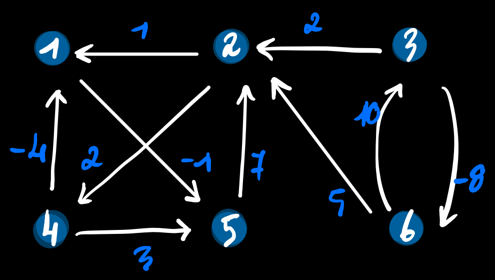
27 Novembre, video 2/3.

ESERCIZIO 1:

* Condizione di partenza dell'algoritmo Floyd-Warshall: é che NON CI SIANO CICLI DI PESO NEGATIVO.



$D^{(0)} = W =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	∞	∞	0	-1	∞
2	1	0	∞	2	∞	∞
3	∞	2	0	∞	∞	-8
4	-4	∞	∞	0	3	∞
5	∞	7	∞	∞	0	∞
6	∞	∞	10	∞	∞	0

* Questa é la matrice di adiacenza pesata del grafo iniziale.

→ COME COSTRUISCO $D^{(1)}$?

- Devo considerare ogni cammino (i,j) CONSIDERANDO LA POSSIBILITÁ di passare per 1 come vertice intermedio del cammino.

Esempio: (a) $2 \to 1 \to 5 < \infty$! Nuovo valore $(2,5) = 8$.

- COSÍ PER LE FUTURE $D^{(k)}$.

$D^{(1)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	∞	∞	∞	-1	∞
2	1	0	∞	2	0	∞
3	∞	2	0	∞	∞	-8
4	-4	∞	∞	0	-5	∞
5	∞	7	∞	∞	0	∞
6	∞	5	10	∞	∞	0

$D^{(2)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	∞	∞	∞	-1	∞
2	1	0	∞	2	∞	∞
3	3	2	0	4	2	-8
4	-4	∞	∞	0	-5	∞
5	8	7	∞	9	0	∞
6	6	5	10	7	5	0

$D^{(3)} =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	∞	∞	∞	-1	∞
2	1	0	∞	2	∞	∞
3	3	2	0	4	2	-8
4	-4	∞	∞	0	-5	∞
5	8	7	∞	9	0	∞
6	6	5	10	7	5	0

ESEMPIO → ora ho "sbloccato" il cammino $3 \to 2 \to 1$ perché 2 é un nodo intermedio da considerare. Allora nella tabella (i,j):

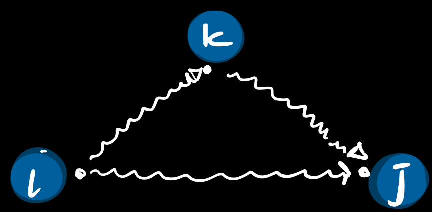
$$M_{i,j} = \min \{ D^{(k-1)}_{(i,j)} ; D^{(k)}_{(i,j)} \}$$

$D^{(4)} = (\dots)$ Dovrei arrivare a $D^{(6)}$, però... Zandron ne ha fatto la verifica "grafica".

ESERCIZIO 2:

$G = (V, E, w, col)$ $col: V \to \{R, N\}$

?= Costo cammino minimo, per ogni coppia di vertici, in cui non ci sono 2 col uguali consecutivi (colori alternati).



* Ho 2 alternative (come sempre in FW).

Semplicemente → metto una condizione in più (il colore).

↳ sia nel caso base, che nel caso passo.

Caso base:

$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ w_{i,j} & \text{se } (i,j) \in E \wedge col(i) \neq col(j) \\ \infty & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

oppure

Caso passo:

$$d_{i,j}^{(k)} = \left\{ \min\left(d_{ij}^{(k-1)} ; d_{ij}^{(k)}\right) \right\}$$

uguale all'originale, perché viene mantenuta l'alternanza.

ESERCIZIO 3:

Determinare i cammini minimi per ogni coppia di vertici. Non vogliamo vertici consecutivi Rossi.

$$\bullet\ d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & i = j \\ w_{ij} & (i,j) \in E \ \wedge \ (col(i) = N \ \text{ OR } \ col(j) = N) \\ \infty & \text{Altrimenti.} \end{cases}$$

$$\bullet\ d_{ij}^{(k)} = \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ij}^{(k)} \}$$

ESERCIZIO 4:

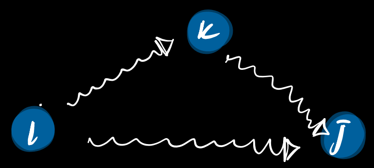
$G = (V, E)$ non pesato. $col: V \to \{R, N\}$.

∃: $\forall (i,j) \in E$, stabilire se ESISTE UN CAMMINO da (i,j) senza vertici di uguale colore.

$$d_{ij}^{(0)} : \begin{cases} 1 & \text{SE } i = j \\ 1 & \text{SE } (i,j) \in E \ \wedge \ col(i) \neq col(j) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SE È $= 1$

$$d_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{k-1} \text{ OR } \underbrace{(d_{ik}^{k-1} \text{ AND } d_{kj}^{k-1})}_{\text{SE È } 1}$$



Soluzione : $D^{(n)}$

ESERCIZIO 5 :

$G = (V, E, w, col)$ $\quad$ $Col: E \to \{R, N\}$

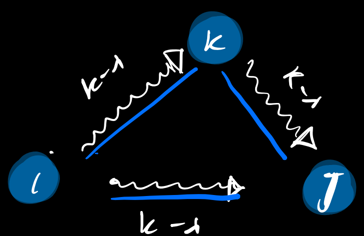
Cammino minimo per ogni coppia di vertici, senza archi consecutivi DELLO STESSO COLORE.

$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w_{ij} & \text{se } (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

* qui non posso controllare l'alternanza nel caso base!

$$d_{ij}^{(k)} = \min \underbrace{\left\{ d_{ij}^{(k-1)},\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{k-1} \right\}}$$

↳ NON SUFFICIENTE !



⟶ come faccio? Problema ausiliario

- In mezzo → è il caso base a garantirmi che non ci sono archi dal colore consecutivo.
- in k però : ⟶ k ⟶

questi sono compatibili?

(NON LO POSSO SAPERE)

* Ho bisogno del problema aux, che usa la variabile:

$d_{(i,j,a,b)}^{(k)}$ = " costo del cammino minimo da i a j, con vertici intermedi nell' insieme $\{1 \dots k\}$, con 1° lato di colore $= a$ ed ultimo lato di colore $= b$ ".

$$d_{ijab}^{(0)} = \begin{cases} \infty & \text{se } i = j \\ w_{ij} & \text{se } (i,j) \in E \ \wedge \ col(i,j) = a \ \wedge \ col(i,j) = b \end{cases}$$

$\infty \quad$ altrimenti

Qui costruisco $D^{(0)}$

esempio: $d^{(0)}(i, j, R, R) = \begin{cases} \infty \\ w_{ij} \\ 0 \end{cases}$ posso avere anche N, R o R, N

* ottengo dei cammini con informazioni in più.

$$d^{(k)}_{ijab} = \min \left\{ d^{k-1}_{ijab} \, ; \, \left(d_{ikaR} + d_{kjNb} \right) , \left(d_{ikaN} + d_{kjRb} \right) \right\}$$

comp! $\quad$ comp!

! qui arrivo fino a D^k

SOLUZIONE: → percorso minimo $\quad D^n = \min_{a,b \in \{R,N\}} \{ D^{(n)}_{ijab} \}$