

GBI WS 24/25 – Übungsblatt 0

Abgabe: Fr. 1.11.24, 9:30 (Ilias), behandelte Stoff: bis Fr. 25.10.24

Blatt 0 ist freiwillig und gibt Bonuspunkte.

Aufgabe 1

1 Punkt

- (a) Findet eine Lerngruppe und eine:n Abgabepartner:in. Beachtet dabei, dass die Übungsblätter in GBI nur in Zweiertteams abgegeben werden dürfen.
- (b) Fertigt eine Abgabe für dieses Übungsblatt an. Schreibt insbesondere beide euren Namen und eure Matrikelnummer lesbar auf eure Abgabe. Abgaben sind sowohl handschriftlich (Tablet, Scan/Foto) als auch getippt erlaubt.
- (c) Tretet dem Ilias-Kurs für GBI bei und findet darin den Ordner eures Tutoriums. Ladet eure Abgabe in Form von *genau einer* PDF-Datei als Zweier-Team im Ilias-Ordner eures Tutoriums hoch. Wichtig: Nur eine:r von euch muss die Abgabedatei hochladen!

Aufgabe 2

0.5 + 0.5 + 1 + 1 = 3 Punkte

Aussagen der Form „Für beliebige... gilt...“ können durch Angabe eines einzigen Gegenbeispiels widerlegt werden. Die folgenden Aussagen sind allesamt falsch. Zeigt dies, indem ihr für jede der Aussagen ein Gegenbeispiel angebt.

- (a) Für beliebige Mengen A, B gilt $(A \cup B) \setminus B = A \cup (B \setminus B)$.
- (b) Für beliebige Mengen A, B gilt $|A \times B| \geq |A|$.
- (c) Für beliebige Mengen A, B, C gilt: Wenn $A \cap B \neq \emptyset$ und $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$, dann $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.¹
- (d) Für jede beliebige Menge A und jede beliebige Teilmenge $B \subseteq A$ gilt $B \notin A$.²

¹ $A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Wieso gilt das?

²In einer älteren Version des Übungsblatts war diese Aufgabe noch anders. Wenn ihr die alte Version bearbeitet habt, könnt ihr stattdessen auch die Lösung dazu abgeben.

Aufgabe 3

2 Punkte

Erklärt folgende Aussage in natürlicher Sprache und mit eigenen Worten. Schreibt dabei **nicht** einfach nur die mathematischen Symbole aus.

$$\forall V \text{ endliche Menge: } \forall E \subseteq V \times V: |E| = \sum_{v \in V} |\{(v, w) \mid (v, w) \in E\}|,$$

wobei \forall „für alle“ bedeutet und $\sum_{v \in V}$ die Summe über alle Elemente in V ist.

Aufgabe 4

0.5 + 1.5 + 2 = 4 Punkte

Der Superbösewicht Dr. Meta möchte mit seinen Kompliz:innen Alice und Bob kommunizieren und hat sich dafür eine Geheimsprache ausgedacht: **Dr. Meta sendet ein Wort bestehend aus den Zeichen A , B und C an Alice und Bob, die das dann mithilfe folgender Tabelle zu einem Wort bestehend aus den Zeichen 0 und 1 übersetzen.**

	A	B	C
Alice	1	011	01
Bob	0110	01	1

Zum Beispiel sendet Dr. Meta das Wort $ABCA$ und Alice übersetzt das zu 1011011, während Bob das gleiche Wort zu 01100110110 übersetzt. Damit Alice und Bob keine Nachrichten entschlüsseln können, die an die jeweils andere Person gerichtet sind, kennt jeder von ihnen nur seine/ihre eigene Tabellenzeile. Manchmal möchte Dr. Meta allerdings an beide die gleiche Nachricht schicken. Deshalb fragt er sich, ob es möglich ist, das gleiche Wort aus den Zeichen A , B und C an beide Kompliz:innen zu schicken, sodass beide dieses Wort zum gleichen Wort aus 0en und 1en übersetzen. Er beauftragt euch als seine Assistent:innen, das herauszufinden.

- Findet ein Wort bestehend aus den Zeichen A , B und C , das von Alice und Bob zu dem gleichen Wort bestehend aus den Zeichen 0 und 1 übersetzt wird. Gebt sowohl das Wort als auch die Übersetzung an.
- Wir bezeichnen Dr. Metas Geheimsprache als *inklusionsminimal*, wenn es so ein Wort wie in der vorherigen Teilaufgabe gibt, das von Alice und Bob zu dem gleichen Wort übersetzt wird, aber egal welche Spalte wir aus der Tabelle löschen, es kein solches Wort mehr gibt. Zeigt, dass Dr. Metas Geheimsprache inklusionsminimal ist. Dafür müsst ihr zeigen, dass es für die drei möglichen Tabellen, die nur aus zwei der drei Spalten A, B, C bestehen, kein solches Wort gibt.
- Dr. Meta möchte gerne mehr solche Wörter haben, die von beiden Kompliz:innen zum selben Wort übersetzt werden. Er denkt sich: je mehr Spalten die Tabelle hat, desto mehr solche Wörter wird es wohl auch geben. Deshalb denkt er sich eine neue Übersetzungstabelle aus:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>
Alice	111	0	1	1	0	1	0111	0	01	1011
Bob	1	11100	01	1110	11101	0	0	1011	11010	00

Findet auch für diese Übersetzungstabelle ein Wort bestehend aus Zeichen *A* bis *J*, das von Alice und Bob zu dem gleichen Wort bestehend aus den Zeichen 0 und 1 übersetzt wird. Gebt sowohl das Wort als auch die Übersetzung an.

Tipp: Sind mehr Spalten wirklich immer besser? Findet ihr Gründe dafür, dass manche der Spalten überflüssig sind?