Phương Tình Vi Phân Cấp

Lê A. Hạ

Đh. Khoa Học Tự Nhiên (HCMUS.VNU) - Khoa Toán Tin học - Bộ môn Giải Tích

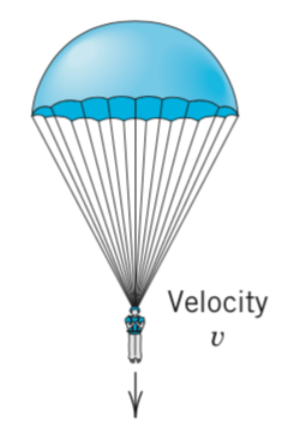
laha@hcmus.edu.vn

Ngày 29 tháng 7 năm 2024

Phương trình vi phân

Các ví dụ mở đầu - Vận động viên nhảy dù

Xét bài toán một vận động viên nặng m kg đang nhảy dù từ trên cao xuống mặt đất với vận tốc v:



- Theo định luật II Newton, chuyển động của vật đó có thể mô tả bởi phương trình:

$$F = ma \tag{1.1}$$

  trong đó F là hợp lực tác động lên vật và a là gia tốc chuyển động.

- Hợp lực F có thể giả thuyết chỉ bao gồm lực hấp dẫn (tỷ lệ với khối lượng của vận động viên và hướng xuống) và lực cản (tỷ lệ với vận tốc chuyển động và hướng lên trên).

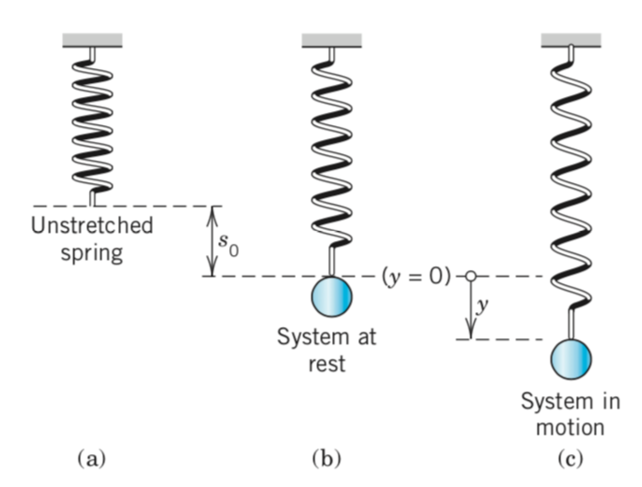
- Ngoài ra, do gia tốc chuyển động $a = v'$ nên (1.1) có thể viết dưới dạng:

$$mv' = mg - \gamma v \tag{1.2}$$

  trong đó $g \approx 9.8\, m/s^2$ là gia tốc trọng trường, γ là hệ số cản.

Các ví dụ mở đầu - Mô hình dao động của lò xo

Xét bài toán treo một lò xo cuộn theo phương thẳng đứng. Một đầu của lò xo được gắn với một giá đỡ cố định, đầu còn lại gắn vào một bi sắt.



Các ví dụ mở đầu - Mô hình dao động của lò xo

- Áp dụng định luật Hooke, ta có lực phục hồi F tỉ lệ với độ dãn y được biểu diễn như sau:

$$F = -ky \tag{1.3}$$

  trong đó: $k > 0$ là hằng số lò xo.

- Áp dụng định luật II Newton, chuyển động của quả bi sắt có khối lượng m có thể được mô tả bởi phương trình:

$$F = my''. \tag{1.4}$$

  Từ (1.3) và (1.4), ta có:

$$my'' + ky = 0. \tag{1.5}$$

Các khái niệm chung - Định nghĩa và phân loại phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân (differential equation) là phương trình chứa biến số, hàm số cần tìm và các đạo hàm (vi phân) các cấp của hàm số đó.

Có 2 loại phương trình vi phân:

- Phương trình vi phân thường (Ordinary differential equation - ODE) là phương trình có hàm số cần tìm chỉ phụ thuộc vào một biến duy nhất.
  Ví dụ:
  - $y'(x) - xy(x) = 0$, $(y' = dy/dx)$
  - $y''(x) + xy'(x) = \sin(x)$, $(y'' = d^2y/dx^2)$.

  Hàm số cần tìm là $y(x)$ chỉ phụ thuộc vào một biến duy nhất là x.

Các khái niệm chung - Định nghĩa và phân loại phương trình vi phân

- Phương trình đạo hàm riêng (Partial differential equations - PDE) là phương trình có hàm số cần tìm phụ thuộc vào vài biến độc lập *(ít nhất 2 biến)*.
  Ví dụ: Phương trình Laplace

  $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

  có hàm số cần tìm $T(x, y)$ phụ thuộc vào 2 biến độc lập là x và y.

Ghi chú: Trong học phần giải tích 4, chúng ta chỉ xét phương trình vi phân thường.
Quy ước: Từ đây, khi ta nói phương trình vi phân thì ta ngầm hiểu đó là phương trình vi phân thường.

Các khái niệm chung - Cấp của phương trình vi phân

Xét phương trình vi phân có dạng tổng quát sau:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.6}$$

trong đó $y = y(x)$ là hàm cần tìm và $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ là đạo hàm cấp n.

Định nghĩa

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của hàm số cần tìm xuất hiện trong phương trình đó.

Khi đó, phương trình (1.6) được gọi là phương trình vi phân cấp n.

Các khái niệm chung - Cấp của phương trình vi phân

Ví dụ:

- $y' = x^2 + xy^2 + y$ là phương trình vi phân cấp 1 do phương trình chứa đạo hàm cấp 1 y' là cấp cao nhất.
- $y'' + 5y' - y^3 = 1$ là phương trình vi phân cấp 2 do phương trình chứa đạo hàm cấp 2 y'' là cấp cao nhất.
- $y''' + 3y'' = e^{2x}$ là phương trình vi phân cấp 3 do phương trình chứa đạo hàm cấp 3 y''' là cấp cao nhất.

Các khái niệm chung - Nghiệm của phương trình vi phân

Xét phương trình vi phân có dạng:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Định nghĩa

Hàm số $y = y(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân (1.7) trên khoảng I (với $I \subset \mathbb{R}$) nếu hàm số $y = y(x)$ thoả tính chất:

$$\forall x \in I, \quad F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0. \tag{1.8}$$

Lưu ý: (1.8) chứa các điều kiện sau:

- Hàm số y khả vi tới cấp n trên I, tức là các đạo hàm $y'(x), \ldots, y^{(n)}$ tồn tại với mọi $x \in I$.
- Với mọi $x \in I$, $\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right)$ thuộc miền xác định của F.

Các khái niệm chung - Nghiệm của phương trình vi phân

- Nếu nghiệm của phương trình vi phân (1.7) trên khoảng I được biểu diễn dưới dạng $y = g(x)$ thì ta gọi nghiệm này là nghiệm hiện (explicit solution) của phương trình vi phân (1.7) trên khoảng I.
  Ví dụ: $y' = \sin(x)$ có nghiệm hiện là $y = -\cos(x) + c$ với c là hằng số.
- Một hệ thức $G(x, y) = 0$ được gọi là nghiệm ẩn (implicit solution) trên khoảng I của phương trình vi phân (1.7) nếu tồn tại một hàm số y vừa thoả mãn hệ thức $G(x, y) = 0$ vừa thoả mãn phương trình vi phân (1.7) với mọi $x \in I$.

Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa:

Phương trình vi phân cấp 1 có **dạng tổng quát**:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

và **dạng hiện** (explicit form):

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

Các loại nghiệm của phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa (Nghiệm tổng quát - General solution)

Nếu nghiệm của phương trình vi phân (2.1) được biểu diễn dưới dạng:

$$y = \varphi(x, c)$$

với c là hằng số thì ta gọi nghiệm này là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.1).

Định nghĩa (Nghiệm riêng - A particular solution)

Nếu ta chọn c là một số thực cụ thể c_0 thì nghiệm $y = \varphi(x, c_0)$ được gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân (2.1).

Ví dụ: Phương trình vi phân $y' = x$ có nghiệm tổng quát là $y = \dfrac{x^2}{2} + c$, với c là hằng số. Nghiệm $y = \dfrac{x^2+1}{2}$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân ứng với $c = \dfrac{1}{2}$.

Các loại nghiệm của phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa:

- Nếu nghiệm của phương trình vi phân (2.1) được biểu diễn dưới dạng hàm ẩn $G(x, y, c) = 0$, với c là hằng số thì ta gọi nghiệm này là tích phân tổng quát của phương trình vi phân (2.1).
- Mỗi tích phân ứng với giá trị xác định c được gọi là tích phân riêng của phương trình vi phân (2.1).

Ví dụ: Phương trình vi phân $y^2dy + xdx = 0$ có tích phân tổng quát là

$$\frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2} = c, \qquad \text{với } c \text{ là hằng số.}$$

Với $c = 1$, ta có tích phân riêng là

$$2y^3 + 3x^2 = 6.$$

Bài toán Giá Trị Đầu (Initial Value Problem: IVP)

Định nghĩa

Xét phương trình vi phân cấp 1

$$y' = f(x, y) \tag{2.3}$$

trong đó: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm cho trước xác định trong tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Cho $(x_0, y_0) \in \Omega$. Bài toán tìm một nghiệm $y(x)$ của (2.3) thoả điều kiện

$$y_0 = y(x_0) \tag{2.4}$$

được gọi là bài toán giá trị đầu (initial value probleme: IVP) cho phương trình (2.3).

Điều kiện (2.4) được gọi là *điều kiện đầu* của bài toán.

Nghiệm của bài toán giá trị đầu

Để tìm nghiệm của bài toán Cauchy (2.3)-(2.4), ta cần làm 2 bước sau:

- Bước 1: Tìm nghiệm phương trình vi phân cấp 1 (2.3). Giả sử rằng nghiệm này được biểu diễn dưới dạng:

$$G(x, y, c) = 0,$$

  trong đó c là hằng số.
- Bước 2: Từ điều kiện ban đầu (2.4), ta tìm hằng số c thoả

$$G(x_0, y_0, c) = 0.$$

Nghiệm của bài toán Cauchy

Ví dụ: Xét phương trình vi phân cấp 1 có dạng:

$$y' = \cos(x) \tag{2.5}$$

với điều kiện ban đầu

$$y(0) = 1. \tag{2.6}$$

Để tìm nghiệm của bài toán Cauchy (2.5)-(2.6), ta làm như sau:

- Bước 1: Tìm nghiệm phương trình vi phân (2.5).
  Lấy tích phân 2 vế phương trình (2.5), ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.5) có dạng:

  $$y = \sin(x) + c$$

  trong đó c là hằng số.

Nghiệm của bài toán Cauchy

- Bước 2: Sử dụng điều kiện đầu (2.6) để tìm c thoả:

$$1 = \sin(0) + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Khi đó, nghiệm của bài toán Cauchy (2.5)-(2.6) là:

$$y = \sin(x) + 1.$$

Mô Hình Hóa

Radioactivity: Exponential Decay

Given an amount of a radioactive substance, say, 0.5 g (gram), find the amount present at any later time.

Physical Information

Experiments show that at each instant a radioactive substance decomposes—and is thus decaying in time—proportional to the amount of substance present.

Step 1: Thành lập mô hình toán học của quá trình vật lý

Đặt $y(t)$ là lượng chất tại thời điểm t. Ta có sự thay đổi $y'(t) = dy/dt$ tỉ lệ thuận với lượng chất tại thời điểm đó nên

$$y'(t) = -ky$$

ở đây k là hệ số dương.

Mô Hình Hóa

Step 1: Cont.

Ta có tại thời điểm $t = 0$, $y(0) = 0.5$ nên ta có phương trình vi phân giá trị đầu:

$$\begin{cases} y'(t) &= -ky \\ y(0) &= 0.5 \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán

Nghiệm của bài toán là:

$$y(t) = ce^{-kt}$$

Kết hợp với điều kiện đầu, ta được

$$0.5 = c, \quad y(t) = 0.5e^{-kt}$$

Mô Hình Hóa

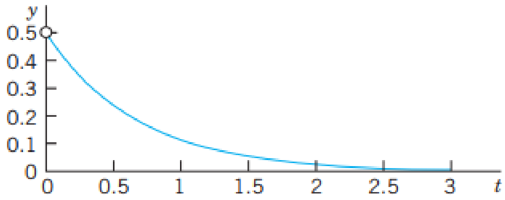


Fig. 5. Radioactivity (Exponential decay, $y = 0.5e^{-kt}$, with $k = 1.5$ as an example)

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến là phương trình có dạng

$$g(y)y' = f(x) \tag{2.7}$$

trong đó: g và f là hai hàm cho trước.

Cách giải:

- Bởi vì hàm g chỉ phụ thuộc vào y và hàm f chỉ phụ thuộc vào x. Hơn thế nữa, ta có $y' = dy/dx$.
- Do đó, khi ta lấy tích phân 2 vế phương trình (2.7), ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình (2.7) có dạng:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

với c là hằng số.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau

$$y^2y' = x(1+x^2). \tag{2.8}$$

Ta thấy rằng phương trình (2.8) là phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến. Ta viết lại phương trình (2.8) như sau:

$$y^2dy = x(1+x^2)dx.$$

Tích phân 2 vế ta được

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{3} &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4 + c_1\right)^{1/3} \end{aligned}$$

trong đó c và c_1 là các hằng số.
Vậy phương trình vi phân (2.8) có nghiệm tổng quát là:

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4 + c_1\right)^{1/3}.$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y' = 1 + y^2$.
Ta có thể được dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

hay

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\arctan(y) = x + c \text{ hay } y = \tan(x + c)$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $y' = (1+x)e^{-x}y^2$.
Ta có thể được dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)e^{-x}y^2$$

Ta thấy $y = 0$ là nghiệm của phương trình vi phân. Nếu $y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{y^2} = (1+x)e^{-x}dx$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (1+x)e^{-x}dx, \quad \text{đặt} \begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Nên } \frac{-1}{y} = -(1+x)e^{-x} + \int e^{-x} + c = -(2+x)e^{-x} + c$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = \dfrac{1}{(2+x)e^{-x} - c}$ với c là hằng số bất kì.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví Dụ: Giải phương trình vi phân $y' = -2xy$, và $y(0) = 1.8$.
Ta có thể được dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

Ta thấy $y = 0$ là nghiệm của phương trình trên. Nếu $y \neq 0$ thì hay

$$\frac{dy}{y} = -2xdx$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

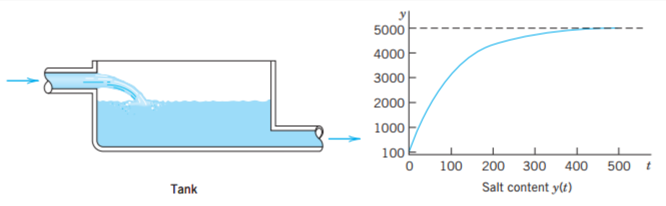
$$\ln|y| = -x^2 + c \quad \text{hay } y = \pm e^{-x^2+c} = c_1 e^{-x^2} \quad (c, c_1 \text{ là những hằng số})$$

Ta có $y(0) = 1.8$, thế vào nghiệm tổng quát trên $1.8 = c_1$. Vậy nghiệm riêng

$$y = 1.8e^{-x^2}$$

Ví Dụ: Mixing Problem

Mixing problems occur quite frequently in chemical industry. We explain here how to solve the basic model involving a single tank. The tank in Fig. 7 contains 1000 gal of water in which initially 100 lb of salt is dissolved. Brine runs in at a rate of 10 gal min, and each gallon contains 5 lb of dissoved salt. The mixture in the tank is kept uniform by stirring. Brine runs out at 10 gal min. Find the amount of salt in the tank at any time t.



Hình 1: Mixing Problem

Step 1:

Mô hình hóa. Đặt $y(t)$ là lượng muối trong bể tại thời t. Sự thay đổi độ muối trong bể tại thời gian t:

$$y'(t) = \text{lượng muối đi vào - lượng muối đi ra}$$

Lượng muối đi vào băng 10gal/min nhân cho 5lb/gal là 50lb/min. Nước muối chảy ra với 10gal/min, lượng nước muối trong bể luôn là 100ogal, vậy tỉ lệ lượng muối chảy ra là $10/1000 = 0.01$ (1%). Vậy lương muối đi ra bằng $0.01y(t)$ tại thời điểm t. Vậy ta có phương trình

$$y'(t) = 50 - 0.01y(t) = -0.01(y - 5000)$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Step 2:

Dùng phương pháp tách biến, ta được

$$\frac{dy}{y-5000} = -0.01dt, \quad |y-5000| = -0.01t + c^*, \quad y(t) = ce^{-0.01t} + 5000$$

Theo dự kiện mô hình thì lúc đầu, lượng muối trong bể là 100lb, nên $y(0) = 100$, thế vào nghiệm tổng quát ta được $100 = c + 5000$ nên $c = -4900$. Vậy lượng muối trong bể $y(t)$ là

$$y(t) = 5000 - 4900e^{0.01t}$$

Ví Dụ: Heating an Office Building (Newton's Law of Cooling)

Suppose that in winter the daytime temperature in a certain office building is maintained at 70°F. The heating is shut off at 10 P.M. and turned on again at 6 A.M. On a certain day the temperature inside the building at 2 A.M. was found to be 65°F. The outside temperature was 50°F at 10 P.M. and had dropped to 40°F by 6 A.M. What was the temperature inside the building when the heat was turned on at 6 A.M?

Physical information.

Experiments show that the time rate of change of the temperature T of a body B (which conducts heat well, for example, as a copper ball does) is proportional to the difference between T and the temperature of the surrounding medium (Newton's law of cooling).

Step 1: Xây dựng mô hình toán

. Đặt $T(t)$ là nhiệt độ bên trong của tòa nhà và T_A là nhiệt trung bình bên ngoài:

$$T'(t) = k(T(t) - T_A)$$

Nghiệm tổng quát

Từ dự liệu bài toán: nhiệt độ bên ngoài lúc 10 PM là 50^0F và 6 AM là 40^0F nên nhiệt độ trung bình bên ngoài là $T_A = 45^0$F.
Vậy ta có phương trình:

$$\frac{dT}{T-45} = kdt, \quad \ln|T-45| = kt + c^*, \quad T(t) = 45 + ce^{kt}$$

Nghiệm riêng

Ta có nhiệt độ tại 10 PM là 70^0F nên $T(0) = 70$. Thế vào nghiệm tổng quát trên, ta được

Nghiệm riêng (cont.)

$$70 = 45 + c, \quad c = 25, \quad T(t) = 45 + 25e^{kt}$$

Xác định hệ số k

Tại 2 AM, nhiệt độ tòa nhà là 65^0F, nên $T(4) = 65$. Thế vào phương trình riêng

$$45+25e^{4k} = 56, e^{4k} = 0.8, \quad k = \frac{1}{4}\ln 0.8 = -0.056, T(t) = 45+25e^{-0.056t}$$

Kết quả và dự đoán

Tại 6 AM (t=8), nhiệt độ của tòa nhà là:

$$T(8) = 45 + 25e^{-0.056*8} = 61^0 F$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Bài tập: Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

1) $\dfrac{x}{x^2+1}dx + (y+1)dy = 0$ thoả $y(0) = 1$.
2) $(e^x + x + 1)\,dx + (\sin(y) + 2\cos(y))dy = 0$ thoả $y(2\pi) = 1$.
3) $y' + xe^{-x^2/2} = 0$ thoả $y(1) = 0$.
4) $y' = 4e^{-x}\cos(x)$ thoả $y(\pi/2) = 1$.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Bên cạnh đó, chúng ta có thể đưa một số phương trình vi phân có dạng sau về dạng tách biến:

Dạng 1:

$$F_1(x)G_1(y)y' + F_2(x)G_2(y) = 0 \tag{2.9}$$

trong đó F_1, F_2, G_1, G_2 là các hàm cho trước.

Cách giải:

- Nếu $F_1(x)G_2(y) = 0$ thì giải tìm nghiệm. Kiểm tra xem nghiệm tìm được có thoả phương trình (2.9) hay không?
- Nếu $F_1(x)G_2(y) \neq 0$ thì ta chia hai vế của phương trình (2.9) cho $F_1(x)G_2(y)$. Ta được phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến như sau:

$$\frac{G_1(y)}{G_2(y)}y' = -\frac{F_2(x)}{F_1(x)}.$$

  Áp dụng cách giải phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến ở **slide 41** với $g(y) = G_1(y)/G_2(y)$ và $f(x) = -F_2(x)/F_1(x)$ để tìm nghiệm $y(x)$ cho phương trình (2.9).

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau:

$$(x^2-1)yy' + x(y^2-1) = 0. \tag{2.10}$$

- Nếu

  $$(x^2-1)(y^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ hoặc } y = \pm 1$$

  thì ta thấy rằng $y = \pm 1$ là nghiệm của phương trình (2.10).
- Nếu $(x^2-1)(y^2-1) \neq 0$ thì ta chia hai vế của phương trình (2.10) cho $(x^2-1)(y^2-1)$. Khi đó, ta được phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến như sau:

  $$\frac{y}{y^2-1}y' = -\frac{x}{x^2-1}. \tag{2.11}$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

- Ta viết lại phương trình (2.11) như sau:

$$\frac{y}{y^2-1}dy = -\frac{x}{x^2-1}dx$$

Tích phân 2 vế, ta được:

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln c$$

trong đó $c > 0$.

Vậy phương trình vi phân (2.10) có tích phân tổng quát là

$$(x^2-1)(y^2-1) = c_1$$

trong đó $c_1 > 0$.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Bài tập: Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

1) $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$ thoả $y(0) = 0$.
2) $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$ thoả $y(\sqrt{8}) = 1$.
3) $2^{x+y} + 3^{x+2y}y' = 0$ thoả $y(1) = 1$.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Dạng 2

$$y' = f(ax + by + c), \quad \text{với } a \neq 0, b \neq 0 \tag{2.12}$$

trong đó f là hàm cho trước.

Cách giải: Đặt

$$u = ax + by + c \quad \Rightarrow u' = a + by' \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13), ta được:

$$u' = a + bf(u) \tag{2.14}$$

- Nếu $a + bf(u) = 0$ tại $u = u_*$ thì bằng cách thử trực tiếp ta kiểm tra xem $y = (u_* - ax - c)/b$ có là nghiệm của phương trình đã cho hay không?

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

- Nếu $a + bf(u) \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho $a + bf(u)$. Ta được phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến sau:

$$\frac{u'}{a + bf(u)} = 1. \tag{2.15}$$

Áp dụng cách giải ở **slide 41** để tìm nghiệm $u(x)$ cho phương trình (2.15). Kết hợp với (2.13), ta tìm được nghiệm $y(x)$ của phương trình (2.12).

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau:

$$y' = x - y + 5 \tag{2.16}$$

Đặt

$$u = x - y + 5 \quad \Rightarrow u' = 1 - y'. \tag{2.17}$$

Từ (2.16) và (2.17), ta có:

$$u' = 1 - u \tag{2.18}$$

- Nếu $1 - u = 0 \Leftrightarrow u = 1$ thì $y = x + 4$ là nghiệm của phương trình vi phân (2.16).
- Nếu $1 - u \neq 0$ thì chia 2 vế của phương trình (2.18) cho $1 - u$. Ta được phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến sau:

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

$$\frac{u'}{1-u} = 1. \tag{2.19}$$

Ta viết lại phương trình (2.19) như sau

$$\frac{du}{1-u} = dx.$$

Tích phân hai vế ta được

$$-\ln|1-u| = x + c, \quad \text{với } c \text{ là hằng số.} \tag{2.20}$$

Từ (2.17) và (2.20), ta được tích phân tổng quát của phương trình (2.16) là:

$$x + \ln|-x+y-4| + c = 0.$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Bài tập: Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

1) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$ thoả $y(0) = 1$.
2) $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$ thoả $y(1) = 0$.
3) $y' = (4x + y - 1)^2$ thoả $y(3) = 1$.
4) $y' = x - y + 1 + \dfrac{1}{y-x}$ thoả $y(1) = 2$.

Dạng 3

Phương trình vi phân cấp 1 dạng đẳng cấp là phương trình có

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.21}$$

trong đó $x \neq 0$ và f là hàm cho trước.

Cách giải: Ta đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đổi qua ẩn hàm mới $u = \dfrac{y}{x}$. Khi đó:

$$y = ux \quad \Rightarrow y' = xu' + u. \tag{2.22}$$

Thay (2.22) vào (2.21), ta được:

$$xu' + u = f(u) \quad \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

- Nếu $f(u) - u \neq 0$ (với mọi u trong miền xác định của hàm f), ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}. \tag{2.23}$$

(2.23) là phương trình vi phân tách biến. Tích phân hai vế, ta được:

$$\ln(|x|) = \int \frac{du}{f(u) - u} + \ln(|c|), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = ce^{\varphi(u)} \quad \text{với } \varphi(u) = \int \frac{du}{f(u) - u}.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình vi phân là: $x = ce^{\varphi(y/x)}$.

- Nếu $f(u) - u \equiv 0$ tại $u = u_*$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy rằng hàm $y = u_* x$ cũng là nghiệm của phương trình vi phân đã cho.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau

$$y - xy' = -y \ln\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), \quad (x \neq 0). \tag{2.24}$$

Chia 2 vế của phương trình (2.24) cho x, ta được

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}\ln\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right). \tag{2.25}$$

Đặt:

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow y' = xu' + u. \tag{2.26}$$

Thay (2.26) vào (2.25), ta được:

$$xu' + u = u + u\ln(|u|) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = u \ \ln(|u|).$$

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

- Nếu $u\ln(|u|) \neq 0$, ta có
$$\frac{du}{u\ \ln(|u|)} = \frac{dx}{x}.$$
Đây là phương trình vi phân tách biến. Tích phân 2 vế, ta được:
$$\begin{aligned}
&\ln\left(\Big|\ln\left(|u|\right)\Big|\right) = \ln\left(|x|\right) + \ln\left(|c|\right), \quad c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &\ln\left(\left|\frac{\ln(|u|)}{x}\right|\right) = \ln(|c|) \\
\Leftrightarrow &|\ln(|u|)| = c|x| \\
\Leftrightarrow &u = e^{c_1 x}
\end{aligned}$$
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.24) là: $y = xe^{c_1 x}$.
- Nếu $u\ln(|u|) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ hoặc $|u| = 1$ thì ta có thể kiểm tra được rằng $y = 0$ và $y = \pm x$ cũng là nghiệm của phương trình vi phân đã cho.

Phương trình vi phân cấp 1 dạng tách biến

Bài tập: Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

a) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$ thoả $y(1) = 1$.

b) $x^2 + y^2 + xyy' = 0$ thoả $y(-1) = 1$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.27}$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm số chỉ phụ thuộc vào biến x.

- Nếu $q(x) \equiv 0$ thì (2.27) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 **thuần nhất**.
- Nếu $q(x) \neq 0$ thì (2.27) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 **không thuần nhất**.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Cách giải: Nhân hai vế của (2.27) với thừa số $e^{\int p(x)dx}$, ta được:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được nghiệm tổng quát của (2.27) là:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right) \\ &= e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx} + ce^{-\int p(x)dx} \end{aligned}$$

với c là hằng số.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ: Xét phương trình vi phân sau:

$$y' + 2xy = 4x. \tag{2.28}$$

Nhân 2 vế của phương trình (2.28) với thừa số $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$, ta được

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = 4xe^{x^2} \iff \frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = 4xe^{x^2}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ye^{x^2} = 4\int xe^{x^2}\,dx + c = 2e^{x^2} + c$$

với c là hằng số.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2.28) là: $y = 2 + ce^{-x^2}$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví Dụ:

Tìm nghiệm của phương trình vi phân giá trị đầu:

$$y' + \tan(x)y = \sin(2x), \quad y(0) = 1$$

Ta có $p(x) = \tan, q(x) = \sin(2x)$, nên nhân hai vế phương trình vi phân $e^{\int p(x)dx} = e^{\ln|1/\cos(x)|} = 1/\cos(x)$, ta có

$$\frac{1}{\cos(x)}y' + \frac{\tan}{\cos(x)}y = 2\sin(x) \iff \left(\frac{1}{\cos(x)}y\right)' = 2\sin(x)$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$y = \cos(x)\int 2\sin(x)dx + c = \cos(x)(-2\cos(x) + c) = c\cos(x) - 2\cos^2(x)$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Bài tập: Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

a) $y' = 2y + e^x - x$ thoả $y(0) = 1/4$.

b) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$ thoả $y(0) = 0$.

c) $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin(x)$ thoả $y(0) = 0$.

d) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$ thoả $y(2) = 1$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 được viết dưới dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3.1}$$

Nếu $r(x) \equiv 0$ thì phương trình (3.1) trở thành phương trình vi phân tuyến tính 2 thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.2}$$

Ví dụ như

$$xy'' + y' + xy = 0 \text{ được viết dưới dạng chuẩn } y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

Nếu $r(x) \not\equiv 0$ thì phương trình (3.1) trở thành phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất. Ví dụ như

$$y'' + 25y = e^{-x}\cos x$$

Đây là ví dụ cho phương trình vi phân phi tuyến cấp 2

$$y''y + y'^2 = 0$$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Ta có hàm số $y_1 = \cos x$ và $y_2 = \sin x$ là hai nghiệm của phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất

$$y'' + y = 0$$

Ta cũng thấy rằng hàm số $y = 2.5\cos x - \sin x$ cũng là nghiệm của phương trình trên. Vậy với mọi hằng số c_1, c_2 thì hàm số $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ cũng là nghiệm của phương trình trên. Vì thế ta có định lý sau:

Định Lý (Định lý chồng chất nghiệm)

Nếu $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là hai nghiệm của* (3.2) *thì tổ hợp tuyến tính* $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *(*c_1, c_2 *là hằng số) cũng là nghiệm của* (3.2)

Chú Ý

Định lý trên chỉ đúng cho trường hợp phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất, không đúng cho trường hợp không thuần nhất và phi tuyến.

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Ví dụ: Hàm số $y_1 = 1 + \cos x$ và $y_2 = 1 + \sin x$ là nghiệm nghiệm của phương trình không thuần nhất

$$y'' + y = 1$$

Nhưng tổng của hai nghiệm trên không phải là nghiệm của phương trình không thuần nhất Ví dụ: : Hàm số $y_1 = x^2$ và $y_2 = 1$ là 2 nghiệm của phương trình phi tuyến

$$y''y - xy' = 0$$

Bài toán giá trị đầu

Định Nghĩa

Bài toán giá trị đầu bao gồm phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất (3.2) và những giá trị đầu

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Giá trị đầu tại điểm $x_0 \in I$ (I là tập mở) để xác định c_1, c_2 của nghiệm tổng quát

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

với y_1, y_2 là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất (3.2). Nghiệm xác định thông qua giá trị đầu được gọi là nghiệm riêng

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của bài toán giá trị đầu:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -0.5$$

Nghiệm tổng quát, nghiệm cơ bản, nghiệm riêng

Định Nghĩa

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.2) *trên một tập mở I là*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{3.4}$$

trong đó y_1, y_2 là nghiệm của (3.2) *trên I độc lập tuyến tính và c_1, c_2 là các hằng số bất kì. Nghiệm y_1, y_2 được gọi là nghiệm cơ bản của* (3.2) *tren I.*
Nghiệm riêng của (3.2) *trên I là nghiệm tổng quát với những giá trị cụ thể c_1, c_2*

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất hệ số hằng phần

ODE hệ số hằng

Ta xét phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4.1}$$

với a, b là các hằng số. Để giải phương trình (4.1) thì trước tiên ta giải phương trình vi phân cấp 1:

$$y' + ky = 0$$

Nghiệm của phương trình trên là: $y = ce^{-kx}$. Vậy để giải phươn trình (4.1) thì người ta cũng chọn nghiệm tương tự:

$$y = e^{\lambda x} \tag{4.2}$$

Thế vào phương trình (4.1) ta được

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

Nếu λ là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{4.3}$$

thì hàm số (4.2) là một nghiệm của (4.1). Nghiệm của pt đặc trưng (4.3) là:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\Big(- a + \sqrt{a^2 - 4b}\Big), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\Big(- a - \sqrt{a^2 - 4b}\Big) \tag{4.4}$$

Vậy ta có 2 nghiệm cơ bản của phương trình (4.1):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{4.5}$$

Xác định nghiệm

Nghiệm của phương trình đặc trưng (4.3) có 3 trường hợp:

- Trương hợp 1: Có 2 nghiệm thực: $\Delta = a^2 - 4b > 0$
- Trương hợp 2: Có 1 nghiệm thực kép: $\Delta = a^2 - 4b = 0$
- Trương hợp 3: Có 2 nghiệm nghiệm phức: $\Delta = a^2 - 4b < 0$

Trương hợp 1: Có 2 nghiệm thực λ_1 và λ_2

Chúng ta có 2 nghiệm cơ bản

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{4.6}$$

Hai nghiệm này là độc lập tuyến tính nên nghiệm tổng quát của (4.1) là

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{4.7}$$

Ví dụ: : Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - y = 0$.
Ví dụ: : Giả bài toán giá trị đầu sau:

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \;\; y'(0) = -5$$

Trường hợp 2: Có nghiệm kếp $\lambda = -a/2$

Trong trường hợp này $a^2 - 4b = 0$ nên 2 nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\dfrac{a}{2}$ nên (4.1) có một nghiệm

$$y_1 = e^{\frac{-a}{2}x}$$

Để tìm một nghiệm y_2 độc lập tuyến tính với y_1, ta đặt $y_2 = u(x)y_1$. Thế vào phương trình (4.1), ta có

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0 \tag{4.8}$$

$$\text{hay } u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{4.9}$$

Vì y_1 là nghiệm của (4.1) nên $(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$ và $y_1 = e^{\frac{-a}{2}x}$ nên

$$y_1' = -a/2e^{\frac{-a}{2}x} = -a/2y_1 \tag{4.10}$$

nên $2y_1' + ay_1 = 0$ nên ta có

$$u''y_1 = 0 \text{ suy ra } u'' = 0, \text{ nên } u(x) = c_1x + c_2 \tag{4.11}$$

Trường hợp 2: Có nghiệm kếp $\lambda = -a/2$

Nên nghiệm cơ bảng của (4.1) là

$$y_1 = e^{\frac{-a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{\frac{-a}{2}x} \tag{4.12}$$

Ví dụ: : Tìm nghiệm tổng quát của pt: $y'' + 6y' + 9 = 0$.
Ví dụ: : Tìm nghiệm riêng của bài toán giá trị đầu:

$$y'' + y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -3.5 \tag{4.13}$$

Trường hợp 3: Có 2 nghiệm phức $-a/2 + i\omega$ và $-a/2 - i\omega$

Trương hợp này $a^2 - 4b < 0$ nên đặt $\omega^2 = b - a^2/4 > 0$ và $a^2 - 4b = -4\omega^2$, $\sqrt{a^2 - 4b} = 2i\omega$ nên ta có

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\omega \tag{4.14}$$

vậy nghiệm ảo của (4.1) là

$$y_1 = e^{-ax/2}(\cos\omega x + i\sin\omega x), \quad y_2 = e^{-ax/2}(\cos\omega x - i\sin\omega x)$$

Nên ta chọn 2 nghiệm thực là

$$y_1 = e^{-ax/2}\cos\omega x, \quad y_2 = e^{-ax/2}\sin\omega x$$

Vậy nghiệm tổng quát của (4.1) là

$$y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) \tag{4.15}$$

Trường hợp 3: Có 2 nghiệm phức $-a/2 + i\omega$ và $-a/2 - i\omega$

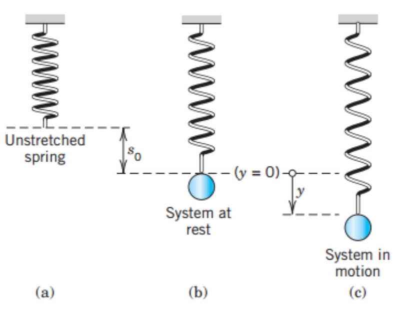
Ví dụ: : Tìm ngiệm của bài toán giá trị đầu:

$$y'' + 0.4y' + 9.04y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Ví dụ: : Tìm nghiệm tổng quát của pt: $y'' + \omega y = 0$

Bài toán dao động tự do của hệ thống lò xo

Xét hệ thống lo xo như hình dưới:



Theo định lý Hooke, ta có sự dịch chuyển một đoạn $y > 0$ thì lực sẽ được là:

$$F_1 = -ky \text{ với } k \text{ là hệ số đàn hồi}$$

Theo định luật 2 Newton's, ta có

$$F = my''$$

ODE với không giảm sốc

Nếu không có giảm sốc thì $F = F_1$ nên ta có được phương trình vi phân

$$my'' + ky = 0$$

Nghiệm của phương trình trên là

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Đây là dao động điều hòa với tần số $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$. Ta có thể rút gọn thành

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2},\ \tan\delta = \frac{B}{A}$$

Ví dụ: Cho một hệ thống lò xo với quả cầu sắt với lực $W = 98$ N thì quả cầu giản ra 1.09 (hệ lò xo không sốc). Tìm tần số dao động. Tìm phương trình dao động khi ta kéo quả cầu 16cm và thả quả cầu với vận tốc bằng không khi nó bắt đầu.

Ta có theo định luật Hooke's thì

$$k = W/1.09 = 98/1.09 = 90nt/m$$

Theo sự cân bằng lực thì

$$mg = W \text{ nên } m = W/g = 98/9.8 = 10(kg)$$

Vậy tần số giao định

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{k/m}/(2\pi) = 3/(2\pi) = 0.48(Hz)$$

Tại thời điểm bắt đầu $y(0) = A = 0.16$ và $y'(0) = B\omega_0 = 0$ nên $B = 0$.
Vậy phương trình dao động là

$$y = 0.16\cos(3t)(m)$$

ODE với hệ thống giảm sốc

Với hệ thống giảm sốc, ta thêm vào một lực

$$F_2 = -cy'$$

Nên bài toán trên trở thành $my'' = -cy' - ky$ nên ODE với giảm sốc

$$my'' + cy' + ky = 0$$

Phương trình đặc trưng là

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta,\ \lambda_2 = -\alpha - \beta,\ \alpha = \frac{c}{2m},\ \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

Ta có 3 trường hợp xảy ra

I. $c^2 - 4mk$, có 2 nghiệm thực riêng biệt (**Overdamping**)
II. $c^2 = 4mk$, có 1 nghiệm thực kép (**Critical damping**)
III. $c^2 < 4mk$, có 2 nghiệm phức (**Underdamping**)

Case I: Overdamping: $c^2 - 4mk > 0$

Phương trình dao động:

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

Case II: Critical damping: $c^2 = 4mk$

Phương trình dao động:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

Case III: Underdamping: $c^2 - 4mk < 0$

Đặt $\omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$ nên $\beta = i\omega^*$ nên $\lambda_1 = -\alpha + i\omega^*, \lambda_2 = -\alpha - i\omega^*$ nên phương trình dao động:

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \delta)$$

$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \tan\delta = \dfrac{B}{A}$

Ví dụ: Sự duy chuyển giống ví dụ trên với bộ giảm sốc với thông số

$$(I) c = 100 kg/s, \quad (II) c = 60 kg/s, \quad (III) c = 10 kg/s$$

Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất

Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất

Ta xét phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{6.1}$$

với $r(x) \not\equiv 0$. Ta thấy rằng nghiệm tổng quát của (6.1) là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.2}$$

và nghiệm riêng của (6.1).

Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất (6.1) trên tập mở I là nghiệm có dạng

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{6.3}$$

ở đây, $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất (6.2) trên tập I và y_p là nghiệm của (6.1) trên I không chứa hằng số.

Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính không thuần nhất

Định lý

Mối quan hệ của nghiệm của (6.1) và (6.2):

(a) Tổng của nghiệm của (6.1) va nghiệm của (6.2) là một nghiệm của (6.1).

(b) Hiệu 2 nghiệm của (6.1) là nghiệm của (6.2).

Định lý

Nếu $p(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ ở (6.1) là những hàm liên tục trên tập mở I thì mọi nghiệm của (6.1) trên I có dạng ở (6.3) với những giá trị c_1, c_2 phù hợp.

Phương pháp xác định hệ số

Phương pháp xác định hệ số phù hợp với phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{6.4}$$

Tóm tắc phương pháp xác định hệ số

a) Nếu $r(x) = e^{\gamma x}P_n(x)$ với $P_n(x)$ là đa thức bậc n thì $y_p = e^{\gamma x}Q_n(x)$ với $Q_n(x)$ là đa thức bậc n.

b) Nếu $r(x) = e^{\gamma x}P_n(x)\cos(mx)$ hay $r(x) = e^{\gamma x}P_n(x)\sin(mx)$ với $P_n(x)$ là đa thức bậc n, vậy nghiệm

$$y_p(x) = e^{\gamma x}Q_n(x)\cos(mx) + e^{\gamma x}R_n(x)\sin(mx)$$

với $Q_n(x)$ và $R_n(x)$ là đa thức bậc n.

Tóm tắc phương pháp xác định hệ số

c) Nếu $r(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$ và nghiệm $y_1 = e^{\gamma x}$ hay $y_2 = e^{\gamma x}$ thì nghiệm

$$y_p = x e^{\gamma x} Q_n(x)$$

d) Nếu $r(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$ và nghiệm $y_1 = e^{\gamma x}$ và $y_2 = x e^{\gamma x}$ thì nghiệm

$$y_p = e^{\gamma x} x^2 Q_n(x)$$

e) Nếu $r(x) = e^{\gamma x} P_n(x) \cos(mx)$ hay $r(x) = e^{\gamma x} P_n(x) \sin(mx)$ và nghiệm $y_1 = e^{\gamma x} \cos(mx)$ và $y_2 = e^{\gamma x} \sin(mx)$

$$y_p(x) = e^{\gamma x} x Q_n(x) \cos(mx) + e^{\gamma x} x R_n(x) \sin(mx)$$

với $Q_n(x)$ và $R_n(x)$ là đa thức bậc n.

f) Nếu $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ thì $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ với y_{p_1} và y_{p_2} tương ứng với nghiệm riêng tương ứng với r_1 và r_2.

nghiệm của ptvptt y'' + ay' + by = r1

nghiệm của ptvptt y'' + ay' + by = r2

Phương pháp xác định hệ số

Ví dụ: **Ứng dụng của quy tắc cơ bản:** Giải bài toán giá trị ban đầu

$$y'' + y = 0.001x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.5$$

Step 1: Giải phương trình vi phân thuần nhất. Phương trình vi phân $y'' + y = 0$ cấp 2 có nghiệm tổng quát là:

$$y_h = A\cos x + B\sin x$$

coi hình trong điện
thoại

Phương pháp xác định hệ số

Step 2: Giải phương trình vi phân không thuần nhất. Ta tìm nghiệm y_p dưới dạng

$$y_p(x) = K_2x^2+K_1x+K_0, \text{ thì } y_p''+y_p = 2K_2+K_2x^2+K_1x+K_0 = 0.001x^2$$

Ta dùng phương pháp đồng nhất hệ số, ta được
$K_2 = 0.001, K_1 = 0, 2K_2 + K_0 = 0$, vì thế $K_0 = -2K_2 = -0.002$. Vậy nghiệm $y_p = 0.001x^2 - 0.002$.
Vậy nghiệm tổng quát là phương trình vi phân cấp 2:

$$y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + 0.001x^2 - 0.002$$

Step 3: Nghiệm của bài toán điều kiện đầu. Với $y(0) = A - 0.002 = 0$ nên $A = 0.002$. Với $y'(0) = 1.5$ nên $B = 1.5$.
Vậy nghiệm của bài toán:

$$y = 0.002\cos x + 1.5\sin x + 0.001x^2 - 0.002$$

Quy tắc chỉnh sửa (modification rule)

Ví dụ: **Ứng dụng của quy tắc chỉnh sửa (modification rule).** Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Step 1: Tìm nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất
Phương trình đặt trưng của phương trình vi phân thuần nhất là

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{và} \quad \lambda_2 = 2$$

Vì thế nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Step 2: Tìm nghiệm y_p của phương trình vi phân không thuần nhất.

Quy tắc chỉnh sửa (modification rule)

Nghiệm y_p có dạng:

$$y_p = x(Ax + B)e^x.$$

Nên

$$\begin{aligned}
y_p' &= (Ax^2 + Bx)e^x + (2Ax + B)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x \\
y_p'' &= (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x \\
&= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x
\end{aligned}$$

Thế vào phương trình vi phân không thuần nhất, ta được

$$\begin{aligned}
(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x - 3(Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x \\
+2(Ax^2 + Bx)e^x = (3 - 4x)e^x
\end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned}
&(A - 3A + 2A)x^2 + ((4A + B) - 3(2A + B) + 2B)x \\
&+ (2A + 2B - 3B) = 3 - 4x \\
\Leftrightarrow &(-2A)x + 2A - B = 3 - 4x
\end{aligned}$$

Quy tắc chỉnh sửa (modification rule)

Bằng phương pháp cân bằng hệ số thì

$$\begin{cases} -2A & = -4 \\ 2A - B & = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A & = 2 \\ B & = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình vi phân là

$$y_p = x(2x+1)e^x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất là

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x(2x+1)e^x$$

Step 3: Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu: Với $y(0) = 1$ thì $c_1 + c_2 = 1$.

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + x(2x+1)e^x + (4x+1)e^x$$

với $y'(0) = 0$ thì $c_1 + 2c_2 + 1 = 0$. Vậy c_1 và c_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Phương pháp xác định hệ số

Ví dụ: **Ứng dụng của quy tắc chỉnh sửa (modification rule).** Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$y'' + 3y' + 2.25y = -10e^{-1.5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Step 1: Tìm nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất Phương trình đặt trưng của phương trình vi phân thuần nhất là $\lambda^2 + 3\lambda + 2.25 = (\lambda + 1.5)^2 = 0$. Vì thế nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất:

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-1.5x}$$

Step 2: Tìm nghiệm y_p của phương trình vi phân không thuần nhất.
Nghiệm y_p có dạng: $y_p = Cx^2 e^{-1.5x}$. Nên
$y_b' = C(2x - 1.5x^2)e^{-1.5x}$, $y_p'' = C(2 - 3x - 3x + 2.25x^2)e^{-1.5x^2}$.
Thế vào phương trình vi phân không thuần nhất, ta được

$$C(2 - 6x + 2.25x^2) + 3C(2x - 1.5x^2) + 2.25Cx^2 = -10$$

Phương pháp xác định hệ số

Hay $2C = -10$ nên $C = -5$. Nghiêm $y_p = -5x^2 e^{-1.5x}$ va nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất:

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-1.5x} - 5x^2 e^{-1.5x}$$

Step 3: Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu: Với $y(0) = 1$ thì $c_1 = 1$, với $y'(0) = 0$ thì $(-1.5c_1 + c_2) = 0$, hay $c_2 = 1.5$. Vậy nghiệm của bài toán giá trị đầu:

$$y = (1 + 1.5x - 5x^2)e^{-1.5x}$$

Ví dụ: **Ứng dụng của quy tắc tổng:** Tìm nghiệm của bai toán đầu:

$$y'' + 2y' + 0.75y = 2\cos x - 0.25\sin x + 0.09x, y(0) = 2.78, y'(0) = -0.43$$

Step 1: Tìm nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất: Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân thuần nhất là

$$\lambda^2 + 2\lambda + 0.75 = (\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + \frac{3}{2}) = 0$$

Vậy nghiệm tổng quát $y_h = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-3x/2}$.

Phương pháp xác định hệ số

Step 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất:
Nghiệm riêng $y_p = y_{p1} + y_{p2}$:

$$y_{p1} = K\cos x + M\sin x, \quad y_{p2} = K_1 x + K_0$$

Ta có đạo hàm: $y'_{p1} = -K\sin x + M\cos x$, $y''_{p1} = -K\cos x - M\sin x$, $y'_{p2} = K_1$, $y''_{p2} = 0$. Thế y_{p1} vào phương trình vi phân không thuần nhất:

$$-K + 2M + 0.75K = 2, \quad -M - 2K + 0.75M = -0.25$$

Giải hệ trên ta được $K = 0$ và $M = 1$. Thế y_{p2} vào phương trình vi phân không thuần nhất:

$$0.75K_1 = 0.09, \;\; 2K_1 + 0.75K_0 = 0, \;\; K_1 = 0.12, \; K_0 = -0.32$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất:

$$y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-3x/2} + \sin x + 0.12x - 0.32$$

Phương pháp xác định hệ số

Step 3: Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu: Với $y(0) = 2.78$ nên $c_1 + c_2 - 0.32 = 2.78$. Với $y'(0) = -0.43$ nên $-\dfrac{1}{2}c_1 - \dfrac{3}{2}x + 1 + 0.12 = -0.43$. Nên $c_1 = 3.1, c_2 = 0$. Vậy nghiệm của bài toán đầu:

$$y = 3.1e^{-x/2} + \sin x + 0.12x - 0.32$$

Bài tập

Làm những bài tập 1-18 tromg mục 2.7 trong sách tham khảo.

Kết thúc bài giảng