ALGORITMO DI FLOYD - WARSHALL:

Calcola le distanze minime tra ogni coppia di vertici di un grafo.

ISTANZA DELL' ALGORITMO:

$G = (V, E, w)$ $\quad w: E \to \mathbb{R}^+$ $\quad$ t.c. $\quad w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i,j) & i \neq j,\ (i,j) \in E \\ \infty & i \neq j,\ (i,j) \notin E \end{cases}$

∞ ↓ SERVE COME NOTAZ. PERCHÉ É UN PROBLEMA DI MINIMO.

OUTPUT DELL' ALGORITMO:

$D = (d_{ij}) \to$ matrice con tutti i pesi (minimi $i \to j$).

* PASSI ALGORITMO:

$D^{(0)} \longrightarrow D^{(1)} \longrightarrow D^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow D^{(n)}$ // costruisco piano piano una m: $D = D^{(n)}$.

→ ognuna è:

$D^{h} \to \forall (i,j) \in V$ $\quad d_{ij}(h)$ indica il cammino minimo da i a j, che eventualmente utilizza come vertici intermedi i vertici nell' insieme $\{1, 2 \dots h\}$.

* Analizziamo le possibilità: (caso base)

$D^{(0)} \to$ cammini minimi $\forall (i,j)$ senza VERTICI INTERMEDI.

ERGO: ho un arco diretto da i a j, oppure $i == j$.

arco diretto $= a \xrightarrow{c} b$ $\qquad$ $i == j$ $= a$

Quindi $D^{(0)} = w$.

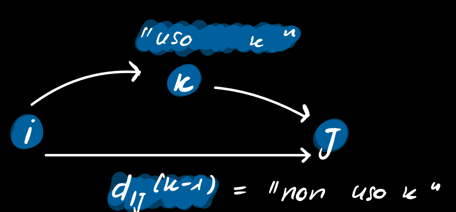
* Come calcolo la generica $d_{ij}^{(k)}$?

Al momento di calcolare $d_{ij}^{(k)}$ avró giá calcolato $D^{(k-1)}$.

→ HO GIÁ UN RISULTATO, ORA VEDO SE POSSO MIGLIORARLO CON IL VERTICE EXTRA CHE STO INTRODUCENDO.
passo $D^{(k-1)}$ a $D^{(k)}$.

$$\boxed{D^{(k)} = D^{(k-1)} \cup \{v\} \longrightarrow \text{nuovo vertice considerato.}}$$

Le possibilitá sono 2: miglioro o non miglioro D^{k-1} con il nuovo vertice:



- per sapere $d_{ij}^{(k)}$? $\quad d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$ che avevo giá in $D_{ij}^{(k-1)}$

- Quindi faccio la scelta "CHE MI CONVIENE":
$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)};\ d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$$

Formalizziamo l'algoritmo:

$F\_W(G, w)$: $\quad w \rightarrow$ PESI ARCHI

$D^0 = w$ // caso base.

FOR $h = 1$ to n: // insieme dei h vertici intermedi

FOR $i = 1$ to n: // coppie $(i, j) \rightarrow d_{i,j}^{(h)}$

FOR $j = 1$ to n:

$$d_{i,j}^{(h)} = \min \left\{ d_{i,j}^{(h-1)} ; \; d_{i,h}^{(h-1)} + d_{h,j}^{(h-1)} \right\}$$ // Riempimento (caso passo)

Return $D^{(n)}$;

Tempo: $\Theta(n^3)$; Spazio: $\Theta(n^3) \rightarrow$ anche se bastano le ultime 2 M.

$\rightarrow$ Spazio $\Theta(n^2)$.