GBI WS 24/25 – ÜBUNGSBLATT 3

DANIEL MEIBORG 2599041 AND JAN MANSEL 2599265

Aufgabe 1

a.

zz: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gilt $n + 4 < n^2$

$n_0 = 3$

Induktionsanfang: $n = 3$:

$3 + 4 = 7 < 9 = 3^2$

Induktionsvoraussetzung: $n \geq 3$ und $n + 4 < n^2$

Induktionsschritt: $n + 1$

$(n + 1) + 4 = n + 5 < (n + 1)^2$

$\Leftrightarrow (n + 1) + 4 = n + 5 < n^2 + 2n + 1$

$\Leftrightarrow n + 4 < n^2 + 2n + 2$

Da $n + 4 < n^2$, gilt auch $n + 4 < n^2 + 2n + 2$ $\blacksquare$.

b.

$f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0, f(1) = 0, f(n) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$

zz: $\forall n \in \mathbb{N}_+ : f(n) \leq \log_2(n)$

Induktionsanfang: $n = 1$

$f(1) = 0 \leq \log_2(1) = 0$

Induktionsvorraussetzung: $\forall (n - 1) > 1 : f(n - 1) \leq \log_2(n - 1)$

Induktionsschritt: $f(n) \leq \log_2(n)$

Durch Induktionsvoraussetzung:

$f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq \log_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

$\Rightarrow f(n) = f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 \leq \log_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$

$\Rightarrow f(n) \leq \log_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 \leq \log_2(\frac{n}{2}) + 1$

$\Rightarrow f(n) \leq \log_2(n) - 1 + 1$

$\Rightarrow f(n) \leq \log_2(n)$ $\blacksquare$

Aufgabe 2

a.

$f(\text{abcac}) = \text{aaaacc}$

b.

Beweis. Wir beweisen die folgende Aussage: $|f(w)| = |w| + |w|_a - |w|_b$

Dazu machen wir eine vollständige Induktion über die Längen der Worte: $n \in \mathbb{N}_0 : w \in A^*, |w| = n$

Induktionsanfang: Für $n = 0$

$|f(\varepsilon)| = 0 = |\varepsilon| + |\varepsilon|_a - |\varepsilon|_b$

Induktionsschritt: Sei $n > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass $\forall w \in A^*, |w| = n : |f(w)| = |w| + |w|_a - |w|_b$ und verwenden dabei die Induktionsvoraussetzung, nähmlich $\forall w \in A^*, |w| = n - 1 : |f(w)| = |w| + |w|_a - |w|_b$. Sei $w \in A^n$ beliebig.

Fall 1: $w = aw'$ für ein $w' \in A^*$:

$|f(w')| = |w'| + |w'|_a - |w'|_b$

$f(w) = \text{aa} \cdot f(w') = |f(w')| + 2 = |w'| + |w'|_a + 2 - |w'|_b$

$|w| = |w'| + 1$

w ist bis auf die a's am Anfang bzw. Ende mit w' identisch.
$\Rightarrow f(w) = |w'| + |w'|_a + 2 - |w'|_b$
$= |w| - 1 + |w'|_a + 2 - |w|_b$
$= |w| - 1 + |w|_a - 1 + 2 - |w|_b$
$= |w| + |w|_a - |w|_b$ ■

Fall 2: $w = bw'$ für ein $w' \in A^*$:

$f(w) = f(w')$

$|w| = |w'| + 1$

$|w|_b = |w'| + 1$
$\Rightarrow f(w) = |w'| + |w'|_a - |w'|_b$
$= |w| - 1 + |w'|_a - |w'|_b$
$= |w| - 1 + |w|_a - |w|_b + 1$
$= |w| + |w|_a - |w|_b$ ■

Fall 3: $w = cw'$ für ein $w' \in A^*$:

$f(w) = f(w') \cdot c$

$|w| = |w'| + 1$

$|w|_c = |w'| + 1$

$\Rightarrow f(w) = |f(w')| + 1$

$\Rightarrow f(w) = |w'| + |w'|_a - |w'|_b + 1$
$= |w| - 1 + |w'|_a - |w'|_b + 1$
$= |w| + |w|_a - |w|_b$ ■

Aufgabe 3

a.

$f(\text{abcac}) = \text{abcacbcbcacba}$

b.

zz: $\forall w \in A^* : |f(w)| \leq 3 \cdot 2^{\frac{|w|}{2}} - 3$

Induktionsanfang 1: $|w| = 0$

$f(\varepsilon) = \varepsilon$

$|f(\varepsilon)| = 0 \leq 3 \cdot 2^{\frac{0}{2}} - 3 = 3 - 3 = 0$

Induktionsanfang 2: $|w| = 1$

$f(w) = w$

$|f(w)| = 1 \leq 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 3 \approx 1,24$

Induktionsvoraussetzung: $n > 1 : \forall w \in A^* : |w| = n - 1 : |f(w)| \leq 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 3$

Induktionsschritt: $|w| = n$

$w = xw'y$ mit $x, y \in A, w' \in A^*$

$f(w) = x \cdot f(w') \cdot y \cdot f(w') \cdot x$

$|f(w)| = 1 + |f(w')| + 1 + |f(w')| + 1 = 3 + 2 * |f(w')|$

$|w'| = |w| - 2$

$|f(w')| = 3 \cdot 2^{\frac{|w|-2}{2}} - 3$

$\Rightarrow |f(w)| = 3 + 2 * \left(3 \cdot 2^{\frac{|w|-2}{2}} - 3\right)$
$= 6 \cdot 2^{\frac{|w|-2}{2}} - 3$
$= 3 \cdot 2^{\frac{|w|-2}{2}+1} - 3$
$= 3 \cdot 2^{\frac{|w|}{2}} - 3$■

c.

zz: $f(w)$ ist ein Palindrom

Induktionsanfang 1: $|w| = 0$

$f(\varepsilon) = \varepsilon$

Das leere Wort ist ein Palindrom.

Induktionsanfang 2: $|w| = 1$

$f(w) = w$

Ein Zeichen ist ein Palindrom.

Induktionsvoraussetzung: $n > 2 : \forall w \in A^* : |w| = n - 2 : f(w)$ ist ein Palindrom

zz: $\forall w \in A^* : |w| = n : f(w)$ ist ein Palindrom

$w = xw'y$ mit $x, y \in A, w' \in A^*$

$|w'| = n - 2$

$f(w')$ ist ein Palindrom (Induktionsvoraussetzung)

$f(w) = x \cdot f(w') \cdot y \cdot f(w') \cdot x$

x, y sind ebenfalls Palindrome.

Rückwärts gelesen: $x \cdot f(w') \cdot y \cdot f(w') \cdot x = f(w)\blacksquare$

Aufgabe 4

a.

Hilfsfunktion $f : \Sigma \to A^*$:

$f(a) = \begin{cases} a=\varepsilon \vee a \notin A : \varepsilon \\ a \in A : a \end{cases}$

$l(w) = \begin{cases} w=\varepsilon : \varepsilon \\ \text{ansonsten}: w=w' \cdot a : l(w') \cdot f(a) \end{cases}$

b.

zz: $f(w) \in B^*$

Induktionsanfang: $|w| = 0$

ε enthält keinen Punkt.

$\Rightarrow f(w) = w$

Induktionsvoraussetzung: $n > 0 : \forall w \in B^* : |w| = n - 1 : f(w) \in B^*$

Induktionsschritt: $|w| = n$

Fall 1: w enthält keinen Punkt

$f(w) = w$

Damit ist $f(w)$ in $B^*\blacksquare$.

Fall 2: w enthält mindestens einen Punkt

Da sowohl w_1 als auch w_2 kürzer als w sind, sind sie nach Induktionsvoraussetzung in B^*.

Damit ist auch $f(w_2)$ in B^*.

Da kein Punkt in $(w_1)f(w_2)$ hinzugefügt wird, ist auch $f(w)$ in $B^*\blacksquare$.

c.

zz: $|f(w)| = |w| - |w|_.$

Induktionsanfang: $|w| = 0$

$|f(\varepsilon)| = |\varepsilon| = 0 = 0 - 0$

Induktionsvoraussetzung: $n > 0 : \forall w \in B^* : |w| = n - 1 : |f(w)| = |w| - |w|_.$

Induktionsschritt: $|w| = n$

Fall 1: w enthält keinen Punkt

$f(w) = w$

Da w keinen Punkt enthält, ist $|w|_. = 0$.

$|f(w)| = |w| = |w| - 0\blacksquare$.

Fall 2: w enthält mindestens einen Punkt

$|f(w)| = |w_1 f(w_2)|$

$= |w_1| + |f(w_2)|$

$|f(w_2)| = |w_2| - |w_2|_.$ (Induktionsvoraussetzung)

Da w_1 keinen Punkt enthält, ist $|w_2|_. + 1 = |w|_.$

$|f(w)| = |w_1| + |w_2| - |w_2|_. + 1 = |w_1| + |w_2| - |w|_. + 1$

$|w| = |w_1| + 1 + |w_2|$

$|f(w)| = |w| - |w|_.$ $\blacksquare$.

d.

Das Problem liegt darin, dass die Behauptung für **ein** Wort der Länge $2n + 1$ gezeigt wird, nicht für jedes, wie es eigentlich notwendig wäre. Damit gilt auch die Induktionsvoraussetzung (die außerdem nicht angegeben wurde) nicht und die gesamte Induktion bricht zusammen.

Gegenbeispiel:

$w = ()(())$.

$z = ()(())$

$z(2) =)$

$z(6 + 1 - 2) =) = z(2)$