Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
Tuần 7

Ngày 22 tháng 7 năm 2024

Hàm vector

Hàm vector là hàm có miền xác định là một tập hợp các số thực và miền giá trị là một tập hợp các vector.

$$\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

Giới hạn hàm vector

Nếu $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, thì

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{r}(t) = \langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \rangle$$

với điều kiện giới hạn của các hàm thành phần tồn tại.

Một hàm $\boldsymbol{r}$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{t \to a} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(a).$$

Hàm vector

Đạo hàm $\boldsymbol{r}'$ của vector $\boldsymbol{r}$ được định nghĩa bởi

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Định lý

Nếu $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$, trong đó f, g, h là các hàm khả vi thì

$$\boldsymbol{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle = f'(t)\boldsymbol{i} + g'(t)\boldsymbol{j} + h'(t)\boldsymbol{k}$$

Ngoài ra,

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\ dt = \left(\int_a^b f(t)\ dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^b g(t)\ dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)\ dt\right)\boldsymbol{k}$$

Hàm vector

Giả sử đường cong có phương trình vector $\boldsymbol{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, $a \leq t \leq b$, hoặc tương đương, có phương trình tham số là $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, trong đó f', g', h' liên tục. Nếu đường cong tạo đúng một vết đơn khi t tăng từ a đến b, thì độ dài của nó

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \left| \boldsymbol{r}'(t) \right| \, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt. \end{aligned}$$

Giả sử C là đường cong được cho bởi một hàm vector

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k} \quad a \leq t \leq b$$

trong đó $\boldsymbol{r}'(t)$ liên tục và khi t tăng từ a đến b thì đường cong được vẽ đúng 1 lần. Ta định nghĩa **hàm số độ dài cung** s bởi

$$s(t) = \int_a^t \left|\boldsymbol{r}'(u)\right| du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du.$$

Nghĩa là $s(t)$ là độ dài một phần của C từ $\boldsymbol{r}(a)$ đến $\boldsymbol{r}(t)$. Theo định lý cơ bản của giải tích thì

$$\frac{ds}{dt} = \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|.$$

Bài tập

1. Tìm giới hạn của $\lim_{t \to 0} \left(e^{-3t}\, \boldsymbol{i} + \dfrac{t^2}{\sin^2 t}\, \boldsymbol{j} + \cos 2t\, \boldsymbol{k} \right)$.
2. Tính đạo hàm của hàm vector $\boldsymbol{r}(t) = \langle t \sin t, t^2, t \cos 2t \rangle$.
3. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2\, \boldsymbol{i} + t\sqrt{t-1}\, \boldsymbol{j} + t \sin \pi t\, \boldsymbol{k} \right)\, dt$.
4. Tìm độ dài của đường cong $\boldsymbol{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3\sin t \rangle, \quad -5 \le t \le 5$.
5. Tìm độ dài của đường cong $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$.

Tích phân đường loại 1

Định nghĩa

Nếu f xác định trên đường cong trơn C. Ta định nghĩa **tích phân đường của f dọc theo C** là

$$\int_C f(x,y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

miễn là giới hạn tồn tại.

Tích phân đường loại 1

Điều kiện đủ để giới hạn tồn tại là hàm f liên tục. Khi đó tích phân đường tính theo công thức

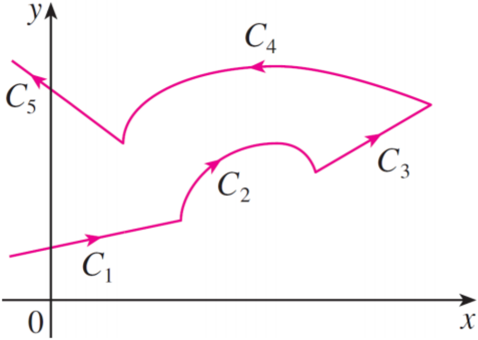
$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Tích phân đường theo x và y

$$\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)x'(t)\,dt$$

$$\int_C f(x,y)\,dy = \int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\,dt.$$



Nếu C là **đường cong trơn từng khúc**, nghĩa là C là hợp của hữu hạn đường cong trơn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ trong đó điểm cuối C_{i-1} là điểm đầu của C_i thì ta định nghĩa

$$\int_C f(x, y)\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x, y)\, ds.$$

Bài tập tính tích phân đường, với C cho trước

Bài 1. $\displaystyle\int_C xy\, ds$, với $C : x = t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$.

Bài 2. $\displaystyle\int_C xy^4\, ds$, với C là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

Bài 3. $\displaystyle\int_C x \sin y\, ds$, C là đoạn thẳng đi từ $(0, 3)$ đến $(4, 6)$.

Bài 4. $\displaystyle\int_C xy\, dx + (x - y)\, dy$, C chứa các đoạn thẳng từ (0,0) đến (2,0) và từ (2,0) đến (3,2).

Bài 5. $\displaystyle\int_C (2x + 9z)\, ds$, với $C : x = t, y = t^2, z = t^3,\ 0 \leq t \leq 1$.

Bài 6. $\displaystyle\int_C x^2 z\, ds$, với C là đoạn thẳng từ $(0, 6, -1)$ đến $(4, 1, 5)$.

Trường vector

Định nghĩa

Cho D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$. Một trường vector trong $\mathbb{R}^2$ là một hàm $\boldsymbol{F}$ gán cho mỗi điểm (x, y) trong D một vector hai chiều $\boldsymbol{F}(x, y)$; có dạng

$$\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$$

Định nghĩa

Cho E là một tập hợp trong $\mathbb{R}^3$. Một trường vector trong $\mathbb{R}^3$ là một hàm $\boldsymbol{F}$ gán cho mỗi điểm (x, y, z) trong E một vector ba chiều $\boldsymbol{F}(x, y, z)$.

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

hay viết gọn

$$\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}.$$

Tích phân đường loại 2

Định nghĩa

Cho $\boldsymbol{F}$ là một trường vector liên tục và xác định trên đường cong trơn C được cho bởi một hàm vector $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Khi đó **tích phân đường của $\boldsymbol{F}$ dọc theo** C là

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\ dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\ dS$$

• **Chú ý:** Nếu $\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ và $\boldsymbol{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, thì **tích chấm** (tích vô hướng) của $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ là số $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ bằng

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Bài tập

Tính tích phân đường $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, trong đó C được cho bởi hàm vector $\boldsymbol{r}(t)$.

Bài 1. $\boldsymbol{F}(x, y) = xy\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}(t) = 11t^4\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$, $0 \le t \le 1$.

Bài 2. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y)\ \boldsymbol{i} + (y - z)\ \boldsymbol{j} + z^2\ \boldsymbol{k}$,
$\boldsymbol{r}(t) = t^2\ \boldsymbol{i} + t^3\ \boldsymbol{j} + t^2\ \boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$.

Bài 3. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \sin x\ \boldsymbol{i} + \cos y\ \boldsymbol{j} + xz\ \boldsymbol{k}$,
$\boldsymbol{r}(t) = t^3\ \boldsymbol{i} - t^2\ \boldsymbol{j} + t\ \boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$.

Bài 4. Tìm công của lực được sinh bởi trường lực $\boldsymbol{F}(x, y) = x\boldsymbol{i} + (y + 2)\boldsymbol{j}$ khi di chuyển một hạt dọc theo cung của đường $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\ \boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\ \boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$.