LA WS 24/25 – ÜBUNGSBLATT 2

DANIEL MEIBORG 2599041

Aufgabe 2

a.

injektiv.

$f = (x, y) \Rightarrow x + y$

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow ?\, x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Nicht injektiv, da $f(1, 2) = f(2, 1)$

surjektiv.

$\forall z \in \mathbb{R} : \exists x, y \in \mathbb{R} : x + y = z$

Für $y = 0$ und $x = z$ ist $x + y = z \Rightarrow$ surjektiv.

Umkehrabbildung: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x) \to (x, 0)$

b.

$f = (x, y) \Rightarrow (x + 2y, 2x - y)$

injektiv.

$x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 \wedge 2x_1 - y_1 = 2x_2 - y_2 \Rightarrow ?\, x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Umformen der Gleichungen:

$x_1 = x_2 + 2y_2 - 2y_1$

$\Leftrightarrow 2x_2 + 2y_2 - 4y_1 - y_1 = 2x_2 - y_2$

$\Leftrightarrow y_2 - 5y_1 = 0$

$\Leftrightarrow y_2 = 5y_1$

Somit ist f nicht injektiv.

surjektiv.

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 2y = z_1 \wedge 2x - y = z_2$

$-5y = z_2 - 2z_1$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{5}z_1 - \frac{z_2}{5}$

$-3x = z_1 - 2z_2$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}z_2 - \frac{z_1}{3}$

Somit ist f surjektiv.

Umkehrabbildung: $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (z_1, z_2) \to \left(\frac{2}{3}z_2 - \frac{z_1}{3}, \frac{2}{5}z_1 - \frac{z_2}{5}\right)$

c.

$f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}_{+},x\to x^{2}+1$

injektiv.

$x_{1^2}+1=x_{2^2}+1\Rightarrow ?\,x_1=x_2$

$x_{1^2}=x_{2^2}$

Da $x_1,x_2\in R_{+}$, ist $x_1=x_2$ und f somit injektiv.

Umkehrabbildung: $g:R_{+}\to R_{+},x\to\sqrt{x-1}$

surjektiv.

Nein, da $f(x)\geq 1$ für alle $x\in R_{+}$.

d.

$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},(x,y)\to(2x+y,x+y)$

injektiv.

$2x_1+y_1=2x_2+y_2\wedge x_1+y_1=x_2+y_2\Rightarrow ?\,x_1=x_2\wedge y_1=y_2$

surjektiv.

$\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:\exists(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:2x+y=z_1\wedge x+y=z_2$

$x=z_1-z_2$

$-y=z_1-2z_2$

$y=2z_2-z_1$

Somit ist f surjektiv.

Umkehrabbildung: $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},(z_1,z_2)\to(z_1-z_2,2z_2-z_1)$

Aufgabe 3

$f:M\to N$

a.

zz: $\forall B\subset N:f\big(f^{-1}(B)\big)\subseteq B$

Angenommen, es gibt ein $a\in B$ sodass $f\big(f^{-1}(a)\big)\neg\in B$

Per Definition der Umkehrfunktion $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}$

$\Rightarrow f\big(f^{-1}(a)\big)=a$

Da $a\in B$ angenommen ist, ist $f\big(f^{-1}(a)\big)\in B$ was ein Widerspruch ist. ■

b.

zz: f surjektiv $\Leftrightarrow\forall B\subset N:f\big(f^{-1}(B)\big)=B$

$\Rightarrow$.

Aus a folgt, dass $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$

Da f surjektiv ist, gibt es für jedes $a \in B' = f^{-1}(B)$ ein $b \in B$ sodass $f(b) = a$.