Karlsruher Institut für Technologie

25. Oktober 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 01

Abgabe: 31. Oktober 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $(1+1)+(1+1)+1 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

(i) $|x+7| - 2x \leq 5$,

(ii) $4x \leq x^2 - 5$.

(b) Schreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung endlich vieler Intervalle.

(i) $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| < 3 \ \wedge \ |x+1| < 7\}$,

(ii) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4|x| - 3\right\}$.

(c) Geben Sie, falls existent, Infimum, Supremum, Minimum beziehungsweise Maximum der Menge

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : (x+2)^2 + 4y^2 < 9\right\}$$

an.

Aufgabe 2 (K) $(3+3)+4 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum beziehungsweise Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

(i) $A = \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} : x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 1\right\}$,

(ii) $B = \left\{\frac{|x|x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit $M \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Ferner besitze M die folgenden Eigenschaften:

(i) Aus $x \in M$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$ folgt $y \in M$.

(ii) Zu jedem $x \in M$ existiert ein $y \in M$ mit $y > x$.

Zeigen Sie, dass M nach oben beschränkt ist und $M = (-\infty, \sup M)$ gilt.

Aufgabe 3.

(a) Schreiben Sie die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \colon\ 1 - \frac{1}{1+|x|} \leq \frac{1}{1-|x|}\right\}$$

als Vereinigung endlich vieler Intervalle.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Axiome (A 1) – (A 14) die folgenden Aussagen:

(i) $a < b$ und $0 < c \implies ac < bc$,

(ii) $a \leq b$ und $c \leq 0 \implies ac \geq bc$,

(iii) $a \leq b$ und $c \leq d \implies a + c \leq b + d$.

Aufgabe 4.

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum beziehungsweise Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

(i) $A = \{x^4 \colon\ x \in [-5, 1)\}$,

(ii) $B = \left\{\dfrac{|x|}{1+|x|} \colon\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind A und B nach oben beschränkt, so ist $A \cup B$ nach oben beschränkt und es gilt:
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}.$$

(ii) Sind A und B nach unten beschränkt, so ist $A \cup B$ nach unten beschränkt und es gilt:
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A,\ \inf B\}.$$

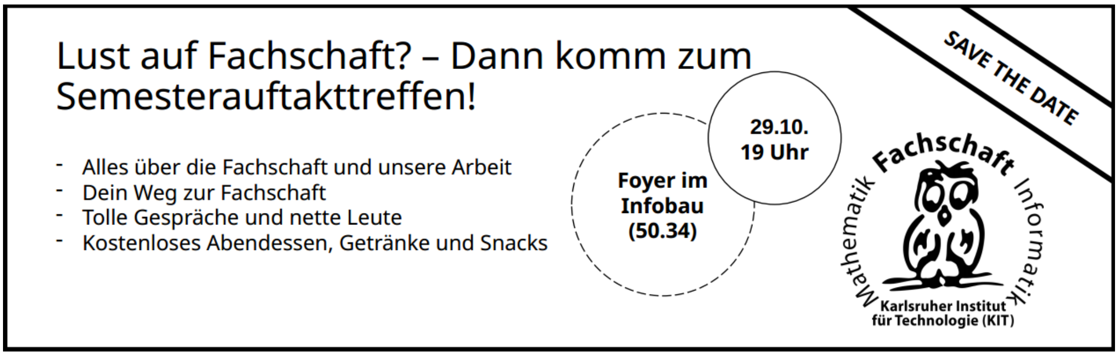
(iii) Sind A und B nach oben beschränkt, so ist $A + B = \{a + b \colon\ a \in A,\ b \in B\}$ nach oben beschränkt und es gilt:
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(iv) Ist die Menge A nach unten beschränkt, so ist $-A = \{-a \colon\ a \in A\}$ nach oben beschränkt und es gilt:
$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Nutzen Sie dies, um Satz 1.13 zu beweisen.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 25. Oktober 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt der Höheren Mathematik I behandelt wurde.

Werbung


Lust auf Fachschaft? – Dann komm zum Semesterauftakttreffen!
- Alles über die Fachschaft und unsere Arbeit
- Dein Weg zur Fachschaft
- Tolle Gespräche und nette Leute
- Kostenloses Abendessen, Getränke und Snacks
Foyer im Infobau (50.34)
29.10. 19 Uhr
SAVE THE DATE
Fachschaft
Mathematik
Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)