Karlsruher Institut für Technologie

31. Oktober 2024
Institut für Analysis
Dr. Patrick Tolksdorf
Henning Heister

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 02

Abgabe: 08. November 2024, 13 Uhr

Aufgabe 1 (K) $1 + 1 + 3 = 5$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe müssen und sollen nur die Endergebnisse abgegeben werden, der Rechen- beziehungsweise Beweisweg wird nicht bewertet.*

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Ist I das Intervall $[a, b)$, so ist b Supremum von I. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent?

- (i) b ist eine reelle Zahl, die eine obere Schranke für alle Elemente von I ist.
- (ii) b ist ein Element von I, das eine obere Schranke für alle Elemente von I ist.
- (iii) b ist eine obere Schranke von I und es gibt keine kleinere obere Schranke von I.
- (iv) Jede dieser Aussagen.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und $a \in \mathbb{R}$. Was ist das stärkste[1] der folgenden logischen Symbole, das anstelle von $\square$ im Ausdruck

a ist Supremum von M $\square$ a ist Maximum von M

eingesetzt werden kann, sodass eine wahre Aussage entsteht?

- (i) $\Longrightarrow$
- (ii) $\Longleftarrow$
- (iii) $\Longleftrightarrow$
- (iv) Keines von diesen

(c) Eine Zahl $a > 0$ mit $a^2 = b$ heißt Quadratwurzel von b. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (i) Keine Zahl $b \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$ hat eine Quadratwurzel in $\mathbb{Q}$.
- (ii) Es gibt Zahlen $b \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$, die keine Quadratwurzel in $\mathbb{Q}$ haben.
- (iii) Es gibt Zahlen $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$, die keine Quadratwurzel in $\mathbb{R}$ haben.

Aufgabe 2 (K) $3+3+4 = 10$ Punkte. *Bei dieser Aufgabe ist der gesamte Rechen- beziehungsweise Beweisweg abzugeben.*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = n/6 + n^2/2 + n^3/3$ eine natürliche Zahl.

[1] Hier sei eine Implikation stärker als keine Implikation und eine Äquivalenz stärker als eine Implikation.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(c) Es sei $\tilde{A}(n)$ eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und folgende zwei Eigenschaften besitzt:

  (i) $\tilde{A}(1)$ ist wahr,

  (ii) Ist $N \in \mathbb{N}$ und $\tilde{A}(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$, so ist auch $\tilde{A}(N+1)$ wahr.

Zeigen Sie, dass dann $\tilde{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\qquad x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x^n \leq y^n.$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt
$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Seien $x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty)$. Dann gilt die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung
$$\prod_{j=1}^{n} (1 + x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

(b) Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ eine ganze Zahl.

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$.

Bei der Lösung dieses Blattes ist, sofern nicht anders angegeben, nur das Material zu verwenden, das bis zum 31. Oktober 2024 in Vorlesung oder Übung oder auf diesem oder einem vorherigen Übungsblatt der Höheren Mathematik I behandelt wurde.