Chương 2

ĐỊNH THỨC

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 2. ĐỊNH THỨC

- Định nghĩa và tính chất
- Định thức và ma trận khả nghịch
- Ứng dụng định thức để giải hệ PTTT

2.1. Định nghĩa và tính chất

1. **Định nghĩa**
2. **Quy tắc Sarrus**
3. **Khai triển định thức theo dòng, theo cột**
4. **Định thức và các phép biến đổi sơ cấp**

2.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta gọi ma trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng i và cột j*** của A. Rõ ràng ma trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ có cấp là $n-1$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$A(1|2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A(2|3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. ***Định thức*** của ma trận A, được ký hiệu là $|\boldsymbol{A}|$ (hay $\det \boldsymbol{A}$) là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n = 1$, nghĩa là $A = (a)$, thì $|A| = a$.
- Nếu $n = 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, thì $|A| = ad - cb$.
- Nếu $n > 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì

$$|A| \overset{\textbf{dòng 1}}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{n} a_{\mathbf{1}j}(-1)^{\mathbf{1}+j}|A(\mathbf{1}|j)|$$
$$=\!=\!= a_{\mathbf{1}1}\big|A(\mathbf{1}|1)\big| - a_{\mathbf{1}2}\big|A(\mathbf{1}|2)\big| + \cdots + a_{\mathbf{1}n}(-1)^{\mathbf{1}+n}\big|A(\mathbf{1}|n)\big|.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 4 \times 5 - 3 \times (-2) = 26$.

Ví dụ. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } 1} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} 12 - 16 + 15 = 11.$$

2.1.2. Quy tắc Sarrus ($n = 3$)

Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Theo định nghĩa của định thức, ta có

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau

$$\begin{array}{ccc|cc} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array}.$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
\text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

(Tổng ba đường chéo **đỏ** - tổng ba đường chéo **xanh**)

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1) - (3.2.3 + 1.1.1 + 2.4.5) = -31.$$

2.1.3. Khai triển định thức theo dòng và cột

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Với mỗi $i, j \in \overline{1, n}$, ta gọi

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$$

là ***phần bù đại số*** của hệ số a_{ij}.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm phần bù đại số của a_{12} và a_{31}.

Giải.

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Định lý. *Cho* $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$*. Với mỗi* $i,j\in\overline{1,n}$*, gọi* c_{ij} *là* ***phần bù đại số*** *của* a_{ij}*. Ta có công thức khai triển* $|A|$

- *theo dòng* $\boldsymbol{i}$: $|A|=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}c_{\boldsymbol{i}k}$.
- *theo cột* $\boldsymbol{j}$: $|A|=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}c_{k\boldsymbol{j}}$.

Nhận xét.

$$\begin{aligned}|A| &\xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|\\ &\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|\end{aligned}$$

Ví dụ. Tính định thức của $A=\begin{pmatrix}3&-1&3\\5&2&2\\4&1&0\end{pmatrix}$ theo dòng 2 và cột 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải.

- $|A| \xlongequal{\text{dòng } 2} 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

  $\xlongequal{\quad} 15 - 24 - 14 = -23.$

- $|A| \xlongequal{\text{cột } 3} 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

  $\xlongequal{\quad} -9 - 14 + 0 = -23.$

Lưu ý. Khi tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để khai triển.

Ví dụ. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải.

$$|A| \xlongequal{\text{cột } 2} -3(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 32 = 96.$$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức của ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|B| = -48$

Mệnh đề. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó:*

1. $|A^\top| = |A|$.
2. *Nếu A có một dòng hay một cột bằng không thì $|A| = 0$.*
3. *Nếu A là ma trận tam giác thì $|A|$ được tính bằng tích các phần tử trên đường chéo, nghĩa là*

$$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

Ví dụ. Tính định thức các ma trận sau:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Đáp án.

$|A| = 0; \quad |B| = 2 \times (-3) \times 4 = -24; \quad |C| = (-2) \times 3 \times (-5) = 30.$

Định lý. *Nếu* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *thì* $|AB| = |A||B|$.

Hệ quả. *Cho* $A, A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $k \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó*

(i) $|A_1A_2\ldots A_m| = |A_1||A_2|\ldots|A_m|$;

(ii) $|A^k| = |A|^k$.

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. $|A| = (1 \times 2 \times 3) \times (4 \times 1 \times 2) = 6 \times 8 = 48.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức của $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Đáp án. $|B| = 0$.

2.1.4. Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý. *Cho* $A, \boldsymbol{A'} \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

1. *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}} \boldsymbol{A'}$ *thì* $|\boldsymbol{A'}| = -|A|$;
2. *Nếu* $A \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha d_i}} \boldsymbol{A'}$ *thì* $|\boldsymbol{A'}| = \alpha|A|$ *hay* $|A| = \dfrac{1}{\alpha}|\boldsymbol{A'}|$;
3. *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{\boldsymbol{d_i + \beta d_j}} \boldsymbol{A'}$ *thì* $|\boldsymbol{A'}| = |A|$.

Hệ quả. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó, với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ta có*

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|.$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{2}d_2} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{3}c_2} 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2 - d_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng } 2} 6(-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -84.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{d_3-4d_2 \\ d_4-3d_2}]{\substack{d_2-d_1 \\ d_1-2d_2}} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 15 \\ 0 & 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 7 & -2 & 15 \\ 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2-2d_3} - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ -5 & 0 & -7 \\ 6 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 2} -(-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -20.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \xlongequal[60d_3]{\substack{6d_1 \\ 12d_2}} \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{1}{60} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-2c_2]{\substack{c_2-c_3 \\ c_1-6c_2}} \frac{1}{4320} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng } 1} -\frac{1}{4320} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}.$$

Lưu ý. Trong quá trình tính định thức, phép biến đổi sơ cấp loại 3 được khuyến khích dùng bởi vì nó không làm thay đổi giá trị định thức.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đáp án. $|C| = 24; \quad |D| = -174.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $C^2 D^\top$

Đáp án. $|A| = -27$; $|B| = 16$; $|C| = -18$; $|D| = -19$;

$$|C^2 D^\top| = |C^2||D^\top| = |C|^2|D| = -6156.$$

2.2. Định thức và ma trận khả nghịch

1. **Ma trận phụ hợp**
2. **Nhận diện ma trận khả nghịch**

2.2.1. Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$\boldsymbol{c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|}$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** (hay ***ma trận phó***) của A, ký hiệu là $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận phụ hợp của A.

Giải. $c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4;$$

Tương tự ta có $c_{22} = -3$; $c_{23} = -1$; $c_{31} = -2$; $c_{32} = 1$; $c_{33} = 1$.

Suy ra $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Do đó $\operatorname{adj}(A) = C^\top = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Tìm ma trận phụ hợp của $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Đáp án. $\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} -17 & 11 & 18 \\ 19 & -22 & -24 \\ 14 & -11 & -9 \end{pmatrix}$

2.2.2. Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Giải. Ta có $|A| = 23 \neq 0$. Suy ra A khả nghịch. Ta tính được

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hệ quả. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$. *Khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Giải. Ta có $|A| = -2 \neq 0$. Suy ra A khả nghịch. Ta tính được

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Những ma trận sau có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của chúng.

$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad c)\ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Đáp án. $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; B không khả nghịch;

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -9 \\ -7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix};\quad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn. a) Ta có $|A| = 8m - 72$. Do đó A khả nghịch khi

$$8m - 72 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9.$$

b) Ta có $|B| = (4m - 4)(0) = 0$. Do đó B không khả nghịch với mọi m.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Tính $|A|$; $|A^{-1}|$; $|3A|$; $|\mathrm{adj}(A)|$.

Đáp án. $|A| = 2;\quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{2};\quad |3A| = 54;\quad |\mathrm{adj}(A)| = 4.$

Mệnh đề. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và* A *khả nghịch. Khi đó*

(i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$;

(ii) $|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

Ví dụ. Cho $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ và $|A| = 3, |B| = -2$. Tính

$$|(2AB)^{-1}| \text{ và } |\mathrm{adj}(AB)|.$$

Giải.

- $|(2AB)^{-1}| = \dfrac{1}{|2AB|} = \dfrac{1}{2^3|AB|} = \dfrac{1}{8|A||B|} = \dfrac{1}{8.(3).(-2)} = -\dfrac{1}{48}$;
- $|\mathrm{adj}(AB)| = |AB|^{3-1} = (|A||B|)^2 = (3.(-2))^2 = 36.$

2.3. Ứng dụng định thức để giải hệ PTTT

1. **Quy tắc Cramer**

2. **Biện luận và giải hệ PTTT bằng Cramer**

2.3.1. Quy tắc Cramer

Định lý. *Cho hệ phương trình tuyến tính* $AX = B$ $(\star)$ *gồm* n *ẩn và* n *phương trình. Đặt*

$$\Delta = \det A; \qquad \Delta_i = \det(A_i),\ \forall i \in \overline{1, n},$$

trong đó A_i *là ma trận có từ* A *bằng cách thay cột* i *bằng cột* B*. Khi đó:*

1. *Nếu* $\Delta \neq 0$ *thì* $(\star)$ *có một nghiệm duy nhất là:*
$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i \in \overline{1, n}.$$
2. *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i \neq 0$ *với một* i *nào đó thì* $(\star)$ *vô nghiệm.*
3. *Nếu* $\Delta = 0$ *và* $\Delta_i = 0$ $\forall i \in \overline{1, n}$ *thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Trong trường hợp này ta phải dùng phương pháp Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải* $(\star)$.

Ví dụ. Giải phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; \ \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & -1 & -2 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \\ \mathbf{4} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-3} & -2 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{4} & 1 \end{vmatrix} = -14; \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mathbf{-3} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \mathbf{4} \end{vmatrix} = -7.$$

Vì $\Delta \neq 0$ nên hệ (1) có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \tag{2}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 1 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 3 \\ \mathbf{5} & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$$

Vì $\Delta = 0$ và có $\Delta_1 \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right. \tag{3}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 1 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 3 \\ \mathbf{10} & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{4} & -2 \\ 2 & \mathbf{3} & 3 \\ 5 & \mathbf{10} & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{4} \\ 2 & 3 & \mathbf{3} \\ 5 & 7 & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0.$$

Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ (3) là

$$\begin{cases} x = 9 + 9t; \\ y = -5 - 7t; \\ z = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.3.2. Giải và biện luận hệ PTTT bằng Cramer

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 2 & 2 \\ \mathbf{2} & m-2 & m-5 \\ \mathbf{-2} & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 \\ -2 & \mathbf{2} & m-5 \\ m & \mathbf{-2} & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ -2 & m-2 & \mathbf{2} \\ m & 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = 2m - 6 = 2(m-3).$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1; \\ m \neq 3. \end{cases}$ Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1}\right).$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Với $m = 3$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1-2d_2]{\substack{d_3+d_2 \\ -\frac{1}{5}d_2}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 6/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có x_3 là ẩn tự do. Suy ra nghiệm của hệ là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{6}{5}t - \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}t + \frac{2}{5}, t\right) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{cases}$$

Giải. $$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17);$$

$$\Delta_2 = 2m(m-1)(m-14); \quad \Delta_3 = -36m(m-1).$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m-1)(m-17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{2m(m-1)(m-14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1; \\ m = 1. \end{array}\right.$

- Với $m = -1$, ta có $\Delta_1 = -36 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ trở thành

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & + & 12y & - & 6z & = & 1; \\ -10x & + & 20y & - & 10z & = & 2; \\ -12x & + & 24y & - & 12z & = & 0. \end{array}\right.$$

Ma trận hóa hệ phương trình ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -6 & 12 & -6 & 1 \\ -10 & 20 & -10 & 2 \\ -12 & 24 & -12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} -6 & 12 & -6 & 1 \\ -10 & 20 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Suy ra hệ vô nghiệm.

Ví dụ.(tự làm) Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1. \end{cases}$$

Xác định giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ sao cho:

- a) hệ có một nghiệm duy nhất;
- b) hệ vô nghiệm;
- c) hệ có vô số nghiệm.

Hướng dẫn.

$$\Delta = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2);$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$ Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\Big).$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1; \\ m = -2. \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + z = 1; \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Giải hệ bằng Gauss hoặc Gauss-Jordan, ta có hệ vô số nghiệm

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - t - s,\ t,\ s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}$$

- $m = -2$, ta có $\Delta_1 = 9 \neq 0$. Suy ra hệ vô nghiệm.