Universidad Del Valle de Guatemala
Departamento de Computación
Modelación y Simulación

Diana Lucía Fernández Villatoro - 21747
Daniel Esteban Morales Urizar - 21785
Brandon Rolando Sicay Cumes - 2175

Laboratorio 3

Ejercicio 1

1. **¿Qué es el método de Runge-Kutta y cómo aproxima las soluciones a las EDO?**

El método de Runge-Kutta es un conjunto de técnicas que se usan para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual se basa en aproximaciones sucesivas con la finalidad de encontrar soluciones numéricas a estas ecuaciones.

Este método considera una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(x,\ y)$$

Donde se tiene la condición inicial de $y(x_o) = y_o$.

Este método avanza desde un punto $(x_n\ ,\ y_n)$ al punto $(x_{n+1}\ ,\ y_{n+1})$ con los siguientes pasos, primero se debe calcular la pendiente del punto inicial, que se define también como k_1:

$$k_1 = h\,f(x_n\,,\,y_n)$$

Luego se debe calcular k_2, que es la pendiente en el punto medio del intervalo, en este punto se utiliza k_1 para aproximar y en ese punto:

$$k_2 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

k_3 también es la pendiente del punto medio, pero ahora se utiliza k_2 para una mejor aproximación:

$$k_3 = h\,f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

k_4 es la pendiente al final del intervalo:

$$k_4 = h\,f(x_n + h,\ y_n + k_3)$$

Para calcular la siguiente aproximación de y se utiliza:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Y por último, para avanzar al siguiente punto se usa:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

2. **¿Cuáles son las ventajas y desventajas del método de Runge-Kutta en comparación con otros métodos numéricos para EDO? (Mencione al menos 2 ventajas y 2 desventajas)**
    - Ventajas

        Comparado con el método de Euler, y el método de Euler mejorado, el método de Rungue-Kutta es mucho más preciso, así como también resulta con un error global mucho menor debido a la combinación de varias evaluaciones de la función dentro de un intervalo. Así mismo este método generalmente es más estable y permite dar pasos relativamente grandes sin que se tenga que sacrificar la precisión, al contrario de métodos de menor orden.

        A su vez, si se compara con el método de Taylor se tiene la ventaja de que no se requiere el cálculo de derivadas de orden superior, pues este método solo evalúa la función en puntos específicos.

    - Desventajas

        Una de las principales desventajas de este método es que al requerir cuatro evaluaciones de la función, estas pueden llegar a ser costosas en términos de cómputo. Este método, al ser no un método autoadaptativo no se tiene la capacidad de ajustar el tamaño del paso automáticamente para equilibrar la precisión y eficiencia. Este método también tiene algunos problemas de memoria, pues en algunos problemas se requiere almacenar muchas evaluaciones, lo cual puede consumir más memoria que métodos más simples.

3. **¿Cómo se diferencia el método de Euler y el método de Runge-Kutta?**

    El método de Euler es un método numérico simple para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias que utiliza una única evaluación de la función de derivada por cada paso. h es el tamaño del paso y el error global de método es proporcional al tamaño del paso h, por lo que se debe definir un tamaño de paso pequeño para tener una precisión razonable. Este método puede llegar a ser inestable para algunos problemas, especialmente si el paso es muy grande o si el problema es muy complejo, pero también tiene costo computacional bajo.

    Por otra parte, el método de Runge-Kutta es un método de cuarto orden que es más complejo que el método anterior, el cual utiliza múltiples evaluaciones de la función de derivada en cada paso para mejorar la precisión. Al ser un método de cuarto orden tiene un error proporcional a h^4, lo que significa que puede lograr una alta precisión a pesar de tener pasos relativamente grandes, así mismo es un método más estable que el método de Euler, por lo que se pueden manejar una mayor variedad de problemas sin que se tenga que usar pasos extremadamente pequeños, a pesar de que tiene un costo computacional un poco más alto, pues se necesitan hacer más evaluaciones en cada paso, sin embargo se necesitan menos pasos para alcanzar una solución precisa

    .

4. **¿Cómo se puede aplicar el método de Euler y el método de Runge-Kutta modelos epidemiológicos y modelos de depredador-presa?**
   - **Model epidemiológico**

     Este modelo divide la población en tres compartimentos principales, que son los susceptibles (S), los infectados (I) y los recuperados (R). También se tienen tres principales ecuaciones diferenciales que describen la evolución de estos compartimentos:

$$\frac{dS}{dt} = -\ \beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

     Para aplicar el método de Euler hay que dividir el tiempo en pequeños intervalos de tamaño de h, y se actualizan las variables en cada paso de tiempo t mediante tres fórmulas:

$$S_{n+1} = S_n + h(-\boldsymbol{\beta}\, S_n\, I_n)$$

$$I_{n+1} = I_n + h(\boldsymbol{\beta}\, S_n\, I_n - \gamma\, I_n)$$

$$R_{n+1} = R_n + h(\gamma\, I_n)$$

     Por su parte, para el método de Runge-Kutta también hay que dividir el tiempo en pequeños intervalos de tamaño h, pero se deben calcular las cuatro pendientes, k_1, k_2, k_3 y k_4, para cada variable mediante las fórmulas:

$$k_1 = h\, f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h\, f(x_n + h, y_n + k_3)$$

     Y para cada paso de tiempo t se utilizan tres fórmulas para actualizarlas:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{6}\left(k_{1_S} + 2k_{2_S} + 2k_{3_S} + k_{4_S}\right)$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{6}\left(k_{1_I} + 2k_{2_I} + 2k_{3_I} + k_{4_I}\right)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{1}{6}\left(k_{1_R} + 2k_{2_R} + 2k_{3_R} + k_{4_R}\right)$$

- **Modelo depredador-presa**

Este modelo describe la interacción entre dos especies, una presa (x) y un depredador (y), y tiene dos ecuaciones diferenciales que son:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

Al igual que en el modelo anterior, para el método de Euler primero se divide el tiempo en intervalos de tamaño *h*, y para cada paso de tiempo *t* se actualizan las variables con las fórmulas:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\alpha x_n - \beta x_n y_n\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\delta x_n y_n - \gamma y_n\right)$$

Para el método de Runge-Kutta también se empieza dividiendo el tiempo en intervalos de tamaño *h*, para luego calcular cuatro pendientes k_1 , k_2 , k_3 y k_4 para cada variable por medio de cuatro ecuaciones:

$$k_1 = h\, f(x_n , y_n)$$

$$k_2 = h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h\, f(x_n + h, y_n + k_3)$$

Por último se actualizan las variables para cada paso de tiempo *t* con las fórmulas:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}\left(k_{1_x} + 2k_{2_x} + 2k_{3_x} + k_{4_x}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_{1_y} + 2k_{2_y} + 2k_{3_y} + k_{4_y}\right)$$

Link del repositorio

https://github.com/DanielMorales1103/lab3Modelacion