Laboratório 02 - Resolução de Equações Não-lineares

Aluno: Daniel Medeiros Soares Carneiro (20220012347)

Método da Bissecção

- passo 01 - Entradas (a, b, tol) de modo que $f(a).\, f(b) < 0$.
- passo 02 - Estimativa da raiz

$$x_r = \frac{a+b}{2}$$

se $f(a).\, f(x_r) < 0$

$$b \leftarrow x_r$$

volte ao passo 02

else

$$a \leftarrow x_r$$

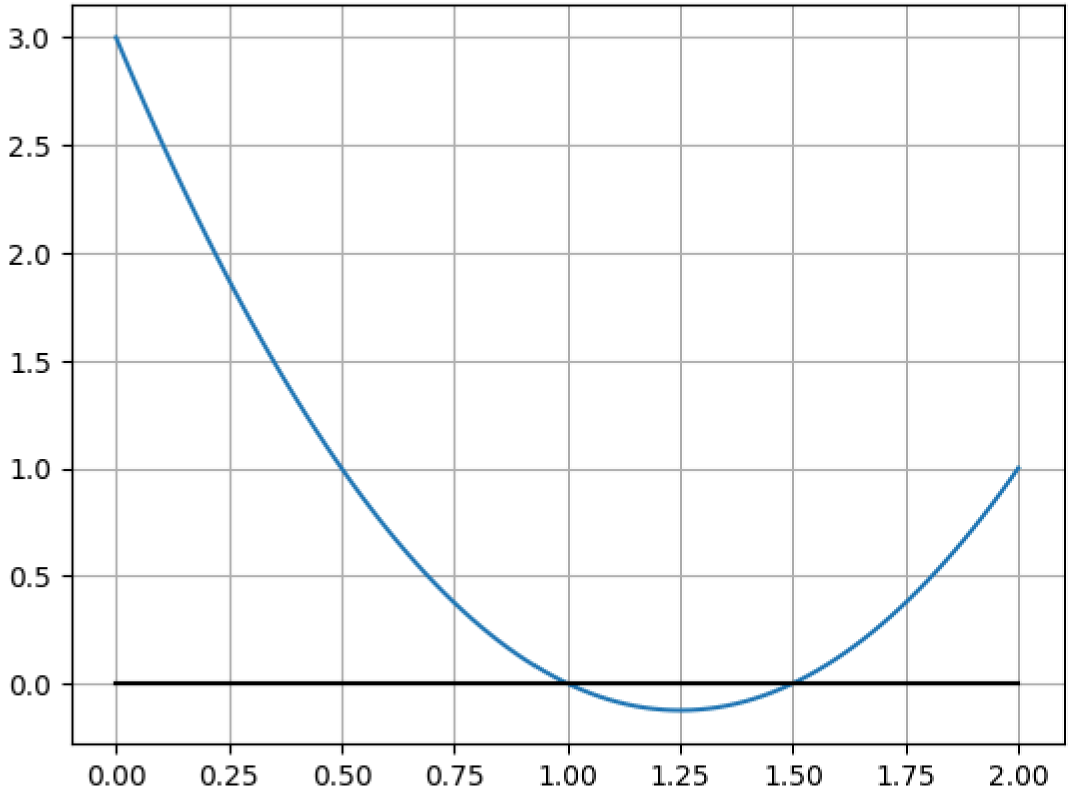
se $E_r \leq tol \rightarrow x_r$ é solução.

Exemplo 01 - Obter uma raiz do seguinte polinômio:

$$p(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

In [2]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0,2,100)
fx = 2*x**2 - 5*x + 3

fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(x,fx)
ax.plot(x,0*x,'k')
ax.grid()
plt.show()
```



In [3]:

```python
# Método da bissecção para determinação de raízes

# Definindo a função
def f(x):
    return 2*x**2 - 5*x + 3

# Implementando o método da bissecção
def met_bisseccao(a, b, tol):
    n = 1
    print('\n\n*** IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO ***')
    print('---------------------------------------------------------------------
    print('iter. \t\t a \t\t b \t\t xr \t\t f(xr)        ')
    print('---------------------------------------------------------------------
    condicao = True
    while condicao:
        xr = (a + b) / 2
        print('%d\t\t% 10.8f\t% 10.8f\t% 10.8f\t% 10.8f\t' %(n, a, b, xr, f(xr))

        if f(a) * f(xr) < 0:
            b = xr
        else:
            a = xr

        n += 1
        condicao = abs(f(xr)) > tol

    print('\n A raiz encontrada é  : %0.8f' % xr)


# Dados de entrada
a = float(input('Valor de a : '))
b = float(input('Valor de b : '))
tol = float(input('Erro tolerável : '))
```

```
# Checando se há raiz no intervalo
if f(a) * f(b) > 0.0:
    print('Não há raiz no intervalo dado. Tente novos valores')
else:
    met_bisseccao(a, b, tol)
```

```
Valor de a : 0
Valor de b : 1.2
Erro tolerável : 0.0001


*** IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO ***
---------------------------------------------------------------------------
iter.            a                b                xr               f(xr)
---------------------------------------------------------------------------
1                0.00000000       1.20000000       0.60000000       0.72000000
2                0.60000000       1.20000000       0.90000000       0.12000000
3                0.90000000       1.20000000       1.05000000      -0.04500000
4                0.90000000       1.05000000       0.97500000       0.02625000
5                0.97500000       1.05000000       1.01250000      -0.01218750
6                0.97500000       1.01250000       0.99375000       0.00632813
7                0.99375000       1.01250000       1.00312500      -0.00310547
8                0.99375000       1.00312500       0.99843750       0.00156738
9                0.99843750       1.00312500       1.00078125      -0.00078003
10               0.99843750       1.00078125       0.99960937       0.00039093
11               0.99960937       1.00078125       1.00019531      -0.00019524
12               0.99960937       1.00019531       0.99990234       0.00009768

 A raiz encontrada é  : 0.99990234
```

Método de Newton

- passo 01 - Defina tol e escolha x_0 de modo que

$$f(x_0).\,f''(x_0) > 0.$$

- passo 02 - para $i = 0, 1, 2, \cdots, n.$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

se $E_r \leq tol \rightarrow x_{i+1}$ é solução.

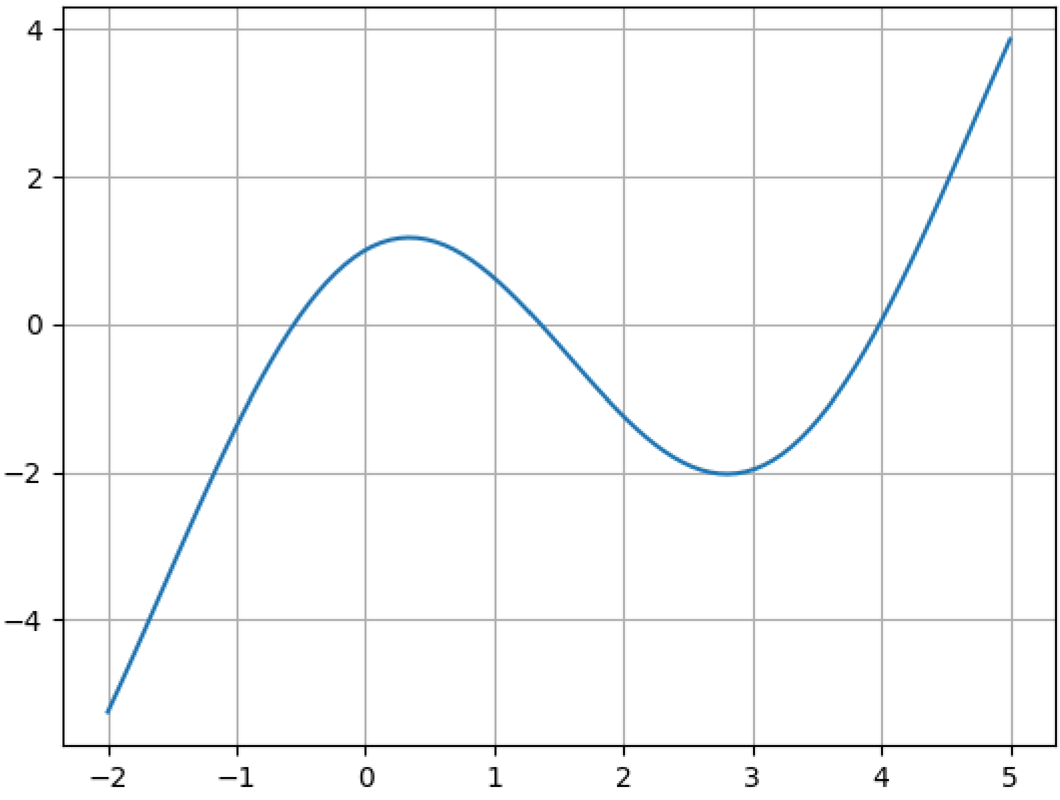
else

volte ao passo 02.

Exercício 02 - Utilizando o método de Newton. Determine as raízes da função $f(x) = x + 3\,cos(x) - 2.$

In [4]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2,5,100)
fx = x + 3*np.cos(x) - 2

fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(x,fx)
```

```
ax.grid()
plt.show()
```



In [5]:
```
import numpy as np

# Definindo a função
def f(x):
    return x + 3*np.cos(x) - 2

# Definindo a derivada da função
def df(x):
    return 1 - 3*np.sin(x)

# Implementando o método de Newton - Raphson

def met_NewtonRaphson(x0,tol,N):
    print('\n\n*** IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON RAPHSON ***')
    n = 1
    flag = 1
    condicao = True
    while condicao:
        if df(x0) == 0.0:
            print('Erro - Divisão por zero!')
            break

        xr = x0 - f(x0)/df(x0)
        print('Iteração %d, x1 = %0.6f and f(x1) = %0.6f' % (n, xr, f(xr)))
        x0 = xr
        n += 1

        if n > N:
            flag = 0
            break

        condicao = abs(f(xr)) > tol
```

```
    if flag==1:
        print('\n A Raiz desejada é : %0.8f' % xr)
    else:
        print('\n Não Convergente.')


# Dados de entrada
x0 = float(input('Condição Inicial : '))
tol = float(input('Erro Tolerável : '))
N = int(input('Número máximo de iterações : '))


# nicialiando o método de Newton - Raphson
met_NewtonRaphson(x0, tol, N)
```

```
Condição Inicial : 0
Erro Tolerável : 0.001
Número máximo de iterações : 100


*** IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON RAPHSON ***
Iteração 1, x1 = -1.000000 and f(x1) = -1.379093
Iteração 2, x1 = -0.608703 and f(x1) = -0.147531
Iteração 3, x1 = -0.554372 and f(x1) = -0.003677
Iteração 4, x1 = -0.552946 and f(x1) = -0.000003

 A Raiz desejada é : -0.55294583
```

--- Exercícios --

Exercício 01 - A frequência natural de uma certa viga uniforme possui uma relação com as raízes de α_i da equação

$$f(\alpha) = cosh(\alpha)\, cos(\alpha) + 1 = 0,$$

onde

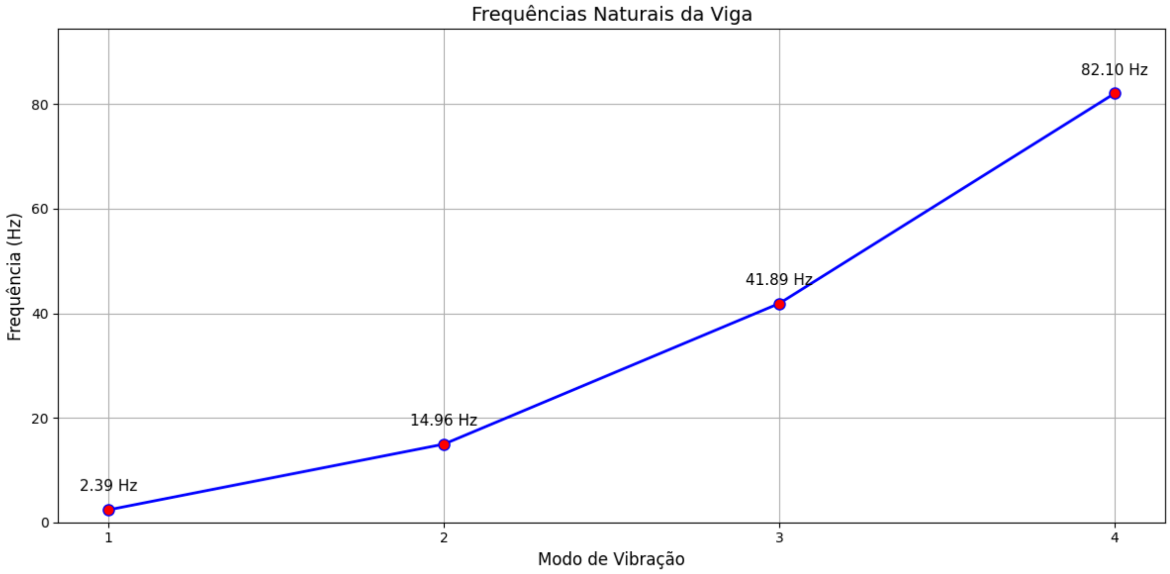
$$\alpha_i^4 = (2\pi f_i)^2 \frac{mL^3}{EI}.$$

Sendo, f_i a i_ésima frequência natural, m a massa da viga, L o comprimento, E o módulo da elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal. Determine as menores frequências de uma viga em aço de $0,9\,m$ de comprimento, com uma seção transversal de $25\,mm$ de largura e $2,5\,mm$ de altura. A densidade de massa do aço é de $7850\,\frac{kg}{m^3}$ e $E = 200GPa$.

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L = 0.9
largura = 25e-3
altura = 2.5e-3
densidade = 7850
E = 200e9
```

```
area_secao = largura * altura
m = densidade * area_secao
I = (largura * altura**3) / 12


def f(alpha):
    return np.cosh(alpha) * np.cos(alpha) + 1

def df(alpha):
    return np.sinh(alpha) * np.cos(alpha) - np.cosh(alpha) * np.sin(alpha)


def metodo_de_newton(f, df, x0, tol=1e-12, iteracoes=1000):
    x = x0
    for _ in range(iteracoes):
        fx = f(x)
        if abs(fx) < tol:
            return x
        dfx = df(x)
        x_novo = x - fx / dfx
        if abs(x_novo - x) < tol:
            return x_novo
        x = x_novo
    return x


chutes_iniciais = [1.8, 4.7, 7.8, 11.0]
raizes = []

for chutes in chutes_iniciais:
    raiz = metodo_de_newton(f, df, chutes)
    raizes.append(raiz)


frequencias = []
for i, alpha in enumerate(raizes, 1):
    fi = (alpha**2 / (2 * np.pi)) * np.sqrt(E * I / (m * L**3))
    frequencias.append(fi)
    print(f"f_{i} = {fi:.4f} Hz (α_{i} = {alpha:.6f})")




plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(range(1,5), frequencias, 'o-', color='blue',
         markersize=8, linewidth=2, markerfacecolor='red')

for i, freq in enumerate(frequencias, 1):
    plt.text(i, freq+3, f'{freq:.2f} Hz',
             ha='center', va='bottom', fontsize=11)

plt.grid(True)
plt.title('Frequências Naturais da Viga', fontsize=14)
plt.xlabel('Modo de Vibração', fontsize=12)
plt.ylabel('Frequência (Hz)', fontsize=12)
plt.xticks(range(1,5))
max_freq = max(frequencias)
plt.ylim(0, max_freq * 1.15)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
f_1 = 2.3875 Hz (α_1 = 1.875104)
f_2 = 14.9620 Hz (α_2 = 4.694091)
f_3 = 41.8940 Hz (α_3 = 7.854757)
f_4 = 82.0955 Hz (α_4 = 10.995541)
```



Exercício 02 - A velocidade ascendente de um foguete pode ser calculada pela seguinte equação:

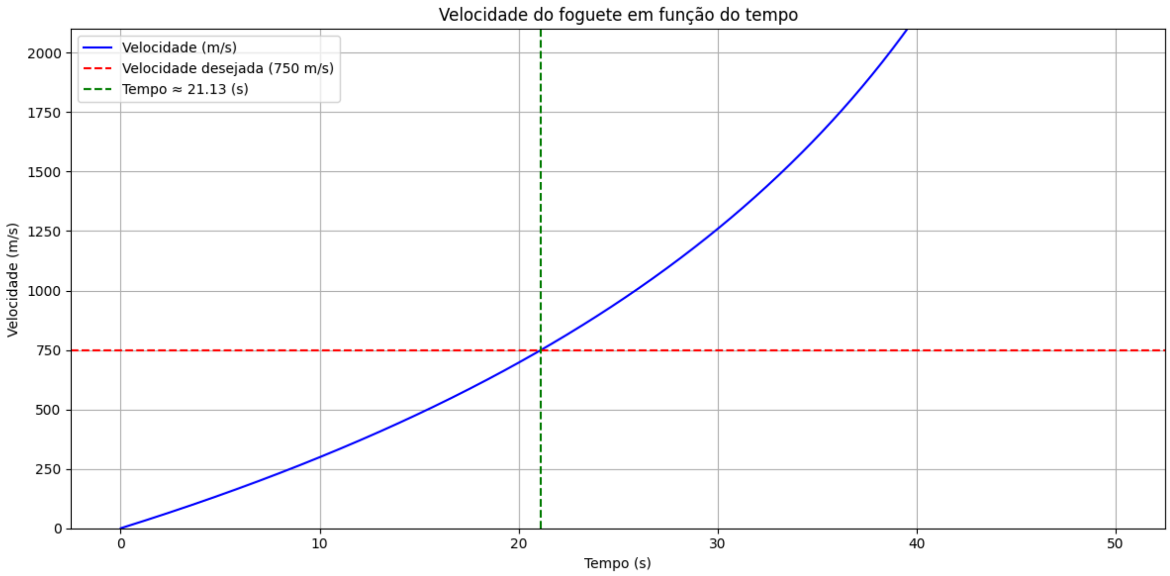
$$v = u.\, ln\left(\frac{m_0}{m_0 - q.\, t}\right) - g.\, t$$

onde v representa a velocidade de subida, u é a velocidade na qual o combustível é repelido com relação ao foguete, m_0 é a massa inicial ($t = 0s$), q é a taxa de consumo de combustível, e g a aceleração da gravidade para baixo $g \approx 9,81\frac{m}{s^2}$. Se $u = 2000\frac{m}{s}$, $m_0 = 150.000kg$, e $q = 2700\frac{kg}{s}$. Calcule o instante no qual a velocidade é igual a $750\frac{m}{s}$ com $10 \leq t \leq 50s$. Considere uma tolerância de 10^{-20}.

In [34]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


u = 2000
g = 9.81
m0 = 150000
q = 2700
v_desejada = 750

def velocidade(t):
    return u * np.log(m0 / (m0 - q * t)) - g * t

def funcao_objetivo(t):
    return velocidade(t) - v_desejada

def bisseccao(f, a, b, tol, iteracoes=1000):

    contador_iteracoes = 0
    while (b - a) / 2 > tol and contador_iteracoes < iteracoes:
        c = (a + b) / 2
        if (b - a) / 2 < tol:
            return c
```

```
        if f(a) * f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
        contador_iteracoes += 1
    return (a + b) / 2

t_min = 10
t_max = 50
tol = 1e-20

tempo = bisseccao(funcao_objetivo, t_min, t_max, tol)

print(f"O tempo em que a velocidade atinge 750 m/s é aproximadamente {tempo:.20f

tempos = np.linspace(0.01, 50, 500)
velocidades = [float(velocidade(t)) for t in tempos]


plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(tempos, velocidades, label='Velocidade (m/s)', color='blue')
plt.axhline(750, linestyle='--', label='Velocidade desejada (750 m/s)', color="r
plt.axvline(tempo, linestyle="--", label=f"Tempo ≈ 21.13 (s)", color="green", )
plt.title('Velocidade do foguete em função do tempo')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Velocidade (m/s)')
plt.ylim(0, 2100)
plt.yticks([0, 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750, 2000])
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
O tempo em que a velocidade atinge 750 m/s é aproximadamente 21.13241513592630127
505 segundos.
```



Exercício 03 - Considerando um dado sistema massa-mola com deslocamento harmônico dado por $y(t) = A\,sen(\omega\,t)$ imposto, a resposta do deslocamento da massa é dado por $x(t) = Bsen(\omega\,t - \theta)$, onde

$$\frac{B}{A} = \sqrt{(1 + Dcos(\phi))^2 + (Dsen(\phi))^2} \quad e \quad tan(\theta) = \frac{Dsen(\phi)}{1 + Dcos(\phi)}.$$

Nas duas equações usamos as seguintes notações,

$$D = \frac{\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{p}\right)^2}} \quad e \quad tan(\phi) = \frac{\frac{2\zeta\omega}{p}}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}$$

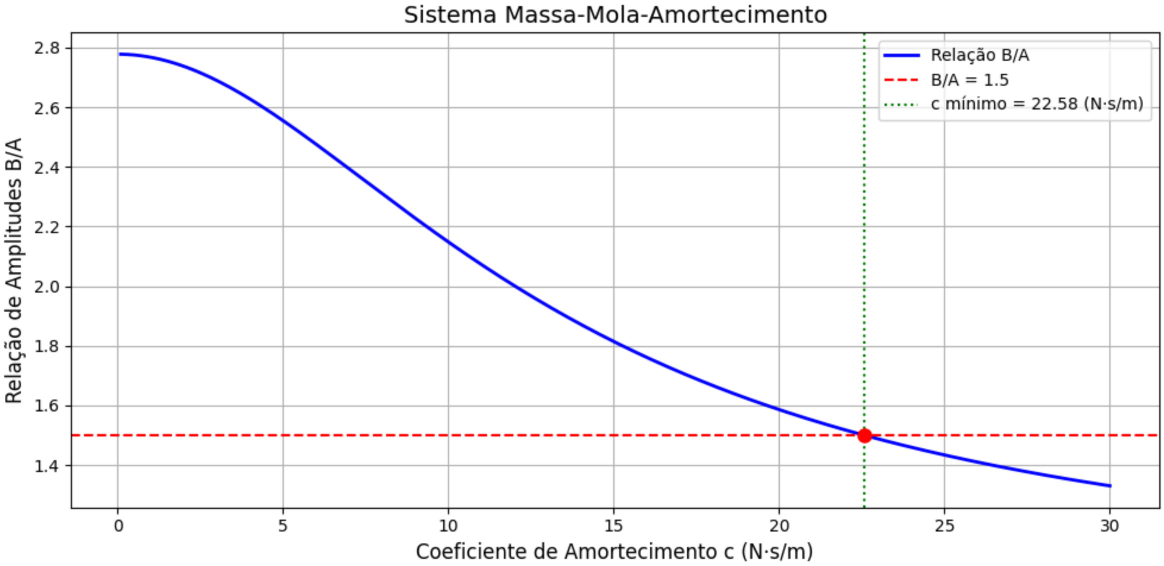
com $p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sendo a frequência natural do sistema e $\zeta = \frac{c}{2mp}$ o fator de amortecimento. Considerando, $m = 0,2\,kg$, $k = 2880\,\frac{N}{m}$, e $\omega = 96\,\frac{rad}{s}$. Determine o menor valor de c (coeficiente de amortecimento) de modo que a relação $\frac{B}{A}$ seja menor ou igual a $1,5$.

In [37]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.2
k = 2880
omega = 96
BA_questao = 1.5

p = np.sqrt(k / m)

def razao_BA(zeta):
    r = omega / p
    D = (r**2) / np.sqrt((1 - r**2)**2 + (2*zeta*r)**2)
    phi = np.arctan2(2*zeta*r, 1 - r**2)
    return np.sqrt((1 + D*np.cos(phi))**2 + (D*np.sin(phi))**2)


def bisseccao(f, a, b, tol=1e-10, iteracoes=100):
    if f(a) * f(b) >= 0:

        while f(b) < 0:
            b *= 2
        if f(a) * f(b) >= 0:
            raise ValueError("Não há mudança de sinal no intervalo")

    for _ in range(iteracoes):

        c = (a + b) / 2
        if abs(f(c)) < tol:
            return c
        if f(c) * f(a) < 0:
            b = c
        else:
            a = c

    return (a + b) / 2


try:

    def funcao_alvo(zeta):
        return razao_BA(zeta) - BA_questao

    zeta_final = bisseccao(funcao_alvo, 0.01, 1.0)
```

```
    c_final = 2 * m * p * zeta_final

    print(f"O menor valor do Coeficiente de Amortecimento (c), que satisfaz B/A


    valores_de_C = np.linspace(0.1, 30, 300)
    valores_BA = [razao_BA(c/(2*m*p)) for c in valores_de_C]

    plt.figure(figsize=(10, 5))
    plt.plot(valores_de_C, valores_BA, color='blue', linewidth=2, label='Relaçãc
    plt.axhline(y=BA_questao, color='red', linestyle='--', label=f'B/A = {BA_que
    plt.axvline(x=c_final, color='green', linestyle=':', label=f'c mínimo = {c_f
    plt.plot(c_final, BA_questao, color='red', marker="o", markersize=8)

    plt.title('Sistema Massa-Mola-Amortecimento', fontsize=14)
    plt.xlabel('Coeficiente de Amortecimento c (N·s/m)', fontsize=12)
    plt.ylabel('Relação de Amplitudes B/A', fontsize=12)
    plt.grid(True)
    plt.legend(fontsize=10)
    plt.tight_layout()
    plt.show()

except ValueError as e:
    print(f"Erro: {str(e)}")
```

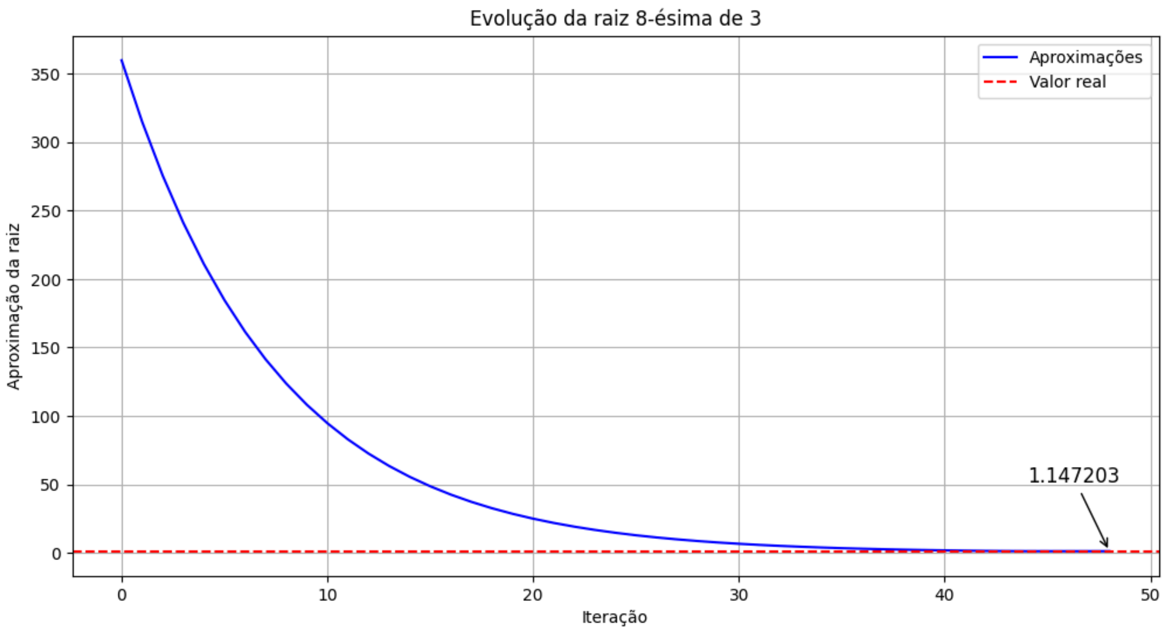
```
O menor valor do Coeficiente de Amortecimento (c), que satisfaz B/A <= 1.5 é: 22.
584242 N·s/m
```



Exercício 04 - Escreva uma função $raiz\_\ enesima(x, n, tol)$ para calcular $r = \sqrt[n]{x}$, por meio do método de Newton-Raphson.

In [40]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def raiz_enesima(x, n, tol=1e-10):

    r = x / n
    valores = []

    for _ in range(1000):
        novo_valor = r - (r**n - x) / (n * r**(n - 1))
        valores.append(novo_valor)
```

```
        erro_relativo = np.abs(novo_valor - r) / np.abs(novo_valor)

        if erro_relativo < tol:
            break
        else:
            r = novo_valor


    valor_real = x**(1/n)

    plt.figure(figsize=(12, 6))
    plt.plot(valores, label="Aproximações", color="blue")
    plt.axhline(y=valor_real, linestyle='--', label="Valor real", color="red")
    plt.annotate(f"{valor_real:.6f}",
                 xy=(len(valores)-1, valor_real),
                 xytext=(len(valores) - 5, valor_real + 50),
                 arrowprops=dict(arrowstyle="->", color='black'),
                 fontsize=12)
    plt.xlabel("Iteração")
    plt.ylabel("Aproximação da raiz")
    plt.title(f"Evolução da raiz {n}-ésima de {x}")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.show()

    return r

x = 3
n = 8
resultado = raiz_enesima(x, n)
print(f"A raiz {n}-ésima de {x} é aproximadamente {resultado}")
```




```
A raiz 8-ésima de 3 é aproximadamente 1.1472026904497181
```