se k è un vertice intermedio del cammino p ed è colorato di rosso, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 8. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 che, unitamente, contengono esattamente $r + 1$ vertici rossi (estremi inclusi) in quanto, essendo il vertice k rosso, non deve essere considerato due volte (una volta come estremo di p_1 e una seconda volta come estremo di p_2). Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato da

$$\min_{(r_1,r_2)\in\{1,\ldots,3\}^2 | r_1+r_2=r+1} \left\{ d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j) \right\} \text{ se } k \in p \wedge col(k) = R$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_{2a}.

  Si noti che, il caso $r = 0$ deve essere gestito separatamente. Dato che il vertice k è colorato di rosso e si sta considerando il caso in cui tale vertice appartiene al cammino, se viene richiesto che il cammino contenga esattamente 0 vertici rossi, la soluzione deve essere ∞. Riassumendo, $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato da

$$\begin{cases} e_{2a} & \text{se } r > 0 \\ \infty & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

- $k \in p$ e $col(k) = B$. Se k è un vertice intermedio del cammino p ed è colorato di nero, allora p è composto da due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig. 8. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1,

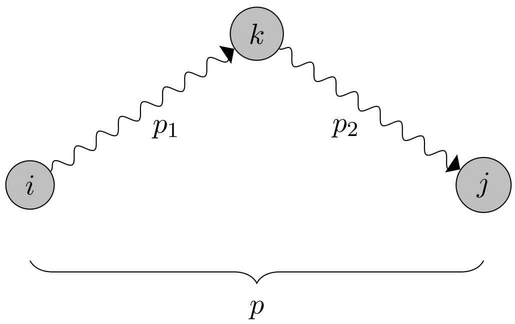

Figura 8: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$.

p_2 che, unitamente, contengono esattamente r vertici rossi (estremi inclusi) in quanto il vertice k è nero. Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,r)}(i, j)$ sarà dato da

$$\min_{(r_1,r_2)\in\{0,\ldots,r\}^2 \mid r_1+r_2=r} \left\{ d^{(k-1,r_1)}(i,k) + d^{(k-1,r_2)}(k,j) \right\} \quad \text{se } k \in p \wedge col(k) = B$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_3.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo. Pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i valori ottenuti nei casi precedenti (a seconda del colore di k). Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \forall k \in \{1,\ldots,n\}, \forall r \in \{0,\ldots,3\}, \quad d^{(k,r)}(i,j) = \begin{cases} \min\{e_1, e_2\} & \text{se } col(k) = R \\ \min\{e_1, e_3\} & \text{se } col(k) = B \end{cases}} \tag{15}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k,r)}$ del problema (k, r)-esimo (i cui elementi sono espressi in (15)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1,0)}, \ldots, D^{(k-1,r)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2,0)}, \ldots, D^{(k-2,r)}, \ldots, D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,r)}$.

8.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Consideriamo la generica coppia (i, j). Possiamo innanzitutto osservare che, nel caso in cui $k = 0$, un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, \ldots, k\}$ e che contiene esattamente r vertici rossi è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste). Inoltre, il peso del cammino richiesto sarà il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i,j), se tale arco esiste e il numero di vertici rossi che contiene coincide con il numero di vertici rossi richiesto (dato che gli estremi sono inclusi). Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: il peso del cammino deve essere posto a 0 solamente se il vertice è nero e $r = 0$ oppure il vertice è rosso e $r = 1$. In tutte le altre situazioni si attribuirà valore ∞ al peso del cammino. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti**:

$$\boxed{\begin{gathered}
\forall (i,j) \in V \times V, \\
d^{(0,0)}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \wedge col(i) = B \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i) = B \wedge col(j) = B \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\
d^{(0,1)}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \wedge col(i) = R \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge col(i) \neq col(j) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\
d^{(0,2)}(i,j) = \begin{cases} w_{i,j} & \text{se } (i,j) \in E \wedge col(i) = col(j) = R \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \\
d^{(0,3)}(i,j) = \infty
\end{gathered}} \tag{16}$$

8.4 Soluzione del problema PB.

Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n,3)}(i,j)$, per ogni coppia (i,j) di vertici. Tale valore è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j che contiene esattamente 3 vertici rossi (estremi inclusi). Come di consueto, il valore ∞ sta ad indicare che non esiste alcun cammino da i a j che soddisfi le richieste. Considerando tutti i $d^{(n,3)}(i,j)$, è possibile ottenere la soluzione al problema. Pertanto, **la soluzione del problema PB è costituita da tutti i valori contenuti in $D^{(n,3)}$**.

8.5 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d^{(n,3)}(i,j)$ per ogni valore di $i,j \in V$, risulta una variante degli algoritmi presentati in precedenza ed è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite.

9 Cammini minimi senza vertici consecutivi rossi e di lunghezza data

9.1 Problema `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, dove V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, W è la matrice dei pesi associati agli archi definita in *Cormen* (25.1) e $col : V \mapsto \{R, N\}$, dove R significa *rosso* e N significa *nero*, associa ad ogni $v \in V$ un colore, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo da i a j in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso e che sia di lunghezza data $L \geq 1$.

Quali sono i sottoproblemi associati a `PB`*?*

Per ciascun $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e per ciascun $l \in \{0, \ldots, L\}$ è definito un sottoproblema di `PB`.

9.2 Sottoproblema di dimensione (k, l) di `PB`

Dato un grafo $G = (V, E, W, col)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $l \in \{0, \ldots, L\}$, si vuole calcolare per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ il peso di un cammino minimo p da i a j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$, in cui non ci siano due vertici consecutivi di colore rosso e sia di lunghezza l.

9.2.1 Definizione delle variabili associate ai sottoproblemi

Sia $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $l \in \{0, \ldots, L\}$ e si consideri il sottoproblema k-esimo.

Per ogni coppia $(i, j) \in V \times V$ introduciamo la variabile $d^{(k,l)}(i, j)$, così definita:

$d^{(k,l)}(i, j)$ è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j, i cui vertici intermedi appartengono all'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$, che non contiene due vertici consecutivi di colore rosso ed è di lunghezza l.

Nota bene. Al sottoproblema (k, l)-esimo è associata la macro-variabile $D^{(k,l)}$ il cui generico elemento è $d^{(k,l)}(i, j)$, corrispondente alla coppia di vertici i, j.

Occorre, quindi, cercare di scrivere la soluzione di un sottoproblema assumendo di aver già risolto tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola. Supponiamo quindi di disporre delle soluzioni di tutti i sottoproblemi di dimensione più piccola.

9.2.2 Calcolo delle soluzioni dei sottoproblemi

A questo punto dobbiamo andare a scrivere le equazioni di ricorrenza che ci permettono di calcolare il valore di $d^{(k,l)}(i,j)$ per ogni coppia (i,j). Bisogna, ora, avere bene in mente che abbiamo a disposizione il valore delle soluzioni dei problemi precedentemente già risolti, che sono appunto i valori contenuti in $D^{(0,0)},\ldots,D^{(0,l)},\ldots,D^{(k-1,0)}\ldots,D^{(k-1,l)}$ (vedremo che in realtà verranno utilizzati solo i valori contenuti in $D^{(k-1,0)}\ldots,D^{(k-1,l)}$).

Per ogni coppia (i,j) come facciamo a calcolare il valore di $d^{(k,l)}(i,j)$ conoscendo tutti i valori contenuti in $D^{(0,0)},\ldots,D^{(0,l)},\ldots,D^{(k-1,0)}\ldots,D^{(k-1,l)}$?

9.3 Equazioni di ricorrenza associate al sottoproblema

Ricaviamo ora per ciascuna coppia (i,j) un'equazione di ricorrenza che ci consenta di calcolare il valore di $d^{(k,l)}(i,j)$.

9.3.1 Passo ricorsivo: $\mathbf{k > 0}$

Supponiamo di aver già calcolato tutti i valori contenuti in

$$D^{(0,0)},\ldots,D^{(0,l)},\ldots,D^{(k-1,0)}\ldots,D^{(k-1,l)}$$

Consideriamo una generica coppia (i,j). Abbiamo due possibili situazioni a seconda che k sia o no un vertice intermedio del generico cammino p dal vertice i al vertice j che, per definizione, ha vertici intermedi appartenenti a $\{1,\ldots,k\}$.

- $k \notin p$. Se k non è un vertice intermedio del cammino p allora tutti i vertici intermedi del cammino p sono nell'insieme $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Quindi un cammino minimo dal vertice i al vertice j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1,2,\ldots,k-1\}$ è anche un cammino minimo da i a j con tutti i vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1,2,\ldots,k\}$. Pertanto, il peso $d^{(k,l)}(i,j)$ del cammino di interesse varrà:

  $$d^{(k-1,l)}(i,j) \qquad\qquad \text{se } k \notin p$$

  Per comodità chiamiamo questa quantità e_1.

- $k \in p$. Se k è un vertice intermedio del cammino p, allora p è composto dai due sottocammini p_1 e p_2, come mostrato in Fig.9. Poichè k non è un vertice intermedio del cammino p_1, allora p_1 è un cammino da i a k con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1,2,\ldots,k-1\}$.

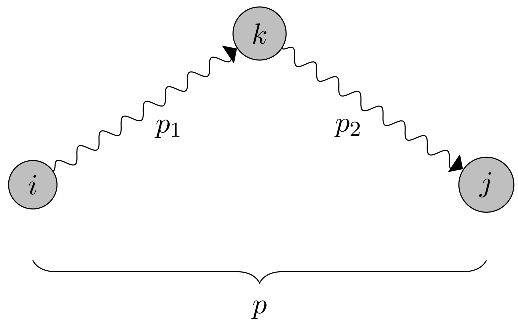

Figura 9: p è un cammino da i a j con i vertici intermedi appartenenti a $\{1, 2, \ldots, k\}$ e contenente il vertice k. p_1 e p_2 sono sottocammini di p rispettivamente da i a k e da k a j. Siccome tutti i vertici intermedi di p appartengono a $\{1, \ldots, k\}$ allora tutti i vertici intermedi sia di p_1 che di p_2 appartengono a $\{1, \ldots, k-1\}$.

Analogamente p_2 è un cammino da k a j con vertici intermedi appartenenti all'insieme $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Siccome p è minimo se e solo se p_1 e p_2 sono minimi [**proprietà della minimalità**] il peso $d^{(k,l)}(i, j)$ sarà dato dalla somma dei pesi di due possibili sottocammini p_1 e p_2. A questo punto, è necessario andare ad identificare tutte le coppie p_1, p_2 che possono essere combinate correttamente per ottenere il cammino p richiesto. Bisogna considerare solamente le coppie p_1, p_2 che, unitamente, formano un cammino di lunghezza l. Per ricavare un cammino minimo sarà sufficiente considerare la coppia p_1, p_2 che produce il cammino di peso minore. Pertanto, $d^{(k,l)}(i, j)$ sarà dato da

$$\min_{(l_1,l_2)\in\{1,\ldots,l\}^2 | l_1+l_2=l} \left\{ d^{(k-1,l_1)}(i, k) + d^{(k-1,l_2)}(k, j) \right\} \text{ se } k \in p$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_{2a}.

Si noti che, nel caso in cui $l \leq 1$, si dovrebbe richiedere $l_1 + l_2 = 0$ oppure $l_1 + l_2 = 1$ (e sono impossibili entrambi in quanto il cammino p deve contenere il vertice k e quindi avere una lunghezza di almeno 2). Questi casi devono essere, pertanto, gestiti separatamente. Dato che, in questo caso, il vertice k deve essere contenuto nel cammino, se viene richiesto che il cammino sia lungo 0 o 1, la soluzione deve essere ∞. Riassumendo, $d^{(k,l)}(i, j)$ sarà dato da

$$\begin{cases} e_{2a} & \text{se } l > 1 \\ \infty & \text{se } l \leq 1 \end{cases}$$

Per comodità chiamiamo questa quantità e_2.

A priori non è possibile conoscere se k appartenga o meno al cammino minimo, pertanto il peso del cammino minimo si ottiene come il minimo tra i due valori ottenuti nei due casi. Ciò determina le seguenti **equazioni di ricorrenza**:

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in V \times V, \forall k \in \{1,\ldots,n\}, \forall l \in \{0,\ldots,L\} \quad d^{(k,l)}(i,j) = \min\{e_1, e_2\}} \tag{17}$$

Osservazione. Si noti come la soluzione $D^{(k,l)}$ del problema (k,l)-esimo (i cui elementi sono espressi in (17)) dipende dai valori contenuti in $D^{(k-1,0)}, \ldots, D^{(k-1,l)}$ ma non dai valori contenuti in $D^{(k-2,0)}, \ldots, D^{(k-2,l)}$, $\ldots$, $D^{(0,0)}, \ldots, D^{(0,l)}$.

9.3.2 Caso base: $\mathbf{k = 0}$

Si consideri la generica coppia di vertici (i,j). Si osservi che un cammino dal vertice i al vertice j, con vertici intermedi appartenenti a $\{1,\ldots,k\}$ nel caso in cui $k = 0$, è un cammino che non ha alcun vertice intermedio. Un tale cammino ha al massimo un arco (se questo arco esiste) e quindi una lunghezza di 1. Per calcolarne il peso, occorre controllare se i due vertici siano o meno di colore rosso. In particolare il peso del cammino richiesto sarà quindi il peso $w_{i,j}$ dell'arco (i,j) (se questo esiste), nel caso in cui almeno un vertice tra i e j non sia rosso e la lunghezza richiesta l sia pari a 1. Tutto ciò è valido solamente se $i \neq j$. Nel caso in cui $i = j$, dato che si considerano grafi senza cappi, l'unico cammino da i a j è il cammino degenere senza archi composto da un singolo vertice: il peso del cammino deve essere posto a 0 solamente se $l = 0$. In tutte le altre situazioni si attribuirà valore ∞ al peso del cammino. Pertanto le **equazioni del caso base sono le seguenti:**

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall (i,j) \in V \times V, \forall 0 \le l \le L \\ d^{(0,l)}(i,j) = &\begin{cases} 0 & \text{se } i = j \wedge l = 0 \\ w_{i,j} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \wedge (col(i) \neq R \vee col(j) \neq R) \wedge l = 1 \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}} \tag{18}$$

9.4 Soluzione del problema `PB`

Le equazioni di ricorrenza precedentemente descritte ci permettono di calcolare il valore $d^{(n,L)}(i,j)$, per ogni coppia (i,j) di vertici. Tale valore è il peso di un cammino minimo dal vertice i al vertice j che non contiene due vertici rossi consecutivi e di lunghezza L. Come di consueto, il valore ∞ sta ad indicare che non esiste alcun cammino da i a j che soddisfi le richieste. Considerando tutti i $d^{(n,L)}(i,j)$, è possibile ottenere la soluzione al problema. Pertanto, **la soluzione del problema `PB` è costituita da tutti i valori contenuti in** $D^{(n,L)}$.

9.5 Implementazione

L'algoritmo che calcola i valori $d^{(n,L)}(i,j)$ per ogni valore di $i,j \in V$, risulta una variante degli algoritmi presentati in precedenza ed è facilmente ricavabile dalle equazioni di ricorrenza sopra definite. Attenzione che in questo caso, la complessità dell'algoritmo risulta essere $\mathcal{O}(n^3 \cdot L^3)$.