ESERCIZIO 1 :

→ KNAPSACK, con i seguenti dati:

$V_1 = 10$ $P_1 = 50$ $L = 70$
$V_2 = 20$ $P_2 = 30$
$V_3 = 15$ $P_3 = 40$

* Vogliamo descriverlo in termini di sistema di indipendenza.

$\langle O, F \rangle$ O = "oggetti del knapsack"

$F = \{ A \in O \mid \sum_{i \in A} p_i \leq L \}$ F = "combinazione di O_i che non sfondano lo zaino"

Queste sono le soluzioni ammissibili

* Poi faccio controlli:

1) $\forall H \in F \Rightarrow J \in F$ se $J \subseteq H$

"Qualunque sottoinsieme di F, appartiene comunque ad F?" R: sì. (intuitivo)

È CERTAMENTE UN SISTEMA DI INDIPENDENZA

2) $|B| = |A| + 1$ $\forall A, B \in F$

"Deve esserci sempre un elemento di B che se aggiunto ad A, permette ad A di stare comunque in F"

Non posso farlo: (controesempio)

$|\{40, 30\}| = |\{50\}| + 1$, ma → $\{50, 40\} \notin F$
→ $\{50, 30\} \notin F$

Quindi: non ho un matroide.

ESERCIZIO 2

"ci passa"

$G = \langle V, E \rangle$ non orientato

$F = \{ A \subseteq E \mid \exists v \in V$ t.c. ogni lato di A é incidente a $v \}$

ossia: "tutti gli archi passanti per un nodo v"

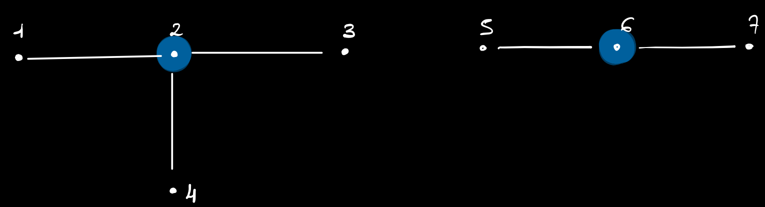
Assumiamo $\emptyset \in F$

1. $\forall H \in F$, $J \subseteq H$ é H "tolto" qualche lato.
   $J \in F$ comunque, perchè il vertice in comune é lo stesso di H.

   É un sistema di indipendenza!

2. $\forall A, B \in F \quad |B| = |A| + 1$, quindi $\exists b \in B$ t.c. $A \cup \{b\} \in F$

   No, controesempio:



   B é collegato 3 volte A é collegato 2 volte
   A e B non sono collegabili.

   Dovrei, per ogni sottoinsieme → poter togliere 1 el. da A
   e buttarlo in B.

NON É UN MATROIDE.

Per qualche funzione peso il teorema di Rado non funziona.

ESERCIZIO 4:

E_3 = "multipli di 3 $\leq$ 100"

E_4 = " " 4 $\leq$ 100

E_7 = " " 7 $\leq$ 100

$E = E_3 \cup E_4 \cup E_7$ = "multipli di 3, 4, 7" $\leq$ 100

$F = \{ A \mid A \subseteq E, |A \cap E_3| \leq 1$ AND $|A \cap E_4| \leq 1$ AND $|A \cap E_7| \leq 1$ AND
$\forall a \in A$, se $a \in E_i \Rightarrow a \notin E_j$, con $i, j \in \{3, 4, 7\} \wedge i \neq j \}$

↳ $A \in F$ = insieme di numeri, con:

* sicuramente multipli di 3, 4, 7.
* Ho al più un multiplo di 3.
* " --- " 4.
* " ... " 7.
* Non ho multipli di (3, 4), (3, 7), (4, 7) contemp.

1 $\langle E, F \rangle$ é un sistema di indipendenza?

Sì → togliere degli elementi da A → rafforza i vincoli su A.

2 $\langle E, F \rangle$ é un matroide?

Sì → per l'ultima condizione.

max card. = 3

$|B| = 3$, $|A| = 2$ → quello che manca sicuramente lo posso trovare in B.

É un matroide! Ho la forma std. del GREEDY.

ESERCIZIO 5:

Sia:

$S = \{1, 2 \dots 1000\}$

$I = \{A \mid A \subseteq S \text{ e } |A| \leq 5\}$

1. $\langle E, F \rangle$ é sicuramente un sistema di indipendenza.
2. É UN MATROIDE → sicuramente

(abbastanza intuitivo).

ESERCIZIO 6:

Stesso S di prima. ↱ la somma é $\mid 3$.

$I = \{A \subseteq S \text{ e } \sum_{a \in A} a \equiv 0 \pmod 3\}$

1. $\langle E, I \rangle$ É un sistema di indipendenza?
   Non é un sistema di indip:

   $\{2, 3, 4\} \in I$, ma $\{2\} \notin I$ (molto easy)

2. Non é (ovviamente) nemmeno un MATROIDE:

$$\begin{aligned} &\{2, 3, 7\} \in A \\ &\{3, 6\} \in A \end{aligned} \quad + \{2\} \vee \{7\} \rightarrow \text{No!}$$

ESERCIZIO 7:

$E = \{1, 2 \dots 100\}$

F = famiglia di sottoinsiemi di E contenente ESATTAMENTE 1 elemento $\in \{1, 2, 3, 4\}$

1. $A \in F$, $B \subseteq A$, $B \in F$?

   * Non sempre → se scarto $\{1, 2, 3, 4\}$ e non ne ho nemmeno un altro tra questi → ALLORA NO.

2. $B \in F$, $|B| = |A| + 1 \Rightarrow \exists b \in B - A$ t.c. $A \cup \{b\} \in F$

   * Vera! Perché sia A che $B \in F$.

* In A ho già $\{1, 2, 3, 4\}$ → qualsiasi $\{b\}$ aggiunga, $A \in F$ comunque.