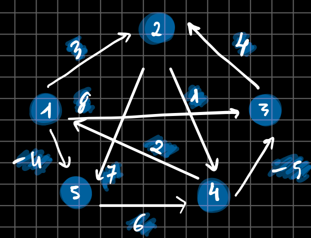
ALGORITMO DI FLOYD - WARSHALL (continua)

```
FW_PD (W) {
    n = W.rows      // numero vertici del grafo.
    D^0 = W;        // caso base. k = 0
    For k = 1 to n          // caso passo
        for i = 1 to n      // Per ogni coppia ij
            For j = 1 to n
                d_ij^(k) = min { d_ij^(k-1), d_ik^(k-1) + d_kj^(k-1) };
    return D^n;
}
```

$T(n) = \Theta(n^3)$, Spazio ? → pensaci.

ESEMPIO DI CALCOLO (da fare a casa):



$D^0 =$

	1	2	3	4	5
1	0	3	8	∞	-4
2	∞	0	∞	1	2
3	∞	4	0	∞	∞
4	2	∞	-5	0	∞
5	∞	∞	∞	∞	6

Trovati i pesi, voglio il cammino minimo da i a j. (Voglio un insieme di vertici, non un numero).
$\forall (i,j) \in V^2$ devo calcolare il predecessore di j, nel cammino da i a j.

π_{ij} = "predecessore di j nel cammino minimo $i \rightsquigarrow j$"

$\pi_{ij} = ?$ $\quad \Pi = (\pi_{ij})$ con $i = \{1 \dots n\} \wedge j = \{1 \dots n\}$

$i \longrightarrow o \longrightarrow o \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{o}_{\,j-1} \longrightarrow j$

↓ stampo

$i \longrightarrow o \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{o}_{\,j-2} \longrightarrow j-1$

↓ stampo

....

fino a "stampo i"

SOTTOPROBLEMA: $k \in \{0 \dots n\}$

$\pi_{ij}^{(k)}$ "predecessore di j nel cammino minimo $i \rightsquigarrow j$
MA! ↦ con vertici intermedi tra $\{1 \dots k\}$"

CASO BASE:

ossia:
$w_{ij} \neq \infty \wedge w_{ij} \neq 0$

$k = 0$ $\quad \forall (i,j) \in V^2$ $\quad \pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{i\} & \text{ho un arco diretto, se } i \neq j \wedge (i,j) \in E \\ NIL & \text{quando sono "lo stesso nodo", se } i = j \wedge (i,j) \notin E \\ NIL & \text{se l'arco non c'è tra i 2, se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \end{cases}$

CASO PASSO:

$\boxed{k > 0}$ e devo calcolare $\Pi^{(k)} = (\pi_{ij}^{(k)})$ $i \in \{1 \dots n\}$ e $j \in \{1 \dots n\}$
Assumo di aver già calcolato $\Pi^{(0)}, \Pi^{(1)} \dots \Pi^{(k-1)}$

Come capisco quando $k \in$ o $k \notin$?

- Ho ancora 2 casi:
- caso $\boxed{k \notin}$ alla soluzione: $i \rightsquigarrow j$, allora $\pi_{ij}^{(k)} = \pi_{ij}^{(k-1)}$
- caso $\boxed{k \in}$ alla soluzione: $i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j$, allora $\pi_{ij}^{(k)} = \pi_{kj}^{k-1}$

  ↑ sta qui

$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{altrimenti (il contr.)} \end{cases}$

ALGORITMO BOTTOM-UP:

// Caso base:

```
for (i = 1 to n) {
    for (j = 1 to n) {
        If (i = j ∨ d_ij^(0) = ∞) {
            π_ij^(0) = NIL
        } else { i ≠ j ∧ d_ij^(0) ≠ ∞
            π_ij^(0) = { i }
        }
    }
}
```

// Caso passo

```
for k = 1 to n {
    for i = 1 to n {
        for j = 1 to n {
            } if ( d_ij^(k-1) ≤ d_ik^(k-1) + d_kj^(k-1) ) {
                π_ij^(k) = π_ij^(k-1)
            } else {
                π_ij^(k) = π_kj^(k-1)
            }
        }
    }
}
```

ALGORITMO DI STAMPA: (se conosco il predecessore).

Voglio stampare il cammino da $i \leadsto j$.

```
PRINT_SHORTEST_PATH (i, j, π):

if i = j {
    print (i);
}
else
{
    If (π_ij = NIL) {
        print (" non esiste il cammino minimo tra i j ");
    }
    else {
        PRINT_SHORTEST_PATH (i, π_ij, π);   → predecessore di j.
        print ( j );
    }
}
```

• COSTRUZIONE DELLA MATRICE DEI PREDECESSORI:

Π = matrice predecessore

$\downarrow$

si calcola contemporaneamente a $D^{(k)}$

$\Pi_{ij}^{(k)}$ = predecessore di J, nel cammino $i \rightsquigarrow J$, con k vertici intermedi.

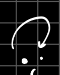
$$\Pi_{ij}^{0} = \begin{cases} NIL & \text{se } i = J \ \lor \ w_{ij} = \infty \\ i & \text{se } i \neq J \ \text{ e } \ w_{ij} < \infty \end{cases}$$

$$\Pi_{ij}^{k} = \begin{cases} \Pi_{ij}^{(k-1)} & \text{se } \underbrace{d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kJ}^{(k-1)}}_{\hookrightarrow \text{ funzioni peso/ matrice } D} \\ \Pi_{kJ}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kJ}^{(k-1)} \end{cases}$$

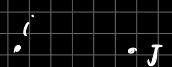
Quindi funziona aiutandosi con d_{ij}^{k} $\rightarrow$ la costruzione avviene simultaneamente.

C.B.:

$\Pi_{ij}^{0} = i \rightarrow$ perché è il predecessore di J

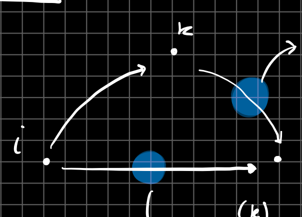


$\Pi_{ij}^{0} = NIL$



$\Pi_{ij}^{0} = NIL$

C. PASSO:



$\Pi_{ij}^{(k)} = \Pi_{kJ}^{(k-1)}$

$\Pi_{ij}^{(k)} = \Pi_{ij}^{(k-1)}$

d'accordo a quale ha peso minore (lo so da D).