GBI WS 24/25 – Übungsblatt 1

Abgabe: Fr. 8.11.24, 9:30 (Ilias), behandelter Stoff: bis Mi. 30.10.24

In den Übungen werden Aufgaben vorgestellt, die auf die Übungsblätter vorbereiten.

Aufgabe 1

2 + 3 = 5 Punkte

In dieser Aufgabe sollt ihr beweisen, dass die folgende Gleichheit für alle Mengen A, B, C gilt:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

(a) Zeigt zuerst, dass $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Bringt dazu die unten aufgelisteten Beweisschnipsel in die richtige Reihenfolge. Vorsicht: Nicht alle Beweisschnipsel sind für den Beweis notwendig. Verwendet genau die Beweisschnipsel, die zu dem Beweis passen.

(A) Oder anders gesagt: $a \in A \cup B$ und $a \in C$.

(B) Es gilt, dass $x \in A \cup B$ und $y \in C$.

(C) Fall 3: $x \in C$ (und weiterhin $y \in C$).

(D) Seien A, B und C beliebige Mengen. Wir zeigen, dass $(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$.

(E) Dann ist $(x, y) \in A \times C$ und insbesondere $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$.

(F) Fall 1: $x \in A$ (und weiterhin $y \in C$).

(G) Oder anders gesagt: x ist in A oder B und y ist in C.

(H) Fall 2: $x \in B$ (und weiterhin $y \in C$).

(I) Wir zeigen, dass dann auch $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

(J) Dann ist $(x, y) \in A \times C$ und insbesondere $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

(K) Damit sind alle möglichen Fälle abgedeckt. Da wir sowohl A, B und C als auch (x, y) beliebig gewählt haben, folgt die Aussage.

(L) Wir zeigen: Es gibt ein Paar $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, für das gilt $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

(M) Dann ist $(x, y) \in B \times C$ und insbesondere $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

(N) Sei $(x, y) \in (A \cup B) \times C$ beliebig.

(O) Daraus folgt, dass $|A| = 42$.

(P) Wir machen eine Fallunterscheidung.

(b) Zeigt nun, dass $(A \cup B) \times C \supseteq (A \times C) \cup (B \times C)$. Orientiert euch dafür an der vorhergehenden Teilaufgabe.

Aufgabe 2 **1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Beweist oder widerlegt sie. Beim Widerlegen müsst ihr auch zeigen, dass eure Beispiele tatsächlich Gegenbeispiele sind.

(a) Für alle Mengen A, B gilt $(A \times 2^B) \cap A = \emptyset$.

(b) Für jede Abbildung $f : A \to A$ gilt: Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv.

(c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei beliebige Abbildungen und sei $h : A \to C$ definiert durch $h(a) = g(f(a))$ für jedes $a \in A$. Dann gilt: Wenn h injektiv ist, dann ist auch g injektiv.

(d) Für alle endlichen Mengen A und B mit $|A| = |B|$ und für jede Abbildung $f : A \to B$ gilt: Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv.

Aufgabe 3 **1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte**

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x \leq 0 \text{ und } y = -x - 2\},\\
B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x \leq -4 \text{ und } y = x + 8\},\\
C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 0 \text{ und } y = -x\},\\
D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ und } y = x\},\\
E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3 \text{ und } y = -x + 4\},\\
F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ und } y = x - 2\}.
\end{aligned}
$$

Sei $L := A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \subseteq [-5, 3] \times [-2, 4]$ eine Relation mit Definitionsbereich $[-5, 3]$ und Zielbereich $[-2, 4]$ (siehe Abbildung 1).

(a) Gebt an, welche der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig die Relation L erfüllt und welche sie nicht erfüllt.

(b) Gebt einen Definitions- und Zielbereich an, sodass L keine der vier Eigenschaften bezüglich des neuen Definitions- und Zielbereichs erfüllt.

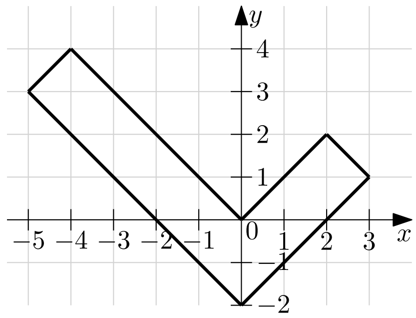

Abbildung 1: Die Relation L.

(c) Gebt eine Menge $\mathcal{L} \subseteq \{A, B, C, D, E, F\}$ an, sodass $L' = \bigcup_{M \in \mathcal{L}} M$ eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung bezüglich des ursprünglichen Definitionsbereichs $[-5, 3]$ und des ursprünglichen Zielbereichs $[-2, 4]$ ist. Visualisiert eure Lösung wie in Abbildung 1.

(d) Gebt eine Teilmenge $L'' \subseteq L$ an, die bezüglich des ursprünglichen Definitionsbereichs $[-5, 3]$ und des ursprünglichen Zielbereichs $[-2, 4]$ eine rechtstotale, linkseindeutige und rechtseindeutige Relation ist. Visualisiert eure Lösung wie in Abbildung 1.

Aufgabe 4 **1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte**

In dieser Aufgabe geht es um das Brettspiel *Tumbleweed*[1], Dr. Metas Lieblingsspiel. Leider verliert Dr. Meta immer, weshalb er gerne eine KI trainieren möchte, um besser schummeln zu können. Für die Implementierung benötigt er nun eine Formalisierung der Regeln.

Tumbleweed ist ein Spiel für zwei Spielerinnen (rot und weiß), das auf einem hexagonalen Spielfeld mit n Feldern pro Seite gespielt wird (üblicherweise $n \in \{6, 8, 10, 11\}$). Das Spielfeld lässt sich durch folgende Menge beschreiben:

$$\begin{aligned} F = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq x \leq n \text{ und } 1 \leq y \leq n + x - 1\} \cup \\ \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid n + 1 \leq x \leq 2n - 1 \text{ und } x - n + 1 \leq y \leq 2n - 1\}, \end{aligned}$$

siehe Abbildung 2.

Bei dem Spiel geht es darum, *Stapel* von Spielsteinen in der eigenen Farbe (rot oder weiß) auf dem Spielfeld zu platzieren, um am Ende möglichst viele Felder zu *besitzen* oder zu *kontrollieren*. Eine Spielerin *besitzt* ein Feld, wenn sie einen Stapel in ihrer Farbe auf diesem Feld platziert hat. Eine Spielerin *kontrolliert* ein Feld, wenn das Feld leer ist und mehr Felder mit Stapeln der eigenen Farbe *sieht* als Felder mit Stapeln der Farbe der Gegnerin. Ein Feld f *sieht* ein anderes Feld f', wenn sich die beiden Felder auf derselben

[1] Das Spiel wurde 2020 von dem polnischen Mathematiker Michał Zapała erfunden. Hier könnt ihr die vollständinge Regeln nachlesen und das Spiel ausprobieren: `https://www.iggamecenter.com/en/rules/tumbleweed`

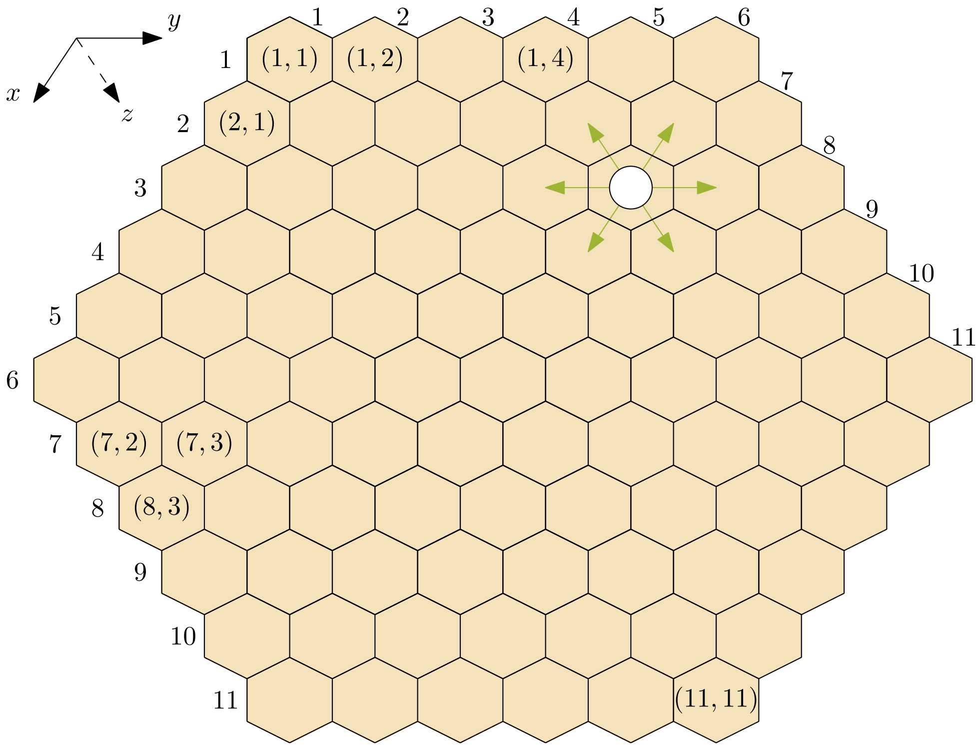

Abbildung 2: Das Tumbleweed-Spielfeld mit $n = 6$ Feldern pro Seite.

Geraden in x-, y oder z-Richtung befinden (siehe grüne Pfeile in Abbildung 2) und kein anderer Stapel dazwischen ist. Stapel auf f oder f' sind dabei nicht *zwischen* f und f'. Felder können sich selbst nicht sehen.

Der Spielzustand zu einem gegebenen Zeitpunkt lässt sich beschreiben durch zwei Mengen $B_{\text{rot}}, B_{\text{weiß}} \subseteq F$, die jeweils genau die Felder im Besitz der roten bzw. weißen Spielerin enthalten. Sei $B = B_{\text{rot}} \cup B_{\text{weiß}}$ die Menge von Feldern, die im Besitz einer der beiden Spielerinnen sind. Sei $\texttt{sieht}_B(f)$ die Menge aller Felder, die f sieht (bezüglich B).

(a) Gegeben sei ein Spielfeld der Größe $n = 6$ und eine Spielzustand $(B_{\text{rot}}, B_{\text{weiß}})$ mit $B_{\text{rot}} = \{(4, 8), (5, 4), (6, 6)\}$ und $B_{\text{weiß}} = \{(1, 1), (1, 4), (3, 5)\}$ (siehe Abbildung 3). Gebt $\texttt{sieht}_B((1, 4))$ für $B = B_{\text{rot}} \cup B_{\text{weiß}}$ an.

Seien nun n und B wieder beliebig.

(b) Sei $\texttt{sieht}'(f) := \texttt{sieht}_{\{f\}}(f)$ für ein Feld $f \in F \subseteq \mathbb{N}^2$. Gebt eine formale Definition für die Funktion $\texttt{sieht}'$ an (ohne $\texttt{sieht}_B$ zu verwenden).

(c) Verwendet die Funktionen $\texttt{sieht}'$ und $\texttt{getrennt}$, um eine formale Definition für die Funktion $\texttt{sieht}_B$ anzugeben.

Dazu dürft ihr die folgende Funktion als gegeben annehmen: $\texttt{getrennt} : F \times F \to \{0, 1\}$, wobei $\texttt{getrennt}(f_1, f_2) = 1$, falls die Felder f_1 und f_2 auf der gleichen

Geraden in x-, y- oder z-Richtung liegen (siehe grüne Pfeile in Abbildung 2) und ein Stapel dazwischen liegt, sonst 0.

(d) Gebt eine formale Definition der Funktion $\texttt{kontrolliert}_B : F \to \{\text{rot, weiß}, \perp\}$ an, die für jedes Feld $(x, y) \in F$ angibt, ob es von der roten oder weißen Spielerin kontrolliert wird. Falls (x, y) von keiner der beiden Spielerinnen kontrolliert wird, soll $f(x, y) = \perp$ sein.

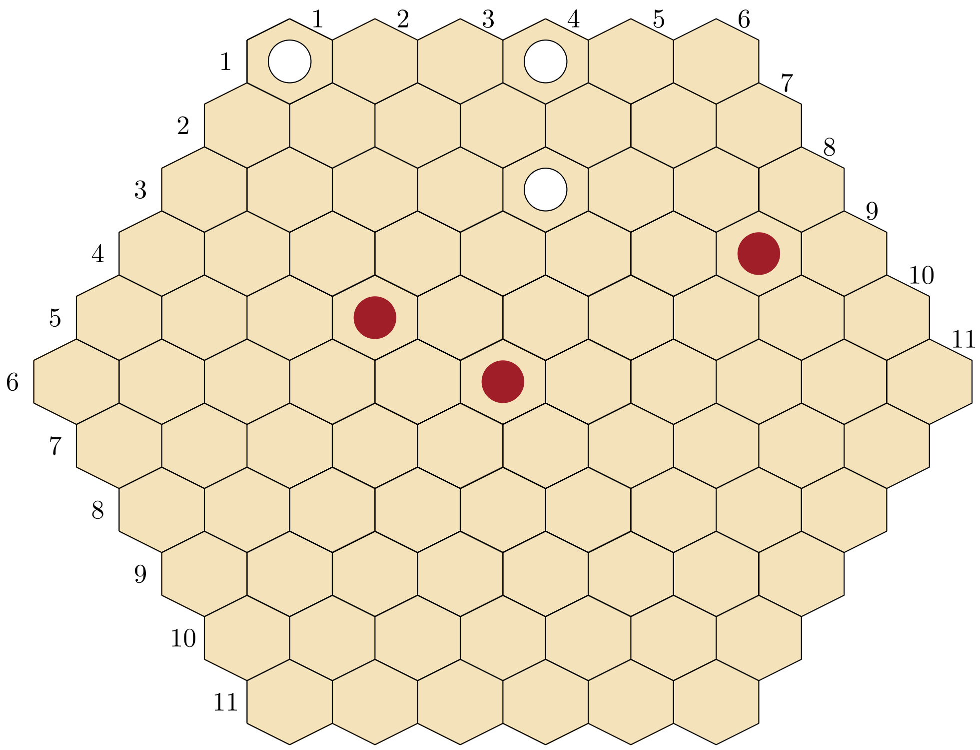

Abbildung 3: Ein Spielzustand eines Tumbleweed-Spiels.