

Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1

Tuần 3

Ngày 19 tháng 2 năm 2024

Tiếp tuyến

Định nghĩa

Tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $P(a, f(a))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc (độ dốc)

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Vận tốc

Ta định nghĩa vận tốc (hay vận tốc tức thời) $v(a)$ tại thời điểm $t = a$ là giới hạn của các vận tốc trung bình

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Định nghĩa

Đạo hàm của hàm số f tại một điểm a , kí hiệu bởi $f'(a)$, là

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

hay

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Đạo hàm một bên

- Đạo hàm bên phải tại a của f , ký hiệu $f'_+(a)$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- Đạo hàm bên trái tại a của f , ký hiệu $f'_-(a)$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Mệnh đề

Hàm số f có đạo hàm tại a khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại a ở cả hai bên và cùng có giá trị là $f'(a)$.

Bài tập

Bài 1. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$ tại điểm $(1, 1)$.

Bài 2. Một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng với phương trình chuyển động $s = f(t)$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tìm vận tốc khi $t = 5$.

a). $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$.

b). $f(t) = t^{-1} - t$

Bài 3. Nếu một mũi tên được bắn lên mặt trăng với vận tốc $10m/s$, độ cao của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho là $H = 10t - 1.86t^2$.

a) Hãy tìm vận tốc của mũi tên khi $t = a$

b) Khi nào mũi tên sẽ chạm mặt trăng?

Bài tập

Bài 4. Tìm đạo hàm của f bằng cách sử dụng định nghĩa đạo hàm. Xác định tập xác định của f và đạo hàm của nó,

a. $f(x) = 5x - 9x^2$

b. $f(t) = \frac{2t + 1}{t + 3}$

c. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

Bảng công thức vi phân

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$(fg)' = fg' + gf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, \dots$$

Đạo hàm hàm hợp

Quy tắc đạo hàm hàm hợp

Nếu g khả vi tại x và f khả vi tại $g(x)$, thì hàm hợp $F = f \circ g$ xác định bởi $F(x) = f(g(x))$ khả vi tại x và F' được tính bởi tích

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Theo ký hiệu của Leibniz, nếu $y = f(u)$ và $u = g(x)$ đều là các hàm khả vi, thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Bài tập

Bài 5. Viết hàm hợp dưới dạng $f(g(x))$. Sau đó tìm đạo hàm dy/dx .

a). $\cos(a^3 + x^3)$

b). $(1 - x^4)^{2/3}$

c). $(x^4 + 3x^2 - 2)^5$

d). $e^{x \cos x}$

Bài tập

Bài 6. Tính dy/dx dùng công thức vi phân hàm ẩn.

a). $3x^2 + x^2y - xy^2 = 7$

b). $\sin(xy) = \cos y - y$

Bài 7. Tính y'' bằng phép lấy vi phân hàm ẩn $x^3 + y^3 = 1$

Bài 8. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong $y \sin(2x) = x \cos(2y)$ tại điểm $(\pi/2, \pi/4)$.