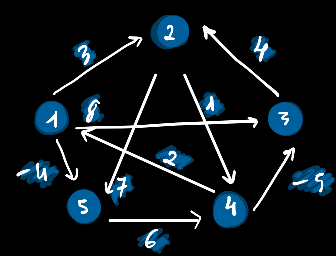
ALGORITMO DI FLOYD-WARSHALL

CAMMINI MINIMI TRA TUTTE LE COPPIE DI UN GRAFO ORIENTATO E PESATO.



insieme tutti gli archi

$G = (V, E)$

PESO DI OGNI ARCO:

$w: E \to \mathbb{R}$ $\quad w(i, j) \in \mathbb{R}$

V = vertici / nodi $= \{1 \dots n\}$ **E** = archi

PESO CAMMINO: somma di tutti i pesi, associati agli archi, che è necessario percorrere per raggiungere un nodo B, da un nodo A.

lo vogliamo min.

$\forall (i, j) \in V^2$ voglio il cammino minimo da i a j.

MATRICE DI ADIACENZA (RIPASSO):

$A \subseteq M(n, \{0, 1\})$ $\quad \overset{n \times n}{A} = (a_{ij})$

$i \in \{1 \dots n\}$

$j \in \{1 \dots m\}$

$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } \nexists \text{ l'arco} \\ 1 & \text{se } \exists \text{ l'arco} \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ARRICCHIAMO LA MATRICE DI ADIACENZA (ci mettiamo anche i pesi).

$G = (V, E, W)$ matrice che tiene conto di $w: E \to \mathbb{R}$

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ 2 & \infty & 0 & \infty & 1 & 2 \\ 3 & \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 4 & 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 \end{array}$$

$W \in M(n, \mathbb{R})$

- ogni w_{ij} = peso cammino.

non è utile averli in un prob. minimo.

∞ → "non c'è arco tra i, j"

0 → se $i = j$ "Sia che ci sia il $\boxed{\text{cappio,}}$ che non ci sia."

→ a meno di avere $w(ii)$ negativi.

in realtà: **non** ci devono essere **cicli** **con** <u>VALORE NEGATIVO</u> del cammino

ISTANZA

$G = (V, E, W)$ grafo orientato, pesato con matrice dei pesi W e SENZA CICLI DI PESO NEGATIVO.

$V = \{1 \dots n\}$

SOLUZIONE

$\forall_{ij} \in V^2 \to$ voglio il cammino minimo da i a j.

❗ Occhio! i, j non rappresentano ancora i sottop. Sono solo la def. pb.

C $= (c_{ij})$; **c_{ij}** è un cammino minimo da i a j.

- ✱ sequenza degli archi da percorrere.
- ✱ mi aiuto con il calcolo del peso.

- **UTILIZZO PROBLEMA AUS.**

S $= (s_{ij})$. $\quad i \in \{1 \dots n\}$ $\quad j \in \{1 \dots m\}$

s_{ij} è il **peso** del cammino minimo tra i e j.

SPIEG.

INSIEME

SOTTOPROBLEMA $k \in \{0 \dots n\}$; quando $k = 0$, $\{\phi\}$ = insieme cammini → tra i, j non ho v. intermedi.

HO UN SOLO ARCO IN QUESTO PB.

$\forall (i, j) \in V^2$ si vuole calcolare $d_{ij}^{(k)}$ = peso di un cammino <u>minimo</u> da i a j, ma considerando solo i cammini con vertici intermedi $\in$ $\overline{\{1 \dots k\}}$

Cioè:

Occhio! non sono i cammini! Sono i <u>vertici</u>!

Ma se ho un cammino, i nodi x cui passa $\in K$.

Non è che devo usarli tutti in sequenza.

$k = \{0 \dots 5\}$. Suppongo $k = 4$.

Allora $\forall (i, j)$ considero i cammini da i a j con vertici intermedi $\{1 \dots k\}$.

↳ se ci sono $\in K$.

k vertici e $K \{1 \dots 4\}$

$i \to \circ \to \circ \to \dots \to j$

$\in \{1 \dots 4\}$ $\quad \in \{1 \dots 4\}$ $\quad \in \{1 \dots 4\}$

- nell'esempio sopra valgono $\{1, 3, 2, 4\}$ o $\{1, 2, 4\}$ per $i = 1$ $j = 4$ $k = 4$. 5 ↳ non posso prenderlo.

SOLUZ. SOTTOPROB. k : $D^k = d_{ij}^{(k)}$ e d_{ij} sono n^2 $i = \{1 \dots n\}$ $j = \{1 \dots n\}$

FORMULAZIONE RICORSIVA

CASO BASE

$k=0$ vertici $\in \{1 \dots 0\}$
$\in \emptyset$

$D^0 = (d_{ij}^0)$ ↳ NON HO VERTICI INTERMEDI.
HO → UN ARCO **DIRETTO.**
SOL: PESO DELL' ARCO

$\forall (i,j) \in V^2$

$$d_{ij}^{(0)} = w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ \infty & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \notin E \\ w_{ij} & \text{se } i \neq j \wedge (i,j) \in E. \end{cases}$$

PASSO RICORSIVO $k>0$:

Assumo di aver già risolto i sottopb più piccoli di k.

$D^0, D^{(1)} \dots D^{(k-1)}$

$\forall (i,j) \in V^2 \quad d_{ij}^{(k)} = ??$

$i \dashrightarrow o \dashrightarrow o \longrightarrow o \quad j$

Caso 1) $k \notin$ al cammino di peso minimo.

$d_{ij}^{(k)} = d_{ij}^{(k-1)}$;

Caso 2) $k \in$ al cammino di peso minimo

$i \leadsto j$ posso vederlo come $i \leadsto k \leadsto j$

$d_{ij}^{(k)} = d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$ perchè sto usando i k v. (all'inizio).

(Ascolta audio!!)

Risulta:

$\forall (i,j) \in V^2$

$$d_{ij}^{(k)} = \min \{ d_{ij}^{(k-1)} ; d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$$

ESERCIZIO: Scrivere algoritmo bottom-up.