RIPRENDENDO DISCORSO SULLA LCS: ragionamento "evolutivo" $\simeq$ LCS iterativo $T(n) = \mathcal{P}(X,Y) \rightarrow$ LCS ricorsivo $\rightarrow$ LCS dinamico

Eravamo a: scrivere il problema come combinazione di sottoproblemi. $\Big]$ $\underset{\langle\rangle}{\underset{\downarrow}{n+1}} \cdot \underset{\langle\rangle}{\underset{\downarrow}{m+1}}$, con $n = |X|$ e $m = |Y|$

SOTTOPROBLEMI:

$S^{m,n} = \{ \dots S^{m-1,n-1} \dots S^{m,n-k} \dots S^{0,0} \dots \}$ Problema grosso = combinazione di sottoproblemi $\downarrow$ STESSO PROBLEMA, ISTANZA PIÙ PICCOLA (PREFISSI DI X e Y).

PROBLEMA IN TERMINI RICORSIVI

- Quale dei sottoproblemi sono "caso base"? QUANDO ISTANZA COLLASSA IN: X_i, Y_J dove $i=0 \vee J=0$
  ↳ IN QUESTO CASO $|S^{iJ}| = 0$

- Qual è la regola ricorsiva?

DATO IL GENERICO SOTTOPROBLEMA (i,J) CON $i>0$ e $J>0$.
"Assumendo di avere già risolto i problemi più piccoli"
↳ come nel mergeSort.
$\Big\}$ PREFISSI $(\bar{i}, \bar{J})$: $\bar{i} < i$ e $\bar{J} < J$

$\downarrow$

$S^{(i,J)} = \{ S^{0,0}, S^{0,1} \dots S^{i,0}, S^{i,1} \dots S^{i,J-1} \}$

REGOLA RICORSIVA:

Teorema: Sia (i,J) una generica coppia con $i>0$ e $J>0$, che individua il sottoproblema X_i e Y_J; Z_k soluzione del sottoproblema i,J, ha forma:

$\downarrow$

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \langle x_1, \dots, x_i \rangle \\ & \qquad\qquad\quad \parallel \\ Y_J &= \langle y_1, \dots, y_J \rangle \end{aligned}\right] \rightarrow S^{i,J} = Z_k = \langle z_1, \dots z_k \rangle, \quad z_k = x_i = y_J$$

E Z_{k-1} è soluzione del sottoproblema $S^{i-1,J-1}$

1° PASSO RICORSIVO: $S^{i,J} = S^{(i-1,J-1)} \mid \langle x_i \rangle$ SE $x_i = y_J \rightarrow$ CASO 1

INTRODUZIONE NUOVA VARIABILE:

$S^{i,j} \to$ soluzione (sequenza) i,j

$C_{i,j}$ = lunghezza $|S^{i,j}|$ (numero)

} "DEFINIRE VAR. PROBLEMA"

↳ MEMORIZZATE (ogni sottoseq. ne ha una), in una MATRICE. → LE VARIABILI DEL PROBLEMA DEFINISCONO LA S.D DA UTILIZZARE.

2° PASSO RICORSIVO:

Soluzione (che supponiamo già di avere)

2) Se $X_i \neq Y_j \Rightarrow$ 2a) Se $Z_k \neq x_i$, allora $\boxed{S^{(i,j)} = S^{(i-1,j)}}$ ≃ "X_i non sta nella soluzione"

2b) Se $Z_k \neq Y_j$, allora $\boxed{S^{i,j} = S^{(i,j-1)}}$ ≃ "Y_j non sta nella soluzione"

A priori però → non ho Z_k per il confronto } per questo mi affido alla ricorsività doppia:

$\boxed{S^{i,j} = \max\{S^{i-1,j}; S^{i,j-1}\}}$

↱ lungh.

$$\begin{cases} C_{ij} = C_{i-1,j-1} + 1 & \text{se } X_i = Y_j \\ C_{i,j} = C_{i-1,j} & \text{se } X_i \neq Y_j \\ C_{i,j} = C_{i,j-1} & \text{se } Y_j \neq X_i \end{cases} \quad \max(C_{i-1,j}; C_{i,j-1})\ ?$$

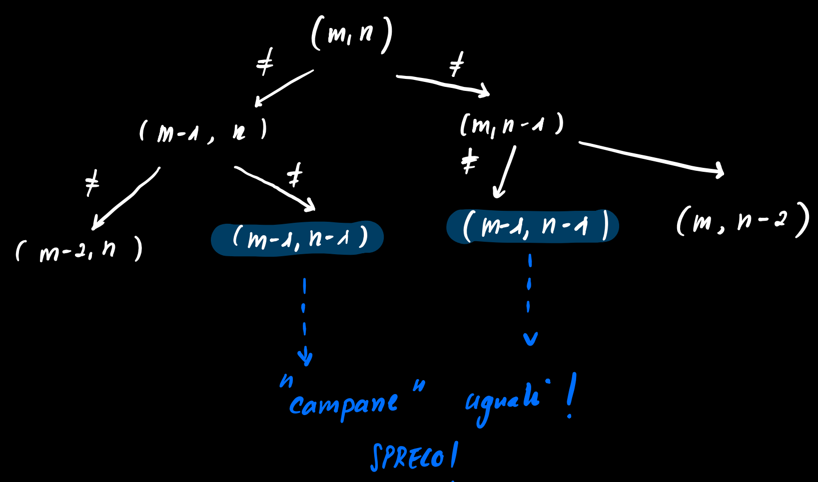
ALGORITMO RICORSIVO:

```
LCS_R( X; Y; i, j ) {

  if (i=0  V  j=0) {
      return ε ; -> <>
  } else {
                                        concat.
    if ( Xi == Yj ) {                     ↑
      return  LCSR(X, Y, i-1, j-1) | xi ;
    } else {
      W = LCS_R (X,Y, i-1, j) ;
      R = LCS_R (X,Y, i, j-1) ;

      if (|W| > |R|) {
          return W ;
      } else {
```

ALBERO:



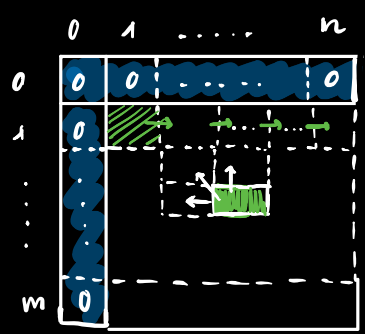
```
            return R ;
        }
    }
}
```

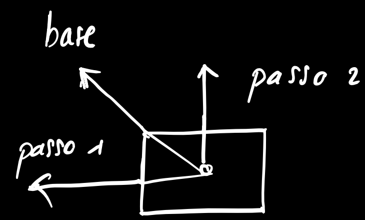
BOTTOM-UP : QUANTE VARIABILI HO NEL PROBLEMA? $2 < \begin{matrix} i \\ J \end{matrix}$

OGNI CASELLA S_{iJ}

→ caso base !

→ caso passo !





PROBLEMA "RIDOTTO" : Date 2 sequenze, calcolare la LUNGHEZZA della LCS.

$$
\hookrightarrow \begin{cases} i=0 \lor J=0 & C_{iJ}=0 \quad \text{se } X_i = Y_J \\ C_{i-1,J-1}+1 & \text{se } X_i = Y_J \\ \max\{C_{i-1,J} \,;\, C_{i,J-1}\} & \text{se } X_i \neq Y_J \end{cases}
$$

→ L'ALGORITMO PURO, QUASI UGUALE A PRIMA.

ALGORITMO BOTTOM-UP : (con matrice)

```
LCS (C_mxn , i , J ) {

    // RIEMPIO CON C. BASE
    for (J=0 to n){
            C_0,J = 0 ;
    }

    // RIEMPIO CASO BASE
    for (i=1 to m){
        C_i,0 = 0;
    }

    for (i=1 to m ) {
        for (J=1 to n) {
```

ESEMPIO:

$|X| = \langle a, b, c, b, d, a, b \rangle = 7$

$|Y| = \langle b, d, c, a, b, a \rangle = 6$

			b	d	c	a	b	a
		0	1	2	3	4	5	6
	0							
a	1							
b	2							
c	3							
b	4							
d	5							
a	6							
b	7							

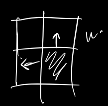
```
    if ( xi = yJ ) → Ci-1, J-1 + 1;
    else → max { Ci-1, J , Ci, J-1 }
  }                                   riempio la matrice.

  return Cm,n .
}
```

		b	d	c	a	b	a
	0	1	2	3	4	5	6
	0						
a	1						
b	2						
c	3						
b	4						
d	5						
a	6						
b	7						

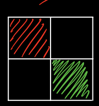
X =	Y =	ε	B	C	ε	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
ε →	0	0	0	0	0	0	0	0
A →	1	0	0	0	0	1	0	1
B →	2	0	1	1	1	1	2	2
C →	3	0						
B →	4	0						
D →	5	0						
A →	6	0						
B →	7	0						

Se $X_i \neq Y_J$



CASO BASE:

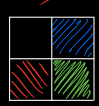
Se $X_i = Y_J$; $R = LCS(X_{i-1}, Y_{J-1}) + 1$



$S_{i,J} = S_{i-1,J-1} + 1$

CASO PASSO:

Se $X_i \neq Y_J$; $R = \max\{ LCS(X_{i-1}; Y_J) ; LCS(X_i; Y_{J-1}) \}$



$S_{i,J} = \max\{ \blacksquare , \blacksquare \}$

$S_{i,J-1}$ $S_{i-1,J}$