

ENTROPIE EINES WIRTSCHAFTSSYSTEMS

Modellierung

Daniel Meiborg

SIA - Schüler-Ingenieur-Akademie



Frau Dr. Hardung, Herr Dr. Itzen, Hr. Vogelgesang
Schule Birklehof e.V.

2022/2023

Inhaltsverzeichnis

Modellierung	2
Einleitung	2
Ausgleichsterme	2
Agentenbasierter Markov-Prozess	2
Entropie	3
Beispiel	3
Vorteile	3
Probleme	4
Diffusionsbasierter Markov-Prozess	4
Beispiel	5
Vorteile	5
Probleme	5
Entropiebasiertes Wirtschaftssystem	5
Beispiel	6
Vorteile	6
Probleme	6
Markup-Sprache	7
Beispiel	7
Evolutionäre Algorithmen	8
Vorteile	8
Probleme	8
Atomare Operationen	8
Beispiel	9
Vorteile	10
Probleme	10
Fazit	12
Ausblick	12
Quellen	13

Modellierung

Einleitung

Die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für physikalische Prozesse ist allgemein anerkannt. Wie bereits im ersten Kapitel erläutert, lässt sich dieser Satz auch allgemein für eine Gruppe von stochastischen Prozessen beweisen. Aus diesem Grund ist es von Bedeutung, die Anwendbarkeit dieses so grundlegenden Konzepts auf ökonomische Strukturen genauer zu untersuchen.

Eine grundlegende Methode der Wissenschaft besteht darin, komplexe Phänomene zu vereinfachen und in mathematische Modelle zu überführen. In den Wirtschaftswissenschaften gibt es zahlreiche Modelle, die dazu dienen, wirtschaftliche Zusammenhänge abzubilden. Die in dieser Arbeit betrachteten und entwickelten Modelle müssen daher den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. In diesem Kapitel werden dazu verschiedene Ansätze präsentiert.

Ausgleichsterme

Die meisten der folgenden Modelle basieren auf die eine oder andere Weise auf Markov-Prozessen. Ziel ist es, ein Modell so für den zugrundeliegenden Sachverhalt zu erstellen, dass dieser Markov-Prozess den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt. Nachdem das ein Spezialfall von Markov-Prozessen ist, ist es unwahrscheinlich, dass der erste Versuch dieses Kriterium erfüllt. Aus diesem Grund kann man Ausgleichsterme einführen. Diese dienen dazu, das Modell so anzupassen, dass es sowohl die Realität als auch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt. Für physikalische Prozesse werden als negative Entropiequelle (ein Teil eines Systems, dessen Entropie erhöht wird, um die eines anderen zu verringern) häufig große Temperaturunterschiede wie z.B. in einem Motor benutzt. Allgemein kann konkrete Information als solche betrachtet werden. Weitere Beispiele dafür befinden sich im Abschnitt Atomare Operationen.

Agentenbasierter Markov-Prozess

Bei einem agentenbasierten Markov-Prozess versucht man, ökonomische Agenten (Staat, Banken etc.) annähernd zu modellieren. Agenten sind hier

im Sinne der Spieltheorie als Entitäten, die mit ihrer Umwelt agieren können, zu verstehen. Der erste Schritt ist hier das Verhalten einzelner Agenten z.B. mithilfe von Entscheidungsdiagrammen (siehe Beispiel) in eine Form zu übersetzen, die sich dann weiterverarbeiten lässt.

Im nächsten Schritt muss dieses Modell dann in einen Markov-Prozess umgewandelt werden. Eine dazu vom Autor konzipierte und entwickelte Bibliothek ist Entromatica [1].

Dieser Markov-Prozess lässt sich dann vergleichsweise einfach simulieren. Aus der daraus zu berechnenden Entropie (siehe Entropie) oder direkt aus der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix kann man nun berechnen, ob der zweite Hauptsatz der Thermodynamik gilt. Falls das nicht der Fall ist, muss man dementsprechend man das Ausgangsmodell sukzessive anpassen.

Entropie

Die Entropie wird hier anhand der Shannon-Entropie der möglichen Zustände definiert. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung X_0 ist zu Beginn bekannt, und die Entropie wird als Funktion über die Zeit dargestellt. Diesem Prinzip folgen auch alle anderen auf Markov-Prozessen basierenden hier vorgestellten Modelle.

Beispiel

Im Folgenden ist ein Diagramm zu sehen, das vereinfacht mögliche Zustände eines Kaufprozesses auf der Seite des Käufers und die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten darstellt. ‘Stabil’ bezeichnet hier den Ausgangszustand. In diesem Szenario entschließt sich der Agent von Zeit zu Zeit, ein Produkt zu kaufen, und erfährt dabei ab und zu Betrug. Das führt dann dazu, dass er für eine Zeit lang im Zustand ‘Abbruch’ feststeckt, d.h. aufgrund der Betrugserfahrung vorsichtiger ist.

Vorteile

Da ein tatsächliches Wirtschaftssystem ebenfalls aus einer Vielzahl an Agenten besteht, hat dieses System das Potenzial, bei idealer Umsetzung gute Ergebnisse zu liefern.

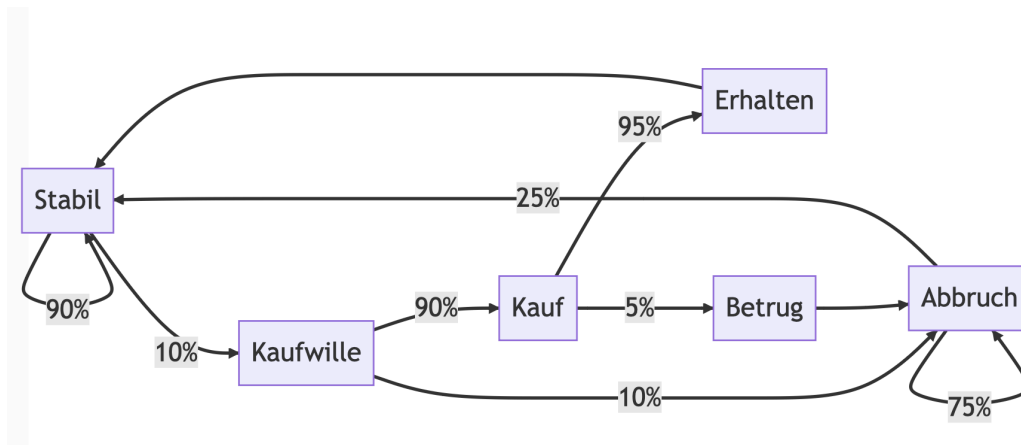


Abbildung 1: Beispiel eines Modells für agentenbasierte Markov-Prozesse, eigene Abbildung

Probleme

Dabei treten jedoch einige Probleme auf: Zunächst einmal ist die Modellierung von menschlichen Agenten extrem aufwändig, schwierig oder schlicht unmöglich. Auch bei sehr simplen Systemen muss eine Vielzahl an Parametern willkürlich gesetzt werden, da die Datenlage und die Verarbeitungskapazität in der Regel sehr limitiert sind. Des weiteren sind die Ausgleichsterme in Vergleich zu den folgenden Ansätzen schwieriger zu implementieren, da sie erfordern, dass entweder neue Agenten hinzukommen oder bisherige ihre Entscheidungen radikal verändern, was die Aussagekraft des Modells weiter beeinträchtigt.

Diffusionsbasierter Markov-Prozess

Das Vorgehen bei diffusionsbasierten Markov-Prozessen ist ähnlich wie bei agentenbasierten Markov-Prozessen. Der Hauptunterschied besteht allerdings darin, dass anstatt alle Agenten weitestgehend einzeln zu modellieren, lediglich grobkörnig die Flüsse von Kapital bzw. Ressourcen angegeben werden. Der Begriff ‘Diffusion’ ist hier insofern zu verstehen, als dass Dienstleistungen oder Produkte i.d.R. eine Form von Gegenleistung bedingen und Kapital bzw. Ressourcen so zwischen verschiedenen Agenten diffundieren.

Beispiel

In diesem Diagramm sind schematische Beziehungen zwischen ökonomischen Entitäten zu sehen. Im nächsten Schritt müssen hier Wahrscheinlichkeiten für Diffusion und Quantitäten angegeben werden.

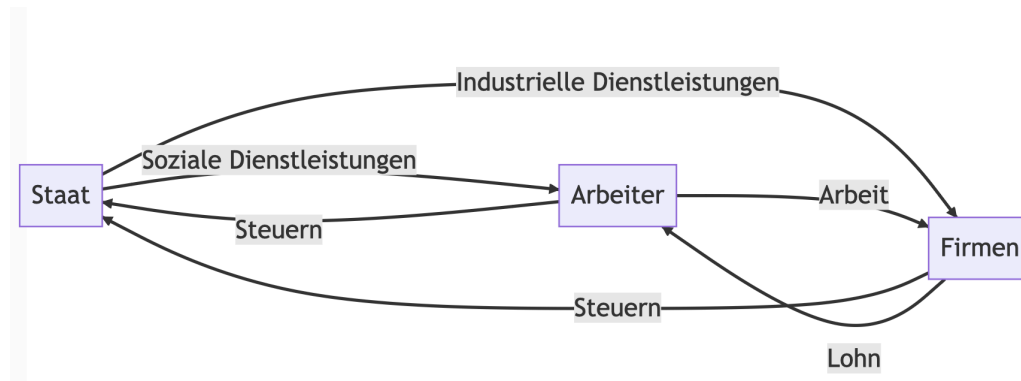


Abbildung 2: Beispiel eines Modells für diffusionsbasierte Markov-Prozesse, eigene Abbildung

Vorteile

Ein wesentlicher Vorteil dieses Ansatzes ist, dass Entscheidungen von Agenten von Anfang an als nicht vorhersagbar angenommen werden. Tatsächlich ist diese Unvorhersagbarkeit hier hilfreich, da Zufall für Markov-Prozesse ein essentielles Element ist. Stattdessen werden lediglich die größeren Zusammenhänge beachtet.

Probleme

Allerdings kann bei dem Versuch, das Wirtschaftssystem auf einer niedrigeren Ebene zu modellieren, dieses Konzept in eine kompliziertere Version der agentenbasierten Version ausarten. Es muss also immer zwischen den beiden Ansätzen abgewogen werden.

Entropiebasiertes Wirtschaftssystem

Der nächste Ansatz besteht darin, lediglich diejenigen Teile der Wirtschaft zu betrachten, die sich selbst mit Wahrscheinlichkeiten beschäftigen. Dieses

breite Feld umfasst alles von Versicherungen, Glücksspiel bis hin zu Kryptowährungen. Hier können sowohl reale Systeme betrachtet werden als auch fiktive Wirtschaftssysteme, in denen beispielsweise reine Information eine Währung ist.

Beispiel

Ein Beispiel dafür ist ein virtuelles Pferderennen: In diesem ist die einzige Information, die das ansonsten geschlossene System (z.B. einen Computer) verlässt, der (eindeutige) Gewinner. Bei 8 Pferden sind das 3 Bit Information. Vor Beginn des Zufallsexperiments gibt es also 3 Bit Ungewissheit; danach sind es 0 Bit (auf das Pferderennen bezogen). Nun kann man einen Markov-Prozess aus dem Pferderennen und Umgebung erstellen. Um diesen nach dem zweiten Hauptsatz zu modellieren (der, unseres Wissens nach, auf die Physik zutrifft), muss diese Pferderennen-Simulation dabei mindestens an 3 Bit Entropie zunehmen. Anhand des Landauer-Prinzips lässt sich ein Minimum an Energie festlegen, welches benötigt wird, um ein einzelnes Bit zu löschen. Dieses Minimum wird nach Landauer [2] mithilfe folgender Formel berechnet: $E = k_B T \ln(2)$, wobei k_B der Boltzmann-Konstante entspricht. Ein Bit entspricht bei Raumtemperatur also mindestens $E = k_B \cdot 295K \cdot \ln(2) \approx 2,823 \cdot 10^{-21} J$ und die 3 Bit etwa $2,823 \cdot 10^{-21} J \cdot 3 \approx 8,469 \cdot 10^{-21} J$, die in Wärme konvertiert werden müssen. Bei einem Preis von etwa $0,33 \frac{\text{€}}{\text{kWh}}$ 2022 in Deutschland [3] sind das etwa $8,469 \cdot 10^{-21} J \cdot 0,33 \cdot 3,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{€}}{J} \approx 10^{-26} \text{€}$, die der Ausgang mindestens wert ist. So könnte man in einer Gesellschaft prinzipiell Information als tatsächlichen Wertgegenstand einsetzen.

Vorteile

Da die Branche direkt an Wahrscheinlichkeiten orientiert ist, hat der Begriff der Entropie hier mehr Aussagekraft als bei den generischen agenten- oder diffusionsbasierten Modellen.

Probleme

Allerdings wird für reelle Wirtschaftszweige deutlich, dass die Entropie, die man bei der Spekulation erhält, in aller Regel nicht dem entspricht, was eine solche Berechnung ergeben würde, da solche Systeme nicht vollständig abgeschlossen sind und Information nach außen dringen kann.

Markup-Sprache

Während die bisherigen Modellierungsmöglichkeiten darauf beruhen, ein bestimmtes Wirtschaftssystem zu modellieren und dessen Entropie zu berechnen, wird bei diesem Ansatz gewissermaßen die Entropie aller möglichen Wirtschaftssysteme berechnet.

Im ersten Schritt wird dazu eine Markup-Sprache definiert. Das kann beispielsweise ein XML-Dialekt sein. Diese Syntax wird dazu verwendet, ein bestimmtes System zu beschreiben.

Es ist wichtig zu beachten, dass zunächst nur der Informationsgehalt, nicht die Entropie dieses Dokuments berechnet wird. Dazu wählt man eine gewisse Länge für die Dokumente oder begrenzt die Anzahl anderweitig. Danach weist man jedem dieser Dokumente eine Wahrscheinlichkeit zu. Das kann jeweils die gleiche sein oder komplexere Ansätze wie in Evolutionäre Algorithmen illustriert. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich, wie in den theoretischen Grundlagen erläutert, dann in den Informationsgehalt umwandeln. Schließlich kann man für die ganze Menge der Dokumente die Entropie berechnen.

Beispiel

Im Folgenden ist eine mögliche Darstellung eines aus drei Agenten bestehenden Systems in einem frei erfundenen XML-Dialekt zu sehen.

```
<economy>
  <agents>
    <agent id="A1" type="producer" />
    <agent id="A2" type="consumer" />
    <agent id="A3" type="producer" />
  </agents>
  <products>
    <product id="P1" producer="A1" />
    <product id="P2" producer="A3" />
  </products>
  <connections>
    <connection type="trade" producer="A1" consumer="A2"
      product="P1" quantity="50" price="10" />
    <connection type="trade" producer="A3" consumer="A2"
      product="P2" quantity="25" price="5" />
  </connections>
</economy>
```



```

    <connection type="loan" lender="A2" borrower="A3"
        amount="100" interest_rate="0.05" />
  </connections>
</economy>

```

Evolutionäre Algorithmen

Optional kann man den so berechneten beispielsweise Informationsgehalt mit evolutionären Algorithmen kombinieren, um eine Veränderung der Wahrscheinlichkeiten über die Zeit zu erhalten. Hier würde man verschiedene solcher Systeme mutieren lassen und die Veränderung der Entropie betrachten. Da zu Beginn alle möglichen Systeme als gleich wahrscheinlich angenommen werden, sinkt demnach die Entropie, wenn sich einzelne Wirtschaftssysteme als effektiver herausstellen. Wie in dem Beispiel für entropiebasierte Wirtschaftssysteme illustriert, lässt sich daraus auch die Menge an Information bzw. Energie berechnen, die dafür aufgewendet werden muss. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass man eine Funktion definieren kann, die die Effektivität eines Wirtschaftssystems berechnet.

Vorteile

Der wesentliche Vorteil hier ist, dass man die Entropie der *Struktur* der Wirtschaftssysteme berechnen kann, anstatt die Entropie ihres Verhaltens. Dadurch muss man nicht den schwierigen Schritt gehen und die einzelnen Agenten simulieren.

Probleme

Allerdings kann ohne weitere Modifikationen der 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht angewendet werden, da die Dokumente kein Markov-Prozess sind. Ein Ansatz, dieses Problem zu umgehen, besteht in evolutionären Algorithmen.

Atomare Operationen

Im Gegensatz zu den bisherigen Modellen werden hier Prozesse auf einer möglichst niedrigen Ebene betrachtet. Anstatt die Struktur eines Wirtschaftssystems zu analysieren, versucht man, einfache ökonomische Prozesse mit

Markov-Prozessen zu modellieren. ‘Atomar’ ist hier nicht im Sinne der Kernphysik zu verstehen, sondern vielmehr als *unteilbare* Handlungen.

Beispiel

Eine solche atomare Operation könnte zum Beispiel die Produktion von Gütern aus Rohstoffen sein. In dem folgenden Diagramm kann man einen solchen Prozess sehen. Es gibt in diesem Markov-Prozess zwei Gruppen von Zuständen: *Rohstoff* und *Produkt*. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist unbekannt, welcher der drei möglichen Zustände R1, R2 oder R3 von dem Rohstoff tatsächlich eingenommen wird, d.h. alle haben eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ und damit die Entropie $H(X_0) = \text{ld}(3)$. Zum Zeitpunkt $t = 1$ wechseln diese Zustände zufällig entweder zu P1 oder P2. Die Entropie ist somit $H(X_1) = \text{ld}(2) = 1\text{bit}$.

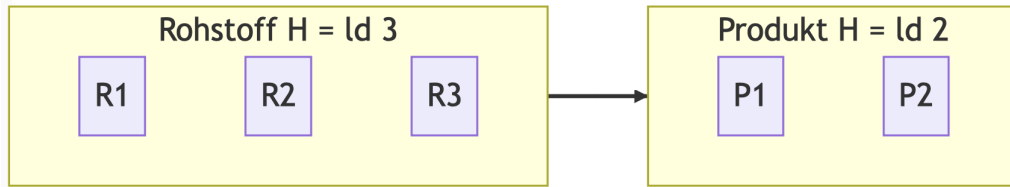


Abbildung 3: Beispiel eines Modells für atomare Operationen, eigene Abbildung

Um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu erfüllen, kann man nun das Modell auf mehrere Arten erweitern. Eine solche Möglichkeit ist die Einführung von Energie als Edukt (z.B. in Form von Photonen). Hier ist es wichtig zu beachten, dass R1, R2, R3 und E1 keine getrennten Zustände sind, die die Edukte einnehmen können, sondern ein konkreter Zustand des Markov-Prozesses aus der Kombination (R1, E1), (R2, E1) oder (R3, E1) besteht. Dementsprechend bleibt die Gesamtentropie von X_0 gleich. Basis für die Annahme der geringen Anzahl an Zuständen der ‘Energie’ ist, dass es weniger Zustände beispielsweise für Photonen gibt (um genau zu sein $H = k(1 - \ln(f_r))$; f_r entspricht der Photonenverteilung und k der Boltzmann-Konstante [4]) als für eine bestimmte Menge z.B. eines idealen Gases. Die Zugabe von Energie bedingt i.d.R. eine höhere Quantität an Produkten. In diesem Beispiel wird angenommen, dass sich die Anzahl an Produktteilen dadurch verdoppelt. Da es für einen einzelnen Teil bereits 2 Zu-

stände gibt, gibt es für den Komplex aus beiden somit 4 mögliche Zustände: $(P1_1, P2_1)$, $(P1_1, P2_2)$, $(P1_2, P2_1)$, $(P1_2, P2_2)$. Die Entropie beträgt damit $H(X_1) = \text{ld}(4) = 2\text{bit}$.

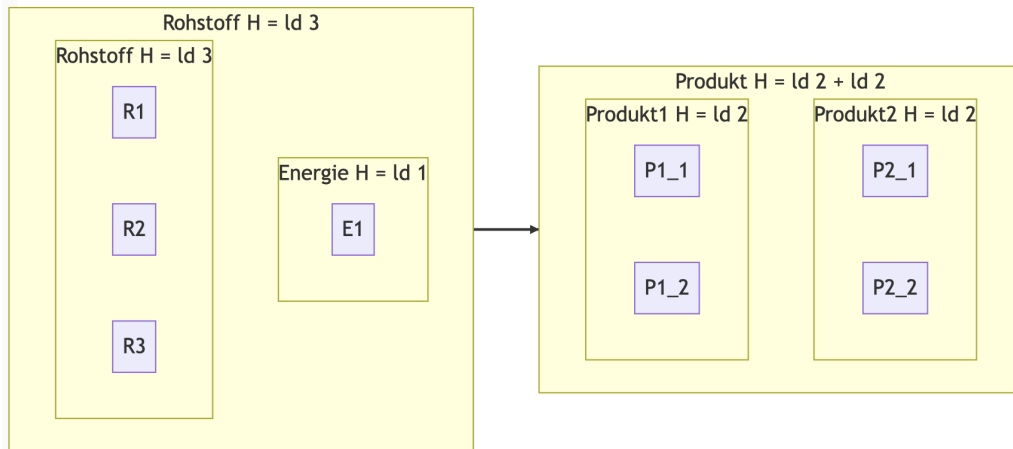


Abbildung 4: Beispiel eines Modells für atomare Operationen, Produktion mit Energie, eigene Abbildung

Eine andere Möglichkeit ist Abfall. Dabei wird angenommen, dass bei der Produktion eine gewisse Menge an undefinierbarem Abfall entsteht. Undefinierbar meint hier, dass man bei der Produktion nicht darauf achtet, eine bestimmte Art von Abfall zu produzieren, sondern der Abfall irgendetwas sein kann. Somit hat dieser hier eine hohe Anzahl an möglichen Zuständen (willkürlich gewählt 5). Das Entropieverhältnis ist hier also $H(X_0) = \text{ld}(3) \approx 1,585\text{bit}$ und $H(X_1) = \text{ld}(2 \cdot 5) = \text{ld}(2) + \text{ld}(5) \approx 3,322\text{bit}$.

Vorteile

Im Gegensatz zu den anderen Modellen ist dieser Ansatz vergleichsweise anschaulich und nachvollziehbar. Des Weiteren muss man dazu nicht das Verhalten von Agenten voraussagen, was die Umsetzbarkeit dramatisch erhöht.

Probleme

Allerdings wächst die Komplexität dieses Ansatzes bei Betrachtung eines größeren Systems immens. Hier verschwimmen die Grenzen zu den ersten beiden Modellen.

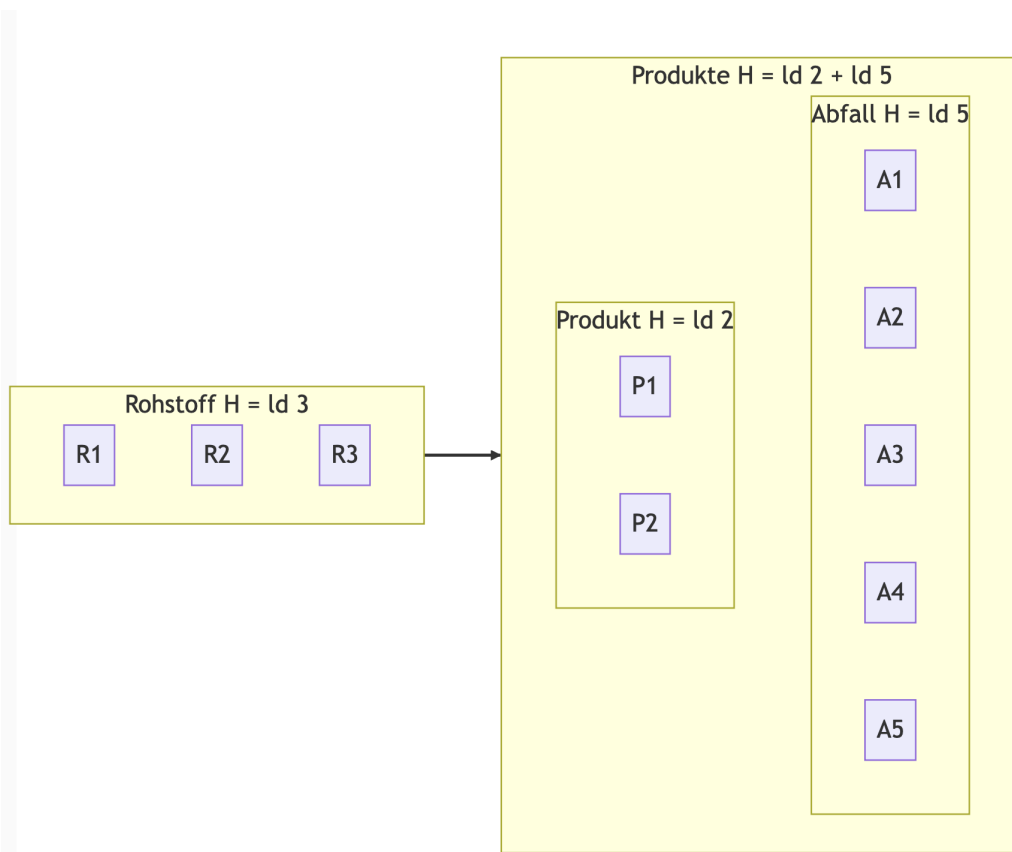


Abbildung 5: Beispiel eines Modells für atomare Operationen, Produktion mit Abfall, eigene Abbildung

Fazit

Agenten- und diffusionsbasierte Modelle sind also geeignet, um die Entropie des Verhaltens eines einzelnen Wirtschaftssystems zu analysieren. Für den Vergleich der Struktur hingegen ist eine Markup-Sprache eher geeignet. Mit atomaren Operationen kann man ökonomische Prozesse auf einer niedrigeren Ebene betrachten.

Agenten- und diffusionsbasierte Modelle bieten geeignete Ansätze, um die Entropie des Verhaltens eines einzelnen Wirtschaftssystems zu analysieren und ökonomische Prozesse auf einer höheren Ebene zu betrachten. Jedoch sind diese Modelle aufgrund ihrer Komplexität schwer zu interpretieren und zu skalieren. Für den Vergleich der Struktur eines Wirtschaftssystems ist hingegen eine Markup-Sprache eher geeignet, da dabei die Agenten nicht simuliert werden müssen. Schließlich ermöglichen atomare Operationen, ökonomische Prozesse auf einer niedrigeren Ebene zu betrachten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Thema der Entropie in einem Wirtschaftssystem ein interdisziplinärer Ansatz ist, der die Verbindung von naturwissenschaftlichen und gesellschaftswissenschaftlichen Konzepten aufzeigt. Die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf ökonomische Modelle ermöglicht es, komplexe Prozesse in einem Wirtschaftssystem besser zu verstehen und zu erklären. Die vorgestellten Ansätze bieten dabei unterschiedliche Möglichkeiten der Modellierung, welche jeweils eigene Vor- und Nachteile aufweisen.

Ausblick

Die vorgestellten Ansätze zur Entropieanalyse in Wirtschaftssystemen bieten vielversprechende Möglichkeiten für weitere Forschung. Ein vielversprechender nächster Schritt wäre die weitere Entwicklung und Umsetzung atomarer Operationen.

Eine weitere Möglichkeit zur Weiterentwicklung wäre die Weiterentwicklung des Konzepts der Anwendung von evolutionären Algorithmen bei Markup-Sprachen.

Quellen

- [1] D. Meiborg, “Entromatica,” *GitHub repository*. GitHub, 2023 [Online]. Available: <https://github.com/DanielMeiborg/entromatica>. [Accessed: Mar. 12, 2023]
- [2] R. Landauer, “Irreversibility and heat generation in the computing process,” *IBM Journal of Research and Development*, vol. 5, no. 3, p. 188, 1961.
- [3] “Erdgas und Stromdurchschnittspreise.” Statistisches Bundesamt (Destatis), 2022 [Online]. Available: https://www.destatis.de/DE/Themen/Wirtschaft/Preise/Erdgas-Strom-Durchschnittspreise/_inhalt.html. [Accessed: Mar. 12, 2023]
- [4] A. Kirwan, “Intrinsic photon entropy? The darkside of light,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 42, pp. 725–734, Apr. 2004.