By @kakashi_copiador

Estratégia Concursos

Aula 05

Caixa Econômica Federal - CEF (Técnico Bancário) Noções de Probabilidade e Estatística - 2023 (Pré-Edital)

Autor:

Equipe Exatas Estratégia Concursos

12 de Janeiro de 2023

Índice

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Princípios Fundamentais da Contagem

Nesta seção, veremos os princípios fundamentais de contagem, que você vai utilizar muito. Eles permeiam as ferramentas da análise combinatória e são requisitados em praticamente todas as questões sobre o assunto, desde as mais simples, até as mais complexas.

Princípio Multiplicativo

*Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem **3 calças** e **4 blusas**. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m* = 3** possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n* = 4** possibilidades.

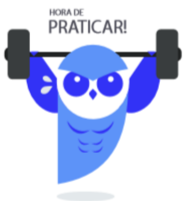
Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é:

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{3} \times \mathbf{4} = 12$$

Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento **C** que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e **C** ocorrerem é **m x n x p**.

Utilizando o mesmo exemplo, considerando que João precisa utilizar um cinto e que ele tem **p = 2** cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é:

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} = \mathbf{3} \times \mathbf{4} \times \mathbf{2} = 24$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP) Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

Comentários:

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem **E** uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

$$12 \times 13 = 156$$

Gabarito: C

(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

Comentários:

Há **2** blusas para cada uma das **3** calças. Além disso, para cada possível combinação de uma blusa e uma calça, há **4** meias diferentes. Logo, o número de alternativas é, pelo princípio multiplicativo:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

Gabarito: A

(CESPE/2013 – TRT-ES) Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

Comentários:

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

5	5	5	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

Gabarito: Certo.

(FGV/2022 – PM-PB) Cada vértice de um quadrado ABCD deverá ser pintado com uma cor. Há 5 cores diferentes disponíveis para essa tarefa. A única restrição é que os vértices que estejam em extremidades opostas de qualquer diagonal do quadrado (AC e BD) sejam pintados com cores diferentes. O número de maneiras diferentes de pintar os vértices desse quadrado é:

a) 18

b) 60

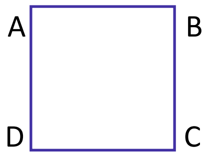
c) 120

d) 240

e) 400

Comentários:

A questão informa que temos **5** cores disponíveis para pintar 4 vértices de um quadrado:



No entanto, a cor do vértice **A** deve ser **diferente** da cor do vértice **C**; e a cor do vértice **B** deve ser **diferente** da cor do vértice **D**.

Assim, há **5** possibilidades para o vértice A e **4** possibilidades para o vértice C.

Similarmente, há **5** possibilidades para o vértice B e **4** possibilidades para o vértice D.

Pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades para **todos** os 4 vértices é:

$$5 \times 5 \times 4 \times 4 = 400$$

Gabarito: E

Princípio Aditivo

*Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre), *então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se **calçar** e que ele possui **3** opções de tênis e **2** opções de sapatos.

Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com ***n*** = 2 possibilidades. Esses eventos são **mutuamente excludentes** (João calçará um tênis **ou** um sapato; ele **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é a soma:

$$m + n = 3 + 2 = 5$$

Podemos generalizar esse princípio para qualquer número de eventos.

RESUMINDO

- Quando **ambos** ocorrem os eventos (A **E** B), **multiplicamos** as possibilidades;
- Quando ocorre **somente um** dos eventos (A **OU** B), **somamos** as possibilidades.

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

HORA DE PRATICAR!

(CESPE/2013 – TRT-ES) Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

Comentários:

Se Pedro deseja comer apenas **um** tipo de fruta, ele poderá comer uvas **OU** maçãs **OU** laranjas **OU** bananas **OU** abacaxi.

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

$$\text{Número de maneiras} = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20$$

Que é inferior a 100.

Gabarito: Errado.

(CESPE 2016/FUB) Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

Comentários:

Marta deseja escolher uma comida **E** uma bebida.

Para comer, Marta pode escolher uma das 7 opções de salgado **OU** um dos 4 tipos de bolo **OU** uma das 3 espécies de tapioca. Pelo princípio aditivo, as opções de comida são:

$$7 + 4 + 3 = 14$$

Para beber, Marta pode escolher uma das 3 opções de suco **OU** uma das 5 opções de refrigerante. Pelo princípio aditivo, as opções de bebida são:

$$3 + 5 = 8$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **E** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

Gabarito: Certo.

FATORIAL DE UM NÚMERO NATURAL

Para resolvermos diversas questões de análise combinatória, utilizamos o chamado **fatorial**. O fatorial de um **número natural** (0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n}!$$

TOME NOTA!

O fatorial representa o **produto** de **todos** os números inteiros positivos **menores ou iguais àquele número**, conforme indicado a seguir:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \times \ldots \times \mathbf{2} \times \mathbf{1}$$

Por exemplo:

$$3! = 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 6$$

$$6! = 6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 720$$

Podemos representar o fatorial de um número natural como um fatorial de **qualquer** outro número natural **menor**, por exemplo:

$$4! = 4 \text{ x } \underbrace{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}_{3!} = 4 \text{ x } 3!$$

$$10! = 10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } \underbrace{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}_{6!} = 10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo das divisões entre fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

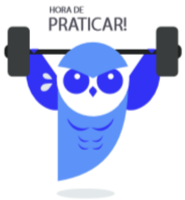
$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Atente-se para dois **casos especiais**: tanto o **fatorial de 1** quanto o fatorial de **fatorial de 0** são iguais a 1:

1! = 1

0! = 1



(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG) O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número $n \in \mathbb{N}$ é dado por $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$;

II. $0! = 1$;

III. $1! = 0$.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

Comentários:

A proposição I corresponde exatamente à definição de fatorial: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$

A proposição II também está correta, pois $0! = 1$.

A proposição III está incorreta, pois $1! = 1$.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

Gabarito: B

(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI) A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

Comentários:

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

Gabarito: D

PERMUTAÇÃO

Permutar significa **trocar de lugar**. As técnicas de permutação permitem calcular o número de maneiras **distintas** de **ordenar** os elementos.

Permutação Simples

Na permutação simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Vamos supor que precisamos organizar 3 pessoas diferentes (Ana, Beto e Caio) em uma fila. De quantas maneiras podemos organizar essa fila?

Inicialmente, há 3 possibilidades (Ana, Beto ou Caio) para o primeiro lugar da fila. Após a escolha do primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo lugar. Por fim, restará 1 possibilidade para o terceiro lugar.

3	2	1
1º	2º	3º

Como são eventos concomitantes, pois alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **E** outra em terceiro, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento, pelo princípio multiplicativo:

$$3 \times 2 \times 1$$

E se houvesse 4 pessoas? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

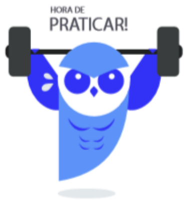
$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Para n alunos, temos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Que corresponde à fórmula do **fatorial**!

> A **permutação simples** de **n** elementos **distintos**, que podemos representar como P_n, é:
>
> $$P_n = n!$$



(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA) Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

Comentários:

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Gabarito: E

(CESPE 2018/EBSERH) Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

Comentários:

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

Gabarito: Certo.

Permutação Simples com Restrições

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**, de modo nem todos os elementos poderão permutar livremente.

Por exemplo, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, de modo que o número 1 esteja **fixo** na primeira posição e o número 8, na oitava posição.

1							8

Sendo assim, restarão os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem livremente ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região) Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

Comentários:

Essa questão trabalha com a permutação de 5 elementos, com um deles fixo.

Considerando que 1 dos candidatos está **fixo** no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D.

(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão. A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

Comentários:

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

C						E			

Como esses elementos estão **fixos** em posições específicas, basta reordenarmos os **demais elementos**.

Logo, o número de maneira de organizarmos essa fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

Gabarito: Certo.

Agora, vamos voltar ao nosso exemplo dos 8 algarismos, supondo que os algarismos 1 e 2 ocupem os extremos, mas **sem fixar** qual irá ocupar a primeira posição e qual irá ocupar a última posição.

Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava; **OU** o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

1							**8**

8							**1**

Nesse caso, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, calculadas anteriormente, há **2 possibilidades** distintas de posicionar os extremos.

Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos:

$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas **2 possibilidades** de alocar esses 2 algarismos, 1 e 8, nas 2 posições extremas correspondem à **permutação** desses 2 elementos.

Em outras palavras, tratamos esses casos como **duas permutações em separado** e, em seguida, **multiplicamos** os resultados (princípio multiplicativo).

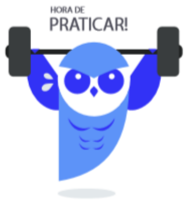
$$P_2 \times P_6$$

Agora, vamos supor que os 3 primeiros algarismos tenham que ocupar as 3 primeiras posições, em qualquer ordem; e os demais algarismos, as demais posições, também em qualquer ordem:

$$\underbrace{\square\;\square\;\square}_{1,\ 2\text{ e }3}\;\underbrace{\square\;\square\;\square\;\square\;\square}_{4,\ 5,\ 6,\ 7\text{ e }8}$$

Nesse caso, temos a permutação de **3 elementos** nas 3 primeiras posições e de **5 elementos** nas demais posições. Pelo princípio **multiplicativo**, o número de ordenações possíveis é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$



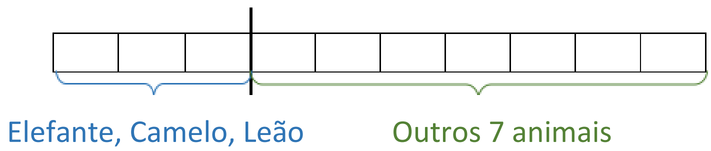
(CESPE 2018/BNB) Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 3 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

Comentários:

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em **qualquer ordem**. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições, em qualquer ordem:



O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, **multiplicamos** esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar toda a fila:

$$\text{Número de possibilidades} = 3! \times 7!$$

Esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, 3 × 7!, logo, o item está errado. Aliás, como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

Gabarito: Errado.

Agora, vejamos mais um tipo de permutação com restrição. Vamos voltar ao exemplo dos 8 algarismos, supondo que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**.

Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Portanto, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que 2 estejam sempre **juntos** em uma **determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos **juntos** em **determinada ordem**, {1, 2 e 3}, chamaríamos os 3 elementos de A, e calcularíamos a permutação dos **6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}.

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**?

Nesse caso, o **início** da solução é similar, isto é, chamamos esses elementos de um **único elemento**, **A**, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, dentre os 8 algarismos, primeiro calcularíamos a permutação dos 6 elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades, há diferentes formas de **ordenar os 3 elementos**, o que corresponde à **permutação** de 3 elementos.

Logo, para calcular o número de maneiras de organizar **todos** os 8 elementos nessas condições, devemos **multiplicar** o resultado anterior pela permutação de **3 elementos** (princípio multiplicativo):

$$\mathbf{P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6} = 4320$$

(CESPE 2018/BNB) Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

Comentários:

A quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

Quantidade de números possíveis = 24 x 2 = 48

Essa quantidade é **superior** a 25.

Gabarito: Errado.

Permutação com Repetição

Enquanto na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**, na permutação com **repetição**, alguns elementos se **repetem**.

Quando há **elementos repetidos**, o número de maneiras distintas de ordenação **diminui**, pois algumas possibilidades que seriam distintas na permutação simples tornam-se a mesma possibilidade quando há elementos iguais.

Por isso, precisamos dividir o resultado da permutação simples pelo número de maneiras de reordenar os elementos repetidos, isto é, pela permutação dos elementos repetidos.

> Havendo $\boldsymbol{n}$ elementos no **total**, com $\boldsymbol{k}$ elementos distintos **repetidos** a permutação desses elementos, o que representamos como $\boldsymbol{P_n^k}$, é dada por:
>
> $$\boldsymbol{P_n^k = \frac{n!}{k!}}$$

Por exemplo, a permutação dos elementos {A, A, A, B, C} é uma permutação de **5** elementos, no **total**, dos quais **3 são repetidos**, dada por:

$$P_5^3 = \frac{\boldsymbol{P_5}}{\boldsymbol{P_3}} = \frac{\boldsymbol{5!}}{\boldsymbol{3!}} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

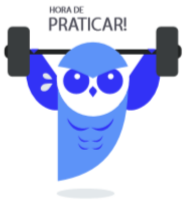
E se houvesse **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, A, B, B, C, D}.

Nesse caso, dividimos a **permutação simples de todos** os elementos pelo **produto das permutações dos elementos repetidos**.

No caso, dividimos a permutação simples de 7 elementos pelo produto da permutação de 3 elementos (A) com a permutação de 2 elementos (B):

$$\boldsymbol{P_7^{2,3}} = \frac{\boldsymbol{P_7}}{\boldsymbol{P_2 \times P_3}} = \frac{\boldsymbol{7!}}{\boldsymbol{2! \times 3!}}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$



(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

Comentários:

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: A.

(FGV/2018 – ALE-RO) Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

Comentários:

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes.

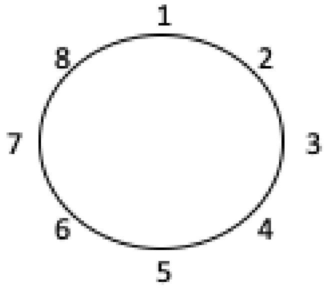
Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Gabarito: A

Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.



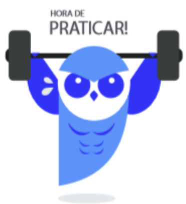
No círculo, o que importa é a posição de cada elemento em relação aos demais. Em outras palavras, quando giramos o círculo, por exemplo, quando todos os elementos se posicionam uma posição à direita de onde estavam posicionados, temos a **mesma** disposição.

Portanto, para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar um** dos elementos. Com isso, as posições de **todos** os outros elementos irão **importar**.

Portanto, calculamos a **permutação simples** para os **demais** elementos (no caso, 7):

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

> A permutação circular de $\boldsymbol{n}$ elementos, $\boldsymbol{PC_n}$, é dada por:
>
> $$\boldsymbol{PC_n = (n-1)!}$$



(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS) O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

Comentários:

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: C

(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE) De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

Comentários:

A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: B

ARRANJO E COMBINAÇÃO

As técnicas que veremos nesta seção (arranjo e combinação) trabalham com a **seleção** de um subconjunto dos elementos.

A **ordem** dos elementos selecionados será **relevante** para o **arranjo**, mas **não** para a **combinação**. Em outras palavras, selecionar os elementos A e B ou os elementos B e A são possibilidades **distintas** para o **arranjo**, porém **equivalentes** para a **combinação**.

Arranjo Simples

No arranjo, **selecionamos** alguns elementos, de maneira que a sua **ordenação** seja **relevante**. Um sorteio de algumas pessoas, para receberem prêmios distintos é um exemplo desse tipo de seleção.

A ordem da seleção será importante sempre que os elementos selecionados tiverem destinos **diferentes**, como diferentes prêmios, funções, cargos, tarefas, posições etc.

Vamos supor que existam **10** pessoas em um sorteio, das quais **4** serão sorteadas, para receberem prêmios diferentes, não sendo possível sortear a mesma pessoa mais de uma vez.

Como a ordem importa, há 10 possibilidades para sortearmos a primeira pessoa; em seguida, restarão 9 pessoas para o segundo sorteio; depois, 8 pessoas para o terceiro sorteio; e, por fim, 7 pessoas para o último sorteio.

10	**9**	**8**	**7**
1º	2º	3º	4º

Como os quatro sorteios irão ocorrer, pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento. Dessa forma, o resultado do arranjo de **4** elementos, dentre **10**, é:

$$A_{10,4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

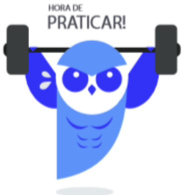
Esse resultado corresponde à razão entre o fatorial de **10** (número total de elementos) e o fatorial de 6 (diferença entre o número **total** de elementos e o número de elementos **sorteados**):

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

No caso geral, um **arranjo** de k elementos, dentre n elementos distintos é:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Outra notação possível para o arranjo é A_n^k.



(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP) Na bilheteria de um teatro há apenas 5 ingressos à venda para a seção de uma peça. Se 4 amigos comprarem ingressos para essa seção, então o número total de posições distintas em que esses amigos poderão se acomodar no teatro é

a) 120.

b) 80.

c) 60.

d) 20.

e) 5.

Comentários:

Temos uma seleção de 4 lugares, dentre 5 disponíveis, com importância de ordem, pois cada lugar é **distinto** do outro. Assim, temos o arranjo de 4 elementos, dentre 5:

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Gabarito: A.

(VUNESP/2018 – PM/SP) Utilizando-se os algarismos 2, 3, 5, 6, 7 e 9, a quantidade de números múltiplos de 5 e que tenham três algarismos distintos que podem ser formados é

a) 25.

b) 20.

c) 15.

d) 10.

Comentários:

Para que o número formado pelos 6 algarismos indicados no enunciado seja múltiplo de 5, é necessário que o algarismo 5 seja o último algarismo. Assim, os diferentes números que podem ser formados com 3 algarismos correspondem a um arranjo de 2 elementos, dentre os algarismos {2, 3, 6, 7 e 9}, isto é, 5 algarismos:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

Gabarito: B.

(CESPE 2019/COGE-CE) Em determinado órgão, sete servidores foram designados para implantar novo programa de atendimento ao público. Um desses servidores será o coordenador do programa, outro será o subcoordenador, e os demais serão agentes operacionais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de distribuir esses sete servidores nessas funções é igual a

a) 21.

b) 42.

c) 256.

d) 862.

e) 5.040.

Comentários:

Nessa questão, devemos definir o número de maneiras distintas de distribuir 7 servidores em funções distintas: 1 será coordenador, 1 será subcoordenador e os demais serão agentes. Note que, após a definição do coordenador e do subcoordenador, os que **sobrarem** serão **necessariamente** agentes. Por isso, não precisamos nos preocupar com eles, apenas com o **coordenador** o **subcoordenador**.

Para a escolha do coordenador, há 7 servidores, ou seja, 7 possibilidades:

7	

Após a escolha do coordenador, restarão 6 possibilidades para o subcoordenador:

7	6

Como devemos escolher o coordenador E o subcoordenador, devemos multiplicar as possibilidades (princípio multiplicativo):

Número de Possibilidades = 7 x 6 = 42

Alternativamente, poderíamos calcular o arranjo de 2 elementos, dentre 7:

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

Gabarito: B

Combinação Simples

Assim como no caso do arranjo, a combinação é uma **seleção** de elementos de um conjunto finito. Entretanto, para a combinação, a **ordem não importa**.

Por exemplo, em um sorteio de participantes para um **grupo** de estudo, a ordem do sorteio de cada participante é irrelevante.

Nessa situação, algumas possibilidades **distintas** identificadas no **arranjo** são **equivalentes** na **combinação**. Consequentemente, a **combinação** de determinados elementos resulta em um número **menor** do que o **arranjo** dos mesmos elementos.

Na verdade, precisamos dividir o resultado do arranjo pelo fatorial do número de elementos selecionados, pois ele corresponde à permutação dos elementos selecionados.

A combinação sem reposição de $\boldsymbol{k}$ elementos, de um total de $\boldsymbol{n}$ elementos, é dada por:

$$\boldsymbol{C_{n,k}} = \frac{\boldsymbol{A_{n,k}}}{\boldsymbol{P_k}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-k)!k!}}$$

Outras notações comuns para a combinação são $\boldsymbol{C_n^k}$ ou $\boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

Para o mesmo exemplo anterior, se as 4 pessoas sorteadas, dentre 10, receberem os mesmos prêmios, o número de maneiras de selecionar essas pessoas é:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Algumas questões pedem o número de maneiras de selecionar "**pelo menos um**" ...

Nesses casos, calcule **todas** as possibilidades e, em seguida, **subtraia** o número de possibilidades que **não** atendem à restrição, ou seja, com "nenhum"...

Por exemplo, vamos supor que haja 5 mulheres e 4 homens (ou seja, 9 pessoas no total); e que vamos selecionar 3 pessoas para formar uma equipe, com **pelo menos uma** mulher.

Para calcular o número de possibilidades, primeiro calculamos o número total de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, de um total de 9 pessoas:

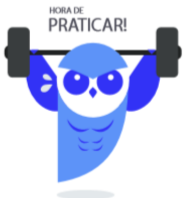
$$C_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

Agora, calculamos o número de maneiras possíveis de selecionar 3 pessoas, das quais **nenhuma** é mulher, ou seja, somente homens. Sabendo que há 4 homens no total, temos:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$$

Logo, o número de maneiras de formar grupos de 3 pessoas com **pelo menos uma** mulher é:

$$84 - 4 = 80$$



(FGV/2019 – Pref. Angra dos Reis/RJ) Maria possui em casa quatro tipos de frutas: banana, mamão, abacate e manga. Ela decidiu fazer uma vitamina com duas dessas frutas, batendo-as juntas com leite no liquidificador. O número de vitaminas diferentes que Maria poderá fazer é

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 12.

Comentários:

O número de vitaminas diferentes corresponde ao número de maneiras diferentes de Maria escolher 2, das 4 frutas, sem que a ordem importe, logo, temos uma combinação de 2 elementos, dentre 4:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Gabarito: D

(FGV/2022 – PC-RJ) Do grupo dos 6 novos policiais de uma delegacia, 2 deles serão escolhidos para um treinamento especial. O número de pares diferentes de policiais que podem ser enviados para o treinamento especial é:

a) 10

b) 12.

c) 15.

d) 16.

e) 18.

Comentários:

O número de pares de policiais que podem ser escolhidos, dentre 6, corresponde ao número de maneiras de escolher 2 elementos, dentre 6. Como a ordem dos escolhidos não importa, temos a combinação de 2 elementos dentre 6:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

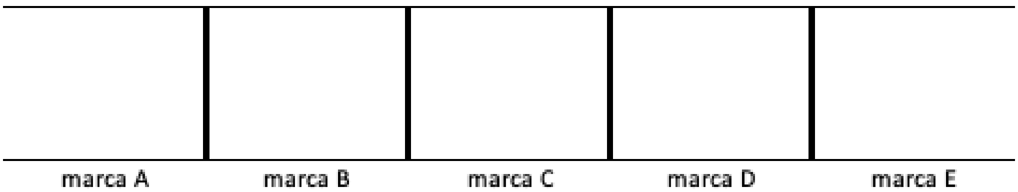
Gabarito: C

Combinação Completa

Os problemas de combinação completa (ou combinação com repetição) envolvem um conjunto de **n tipos** de elementos **diferentes**, dos quais serão escolhidos **k** elementos **iguais ou diferentes**.

Por exemplo, escolher **p = 3 potes de sorvete** havendo um total de **n = 5 marcas distintas** (os potes podem ser de uma mesma marca ou de marcas distintas).

Para calcular todas as possibilidades, vamos imaginar que cada **marca de sorvete** esteja em uma **seção** separada do congelador, conforme indicado a seguir, e que vamos posicionar 3 , simbolizando os potes de sorvete, nas seções correspondentes:



Dessa forma, podemos considerar esse problema como uma **permutação com repetição** dos **p = 3 objetos** (**potes de sorvetes**) e das **4 divisórias** que separam as **marcas**.

O número de **divisórias** é sempre igual ao número de **marcas menos 1**, ou seja, $n - 1$.

Portanto, a **combinação completa** de **p = 3 objetos** de **n = 5 marcas**, indicada por CR_5^3, é igual à **permutação** de 7 elementos, com repetição de **p = 3** e **n - 1 = 4** elementos:

$$CR_5^3 = P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 4!} = 7 \times 5 = 35$$

De maneira geral, a combinação de p **objetos** de n **tipos** (ou marcas), equivale à permutação de $n - 1 + p$ elementos, com repetição de $n - 1$ e p elementos:

$$\boldsymbol{CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Também devemos utilizar a **combinação completa** em problemas de **distribuição** de objetos entre pessoas (ou lugares). Por exemplo, a livre distribuição de 3 cestas básicas para 5 famílias segue o mesmo raciocínio.

(FGV/2018 – ALE-RO) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

a) 64.

b) 56.

c) 36.

d) 28.

e) 16.

Comentários:

Nessa questão, temos um exemplo de combinação com reposição (ou combinação completa, dada por:

$$\boldsymbol{CR_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}}$$

Sabendo que há 8 sabores disponíveis (n = 8) e que Helena irá escolher 2 bolas de sorvete (p = 2):

$$CR_8^2 = \frac{(8+2-1)!}{(8-1)! \times 2!} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

Gabarito: C

(CESPE 2018/SEFAZ-RS) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

a) 30.

b) 120.

c) 330.

d) 820.

e) 1.320.

Comentários:

O enunciado permite que alguma(s) família(s) fique sem quilos de feijão porque menciona que a distribuição será para "até" 4 famílias. Assim, há 7 quilos de feijão (p = 7) a serem distribuídos livremente para 4 famílias (n = 4).

Essa distribuição corresponde à combinação com repetição de p = 7 objetos dentre n = 4 tipos, que pode ser vista como uma permutação de 10 elementos, com repetição de p = 7 objetos e de n - 1 = 3 divisórias:

$$CR_4^7 = P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Gabarito: B.

(2019 – Conselho Regional de Medicina/AC) O pai de 3 filhos, com idades diferentes, distribuiu 9 balas idênticas entre eles, de forma que o mais velho recebeu o dobro de balas do caçula e o filho do meio recebeu mais balas que o caçula e menos balas que o mais velho. O filho caçula recebeu X balas e o filho do meio recebeu Y balas.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

Se alguém deseja distribuir 9 balas idênticas entre 3 pessoas, sem qualquer critério de distribuição, com cada uma delas recebendo pelo menos uma bala, então existem 28 maneiras de se fazer a distribuição.

Comentários:

Esse também é um caso de combinação completa, em que as balas correspondem aos objetos e as pessoas correspondem às seções.

Porém, o problema apontou para uma restrição: todas as pessoas receberão pelo menos uma bala.

Após distribuir uma bala por pessoa, totalizando 3 balas, sobrarão 9 – 3 = 6 balas a serem distribuídas, sem critério, para as 3 pessoas.

Portanto, temos a combinação completa de k = 6 objetos para n = 3 pessoas, ou seja, n – 1 = 2 divisórias:

$$CR_n^p = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \times p!}$$

$$CR_3^6 = P_8^{2,6} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Gabarito: Certo

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Princípios de Contagem

1. (AVANÇASP/2023 - Pref. Americana/SP) Em uma repartição pública trabalham 12 homens e 08 mulheres. O número máximo de duplas distintas que se pode formar contendo apenas um homem e uma mulher dessa repartição é igual a:

a) 84

b) 50

c) 72

d) 68

e) 96

Comentários:

O enunciado informa que há 12 homens e 8 mulheres. O número de maneiras de escolher um homem E uma mulher (eventos concomitantes) é, pelo princípio multiplicativo:

$$n = 12 \times 8 = 96$$

Gabarito: E

2. (UNESC/2022 - Pref. Lagunas/SC) Uma lanchonete oferece 18 tipos de sanduíche, 10 tipos de suco e 16 tipos de sorvete. De quantas maneiras diferentes é possível montar uma refeição com um tipo de sanduíche, um tipo de suco e um tipo de sorvete?

a) É possível montar essa refeição de 1.320 maneiras diferentes.

b) É possível montar essa refeição de 2.460 maneiras diferentes.

c) É possível montar essa refeição de 3.550 maneiras diferentes.

d) É possível montar essa refeição de 2.880 maneiras diferentes.

e) É possível montar essa refeição de 1.960 maneiras diferentes.

Comentários:

A questão informa o número de sanduíches diferentes, o número de sucos diferentes e o número de sorvetes diferentes.

Para calcular o número de maneiras de montar uma refeição com os 3 itens (sanduíche E suco E sorvete), utilizamos o princípio multiplicativo. Sabendo que há 18 sanduíches, 10 sucos e 16 sorvetes, temos:

$$18 \times 10 \times 16 = 2.880$$

Gabarito: D.

3. (IDECAN/2022 - CBM/MS) Determine a quantidade de números pares com quatro algarismos que podemos formar com os números 1, 5, 6, 7 ,8.

a) 250

b) 230

c) 180

d) 160

e) 120

Comentários:

Precisamos formar números pares de 4 dígitos, com os algarismos 1, 5, 6, 7 e 8. Para que o número seja par, é necessário que o último dígito seja par, logo, há 2 possibilidades (6 ou 8) para o último dígito:

			2

Como não é necessário que os algarismos sejam distintos, há 5 possibilidades para os demais dígitos:

5	**5**	**5**	**2**

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar o número com os quatro dígitos (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 5 \times 5 \times 5 \times 2 = 250$$

Gabarito: A

4. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Patrícia tem uma rara coleção com 56 pares de brincos que são guardados em pequenos recipientes, numerados de 1 a 56. Atendendo ao pedido de sua irmã, Patrícia retirou, de maneira aleatória, três recipientes. O número de retiradas dos três recipientes de forma que o segundo seja o de número 27 é:

a) 2970

b) 3080

c) 3192

d) 3228

Comentários:

Há 56 brincos no total, dos quais 3 serão retirados, de modo que o segundo seja um brinco específico, de número 27. Para que isso ocorra, o primeiro brinco retirado pode ser qualquer um, exceto o de número 27 (55 possibilidades); e o último brinco, pode ser qualquer um, dentre os brincos que restaram (54 possibilidades):

55	**27**	**54**

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de retirar os três brincos nessas condições (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 55 \times 54 = 2970$$

Gabarito: A

5. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Em uma corrida de fórmula 1, há 20 pilotos disputando a 1ª, 2ª e 3ª colocação. Sabendo que esses lugares dão, nessa ordem, 25, 18 e 15 pontos para o campeonato.

Assim, podemos afirmar com certeza que há:

a) 6840 formas de acontecer o pódio.

b) 6750 formas de acontecer o pódio.

c) 5814 formas de acontecer o pódio.

d) 8000 formas de acontecer o pódio.

e) 15625 formas de acontecer o pódio.

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de 20 pessoas ocuparem 3 lugares diferentes. Para o 1º lugar, há 20 possibilidades; em seguida, restarão 19 possibilidades para o 2º lugar; e, por fim, haverá 18 possibilidades para o 3º lugar.

20	19	18
1º	2º	3º

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as três posições (eventos concomitantes) é:

$$n = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Gabarito: A

6. (IBFC/2022 - MGS) A senha de um banco é formada por três consoantes distintas, considerando o alfabeto de 26 letras. Nessas condições, o total de senhas possíveis de serem formadas é igual a:

a) 1330

b) 7980

c) 3990

d) 15600

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de formar uma senha com 3 **consoantes distintas**, considerando o alfabeto de 26 letras. Sabendo que há 5 vogais, o número de consoantes é a diferença:

$$26 - 5 = 21$$

Portanto, para o 1º dígito, há 21 possibilidades; em seguida, restarão 20 possibilidades para o 2º dígito; e, por fim, haverá 19 possibilidades para o 3º dígito.

21	20	19

Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 21 \times 20 \times 19 = 7980$$

Gabarito: B

7. (AOCP/2022 - PM/ES) Um XILOFONE deve ser montado escolhendo 7 teclas de tamanhos distintos, mas sempre obedecendo, da esquerda para a direita, a ordem crescente de tamanho. Para cada tecla, há disponíveis 5 cores diferentes: branco, amarelo, azul, verde e vermelho.

De quantas maneiras distintas é possível montar esse XILOFONE, sabendo que teclas vizinhas não podem ter a mesma cor?

a) 16.384

b) 20.480

c) 40.320

d) 5.040

e) 78.125

Comentários:

Precisamos do número de maneiras de escolher a cor de 7 teclas, dentre 5 cores disponíveis, sabendo que teclas vizinhas não podem ter a mesma cor.

A primeira tecla pode ser de qualquer uma das 5 cores; a segunda tecla pode ser de qualquer cor, exceto aquela escolhida para a primeira tecla (4 possibilidades); e as demais teclas seguem a mesma regra da segunda: a terceira deve ser diferente da segunda (4 possibilidades), a quarta deve ser diferente da terceira (4 possibilidades) e assim sucessivamente até a 7ª tecla.

5	4	4	4	4	4	4
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher as cores de todas as teclas (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 20.480$$

Gabarito: B

8. (AOCP/2022 - PM/ES) Os 60 policiais militares que compõem o efetivo da Banda Militar receberam uma identificação numérica. Esse número é par e é formado por 4 números distintos escolhidos entre os números {2, 3, 4, 5, 6}.

Se cada policial possui uma única numeração, quantas identificações, utilizando o mesmo critério, ainda sobram para possíveis contratações de novos membros?

a) 6

b) 8

c) 12

d) 20

e) 72

Comentários:

Precisamos calcular a quantidade de números pares de 4 dígitos que podem ser formados a partir dos algarismos {2, 3, 4, 5, 6}. Para o número ser par, é necessário que o último dígito seja par (3 possibilidades):

			3

Após a escolha do último dígito, restam 4 possibilidades para o primeiro dígito; em seguida, restarão 3 possibilidades para o segundo dígito; e, por fim, 2 possibilidades para o terceiro dígito:

4	3	2	3

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que podem ser formados é o produto:

$$n_{total} = 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$$

Sabendo que há 60 policiais, o número de novos membros que podem ser contratados é a diferença:

$$n_{novos} = 72 - 60 = 12$$

Gabarito: C

9. (CPCP/2022 - UTFPR) A quantidade de números ímpares com três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 3, 4, 8, 9, é:

a) 60

b) 48

c) 36

d) 72

e) 75

Comentários:

O enunciado pede a quantidade de números com 3 algarismos distintos, terminando com um algarismo ímpar, que pode ser formado a partir dos algarismos {0, 1, 3, 4, 8, 9}. Há 3 possibilidades {1, 3, 9} para o último algarismo:

		3

Após a escolha do último algarismo, restarão 5 algarismos disponíveis - os pares e dois ímpares.

Considerando que o algarismo 0 não pode ser escolhido como primeiro algarismo, há 4 possibilidades para o primeiro algarismo:

4		3

Por fim, restarão 4 algarismos disponíveis, incluindo o 0, para a escolha do algarismo central:

4	4	3

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar um número com todos os 3 algarismos é:

$$n = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

Gabarito: B

10. (RBO/2022 - SMFA-BH) Marcelo possui um cartão de crédito de uma determinada instituição financeira e a senha desse cartão deve ser formada exclusivamente por algarismos de 0 a 9. Essa instituição permite que o proprietário do cartão utilize, somente, senhas de cinco algarismos distintos e que a senha seja sempre um número par.

Assinale a alternativa que apresenta o número de senhas possíveis para o cartão de crédito de Marcelo.

a) 3.600

b) 25.200

c) 75.600

d) 7.200

e) 15.120

Comentários:

Precisamos formar uma senha de 5 algarismos distintos, que seja par, ou seja, o último algarismo deve ser par. Sabendo que dos 10 algarismos de 0 a 9, 5 são pares, então há 5 possibilidades para o último algarismo:

				5

Após a escolha do último algarismo, restarão 9 possibilidades para a 1ª posição; em seguida, 8 possibilidades para a 2ª posição; 7 possibilidades para a 3ª posição; e 6 possibilidades para a 4ª posição:

9	8	7	6	5

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de formar a senha com todos os 5 algarismos é:

$$n = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15.120$$

Gabarito: E

Questões Comentadas – Multibancas

Permutação

1. (INAZ do Pará/2022 - SAGAZ) Um hacker descobriu que sua vítima escolheu colocar como senha de banco os algarismos referentes ao dia e ao mês de sua data de nascimento. Ele não sabe a ordem dos 4 (quatro) algarismos, então decidiu utilizar o método "força bruta", qual seja, tentar todas as combinações alterando a ordem dos algarismos.

03/12 → ___ ___ ___ ___

Dia Mês **Senha**

Sabendo-se que não há repetição de algarismos e que todos foram utilizados, qual o total de tentativas que o hacker pode fazer?

a) 16.

b) 24.

c) 30.

d) 36.

e) 42.

Comentários:

O número de maneiras de formar uma senha de 4 dígitos, a partir de 4 algarismos diferentes, corresponde à permutação simples de 4 elementos:

$$P_n = n!$$

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: B

2. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) João possui seis livros de Matemática. São eles: Geometria I, Álgebra I, Álgebra II, Análise, Matemática Financeira e Números Complexos. O número de maneiras que ele pode empilhar esses livros de modo que os livros de Álgebra fiquem juntos é

a) 240

b) 120

c) 60

d) 20

Comentários:

O enunciado pede o número de maneiras de empilhar 6 livros, de modo que 2 deles fiquem juntos. Para isso, vamos primeiro tratar os 2 livros de Álgebra como único elemento. Assim, temos a permutação de 5 elementos (4 livros e mais os dois de Álgebra considerados como único elemento)

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Como a ordem dos dois livros de Álgebra não é fixa, para cada uma dessas maneiras de empilhar os livros, há 2 possibilidades diferentes (Álgebra I acima de Álgebra II ou Álgebra II acima de Álgebra I). Assim, devemos multiplicar o resultado por 2:

$$n = 2 \times 120 = 240$$

Gabarito: A

3. (FEPESE/2022 - CINCATARINA) Quantos números diferentes podem ser formados permutando os algarismos do número 3.444.551.

a) Mais de 415

b) Mais de 400 e menos de 415

c) Mais de 385 e menos de 400

d) Mais de 370 e menos de 385

e) Menos de 370

Comentários:

O número 3.444.551 possui 7 algarismos no total, com repetição de 3 vezes o algarismo 4 e 2 vezes o algarismo 5. Assim, temos uma permutação de 7 elementos, com repetição de 3 e de 2:

$$P_7^{2,3} = \frac{7!}{2! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 2 = 420$$

Gabarito: A

4. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra “MATO” está para o número de anagramas da palavra “GROSSO” assim como 2 está para 15.

Comentários:

A palavra MATO possui 4 letras distintas, logo, o número de anagramas corresponde à permutação simples de 4 elementos:

$$P_4 = 4!$$

E a palavra GROSSO possui 6 letras, com repetição de 2 O´s e 2 S´s:

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{6!}{4}$$

A razão entre esses resultados é:

$$\frac{P_4}{P_6^{2,2}} = \frac{4!}{\frac{6!}{4}} = \frac{4 \times 4!}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{2}{15}$$

Portanto, de fato, o número de anagramas de MATO está para o número de anagramas de GROSSO como 2 está para 15.

Gabarito: Certo

5. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra “GROSSO” que começam ou terminam com a letra O é igual a 120.

Comentários:

Similarmente à questão anterior, os anagramas de GROSSO devem começar OU terminar pela letra O. Fixando a letra O no início, precisamos permutar as outras 5 letras (GROSS), das quais 2 são repetidas (S):

O					

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Se fixarmos a letra O no fim, teremos a mesma quantidade de anagramas (60).

No entanto, não podemos somar esses resultados diretamente, pois estaremos contanto em dobro os anagramas que começa **E** terminam com O (interseção). Por isso, precisamos subtraí-los.

O						O

Esses anagramas correspondem à permutação das outras 4 letras (GRSS), das quais 2 são repetidas (S):

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

Logo, o número de anagramas que começam ou terminam por O é:

$$n = 60 + 60 - 12 = 108$$

Gabarito: Errado

6. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) A quantidade total de anagramas da palavra PANELA que contêm a sequência ELA é:

a) 6

b) 12

c) 18

d) 24

e) 48

Comentários:

Similarmente à questão anterior, precisamos dos anagramas de PANELA que contêm a sequência "ELA". Para isso, vamos tratá-las como elemento único.

Assim, temos a permutação de 4 elementos (as 3 letras em PAN e o elemento "ELA" como elemento único):

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Gabarito: D

7. (RBO/2022 - SMFA-BH) Oito, entre eles, Ana, Fernanda, Maria e José, foram ao teatro. Compraram oito lugares contíguos.

O número de maneiras distintas que esses oito amigos podem se assentar lado a lado, se Ana, Fernanda e Maria devem estar sempre juntas, além disso, José sempre deverá ocupar uma das extremidades dos lugares contíguos, é

a) 240

b) 720

c) 840

d) 1.200

e) 1.440

Comentários:

Precisamos organizar 8 amigos em 8 lugares em fila. Considerando que José precisa ocupar uma das extremidades, há **2** possibilidades para ele se sentar.

Uma vez escolhido o lugar de José, restarão 7 pessoas, mas Ana, Fernanda e Maria precisam estar juntas, então vamos tratá-las como elemento único. Assim, temos a permutação de 5 elementos (os outros 4 amigos e essas meninas como elemento único):

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Por fim, precisamos definir como as 3 meninas estarão posicionadas. Aqui, temos uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de sentar todos os amigos, nessas condições, é:

$$n = 2 \times 120 \times 6 = 1.440$$

Gabarito: E

8. (ACCESS/2022 - CPGI) Seis amigos se posicionam, um ao lado do outro, para tirar uma foto. Entre eles, estão Adão e Eva. O fotógrafo pediu para que os seis amigos se posicionassem para a foto de modo que Adão ficasse separado de Eva. O número de maneiras de isso ocorrer é

a) 600

b) 560

c) 540

d) 480

Comentários:

Essa questão também pede o número de maneiras de enfileirar 6 pessoas, de modo que 2 delas não fiquem juntas. Novamente, vamos calcular o total e subtrair os casos em que os 2 estão juntos.

O número total de maneiras de organizar 6 pessoas em uma fila é:

$$n(T) = P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para calcular o número de possíveis filas em que os 2 estão juntos, vamos primeiro tratá-los como elemento único. Assim, temos a permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Considerando que, para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de posicionar Adão e Eva, multiplicamos esse resultado por 2:

$$n(\bar{R}) = 2 \times 120 = 240$$

Por fim, o número de maneiras de organizar a fila nessas condições é a diferença:

$$n = 720 - 240 = 480$$

Gabarito: D

9. (AOCP/2022 - IF/RO) Quantos anagramas da palavra INSTITUTO possuem as vogais sempre juntas e as consoantes, também, sempre juntas?

a) 240

b) 480

c) 362.880

d) 30.240

e) 960

Comentários:

Precisamos calcular o número de anagramas da palavra INSTITUTO, em que as vogais estejam sempre juntas, assim como as consoantes. Para ordenar esses 2 grupos, há **2** possibilidades (primeiro as vogais ou primeiro as consoantes).

No grupo das vogais, há 4 letras, sendo 2 delas iguais (I). Assim, o número de maneiras de reordenar os elementos desse grupo é a permutação de 4 elementos, com repetição de 2:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

No grupo das consoantes, há 5 letras, sendo 3 delas iguais (T). Assim, o número de maneiras de reordenar os elementos desse grupo é a permutação de 5 elementos, com repetição de 3:

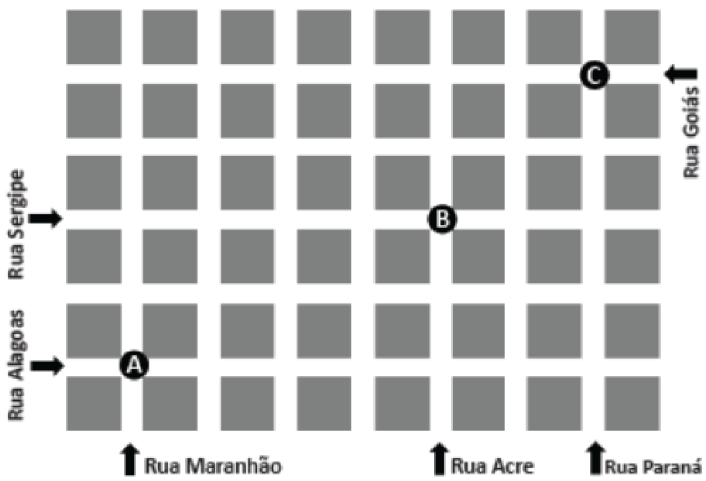
$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas nessas condições é o produto:

$$n = 2 \times 12 \times 20 = 480$$

Gabarito: B

10. (FCM - CEFETMINAS/2022 - Pref. Santa Cruz do Escalvado) A figura a seguir é um mapa, mostrando parte das ruas de um bairro, em que todos os quarteirões, representados pelos quadrados, possuem o mesmo tamanho.



Considere que uma pessoa esteja em um automóvel no ponto A, esquina das ruas Maranhão e Alagoas, e pretenda chegar ao ponto C, esquina das ruas Goiás e Paraná, passando pelo ponto B, esquina das ruas Acre e Sergipe, de modo a percorrer sempre o trajeto mais curto possível.

Assim, considerando as informações dadas, o número de caminhos diferentes que essa pessoa pode fazer é igual a

a) 75

b) 90

c) 100

d) 120

Comentários:

Para sair do ponto A e chegar no ponto B, a pessoa precisa percorrer 4 ruas para a direita e 2 ruas para cima. Os caminhos serão diferentes se a ordem desses percursos mudar. Representando o percurso à direita como D e o percurso para cima como C, o caminho DDDDCC é diferente do caminho CDDCDD, por exemplo.

Assim, o número de caminhos diferentes entre A e B corresponde a uma permutação de 6 elementos, com repetição de 4 D´s e 2 C´s:

$$n(A,B) = P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 3 \times 5 = 15$$

Ademais, para sair do ponto B e chegar no ponto C, a pessoa precisa percorrer 2 ruas para a direita e 2 ruas para cima, o que corresponde a uma permutação de 4 elementos, com repetição de 2 D´s e 2 C´s:

$$n(B,C) = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2} = 2 \times 3 = 6$$

Por fim, o número de maneiras de a pessoa realizar ambos os percursos (eventos concomitantes) é o produto (princípio multiplicativo):

$$n = 15 \times 6 = 90$$

Gabarito: B

11. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Joana e suas 8 amigas saíram para jantar e a única mesa vaga no restaurante era uma mesa central redonda.

Desse modo, de quantas formas elas podem se sentar nesta mesa?

a) 9!

b) 5!

c) 4!

d) 7!

e) 8!

Comentários:

O número de maneiras de 9 pessoas se sentarem em uma mesa redonda corresponde à permutação circular de 9. Nessa situação, fixamos uma pessoa qualquer e calculamos a permutação simples das outras 8:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

Gabarito: E

12. (AOCP/2022 - Pref. Pinhais) Uma reunião será feita com o Prefeito, o vice, o chefe da Câmara dos vereadores e os 5 chefes das Secretarias Municipais. De quantas maneiras é possível alocar essas 8 pessoas em uma mesa circular de modo que Prefeito e vice fiquem sempre lado a lado?

a) 10.080 maneiras

b) 5.040 maneiras

c) 720 maneiras

d) 1.440 maneiras

e) 2.520 maneiras

Comentários:

Para que o Prefeito e o Vice fiquem lado a lado, primeiro as tratamos como elementos único. Assim, consideramos que temos uma permutação circular de 7 elementos (6 pessoas e mais a dupla como única):

$$PC_7 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para cada uma dessas possibilidades, há 2 maneiras de o Prefeito e o Vice se sentarem (o Prefeito à direita do Vice ou o contrário). Logo, precisamos multiplicar esse resultado por 2:

$$n = 2 \times 720 = 1440$$

Gabarito: D

QUESTÕES COMENTADAS – MULTIBANCAS

Arranjo e Combinação

1. (FCM-CEFETMINAS/2023 - Pref. Contagem/MG) Uma empresa possui dez funcionários, entre eles Carlos e Beatriz, e precisa selecionar uma comissão com quatro desses funcionários para viajarem a uma feira de negócios. Entretanto, é necessário que ao menos um deles, Carlos ou Beatriz, fique na empresa e, assim, não sejam escolhidos juntos para essa viagem. Desse modo, considerando-se essa situação, o número de comissões diferentes com seus funcionários que a empresa pode organizar para ir à feira de negócios é

a) 45

b) 112

c) 165

d) 182

e) 210

Comentários:

Conforme o enunciado, dos 10 funcionários, precisamos escolher 4 (sem importância de ordem, pois todos terão a mesma função). Porém, Carlos e Beatriz não podem ser escolhidos juntos para formar a comissão.

Para resolver essa questão, vamos calcular o número total de possibilidades de formar a comissão, sem restrição, e, em seguida, subtraímos o número de maneiras de selecionar tanto Carlos quanto Beatriz para a comissão. O número total de maneiras de selecionar 4 funcionários, dentre 10, sem importância de ordem:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Selecionando Carlos e Beatriz para a comissão, restarão 8 funcionários, dos quais 2 deverão ser escolhidos:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

E a diferença é:

$$n = 210 - 28 = 182$$

Gabarito: D

2. (MAIS/2022 - CM Praia Grande/SP) Carlos e Irina irão se casar e, para o bufê, devem escolher 4 tipos de doces em um cardápio que contém 7 opções. Assinale a alternativa que apresenta quantas são as combinações possíveis que Carlos e Irina podem escolher, sabendo que a ordem da escolha dos doces não é importante.

a) 35

b) 70

c) 105

d) 210

Comentários:

O número de maneiras de escolher 4 doces, dentre 7 possibilidades, considerando que a ordem da escolha não importa, é a combinação de 4 elementos, dentre 7:

$$C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$$

Gabarito: A

3. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Os estudantes de um departamento de pós-graduação formado por 8 mestrandos e 5 doutorandos foram convidados a apresentar seus trabalhos em um congresso. Entretanto, o departamento possui recursos para pagar os custos de viagem de apenas 7 desses estudantes. Considerando que, dentre os escolhidos, 3 estudantes devem ser de mestrado e 4 de doutorado, quantas maneiras distintas os estudantes podem ser selecionados?

a) 56

b) 128

c) 280

d) 360

Comentários:

O enunciado informa que serão selecionados 3 mestrandos, dentre 8, e 4 doutorandos, dentre 5. Considerando que a ordem não importa, o número de maneiras de selecionar 3 mestrandos, dentre 8, é a combinação de 8 escolhe 3:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

E o número de maneiras de selecionar 4 doutorandos, dentre 5, é a combinação de 5 escolhe 4:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1! \times 4!} = 5$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de escolher os mestrandos E os doutorandos (eventos concomitantes) é o produto:

$$n = 56 \times 5 = 280$$

Gabarito: C

4. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Gabriel pode formar 696 grupos com, pelo menos, um graduado.

Comentários:

Para encontrar o número de maneiras de formar um grupo com **pelo menos um** graduado, vamos subtrair, de todas as possibilidades, aquelas que não possuem qualquer funcionário graduado.

Na questão anterior, vimos que o número total de possibilidades, sem restrições, é:

$$C_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)! \times 3!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15! \times 3!} = \frac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2} = 3 \times 17 \times 16 = 816$$

Para que o grupo não contenha graduado algum, é necessário selecionar 3 funcionários, dentre os 10 não graduados:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

A diferença corresponde aos grupos com pelo menos um graduado:

$$n = 816 - 120 = 696$$

Gabarito: Certo

5. (FEPESE/2022 - FCEE) Um grupo de 8 pessoas, incluindo Luciano e Paula, deseja formar uma comitiva com três representantes. Quantas comitivas diferentes são possíveis formar, se Luciano e Paula não podem participar juntos na mesma comitiva?

a) Mais de 58

b) Mais de 53 e menos de 58

c) Mais de 48 e menos de 53

d) Mais de 43 e menos de 48

e) Menos de 43

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de selecionar 3 pessoas, dentre 8, de maneira que duas pessoas específicas (Luciano e Paula) não façam parte da comissão juntos.

Para isso, vamos primeiro calcular o número total de maneiras de formar a comissão, sem restrições. Assim, temos a combinação de 8 escolhe 3:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$$

Agora, vamos **subtrair** as possibilidades que não atendem à condição imposta. Se Luciano e Paula participam juntos da comissão, restarão 6 pessoas, das quais uma deve ser escolhida para a comissão (**6** possibilidades).

Logo, o número de possibilidades de formar a comissão, atendendo à condição, é a diferença:

$$n = 56 - \mathbf{6} = 50$$

Gabarito: C

6. (IDECAN/2022 - IF/PA) Em uma corrida de rua com 50 participantes inscritos com as numerações de 1 a 50 ficaram nos três primeiros lugares os atletas cuja soma das inscrições era um número par. Nesta corrida, os três primeiros eram considerados os campeões e recebiam a mesma premiação, independente da ordem. Assinale a alternativa que apresenta de quantas maneiras essa situação pode acontecer.

a) 9800

b) 7500

c) 25

d) 300

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de escolher 3 competidores dentre 50, numerados de 1 a 50, cuja soma dos números seja par. O enunciado informa que a ordem desses 3 competidores não importa.

Para que a soma dos 3 números seja par, é necessário que todos os números sejam pares ou 2 números sejam ímpares e um par.

Se todos forem pares, temos a escolha de 3 dentre 25 números pares:

$$n(I) = C_{25,3} = \frac{25!}{(25-3)! \times 3!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{22! \times 3!} = \frac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2} = 25 \times 4 \times 23 = 2300$$

Se dois forem ímpares, temos a escolha de 2 dentre 25 números ímpares:

$$C_{25,2} = \frac{25!}{(25-2)! \times 2!} = \frac{25 \times 24 \times 23!}{23! \times 2} = 25 \times 12 = 300$$

Ademais, há 25 possibilidades para a escolha do número par. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de ocorrer esse cenário é:

$$n(II) = 300 \times 25 = 7500$$

Por serem cenários mutuamente excludentes, o número total de maneiras de a soma dos 3 números ser par é a soma dos resultados (princípio aditivo):

$$n = 2300 + 7500 = 9800$$

Gabarito: A

7. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) Uma senha para acesso em um site de compras exige que o cliente escolha 3 caracteres distintos. A senha deve apresentar as seguintes características:

- **deve conter duas letras distintas e um dígito;**
- **as letras que podem ser utilizadas são {A, B, C, X, Y}**
- **os dígitos que podem ser utilizados são apenas os ímpares.**

O número de senhas distintas que são possíveis neste caso é

a) 120

b) 240

c) 300

d) 320

Comentários:

Como as posições das letras e do dígito não estão definidas, vamos primeiro **escolher** os elementos que serão utilizados na senha, **sem** nos preocuparmos com a ordem nesse primeiro momento, e em seguida calculamos todas as maneiras de **ordenar** os elementos escolhidos.

Sabendo que a senha é composta por 2 letras distintas, dentre 5, o número de maneiras de escolher as letras, **sem** nos preocuparmos com a ordem, é a combinação de 5 escolhe 2:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 5 \times 2 = 10$$

Ademais, havendo 5 possíveis dígitos (números ímpares), há 5 maneiras de **escolher** o dígito. Uma vez definidos os 3 elementos que irão compor a senha, precisamos do número de maneiras de ordená-los, o que corresponde à permutação de 3:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Por fim, o número de senhas distintas, nessas condições, é o produto (princípio multiplicativo):

$$n = 10 \times 5 \times 6 = 300$$

Gabarito: D

8. (IBFC/2022 - EBSERH-UNIFAP) Para o seu casamento, Adriana deve escolher três músicas que serão tocadas na igreja, dentre 10 possíveis. Além disso, Adriana deve escolher em qual ordem cada uma dessas três músicas escolhidas serão tocadas. Nessas condições, o total de escolhas possíveis de Adriana é igual a:

a) 120

b) 360

c) 480

d) 720

e) 1440

Comentários:

O enunciado informa que Adriana deve escolher 3 dentre 10 músicas, considerando que a ordem importa. Assim, temos o arranjo de 3 elementos, dentre 10:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Gabarito: D

9. (IDECAN/2022 - CFO) Nos Jogos Nacionais dos Cursos de Formação de Oficiais, na modalidade barra, nove atletas se inscreveram dos quais quatro são de Mato Grosso do Sul. De quantos modos é possível que pelo menos um cadete da Academia de Polícia do Mato Grosso do Sul fique em uma das três primeiras posições na modalidade barra?

a) 60

b) 444

c) 504

d) 669

e) 729

Comentários:

Há 9 atletas, dos quais 4 são do Mato Grosso do Sul. Para calcular as possibilidades para as 3 primeiras posições, com **pelo menos um** atleta do Mato Grosso do Sul, devemos calcular o número total de possibilidades para as 3 primeiras posições e subtrair o número de possibilidades sem qualquer atleta do Mato Grosso do Sul.

O número total de possibilidades para as 3 primeiras posições (com importância de ordem), sabendo que há 9 atletas no total é o arranjo:

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

E o número de possibilidades para as 3 primeiras posições, sem qualquer atleta do Mato Grosso do Sul, sabendo que há 5 atletas que não são desse estado, é o arranjo:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

A diferença corresponde ao número de possibilidades para as 3 primeiras posições, com pelo menos um atleta do Mato Grosso do Sul:

$$n = 504 - 60 = 444$$

Gabarito: B

10. (FCM-CEFETMINAS/2022 - Pref. Timóteo/MG) Considere os números naturais de quatro algarismos, ou seja, de 1000 a 9999. Alguns desses números têm os algarismos apresentados em ordem decrescente, como, por exemplo, os números 9862 e 8641. Já os números 8247 e 4479 não têm os algarismos escritos em ordem decrescente.

A quantidade de números naturais de quatro algarismos que apresentam os algarismos em ordem decrescente é igual a

a) 144

b) 176

c) 210

d) 252

Comentários:

Para que os algarismos sejam dispostos em ordem decrescente eles precisam ser distintos. Ademais, dados quaisquer 4 algarismos distintos, há exatamente uma forma de ordená-los de maneira decrescente. Por exemplo, se os algarismos forem 8247, como indicado no enunciado, a única possibilidade é 8742.

Assim, a quantidade de números de 4 algarismos em ordem decrescente corresponde ao número de maneiras de escolher 4 algarismos, dentre 10 (de 0 a 9). Uma vez escolhidos os algarismos, haverá uma única maneira de ordená-los.

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$

Gabarito: C

11. (QUADRIX/2022 - CRMV/PR) Bárbara quer comprar 10 croissants em uma padaria onde há 3 tipos de croissant (presunto e queijo, pera com gorgonzola e chocolate).

Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que ela poderá fazer isso de

a) 44 maneiras distintas.

b) 55 maneiras distintas.

c) 66 maneiras distintas.

d) 77 maneiras distintas.

e) 88 maneiras distintas.

Comentários:

Sabendo que há 3 tipos de croissant, precisamos escolher 10 croissants, que podem ser do mesmo sabor ou de sabores diferentes. Assim, temos uma combinação completa com $n = 3$ tipos diferentes e $k = 10$ objetos iguais ou diferentes.

Nessa situação, podemos calcular o número de maneiras de escolher os sabores dos 10 croissants pelo número de maneiras de reordenar os k = 10 objetos e n - 1 = 2 divisórias, o que corresponde a uma permutação de 12 elementos, com repetição de 10 e de 2:

$$CR_n^k = P_{n+k-1}^{n-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!}$$

$$CR_3^{10} = P_{12}^{2,10} = \frac{12!}{2! \times 10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 10!} = 6 \times 11 = 66$$

Gabarito: C.

12. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há exatamente 64 modos de uma pessoa comprar 10 carnes nessa loja.

Comentários:

Precisamos calcular o número de maneiras de comprar 10 carnes, sabendo que há 3 tipos de carne. Assim, temos uma combinação completa de $n = 3$ tipos diferentes e $k = 10$ objetos.

Podemos considerar que temos 2 barras que dividem os três tipos de carne e 10 objetos que representam as carnes; e que vamos permutar esses 12 elementos, com repetição de 2 e de 10:

$$CR_3^{10} = P_{12}^{2,10} = \frac{12!}{2! \times 10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 10!} = 6 \times 11 = 66$$

Que é diferente de 64.

Gabarito: Errado

13. (AOCP/2022 - CBM/PA) Em um sorteio realizado por uma rede de supermercados, o bombeiro Abel recebeu 7 cartões vale-compras no valor de R$1.000,00 cada um. Sensibilizado por conta de um desastre climático recente e diante do instinto de proteger (razão pela qual escolheu a profissão), ele decide que renunciará ao seu prêmio em favor da população atingida pelo desastre. Após pesquisar, percebe que três ONGs (Organizações não Governamentais) encabeçam as ações de cuidados com os desabrigados. De quantas maneiras Abel poderia distribuir os 7 cartões entre as 3 ONGs, sabendo que é possível doar para apenas uma, apenas duas ou distribuir entre as três?

a) 210

b) 343

c) 7

d) 35

e) 36

Comentários:

É necessário distribuir 7 cartões entre 3 ONGs, sem restrições, ou seja, é possível que os cartões sejam distribuídos para apenas uma, apenas duas ou todas as três ONGS. Assim, temos uma combinação completa de $n = 3$ tipos diferentes e $k = 7$ objetos.

Podemos considerar que temos 2 barras que dividem as três ONGs e 7 objetos que representam os cartões; e que vamos permutar esses 9 elementos, com repetição de 2 e de 7:

$$CR_3^7 = P_9^{2,7} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = 9 \times 4 = 36$$

Gabarito: E

▪

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Princípios de Contagem

1. (AVANÇASP/2023 - Pref. Americana/SP) Em uma repartição pública trabalham 12 homens e 08 mulheres. O número máximo de duplas distintas que se pode formar contendo apenas um homem e uma mulher dessa repartição é igual a:

a) 84

b) 50

c) 72

d) 68

e) 96

2. (UNESC/2022 - Pref. Lagunas/SC) Uma lanchonete oferece 18 tipos de sanduíche, 10 tipos de suco e 16 tipos de sorvete. De quantas maneiras diferentes é possível montar uma refeição com um tipo de sanduíche, um tipo de suco e um tipo de sorvete?

a) É possível montar essa refeição de 1.320 maneiras diferentes.

b) É possível montar essa refeição de 2.460 maneiras diferentes.

c) É possível montar essa refeição de 3.550 maneiras diferentes.

d) É possível montar essa refeição de 2.880 maneiras diferentes.

e) É possível montar essa refeição de 1.960 maneiras diferentes.

3. (IDECAN/2022 - CBM/MS) Determine a quantidade de números pares com quatro algarismos que podemos formar com os números 1, 5, 6, 7 ,8.

a) 250

b) 230

c) 180

d) 160

e) 120

4. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Patrícia tem uma rara coleção com 56 pares de brincos que são guardados em pequenos recipientes, numerados de 1 a 56. Atendendo ao pedido de sua irmã, Patrícia retirou, de maneira aleatória, três recipientes. O número de retiradas dos três recipientes de forma que o segundo seja o de número 27 é:

a) 2970

b) 3080

c) 3192

d) 3228

5. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Em uma corrida de fórmula 1, há 20 pilotos disputando a 1ª, 2ª e 3ª colocação. Sabendo que esses lugares dão, nessa ordem, 25, 18 e 15 pontos para o campeonato.

Assim, podemos afirmar com certeza que há:

a) 6840 formas de acontecer o pódio.

b) 6750 formas de acontecer o pódio.

c) 5814 formas de acontecer o pódio.

d) 8000 formas de acontecer o pódio.

e) 15625 formas de acontecer o pódio.

6. (IBFC/2022 - MGS) A senha de um banco é formada por três consoantes distintas, considerando o alfabeto de 26 letras.

Nessas condições, o total de senhas possíveis de serem formadas é igual a:

a) 1330

b) 7980

c) 3990

d) 15600

7. (AOCP/2022 - PM/ES) Um XILOFONE deve ser montado escolhendo 7 teclas de tamanhos distintos, mas sempre obedecendo, da esquerda para a direita, a ordem crescente de tamanho. Para cada tecla, há disponíveis 5 cores diferentes: branco, amarelo, azul, verde e vermelho.

De quantas maneiras distintas é possível montar esse XILOFONE, sabendo que teclas vizinhas não podem ter a mesma cor?

a) 16.384

b) 20.480

c) 40.320

d) 5.040

e) 78.125

8. (AOCP/2022 - PM/ES) Os 60 policiais militares que compõem o efetivo da Banda Militar receberam uma identificação numérica. Esse número é par e é formado por 4 números distintos escolhidos entre os números {2, 3, 4, 5, 6}. Se cada policial possui uma única numeração, quantas identificações, utilizando o mesmo critério, ainda sobram para possíveis contratações de novos membros?

a) 6

b) 8

c) 12

d) 20

e) 72

9. (CPCP/2022 - UTFPR) A quantidade de números ímpares com três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 3, 4, 8, 9, é:

a) 60

b) 48

c) 36

d) 72

e) 75

10. (RBO/2022 - SMFA-BH) Marcelo possui um cartão de crédito de uma determinada instituição financeira e a senha desse cartão deve ser formada exclusivamente por algarismos de 0 a 9. Essa instituição permite que o proprietário do cartão utilize, somente, senhas de cinco algarismos distintos e que a senha seja sempre um número par.

Assinale a alternativa que apresenta o número de senhas possíveis para o cartão de crédito de Marcelo.

a) 3.600

b) 25.200

c) 75.600

d) 7.200

e) 15.120

GABARITO

1. LETRA E
2. LETRA D
3. LETRA A
4. LETRA A
5. LETRA A
6. LETRA B
7. LETRA B
8. LETRA C
9. LETRA B
10. LETRA E

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Permutação

1. (INAZ do Pará/2022 - SAGAZ) Um hacker descobriu que sua vítima escolheu colocar como senha de banco os algarismos referentes ao dia e ao mês de sua data de nascimento. Ele não sabe a ordem dos 4 (quatro) algarismos, então decidiu utilizar o método "força bruta", qual seja, tentar todas as combinações alterando a ordem dos algarismos.

03/12 → ___ ___ ___ ___

Dia Mês **Senha**

Sabendo-se que não há repetição de algarismos e que todos foram utilizados, qual o total de tentativas que o hacker pode fazer?

a) 16.

b) 24.

c) 30.

d) 36.

e) 42.

2. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) João possui seis livros de Matemática. São eles: Geometria I, Álgebra I, Álgebra II, Análise, Matemática Financeira e Números Complexos.

O número de maneiras que ele pode empilhar esses livros de modo que os livros de Álgebra fiquem juntos é

a) 240

b) 120

c) 60

d) 20

3. (FEPESE/2022 - CINCATARINA) Quantos números diferentes podem ser formados permutando os algarismos do número 3.444.551.

a) Mais de 415

b) Mais de 400 e menos de 415

c) Mais de 385 e menos de 400

d) Mais de 370 e menos de 385

e) Menos de 370

4. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra "MATO" está para o número de anagramas da palavra "GROSSO" assim como 2 está para 15.

5. (Quadrix/2022 - CRP 18) Com relação a princípios de contagem e probabilidade e a arranjos e permutações, julgue o item.

O número de anagramas da palavra "GROSSO" que começam ou terminam com a letra O é igual a 120.

6. (Legalle/2022 - Pref. Hulha Negra/RS) A quantidade total de anagramas da palavra PANELA que contêm a sequência ELA é:

a) 6

b) 12

c) 18

d) 24

e) 48

7. (RBO/2022 - SMFA-BH) Oito, entre eles, Ana, Fernanda, Maria e José, foram ao teatro. Compraram oito lugares contíguos.

O número de maneiras distintas que esses oito amigos podem se assentar lado a lado, se Ana, Fernanda e Maria devem estar sempre juntas, além disso, José sempre deverá ocupar uma das extremidades dos lugares contíguos, é

a) 240

b) 720

c) 840

d) 1.200

e) 1.440

8. (ACCESS/2022 - CPGI) Seis amigos se posicionam, um ao lado do outro, para tirar uma foto. Entre eles, estão Adão e Eva. O fotógrafo pediu para que os seis amigos se posicionassem para a foto de modo que Adão ficasse separado de Eva. O número de maneiras de isso ocorrer é

a) 600

b) 560

c) 540

d) 480

9. (AOCP/2022 - IF/RO) Quantos anagramas da palavra INSTITUTO possuem as vogais sempre juntas e as consoantes, também, sempre juntas?

a) 240

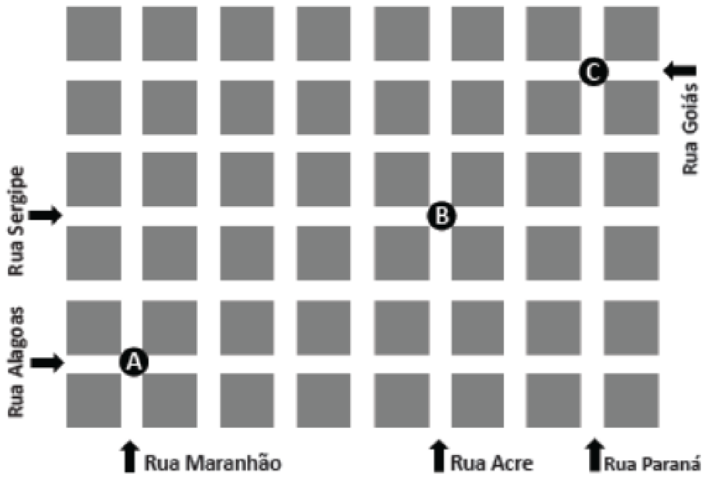
b) 480

c) 362.880

d) 30.240

e) 960

10. (FCM - CEFETMINAS/2022 - Pref. Santa Cruz do Escalvado) A figura a seguir é um mapa, mostrando parte das ruas de um bairro, em que todos os quarteirões, representados pelos quadrados, possuem o mesmo tamanho.



Considere que uma pessoa esteja em um automóvel no ponto A, esquina das ruas Maranhão e Alagoas, e pretenda chegar ao ponto C, esquina das ruas Goiás e Paraná, passando pelo ponto B, esquina das ruas Acre e Sergipe, de modo a percorrer sempre o trajeto mais curto possível.

Assim, considerando as informações dadas, o número de caminhos diferentes que essa pessoa pode fazer é igual a

a) 75

b) 90

c) 100

d) 120

11. (AVANÇASP/2022 - Pref. Laranjal Paul) Joana e suas 8 amigas saíram para jantar e a única mesa vaga no restaurante era uma mesa central redonda. Desse modo, de quantas formas elas podem se sentar nesta mesa?

a) 9!

b) 5!

c) 4!

d) 7!

e) 8!

12. (AOCP/2022 - Pref. Pinhais) Uma reunião será feita com o Prefeito, o vice, o chefe da Câmara dos vereadores e os 5 chefes das Secretarias Municipais. De quantas maneiras é possível alocar essas 8 pessoas em uma mesa circular de modo que Prefeito e vice fiquem sempre lado a lado?

a) 10.080 maneiras

b) 5.040 maneiras

c) 720 maneiras

d) 1.440 maneiras

e) 2.520 maneiras

GABARITO

1. LETRA B
2. LETRA A
3. LETRA A
4. CERTO
5. ERRADO
6. LETRA D
7. LETRA E
8. LETRA D
9. LETRA B
10. LETRA B
11. LETRA E
12. LETRA D

LISTA DE QUESTÕES – MULTIBANCAS

Arranjo e Combinação

1. (FCM-CEFETMINAS/2023 - Pref. Contagem/MG) Uma empresa possui dez funcionários, entre eles Carlos e Beatriz, e precisa selecionar uma comissão com quatro desses funcionários para viajarem a uma feira de negócios. Entretanto, é necessário que ao menos um deles, Carlos ou Beatriz, fique na empresa e, assim, não sejam escolhidos juntos para essa viagem.

Desse modo, considerando-se essa situação, o número de comissões diferentes com seus funcionários que a empresa pode organizar para ir à feira de negócios é

a) 45

b) 112

c) 165

d) 182

e) 210

2. (MAIS/2022 - CM Praia Grande/SP) Carlos e Irina irão se casar e, para o bufê, devem escolher 4 tipos de doces em um cardápio que contém 7 opções.

Assinale a alternativa que apresenta quantas são as combinações possíveis que Carlos e Irina podem escolher, sabendo que a ordem da escolha dos doces não é importante.

a) 35

b) 70

c) 105

d) 210

3. (CONSULPLAN/2022 - Pref. Rosário) Os estudantes de um departamento de pós-graduação formado por 8 mestrandos e 5 doutorandos foram convidados a apresentar seus trabalhos em um congresso. Entretanto, o departamento possui recursos para pagar os custos de viagem de apenas 7 desses estudantes. Considerando que, dentre os escolhidos, 3 estudantes devem ser de mestrado e 4 de doutorado, quantas maneiras distintas os estudantes podem ser selecionados?

a) 56

b) 128

c) 280

d) 360

4. (QUADRIX/2022 - CFFa) A fim de montar uma equipe para cuidar de um novo investimento de sua empresa, Gabriel precisa montar uma equipe de três funcionários. Ele dispõe de 18 funcionários diferentes para escolha, sendo oito desses funcionários graduados e dez não graduados.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item.

Gabriel pode formar 696 grupos com, pelo menos, um graduado.

5. (FEPESE/2022 - FCEE) Um grupo de 8 pessoas, incluindo Luciano e Paula, deseja formar uma comitiva com três representantes. Quantas comitivas diferentes são possíveis formar, se Luciano e Paula não podem participar juntos na mesma comitiva?

a) Mais de 58

b) Mais de 53 e menos de 58

c) Mais de 48 e menos de 53

d) Mais de 43 e menos de 48

e) Menos de 43

6. (IDECAN/2022 - IF/PA) Em uma corrida de rua com 50 participantes inscritos com as numerações de 1 a 50 ficaram nos três primeiros lugares os atletas cuja soma das inscrições era um número par. Nesta corrida, os três primeiros eram considerados os campeões e recebiam a mesma premiação, independente da ordem. Assinale a alternativa que apresenta de quantas maneiras essa situação pode acontecer.

a) 9800

b) 7500

c) 25

d) 300

7. (ACCESS/2022 - CM Rio Acima) Uma senha para acesso em um site de compras exige que o cliente escolha 3 caracteres distintos. A senha deve apresentar as seguintes características:

- **deve conter duas letras distintas e um dígito;**
- **as letras que podem ser utilizadas são {A, B, C, X, Y}**
- **os dígitos que podem ser utilizados são apenas os ímpares.**

O número de senhas distintas que são possíveis neste caso é

a) 120

b) 240

c) 300

d) 320

8. (IBFC/2022 - EBSERH-UNIFAP) Para o seu casamento, Adriana deve escolher três músicas que serão tocadas na igreja, dentre 10 possíveis. Além disso, Adriana deve escolher em qual ordem cada uma dessas três músicas escolhidas serão tocadas. Nessas condições, o total de escolhas possíveis de Adriana é igual a:

a) 120

b) 360

c) 480

d) 720

e) 1440

9. (IDECAN/2022 - CFO) Nos Jogos Nacionais dos Cursos de Formação de Oficiais, na modalidade barra, nove atletas se inscreveram dos quais quatro são de Mato Grosso do Sul. De quantos modos é possível que pelo menos um cadete da Academia de Polícia do Mato Grosso do Sul fique em uma das três primeiras posições na modalidade barra?

a) 60

b) 444

c) 504

d) 669

e) 729

10. (FCM-CEFETMINAS/2022 - Pref. Timóteo/MG) Considere os números naturais de quatro algarismos, ou seja, de 1000 a 9999. Alguns desses números têm os algarismos apresentados em ordem decrescente, como, por exemplo, os números 9862 e 8641. Já os números 8247 e 4479 não têm os algarismos escritos em ordem decrescente.

A quantidade de números naturais de quatro algarismos que apresentam os algarismos em ordem decrescente é igual a

a) 144

b) 176

c) 210

d) 252

11. (QUADRIX/2022 - CRMV/PR) Bárbara quer comprar 10 croissants em uma padaria onde há 3 tipos de croissant (presunto e queijo, pera com gorgonzola e chocolate).

Com base nessa situação hipotética, é correto afirmar que ela poderá fazer isso de

a) 44 maneiras distintas.

b) 55 maneiras distintas.

c) 66 maneiras distintas.

d) 77 maneiras distintas.

e) 88 maneiras distintas.

12. (QUADRIX/2022 - Pref. Lagunas/SC) Em uma loja, há 6 tipos de refrigerante, 4 tipos de queijo e 3 tipos de carne. Com base nesse caso hipotético, julgue o item.

Há exatamente 64 modos de uma pessoa comprar 10 carnes nessa loja.

13. (AOCP/2022 - CBM/PA) Em um sorteio realizado por uma rede de supermercados, o bombeiro Abel recebeu 7 cartões vale-compras no valor de R$1.000,00 cada um. Sensibilizado por conta de um desastre climático recente e diante do instinto de proteger (razão pela qual escolheu a profissão), ele decide que renunciará ao seu prêmio em favor da população atingida pelo desastre. Após pesquisar, percebe que três ONGs (Organizações não Governamentais) encabeçam as ações de cuidados com os desabrigados.

De quantas maneiras Abel poderia distribuir os 7 cartões entre as 3 ONGs, sabendo que é possível doar para apenas uma, apenas duas ou distribuir entre as três?

a) 210

b) 343

c) 7

d) 35

e) 36

GABARITO

1. LETRA D
2. LETRA A
3. LETRA C
4. CERTO
5. LETRA C
6. LETRA A
7. LETRA D
8. LETRA D
9. LETRA B
10. LETRA C
11. LETRA C
12. ERRADO
13. LETRA E

ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE:
PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.

1. Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.
2. Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).
3. Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).
4. Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).
5. Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).
6. Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).
7. Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.
8. O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.

Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.