Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
Tuần 9

Ngày 5 tháng 8 năm 2024

Phương trình vi phân

Phương trình vi phân là một phương trình toán học nhằm biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm chưa được biết (một hoặc nhiều biến) với đạo hàm của nó (có bậc khác nhau). Phương trình vi phân cấp n

$$\boxed{F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0} \tag{1}$$

Ví dụ:

$y' = xy \longrightarrow$ PTVP cấp 1

$y'' - y = 2 - x^2 \longrightarrow$ PTVP cấp 2.

Nghiệm phương trình vi phân là một hàm số có dạng tổng quát $y = y(x, c)$ trong đó c là hằng số.
Ứng với một tham số c_0 cụ thể thì $y = y(x, c_0)$ được gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân.

Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình chứa biến độc lập x, hàm cần tìm y và đạo hàm y'.
Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1

$$F(x, y, y') = k \text{ (hằng số)}$$

Một số dạng phương trình vi phân cấp 1

- $y' = f(x)$, $y' = f(y)$
- Dạng tách biến
- Dạng đẳng cấp cấp 1: $y' = F\left(\frac{x}{y}\right)$ hay $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
- PTVP tuyến tính cấp 1
- PTVP Bernoully
- PTVP toàn phần.

Phương trình vi phân tách biến

Phương trình vi phân tách biến là phương trình vi phân cấp 1, tổng quát có 3 dạng sau

- $y' = f(x)g(y)$, (y là hàm số chưa biết, ẩn x)
- $f(x)\ dx + g(y)\ dy = 0$
- $f_1(x)g_1(y)\ dx + f_2(x)g_2(y)\ dy = 0.$

Cách giải

- Phân ly x và y ở hai vế $\quad \dfrac{y'}{g(y)} = f(x).$
- Lấy nguyên hàm theo x ở hai vế

$$\int \frac{y'}{g(y)}\ dx = \int f(x)\ dx$$

- Từ đó, có thể tìm được y là biểu thức tường minh theo x ở dạng họ nghiệm (nghiệm tổng quát); hoặc có thể chỉ tìm được phương trình (không chứa y') cho ẩn hàm y theo x.

Bài tập

Bài 1. Giải phương trình vi phân $(x^2+1)y' = xy$.

Bài 2. Giải phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1+y^2}}$.

Bài 3. Giải phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$.

Bài tập

Bài 4. Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện đầu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(0) = -3.$$

Bài 5. Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện đầu

$$(1 + y^2)y' = y\cos x, \quad y(0) = 1.$$

Bài 6. Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện đầu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2.$$

Phương trình vi phân đẳng cấp

Phương trình vi phân đẳng cấp có dạng

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

trong đó F là hàm số liên tục.

Cách giải

- Đặt $u = \dfrac{y}{x}$ thì $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u = F(u)$.
- Khảo sát trường hợp $F(u) - u = 0$. Nếu tồn tại $u_0 \in \mathbb{R}$ thỏa $F(u_0) = u_0$ thì $y = u_0 x$ là một nghiệm riêng.
- Xét trường hợp $F(u) - u \neq 0$. Nếu $F(u) \neq u, \forall u$ thì ta được

$$\frac{u'}{F(u) - u} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

và được giải theo dạng tách biến.

Bài tập

Bài 1. Giải phương trình vi phân bằng cách đổi biến $u = \dfrac{y}{x}$.

a). $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

b). $y' = \dfrac{y+x}{x}$.

c). $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \quad y(1) = 2$.

d). $x^2y' = y^2 + xy + x^2$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng

$$\boxed{y' + q(x)y = p(x)} \tag{2}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là hai hàm số cho trước.

Phương pháp giải

- Tìm một nguyên hàm của $q(x)$ là $Q(x) = \int q(x)\, dx$.
- Nhân cả hai vế của (2) với $e^{Q(x)}$, đưa về dạng

$$\begin{aligned} e^{Q(x)}y' + Q'(x)e^{Q(x)}y &= p(x)e^{Q(x)} \\ \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{Q(x)}y\right] &= p(x)e^{Q(x)} \end{aligned}$$

Suy ra $e^{Q(x)}y = \int p(x)e^{Q(x)}\, dx$.

Bài tập

Bài 1. Phương trình $y' + \cos x = y$ có tuyến tính hay không?.

Bài 2. Phương trình $y' + \cos y = \tan x$ có tuyến tính hay không?.

Bài 3. Giải phương trình $y' + 2xy = 5x$.

Bài 4. Giải phương trình vi phân $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$.

Bài 5. Giải phương trình vi phân $t \ln t \dfrac{dr}{dt} + r = te^t$.

Bài 6. Giải bài toán giá trị đầu $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$.

Bài 7. Giải bài toán giá trị đầu

$$t\frac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4.$$