GBI WS 24/25 – ÜBUNGSBLATT 2

DANIEL MEIBORG 2599041 AND JAN MANSEL 2599265

Aufgabe 1

a.

Nein, da für $|w_1| = |w_2|$ die Abbildung nicht definiert ist.

b.

Nein, da für $|w_1| = |w_2|$ die Abbildung sowohl als $w_1 \cdot w_2$ als auch $w_2 \cdot w_1$ definiert ist.

c.

$\odot'' \rightarrowtail \begin{cases} w_1 \cdot w_2 & \text{falls } |w_1| < |w_2| \\ w_2 \cdot w_1 & \text{falls } |w_1| \geq |w_2| \end{cases}$

Die Abbildung ist wohldefiniert, da es für jede Kombination von $|w_1|$ und $|w_2|$ eine eindeutige Zuordnung gibt (die natürlichen Zahlen sind geordnet).

d.

$f(w) = \prod_{n=1}^{|w|} w(|w| - n + 1)$

Aufgabe 2

a.

linkstotal.

Nein

Es gibt Menschen, die niemandes Großvater sind.

rechtstotal.

Nein

Es gibt Menschen, die keine Großväter haben, die zur Zeit der Veröffentlichung des Übungsblatts noch am Leben sind.

linkseindeutig.

Nein

Es gibt Menschen, die mehrere Großväter haben.

rechtseindeutig.

Nein

Es gibt Menschen, die von mehreren Enkeln Großvater sind.

b.

linkstotal.

Ja

Es gibt keine Studierenden am KIT, die nicht in einem Studiengang eingeschrieben sind.

rechtstotal.

Ja

Es gibt (vermutlich?) keine Studiengänge am KIT, in die niemand eingeschrieben ist.

linkseindeutig.

Nein

Die meisten Studiengänge am KIT haben mehrere Studierende.

rechtseindeutig.

Nein

Es gibt Studierende, die in mehreren Studiengängen eingeschrieben sind.

c.

linkstotal.

Ja

Jedes Gericht hat einen Geldbetrag.

rechtstotal.

Nein

es gibt Geldbeträge (z.B. 1000000€), die kein Gericht in der Mensa haben.

linkseindeutig.

Nein

Es gibt Gerichte, die gleich viel kosten.

rechtseindeutig.

Ja

Die Gerichte in der Mensa haben einen eindeutigen Geldbetrag.

d.

linkstotal.

Ja

Jeder Studierende hat eine Matrikelnummer.

rechtstotal.

Nein, es gibt nicht so viele Studierende wie mögliche Matrikelnummern, *linkseindeutig.*

Ja

Jeder Studierende hat eine eindeutige Matrikelnummer.

rechtseindeutig.

Ja

Die Matrikelnummer ist per Design eindeutig.

Aufgabe 3

a.

R_1 ist konfluent, da für jedes $y \in M$ (also a oder b) für $z = a$ (a, a) und (b, a) in R_1 sind

b.

R_2 ist konfluent, da die Bedingung $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ nie erfüllt ist.

c.

R_3 ist konfluent: für jedes $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ ist $|x| + 1 = |y_1| = |y_2|$ und es gibt ein $z = y_1 \cdot a \in A^*$ mit $(y_1, z), (y_2, z) \in R$ da $|y_1 \cdot a| = |y_1| + 1 = |y_2| + 1$.

d.

R_4 ist nicht konfluent: Gegenbeispiel: $x = a, y_1 = \text{aa}, y_2 = \text{ab}$. Ein z müsste sowohl „aba“ als auch „abx“ (für ein beliebiges $x \in A$) entsprechen. Das ist nicht möglich.

e.

zz: jede symmetrische Relation ist auch konfluent

für jedes $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ gilt $\exists z = x \in M : (y_1, z), (y_2) \in R$ da R symmetrisch ist.

f.

Beweis durch Gegenbeispiel: $R = \{(x, y) \mid x = a^n, y = a^{n+1} mn \in \mathbb{N}\} = \{(a, \text{aa}), (\text{aa}, \text{aaa}), ...\}$

Die Relation ist konfluent, da aus $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ $y_1 = y_2$ folgt. z ist dann $y_1 \cdot a$. Die Relation ist aber nicht symmetrisch.

Aufgabe 4

a.

ggegehgehegeheissisinsinm

b.

$\text{substr}(w, i, j) = \begin{cases} i \le j \le |w| : \prod_{n=i}^{j} w(n) \\ \text{ansonsten:} \varepsilon \end{cases}$

c.

$A'(w) = \prod_{n=1}^{|w|} \mathrm{substr}(w, 1, n)$

d.

$A(w) = A'\Big(\mathrm{substr}\Big(w, 1, \Big\lceil \frac{|w|}{2} \Big\rceil\Big)\Big) \cdot A'\Big(\mathrm{spiegeln}\Big(\mathrm{substr}\Big(w, \Big\lceil \frac{|w|}{2} \Big\rceil, |w|\Big)\Big)\Big)$