

# Korszerű számítástechnikai módszerek a fizikában 1

korszam1f19va

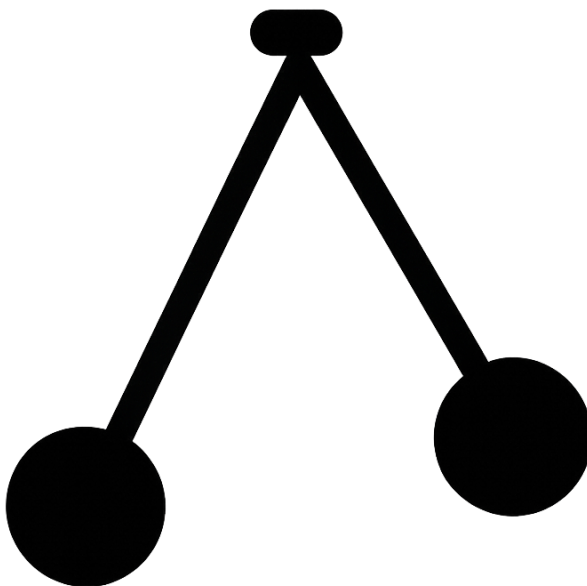
Dátuma: 2025. Május 19.

Készítette: Nemeskéri Dániel VS6E5A

---

## Kettős inga szimulációja

---



# KETTŐSINGA

# Alkalmazott szimulációs paraméterek

A szimuláció során végig az alábbi paramétereket alkalmaztuk:

- $T = 10.0 - 30.0 - 100.0$  (teljes szimulációs idő másodpercben, jelölve mikor melyik)
- $h = 0.001 - 0.01$  (időlépés nagysága, jelölve mikor melyik)
- $l_1 = 1 \text{ m}, \quad l_2 = 1 \text{ m}$  (inga hosszak)
- $m_1 = 1 \text{ kg}, \quad m_2 = 1 \text{ kg}$  (tömegek)
- $\omega_1(0) = 0, \quad \omega_2(0) = 0$  (kezdeti szögsebességek)

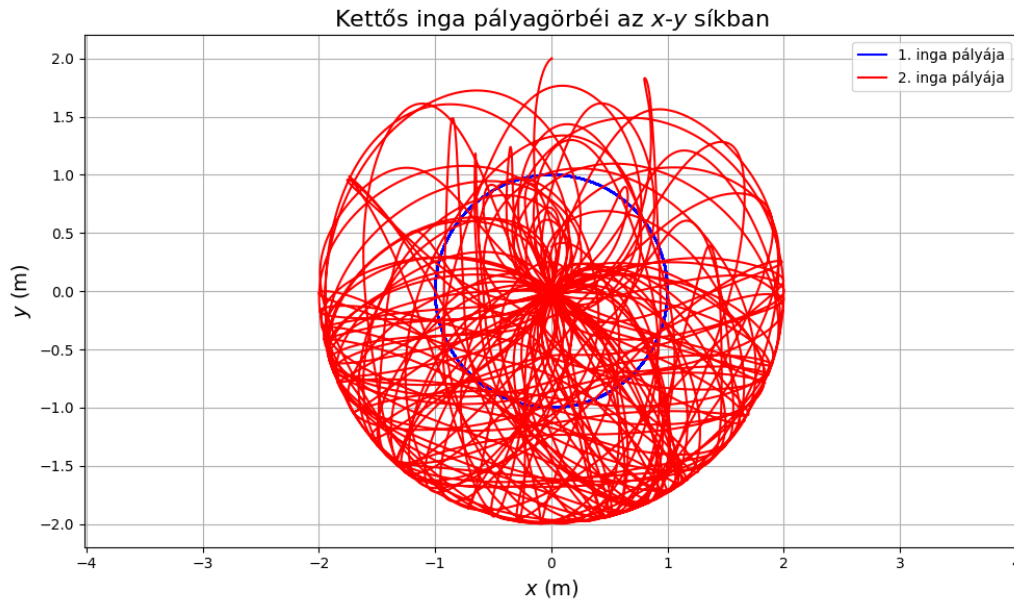
A tapasztalat az volt, hogy a szép, helyes szimuláció  $h = 0.001$  s-es időlépéssel kielégítő, ekkor viszont a  $T$  értékét érdemes korlátozni. Az első három diagrammot ezzel az időlépéssel készítettem. Később a futásidő csökkentése érdekében néhol  $h = 0.01$  s-es lépést választottam. A hossz és tömeg (illetve kezdeti szögsebesség) értékek végig állandóak és mindig ugyanezen értékekkel végeztem a szimulációkat.

## 1. Az inga pályája az $x$ - $y$ síkban

( $T = 100.0 \text{ s}$ ,  $h = 0.001 \text{ s}$ )

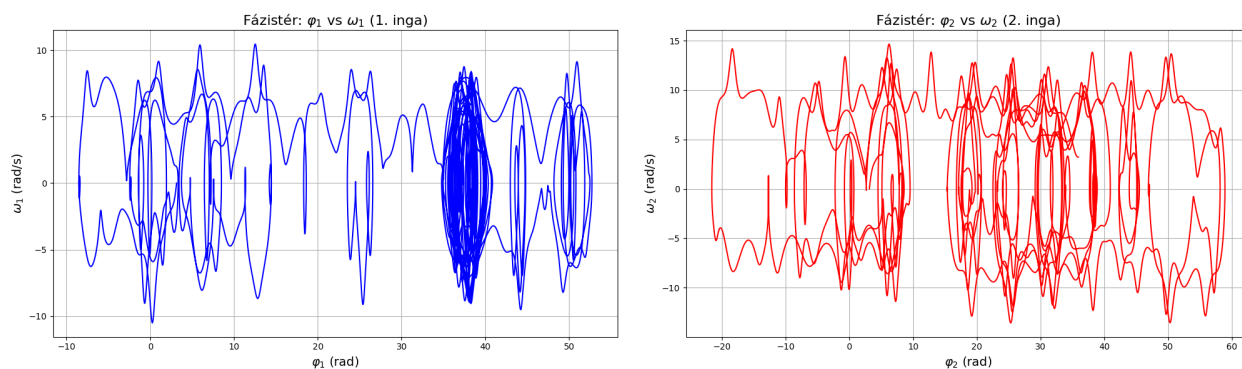
A szimuláció során kiszámítottuk az első és második inga végpontjának mozgását. Az alábbi ábra a két test által bejárt pályát ábrázolja az  $x$ - $y$  síkban. A rendszer érzékeny a kezdeti feltételekre, a görbék (nagy szögkitérítéssel indítva) kaotikus viselkedést mutatnak.

Az alábbi három diagrammot  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 3.14$  kezdőértékkel szimulálva kaptam. (1-2. ábrák)



1. ábra. Az inga végpontjainak pályái

## 2. Fázistérdiagramok

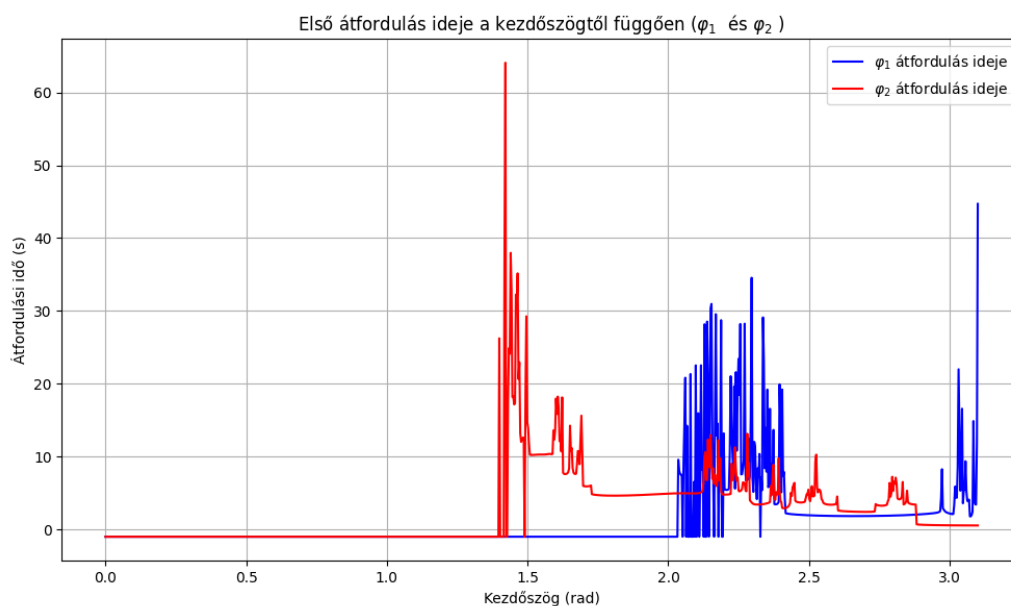


2. ábra. Balra: az első inga fázistere ( $\varphi_1, \omega_1$ ). Jobbra: a második inga fázistere ( $\varphi_2, \omega_2$ ).

## 3. Átfordulási idő a kezdőszög függvényében

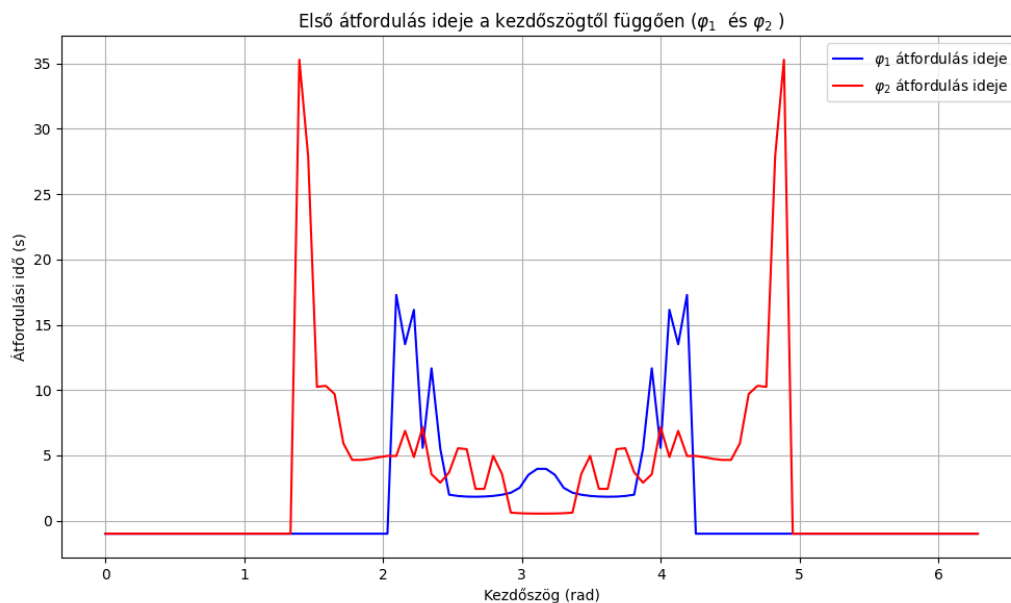
Ha a szimuláció ideje alatt nem történt átfordulás, akkor -1 értéket rendeltem az adott ponthoz. Ezt az ábrákon is megtartottam a trendek láthatósága érdekében.

A kezdőszöget közösen növeltem, majd vizsgáltam az első átfordulás idejét mindkét szög esetén. (3-4. ábrák)



3. ábra. Az első ( $\varphi_1$ ) és második ( $\varphi_2$ ) inga első átfordulási ideje a kezdeti szögtől függően.

$T = 100.0$ ,  $h = 0.001$ , 0–3.1 közötti 1000 darab kezdeti szögkitéréssel.



4. ábra. Az első ( $\varphi_1$ ) és második ( $\varphi_2$ ) inga első átfordulási ideje a kezdeti szögtől függően.  $T = 100.0$ ,  $h = 0.001$ ,  $0-2\pi$  közötti 100 darab kezdeti szögkitéréssel.

Megfigyelhető, hogy egy bizonyos szögeértékig (első inga:  $\sim 2.2$  rad, második inga:  $\sim 1.4$  rad) nincs átfordulás. Ez érthető, hiszen megfelelő helyzeti energia szükséges az átforduláshoz. Ezt követően az energia növekedésével az átfordulási idő csökken, majd az első inga esetén újra növekedést látunk, mivel a mozgás elején az inga rövid ideig mozdulatlan vagy alig mozdul, csak később gyorsul be.

## Heatmapek eltérő kezdőszögek esetén

A következő hőtérképeken a szín az első átfordulás idejét jelöli. A fehér területek azt jelentik, hogy nem történt átfordulás a szimuláció ideje alatt.

Azért végeztem szimulációt egyenlő hosszakkal, mert utánanézve a témának a kettő irodalmat találtam: [1], [2]. Ezekben az 5. ábrát és a 6. ábrákat találtam az első átfordulások idejéről. Látható hogy az általam készített ábrák nagy hasonlóságot, egyezést mutatnak velük! (7-9. ábrák)

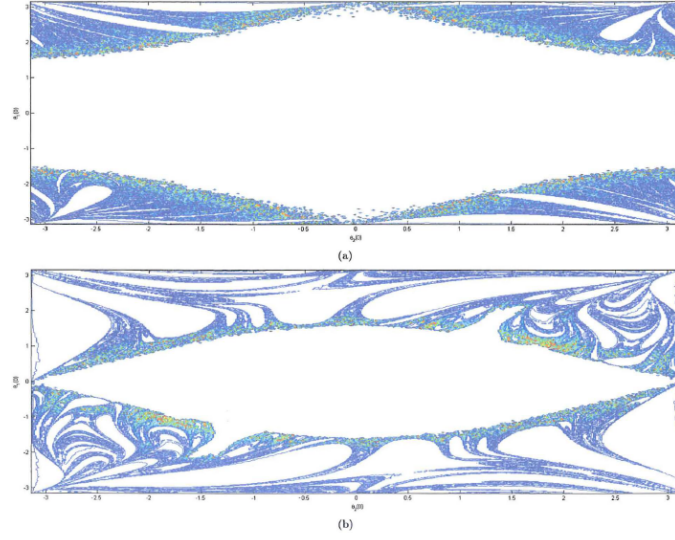


Figure 10: Contour plots for the time-for-first-flip of the respective pendulum masses; (a) giving the plot for the inner pendulum, (b) the outer pendulum. Axis shows initial conditions  $\theta_1(0)$  along the y-direction and  $\theta_2(0)$  along the x-direction. Blue region needs less time to flip, red region needs more time, white regions do not flip at all in the 70 seconds evaluated. Curious patterns emerge which has rotational symmetry.

5. ábra. chen\_2008\_report.pdf, 3. oldal, Chaos from Simplicity: An Introduction to the Double Pendulum, a két inga átfordulása

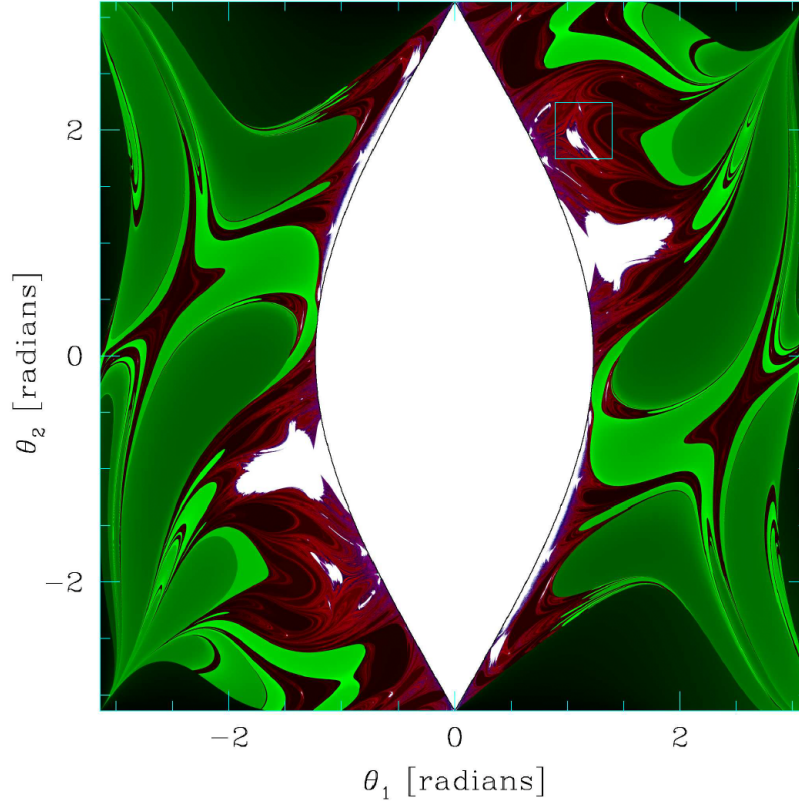
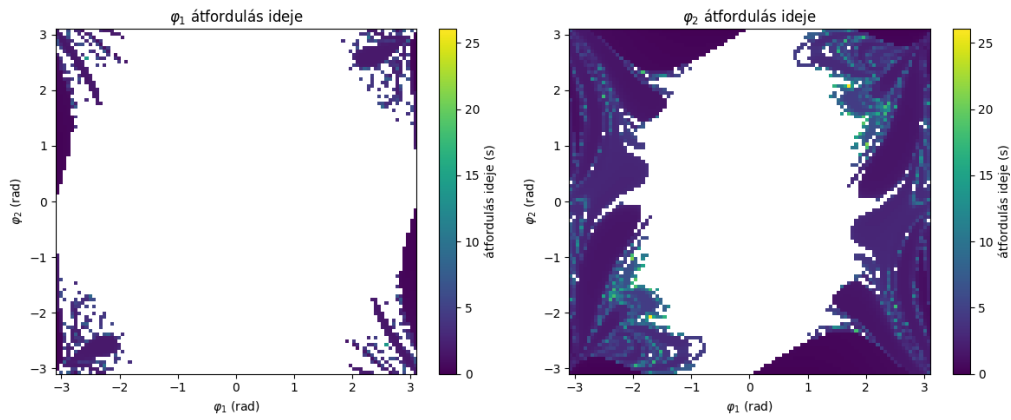
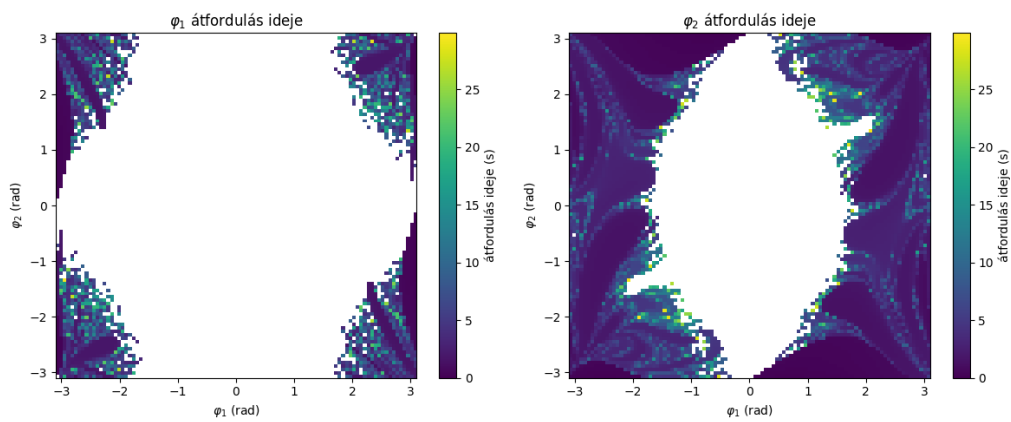


FIG. 2: Outcomes for the double pendulum. The initial angles of the two rods  $\theta_1$  and  $\theta_2$  range from  $-\pi$  to  $\pi$ . The color of each pixel indicates how much time elapses before either pendulum flips in units of  $\sqrt{l/g}$ . Green indicates the one of pendulums flips within 10 time units, red indicates between 10 and 100 units, purples denotes between 100 and 1000 units and blue shows those initial conditions that lead to flips only after 1000 to 10000  $\sqrt{l/g}$  have elapsed. Those that do not flip within 10000  $\sqrt{l/g}$  are plotted white. For reference the period of oscillation of the lower pendulum is  $2\pi\sqrt{3/2}\sqrt{l/g} \approx 7.7\sqrt{l/g}$ . Within each colour range, the darker shades flip sooner. Within the solid black curve, it is not energetically possible for either pendulum to flip.

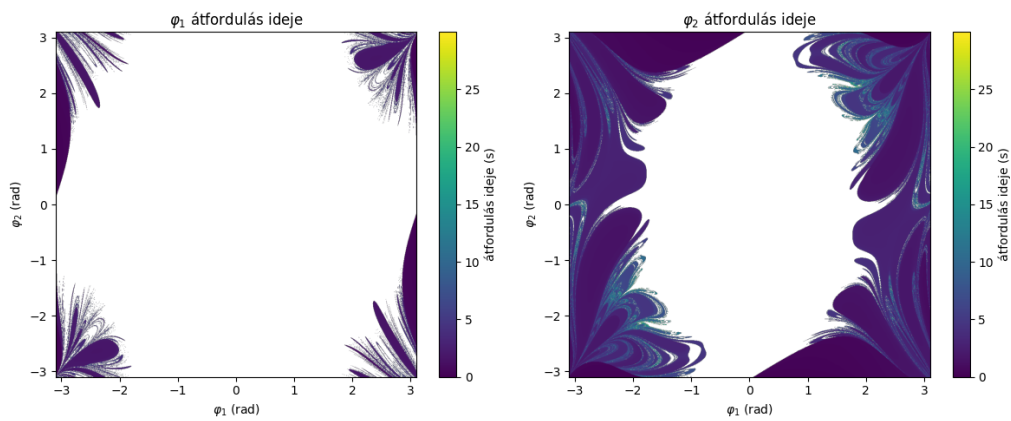
6. ábra. Double.pdf, 3. oldal, The Double Pendulum Fractal, a második inga átfordulása



7. ábra. Heatmap az első és második inga első átfordulási idejéről.  $T = 100.0$ ,  $h = 0.01$ .



8. ábra. 100x100-as felbontás,  $T = 30$ ,  $h = 0.001$



9. ábra. 1000x1000-as felbontás,  $T = 30$ ,  $h = 0.01$

## Hivatkozások

- [1] Chaos from Simplicity: An Introduction to the Double Pendulum,  
Joe Chen, 2008. február 5.
- [2] The Double Pendulum Fractal,  
Jeremy S. Heyl, Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, 2008. augusztus 11.