Vi tích phân 2B

T.S. Nguyễn Thị Hoài Thương vs TS. Lê Ánh Hạ

Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán Tin-học
Bộ môn Giải tích

ngththuong@hcmus.edu.vn, laha@hcmus.edu.vn

Ngày 30 tháng 5 năm 2023

Giới thiệu môn học

Mục tiêu môn học:

- Môn học đóng vai trò cung cấp kiến thức căn bản về toán vi tích phân cho các ngành Công nghệ thông tin, Điện tử-Viễn thông, Vật lý, Hải Dương-Khí tượng và Thuỷ văn, Khoa học vật liệu,... giúp sinh viên có nền tảng toán phục vụ cho các môn học chuyên ngành.
- Dẫn nhập vào các khái niệm và kỹ thuật Giải tích Toán học, với hai nội dung chính là phép tính vi phân và phép tính tích phân của hàm nhiều biến.

Giới thiệu môn học

Mục tiêu môn học:

- Môn học đóng vai trò cung cấp kiến thức căn bản về toán vi tích phân cho các ngành Công nghệ thông tin, Điện tử-Viễn thông, Vật lý, Hải Dương-Khí tượng và Thuỷ văn, Khoa học vật liệu,... giúp sinh viên có nền tảng toán phục vụ cho các môn học chuyên ngành.
- Dẫn nhập vào các khái niệm và kỹ thuật Giải tích Toán học, với hai nội dung chính là phép tính vi phân và phép tính tích phân của hàm nhiều biến.

Tài liệu môn học:

- J. Stewart, *Calculus*, 8th edition, Cengage Learning, 2016.
- Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Vi tích phân 2*, Khoa Toán - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.
- Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

Giới thiệu môn học

- Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, *Giải tích hàm một biến*, NXB Giáo dục, 2002.
- K.A. Stroud and D.J. Booth, *Advanced engineering mathematics*, 2001.

Phần mềm: MATLAB

Đánh giá môn học:

- Bài tập thực hành: 20%
- Bài tập tại lớp: 10%
- Giữa kì: 30%
- Cuối kì: 40%

Outline

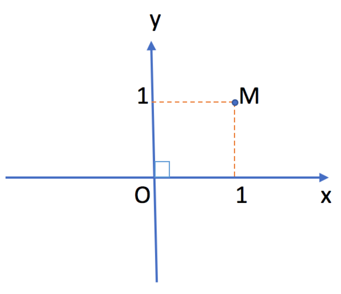
1. Sự liên tục của hàm số nhiều biến
   - Không gian $\mathbb{R}^n$
   - Đồ thị hàm số nhiều biến
   - Đường đồng mức, mặt đồng mức
   - Giới hạn của hàm nhiều biến
   - Sự liên tục

Không gian $\mathbb{R}^2$

- Ta kí hiệu $\mathbb{R}^2$, hoặc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, là tập hợp các cặp số thực x và y được sắp xếp thứ tự như cách biểu diễn sau

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ và } y \in \mathbb{R}\}.$$

- Ta có thể biểu thị $\mathbb{R}^2$ bởi toàn bộ mặt phẳng Oxy, bao gồm các điểm nào đó có toạ độ (x, y). Do đó, phần tử của $\mathbb{R}^2$ cũng được gọi là điểm.



Tập con trong $\mathbb{R}^2$

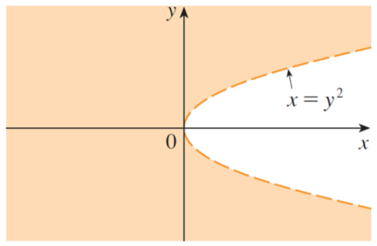
- Tập con của $\mathbb{R}^2$ có thể được biểu thị bởi một phần của mặt phẳng Oxy, bao gồm các điểm có toạ độ (x, y) thoả điều kiện nào đó của tập con.

Ví dụ

Hãy biểu thị trên mặt phẳng toạ độ tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ cho bởi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y^2\}.$$

Để biểu thị D, trước hết ta vẽ parabol nằm ngang có phương trình là $x = y^2$. Hoành độ của những điểm trên parabol bằng bình phương tung độ của nó.
Vậy toạ độ những điểm thuộc D như thế nào, nằm ở đâu trên mặt phẳng Oxy?

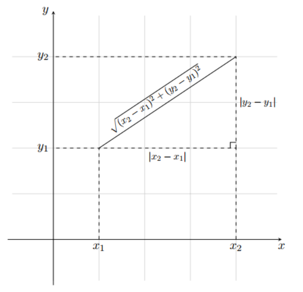


Khoảng cách Euclide trong không gian $\mathbb{R}^2$

Định Nghĩa

Khoảng cách $|P_1P_2|$ *giữa hai điểm* $P_1(x_1, y_1)$ *và điểm* $P_2(x_2, y_2)$ *là*

$$|P_1P_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

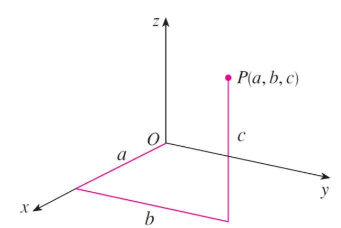


Không gian $\mathbb{R}^3$

- Ta kí hiệu $\mathbb{R}^3$, hoặc $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, là tập hợp các cặp số thực x, y và z được sắp xếp thứ tự như cách biểu diễn sau

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Ta có thể biểu thị $\mathbb{R}^3$ bởi toàn bộ mặt phẳng $Oxyz$, bao gồm các điểm nào đó có toạ độ (x, y, z). Do đó, phần tử của $\mathbb{R}^3$ cũng được gọi là điểm.



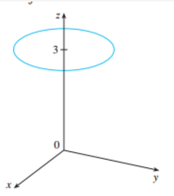
Không gian con $\mathbb{R}^3$

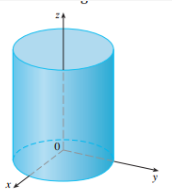
- Tập con của $\mathbb{R}^3$ có thể được biểu thị bởi một phần của mặt phẳng hay khối $Oxyz$, bao gồm các điểm có toạ độ (x, y, z) thoả điều kiện nào đó của tập con.

Ví dụ

Hãy biểu thị trên mặt phẳng toạ độ tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ cho bởi

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, z = 3\}.$$
$$D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}.$$



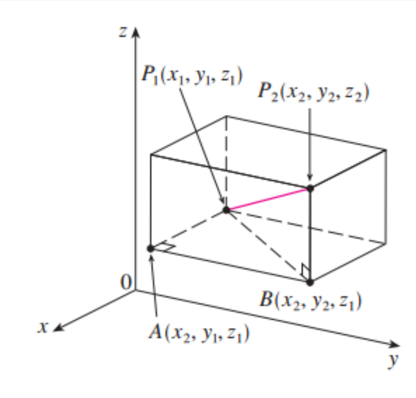


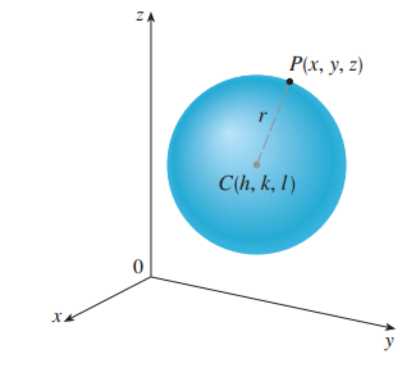
Khoảng cách Euclide trong không gian $\mathbb{R}^n$

Định Nghĩa

Khoảng cách $|P_1P_2|$ *giữa hai điểm* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *và điểm* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *là*

$$|P_1P_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$





Hình cầu

Định Nghĩa

Phương trình hình cầu tâm $C(h, k, I)$, bán kính r được định nghĩa là

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-I)^2 \leq r^2$$

Phương trình mặt cầu tâm $C(h, k, I)$, bán kính r được định nghĩa là

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-I)^2 = r^2$$

Nếu tâm là gốc tọa độ $O(0, 0, 0)$ thì phương trình

$$(x)^2 + (y)^2 + (z)^2 = r^2$$

Khái niệm hàm số nhiều biến

- Cho D là một tập hợp con khác rỗng của $\mathbb{R}^2$. Hàm số hai biến f, với tập xác định D, là một quy tắc gán mỗi điểm $(x, y) \in D$ với duy nhất một số thực $f(x, y)$, được gọi là giá trị của f tại (x, y).
- Trong một số trường hợp, giá trị của hàm f tại (x, y) thường được gán bằng một biểu thức đại số, ví dụ như

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}.$$

Nếu giá trị $f(x, y)$ được gán bằng một biểu thức đại số theo x và y và không nói gì thêm thì ta quy ước tập xác định của f là tập hợp các điểm (x, y) làm cho biểu thức đó có nghĩa.

Khái niệm hàm số nhiều biến

Ví dụ

Hãy tìm tập xác định của hàm số f cho bởi công thức

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

và biểu diễn tập này trên mặt phẳng toạ độ.

Giải: Khi không được cho trước tập xác định thì ta hiểu ngầm tập xác định của hàm số là tập gồm các điểm (x, y) làm cho biểu thức

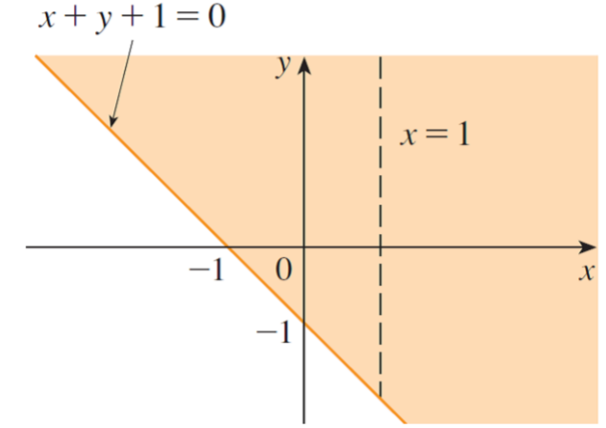
$$\frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

có nghĩa, tức là

$$\begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Khái niệm hàm số nhiều biến

Tương tự cách làm của ví dụ trước, D được biểu thị bởi nửa mặt phẳng được tô màu và bỏ đi đường thẳng $x = 1$ như sau



Khái niệm hàm số nhiều biến

Bài tập: Làm bài tập $6-15$ trong mục $1.1.1$ trong file bài tập.

Khái niệm hàm số nhiều biến

- Tập giá trị của hàm số f là tập hợp các giá trị thực của $f(x, y)$ khi điểm (x, y) chạy khắp tập xác định D của f,

$$G = \{z \in \mathbb{R} | z = f(x, y) \text{ với } (x, y) \in D\}$$

- Nếu z đại diện cho giá trị của f tại các điểm $(x, y) \in D$ thì phương trình $z = f(x, y)$ cũng ngầm xác định một hàm số. Lúc đó, người ta nói z là biến phụ thuộc và x và y là hai biến độc lập.

Khái niệm hàm số nhiều biến

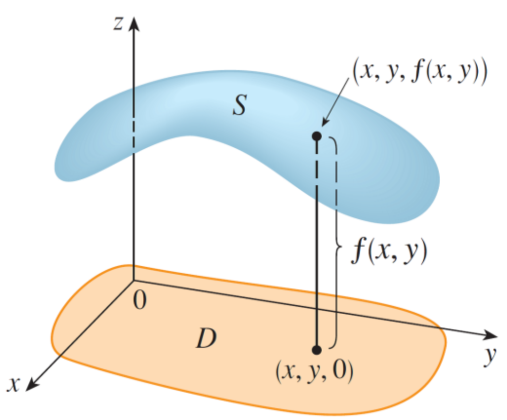
Bài tập: Làm bài tập $1 - 5$ mục $1.1.1$ trong file bài tập.

Outline

1. Sự liên tục của hàm số nhiều biến
   - Không gian $\mathbb{R}^n$
   - Đồ thị hàm số nhiều biến
   - Đường đồng mức, mặt đồng mức
   - Giới hạn của hàm nhiều biến
   - Sự liên tục

Đồ thị hàm số nhiều biến

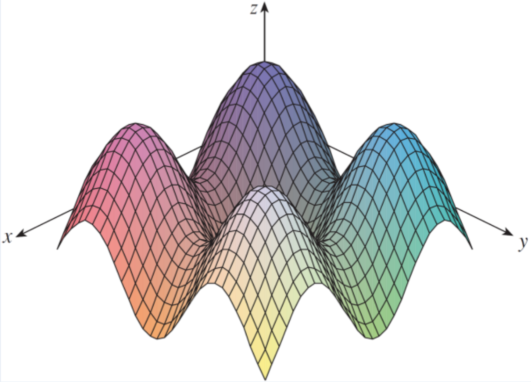
Nếu hàm số hai biến f có miền xác định D thì đồ thị của f là tập hợp các điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x, y)$ và $(x, y) \in D$. Nói chung, đồ thị này có dạng mặt cong.



Đồ thị hàm số nhiều biến

Ví dụ

Hàm số f định bởi $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ có đồ thị như sau:

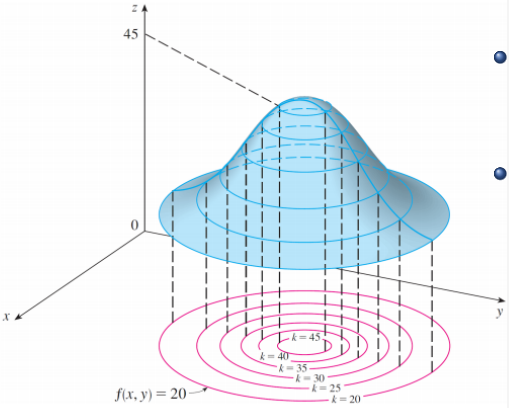


Outline

1. Sự liên tục của hàm số nhiều biến
   - Không gian $\mathbb{R}^n$
   - Đồ thị hàm số nhiều biến
   - Đường đồng mức, mặt đồng mức
   - Giới hạn của hàm nhiều biến
   - Sự liên tục

Đường đồng mức, mặt đồng mức

Đường đồng mức của một hàm số f, có hai biến, là đường cong trong mặt phẳng Oxy, có phương trình $f(x, y) = k$ với k là hằng số thuộc miền giá trị của f.

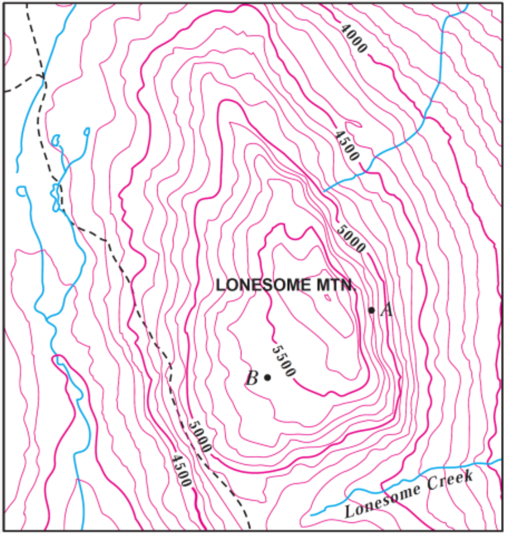


- Hình bên vẽ các **đường đồng mức** màu đỏ, vết cắt ngang là đường màu xanh.
- Tập hợp các đường đồng mức trong mặt Oxy được gọi là bản đồ chu tuyến (contour map), một thuật ngữ của ngành địa lý, dùng để mô tả địa hình trên bản đồ.

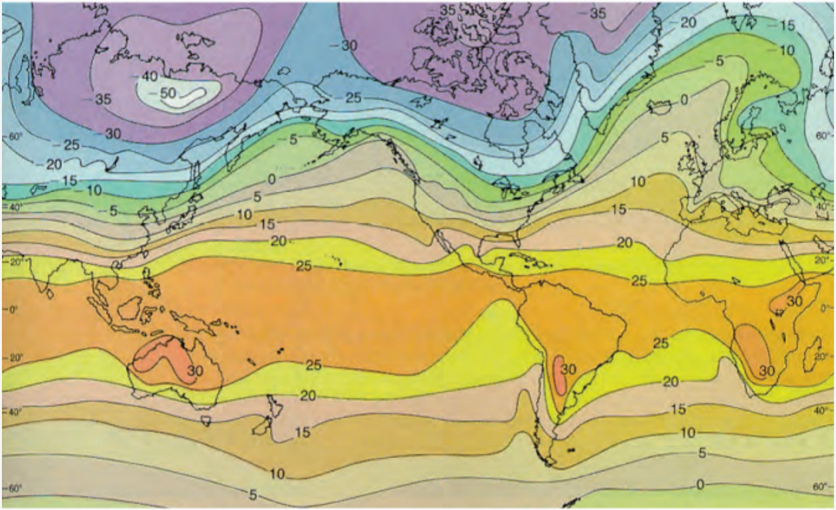
Đường đồng mức, mặt đồng mức

Hình bên trình bày các đường đồng mức trong bản đồ địa hình của núi Lonesome, mô tả độ cao của các vị trí khác nhau so với mặt nước biển. Bề mặt địa hình xem như đồ thị của hàm số hai biến.

Tương tự, trong ngành địa lí cũng có bản đồ các đường đẳng áp (**isobars**), đường đẳng nhiệt (**isothermals**).

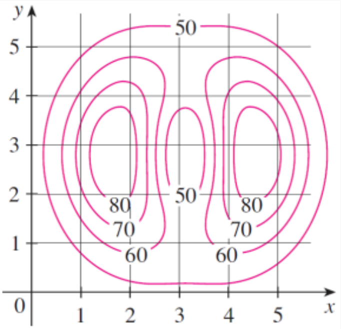


Đường đồng mức, mặt đồng mức



Bản đồ trên trình bày các đường đẳng nhiệt, mô tả nhiệt độ trung bình của mặt nước biển trên thế giới (độ Celcius) vào tháng 1, 1989.

Đường đồng mức, mặt đồng mức



Ví dụ

Hình bên là contour map của hàm số hai biến f. Dựa vào đó, hãy ước đoán giá trị của $f(1,3)$ và $f(4,5)$.

Giải: Điểm $(1,3)$ nằm giữa hai đường đồng mức có giá trị z là 70 và 80. Chúng ta ước đoán

$$f(1,3) \approx 73.$$

Tương tự, chúng ta ước đoán

$$f(4,5) \approx 56.$$

Đường đồng mức, mặt đồng mức

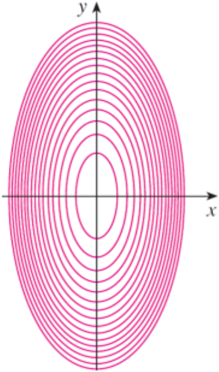
Ví dụ

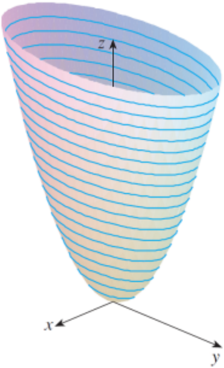
Hãy phác họa vài đường đồng mức và đồ thị của hàm số $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Giải. Các đường đồng mức là

$$4x^2 + y^2 = k \text{ hay } \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1,$$

với $k > 0$, mô tả họ các đường ê-lip với độ dài các trục là $\sqrt{k}/2$ và $\sqrt{k}$. Hình bên là các đường ê-lip với $k = 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ \ldots;\ 4.$





Nâng các đường đồng mức lên độ cao k tương ứng thì ta được các vết của đồ thị với mặt $z = k$.

Đường đồng mức, mặt đồng mức - Hàm nhiều biến

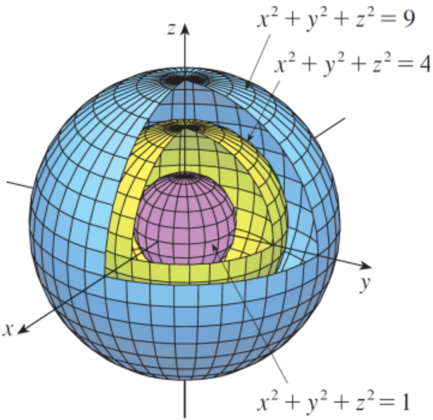
- Hàm số 3 biến f, xác định trên $D \subset \mathbb{R}^3$, là cách gán mỗi bộ ba giá trị thực $(x, y, z) \in D$ với duy nhất một giá trị thực $f(x, y, z)$. Ví dụ, cách gán $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sẽ cho ta một hàm số.
- Ta không hiển thị được đồ thị của hàm số 3 biến. Thay vào đó, ta có thể hiển thị các mặt đồng mức cho bởi phương trình $f(x, y, z) = k$ với k là hằng số.
- Khái niệm hàm số nhiều biến f và kí hiệu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được định nghĩa tương tự như trên.

Đường đồng mức, mặt đồng mức - Hàm nhiều biến

Ví dụ

Tìm các mặt đồng mức của hàm số ba biến $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Giải. Các mặt đồng mức là $x^2 + y^2 + z^2 = k$, $k \geq 0$. Các phương trình này mô tả họ các mặt cầu đồng tâm tại gốc **0**, bán kính $\sqrt{k}$. Khi điểm (x, y, z) chạy khắp mặt cầu bất kỳ tâm tại gốc **0** thì giá $f(x, y, z)$ không đổi.



Đường đồng mức, mặt đồng mức - Hàm nhiều biến

Bài tập

Làm bài tập trong mục 1.1.3 trong file bài tập.

Outline

1. Sự liên tục của hàm số nhiều biến
    - Không gian $\mathbb{R}^n$
    - Đồ thị hàm số nhiều biến
    - Đường đồng mức, mặt đồng mức
    - Giới hạn của hàm nhiều biến
    - Sự liên tục

Giới hạn của hàm nhiều biến - Định nghĩa giới hạn

- Cho f là hàm số hai biến xác định trên D và (a, b) là điểm tụ của D, nghĩa là, D luôn chứa những điểm có thể gần (a, b) tùy ý.
- Người ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = L \tag{1.1}$$

hoặc là $f(x, y) \to L$ khi $(x, y) \to (a, b)$

và đọc là giới hạn của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến về (a, b) bằng L, thì điều đó có nghĩa sau:
Với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó có một số $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu} \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \end{cases} \quad \text{thì } |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

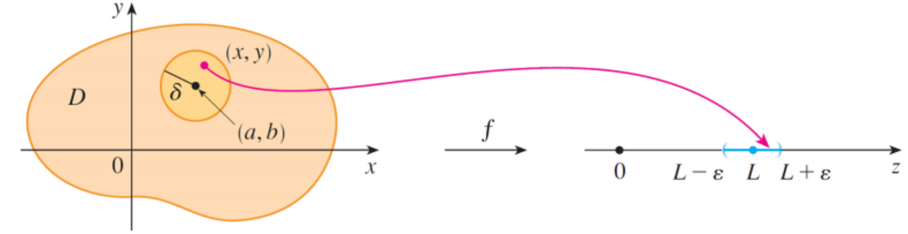
Giới hạn của hàm nhiều biến

Lưu ý rằng

- $|f(x,y) - L|$ là sai số giữa $f(x,y)$ và L.
- $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ là khoảng cách giữa hai điểm (x,y) và (a,b) trên mặt phẳng Oxy.
- Do đó, nghĩa giới hạn trên được hiểu là sai số giữa $f(x,y)$ và L có thể nhỏ tùy ý, miễn là điểm (x,y) đủ gần (và không trùng) điểm (a,b).

Giới hạn của hàm nhiều biến

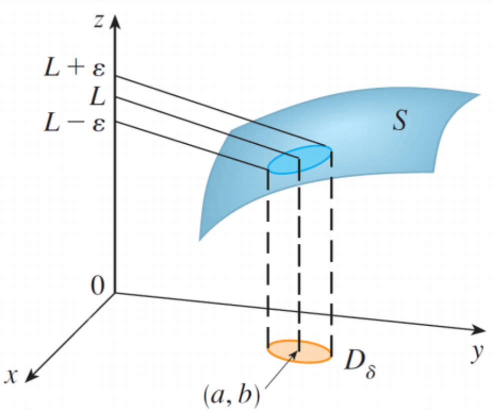
Hình sau nói lên điều gì?



Với $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó ta tìm được đĩa tròn D_δ tâm (a, b), bán kính δ sao cho mọi điểm trong đĩa tròn được f gán cho một giá trị số trong khoảng $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Giới hạn của hàm nhiều biến

Hình sau nói lên điều gì?



Với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó ta tìm được đĩa tròn D_δ sao cho khi (x, y) nằm trong đĩa D_δ, độ cao của điểm $(x, y, f(x, y))$ trên đồ thị sẽ dao động trong khoảng $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Giới hạn của hàm nhiều biến

Ví dụ

Tìm giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = x$

Giải: Ta viết lại định nghĩa: với mọi $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta_\varepsilon > 0$ sao cho:

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 - (y-0)^2} < \delta_\varepsilon \implies |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

- Do tính chất khoảng cách Euclid, ta có $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \geq \sqrt{(x-0)^2} = |x|$.
- Do đó $|f(x,y) - f(0,0)| = |x-0| = |x| \leq \sqrt{(x-0)^2 - (y-0)^2}$.
- Để $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$, ta chọn $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Khi đó nếu

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{(x-0)^2 - (y-0)^2} < \delta_\varepsilon, \implies & |f(x,y) - f(0,0)| = |x| \\ & \leq \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta_\varepsilon = \varepsilon \\ \implies & |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Hay $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Ví dụ

Khảo sát giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

Giải: Với mọi $(x,y) \neq (0,0)$, ta có

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y| \leq 3\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1.2)$$

Từ đó, ta dễ đoán rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Thật vây, cho trước số $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta thấy số dương $\delta = \varepsilon/3$ thỏa điều kiện sau (dựa vào (1.2))

$$\text{nếu } 0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \text{ thì } |f(x,y) - 0| \leq 3\delta = \varepsilon,$$

nghĩa là ta dựa vào định nghĩa giới hạn để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Giới hạn của hàm nhiều biến

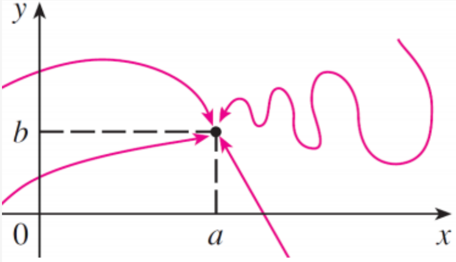
- Trong giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$ của hàm một biến, x tiến về a theo hai hướng trái và phải.
- Nhắc lại rằng giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.
- Trong giới hạn $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ của hàm hai biến thì điểm (x,y) có thể tiến về (a,b) theo vô số hướng, miễn là (x,y) vẫn trong miền xác định của f.

Giới hạn của hàm nhiều biến

Định lí 1.1 (Hệ quả từ định nghĩa giới hạn)

Nếu $f(x, y) \to L_1$ khi $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo đường cong C_1; $f(x, y) \to L_2$ khi $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo đường cong C_2 và $L_1 \neq L_2$, thì không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

Để chứng tỏ f không có giới hạn tại (a, b), ta cũng có thể chỉ ra hai dãy điểm $(M_n(x_n, y_n))$ và $(M'_n(x'_n, y'_n))$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} y'_n = b$, nhưng hai dãy số $(f(M_n))$ và $(f(M'_n))$ hội tụ về hai giá trị L_1 và L_2 khác nhau.



Giới hạn của hàm nhiều biến

Ví dụ

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

Giải:

- Đặt
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$
- Trước hết, cho (x,y) tiến về (nhưng không trùng) (0,0) dọc theo trục Ox. Khi đó $y = 0$ dẫn đến
$$f(x,0) = x^2/x^2 = 1.$$
Do đó, $f(x,y) \to 1 \quad$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo Ox.

Giới hạn của hàm nhiều biến

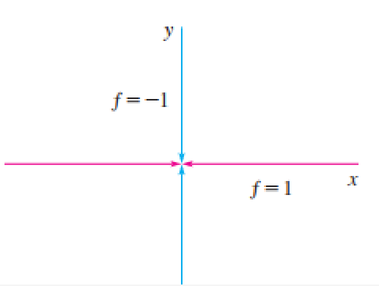
- Tiếp theo, cho (x, y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo trục Oy bằng cách lấy $x = 0$. Khi đó:

$$f(0, y) = -y^2/y^2 = -1.$$

  Suy ra

$$f(x, y) \to -1 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo } Oy.$$

- Vì f có giới hạn khác nhau dọc theo hai hướng khác nhau nên giới hạn đã cho không tồn tại.



Ví dụ

Tìm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Giải:

- Trước hết, cho (x,y) tiến về (nhưng không trùng) (0,0) dọc theo trục Ox. Khi đó $y = 0$ dẫn đến

$$f(x,0) = x^2/x^2 = 1.$$

  Do đó, $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo Ox.
- Tiếp theo, cho (x,y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo trục Oy bằng cách lấy $x = 0$. Khi đó:

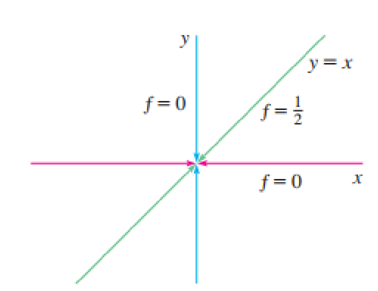
$$f(0,y) = 0/y^2 = 0.$$

  Suy ra

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{khi } (x,y) \to (0,0) \text{ dọc theo } Oy.$$

Giới hạn của hàm nhiều biến

- Tiếp theo, cho (x, y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo đường thẳng $y = x$ bằng cách lấy $y = x \neq 0$. Khi đó:
$$f(x, y) = x^2/(2x^2) = 1/2.$$
Suy ra
$$f(x, y) \to 1/2 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo đường thẳng } y = x.$$
- Vì f có giới hạn khác nhau dọc theo hai hướng khác nhau nên giới hạn đã cho không tồn tại.



Ví dụ

Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$

Giải:

- Trước hết, cho (x,y) tiến về (nhưng không trùng) (0,0) dọc theo trục Ox. Khi đó $y = 0$ dẫn đến
$$f(x,0) = 0/(2x^2) = 0.$$
Do đó, $f(x,y) \to 0 \quad$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo Ox.
- Tiếp theo, cho (x,y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo trục Oy bằng cách lấy $x = 0$. Khi đó:
$$f(0,y) = 0/(2y^2) = 0.$$
Suy ra
$$f(x,y) \to 0 \quad \text{khi } (x,y) \to (0,0) \text{ dọc theo } Oy.$$

Giới hạn của hàm nhiều biến

- Tiếp theo, cho (x, y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo đường thẳng $y = x$ bằng cách lấy $y = x \neq 0$. Khi đó:

$$f(x, y) = 3x^3/(2x^2) = 3/2x.$$

Suy ra

$$f(x, y) \to 0 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo đường thẳng } y = x.$$

- Cho (x, y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo đường parabolic $y = x^2$ bằng cách lấy $y = x^2 \neq 0$. Khi đó:

$$f(x, y) = 3x^4/(x^2 + x^4)$$

Suy ra

$$f(x, y) \to 0 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo đường parabolic } y = x^2.$$

- Cho (x, y) tiến về (không trùng) (0,0) dọc theo đường parabolic $x = y^2$ bằng cách lấy $x = y^2 \neq 0$. Khi đó:

$$f(x, y) = 3y^3/(y^2 + y^4)$$

Suy ra

$$f(x, y) \to 0 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo đường parabolic } y = x^2.$$

- Ta thấy theo 4 hướng, giới hạn của hàm số $f(x, y)$ hội tụ về 0 khi (x, y) hội tụ về 0.

Ta đi chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$ đi tìm $\delta > 0$ sao cho

$$\text{nếu } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ thì } |f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

$$\text{nếu } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ thì } \left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| < \varepsilon$$

Ta có $x^2 \leq x^2 + y^2$ nên $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ nên

$$\frac{3x^2y}{x^2+y^2}| \leq 3|y| \leq 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, và với $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ thì

$$\frac{3x^2y}{x^2+y^2}| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Nên $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Giới hạn của hàm nhiều biến

Tính chất của giới hạn

Các tính chất bảo toàn phép tính của giới hạn của hàm một biến, ví dụ như giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn,..., cũng áp dụng được cho giới hạn của hàm số hai biến, miễn là tất cả các giới hạn tồn tại khi áp dụng tính chất này.

Giới hạn của hàm nhiều biến - Định lý giới hạn kẹp

Định lý 1.2

Giả sử

- tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$
- bất đẳng thức $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$ đúng với mọi (x,y) trong một đĩa tròn nào đó có tâm (a,b).

Khi đó, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

Giới hạn của hàm nhiều biến - Bài tập

Bài tập

Làm bài tập mục 1.2 của file bài tập.

Outline

1. Sự liên tục của hàm số nhiều biến
   - Không gian $\mathbb{R}^n$
   - Đồ thị hàm số nhiều biến
   - Đường đồng mức, mặt đồng mức
   - Giới hạn của hàm nhiều biến
   - Sự liên tục

Sự liên tục - Định nghĩa sự liên tục

- Hàm số f hai biến, xác định trên D, được gọi là liên tục tại điểm $(a, b) \in D$, có nghĩa là

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

- Ta nói f liên tục trên D (hoặc nói vắn tắt là liên tục) nghĩa là f liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Sự liên tục - Tính liên tục của hàm hình chiếu

Đối với hàm số hai biến f liên tục tại (a,b) thì việc tính giới hạn của $f(x,y)$ khi (x,y) tiến đến (a,b) rất đơn giản, bằng cách thế (x,y) bởi (a,b). Vấn đề đặt ra là những dạng hàm nào là liên tục. Ta bắt đầu với ba hàm đơn giản nhất.
Dựa theo định nghĩa sự liên tục và dùng hai bất đẳng thức sau

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Hãy chứng minh

Định lí 1.3

Hàm hằng cùng với hai hàm hình chiếu p_1 và p_2 định bởi

$$p_1(x,y) = x, \quad p_2(x,y) = y$$

là các hàm liên tục.

Sự liên tục - Tính bảo toàn sự liên tục qua phép toán

Định lí 1.4 (Tính bảo toàn sự liên tục qua phép toán)

- Nếu các hàm số (hai biến) liên tục thì tổng, hiệu, tích và thương (nếu thương có nghĩa) của chúng cũng là một hàm số liên tục.
- Nếu f là hàm số hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)) và g là hàm số hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)) thì hàm hợp $g \circ f$ là hàm hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)).

Sự liên tục

Ví dụ

Hãy giải thích sự liên tục của hàm số f định bởi $f(x, y) = \dfrac{x - y}{2x^2 + y^2}$ tại $(x, y) \neq (0, 0)$.

Do tính bảo toàn sự liên tục qua phép toán, tính liên tục của hai hàm hình chiếu p_1 và p_2 và

$$f = \frac{p_1 - p_2}{2p_1^2 + p_2^2}$$

nên f là hàm số liên tục.

Sự liên tục

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của hàm f và g định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Giải:

- Tại điểm $(a, b) \neq (0, 0)$ thì cả f và g đều liên tục vì chúng là hàm sơ cấp trên tập $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Sau đây, ta khảo sát tính liên tục tại $(0, 0)$. Trong ví dụ trước, ta đã chứng minh rằng khi $(x, y) \to (0, 0)$ thì $f(x, y) \to 0 = f(0, 0)$ và $g(x, y) \to 0 \neq 2 = g(0, 0)$.
- Vậy f liên tục tại $(0, 0)$ và g không liên tục tại $(0, 0)$.

Sự liên tục

Định lí 1.5 (Tính liên tục của hàm sơ cấp)

Các hàm sơ cấp một biến ($\sin$, hàm mũ, logarit,... xem lại vi tích phân 1B) và các hàm hình chiếu tổ hợp với nhau thông qua các phép toán của định lí 1.4 sẽ tạo ra các hàm hai biến liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định, mà ta gọi là các hàm hai biến sơ cấp.

Ví dụ, hàm g cho bởi $g(x,y) = \ln\left(\dfrac{x-y}{2x^2+y^2}\right)$ là hàm sơ cấp liên tục, vì sao? Là vì

$$g = \ln \circ f \text{ với } f = \frac{p_1 - p_2}{2p_1^2 + p_2^2}.$$

Sự liên tục

Bài tập

Làm bài tập mục 1.3 của file bài tập.