

Theorie SIA-Arbeit
ENTROPIE EINES WIRTSCHAFTSSYSTEMS

Daniel Meiborg

December 26, 2022

Contents

Entropie	3
Arten und Anwendungen von Entropie	3
Information	3
Eigenschaften des Informationsgehalts	4
Formale Definition Shannon-Entropie	4
Anschauliche Erläuterung	4
Markov-Prozesse	5
Wann erfüllen Markov-Prozesse den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik?	5
Wirtschaftssysteme	5
Quellen	5

You should call it entropy [...] no one really knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage.

John von Neumann zu Claude Shannon, *Scientific American* Vol. 225 No. 3, (1971)

Entropie

Arten und Anwendungen von Entropie

Entropie findet sich auf viele verschiedene Arten der Wissenschaft wieder. In der Physik findet man sie in Gestalt der quantenmechanisch definierten Von-Neumann-Entropie, in den Temperaturdifferenzen verschiedener Systeme und in der statistischen Mechanik, von denen jede eine etwas andere Definition verwendet. In der Informatik wird hauptsächlich die Entropie nach Claude Shannon verwendet. Für die Zwecke dieser Arbeit wird ausschließlich die Shannon-Entropie verwendet und ist synonym mit Entropie zu verstehen.

Information

In der Informatik wird der Informationsgehalt, auch genannt Shannon-Information, als Menge an “Überraschung” eines Ereignisses definiert. Formal ist der Informationsgehalt eines Ereignisses als $I(x) = -\log_2(p(x))$ (in Bit) definiert. Hierbei ist zu beachten, dass diese Größe nichts mit dem im Sprachgebrauch verwendeten Begriff von Information zu tun haben muss. Der Informationsgehalt sagt nichts darüber aus, wie nützlich die Nachricht ist. Stattdessen kann diese Größe als die natürliche Grenze für die Kompression einer Nachricht verstanden werden.

Ein Beispiel: Eine typische faire Münze hat eine Wahrscheinlichkeit von $1/2$ für Kopf und $1/2$ für Zahl. Der Informationsgehalt für beide Ereignisse ist also jeweils $-\log_2(1/2) = 1$ Bit. Bei einer nicht-fairen Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$ für Kopf und $2/3$ für Zahl ist der Informationsgehalt für Kopf $-\log_2(1/3) = 1,585$ Bit und für Zahl $-\log_2(2/3) = 0,585$ Bit.

Eigenschaften des Informationsgehalts

Der Informationsgehalt ist eine streng monoton sinkende Funktion der Wahrscheinlichkeit, welche für $(0, 1]$ definiert ist. Der Informationsgehalt von einem Ereignis, welches völlig sicher ist, also eine Wahrscheinlichkeit von 1 hat, ist 0. Der Informationsgehalt von einem Ereignis, welches nicht vorkommen kann, wäre ∞ .

Der Informationsgehalt von zwei unabhängigen Ereignissen ist die Summe der beiden Informationsgehalte. Abhängigkeit der beiden Ereignisse reduziert die Informationsgehalt. Diese Reduktion kann auch als Maß für die Abhängigkeit der Ereignisse verwendet werden.

Formale Definition Shannon-Entropie

Die Entropie ist der durchschnittliche Informationsgehalt einer zufälligen Variable. Sie ist definiert als $H(X) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot I(x)$ (in Bit), wobei X die Wahrscheinlichkeitsfunktion der zufälligen Variable ist.

Anschauliche Erläuterung

Entropie wird oft als Maß für die Unordnung eines Systems beschrieben. In der Physik kann dieses System aus mehreren Objekten bestehen, welche jeweils eine Temperatur haben. Die Shannon-Entropie ist allerdings etwas abstrakter: Sie beschreibt das Maß an Gleichverteilung von Wahrscheinlichkeiten.

Nehmen wir wieder das Beispiel mit der Münze: Bei der fairen Münze ist die Entropie $\frac{1+1}{2} = 1$ Bit. Bei der nicht-fairen Münze ist die Entropie $\frac{1,585 \cdot 1/3 + 0,585 \cdot 2/3}{2} \approx 0,459$ Bit. Die Entropie ist also niedriger als bei der Einheitsverteilung. Diese Tatsache gilt für alle Wahrscheinlichkeiten i.e. die Einheitsverteilung hat immer die höchste Entropie. Die niedrigste Entropie haben Verteilungen, bei denen nur ein einziger Zustand möglich ist.

Markov-Prozesse

Wann erfüllen Markov-Prozesse den zweiten
Hauptsatz der Thermodynamik?

Wirtschaftssysteme

Quellen