Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
Tuần 1

Ngày 20 tháng 5 năm 2024

Không gian Euclide

Không gian Euclide

Người ta ký hiệu $\mathbb{R}^2$ là tích Descartes

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

là tập hợp tất cả các cặp số thực có thứ tự. Tập hợp $\mathbb{R}^2$ được gọi là không gian Euclide.

Công thức khoảng cách

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ được cho bởi

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Không gian Euclide

Không gian Euclide

Người ta ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là tích Descartes

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$$

là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự n số thực. Tập hợp $\mathbb{R}^n$ được gọi là không gian Euclide n chiều.

Khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$

Cho $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, với $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Khoảng cách giữa chúng là

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

Quả cầu - Tập đóng - Tập mở

Cho $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$.

- Quả cầu mở tâm $\boldsymbol{x}$ bán kính r:

$$B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon\}$$

- Quả cầu đóng tâm $\boldsymbol{x}$ bán kính r:

$$B'(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \varepsilon\}$$

- Mặt cầu tâm $\boldsymbol{x}$ bán kính r:

$$S(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \varepsilon\}$$

Quả cầu - Tập đóng - Tập mở

Ví dụ (trong $\mathbb{R}^3$)

Mặt cầu tâm $C(a, b, c)$ với bán kính r được biểu diễn bởi phương trình

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Nếu tâm là góc tọa độ O, thì phương trình của mặt cầu có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Quả cầu - Tập đóng - Tập mở

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ và điểm $x \in \mathbb{R}^n$.

+ x được gọi là điểm trong của D nếu có một quả cầu tâm x được chứa trong D.
+ x được gọi là điểm biên của D nếu bất kì quả cầu $B(x, \varepsilon)$ nào cũng chứa ít nhất một điểm trong D và một điểm không thuộc D.
+ x được gọi là điểm tụ của D nếu bất kì quả cầu $B(x, \varepsilon)$ nào cũng chứa ít nhất một điểm thuộc D khác với x.
+ Tập D được gọi là tập mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của D (có nghĩa là mọi điểm thuộc D đều là tâm của một quả cầu nằm hoàn toàn trong D).
+ Tập D được gọi là tập đóng nếu mọi điểm biên của D đều thuộc D.

Bài tập

Bài tập 1: Phác thảo các điểm $(0, 5, 2), (4, 0, -1), (2, 4, 6)$ và $(1, -1, 2)$ trên hệ trục tọa độ.
Bài tập 2: Cho các điểm $A(-4, 0, -1), B(3, 1, -5), C(2, 4, 6)$. Điểm nào gần mặt$-yz$ nhất? Điểm nào nằm trên mặt$-xz$?.

Bài tập 3: Tìm phương trình mặt cầu với tâm $(-3, 2, 5)$ và bán kính là 4. Giao điểm của mặt cầu và mặt phẳng$-yz$ là gì?.

Hàm nhiều biến

Hàm hai biến

Hàm số hai biến f là một qui tắc gán mỗi cặp số thực có thứ tự (x, y), thuộc một tập hợp D, với duy nhất một số thực $f(x, y)$.
Tập hợp D được gọi là **tập xác định** của f.
Tập giá trị của f là tập hợp các giá trị mà f có; nghĩa là $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Hàm n biến

Hàm số n biến f xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$ là một qui tắc gán mỗi bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, với duy nhất một số thực $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\begin{array}{rcl} f: \quad D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(\boldsymbol{u}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

Bài tập

Bài tập 4: Cho $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.

(a) Tính $g(2, -1)$.

(b) Tìm tập xác định của g.

(c) Tìm tập giá trị của g.

Bài tập 5: Cho $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.

(a) Tính $F(3, 1)$.

(b) Tìm và phác họa tập xác định của F.

(c) Tìm tập giá trị của F.

Bài tập

Bài tập 6: Tìm và vẽ tập xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

Bài tập 7: Tìm và vẽ tập xác định của hàm số

$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2).$$

Bài tập 8: Tìm và vẽ tập xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Bài tập 9: Tìm và vẽ tập xác định của hàm số

$$f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$$

Đồ thị - Đường mức

Định nghĩa (Đồ thị)

Nếu f là hàm hai biến với tập xác định D, thì **đồ thị** của f là tập tất cả các điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x, y)$ và (x, y) thuộc D.

Định nghĩa (Đường mức)

Đường mức của hàm hai biến f là các đường cong có phương trình $f(x, y) = k$, trong đó k là hằng số (trong tập giá trị của f).

Bài tập

Bài tập 10: Vẽ đồ thị của hàm số $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$.

Bài tập 11: Vẽ đồ thị của hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Giới hạn và sự liên tục

Định nghĩa

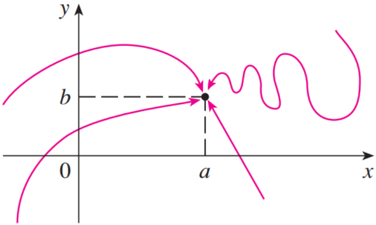
Cho f là hàm số hai biến mà miền xác định D của nó chứa các điểm gần (a, b) tùy ý. Lúc đó ta nói rằng *giới hạn của* $f(x, y)$ *khi* (x, y) *tiến đến* (a, b) là L và ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

nếu với mọi số $\epsilon > 0$ cho trước, có một số $\delta > 0$ tương ứng sao cho nếu $(x, y) \in D$ và $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ thì $|f(x, y) - L| < \epsilon$.

Giới hạn và sự liên tục

Đối với hàm một biến, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$, thì x tiến về a theo hai hướng, trái và phải. Đối với hàm hai biến, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, thì (x,y) có thể tiến đến (a,b) theo vô số hướng, miễn là (x,y) vẫn trong tập xác định của f.



Hệ quả

Nếu $f(x,y) \longrightarrow L_1$ khi $(x,y) \longrightarrow (a,b)$ theo đường đi C_1 và $f(x,y) \longrightarrow L_2$ khi $(x,y) \longrightarrow (a,b)$ theo đường đi C_2, với $L_1 \neq L_2$, thì $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} f(x,y)$ không tồn tại

Giới hạn và sự liên tục

Các tính chất bảo toàn phép tính của giới hạn (ví dụ như giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn,. . .) trong hàm số một biến cũng đúng cho hàm số hai biến. Định lý giới hạn kẹp cũng vậy:

Định lý giới hạn kẹp

Giả sử

- tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$
- $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$, đúng với mọi (x,y) trong một đĩa tròn tâm (a,b).

Khi đó, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} f(x,y) = L$.

Giới hạn và sự liên tục

Định nghĩa

Một hàm hai biến f, xác định trên D, được gọi là **liên tục tại** điểm (a, b) nếu

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Ta nói f **liên tục trên** D nếu f liên tục tại mọi điểm (a, b) trong D.

Định nghĩa của hàm n biến

Cho f là hàm số xác định trên tập con D của $\mathbb{R}^n$, thì $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$ có nghĩa là với mọi số $\epsilon > 0$, có một số $\delta > 0$ sao cho
nếu $\boldsymbol{x} \in D$, và $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$ thì $|f(\boldsymbol{x}) - L| < \epsilon$.
Tính liên tục có thể được viết

$$\lim_{\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$

Bài tập

Tìm giới hạn nếu nó tồn tại hoặc chứng minh giới hạn không tồn tại.

Bài 1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^4 - y^2 + x^3y^2 - 1).$

Bài 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}.$

Bài 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5y^4 \cos^2 x}{x^4 + y^4}.$

Bài 4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Bài tập

Xác định tập hợp các điểm mà tại đó hàm số liên tục.

Bài 5. $F(x,y) = \dfrac{xy}{1+e^{x-y}}$.

Bài 6. $F(x,y) = \cos\sqrt{1+x-y}$.

Bài 7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$