WIS

istanza $X_i = \{1, \dots, i\}$

$$S_i \longleftrightarrow V(S_i)$$

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \\ S_{p(i)} \cup \{i\} & \text{se } i \in S_i \end{cases}$$

$$V(S_i) = \begin{cases} V(S_{i-1}) & \text{se } i \notin S_i \\ V(S_{p(i)}) + v_i & \text{se } i \in S_i \end{cases}$$

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} & \text{se } V(S_{i-1}) > V(S_{p(i)}) + v_i \\ S_{p(i)} \cup \{i\} & \text{se } V(S_{p(i)}) + v_i \geq V(S_{i-1}) \end{cases}$$

DIM. TEOREMA (PROPR. SOTTOSTRUTT. OTTIMA)

Sia $i > 1$. Si consideri il sottoproblema i-esimo del WIS

Siano $S_{i-1}, S_{i-2}, \dots, S_1$ le soluz.

dei sotto prob. + piccoli $(i-1, i-2, \dots 1)$

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} & \underline{\text{se } i \notin S_i} \quad (1) \\ S_{p(i)} \cup \{i\} & \underline{\text{se } i \in S_i} \quad (2) \end{cases}$$

dim. (1)

CASO $i \notin S_i$

Devo far vedere che $S_i = S_{i-1}$.

Se per assurdo $S_{i-1}$ NON fosse la soluzione del problema i-esimo, allora

$$\exists S' \subseteq \{1, \dots, i\} \text{ con } S' \neq S_{i-1} \text{ che e'}$$

la soluzione del problema i-esimo.

$S'$ e' tale per cui $COMP(S') = true$

$$V(S') > V(S_{i-1})$$

Per il caso in cui siamo, $i \notin S'$.
Allora $S' \subseteq \{1, \dots, i-1\}$

$\Rightarrow$ $S_{i-1}$ non puo' essere soluzione del problema $i-1$ CONTRADDIZIONE

dim. 2

CASO $i \in S_i$

Devo far vedere che $S_i = S_{p(i)} \cup \{i\}$.

Se per assurdo $S_{p(i)} \cup \{i\}$ NON e' soluzione del problema i-esimo, allora

$$\exists S' \subseteq \{1, \dots, i\} \text{ con } S' \neq S_{p(i)} \cup \{i\}$$

che e' soluzione del problema i-esimo.

Quindi $COMP(S') = true$

$$V(S') > V(S_{p(i)} \cup \{i\})$$

$V(S_{p(i)}) + v_i$

Per il caso (ipotesi) in cui siamo, $i \in S_i$.

Dunque:

$$S' = S'' \cup \{i\}$$

è semplicemente $S' \setminus \{i\}$

Segue che: $\text{COMP}(S'') = \text{true}$

$$S'' = \{1, \dots, p(i)\}$$

$$V(S') > V(S_{p(i)}) \cup \{i\}$$

$S'' \cup \{i\}$

$$V(S'') + \cancel{v_i} > V(S_{p(i)}) + \cancel{v_i}$$

Dunque:

$S_{p(i)}$ non può essere la soluzione del problema $p(i)$.

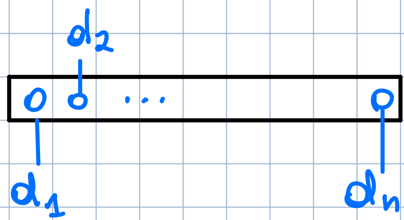
· HATEVILLE ·

## ISTANZA

$$n \longleftrightarrow X_n = \{1, \dots, n\}$$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Sia $d_i$ la donazione dell'abitante della casa $i$.

$d_i$ 


## SOLUZIONE

$$S \subseteq X_n$$

1) $\text{COMP}(S) = \text{true}$
2) $D(S) = \max\{D(A)\}$

$$A \subseteq X_n$$
$$\text{COMP}(A) = \text{true}$$

$A \subseteq \{1, \dots, n\}$

$\text{COMP}(A) = \text{true}$ sse

$$\forall i \in A \begin{cases} 2 \notin A & \text{se } i = 1 \\ n-1 \notin A & \text{se } i = n \\ i-1 \notin A \\ \wedge \ i+1 \notin A & \text{se } i \neq 1 \wedge i \neq n \end{cases}$$

Alternativa

$COMP(A) = true$

$\forall i, j \in A,\ i \neq j,\quad j > i$

$j \neq i+1$

---

$A \subseteq \{1, \dots, n\}$

$D(A) = \sum_{i \in A} d_i$

---

Come lo rendiamo ricorsivo? Passiamo ai sottoprob.

$X_n = \{1, \dots, n\}$ $\quad S_n$

$X_{n-1} = \{1, \dots, n-1\}$ $\quad S_{n-1}$

$\vdots$

$X_1 = \{1\}$ $\quad S_1 = \{1\}$ $\quad D(S_1) = d_1$

$X_0 = \emptyset$ $\quad S_0 = \emptyset$ $\quad D(S_0) = 0$

Sia $i > 1$.

Supponiamo di aver già risolto i sottoproblemi $i-1, i-2, \dots 1, 0$.

Quindi supponiamo di disporre di:

$S_{i-1}, S_{i-2}, \dots, S_1, S_0$

$S_i = ?$

$S_i = . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$

$S_i \subseteq \{1, \dots, i\}$

$$S_i = \begin{cases} S_{i-2} \cup \{i\} & \text{se } i \in S_i \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \end{cases}$$

Dim.

Sia $i > 1$.

Supponiamo che $S_{i-1}, S_{i-2}, \dots, S_1, S_0$ siano le soluzioni dei sottoproblemi $i-1, i-2, \dots, 1, 0$.

Allora

$$S_i = \begin{cases} S_{i-2} \cup \{i\} & \text{se } i \in S_i \quad (1) \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \quad (2) \end{cases}$$

dim. 1

Devo far vedere che $S_i = S_{i-2} \cup \{i\}$.
Se per assurdo $S_{i-2} \cup \{i\}$ non fosse la soluzione del problema i-esimo, allora $\exists S' \subseteq \{1, \dots, i\}$, con

$S' \neq S_{i-2} \cup \{i\}$

che e' la soluzione del problema i-esimo.

$S'$ e' tale per cui:

$COMP(S') = true$

$D(S') > D(S_{i-2} \cup \{i\})$

Per il caso (ipotesi) in cui siamo, $i \in S_i$.
Dunque

$$S' = S'' \cup \{i\}$$

dove $COMP(S'') = true$

$$S'' \subseteq \{1, \dots, i-2\}$$

$D(S') > D(S_{i-2} \cup \{i\})$

$D(S'' \cup \{i\}) > D(S_{i-2} \cup \{i\})$

$D(S'') + \cancel{d_i} > D(S_{i-2}) + \cancel{d_i}$

$D(S'') > D(S_{i-2})$

$\Rightarrow$ $S'' > S_{i-2}$ ma $S_{i-2}$ non puo' essere soluzione del sottoproblema i-2.

dim. 2

Devo far vedere che $S_i = S_{i-1}$.
Se per assurdo $S_{i-1}$ non fosse soluzione del problema i-esimo, allora

$$\exists\, S' \subseteq \{1, \dots, i\} \text{ con } S' \neq S_{i-1}$$

che e' soluzione del problema i-esimo.

$S'$ e' tale per cui $\quad comp(S') = true$

$$D(S') > D(S_{i-1})$$

Per il caso in cui siamo, $i \notin S'$.
Allora $S' \subseteq \{1, \dots, i-1\}$

$\Rightarrow$ $S_{i-1}$ non puo' essere soluzione del problema $i-1$ CONTRADDIZIONE

---

$$S_i = \begin{cases} S_{i-2} \cup \{i\} & \text{se } i \in S_i \\ S_{i-1} & \text{se } i \notin S_i \end{cases}$$

$$S_i = \begin{cases} S_{i-2} \cup \{i\} & \text{se } D(S_{i-2}) + d_i \geq D(S_{i-1}) \; * \\ S_{i-1} & \text{se } D(S_{i-2}) + d_i < D(S_{i-1}) \end{cases}$$

$D(S_0)$ $\quad D(S_1)$ $\quad D(S_2)$ $\ldots$ $D(S_n)$

$\;\;\; = 0 \qquad\quad = d_1$

$OPT(i) = D(S_i)$

$OPT(0) = 0$

$OPT(1) = d_1$

$\vdots$

$OPT(n)$

$$OPT(i) = \begin{cases} OPT(i-2) + d_i & \text{se } ⊛ \\ OPT(i-1) & \text{altrim.} \end{cases}$$

Algo prog. din. per calc. solo ottimi

$PD\text{-}OPT(n, \overbrace{d_1, \ldots d_n}^{\text{vettore}})$

$OPT(0) = 0$

$OPT(1) = d_1$

for $i = 2$ to $n$

if $OPT(i-2) + d_i \geq OPT(i-1)$

$OPT(i) = OPT(i-2) + d_i$

else

$OPT(i) = OPT(i-1)$

equivalente a:

$OPT(i) =$

$= \max\{OPT(i-2) + d_i, OPT(i-1)\}$

PRINT-HATEVILLE $(i)$ $\leftarrow$ $S_i$

(da fare in autonomia)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 9 | 8 | 2 |

$\leftarrow$ in €

massimizzare donazioni

OPT

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | | | | | |

---

· INTERLEAVING ·

$X = \langle C, I, A, O \rangle$ $\square$ $m = 4$

$Y = \langle M, A, M, M, A \rangle$ $\diamond$ $n = 5$

$W = \langle C, I, M, A, A, M, M, A, O \rangle$ $m+n = 9$

$\square \; \square \; \diamond \; \square \; \diamond \; \diamond \; \diamond \; \diamond \; \square$

ISTANZA ISTANZA

X di lungh. $m$
Y di lungh. $n$
W di lungh $m+n$

SOLUZ.

true sse $W$ è interleaving di $X$ e $Y$.

## Interleaving (formalmente)

$W$ è interleaving di $X$ e $Y$

$X$ sottoseq. di $W$ · $\exists \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, m+n\}$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ $x_k = w_{i_k}$

$Y$ sottoseq. di $W$ · $\exists \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subseteq \{1, \dots, m+n\}$ con $j_1 < j_2 < \dots < j_n$, $\forall h \in \{1, \dots, n\}$ $y_h = w_{i_h}$

tali che:

$$\{i_1, \dots, i_m\} \cap \{j_1, \dots, j_n\} = \emptyset$$
$$\{i_1, \dots, i_m\} \cup \{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, m+n\}$$

## Risoluzione con programmazione dinamica

SOTTOPROBLEMA GENERICO

$(i, j)$ con $i \in \{0, \dots, m\}$, $j \in \{0, \dots, n\}$

ISTANZA

$X_i$

$Y_j$

$W_{i+j}$

SOLUZ.

true sse $W_{i+j}$ e' interleaving di $X_i$ e $Y_j$

$S_{ij}$ e' la soluzione del problema $(i, j)$.

CASI BASE

1) $i = 0$, $j = 0$ $\quad S_{ij} = \text{true}$

2) $i = 0$, $j > 0$
- se $w_j \neq y_j \Rightarrow S_{ij} = \text{false}$
- se $w_j = y_j \Rightarrow S_{ij} = S_{i,j-1}$

3) $i > 0$, $j = 0$

4) $i > 0$
$j > 0$