Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1
Tuần 4

Ngày 26 tháng 2 năm 2024

Xấp xỉ tuyến tính

Xấp xỉ tuyến tính

Hàm tuyến tính
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$
được gọi là tuyến tính hóa của f tại a.
Phép xấp xỉ
$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$
được gọi là xấp xỉ tuyến tính (hay xấp xỉ tiếp tuyến) của f tại a.

Bài tập xấp xỉ tuyến tính

Bài 1. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ tại $a = 0$ và sử dụng nó để xấp xỉ các số $\sqrt[3]{0.95}$ và $\sqrt[3]{1.1}$.

Bài 2. Sử dụng xấp xỉ tuyến tính để ước tính $(1.999)^4$.

Bài tập xấp xỉ tuyến tính

Bài 3. Bán kính của một quả cầu có giá trị là 15 cm, biết rằng sai số của phép đo này khoảng 0.02 cm.

a. Sử dụng vi phân để ước tính sai số tối đa và sai số tương đối của thể tích khi sử dụng giá trị của bán kính trên.

b. Cho biết sai số phần trăm của bán kính và thể tích trong trường hợp này là bao nhiêu?

Bài 4. Cạnh của một hình lập phương đo được là 25 cm, với sai số của phép đo khoảng 0.3 cm. Sử dụng vi phân để ước tính sai số tối đa và sai số tương đối và sai số phần trăm để tính

a. thể tích của hình lập phương.

b. diện tích bề mặt của hình lập phương.

Cực trị

Định nghĩa

Một hàm số f gọi là đạt giá trị lớn nhất tại c nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định D của f. Số $f(c)$ được gọi là giá trị lớn nhất của f trên D. Tương tự, f gọi là đạt giá trị nhỏ nhất tại c nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định D của f và số $f(c)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của f trên D. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất gọi chung là giá trị cực trị.

Cực trị

Định nghĩa

Một hàm số f gọi là đạt cực đại tại c nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x gần c (điều này có nghĩa $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng chứa c). Tương tự, f đạt cực tiểu tại c nếu $f(c) \leq f(x)$ khi x gần c.

Định lý giá trị cực trị

Nếu hàm số f liên tục trên một đoạn $[a, b]$, thế thì nó đạt một giá trị lớn nhất $f(c)$ và một giá trị nhỏ nhất $f(d)$ tại các số c, d thuộc $[a, b]$.

Cực trị

Định lý Fermat

Nếu f đạt cực đại hay cực tiểu tại c, và nếu $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

Định nghĩa

Số tới hạn của một hàm số f là một số c trong tập xác định của f sao cho $f'(c) = 0$ hay $f'(c)$ không tồn tại.

Cực trị

Phương pháp đoạn

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục f trên một đoạn $[a, b]$:

1. Tìm những giá trị của f tại những số tới hạn của f trên $[a, b]$.
2. Tìm những giá trị của f tại những đầu mút.
3. Giá trị lớn nhất trong tất cả giá trị tìm được trong bước 1 và 2 chính là giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất của những giá trị ấy chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Bài tập cực trị

Bài 1. Tìm các điểm tới hạn của hàm số

a. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

b. $g(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$

c. $f(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

Bài 2. Tìm các giá trị cực trị tuyệt đối của hàm số sau

a). $f(x) = 12 + 4x - x^2$ với mọi $x \in [0, 5]$

b). $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ với mọi $x \in [-2, 3]$

Định lý Rolle và Định lý GTTB

Định lý Rolle

Cho hàm $y = f(x)$ thỏa

1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Thì $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Định lý Lagrange (Định lý giá trị trung bình)

Cho hàm f thỏa

1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)

Thì $\exists c \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ hay $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Bài tập

Bài 1. Hãy kiểm tra hàm số thỏa mãn 3 giả thiết của Định lý Rolle trên đoạn cho trước. Sau đó, tìm tất cả các số c thỏa mãn kết luận của định lý Rolle.

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

c. $f(x) = \cos(2x), \quad \left[\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right].$

Bài 2. Hãy kiểm tra hàm số thỏa mãn 2 giả thiết của Định lý giá trị trung bình trên đoạn cho trước. Sau đó, tìm tất cả các số c thỏa mãn kết luận của định lý giá trị trung bình.

a. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [0, 1].$

Bài tập

Bài 3. Cho $f(x) = (x-3)^{-2}$. Chứng minh rằng không tồn tại $c \in (1,4)$ sao cho $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Lagrange?.

Bài 4. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 - 15x + a = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[-2, 2]$ với mọi số thực a.

Bài 5. Chứng minh phương trình sau có duy nhất một nghiệm thực

$$2x + \cos x = 0$$

Bài 6. Chứng tỏ rằng phương trình $x^4 + 4x + a = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.