Entropie eines Wirtschaftssystems

Theoretische Grundlagen

Daniel Meiborg | Januar 2023

You should call it entropy [...] no one really knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage.

John von Neumann zu Claude Shannon, Scientific American Vol. 225 No. 3, (1971)

Information

Eigenschaften

$$I : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$A, B \in \Omega : p(A) < p(B) \implies I(B) < I(A)$$

$$A \in \Omega : p(A) = 1 \implies I(A) = 0$$

$$A \in \Omega : \lim_{p \to 0} (I(A)) = \infty$$

$$A \perp\!\!\!\perp B \implies I(A \cap B) = I(A) + I(B)$$

Definition

$$I(x) \mapsto -\log_2(p(x))$$

Beispiel 1

Sei $\Omega = \{K, Z\}; p(K) = \frac{1}{2}; p(Z) = \frac{1}{2}$

$\implies I(K) = 2; I(Z) = 2$

Beispiel 2

Sei $\Omega = \{K, Z\}; p(K) = \dfrac{1}{3}; p(Z) = \dfrac{2}{3}$

$\implies I(K) \approx 1{,}585; I(Z) \approx 0{,}585$

Entropie

Arten von Entropie

- Von-Neumann-Entropie
- Statistische Mechanik
- Reaktionsentropie
- Shannon-Entropie

Definition

Erwartungswert der Information

$$H(X) = \mathbb{E}_X[I(X)] = \sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x)$$

Beispiel 1

Sei $\Omega = \{K, Z\}; p(K) = \dfrac{1}{2}; p(Z) = \dfrac{1}{2}$

$$\implies I(K) = 2; I(Z) = 2$$

$$\implies H(\Omega) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Beispiel 2

Sei $\Omega = \{K, Z\}; p(K) = \dfrac{1}{3}; p(Z) = \dfrac{2}{3}$

$$\implies I(K) \approx 1{,}585; I(Z) \approx 0{,}585$$

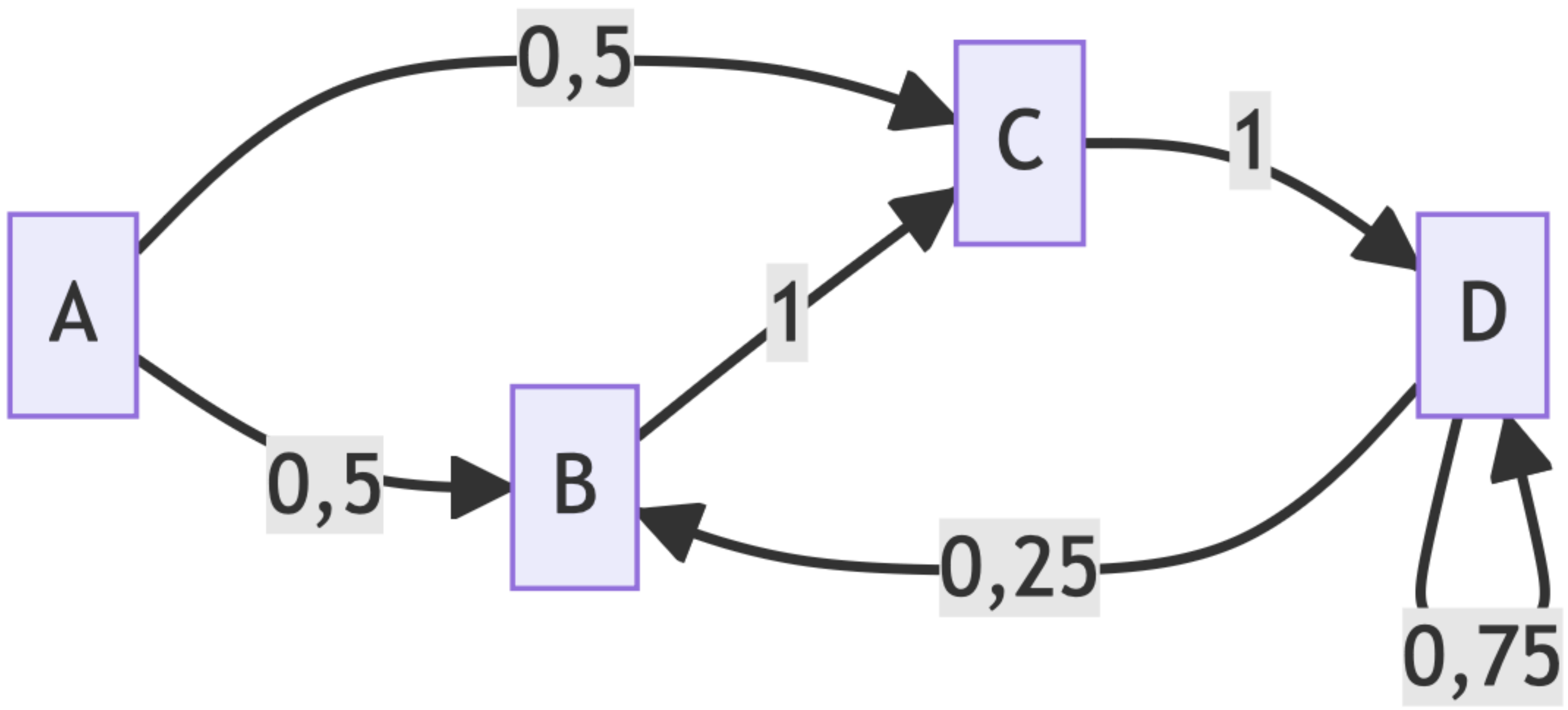
$$\implies H(\Omega) \approx \frac{1}{3} \cdot 1{,}585 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}585 = 0{,}918$$

Markov-Prozesse

Definition

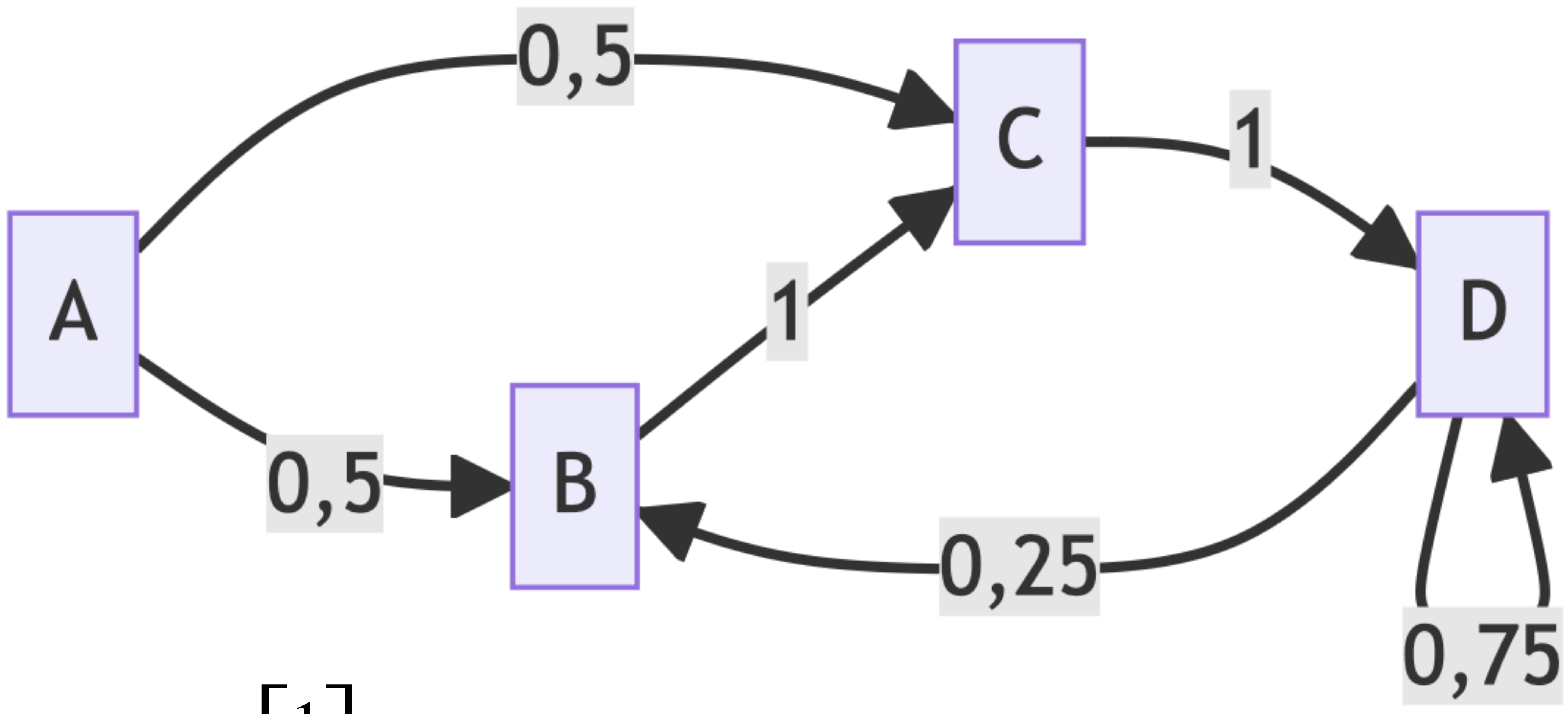
- Zustandsmenge: X
- Wahrscheinlichkeitsverteilung zu Zeitpunkt t: $\overrightarrow{P}(t)$
- Markov-Eigenschaft: $\overrightarrow{P}(t+1)$ hängt nur von $\overrightarrow{P}(t)$ ab
- Übergangsmatrix: A_{ij}
- Mastergleichung: $\overrightarrow{P}(t+1) = A\overrightarrow{P}(t)$

Beispiel



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

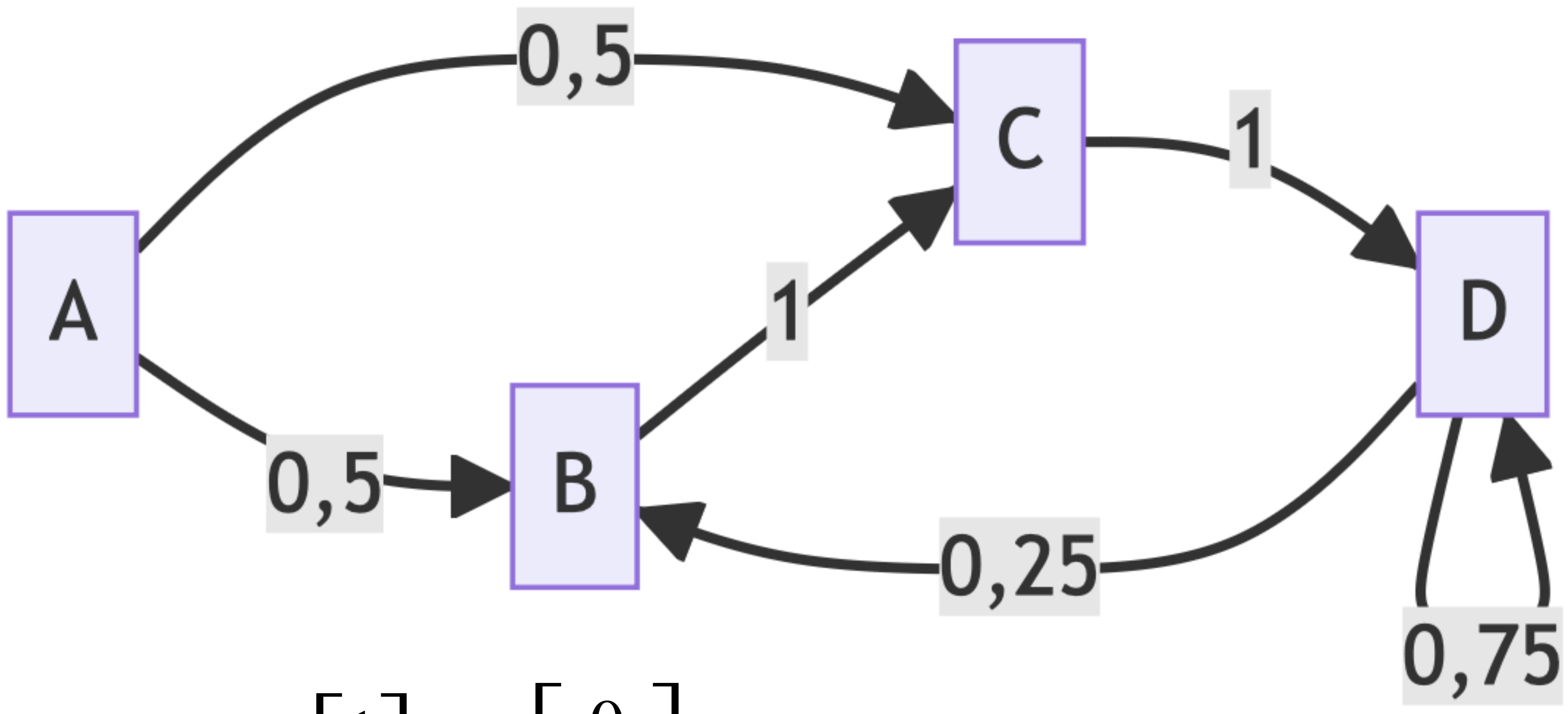
Beispiel



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; H(\overrightarrow{P}(0)) = 0$$

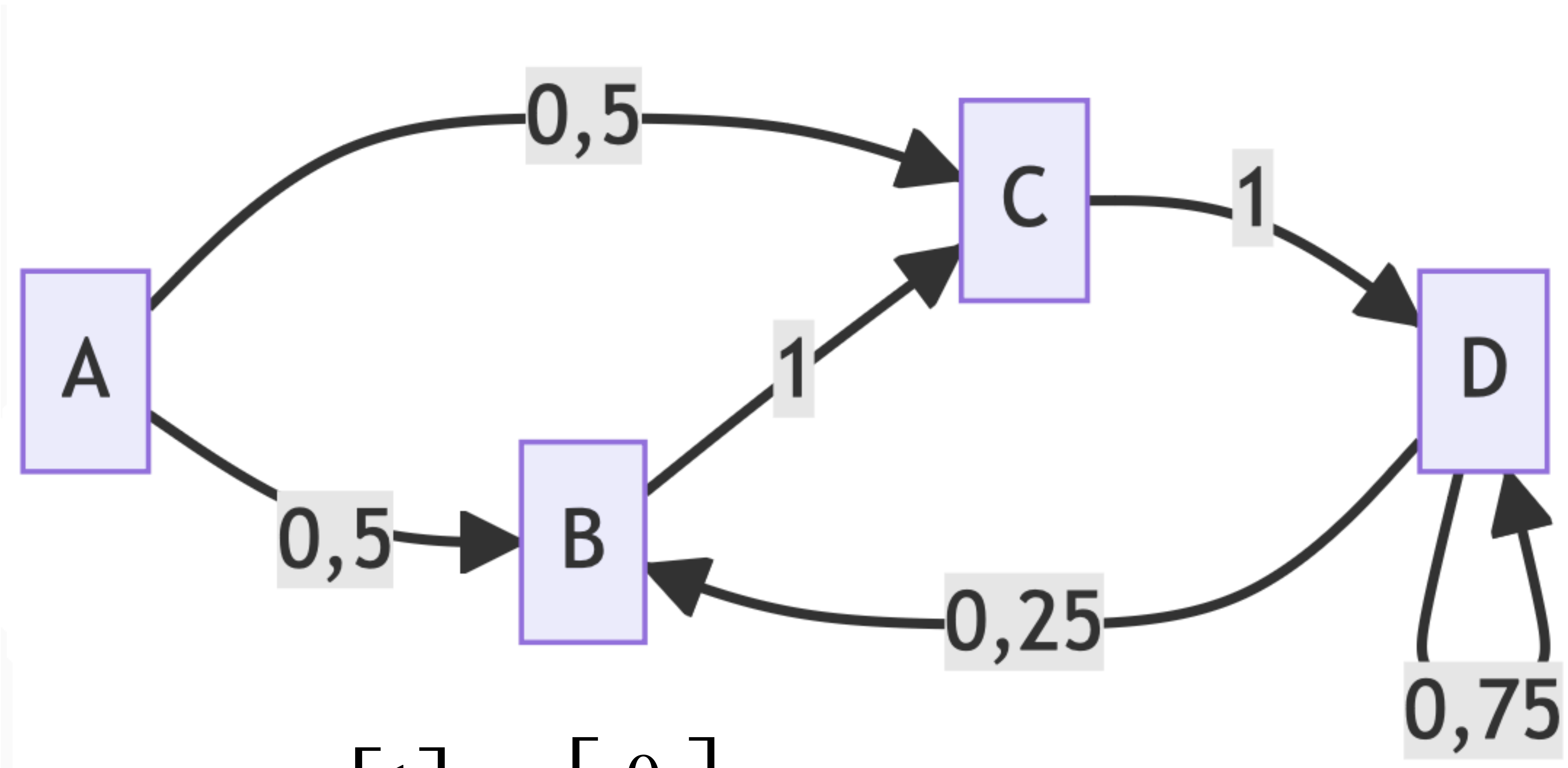
Beispiel



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P}(1) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}; H(\overrightarrow{P}(1)) = 1$$

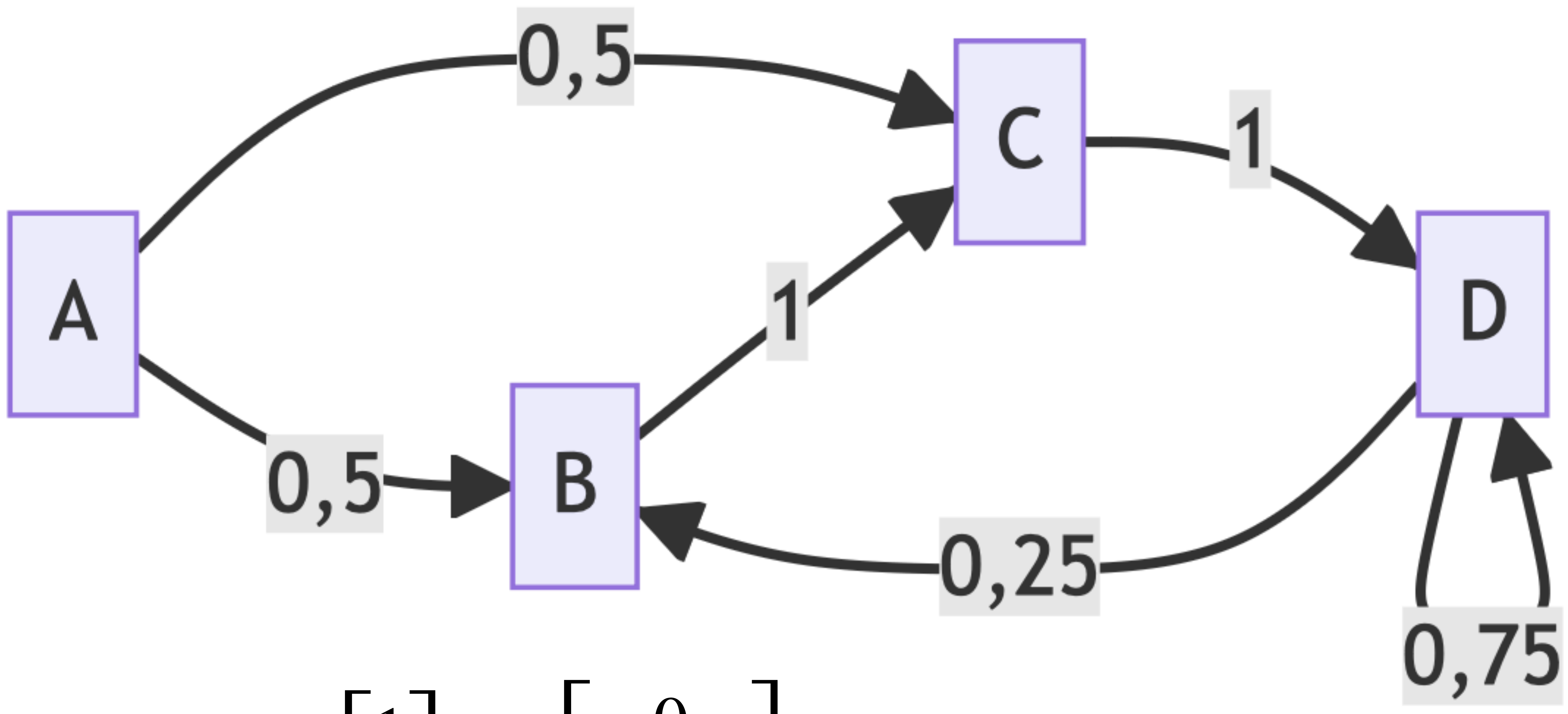
Beispiel



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P}(2) = A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}; H(\overrightarrow{P}(2)) = 1$$

Beispiel



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P}(3) = A^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}125 \\ 0 \\ 0{,}875 \end{bmatrix}; H(\overrightarrow{P}(3)) \approx 0{,}544$$

Stationäre Verteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung $\overrightarrow{P}$ mit $\overrightarrow{P} = A\overrightarrow{P}$

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Entropie kann in einem geschlossenem thermodynamischen System nicht abnehmen

Entropie steigt monoton für alle endlichen diskreten Markov-Prozesse, wenn die stationäre Verteilung die Einheitsverteilung ist

Beweis

Anzahl an möglichen Zuständen: m

$$D(\overrightarrow{P}(t)\,||\,\overrightarrow{P}) = \sum_x \overrightarrow{P}_x(t) \cdot log_2(\frac{\overrightarrow{P}_x(t)}{1/m}) = -H(\overrightarrow{P}(t)) + log_2(m)$$

$D(\overrightarrow{P}(t)\,||\,\overrightarrow{P})$ sinkt monoton $\implies$ $H(\overrightarrow{P}(t))$ steigt monoton

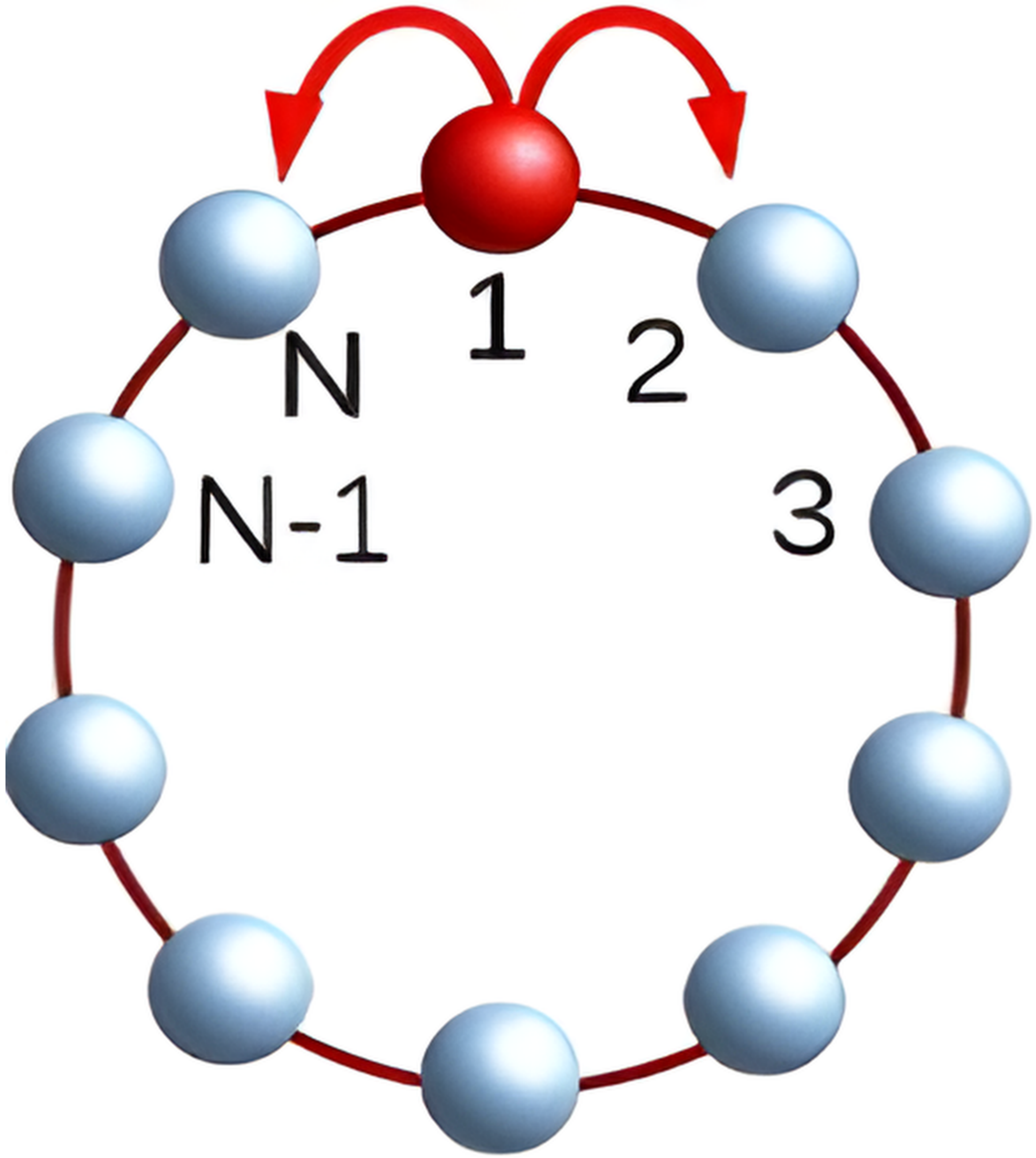
T. M. Cover and J. Halliwell,
"Which processes satisfy the second law", Cambridge University Press New York, NY, pp. 98–107, 1994

Erläuterung

Keine Information über $\overrightarrow{P}(0) \implies$ keine Information über $\overrightarrow{P}(t)$

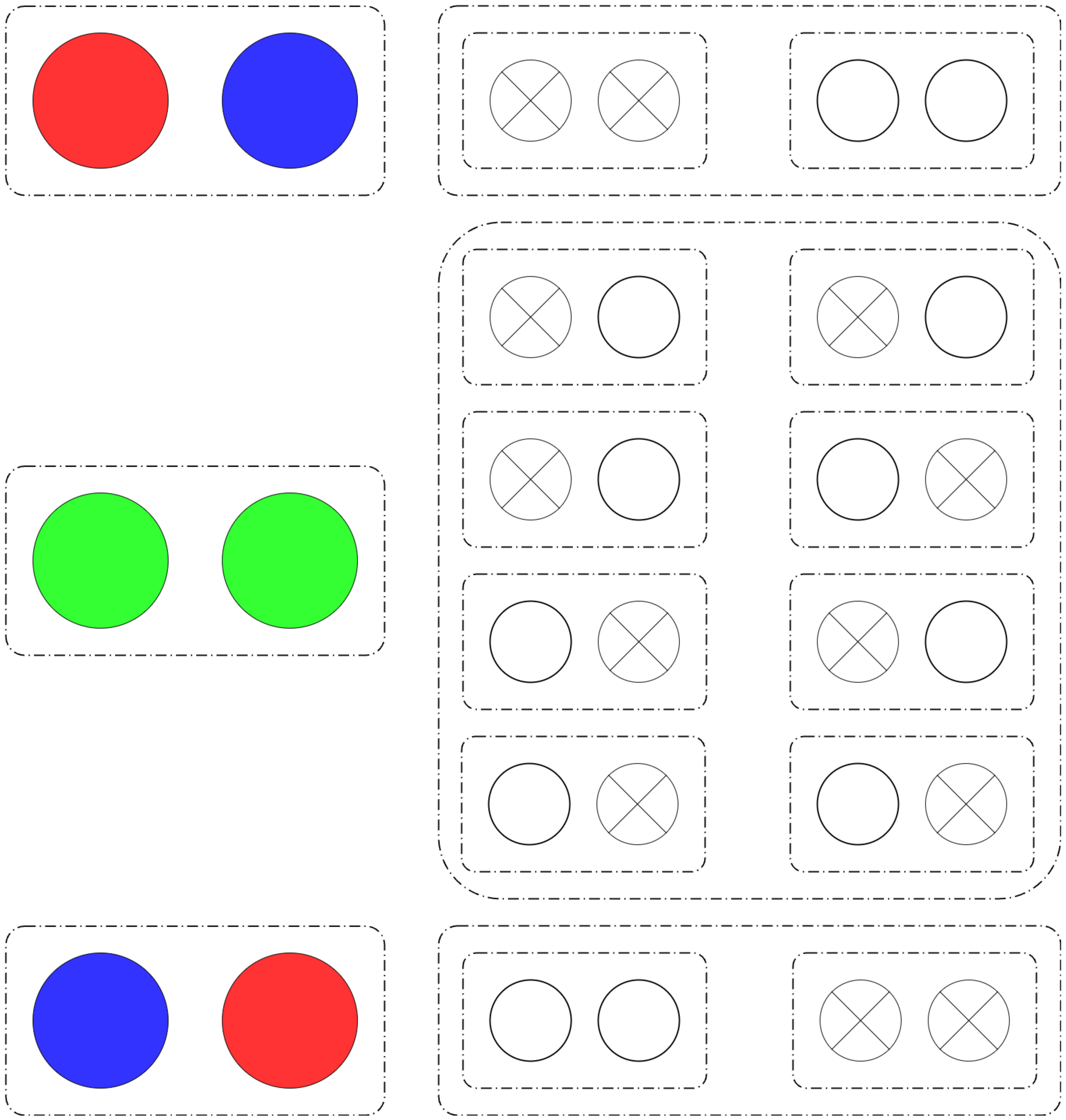
$\implies$ zu $t = n + 1$ nicht mehr Information als zu $t = n$

Beispiel 1



H. Hinrichsen, “Entropie als Informationsmaß”, Universität Würzburg

Beispiel 2



Links

https://github.com/DanielMeiborg/sia

https://github.com/DanielMeiborg/entromatica