GBI WS 24/25 – Übungsblatt 3

Abgabe: Fr. 22.11.24, 9:30 (Ilias)

In der Übung findet ihr wie immer Beispielaufgaben mit Lösungen, außerdem findet ihr dort und in Aufgabe 2 eine Beweisvorlage für Induktionen.

Aufgabe 1 **$2 + 2 = 4$ Punkte**

(a) Wählt das kleinstmögliche $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass die folgende Aussage gilt und beweist sie mit vollständiger Induktion.

Behauptung 1. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gilt $n + 4 < n^2$.*

(b) Sei $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit $f(1) = 0$ und $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$. Zeigt mittels vollständiger Induktion die folgende Aussage.

Behauptung 2. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $f(n) \leq \log_2(n)$.*

Aufgabe 2 **$0.5 + 2.5 = 3$ Punkte**

Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b, c\}$ und die Funktion $f\colon A^* \to A^*$, die wie folgt induktiv definiert sei:

$$f(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ aa \cdot f(w') & \text{falls } w = aw' \text{ für ein } w' \in A^* \\ f(w') & \text{falls } w = bw' \text{ für ein } w' \in A^* \\ f(w') \cdot c & \text{falls } w = cw' \text{ für ein } w' \in A^* \end{cases}$$

(a) Berechnet $f(abcac)$.

Für ein Zeichen $x \in A$ und ein Wort $w \in A^*$ bezeichne $|w|_x$ die Anzahl, wie oft das Zeichen x im Wort w vorkommt. Zum Beispiel ist $|bacaaba|_a = 4$, $|bacaaba|_b = 2$ und $|bacaaba|_c = 1$.

(b) Beweist mit vollständiger Induktion, dass für alle Wörter $w \in A^*$ gilt: $|f(w)| = |w| + |w|_a - |w|_b$, indem ihr die Lücken ausfüllt.

Beweis. Wir beweisen die folgende Aussage: ____________________(1).

Dazu machen wir eine vollständige Induktion über ____________________(2).

Induktionsanfang: Für $n =$ ____________________(3).

Induktionsschritt: Sei $n >$ ____ (4) beliebig. Wir zeigen, dass ____________(5)

und verwenden dabei die Induktionsvoraussetzung, nämlich ____________(6).

Sei $w \in A^n$ beliebig. ____________________ (7). □

Hinweise zu den Lücken:

Die angegebenen Striche haben nicht notwendigerweise die richtige Länge.

(1) Die Aussage muss die Variable enthalten, über die ihr induziert.

(5) Die Aussage, die ihr im Induktionsschritt zeigt.

(6) Induktionsvoraussetzung formulieren.

(7) Der Beweis des Induktionsschritts.

Aufgabe 3

1 + 3 + 3 = 7 Punkte

Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b, c\}$ und die Funktion $f\colon A^* \to A^*$, die wie folgt induktiv definiert sei:

$$f(w) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } w = \varepsilon \\ w & \text{falls } |w| = 1 \\ x \cdot f(w') \cdot y \cdot f(w') \cdot x & \text{falls } w = xw'y \text{ mit } x, y \in A \text{ und } w' \in A^*. \end{cases}$$

(a) Berechnet $f(abcac)$.

(b) Beweist mit vollständiger Induktion, dass für alle Wörter $w \in A^*$ gilt: $|f(w)| \leq 3 \cdot 2^{|w|/2} - 3$.

(c) Zeigt mittels vollständiger Induktion, dass $f(w)$ ein *Palindrom* ist für jedes Wort $w \in A^*$. Ein Wort z wird (genau dann) als Palindrom bezeichnet, wenn es vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist, d.h. wenn $z(i) = z(n + 1 - i)$ für $n = |z|$ und alle $i \in [\lfloor n/2 \rfloor]$.

Aufgabe 4 **$1 + 2 + 2 + 1 = 6$ Punkte**

Dr. Meta kommen seine Geheimsprachen alle zu unsicher vor. Um absolut abhörsichere Nachrichten zu verschicken, entscheidet er sich, einfach allen Inhalt zu löschen und nur noch die Satzzeichen zu verschicken. Als Satzzeichen verwendet Dr. Meta nur die Klammern `(` und `)` sowie den Punkt $\bullet$. Die Klammern werden hierbei wie üblich als Paare aus einer öffnenden und einer schließenden Klammer verwendet.
Beispiel:

> `In GBI (Grundbegriffe der Informatik (eine Erstsemestervorlesung für Informatik (und viele weitere Studiengänge) am KIT (Karlsruher Institut für Technologie))) lernt man Graphen kennen (aber erst später im Semester)`$\bullet$ `Damit kann man zum Beispiel Netzwerke modellieren (wie soziale Netzwerke) oder Zusammenhänge darstellen (wie die Abhängigkeit zwischen Vorlesungskapiteln (zum Beispiel GBI Kapitel))`$\bullet$

wird zu $\texttt{((()()))()}\bullet\texttt{()(())}\bullet$

Die Menge aller Wörter, die so entstehen können, bezeichnen wir mit L. Für das Alphabet $A = \{\texttt{(}, \texttt{)}, \bullet\}$ gilt also $L \subsetneq A^*$, z.B. ist $\texttt{)(}\bullet$ nicht in L. Sei außerdem Σ das Alphabet bestehend aus allen Buchstaben (inkl. ä,ö,ü, groß und klein) und allen Satzzeichen, sowie dem Leerzeichen.

(a) Gebt eine (formale Definition einer) Funktion $\ell\colon \Sigma^* \to A^*$ an, die aus einem gegebenen Wort alle Zeichen löscht, die nicht in A sind.

Die Punkte scheinen Dr. Meta nun auch unnötig. Stattdessen will er die Sätze lieber in Klammern einschließen. Er definiert dafür also die folgende Funktion $f\colon L \to B^*$ mit $B = \{\texttt{(}, \texttt{)}\}$.

$$
\begin{aligned}
f(w) &= w && \text{für Wörter } w \text{, die kein } \bullet \text{ enthalten.}\\
f(w_1 \bullet w_2) &= \texttt{(}w_1\texttt{)}\, f(w_2) && \text{wobei } w_1 \text{ kein } \bullet \text{ enthält}
\end{aligned}
$$

Die Funktion f bildet also $\texttt{((()()))()}\bullet\texttt{()(())}\bullet \in L$ auf $\texttt{(((()()))())(()(()))}$ ab.

(b) Zeigt mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Punkten in w, dass für jedes Wort $w \in L$ gilt $f(w) \in B^*$.

(c) Sei w ein beliebiges Wort aus L. Wie lang ist $f(w)$ in Abhängigkeit von der Länge von w und der Anzahl Punkte in w? Die Länge von w wird mit $|w|$ bezeichnet und die Anzahl der Punkte in w wird mit $|w|_\bullet$ bezeichnet. Beweist eure Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Dr. Meta verschickt nun einige Nachrichten und beobachtet, dass seine Nachrichten immer mit `(((` beginnen und mit `)))` enden. Daraufhin stellt er folgende **falsche** Behauptung auf. Da er den Beweis für knifflig hält, bittet er seinen KI-Assistenten um einen Beweis, den er unhinterfragt glaubt.

(d) Erklärt, warum der folgende **falsche** Beweisversuch **keine** vollständige Induktion ist. Gebt zusätzlich ein Gegenbeispiel an.

Hinweis 1*: Es genügt nicht, nur zu zeigen, dass die Behauptung falsch ist. Ihr müsst den Fehler im Beweis finden. Orientiert euch hierzu an einem Beispiel aus der Vorlesung.*

Hinweis 2*: Um die Aufgabe nicht zu kompliziert zu machen, haben wir den Beweis knapp gehalten und einen größeren Schritt ausgelassen. In ausgelassenen Schritten müsst ihr keinen Fehler suchen.*

Hinweis 3*: Verwendet den folgenden **falschen** Beweis **nicht** als Vorlage für eure eigenen Beweise, da er grundlegende Fehler bei der Anwendung von vollständiger Induktion enthält, die sich übertragen würden! Verwendet stattdessen die Vorlagen aus der Übung oder in Aufgabe* 2 *als Grundlage für eure eigenen Beweise.*

Falsche Behauptung 3. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$, sei $w \in L$ ein Wort der Länge $2n+1$, wobei das letzte Zeichen ein Punkt ist, und sei $z = f(w)$. Dann gilt $z(i) \neq z(m+1-i)$ für $m = |z|$ und $i \in [3]$.*

Falscher Beweis. Wir zeigen die Behauptung für jedes Wort $w \in L$ der Länge $2n+1$ mit vollständiger Induktion über n.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, also $w = \texttt{()}\bullet$. Dann ist $z = f(w) = \texttt{(())}$. Es gilt also $z(1) = z(2) = \texttt{(} \neq \texttt{)} = z(3) = z(4)$, also stimmt die Behauptung für $i \in [2]$, außerdem gilt für $i = 3$, dass $z(i) = z(3) = \texttt{)} \neq \texttt{(} = z(2) = z(4+1-i)$.

Induktionsschritt: Sei $n > 1$ beliebig. Wir zeigen die Behauptung für ein Wort aus L der Länge $2n+1$. Sei $w' \in L$ ein beliebiges Wort der Länge $2(n-1)+1$ mit und $w' = w''\bullet$ für ein $w'' \in A^*$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für $z' = f(w')$, dass $z'(i) \neq z'(m'+1-i)$ für $m' = |z'|$ und $i \in [3]$. Sei nun $w = \texttt{(}w''\texttt{)}\bullet$. Es gilt $w \in L$ und $|w| = |w'| + 2 = 2n+1$. Für $z = f(w)$ folgt nun (ohne Beweis), dass $z(i) \neq z(m+1-i)$ für $m = |z|$ und $i \in [3]$. ⊠