Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Tarea 1

Estudiante: Daniel Minaya
Profesor: Felipe Tobar
Auxiliares: Cristóbal Alcázar
Camilo Carvajal

Fecha de entrega: 1 de septiembre

Parte 1.

Generamos μ de una distribución semi-normal con varianza $\sigma^2 = 10$. Por el teorema de Bayes, tenemos que

$$p(\mu|x_1,\dots,x_n) = \frac{p(x_1,\dots,x_n|\mu)p(\mu)}{p(x_1,\dots,x_n)} = \frac{p(x_1|\mu)\cdot\ldots\cdot p(x_n|\mu)p(\mu)}{p(x_1,\dots,x_n)},$$

donde $p(x_i|\mu) \sim \mathcal{N}(\mu, 5)$ y $p(\mu) \sim |\mathcal{N}(0, 10)|$.

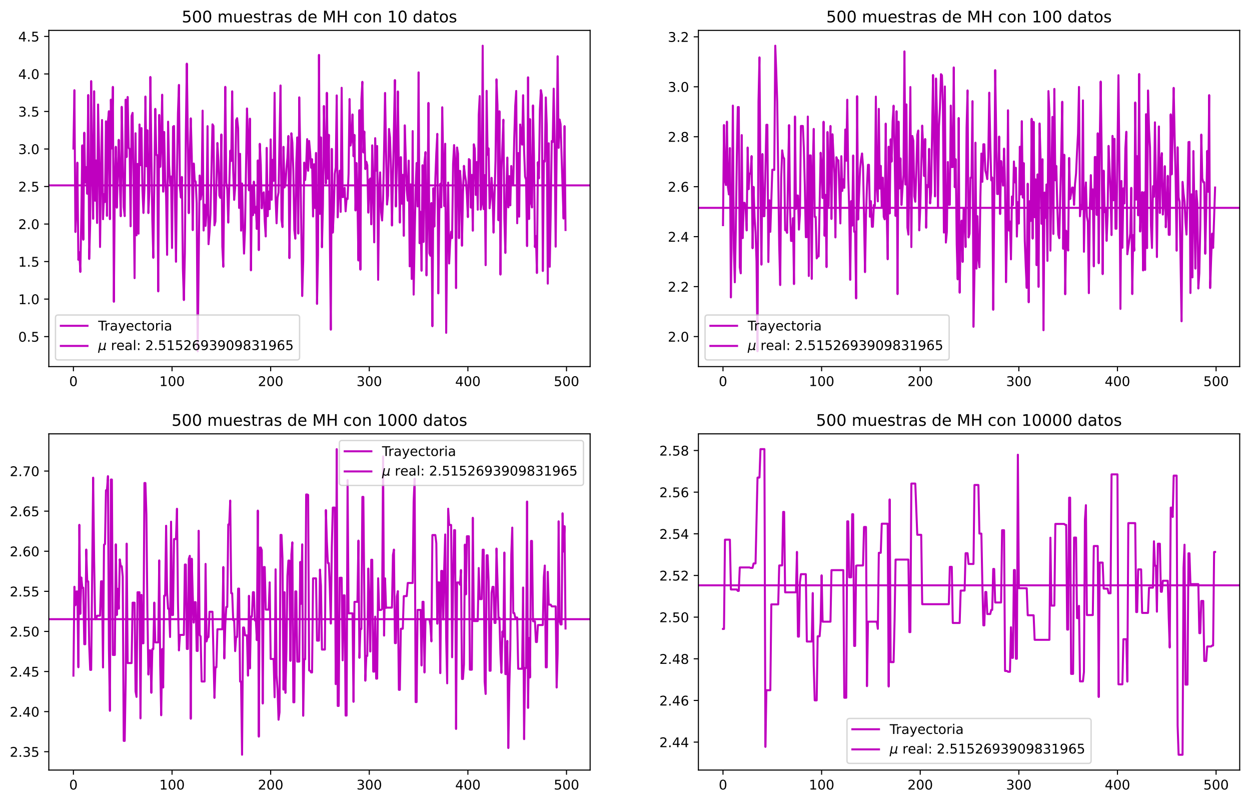

Figura 1: Trayectorias de μ mediante Metropolis-Hastings.

Parte 2.

Ahora queremos repetir el proceso donde

$$x_i \sim \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{N}(\mu_j, 5).$$

Elegiremos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ fijos de modo que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y samplearemos $\mu \sim \mathrm{MVN}(M, \Sigma)$ con

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

es decir, μ_1, μ_2, μ_3 independientes. En este caso, la distribución a simular estará dada por

$$p(\mu_1, \mu_2, \mu_3|x_1,\dots,x_n) = \frac{p(x_1,\dots,x_n|\mu)p(\mu)}{p(x_1,\dots,x_n)} = \frac{p(x_1|\mu_1,\mu_2,\mu_3)\cdot\ldots\cdot p(x_n|\mu_1,\mu_2,\mu_3)p(\mu_1,\mu_2,\mu_3)}{p(x_1,\dots,x_n)},$$

Como μ_1, μ_2, μ_3 son independientes, entonces $x_i \sim \sum_{j=1}^{3} \mathcal{N}(\lambda_j \mu_j, 5\lambda_j^2)$, es decir,

$$p(x_i|\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mathcal{N}(\sum_j \lambda_j \mu_j, \sum_j 5\lambda_j^2) = \mathcal{N}(\lambda^T \mu, 5|\lambda|^2),$$

donde hemos denotado $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

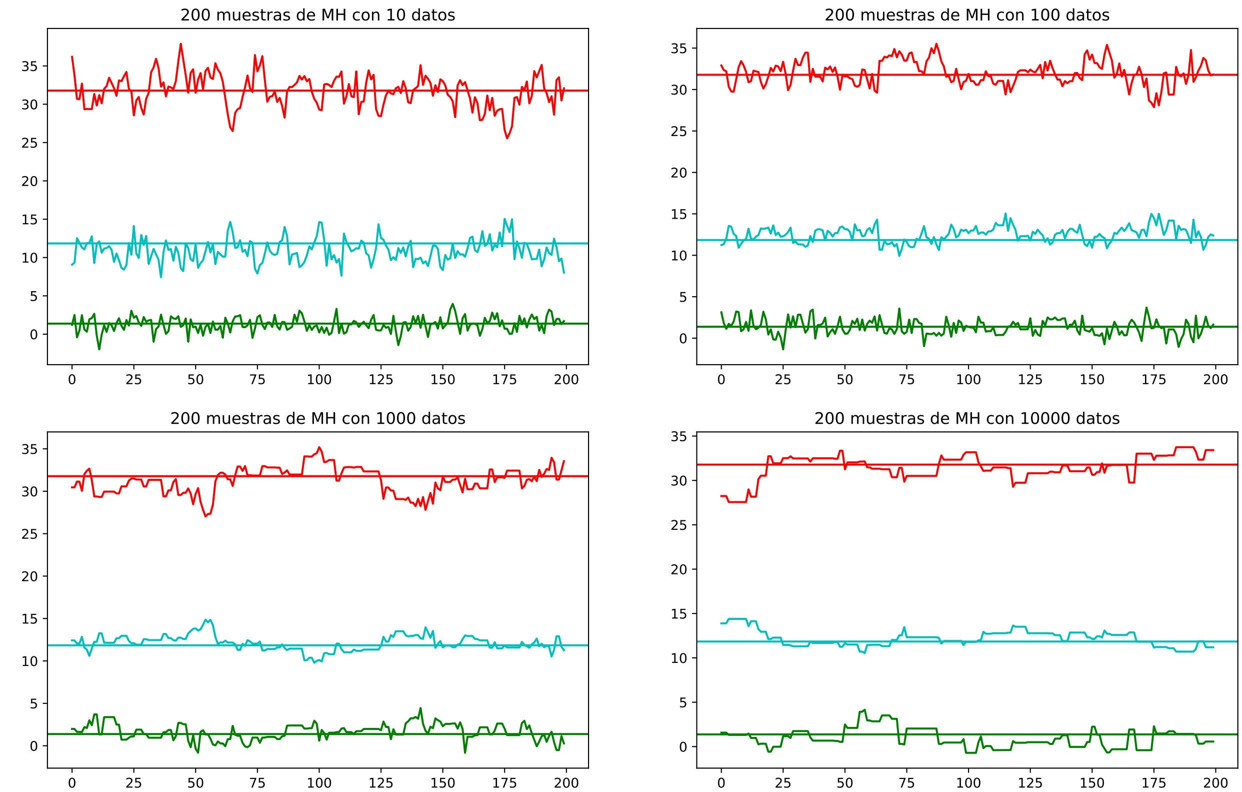

Figura 2: Trayectorias de μ mediante Metropolis-Hastings.

En ambas partes podemos notar que el algoritmo de Metropolis-Hastings logra converger a los valores reales de μ, sin embargo, no logra estabilizarse del todo. Además, a medida que aumentamos el número de datos disponibles, la estimación tiene menos varianza, es decir, presenta menor ruido.