|Caso base| $i \vee j = 0$: $m+n+1$ (manca il più 1 in "comune" $i=0, j=0$)

↳ sotto prob che arrivano al C.B.

|Coppie del passo ricorsivo|: $m \cdot n$ = tutte le combinazioni.

$C_{ij} \Rightarrow$ matrice lunghezze $S_{ij} \Rightarrow$ matrice sequenze oppure $C_{ij} + b_{ij}$ per ricostruire la sequenza.

LCS

$T(m,n) = \Theta(m \cdot n)$; $\Theta(m)$ primo for ; $\Theta(n)$ secondo for ; + "qualcosina".

$S = \Theta(m \cdot n)$ ⇝ spazio

ALGORITMO PRINT:

- CASO PEGGIORE: tempo $\Rightarrow O(m+n)$
- CASO MIGLIORE: $\Rightarrow O(\max\{m, n\})$

```
PRINT_LCS ( X, Y, i, j, b_ij )
  if (i=0 v j=0){
      return ;
  }else{
    1) if (b = ↖ :)
       {
         LCS( X, Y, i-1, j-1, b_i-1 j-1 );
         print( xi );
       }
    2) if (b = ← :)
       {
         LCS( X, Y, i, j-1, b_ij-1 );
       }
    3) if (b = ↑ :)
       {
         LCS (X, Y, i-1, j-1, b_i-1,j );
       }
  }.
```

~ Riassunto discorso fino ad ora.

TEOREMA DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA DELLA LCS:

X, Y t.c: $|X| = m$ v $|Y| = n$

Sia (i, j) una generica coppia con $i \in \{1 \dots m\}$ e $j \in \{1 \dots n\}$

Sia $\underbrace{Z_k = \langle z_1 \dots z_k \rangle}_{S_{ij}}$ una LCS di X_i e Y_j.

DIMOSTRO:

1) Se $x_i = y_j \Rightarrow$ 1a) $z_k = x_i = y_j$

1b) $Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$;

2) Se $x_i \neq y_j \Rightarrow$

2a) Se $z_k \neq x_i$ allora $\underset{S_{ij}}{Z_k} = S^{i-1,j}$
→ cioè Z_k è una LCS di X_{i-1} e Y_j.

2b) Se $Z_k \neq Y_j$, allora $Z_k = S^{i,j-1}$
⇒ cioè Z_k è una LCS di X_i e Y_{j-1}.

DIMOSTRAZIONE CASO 1:

1a) Supponiamo che $x_i = y_j$.
Voglio dimostrare $z_k = x_i = y_j$.

quella $= y_j$ che stiamo prendendo in causa.

Se per assurdo $z_k \neq x_i$, allora $Z_k | x_i$ è una sottoseq. di X_i Y_j.
Sottoseq. è lunga $k+1$ e quindi Z_k non è LCS. ASSURDO!
↓
io so per certo che Z_k è LCS di X_i Y_j.

1b) $Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$.
⇓
$|Z_{k-1}| = k-1$.

Supponiamo x assurdo, esista W LCS(X_{i-1}, Y_{j-1}) cui $|W| > k-1$. ≃ "Supponiamo che Z_k

non sia lcs?

Ora, $W | x_i$ é una sottosequenza comune di X_i, Y_J.
Di lunghezza $|W| > k$.
Allora Z_k non può essere $lcs(X_i, Y_J)$. Assurdo!

DIMOSTRAZIONE CASO 2:

2) Supponiamo $x_i \neq y_J$.

2a) Se $z_k \neq x_i$, allora ....

2b) Se $Z_k \neq Y_J$, allora ....

NON HO ALTRI CASI:

$z_k \neq x_i \lor z_k \neq y_J$

Negazione $\rightsquigarrow$ $z_k = x_i \land z_k = y_J \mapsto z_k = x_i = y_J$. CONTRADDICE $x_i \neq y_J$

FARE LCS $\rightarrow$ 3 sottosequenze. (senza passare "lcs intermedio").

2a) $z_k \neq x_i \Rightarrow z_k = s^{i-1,J}$ $[s^i = s^{i-1,J}]$ se $x_i \neq z_k$

* Supponiamo, per assurdo:
$\exists\, W = lcs(X_{i-1}, Y_J)$ di lunghezza $> k$.

Siccome $z_k \neq x_i$ W é anche lcs di $(X_i Y_J)$ di lunghezza $> k$.
Allora Z_k non può essere $lcs(X_i, Y_J)$.

CONTRADDIZIONE.

2b) ... identico ... (sul libro).

ESERCIZIO HCS: Heaviest common subsequence.

$\hookrightarrow$ uguale, HCS restituisce un peso, non un {}.

Ho 2 sequenze:

$X = \langle a, b, c, b, a, d, e \rangle$

$Y = \langle d, a, b, b, a, e \rangle$

$LCS = \langle a, b, b, a, e \rangle$ $HCS = \langle d, e \rangle$

- Abbiamo anche una funzione:

$W : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$

$w(a) = 1 = w(b)$

$w(c) = 2$

$w(d) = 30$

$w(e) = 20$

- Trovo la sottoseq più pesante:

C.B: $S^{i=0, j=0}$ return 0;

C.P₁: $x_i = y_j$ $S^{ij} = S^{i-1, j-1} + \{ w(x_i) \}$

C.P₂: $x_i \neq y_j$ $S^{ij} = \text{maggiore} \{ S^{i-1, j}, S^{i, j-1} \}$

ESERCIZIO:

Date $\underset{m}{X}, \underset{n}{Y}, \underset{o}{W}$ $\rightsquigarrow$ voglio trovare $LCS(X, Y, W)$.

LIS: Longest Increasing Subsequence.

ISTANZA: una sequenza X. di lunghezza m.

$\Sigma = \mathbb{N}$

$X = \langle 6, 4, 7, 3, 5, 9, 11, 8 \rangle$ $m = 8$

OUTPUT: Determinare la più lunga sottosequenza crescente.

$S_1 = \langle 6, 7, 9, 11 \rangle$ esempio sol.

$S_2 = \langle 3, 5, 9, 11 \rangle$

$S_3 = \langle 4, 7, 9, 11 \rangle$ etc...

$S_4 = \langle 4, 5, 9, 11 \rangle$

SOTTOPROBLEMI: $X_i \rightarrow$ sottop. tra $0 \dots m \rightarrow m+1$ sol.

C.B: $i = 1$ $X_1 = \langle 6 \rangle$ $S = \langle 6 \rangle$ $G = 1$

$\downarrow$

lunghezza S_i

C.P: Voglio risolvere S_i, con $i > 1$, assumendo di aver risolto i problemi più piccoli.

⇒ cambio problema: (AUSILIARIO).

Determinare la più lunga sottoseq. crescente di X che termina con l'ultimo simbolo dell'input.

$\downarrow$

Sottoproblema i-esimo $X_i = \langle x_1, x_2 \dots x_i \rangle$

> ho già risolto:

$X_{i-1} = \langle x_1 \dots x_{i-1} \rangle$ S^{i-1}

$\rightarrow$ ma so l'ultimo simbolo della $S^{i-1}, S^{i-2} \dots$

$X_{i-2} = \langle x_i \dots x_{i-2} \rangle$ S^{i-2}

....