Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
Tuần 10

Ngày 12 tháng 8 năm 2024

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Khái niệm

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng là phương trình có dạng

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

trong đó a, b, c là các hằng số thực.
Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (1) được định nghĩa là phương trình cấp hai sau

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Cách giải PTVP tuyến tính thuần nhất

- Nếu phương trình đặc trưng (2) có nghiệm kép r thì phương trình thuần nhất (1) có nghiệm tổng quát là

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^{rx}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (2) có hai nghiệm thực phân biệt r_1 và r_2 thì nghiệm tổng quát của (1) là

$$y_c = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

- Nếu phương trình đặc trưng (2) có hai nghiệm phức liên hợp $r_1 = \alpha + \beta i$ và $r_2 = \alpha - \beta i$ thì nghiệm tổng quát của (1) là

$$y_c = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x}$$

Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Phương trình tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng có dạng

$$\boxed{\text{ay'' + by' + cy = f(x)}} \tag{3}$$

trong đó a, b, c là các hằng số và f là một hàm liên tục.
Phương trình thuần nhất ứng với (3)

$$\boxed{\text{ay'' + by' + cy = 0}} \tag{4}$$

Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Định lý

Nếu y_c là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (4) và y_p là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (3), thì (3) có nghiệm tổng quát là

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + y_c(x)} \tag{5}$$

Sau đây là cách tìm một nghiệm riêng y_p cho phương trình không thuần nhất (3).

Phương trình tuyến tính không thuần nhất

• Xét phương trình $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x)$, với $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

B1. Giải $y'' + by' + cy = 0$, $\implies y_c$.
B2.

- Nếu α không là nghiệm của PTĐT $\implies$ nghiệm riêng $y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$
- Nếu α là nghiệm đơn của PTĐT $\implies$ nghiệm riêng $y_p = x e^{\alpha x} Q_n(x)$
- Nếu α là nghiệm kép của PTĐT $\implies$ nghiệm riêng $y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$

$Q_n(x)$ là đa thức bậc n tổng quát.

Phương trình tuyến tính không thuần nhất

- Xét phương trình $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$.

Đặt $s = \max\{n, m\}$.

B1. Giải $y'' + by' + cy = 0$, $\implies y_c$.
B2.

- Nếu $\alpha \pm \beta i$ không là nghiệm của PTĐT $\implies$ nghiệm riêng

$$y_p = e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right)$$

- Nếu $\alpha \pm \beta i$ là nghiệm của PTĐT $\implies$ nghiệm riêng

$$y_p = xe^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\right)$$

$R_s(x), T_s(x)$ là các đa thức bậc s cần tìm.

Bài tập

Bài 1. Giải bài toán giá trị đầu

a). $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

b). $y'' + 4y = 0,\ y(\pi) = 5,\ y'(\pi) = -4.$

c). $4y'' - 4y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.5.$

Bài 2. Giải bài toán giá trị biên

a). $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2.$

b). $4y'' + y = 0,\ y(0) = 3,\ y(\pi) = -4.$

c). $y'' + 4y' + 13y = 0,\ y(0) = 2,\ y(\pi/2) = 1.$

Bài tập

Bài 3. Giải phương trình vi phân hoặc bài toán giá trị đầu.

a). $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$

b). $y'' - y = x^3 - x$

c). $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

d). $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

e). $y'' + y = e^x + x^3$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$