TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN (CT Đề án CNTT)
Học kỳ 2 – Năm học 2022-2023

MÃ LƯU TRỮ
(do phòng KT-ĐBCL ghi)

Tên học phần:	**Vi tích phân 1**	**Mã HP:**	**MTH00005**
Thời gian làm bài:	**90 phút**	Ngày thi:	**12/5/2023- 9h55**

Ghi chú: *Sinh viên* [☐ *được phép* / ☒ *không được phép*] *sử dụng tài liệu khi làm bài.*

Họ tên sinh viên: ……... **MSSV**: …………… **STT**: …..

Câu 1. (Tính đạo hàm, 2đ)

a) Tìm biểu thức của $f'(x)$ bằng định nghĩa đạo hàm, biết $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (không được phép dùng quy tắc L'Hospital).

b) Giả sử một phần của đường cong (C): $y \sin 2x = x \cos 2y$ là đồ thị của ẩn hàm y theo biến x, khả vi. Tìm biểu thức của y' theo x, y. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (không được dùng các công thức ngoài môn Vi tích phân 1.)

Câu 2. (Ứng dụng đạo hàm, 2đ)

a) Theo thuyết tương đối, khối lượng tương đối tính của một vật đang chuyển động với tốc độ v trong một hệ quy chiếu nào đó là $m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không (là hằng trong mọi hệ quy chiếu quán tính), m_0 là khối lượng tĩnh của vật. Khi đó, năng lượng toàn phần của vật bằng $E = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Đặt $E_0 = m_0 c^2$, được gọi là năng lượng tĩnh của vật. Vật lý cổ điển khảo sát chuyển động của các vật có tốc độ v nhỏ hơn nhiều so với c. Khi đó người ta nói năng lượng toàn phần của vật xấp xỉ bởi

$$E \approx E_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 \text{ được gọi là động năng của vật}\right).$$

Hãy giải thích chi tiết phép xấp xỉ trên dựa trên cơ sở toán học nào?

b) Một thùng hình trụ không có nắp được thiết kế để chứa đúng 27π lít chất lỏng. Gọi x là tỉ lệ giữa độ cao và bán kính đáy của thùng. Chứng minh rằng tồn tại giá trị x sao cho nguyên liệu (dạng tấm kim loại) để làm thùng ít hao tốn nhất, lúc đó chiều cao bao nhiêu?

Câu 3. (Tích phân, 3đ)

a) Dùng quy tắc trung điểm, hãy xấp xỉ giá trị của $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ với $n = 5$.

b) Biết rằng nếu K là hằng số sao cho $\forall x \in [1;2], |f''(x)| \leq K$, thì độ lớn sai số khi xấp xỉ $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ với quy tắc trung điểm không vượt quá $\frac{K}{24n^2}$. Hãy xấp xỉ $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ bằng quy tắc trung điểm sao cho độ lớn sai số nhỏ hơn 10^{-6}.

c) Tính tích phân suy rộng $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Câu 4. (Chuỗi số và chuỗi lũy thừa, 3đ)

a) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số. Nếu hội tụ thì tìm tổng chuỗi.

$$(i)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3}{3k^3+k+1} \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{\infty} 5^{-k+1} \cdot 3^{2+k}$$

b) Tìm tất cả các giá trị của x để chuỗi lũy thừa sau hội tụ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^k}{k+1}.$$

HẾT.

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2 đ)

a) Theo định nghĩa,

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1+x^2}}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{(t^2-x^2)}{(t-x)(\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t+x}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b) Gọi $y=f(x)$ là ẩn hàm mà đồ thị là một phần của $(C)\colon y\sin 2x=x\cos 2y$, chứa điểm $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$, nghĩa là $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$ là

$$y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4}+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x ở hai vế của phương trình (C), quy ước $y'=f'(x)$, ta được

$$y'\sin 2x+2y\cos 2x=\cos 2y-x(2y')\sin 2y$$

Thay $x=\frac{\pi}{2}$, $y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $y'=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ vào trên ta được

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi+\frac{\pi}{2}\cos\pi=\cos\frac{\pi}{2}-\pi f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Từ (1), ta suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 2. (2 đ)

a) Xét hàm số $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ có $f'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$. Phép xấp xỉ tuyến tính tại 0 của f là $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ hay là $(1+x)^{-\frac{1}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}x$, chỉ được áp dụng với x rất gần giá trị 0.

Khi tốc độ $v\ll c$ thì $x=-v^2/c^2$ rất gần 0, do đó

$$E=m_0c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)=E_0+\frac{1}{2}m_0v^2.$$

b) Gọi h, r (dm) lần lượt độ cao và bán kính đáy của thùng hình trụ thể tích 27π (lít). Khi đó $h=xr$ và $\pi r^2h=27\pi\Leftrightarrow xr^3=27\Leftrightarrow r=3x^{-\frac{1}{3}}$, $h=xr=3x^{\frac{2}{3}}$.

Lượng vật liệu (đơn vị là dm^2) để làm thùng là $\pi r^2 + 2\pi r h = 3\pi x^{-\frac{2}{3}} + 18\pi x^{\frac{1}{3}} \coloneqq f(x)$ với $x \in (0; \infty)$. Đạo hàm

$$f'(x) = -2\pi x^{-\frac{5}{3}} + 6\pi x^{-\frac{2}{3}} = 2\pi x^{-\frac{5}{3}}(3x-1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên của f là

x	0		$\frac{1}{3}$		∞
$f'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	∞

Vậy để ít hao tốn vật liệu nhất thì $f(x)$ nhỏ nhất, lúc đó $x = \frac{1}{3}$, độ cao của thùng là $h = 3x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3}$ (dm).

Câu 3. (3đ)

a) Với $n = 5$ thì $\Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$, trung điểm của các đoạn con là $\overline{x_i} = x_i - \frac{1}{2}\Delta x = 1 + i\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x = \frac{9+2i}{10}$ với $i = \overline{1;5}$. Theo quy tắc trung điểm thì

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{\overline{x_i}}\Delta x = \sum_{i=1}^{5} \frac{2}{9+2i} = 0{,}691907885716.$$

b) Xét $f(x) = \frac{1}{x}$ thì $f''(x) = 2x^{-3}$ và $\forall x \in [1;2], |f''(x)| \leq 2$. Để phép xấp xỉ theo quy tắc trung điểm có độ lớn sai số bé hơn 10^{-6} thì ta chọn một giá trị của n (càng nhỏ càng tốt) sao cho $\frac{2}{24n^2} < 10^{-6} \Leftrightarrow n > \frac{1000}{\sqrt{12}} \approx 288{,}68$. Vậy ta chọn $n = 289$.

Khi đó $\Delta x = \frac{2-1}{289} = \frac{1}{289}$, trung điểm của đoạn con thứ i, $i = \overline{1;289}$, là $\overline{x_i} = 1 + i\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x = \frac{2i+577}{578}$. Vậy

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{289} \frac{1}{\overline{x_i}}\Delta x = \sum_{i=1}^{289} \frac{2}{2i+577} = 0{,}693146806404.$$

c) Ta tìm nguyên hàm bằng cách đặt $u = \sqrt{x}$ thì $\ln x = 2\ln u$ và $2\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Suy ra

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int \ln u\,du = 4u\ln u - 4u = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}.$$

Vậy

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0+}\left(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right)\Big]_{x=t}^{x=1}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left(-4 - 2\sqrt{t}\ln t + 4\sqrt{t}\right) = -4 - 2\lim_{t\to 0+}\frac{\ln t}{t^{-\frac{1}{2}}} = -4 - 2\lim_{t\to 0+}\frac{-2t^{\frac{3}{2}}}{t} = -4.$$

Câu 4. (3đ)

a) (i) 0,5đ: Số hạng tổng quát của chuỗi là $a_k = \frac{2k^3}{3k^3+k+1} \to \frac{2}{3} \neq 0$ khi $k \to \infty$ nên chuỗi $\sum a_k$ phân kỳ.

(ii) 0,5đ: Viết lại chuỗi đề cho thành chuỗi hình học, công bội $r = \frac{3}{5}$ thỏa $|r| < 1$, thì

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5^{-k+1}\cdot 3^{2+k} = \sum_{k=1}^{\infty} 45\left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{45\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{45\cdot 3}{5-3} = \frac{135}{2}.$$

b) Số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^k}{k+1}$ là $a_k = \frac{(2x-1)^k}{k+1}$, suy ra $a_{k+1} = \frac{(2x-1)^{k+1}}{k+2}$ và

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}|2x-1|\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2} = |2x-1|.$$

- 0,5đ: Nếu $|2x-1| < 1$, hay là $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (0;1)$, thì chuỗi hội tụ (tiêu chuẩn tỉ số).
- 0,5đ: Nếu $|2x-1| > 1$, hay là $x \notin [0;1]$, thì chuỗi phân kỳ (tiêu chuẩn tỉ số).
- 0,5đ: Xét $x = 1$ thì chuỗi trở thành $\sum\frac{1}{k+1}$ cùng tính chất với chuỗi điều hòa, phân kỳ.
- 0,5đ: Xét $x = 0$ thì chuỗi trở thành $\sum\frac{(-1)^k}{k+1}$ là chuỗi đan dấu, trong đó dãy $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\geq 1}$ là dương, giảm và hội tụ về 0. Theo tiêu chuẩn Leibniz thì chuỗi hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $[0;1)$.