# Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
# Tuần 2

Ngày 27 tháng 5 năm 2024

# Đạo hàm riêng

## Định nghĩa đạo hàm riêng

Cho $f$ là hàm hai biến, thì **đạo hàm riêng** của nó là các hàm $f_x$, $f_y$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\ f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}. \end{aligned}$$

## Các ký hiệu của đạo hàm riêng

Nếu viết $z = f(x,y)$, người ta cũng có nhiều ký hiệu khác cho đạo hàm riêng như sau

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f \end{aligned}$$

# Đạo hàm riêng

## Đạo hàm riêng bậc cao

Nếu $f$ là hàm số hai biến, $f_x$ và $f_y$ cũng là các hàm số hai biến, vì thế các đạo hàm riêng của chúng là $(f_x)_x, (f_x)_y$, $(f_y)_x$ và $(f_y)_y$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai. Nếu viết $z = f(x, y)$ thì ta có các ký hiệu sau

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

# Đạo hàm riêng

## Định lý Clairaut

Giả sử $f$ xác định trên một đĩa $D$ chứa điểm $(a, b)$. Nếu $f_{xy}$ và $f_{yx}$ cùng liên tục trên $D$, thì

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

nghĩa là đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm theo các biến, miễn là chúng liên tục.

## Định nghĩa

Ta nói một hàm số $f$ là khả vi liên tục đến cấp $k$ hay trơn đến cấp $k$ trên tập mở $D$ có nghĩa là hàm $f$ có tất cả các đạo hàm riêng từ cấp 1 đến cấp $k$ đều liên tục trên tập $D$. Kí hiệu: $f \in C^k(D)$.

# Bài tập

**Bài 1.** Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - 3y$.

**Bài 2.** Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$.

**Bài 3.** Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x, y) = \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$.

**Bài 4.** Tìm đạo hàm riêng theo yêu cầu.

$$f(x, y, z) = \frac{y}{x + y + z}, \quad f_y(2, 1, -1).$$

**Bài 5.** Tìm đạo hàm riêng theo yêu cầu.

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_x(2, 3).$$

# Bài tập

**Bài 6.** Sử dụng định nghĩa của đạo hàm riêng tìm $f_x(x, y)$ và $f_y(x, y)$ của các hàm $f(x, y)$ sau.

a). $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

b). $f(x, y) = xy^2 - x^3y$.

c). $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$.

# Hàm khả vi

## Định nghĩa khả vi

Nếu $z = f(x, y)$ thì $f$ **khả vi** tại $(a, b)$ nếu $\Delta z := f(x, y) - f(a, b)$ có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \epsilon_1(x - a) + \epsilon_2(y - b)$$

trong đó $\epsilon_1$ và $\epsilon_2 \longrightarrow 0$ khi $(x, y) \longrightarrow (a, b)$.

## Định lý

Nếu đạo hàm riêng $f_x$ và $f_y$ tồn tại trong lân cận điểm $(a, b)$ và liên tục tại $(a, b)$ thì $f$ khả vi tại $(a, b)$.

# Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính

## Mặt phẳng tiếp xúc

Giả sử $f$ có đạo hàm riêng liên tục. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt $z = f(x, y)$, tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

# Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính

## Xấp xỉ tuyến tính

Tổng quát, phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của hàm số $f$ hai biến tại điểm $(a, b, f(a, b))$ là

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

được gọi là **tuyến tính hóa** của $f$ tại $(a, b)$.
Xấp xỉ

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính** hoặc **xấp xỉ mặt phẳng tiếp xúc** của $f$ tại $(a, b)$.

# Vi phân

**Vi phân**

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại điểm $(a,b)$ thì vi phân của hàm số $f(x,y)$ tại điểm $(a,b)$ là

$$df(a,b) = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy. \tag{1}$$

Nếu cho $dx = \Delta x = x - a$ và $dy = \Delta y = y - b$ khi đó vi phân của $f$ ở phương trình (1) trở thành

$$df(a,b) = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y.$$

# Bài tập

**Bài 1.** Tìm phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt được cho tại điểm cho trước.

a). $z = 3y^2 - 2x^2 + x, \quad (2, -1, -3)$.

b). $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7, \quad (2, -2, 12)$.

**Bài 2.** Giải thích tại sao hàm số khả vi tại điểm được cho. Sau đó tìm tuyến tính hóa $L(x, y)$ của hàm số tại điểm đó. Với

$$f(x, y) = x^3 y^4, \quad (1, 1).$$

# Bài tập

**Bài 3.** Chứng minh $\dfrac{2x+3}{4y+1} \approx 3+2x-12y$ tại $(0,0)$.

**Bài 4.** Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tại $(3,2,6)$ và dùng nó để xấp xỉ $\sqrt{(3.02)^2+(1.97)^2+(5.99)^2}$.

**Bài 5.** Chiều dài và rộng của một hình chữ nhật lần lượt là 30cm và 24cm, với sai số phép đo không quá 0.1cm cho mỗi cạnh. Sử dụng vi phân, hãy ước tính sai số tối đa khi tính diện tích hình chữ nhật.

**Bài 6.** Sử dụng vi phân để ước tính lượng kim loại trong một hộp hình trụ kín cao $10$cm và có đường kính 4cm nếu độ cao ở đỉnh và đáy dày $0.1$ cm và kim loại ở thành hộp dày $0.05$ cm.