

Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2

Tuần 6

Ngày 15 tháng 7 năm 2024

Sửa bài tập về nhà tuần 5

Tích phân ba lớp

Định lý Fubini cho tích phân ba lớp

Nếu f liên tục trên hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

thì

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy dz.$$

Tích phân ba lớp trên một miền tổng quát E bị chặn

Miền khối E có dạng

+ $E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$ thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

+ $E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$ thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

+ $E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$ thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Bài tập

Bài 1. Tính tích phân $\iiint_E 2x \, dV$ với

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y \right\}$$

Bài 2. Tính tích phân $\iiint_E yz \cos(x^5) \, dV$ với

$$E = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq z \leq 2x \right\}$$

Bài tập

Bài 3. Tính tích phân $\iiint_E xz \, dV$ trong đó E là khối tứ diện có các đỉnh là $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ và $(0, 1, 1)$.

Bài 4. Tính tích phân $\iiint_E z \, dV$ trong đó E bị giới hạn bởi $y^2 + z^2 = 9$, các mặt phẳng $x = 0$, $y = 3x$ và $z = 0$ ở góc phần tám thứ nhất.

Bài 5. Sử dụng tích phân 3 lớp tìm thể tích của tứ diện bị giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $2x + y + z = 4$.

Tọa độ cầu

Để chuyển đổi từ hệ tọa độ Descartes vuông góc sang hệ tọa độ cầu chúng ta sử dụng các phương trình sau

$$\begin{cases} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{cases}, \quad \text{trong đó } \rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi \text{ và } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Công thức đổi tọa độ

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV \\ = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

trong đó $E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$,

với $\rho_1 \geq 0$, $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ và $\phi_2 - \phi_1 \leq \pi$.

Bài tập

Bài 1. Sử dụng tọa độ cầu tính $\iiint_B (x^2 + y^2) dV$, trong đó B là bán cầu nằm trên mặt phẳng xy và nằm dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bài 2. Tính $\iiint_B z dV$, trong đó B giữa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở góc phần tám thứ nhất.

Bài 3. Tính $\iiint_B x^2 dV$, trong đó B bị giới hạn bởi mặt phẳng xz , nửa bán cầu $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ và $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.

Bài 4. Tính $\iiint_B xyz dV$, trong đó B nằm giữa quả cầu có $\rho = 2$ và $\rho = 4$ và trên hình nón $\phi = \frac{\pi}{3}$.