Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1
Tuần 8

Ngày 25 tháng 3 năm 2024

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý (Tích phân suy rộng loại 1, Tiêu chuẩn so sánh 1)

Giả sử f và g là hàm số liên tục với $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với $x \geq a$ thì

(a) Nếu $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ hội tụ

(b) Nếu $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý (Tích phân suy rộng loại 2, Tiêu chuẩn so sánh 1)

Giả sử $\int_a^b f(x)\,dx$ và $\int_a^b g(x)\,dx$ là tích phân suy rộng loại 2, nếu $c \in [a,b]$ là điểm **kỳ dị** của tích phân (không liên tục hay không xác định). Nếu $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với x thuộc lân cận của c. Khi đó,

(a) Nếu $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ thì $\int_a^b g(x)\,dx$ hội tụ

(b) Nếu $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý (Tích phân suy rộng loại 1, Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử f và g là hàm số liên tục với $f(x), g(x) \geq 0$ với $x \geq a$. Nếu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý (Tích phân suy rộng loại 2, Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử $\int_a^b f(x)\,dx$ và $\int_a^b g(x)\,dx$ là tích phân suy rộng loại 2, nếu $c \in [a,b]$ là điểm **kỳ dị** của tích phân. Nếu

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,\infty)$$

thì $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Bài tập

Bài 1a. Xác định tích phân sau hội tụ hay phân kỳ. (Sử dụng tiêu chuẩn so sánh)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \sin x}\, dx$$

Bài 1b. Xác định tích phân $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x}\, dx$ hội tụ hay phân kỳ.

Bài 1c. Xác định tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$ hội tụ hay phân kỳ.

Bài 1d. Xác định tích phân $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3-1}$ hội tụ hay phân kỳ.

Diện tích giữa hai đồ thị

Diện tích giữa hai đồ thị

- Diện tích A của miền giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường $x = a, x = b$, trong đó f và g liên tục và $f(x) \geq g(x)$ với mọi x thuộc $[a, b]$ là

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ dx$$

- Diện tích giữa các đường cong $y = f(x)$, $y = g(x)$ và giữa $x = a, x = b$ là

$$\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\ dx.$$

Bài tập

Bài 1. Vẽ miền giới hạn bởi các đường cho trước và tìm diện tích của miền.

a). $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

b). $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

c). $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x$

d). $y = \sqrt{x}, \quad y = \dfrac{x}{2}, \quad x = 9$

e). $y = \cos x, \quad y = \sin 2x, \quad x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2}$

Bài 2. Tìm diện tích hình tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(1,1)$, và $(2,-1)$.

Thể tích

Định nghĩa thể tích

Cho vật rắn S nằm giữa $x = a$ và $x = b$. Nếu $A(x)$ là diện tích mặt cắt của mặt phẳng P_x đi qua x và vật rắn S, $A(x)$ là hàm số liên tục thì thể tích S là

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx \tag{1}$$

Bài tập

Bài 1. Tìm thể tích của hình khối được tạo ra khi xoay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh một đường thẳng tương ứng. Phác họa miền cần tính.

a). $y = 2 - \frac{x}{2}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2,$ quay quanh trục x.

b). $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1,$ quay quanh trục x.

c). $y = x^3, \quad y = x, \quad x \geq 0,$ quay quanh trục x.

d). $y^2 = x, \quad x = 2y,$ quay quanh trục y.

Định lý giá trị trung bình

Định nghĩa giá trị trung bình

Giả sử f liên tục trên $[a, b]$, **giá trị trung bình** của f trên đoạn $[a, b]$ là

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Định lý giá trị trung bình cho tích phân

Giả sử f liên tục trên $[a, b]$, thì luôn tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Hay

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Độ dài cung

Công thức độ dài cung

Nếu f' liên tục trên $[a, b]$ thì độ dài của cung $y = f(x)$ trên $[a, b]$ là

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Nếu một cung có phương trình $x = g(y), c \leq y \leq d$ và $g'(y)$ liên tục trên $[c, d]$ thì độ dài cung được tính:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

Bài tập

Bài 1. Tìm độ dài chính xác của cung

$$y = \frac{x^5}{6} + \frac{1}{10x^3}, \quad 1 \le x \le 2$$

Bài 2. Tìm độ dài cung của đường cong đi từ P đến Q với

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad P\left(-1, \frac{1}{2}\right), \quad Q\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Bài 3. Tìm hàm độ dài cho đường cong $y = 2x^{3/2}$ với điểm bắt đầu $P_0(1, 2)$.