

Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2

Tuần 5

Ngày 17 tháng 6 năm 2024

Tích phân lặp

Định lý Fubini

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

thì

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy.$$

$$\iint_R g(x)h(y) \, dA = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy.$$

với $R = [a, b] \times [c, d]$.

Bài tập

Bài 1. Tính tích phân lặp

a).
$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x + 2y) \, dy dx.$$

b).
$$\iint_R (y + xy^{-2}) \, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}.$$

c).
$$\iint_R ye^{-xy} \, dA, \quad R = [0, 2] \times [0, 3].$$

Bài 2. Tìm thể tích của hình khối nằm dưới mặt phẳng

$4x + 6y - 2z + 15 = 0$ và nằm trên hình chữ nhật

$$R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Bài 3. Tìm thể tích của hình khối bị giới hạn bởi paraboloid

$z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ và các mặt phẳng $z = 1, x = 1, x = -1, y = 0$ và $y = 4$.

Tích phân 2 lớp trên miền tổng quát

Công thức tính tích phân 2 lớp

Nếu f là hàm liên tục trên một miền loại I D sao cho

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Tích phân 2 lớp trên miền tổng quát

Công thức tính tích phân 2 lớp

Nếu f là hàm liên tục trên một miền loại II D sao cho

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx dy.$$

Bài tập

Bài 4. $\iint_D x \cos y \, dA, \quad y = 0, y = x^2, x = 1$

Bài 5. $\iint_D y^2 \, dA, \quad D$ là tam giác có các đỉnh $(0, 1), (1, 2), (4, 1)$.

Bài 6. Tính thể tích của khối nằm dưới mặt phẳng $x - 2y + z = 1$ và nằm trên miền bị giới hạn bởi $x + y = 1$ và $x^2 + y = 1$

Bài 7. Tính thể tích của hình khối bị giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$.

Bài 8. Tính tích phân bằng cách đảo trật tự lấy tích phân

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) \, dx dy.$$

Tích phân 2 lớp trong hệ tọa độ cực

Chuyển sang hệ tọa độ cực

Nếu f liên tục trên một hình chữ nhật cực R được cho bởi $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$ trong đó $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ thì

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr d\theta.$$

Tích phân 2 lớp trong hệ tọa độ cực

Nếu f liên tục trên một miền cực có dạng

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr d\theta.$$

Bài tập

Bài 1. Tính tích phân bằng cách chuyển sang hệ tọa độ cực.

a). $\iint_D x^2 y \, dA$, trong đó D là phần nửa trên của chiếc đĩa có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 5.

b). $\iint_R (2x - y) \, dA$, R là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất được giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 4$ và $x = 0, y = x$.

Bài 2. Sử dụng tích phân hai lớp để tìm diện tích của miền.

a). Một vòng cánh hoa $r = \cos 3\theta$.

b). Miền bị giới hạn bởi hai đường hình tim $r = 1 + \cos \theta$ và $r = 1 - \cos \theta$.

Bài tập

Bài 3. Sử dụng các tọa độ cực để tìm thể tích của hình khối cho trước.

- a). Nằm dưới hình nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm trên hình đĩa $x^2 + y^2 \leq 4$.
- b). Nằm dưới paraboloid $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ và nằm trên mặt phẳng xy .