Chương 5

CHÉO HÓA MA TRẬN

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 5. CHÉO HÓA MA TRẬN

1. Trị riêng và vectơ riêng
2. Không gian con riêng
3. Chéo hóa ma trận
4. Ứng dụng của chéo hóa ma trận

Giới thiệu

Bài toán Cho A là một ma trận vuông. Tồn tại hay không một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo?

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$.

Đáp án. $$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = (P^{-1}A)P &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lưu ý. Trong chương này các vectơ được viết theo **dạng cột**.

5.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Vectơ $v \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của A nếu:

1. $v \neq \mathbf{0}$.
2. tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ sao cho $Av = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của A, và v là ***vectơ riêng ứng với trị riêng*** $\boldsymbol{\lambda}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ và hai vectơ $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Hỏi u và v có phải là vectơ riêng của A không?

Giải. Ta có

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4u$$

Vậy $Au = -4u$. Suy ra u là vectơ riêng của A ứng với trị riêng -4.

Ta có

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vậy $Av \neq \lambda v$. Suy ra v không là vectơ riêng của A.

Nhận xét. *Nếu v là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$ thì μv $(\mu \neq 0)$ cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$.*

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó ***đa thức đặc trưng*** của A được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_A(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}).$$

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm đa thức đặc trưng của A.

Giải. Ta có
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24. \end{aligned}$$

Mệnh đề. *Trị riêng của ma trận A là nghiệm của phương trình đặc trưng*
$$P_A(\lambda) = 0.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng của A.

Giải. Đa thức đặc trưng của A là
$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Như vậy A có hai trị riêng là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$.

5.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của A thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in \mathbb{R}^n |\ Av = \lambda v\}}$$

là một không gian con của $\mathbb{R}^n$ và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của *A ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét. *$E(\lambda)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình*

$$\boldsymbol{(A - \lambda I_n)X = 0}.$$

Ví dụ. Cho ma trận $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Tìm các trị riêng của A và không gian riêng ứng với các trị riêng này.

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$\begin{aligned} P_A(\boldsymbol{\lambda}) &= |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| \\ &= -\boldsymbol{\lambda}^3 + 11\boldsymbol{\lambda}^2 - 35\boldsymbol{\lambda} + 25 \\ &= -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2. \end{aligned}$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 1)},\ \lambda = 5 \text{ (bội 2)}.$$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 1), $\lambda_2 = 5$ (bội 2).

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Giải hệ (1) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Với $\lambda_2 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Giải hệ (2) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(5)$ có $\dim E(5) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mệnh đề. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng bội m của A thì* $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) \leq m$.

5.3. Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa. Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ chéo hóa được khi và chỉ khi thỏa hai điều kiện sau:*

1. $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ *phân rã trên* $\mathbb{R}$*, nghĩa là* $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ *có thể phân tích thành dạng*

$$\boldsymbol{P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}}$$

với $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *và* $m_1 + \dots + m_p = n$.

2. $\forall i \in \overline{1,p}$, $\dim \boldsymbol{E(\lambda_i) = m_i}$.

Hệ quả. *Nếu ma trận A có n trị riêng khác nhau thì A chéo hóa được.*

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có chéo hóa được không?

Giải. Đa thức đặc trưng của A là

$$\begin{aligned} P_A(\boldsymbol{\lambda}) &= |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 2 & -2 \\ 3 & 2-\boldsymbol{\lambda} & -4 \\ 2 & -1 & -\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} \\ &= -\boldsymbol{\lambda}^3 + 3\boldsymbol{\lambda}^2 + 4\boldsymbol{\lambda} - 6 \\ &= -1(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda}^2 - 2\boldsymbol{\lambda} - 6). \end{aligned}$$

Suy ra A có 3 giá trị riêng khác nhau là

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}, \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}.$$

Như vậy A chéo hóa được.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ tương ứng. Đối với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm số chiều của của không gian riêng $E(\lambda_i)$, là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1, p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, A chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, ta đặt P là ma trận có được bằng cách xếp các vectơ của các $\mathcal{B}_i,\ i \in \overline{1,p}$. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{ lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{ lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có chéo hóa được không?

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda^2 + 4).$$

Vì $P_A(\lambda)$ không phân rã trên $\mathbb{R}$ nên ma trận A không chéo hóa được.

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hỏi A có chéo hóa được không?

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$\begin{aligned} P_A(\boldsymbol{\lambda}) &= |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 4-\boldsymbol{\lambda} & 1 & -1 \\ -6 & -1-\boldsymbol{\lambda} & 2 \\ 2 & 1 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} \\ &= -\boldsymbol{\lambda}^3 + 4\boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 2 \\ &= -(\boldsymbol{\lambda}-1)^2(\boldsymbol{\lambda}-2). \end{aligned}$$

- Trị riêng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy, hạng của $A - I_3$ bằng 2, suy ra $\dim E(1) = 3 - 2 = 1$ nhỏ hơn số bội của trị riêng $\lambda_1 = 1$. Do đó A không chéo hóa được.

Ví dụ. Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1\,(\text{bội } 1), \boldsymbol{\lambda} = -2\,(\text{bội } 2).$$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1\,(\text{bội } 1), \lambda_2 = -2\,(\text{bội } 2)$.

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_2]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 - 2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{chọn } t = 1$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_1 \\ d_2 + 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vì các không gian $E(\lambda_i)$ của A có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được.

Lập ma trận P bằng cách xếp các vectơ của $\mathcal{B}_1$ và $\mathcal{B}_2$ ta được

$$P = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Chéo hóa ma trận $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

5.4. Một vài ứng dụng sự chéo hóa
Tính lũy thừa của ma trận

Bài toán. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A chéo hóa được. Tìm A^k.

Giải. Vì A chéo hóa được nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Từ (1) ta có $A = PDP^{-1}$ nên

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)\,P^{-1}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n.

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

- Trị riêng

$$A \text{ có 2 trị riêng là } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

- Không gian riêng

$$E(2) \text{ có cơ sở } \left\{u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ và } E(3) \text{ có cơ sở } \left\{v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Vậy $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có
$$A = PDP^{-1}.$$
Do đó
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được
$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
Tiếp theo, tính được
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ta có
$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm công thức của A^n.

Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

Ví dụ. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\geq 0}$ và $(v_n)_{n\geq 0}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n, \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Đặt

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Công thức (1) được viết lại như sau:

$$X_{n+1} = AX_n \text{ với } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Từ đó tính được $X_n = A^n X_0$.

Sử dụng phương pháp chéo hóa ta tính được

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{cases} u_n = 5.2^n - 3^{n+1}; \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n. \end{cases}$$

Dãy Fibonacii

Dãy Fibonacii là dãy vô hạn các số

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Mỗi số hạng trong dãy Fibonacii (kể từ số hạng thứ ba) bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Câu hỏi. Làm thế nào để tính số hạng F_n mà không cần tính lần lượt từ các số $F_0 = 0, F_1 = 1$?

Đặt $u_k := \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$u_{k+1} = Au_k.$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận.

Đa thức đặc trưng $f_A(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} - 1$ có các nghiệm khác nhau là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Do đó A chéo hóa được và một dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ với } P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ta có

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ đó kết hợp với công thức (2) suy ra

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]. \tag{5}$$

Lưu ý $\left| \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. Suy ra $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \to 0$ khi $k \to \infty$. Do đó, với k càng lớn thì

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Con số $1,618$ được những người Hy Lạp cổ đại gọi là ***tỉ lệ vàng***.