LCS: Longest common subsequence → in quali fasi suddivido la spiegazione?

⇒ MOTIVAZIONE: "Quanto sono simili 2 sequenze"

⇒ PROPEDEUTICA: Concetto di sequenza, sottosequenza, prefisso

⇒ TENTATIVO "BRUTE FORCE": → "verso il ragionamento"

1. Trovo tutte le sottosequenze di $X = \langle x_1, x_2 \dots x_m \rangle \rightarrow 2^m$ sottoseq.
2. Trovo tutte le sottosequenze di $Y = \langle y_1, y_2 \dots y_n \rangle \rightarrow 2^n$ sottoseq.
3. Confronto

TROPPO LENTO, MA non così sbagliato ⇝ tenendo a mente questo ragionamento + SOTTOSTRUTT. OTTIMA LCS ⇒ Andiamo verso la prog. dinamica.

→ Forse meglio esporla successivamente?

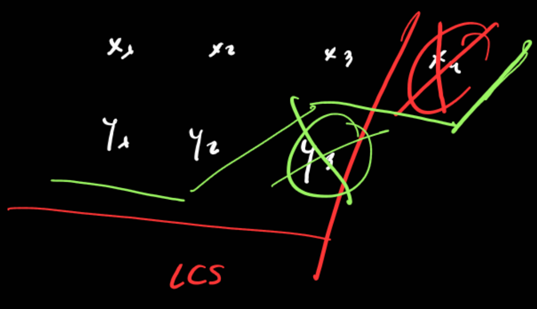
→ Elementi della p. din. p. 313

⇒ **SOTTOSTRUTTURA OTTIMA** LCS: ⇒ pagina 325

Siano $X = \langle x_1, x_2, \dots x_m \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \dots y_n \rangle$ 2 sottoseq. $Z = \langle z_1, z_2 \dots z_k \rangle$ Risultante da LCS.

questa risulta sol. ottima parziale.

1. Se $x_m = y_n$, allora $\boxed{Z_k} = x_m = y_n$ e Z_{k-1} è una LCS X_{m-1}, Y_{n-1}.
2. Se $x_m \neq y_n$, allora $Z_k \neq x_m \Rightarrow Z = $ LCS X_{m-1} e Y.
3. Se $x_m \neq y_n$, allora $Z_k \neq y_n \Rightarrow Z = $ LCS X e Y_{n-1} → ricorda gli indici FONDAM.! k e $k-1$ ....



Poi confronterò • e •

⇒ Dimostrazione: pag. 325 ↑ TROVALA

⇓ Come quella di Dennunzio?

⇒ FASE 2: Soluzione ricorsiva:

$c[i, j] \Rightarrow$ lunghezza della LCS$(X_i; Y_j)$:

* Giustamente, essendo ricorsiva etc.... abbiamo i sottoproblemi

$$
\begin{cases}
0 & \text{se } i=0 \text{ o } j=0 \\
1 + LCS(x_{i-1}, y_{j-1}) & x_i = y_j \\
\max(LCS(x_{i-1}, y) ; (x, y_{j-1})) & x_i \neq y_j
\end{cases}
$$

"CONDIVISI".

⇒ FASE 3: Lunghezza LCS.

* Metodo Bottom-up (memoization) con matrice.
Codice a pagina 327. $O(m \cdot n)$.

⇒ FASE 4 ⇒ PRINT LCS (easy recursive).

$O(m+n)$

⇒ miglioria del codice.

⇒ Domande.

Negli appunti 2023, in più ho: ← Auto LCS

1) Considerare i sottoproblemi:

$S^{m,n} = \{ \dots S^{m-1,n-1}, S^{m,n-k} \dots S^{0,0} \}$ ⇒ È SEMPRE LO STESSO PROBLEMA, MA L'ISTANZA PIÙ PICCOLA.

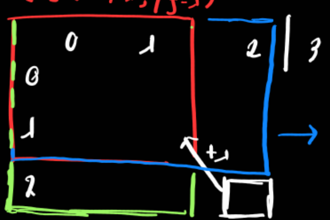
→ Disegno "zoom" con la cella.

2) Disegno della tabella per la soluzione dinamica. → 4 Algo-Spieg.

*Basta ricordare la formula ricorsiva!

$$
\begin{cases}
C_{ij} = 0 & \text{se } i=0 \vee j=0 \\
C_{i,j} = C_{i-1,j-1} + 1 & \text{se } x_i = y_j \\
C_{ij} = \max\{ C_{i-1,j} ; C_{i,j-1} \} & \text{se } x_i \neq y_j
\end{cases}
$$

$lcs(x_{i-1}, y_{j-1})$



→ $lcs(x_{i-1}, y)$

→ LCS considerando il simbolo attuale della sequenza y ed "x tolto un simbolo".

↓

3 $\hookrightarrow LCS(X_i, Y_{J-1})$

{ migliorabile usando i termini "prefisso"

3) Esempio con: $|X| = \langle a, b, c, b, d, a, b \rangle$

$|Y| = \langle b, d, c, a, b, a \rangle$

4) Algo 6 → ricostruzione LCS

5) Algo7 → Sottostruttura ottima!

ALGO_7: **TEOREMA DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA LCS**

TERMINI (sequenze, indici, LCS):

Siano X, Y due sequenze tali che: $|X| = m$, $|Y| = n$.

Sia (i, J) una generica coppia tale che: $i \in \{1, 2 \dots m\}$, $J \in \{1, 2 \dots n\}$

Sia $Z_k = \langle z_1, z_2 \dots z_k \rangle$ una LCS di X_i e Y_J

<u>Dimostrazione:</u>

1) Se $X_i = Y_J \Rightarrow$ 1a) $Z_k = X_i = Y_J$.

1b) $Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{J-1})$.

1a) Supponiamo $X_i = Y_J$. Voglio dimostrare che $Z_k = X_i = Y_J$.

<u>Assurdo:</u> $Z_k \neq X_i \neq Y_J \Rightarrow Z_k | X_i$ é una sottoseq. di X_i (uguale Y_J).

simbolo,

↳ $|Z_k | x_i| = k+1$, ed è una LCS > Z_k.

Z_k non è LCS.