GBI WS 24/25 – Übungsblatt 2

Abgabe: Fr. 15.11.24, 9:30 (Ilias)

Aufgabe 1

1+1+1+2 = 5 Punkte

Sei A ein Alphabet.

(a) Sei $\odot\colon A^* \times A^* \to A^*$
$$(w_1, w_2) \mapsto \begin{cases} w_1 \cdot w_2 & \text{falls } |w_1| < |w_2| \\ w_2 \cdot w_1 & \text{falls } |w_1| > |w_2| \end{cases}$$
Ist die Abbildung $\odot$ *wohldefiniert*? Begründet eure Antwort.

(b) $\odot'\colon A^* \times A^* \to A^*$
$$(w_1, w_2) \mapsto \begin{cases} w_1 \cdot w_2 & \text{falls } |w_1| \leq |w_2| \\ w_2 \cdot w_1 & \text{falls } |w_1| \geq |w_2| \end{cases}$$
Ist die Abbildung $\odot'$ *wohldefiniert*? Begründet eure Antwort.

(c) Gebt eine *wohldefinierte* Abbildung $\odot''$ an, die $w_1 \cdot w_2$ ausgibt, wenn $|w_1| < |w_2|$, und $w_2 \cdot w_1$, wenn $|w_1| \geq |w_2|$ und begründet kurz, warum eure Funktion wohldefiniert ist.

(d) Gebt eine formale Definition (ohne Pünktchen) für eine Funktion f an, die ein Wort spiegelt, d.h. $f(w) = w(|w|) \dots w(2)w(1)$ für alle Wörter $w \in A^*$.

Aufgabe 2

1+1+1+1 = 4 Punkte

Gebt für die folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig sie erfüllen und welche nicht und begründet eure Antwort.

(a) $R_1 = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist der Großvater von } y\}$, wobei M die Menge aller Menschen, die aktuell (zur Veröffentlichung des Übungsblatts) leben, ist.

(b) $R_2 = \{(x, y) \in S \times G \mid x \text{ studiert } y\}$, wobei S die Menge aller aktuellen Studierenden am KIT ist und G die Menge aller Studiengänge am KIT.

(c) $R_3 = \{(x, y) \in M \times P \mid x \text{ kostet } y \text{ für Studierende}\}$, wobei M die Menge aller Mensagerichte ist, die am 13.11.2024 angeboten werden, und P die Menge aller möglichen Geldbeträge in € ist.

(d) $R_4 = \{(x, y) \in S \times M \mid x \text{ hat Matrikelnummer } y\}$, wobei S die Menge aller aktuellen Studierenden am KIT ist und M die Menge aller Wörter der Länge 7 über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Aufgabe 3 — **1+1+1+1+1+1 = 6 Punkte**

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt genau dann *konfluent*[1], wenn

$$\forall x \in M \forall y_1, y_2 \in M : \text{ wenn } (x, y_1), (x, y_2) \in R, \text{ dann } \exists z \in M : (y_1, z), (y_2, z) \in R.$$

Begründet für jede der folgenden Relationen, ob sie konfluent ist oder nicht.

(a) $R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ auf der Menge A

(b) $R_2 = \emptyset$ auf der Menge A

(c) $R_3\{(v, w) \in A^* \times A^* \mid |w| = |v| + 1\}$ auf der Menge A^*

(d) $R_4 = \{(v, w) \in A^* \times A^* \mid v \text{ ist ein Präfix von } w\}$ auf der Menge A^*, wobei v genau dann ein Präfix von w ist, wenn es ein Wort $w' \in A^*$ gibt mit $w = v \cdot w'$.

Eine Relation R auf einer Menge M heißt *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: Wenn $(x, y) \in R$, dann auch $(y, x) \in R$.

(e) Beweist, dass jede symmetrische Relation auch konfluent ist.

(f) Beweist, dass die Umkehrung nicht gilt, also dass folgende Aussage nicht gilt: Jede konfluente Relation ist auch symmetrisch.

Aufgabe 4 — **1+2+1+1 = 5 Punkte**

Der Superbösewicht Dr. Meta ist zurück und hat sich diesmal eine praktikablere Geheimsprache als auf Übungsblatt 0 ausgedacht. Dieses Mal werden keine umständlichen Übersetzungstabellen benötigt, sondern jedes Wort wird mit einer für alle beteiligten bekannte Funktion $/\!\!\Lambda\!\!\backslash$ auf ein anderes Wort abgebildet. Damit Dr. Meta seine Funktion implementieren kann, braucht er zuerst eine formale Definition davon. Diese Aufgabe überträgt er an euch und beschreibt euch wie folgt, wie er sich die Funktion vorstellt:

Die Funktion soll für Wörter aus dem lateinischen Alphabet $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$ mit 26 Zeichen (nur Kleinbuchstaben, keine Umlaute) definiert sein, d.h. $/\!\!\Lambda\!\!\backslash \colon A^* \to A^*$. Die Funktion $/\!\!\Lambda\!\!\backslash$ soll ein gegebenes Wort w in zwei gleichlange Teile w_1, w_2 aufteilen, d.h. $w = w_1 \cdot w_2$ mit $|w_1| = |w_2|$, falls $|w|$ gerade ist, und $|w_1| = |w_2| + 1$, falls $|w|$ ungerade ist. Dann soll die Funktion $/\!\!\Lambda\!\!\backslash' \colon A^* \to A^*$ auf w_1 angewendet werden, die wie folgt funktioniert: $/\!\!\Lambda\!\!\backslash'(w) = w(1) \cdot w(1)w(2) \cdot w(1)w(2)w(3) \cdot \cdots \cdot w$. Außerdem wird $/\!\!\Lambda\!\!\backslash'$ auf das

[1] Solche Relationen treten bei Termersetzungssystemen auf, die von funktionalen Programmiersprachen zum Musterabgleich benutzt werden.

Spiegelwort (Definition siehe Aufgabe 1 (d)) von w_2 angewendet werden. Dann ist $\Lambda\!\!\Lambda(w)$ die Konkatenation dieser beiden Ergebnisse.

Ein Beispiel: Das Wort $w = \texttt{informatik}$ wird aufgeteilt in $w_1 = \texttt{infor}$ und $w_2 = \texttt{matik}$. Dann wird $\Lambda\!\!\Lambda'$ auf w_1 und auf das Spiegelwort von w_2 angewendet mit dem Ergebnis $\Lambda\!\!\Lambda'(w_1) = \texttt{iininfinfoinfor}$ und $\Lambda\!\!\Lambda'(f(w_2)) = \texttt{kkikitkitakitam}$. Die beiden Wörter werden dann konkateniert, sodass $\Lambda\!\!\Lambda(w) = \texttt{iininfinfoinforkkikitkitakitam}$ ist.

(a) Gebt $\Lambda\!\!\Lambda(\texttt{geheimnis})$ an.

(b) Gebt eine formale Definition (ohne Pünktchen) für die Abbildung `substr` an, die für ein Wort $w \in A^*$ zwei Zahlen $i, j \in \mathbb{N}_+$ mit $i \leq j \leq |w|$ das Teilwort von w zwischen Zeichen i und Zeichen j (inklusive Zeichen i und j) zurückgibt, d.h. $\texttt{substr}(w, i, j) = w(i)w(i+1)\dots w(j)$. Falls für die Eingabe (w, i, j) die Ungleichungen $i \leq j \leq |w|$ nicht gelten, soll das leere Wort zurückgegeben werden.

(c) Gebt eine formale Definition (ohne Pünktchen) für die Abbildung $\Lambda\!\!\Lambda'$ an. Wie allgemein üblich dürft ihr dafür die Funktion `substr` aus der vorherigen Teilaufgabe verwenden, auch wenn ihr diese nicht bearbeitet habt.

(d) Gebt eine formale Definition (ohne Pünktchen) für die Abbildung $\Lambda\!\!\Lambda$ an. Auch hier dürft ihr die Funktionen `substr` und $\Lambda\!\!\Lambda'$ aus den vorherigen Teilaufgaben verwenden. Außerdem dürft ihr die Spiegelwort-Funktion f aus Teilaufgabe (d) und zum Auf-/Abrunden Gaußklammern verwenden.