HM WS 24/25 – ÜBUNGSBLATT 0

DANIEL MEIBORG 2599041

Aufgabe 1

a.

i.

$|x+7| - 2x \leq 5$

$x \geq 7 \Rightarrow x + 7 - 2x \leq 5 \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow x \geq 2$

$x < 7 \Rightarrow -(x+7) - 2x \leq 5 \Rightarrow -3x \leq -2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x \in [2, \infty)\blacksquare$

ii.

$0 \leq x^2 - 4x - 5 \Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Rightarrow 5 \vee -1$

$\Rightarrow x \in (\infty, -1] \cup [5, \infty)\blacksquare$

b.

i.

$(2, 8) \cap (-8, 6) \Rightarrow (2, 6)\blacksquare$

ii.

Fall x positiv:

$x^2 \leq 4x - 3$

$0 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow x = -1 \vee x = -3$

$\Rightarrow x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$

c.

$(-5, 1)$

Aufgabe 2

a.

i.

$A = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} : x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 1 \right\}$

zz: $A = (-1, 1)$

$\frac{1}{x}$ wird maximiert wenn $x \to 1$ für $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1$. $-\frac{1}{y}$ wird entsprechend für $y \to \infty$ für $y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 1$ minimiert. Für ein Supremum wird x dementsprechend gleich 1 gesetzt und y maximiert. Das Supremum ist $1 - 0 = 0$. Es liegt kein Maximum vor. Analog gilt für das Infimum $-1 - 0 = -1$. $A = (-1, 1)\blacksquare$

ii.

zz: B hat kein Maximum oder Supremum und ein Minimum bei 0

Da sowohl der Nenner als auch der Zähler des Bruchs stets positiv sind, gilt $\inf(B) \geq 0$. Für $x = 0$ ist 0 in B. Somit ist 0 das Minimum. Da für $x \to \infty$ der Bruch ebenfalls gegen ∞ geht, gibt es kein Maximum oder Supremum. ■

b.

zz : M ist nach unten unbeschränkt

Angenommen, s sei eine untere Schranke von M.

Sei $x \in M$. Da s eine untere Schranke ist, gilt $s < x \Rightarrow s - 1 < x$. Aus ($i$) folgt $(s-1) \in M$. Damit ist ein Element in M kleiner als s, womit s keine untere Schranke sein kann. ■

zz : M ist nach oben offen

Angenommen, $\sup(M) \in M$. Aus (ii) folgt dass es ein $y \in M$ gibt, sodass $y > \sup(M)$. Das steht im Widerspruch zur Definition des Supremums. ■

—

Wird nicht bewertet :(

Aufgabe 3

a. symmetrisch, +infty nicht, 0 nicht, 1 nicht, 2/3<= −1/3 => >= 1 nicht

$1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x}$

???

$x \in (-1, 1)$

b.

i.

zz : $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$

$A14 : a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

$ac = bc$ genau dann, wenn $a = b$ oder $c = 0$. Da $a < b$ und $c > 0$ vorausgesetzt wird, ist $ac < bc$. ■

ii.

zz : $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

$ac = a(-c) \geq b(-c)$

Da $-c$ positiv ist, folgt aus (i), dass $a(-c) \geq b(-c)$. ■

iii.

zz : $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

$(b-a)$ und $(d-c)$ sind positiv da $a \leq b$ und $c \leq d$. Aus A14 folgt $a+c \leq a+(b-a)+c+(d-c)$.

$\Rightarrow a+c \leq b+d$■

Aufgabe 4

a.

i.

Da x^2 für ein $x \in \mathbb{R}$ stets positiv ist (siehe Beispiel 1.3), ist auch x^4 stets positiv. A hat demnach ein Mimimum bei $x=0$. $x=625$ ist ein Maximum von A, da $625=(-5)^4$.

ii.

B hat Minimum 0, da $x=0 \Rightarrow \frac{|0|}{1+|0|}=0 \in B$. B hat Supremum 1 aber kein Maximum.