Laboratório 03 - Ajuste de Curvas

Aluno: Daniel Medeiros Soares Carneiro (20220012347)

Regressão linear ou ajuste de curvas é amplamente utilizada na estatítica e aprendizagem de máquinas, principalmente para análises preditivas, como estimativas de tendências, etc.

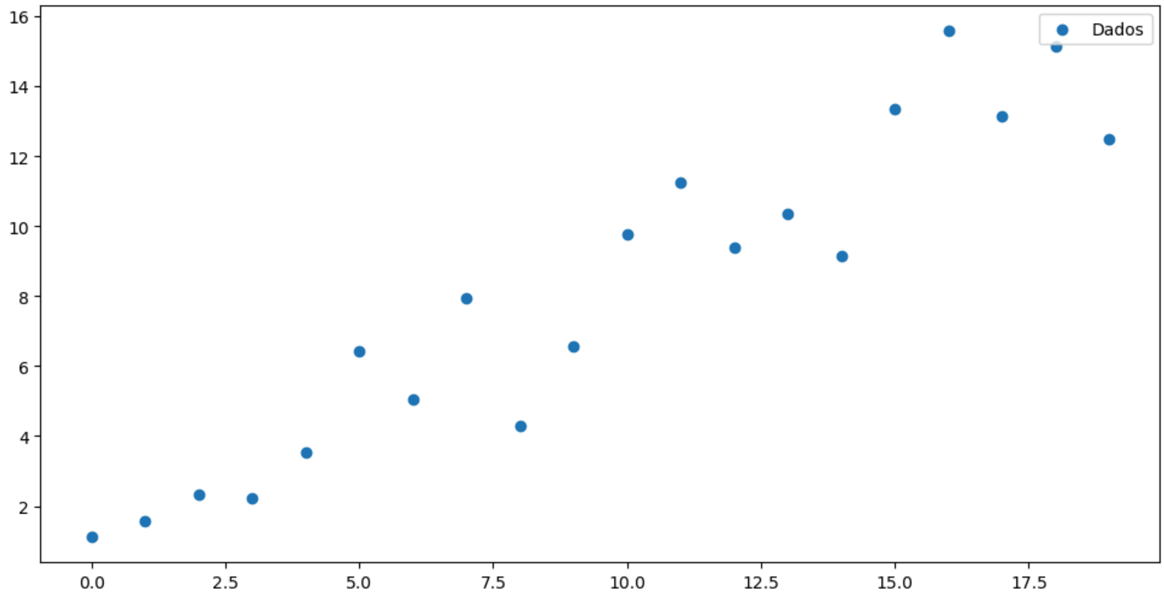
A forma mais elementar consiste, basicamente, no ajuste de uma reta da forma,

$$y = w_0 + w_1 x$$

a uma conjunto de pares ordenados $(x_k, y_k)_{k=1}^n$. No entanto, existem inúmeras possibilidades de ajuste, tais como:

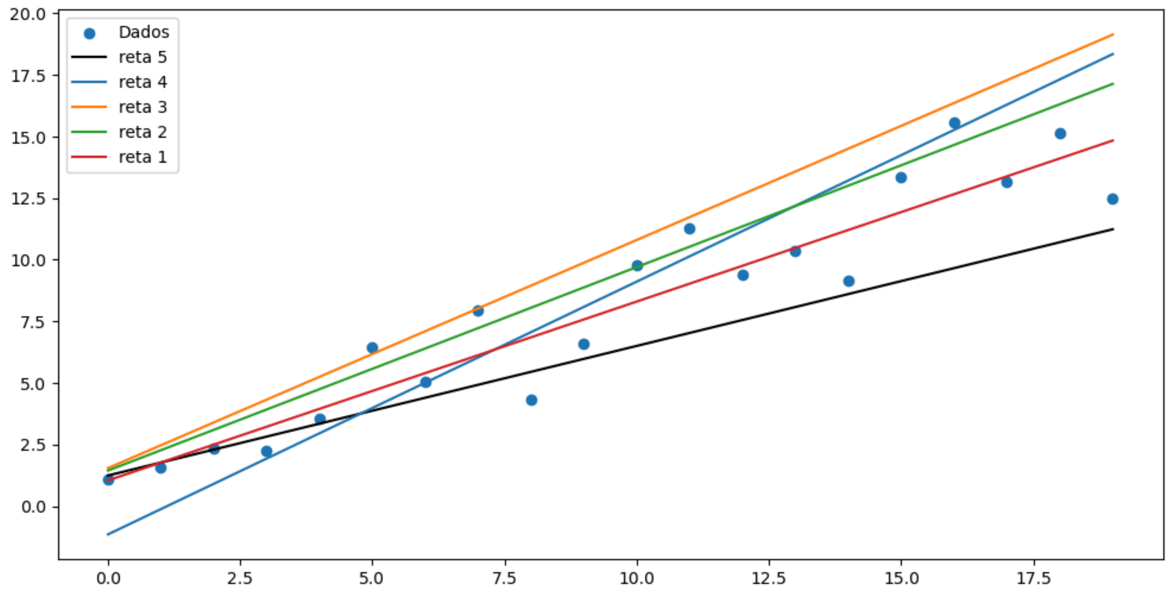
In [1]:
```
import numpy as np
import numpy.linalg as la
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Latex
```

In [3]:
```
x = np.arange(0,20)
y1 = np.random.uniform(low=1, high=4, size=(5,))
y2 = np.random.uniform(low=4, high=8, size=(5,))
y3 = np.random.uniform(low=8, high=12, size=(5,))
y4 = np.random.uniform(low=12, high=16, size=(5,))
y = np.concatenate([y1,y2,y3,y4],axis = 0)

plt.figure(figsize = (12,6))
plt.scatter(x,y, label = 'Dados')
plt.legend()
plt.show()
```



A pergunta natural que surge é: Qual reta melhor se ajusta ao conjunto de pontos?

In [5]:
```
ya1 = 1.045 + 0.7259*x
ya2 = 1.445 + 0.8259*x
ya3 = 1.545 + 0.9259*x
ya4 = -1.145 + 1.0259*x
ya5 = 1.245 + 0.5259*x

plt.figure(figsize = (12,6))
plt.scatter(x,y, label = 'Dados')
plt.plot(x,ya5,'k',label='reta 5')
plt.plot(x,ya4,label='reta 4')
plt.plot(x,ya3,label='reta 3')
plt.plot(x,ya2,label='reta 2')
plt.plot(x,ya1,label='reta 1')
plt.legend()
plt.show()
```



Para responder a pergunta iremos considerar o funcional de custo, baseado no erro quadrático obtido entre cada amostra e a reta a ser analisada. Ou seja,

$$J_e = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - (w_0 + w_1 x_k)\right)^2 \tag{1}$$

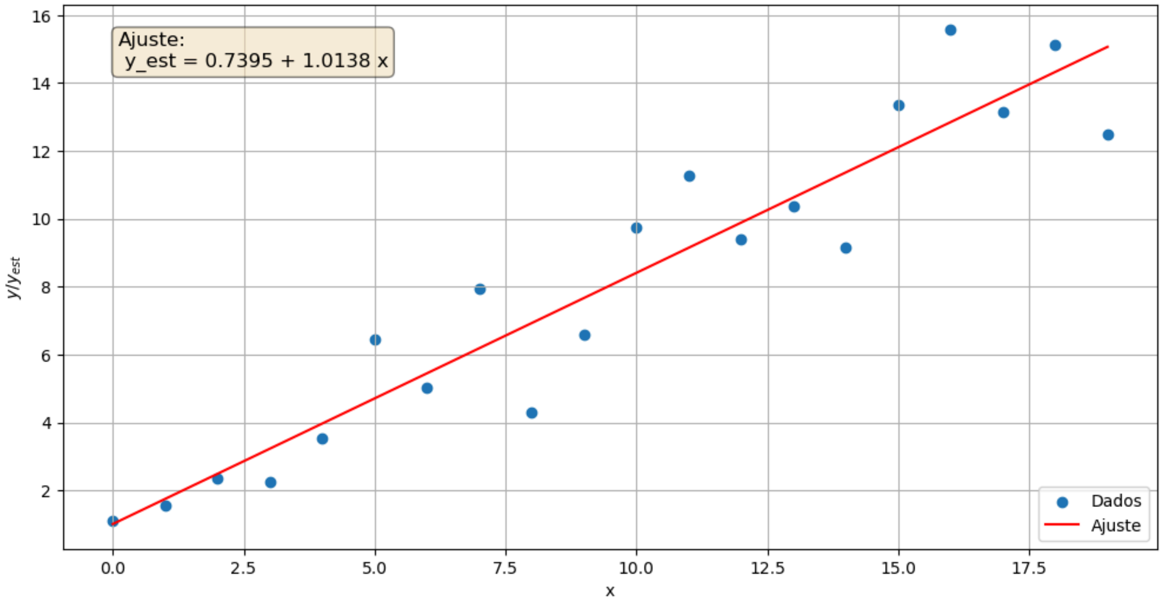
Para minimizar o erro, tomamos as derivadas com relação a w_0 e w_1, buscamos os pontos onde elas se anulam. Ou seja, o ponto de mínimo da função. Que correspondem a resolução do seguinte SEL:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

In [7]:
```
A = np.array([[len(x),sum(x)],[sum(x), sum(x*x)]])
b = [sum(y),sum(x*y)]
w = la.solve(A,b)
print('O modelo ajustado é :\n y_est = %.4f'%w[0],'+ %.4f'%w[1],'x')
```

```
O modelo ajustado é :
 y_est = 1.0138 + 0.7395 x
```

In [9]:
```
plt.figure(figsize = (12,6))
plt.scatter(x,y, label = 'Dados')
y_est = w[0] + w[1]*x
plt.plot(x,y_est,'r',label = 'Ajuste')
fit_label = 'Ajuste:\n y_est = %.4f + %.4f x' % (w[1], w[0])
plt.text(0.05, 0.95, fit_label, transform=plt.gca().transAxes,
         fontsize=12, verticalalignment='top', bbox=dict(boxstyle="round", facec

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('$y / y_{est}$')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Caso geral

Se o modelo que desejamos ajustar for uma combinação linear de várias funções $g_i(x)$ com $i = 1, \cdots, n$ na forma:

$$y \approx f(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k \, g_k(x) = w_0 \, g_0(x) + w_1 \, g_1(x) + \cdots + w_n \, g_n(x),$$

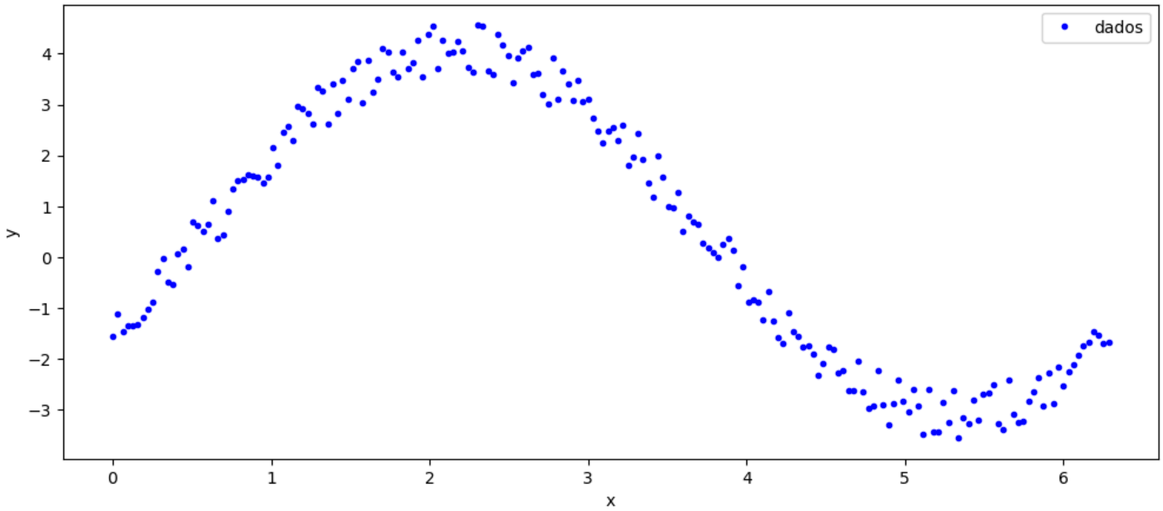
onde $w_i, \; i = 1, \cdots, n$ são os parâmetros desconhecidos e, as $g_i, \; i = 1, \cdots, n$ são as funções de base. Por meio de:

$$\begin{bmatrix} \langle g_0(x), g_0(x) \rangle & \langle g_0(x), g_1(x) \rangle & \cdots & \langle g_0(x), g_n(x) \rangle \\ \langle g_1(x), g_0(x) \rangle & \langle g_1(x), g_1(x) \rangle & \cdots & \langle g_1(x), g_n(x) \rangle \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n(x), g_0(x) \rangle & \langle g_n(x), g_1(x) \rangle & \cdots & \langle g_n(x), g_n(x) \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y, g_0(x) \rangle \\ \langle y, g_1(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle y, g_n(x) \rangle \end{bmatrix}$$

Exemplo 01 : Sejam $x, \; y$ o seguinte conjunto de pontos:

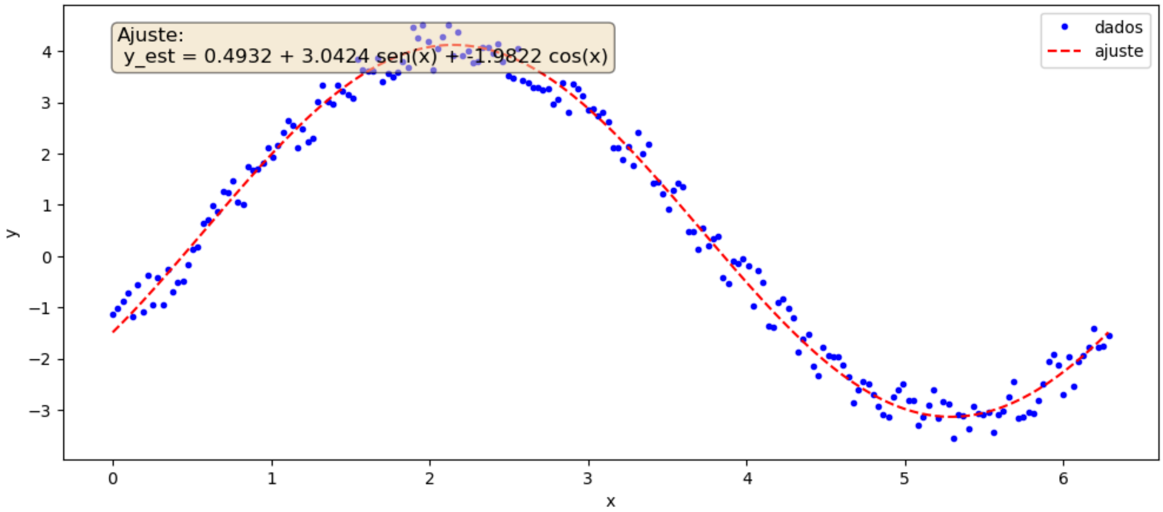
In [11]:
```
x = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
y = 3*np.sin(x) - 2*np.cos(x) + np.random.random(len(x))

plt.figure(figsize = (12, 5))
plt.plot(x,y,"b.", label = "dados")
```

```
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.show()
```



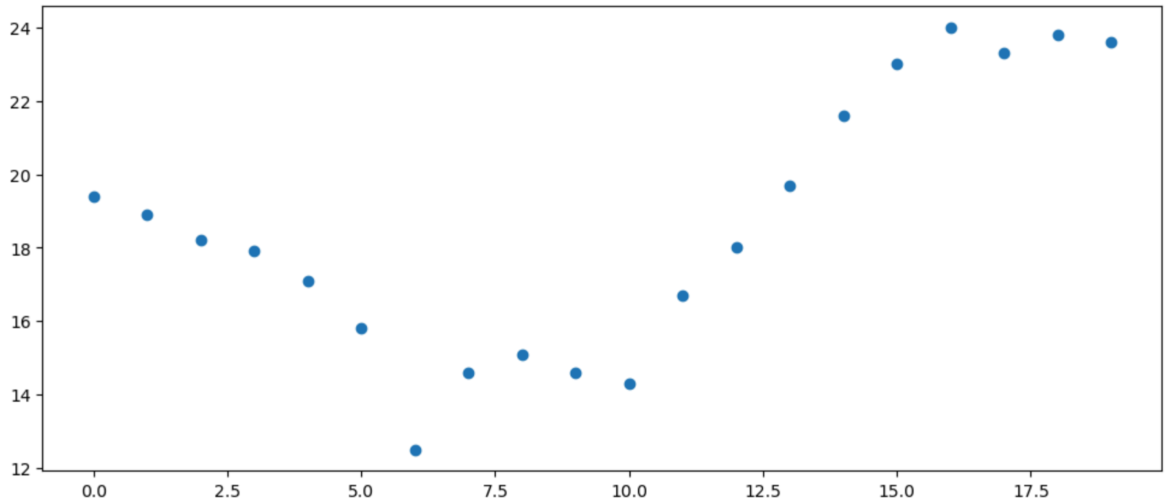
Ajuste os dados por meio da seguinte função: $f(x) = w_0 + w_1\, sen(x) + w_2\, cos(x)$.

In [13]:
```
g0 = np.ones(len(x))
g1 = np.sin(x)
g2 = np.cos(x)

A = np.array([[g0.T@g0, g0.T@g1, g0.T@g2],
              [g1.T@g0, g1.T@g1, g1.T@g2],
              [g2.T@g0, g2.T@g1, g2.T@g2]])
b = np.array([[g0.T@y],
              [g1.T@y],
              [g2.T@y]])

w = la.inv(A)@b

x = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
y = 3*np.sin(x) - 2*np.cos(x) + np.random.random(len(x))
y_est = w[0]*g0 + w[1]*g1 + w[2]*g2

plt.figure(figsize = (12, 5))
plt.plot(x,y,"b.", label = "dados")
plt.plot(x,y_est,"--r", label = "ajuste")
fit_label = 'Ajuste:\n y_est = %.4f + %.4f sen(x) + %.4f cos(x)' % (
    w[0].item(), w[1].item(), w[2].item())
plt.text(0.05, 0.95, fit_label, transform=plt.gca().transAxes,
         fontsize=12, verticalalignment='top', bbox=dict(boxstyle="round", facec
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend()
plt.show()
```



Exemplo 01 : Suponha a medição da temperatura ao longo de 19 horas, representadas pelo seguinte conjunto de dados,

In [15]:
```
t = np.linspace(0,19,20) # Dados de entrada
T = np.array([19.4,18.9,18.2,17.9,17.1,15.8,12.5,14.6,15.1,14.6,14.3,
16.7,18,19.7,21.6,23,24,23.3,23.8,23.6]) # Saída ruidosa

plt.figure(figsize = (12, 5))
plt.scatter(t,T, label = 'Dados')
plt.show()
```



Ajuste - os por meio de uma função do tipo:

$$f(t) = w_0 + w_1\, cos\left(\frac{2\pi t}{N}\right) + w_2\, cos\left(\frac{4\pi t}{N}\right) + w_3\, sen\left(\frac{4\pi t}{N}\right).$$

e, em seguida adapte para um ajuste polinomial de grau 4.

In [ ]:
```
```

Qualidade do ajuste: EMQ - Erro médio quadrático.

$$EMQ = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}(y_k - f(x_k))^2$$

In [ ]:
```
EMQ = (1/len(t))*(sum((T - y_est)**2))
print("O Erro médio quadrático (EMQ) = %.4f" %EMQ)
```

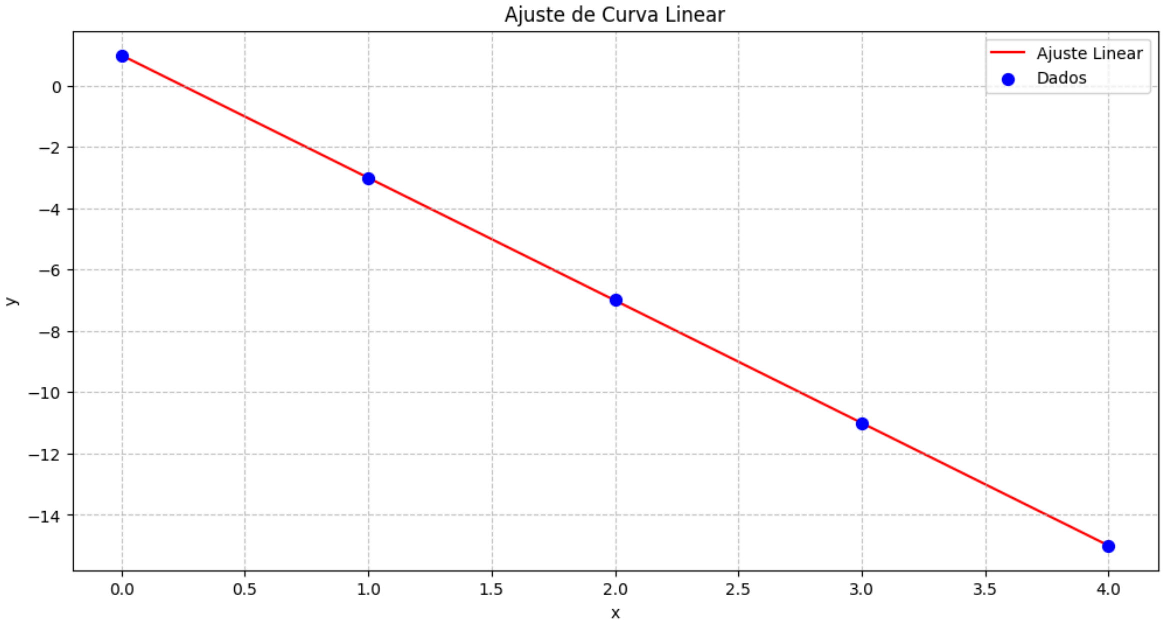
Exercícios

1. Obter a reta que melhor se ajusta ao seguinte conjunto de dados,

x_i	0	1	2	3	4
$y(x_i)$	0.98	-3.01	-6.99	-11.01	-15.00

In [44]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = [0, 1, 2, 3, 4]
y = [0.98, -3.01, -6.99, -11.01, -15.00]
n = len(x)

sumx = sumx2 = sumxy = sumy = 0

for i in range(n):
    sumx += x[i]
    sumx2 += x[i]**2
    sumxy += x[i]*y[i]
    sumy += y[i]

xm = sumx / n
ym = sumy / n

a = (ym*sumx2 - xm*sumxy)/(sumx2 - n*xm**2)
b = (sumxy - xm*sumy)/(sumx2 - n*xm**2)

print(f"f(x) = {a} + {b}*x")


valores_de_x = np.array(x)
valores_de_y = a + b * valores_de_x

plt.figure(figsize= (12, 6))
plt.plot(valores_de_x, valores_de_y, color='red', label='Ajuste Linear', zorder=
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Dados', s=50, zorder=2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Ajuste de Curva Linear")
plt.grid(True, linestyle= "--", alpha=0.7)
plt.legend()
plt.show()
```

```
f(x) = 0.9860000000000013 + -3.996000000000001*x
```



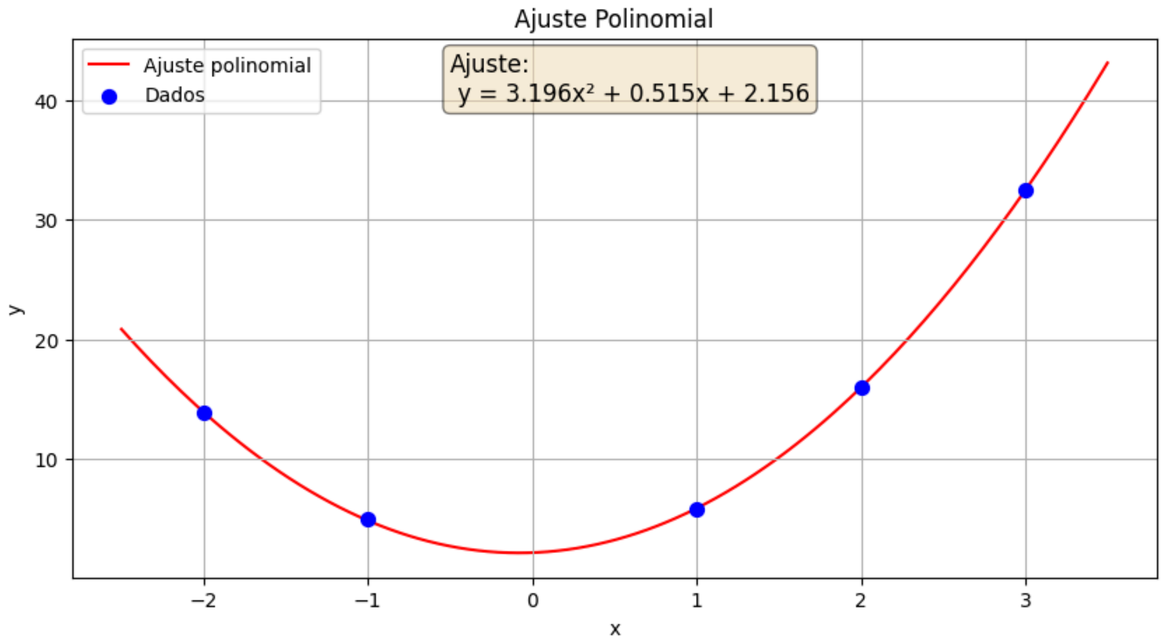
2. Obter uma aproximação polinomial do tipo $f(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$ para o seguinte conjunto de dados,

x_i	-2	-1	1	2	3
$y(x_i)$	13.86	4.935	5.79	15.99	32.48

In [45]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as la

x = np.array([-2, -1, 1, 2, 3])
y = np.array([13.86, 4.935, 5.79, 15.99, 32.48])

g0 = np.ones_like(x)
g1 = x
g2 = x**2

A = np.array([
    [g0 @ g0, g0 @ g1, g0 @ g2],
    [g1 @ g0, g1 @ g1, g1 @ g2],
    [g2 @ g0, g2 @ g1, g2 @ g2]
])

b = np.array([
    [g0 @ y],
    [g1 @ y],
    [g2 @ y]
])

w = la.inv(A) @ b

x_valores = np.linspace(-2.5, 3.5, 200)
g0_valores = np.ones_like(x_valores)
g1_valores = x_valores
g2_valores = x_valores**2
```

```
y_est = w[0]*g0_valores + w[1]*g1_valores + w[2]*g2_valores

print(f"y = {w[2][0]:.3f}x² + {w[1][0]:.3f}x + {w[0][0]:.3f}")

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x_valores, y_est, color='red', label='Ajuste polinomial', zorder=1)
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Dados', s=50, zorder=2)


expressao = f'Ajuste:\n y = {w[2][0]:.3f}x² + {w[1][0]:.3f}x + {w[0][0]:.3f}'
plt.text(-0.5, 44, expressao, fontsize=12, verticalalignment='top', bbox=dict(bc
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Ajuste Polinomial")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
y = 3.196x² + 0.515x + 2.156
```



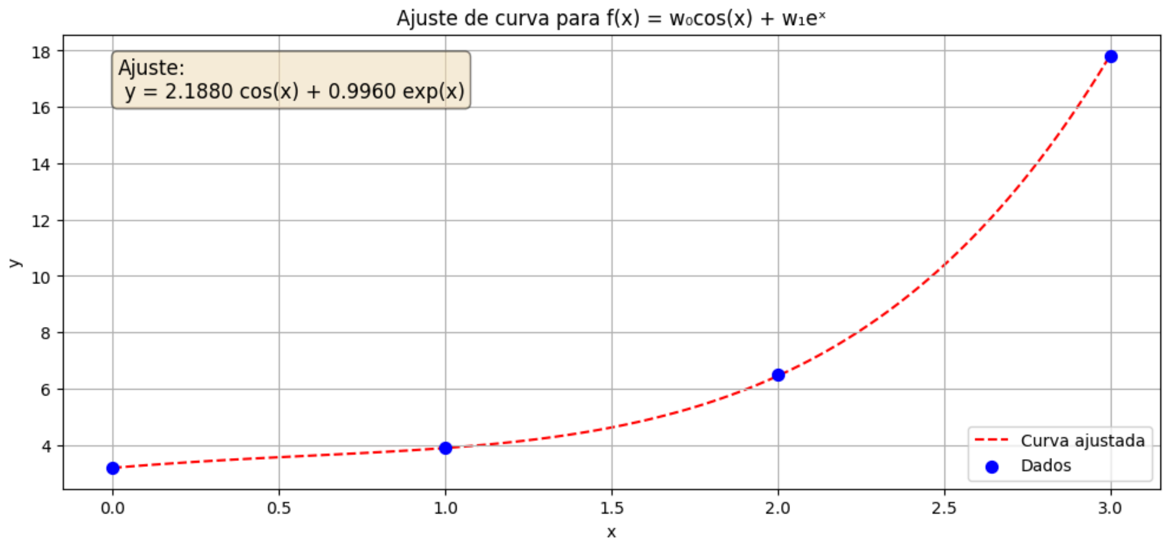
3. Encontre uma função na forma $f(x) = w_0 cos(x) + w_1 e^x$ que melhor se ajuste ao seguinte conjunto de dados discretos,

x_i	0	1	2	3
$y(x_i)$	3.18	3.9	6.5	17.82

In [46]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as la


x = np.array([0, 1, 2, 3])
y = np.array([3.18, 3.9, 6.5, 17.82])
```

```python
g0 = np.cos(x)
g1 = np.exp(x)


A = np.array([[g0.T@g0, g0.T@g1],
              [g1.T@g0, g1.T@g1]])

b = np.array([[g0.T@y],
              [g1.T@y]])

w = la.inv(A)@b

x_valores = np.linspace(0, 3, 100)
g0_valores = np.cos(x_valores)
g1_valores = np.exp(x_valores)

y_est = w[0]*g0_valores + w[1]*g1_valores

print(f"y = {w[0].item():.4f}*cos(x) + {w[1].item():.4f}*exp(x)\n")

plt.figure(figsize = (12, 5))
plt.plot(x_valores, y_est, "--r", label = "Curva ajustada", zorder=1)
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Dados', s=50, zorder=2)

expressao = 'Ajuste:\n y = %.4f cos(x) + %.4f exp(x)' % (w[0].item(), w[1].item(
plt.text(0.05, 0.95, expressao, transform=plt.gca().transAxes, fontsize=12, vert
         bbox=dict(boxstyle="round", facecolor='wheat', alpha=0.5))
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Ajuste de curva para f(x) = w₀cos(x) + w₁eˣ")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

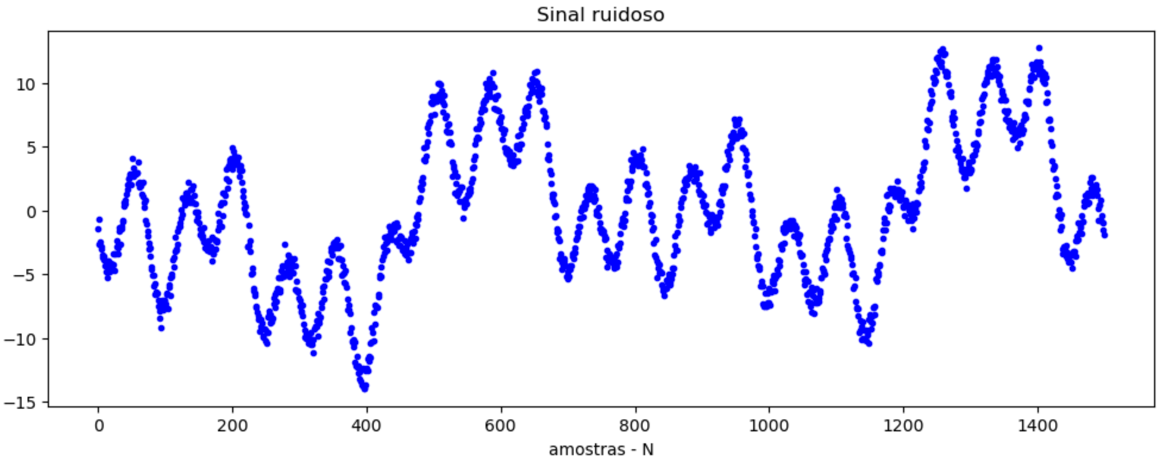
```
y = 2.1880*cos(x) + 0.9960*exp(x)
```



4. Ajuste o seguinte conjunto de dados utilizando as funções de base que achar conveniente.

In [17]:
```python
# criando os dados
N = 1500
```

```python
t = np.linspace([-np.pi, -np.pi/2, -2*np.pi, 0],
[np.pi, np.pi/2, 2*np.pi, 2*np.pi], num = N)
x = np.sin(t) + np.cos(2*t) + np.sin(10*t) #Sinal de entrada
#x = np.sin(np.random.normal(0, 1, (N, 4))) # sinal de entrada
v = np.random.normal(0, 0.5, N) # ruído
d = 2*x[:,0] + 0.1*x[:,1] - 4*x[:,2] + 0.5*x[:,3] + v # desejado + ruído

# Resultados obtidos
plt.figure(figsize=(12,9))
plt.subplot(211);plt.title("Sinal ruidoso");plt.xlabel("amostras - N")
plt.plot(range(N), d,"b.", label="d - sinal ruidoso")
plt.show()
```



In [90]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as la


N = 1500
t = np.linspace([-np.pi, -np.pi/2, -2*np.pi, 0],
                [np.pi, np.pi/2, 2*np.pi, 2*np.pi], num=N)
x = np.sin(t) + np.cos(2*t) + np.sin(10*t)
v = np.random.normal(0, 0.5, N)
d = 2*x[:,0] + 0.1*x[:,1] - 4*x[:,2] + 0.5*x[:,3] + v


g0, g1, g2, g3 = x[:, 0], x[:, 1], x[:, 2], x[:, 3]


A = np.array([
    [g0 @ g0, g0 @ g1, g0 @ g2, g0 @ g3],
    [g1 @ g0, g1 @ g1, g1 @ g2, g1 @ g3],
    [g2 @ g0, g2 @ g1, g2 @ g2, g2 @ g3],
    [g3 @ g0, g3 @ g1, g3 @ g2, g3 @ g3]
])

b = np.array([g0 @ d, g1 @ d, g2 @ d, g3 @ d])

w = la.solve(A, b)

d_est = w[0]*g0 + w[1]*g1 + w[2]*g2 + w[3]*g3

print(f"d = {w[0]:.3f}·x₀ + {w[1]:.3f}·x₁ + {w[2]:.3f}·x₂ + {w[3]:.3f}·x₃")

plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```python
plt.plot(d, "b.", markersize=2, alpha=0.6, label="Sinal original")
plt.plot(d_est, "r-", linewidth=1.5, label="Curva ajustada")
expressao = f'd = {w[0]:.3f}·x₀ + {w[1]:.3f}·x₁ + {w[2]:.3f}·x₂ + {w[3]:.3f}·x₃'
plt.text(0.02, 0.95, expressao, transform=plt.gca().transAxes,
         fontsize=12, bbox=dict(boxstyle="round", facecolor='wheat', alpha=0.5))

plt.title("Ajuste de Curva do Sinal Ruidoso")
plt.xlabel("Amostras")
plt.ylabel("Valor")
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
d = 1.999·x₀ + 0.088·x₁ + -4.003·x₂ + 0.492·x₃
```