

**Câu 1.** Với  $r \geq 0$ , ta đặt  $a_r$  là số cách chia  $r$  viên kẹo giống nhau cho 4 đứa trẻ sao cho mỗi đứa đều có ít nhất 3 viên, đứa lớn nhất có không quá 9 viên và đứa nhỏ nhất có không quá 13 viên. Hãy viết hàm sinh  $G(x)$  cho dãy  $\{a_r, r \geq 0\}$  và tính giá trị  $a_{25}$ .

**Câu 2.** Với  $k \geq 0$ , hỏi có bao nhiêu chuỗi ký tự, các ký tự được chọn từ  $\{a, b, c, d\}$ , có độ dài  $k$  sao cho có chứa  $b, c$  và số lần xuất hiện của  $a$  là số lẻ?

**Câu 3.** Hãy xây dựng hàm sinh  $F(x)$  với hệ số  $a_r$  của  $x^r$  là  $4r - 3$ . Sau đó sử dụng  $F(x)$  để tính tổng  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$  với  $n \geq 1$ .

**Câu 4.** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$$

thỏa điều kiện có không quá hai ẩn nhỏ hơn 5.

**Câu 5.** Hãy sử dụng phương pháp hàm sinh để tìm nghiệm của hệ thức đệ quy

$$a_n = 7a_{n-1} + 8 \quad (n \geq 1) \quad \text{với} \quad a_0 = 1.$$

**Câu 6.** Ta cần phân công 5 người A, B, C, D, E vào 5 trong 6 công việc 1, 2, 3, 4, 5, 6. Biết rằng A không thích hợp với công việc 5 và 6; B không thích hợp với 4, 5 và 6; C không thích hợp với 1 và 3; D không thích hợp với 2; E không thích hợp với 3 và 4. Hỏi có bao nhiêu cách phân công mỗi người một công việc thích hợp?

**Câu 7 (1 điểm).** Có bao nhiêu cách xếp 8 người vào 3 phòng khác nhau sao cho mỗi phòng đều có ít nhất một người?

**CÂU 1:**

Dùng hàm sinh để tìm số nghiệm nguyên của phương trình  $y + z + t + u = 44$  ( 4 ẩn số là  $y, z, t, u$  ) trong đó  $y$  là số nguyên tố dương  $< 11$ ,  $z \geq 3$ ,  $t \geq 4$  và  $u \geq 5$ .

**CÂU 2:**

Dùng  $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$  để tìm biểu thức của  $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 x^k$  và áp dụng để tính tổng

$$S_k = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \dots + k^2(k+1) \text{ với } k \geq 1.$$

**CÂU 3:**

Một shipper giao 6 hộp bánh khác nhau cho 6 khách hàng ( mỗi người đã đặt mua 1 hộp ). Hỏi

- Có bao nhiêu trường hợp mà cả 6 khách hàng đều không nhận được đúng hộp bánh đã đặt mua ?
- Có bao nhiêu trường hợp mà chỉ có đúng 3 khách hàng nhận được đúng hộp bánh đã đặt mua ?
- Có bao nhiêu trường hợp mà có không quá 3 khách hàng nhận được đúng hộp bánh đã đặt mua ?

**CÂU 4:**

Các sinh viên năm cuối  $a, b, c, d, e$  và  $f$  được giao thực hiện các đề tài tốt nghiệp 1, 2, 3, 4, 5 và 6.

Biết rằng  $a$  không hợp với đề tài 1,  $b$  không hợp với đề tài 2,  $c$  không hợp với các đề tài 1 và 2,

$d$  không hợp với đề tài 4,  $e$  không hợp với các đề tài 4, 5, 6, còn  $f$  không hợp với các đề tài 3, 5, 6.

Hỏi có bao nhiêu cách giao đề tài phù hợp cho 6 sinh viên (mỗi sinh viên nhận một đề tài khác nhau) ?

**CÂU 5:**

Cho  $N = 67737945$ .

- Phân tích  $N$  thành tích các số nguyên tố dương.
- Dùng công thức đệ qui để tìm các số nguyên dương  $a, b, c, d$  thỏa  $S_7^4 = aS_5^4 + bS_4^3 + cS_5^2 + dS_4^2$ .

Từ đó tính  $S_7^4$  và cho biết có bao nhiêu cách phân tích  $N$  thành tích của 4 số nguyên  $> 1$  ?

- Cho  $B_4 = 15$ ,  $B_5 = 52$  và  $B_6 = 203$ . Dùng công thức đệ qui để tính  $B_7$  và cho biết có bao nhiêu cách phân tích  $N$  thành tích của các số nguyên  $> 1$  ?

**CÂU 6:**

Cho  $a_0 = 1$  và  $a_{n+1} = 3(n+1)a_n + 2(n+1)(1-3n)$ ,  $\forall n \geq 0$ . Dùng hàm sinh mũ tính  $a_n$  theo  $n \geq 0$ .

***HẾT***

**GHI CHÚ:** Yêu cầu trình bày bài làm rõ ràng và đầy đủ.