Chương 2: Biến ngẫu nhiên - Véctơ ngẫu nhiên

Nguyễn Thị Mộng Ngọc
University of Science, VNU - HCM
ngtmngoc@hcmus.edu.vn

Định nghĩa biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên có thể được mô tả như một "quy tắc" biểu diễn các kết quả của phép thử ngẫu nhiên dưới dạng số.

Định nghĩa:
Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, biến ngẫu nhiên X (hay còn gọi là đại lượng ngẫu nhiên) là ánh xạ

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) = x$$

Giá trị x đgl một giá trị của biến ngẫu nhiên X.

- Kí hiệu: $X, Y, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên,
- $x, y, \ldots$ là giá trị của các biến ngẫu nhiên đó.

Ví dụ:

Ví dụ: Các đại lượng sau là biến ngẫu nhiên:
- Số chấm xuất hiện khi thực hiện phép thử tung con xúc xắc.
- Tuổi thọ của một thiết bị đang hoạt động.
- Số cuộc gọi đến tổng đài.

Ví dụ khác: Xét phép thử tung hai đồng xu. Không gian mẫu của phép thử này là

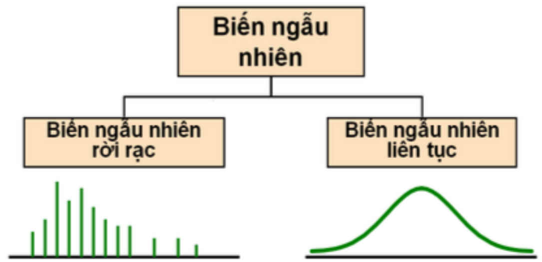
$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$$

Gọi X là số mặt ngửa xuất hiện. Khi đó, X là một ánh xạ từ không gian mẫu Ω vào $\mathbb{R}$ như:

ω	SS	NS	SN	NN
$X(\omega)$	0	1	1	2

Phân loại biến ngẫu nhiên

Dựa vào miền giá trị của biến ngẫu nhiên mà ta phân thành 2 loại chính như:



Biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên X gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc, nếu $X(\Omega)$ là một tập hợp hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ hoặc vô hạn đếm được.
Nói cách khác, biến ngẫu nhiên sẽ rời rạc nếu ta có thể liệt kê tất cả các giá trị có thể của nó.

Ví dụ: Trong phép thử tung con xúc xắc, nếu ta gọi X là "số điểm xuất hiện" thì X là biến ngẫu nhiên rời rạc vì $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là một tập hợp hữu hạn.

Ví dụ khác : Gọi Y là "số người vào mua hàng tại một siêu thị trong một ngày" thì Y là biến ngẫu nhiên rời rạc vì $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ là một tập hợp vô hạn đếm được.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên X gọi là biến ngẫu nhiên liên tục, nếu $X(\Omega)$ lấy đầy một khoảng nào đó của $\mathbb{R}$ (hoặc cả $\mathbb{R}$).
Đối với biến ngẫu nhiên liên tục ta không thể liệt kê được tất cả các giá trị có thể của nó.

Ví dụ: Trong phép thử bắn một phát súng vào bia, nếu ta gọi X là" khoảng cách từ điểm chạm của viên đạn đến tâm bia" thì X là biến ngẫu nhiên liên tục.
Vì ta không thể liệt kê được tất cả các giá trị có thể của nó mà ta chỉ có thể nói rằng các giá trị có thể của X nằm trong khoảng (a, b) nào đó với $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Ví dụ khác: Chọn ngẫu nhiên một bóng đèn, gọi Y là "tuổi thọ của bóng đèn đó" thì Y là biến ngẫu nhiên liên tục, $Y(\Omega)$ lấy đầy một khoảng giá trị.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

Định nghĩa:

Quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là sự tương ứng giữa các giá trị có thể có của nó và các xác suất tương ứng với các giá trị đó.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hàm phân phối xác suất (cdf)

Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X là xác suất để biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x, với x là một số thực bất kỳ,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tính chất:

- $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x$.
- $F(x)$ là hàm không giảm.
- $F(x)$ liên tục bên phải, có giới hạn bên trái tại mọi điểm.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, và $a \leq b$.
- $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a)$.

Hàm khối xác suất (pmf)

Định nghĩa

Xét một BNN rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots$, phân phối xác suất hay hàm trọng số xác suất của biến ngẫu nhiên (BNN) X được cho bởi:

- $p(x) = \mathbb{P}(X = x) \geq 0, \ \forall x \in \{x_1, x_2, \ldots, \}$,
- $\sum_{x} p(x) = 1$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Bảng phân phối xác suất

Bảng phân phối xác suất dùng để mô tả quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.

Giả sử biến ngẫu nhiên X có thể nhận các giá trị có thể có là $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X có dạng:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Trong p_i phải thoả mãn hai điều kiện:

$$\begin{cases} \forall i, \ 0 \leq p_i \leq 1, \ \text{với} \ p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ

Một lô hàng có 10 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm tốt. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ lô hàng này. Tìm quy luật phân phối xác suất của số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm được lấy ra.

Giải:
Gọi X là "số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm được lấy ra". Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị có thể có 0, 1, 2; và các xác suất tương ứng được tính theo định nghĩa cổ điển như sau:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}; \ \mathbb{P}(X = 1) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Như vậy, quy luật phân phối xác suất của X được biểu thị bởi phân phối xác suất sau:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Kiểm tra ta có: $\forall i, \ 0 \leq p_i \leq 1$ và $\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1.$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ khác

Xác suất để xạ thủ bắn trúng bia là 0.8. Xạ thủ được phát từng viên đạn để bắn cho đến khi trúng bia. Tìm quy luật phân phối xác suất của số viên đạn được phát.

Giải:
Gọi X là "số viên đạn được phát'. Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận các giá trị có thể có $1, 2, \ldots, k, \ldots$; và các xác suất tương ứng

$\mathbb{P}(X = 1) = 0.8$; *(ngay phát đầu tiên xạ thủ đã bắn trúng bia).*
$\mathbb{P}(X = 2) = 0.2 \times 0.8$; *(phát I bắn không trúng bia và phát II bắn trúng).*
...
$\mathbb{P}(X = k) = (0.2)^{k-1} \times 0.8$; *((k − 1) phát đầu bắn không trúng bia và phát thứ k bắn trúng).*
Như vậy bảng phân phối xác suất của X có dạng:

X	1	2	...	k	...
P	0.8	0.2×0.8	...	$(0.2)^{k-1} \times 0.8$	...

Kiểm tra ta có: $\forall i, \ 0 \leq p_i \leq 1$ và $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} 0.2^{k-1} 0.8 = \frac{0.8}{1 - 0.2} = 1.$

Hàm phân phối xác suất của BNN rời rạc

Định nghĩa

Xét BNN rời rạc X có thể nhận các giá trị $x_1, x_2, .., x_n$. Hàm phân phối xác suất của X, kí hiệu $F(x)$, được xác định như sau:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \sum_{x_i \le x} \mathbb{P}(X = x_i)$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hàm phân phối xác suất của BNN rời rạc

Giả sử biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	x_{i+1}	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	p_{i+1}	$\cdots$	p_n

Khi đó, hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < x_1 \\ p_1 & \text{nếu } x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{nếu } x_2 \le x < x_3 \\ \ldots & \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_i & \text{nếu } x_i \le x < x_{i+1} \\ \ldots & \ldots \\ 1 & \text{nếu } x \ge x_n. \end{cases}$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ

Tung ba đồng xu (cân đối) cùng lúc. Tìm quy luật phân phối xác suất của số mặt sấp "S" xuất hiện.

Giải:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ khác

<u>VD1</u>: Tung đồng thời 4 con xúc xắc (đồng nhất). Gọi X là số mặt chẵn xuất hiện.
a. Lập bảng phân phối xác suất của X.
b. Xác định hàm phân phối xác suất của X.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

<u>vd2</u>: Tung 1 đồng xu cân đối đồng nhất. Gọi X là số mặt sấp xuất hiện.
a. Lập bảng phân phối xác suất của X.
b. Xác định hàm phân phối xác suất của X.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Hàm mật độ xác suất (pdf)

Hàm mật độ xác suất dùng để mô tả quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục.

Định nghĩa

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X, hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa các tính chất:

- $f(x) \geq 0, \forall x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(x)dx; \forall I \subset \mathbb{R}$

Khi đó, hàm số $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của BNN liên tục X.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Nhận xét:

Mọi hàm $f(x)$ không âm và thỏa mãn điều kiện $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên X nào đó.

Tính chất:

X là biến ngẫu nhiên liên tục

- Từ định nghĩa về hàm mật độ xác suất f(x) của BNN liên tục X, ta có hàm phân phối xác suất của BNN liên tục X là

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$
- $\mathbb{P}(X = x_0) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ

Cho hàm mật độ xác suất của BNN X có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{nếu } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

i) Tìm a và xác định hàm phân phối xác suất của BNN X.

ii) Tính xác suất để X nhận giá trị trong khoảng $(\pi/4, \pi)$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ khác

Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

i) Chứng tỏ rằng $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó.

b) Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X.

ii) Tính xác suất $\mathbb{P}(0 < X \leq \frac{1}{2})$.

Ví dụ khác

Tuổi thọ Y của một thiết bị (đơn vị: giờ) có hàm mật độ xác suất có dạng

$$f(y) = \begin{cases} \frac{a}{y^2} & \text{nếu } y \geq 100 \\ 0 & \text{nếu } y < 100 \end{cases}$$

với $a \in \mathbb{R}$.

i) Hãy xác định hàm phân phối của Y.

ii) Thiết bị được gọi là loại A nếu tuổi thọ của nó kéo dài ít nhất 400 giờ. Tính tỉ lệ loại A.

1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

- Các tham số đặc trưng cho xu hướng trung tâm của biến ngẫu nhiên: kỳ vọng toán, trung vị, mốt, ...
- Các tham số đặc trưng cho độ phân tán của biến ngẫu nhiên: phương sai, độ lệch chuẩn, hệ số biến thiên,
- Các tham số đặc trưng cho dạng phân phối xác suất.

Kỳ vọng toán

Định nghĩa

- Trường hợp X rời rạc: đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Kỳ vọng của X: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

- Trường hợp X liên tục: đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất $f(x)$.

Kỳ vọng của X: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Ví dụ

Ví dụ: Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	-1	0	2	3
P	0.1	0.2	0.4	0.3

Tính kỳ vọng của X?

Ví dụ khác: Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	1	2	4	5	7
P	a	0.2	b	0.2	0.1

Tìm giá trị của tham số a và b để $\mathbb{E}(X) = 3.5$?

Ví dụ

Ví dụ : Tìm kì vọng của biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất sau: $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & \text{với } x \in [0;1] \\ 0 & \text{với } x \notin [0;1] \end{cases}$

Ví dụ khác: Thời gian điều trị một loại bệnh để bệnh nhân mắc bệnh này khỏi bệnh là đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2 & \text{với } x \in [0;4] \\ 0 & \text{với } x \notin [0;4] \end{cases}$$

Tính thời gian điều trị trung bình để một bệnh nhân mắc bệnh này khỏi bệnh.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Tính chất của kỳ vọng

Tính chất của kỳ vọng

- $\mathbb{E}(c) = c$ với c là hằng số.
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ với $a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- Nếu X và Y độc lập thì $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$

Ý nghĩa của kỳ vọng

- Kỳ vọng là giá trị trung bình theo xác suất của tất cả các giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên X.
- Kỳ vọng phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ

Tính thu nhập trung bình của nhân viên trong một công ty có 600 nhân viên, bảng sau đây cho biết thu nhập trong một tháng của nhân viên trong công ty này.

Thu nhập (triệu/tháng)	3	3.5	4	5	6	10
Số người cùng thu nhập	48	100	150	200	60	42

. . . .

. . . .

. . . .

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ứng dụng thực tế của kỳ vọng toán

- Lúc đầu, kỳ vọng toán xuất hiện trong các trò chơi may rủi để tính giá trị mà người chơi mong đợi sẽ nhận được. Trong lý thuyết trò chơi, $\mathbb{E}(X) = 0$ là trò chơi công bằng.

- Hiện nay, kỳ vọng toán được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kinh doanh và quản lý như một tiêu chuẩn để quyết định trong tình huống cần lựa chọn giữa nhiều chiến lược khác nhau.
  Trong thực tế sản xuất hay kinh doanh, khi cần chọn phương án cho năng suất hay lợi nhuận cao, người ta thường chọn phương án sao cho kỳ vọng năng suất hay kì vọng lợi nhuận cao.

Ví dụ

Một cửa hàng sách dự định nhập vào một số sách XSTK. Nhu cầu hàng năm về loại sách này được cho trong bảng phân phối xác suất sau:

Nhu cầu j (cuốn)	20	21	22	23	24	25
Xác suất P	0.3	0.25	0.18	0.14	0.1	0.03

Cửa hàng này mua vào với giá 7 USD/cuốn và bán ra với giá 10 USD/cuốn, đến cuối năm thì phải bán hạ giá còn 4 USD/cuốn trước khi XSTK của năm tới được xuất bản.

Cửa hàng muốn xác định số lượng nhập vào sao cho lợi nhuận kỳ vọng là lớn nhất.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Giải

Gọi i là " số lượng sách cần nhập",
j là " số lượng sách theo nhu cầu".

Gọi X_{ij} là " lợi nhuận ", hiển nhiên lợi nhuận sẽ phụ thuộc vào số lượng sách cần nhập và nhu cầu thực tế về loại sách này.

Theo đề bài ta có: $X_{ij} = \begin{cases} 10 \times j - 7 \times i + 4 \times (i - j) & \text{với } j \leq i \\ 10 \times j - 7 \times i & \text{với } j > i \end{cases}$

Vậy ta có bảng lợi nhuận của X_{ij} sau:

i \ j	20	21	22	23	24	25
20	60	60	60	60	60	60
21	57	63	63	63	63	63
22	54	60	66	66	66	66
23	51	57	63	69	69	69
24	48	54	60	66	72	72
25	45	51	57	63	69	75

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Chiến lược của cửa hàng sách là phải chọn số lượng sách cần nhập i để cực đại lợi nhuận kỳ vọng. Với số lượng nhập i lợi nhuận kỳ vọng được tính như sau:

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_j x_{ij} p_j$$

Từ đó ta có bảng giá trị lợi nhuận kỳ vọng tùy thuộc vào số lượng nhập như sau:

Số lượng nhập i	*Lợi nhuận kỳ vọng $\mathbb{E}(X_i)$*
20	60.00
21	61.20
22	60.90
23	59.52
24	57.30
25	54.48

Vậy chiến lược mang lại lợi nhuận kỳ vọng tối đa là nhập 21 cuốn sách.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Trung vị m_d

Trung vị của biến ngẫu nhiên X bất kỳ, kí hiệu $Med(X)$ là giá trị m_d của biến ngẫu nhiên X sao cho :

$$\begin{cases} P(X \leq m_d) \geq \dfrac{1}{2} \\ P(X \geq m_d) \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ta viết : $Med(X) = m_d$

Nhận xét (trung vị) :

Khi X là biến ngẫu nhiên liên tục thì trung vị của X chính là điểm chia phân phối xác suất thành hai phần bằng nhau. Nghĩa là

$$P(X \geq m_d) = P(X \leq m_d) = 1/2$$

tương đương với

$$\mathbb{P}(X \geq m_d) = 1/2 \text{ hoặc } \mathbb{P}(X \leq m_d) = 1/2.$$

Chứng minh :

Thật vậy, từ điều kiện $\mathbb{P}(X \geq m_d) \geq 1/2$ suy ra $\mathbb{P}(X \leq m_d) = \mathbb{P}(X < m_d) \leq 1/2$. Kết hợp với điều kiện $\mathbb{P}(X \leq m_d) \geq 1/2$ ta phải có $\mathbb{P}(X \leq m_d) = 1/2$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Trung vị của biến ngẫu nhiên rời rạc

Ví dụ 1: Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau

X	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.3	0.4

Tìm $Med(X)$.

Ví dụ 2 : Trung vị của biến ngẫu nhiên rời rạc cho trường hợp không duy nhất Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất như sau

X	1	2	3	4
P	0.1	0.4	0.3	0.2

Tìm $Med(X)$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục

Ví dụ 1: Trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(X)$.

Ví dụ 1: Trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục cho trường hợp không duy nhất Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{khi } 2.5 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(X)$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Mode m_0

Mode của biến ngẫu nhiên X, ký hiệu $Mod(X)$, là giá trị mà biến ngẫu nhiên X nhận được với xác suất lớn nhất.

Từ định nghĩa,

i) nếu biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

thì

$$Mod(X) = x_i \Leftrightarrow p_i = P(X = x_i) = \max\{p_1, p_2 \ldots\}.$$

ii) nếu X có phân phối liên tục với hàm mật độ xác suất $f(x)$ thì

$$Mod(X) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Ví dụ

Trường hợp rời rạc: Tìm *Mod* của biến ngẫu nhiên X có phân phối rời rạc với bảng phân phối xác suất

X	1	2	3	4	5
P	0,3	0,25	0,18	0,14	0,13

Trường hợp liên tục: Tìm *Mod* của biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{khi } 0 \le x \le 2; \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Phương sai $\mathbb{V}(X)$

Phương sai $\mathbb{V}(X)$

Nếu biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$ thì phương sai $\mathbb{V}(X)$ hay $\mathbb{V}ar(X)$ được định nghĩa là:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Lưu ý:

- Trong tính toán, để tính phương sai của biến ngẫu nhiên X ta thường dử dụng công thức

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Phương sai còn được kí hiệu là: $D(X)$

1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Độ lệch chuẩn $\sigma(X)$

Độ lệch chuẩn $\sigma(X)$ (hay kí hiệu là $S(X)$)

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X là căn bậc hai của phương sai $\mathbb{V}(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Tính chất của phương sai:

- $\mathbb{V}(c) = 0$ với c là hằng số.
- $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$ với $a \in \mathbb{R}$
- Nếu X và Y độc lập thì

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ý nghĩa của phương sai:

- Phương sai là kỳ vọng của bình phương các sai lệch giữa X và $\mathbb{E}(X)$. Nói cách khác phương sai là trung bình bình phương sai lệch. Phương sai phản ánh mức độ phân tán các giá trị của biên ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình.
- Trong công nghiệp, phương sai biểu thị độ chính xác trong sản xuất.
- Trong canh tác, phương sai biểu thị mức độ ổn định của năng xuất.

Ví dụ

Ví dụ : Một hộp có 10 bi, trong đó có 3 bi nặng 10g, 5 bi nặng 50g và 2 bi nặng 20g. Chọn ngẫu nhiên 1 bi, gọi X là khối lượng của bi đó.
Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\mathbb{V}(X)$.

....
....
....

Ví dụ khác: Cho biến ngẫu nhiên Y có hàm mật độ xác suất $g(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^2} & \text{nếu } y \in [1,2] \\ 0 & \text{nếu } y \notin [1,2] \end{cases}$

Tính $\mathbb{E}(Y)$ và $\mathbb{V}(Y)$.

....
....
....

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Véc-tơ ngẫu nhiên

Một bộ gồm n biến ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ gọi là một véc-tơ ngẫu nhiên n chiều.
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì $(X_1, \ldots, X_n)$ là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc.
Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên liên tục thì $(X_1, \ldots, X_n)$ là véc-tơ ngẫu nhiên liên tục.

Ví dụ

Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm, nếu kích thước của sản phẩm được đo bằng chiều dài X và chiều rộng Y thì ta có véctơ ngẫu nhiên hai chiều, còn nếu xét thêm cả chiều cao Z nữa thì ta có véctơ ngẫu nhiên ba chiều. Nếu ta chỉ quan tâm đến trọng lượng và thể tích của sản phẩm ta cũng được biến ngẫu nhiên hai chiều.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hàm mật độ đồng thời

TH rời rạc

Hàm mật độ xác suất đồng thời (hay ngắn gọn là **hàm mật độ đồng thời**) của véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y), ký hiệu là $f_{X,Y}(x, y)$, là một hàm thực thỏa

(1) $f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

(2) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$

(3) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1$

Hàm mật độ đồng thời của (X, Y) được biểu diễn bằng bảng phân phối xác suất đồng thời.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Bảng phân phối xác suất đồng thời

TH rời rạc

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	Tổng dòng
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$	$f(x_1, y_j)$	$\cdots$	$f(x_1, y_n)$	$f(x_1, \bullet)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$	$f(x_2, y_j)$	$\cdots$	$f(x_2, y_n)$	$f(x_2, \bullet)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i, y_1)$	$f(x_i, y_2)$	$\cdots$	$f(x_i, y_j)$	$\cdots$	$f(x_i, y_n)$	$f(x_i, \bullet)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$\cdots$	$f(x_m, y_j)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$	$f(x_m, \bullet)$
Tổng cột	$f(\bullet, y_1)$	$f(\bullet, y_2)$	$\cdots$	$f(\bullet, y_j)$	$\cdots$	$f(\bullet, y_n)$	1

Bảng: Phân phối xác suất đồng thời của (X, Y)

Hàm mật độ đồng thời

Ví dụ

VD2

Cho (X, Y) là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$ cho bởi bảng sau

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

Tính:

(a) $\mathbb{P}(X + Y = 1)$

(b) $\mathbb{P}(X = 0)$

(c) $\mathbb{P}(X < Y)$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hàm mật độ lề

TH rời rạc

Hàm mật độ lề cho biến ngẫu nhiên X và Y

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là $f_{X,Y}(x, y)$ thì hàm mật độ lề cho biến ngẫu nhiên X và Y được xác định như sau

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) \quad (1)$$

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y) \quad (2)$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hàm mật độ lề

TH rời rạc

Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên X

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$\mathbb{P}_X$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	$\cdots$	$f_X(x_m)$

với

$$f_X(x_i) = f(x_i, \bullet) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Bảng phân phối lề của biến ngẫu nhiên Y

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
$\mathbb{P}_Y$	$f_Y(y_1)$	$f_Y(y_2)$	$\cdots$	$f_Y(y_n)$

với

$$f_Y(y_j) = f(\bullet, y_j) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_j) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hàm mật độ lề

TH rời rạc

Ví dụ

(X, Y) là véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có hàm mật độ đồng thời $f_{X,Y}(x, y)$ cho bởi bảng sau

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

Tìm hàm xác suất lề cho X và Y.

Kỳ vọng và phương sai từ phân phối đồng thời

TH rời rạc

Định nghĩa

Xét véc-tơ ngẫu nhiên (X, Y), nếu X có hàm mật độ lề $f_X(x)$ thì

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x) = \sum_x \sum_y x f_{X,Y}(x, y) \tag{3}$$

và

$$\mathbb{V}ar(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^2 f_{X,Y}(x, y) \tag{4}$$

Ta cũng có định nghĩa tương tự cho Y.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hiệp phương sai

Định nghĩa

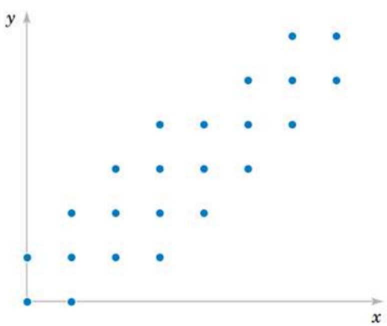
Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên, **hiệp phương sai** giữa X và Y, ký hiệu $\mathbb{C}ov\,(X, Y)$ (hay $\sigma_{X,Y}$) được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov\,(X, Y) &= \mathbb{E}\,(X - \mathbb{E}\,[X])\,(Y - \mathbb{E}\,[Y]) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned} \tag{5}$$

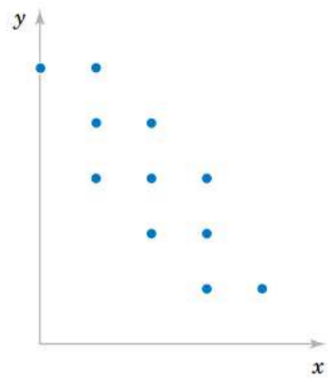
Hiệp phương sai là đại lượng dùng để đo mối liên hệ tuyến tính giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hiệp phương sai



Tương quan dương

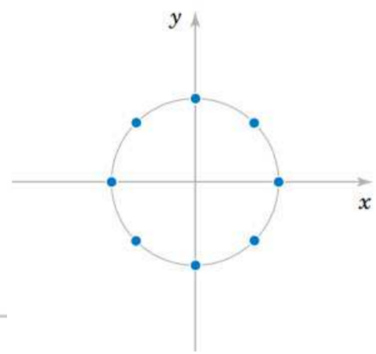


Tương quan âm

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hiệp phương sai

Không tương quan



Không tương quan

Hiệp phương sai

Tính chất

Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập và có phương sai hữu hạn thì

$$\mathbb{C}ov\,(X, Y) = 0 \tag{6}$$

và phương sai của $X + Y$

$$\mathbb{V}ar\,(X + Y) = \mathbb{V}ar\,(X) + \mathbb{V}ar\,(Y) \tag{7}$$

Chú ý

Nếu hai biến ngẫu nhiên X và Y có $\mathbb{C}ov\,(X, Y) = 0$ thì ta nói X và Y không tương quan, nhưng không thể suy ra được X và Y là độc lập.

1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hiệp phương sai

Định lý: Phương sai của tổng n biến ngẫu nhiên

Nếu $X_1, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên sao cho $\mathbb{V}ar\,(X_i) < +\infty$ với mọi $i = 1, \ldots, n$ thì

$$\mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar\,(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum \mathbb{C}ov\,(X_i, X_j) \tag{8}$$

Trường hợp hai biến

Với a, b và c là hằng số, ta có

$$\mathbb{V}ar(aX+bY+c) = a^2\mathbb{V}ar(X)+b^2\mathbb{V}ar(Y)+2ab\mathbb{C}ov(X,Y)$$

1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hệ số tương quan

Định nghĩa

Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên X và Y, ký hiệu $\rho_{X,Y}$, được định nghĩa như sau

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{9}$$

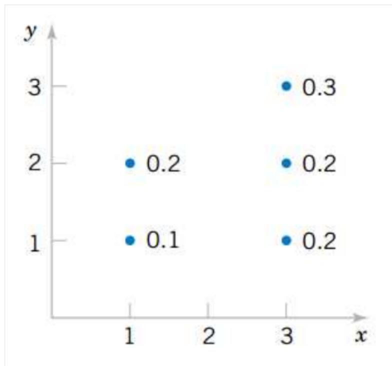
Tính chất

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le +1$$

1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hệ số tương quan

Ví dụ



Cho véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có phân phối xác suất đồng thời như hình bên. Tính $\mathbb{C}ov(X, Y)$ và $\rho_{X,Y}$.

Ví dụ

Cho véc-tơ ngẫu nhiên (X,Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời sau

X \ Y	-1	0	1	2
0	0	0,2	0,3	0,1
1	0,1	0	0,1	0
3	0,08	0,02	0	0,1

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Ví dụ (tt)

1. Tìm phân phối lề cho X, phân phối lề cho Y.
2. Tính hiệp phương sai của X và Y.
3. Tính hệ số tương quan giữa X và Y.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Giải ví dụ (tt)

2. Tính $\mathbb{C}ov\,(X, Y)$

Ta có: $\mathbb{C}ov\,(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
nên trước tiên, ta cần tính $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ và $\mathbb{E}[XY]$:

$\mathbb{E}[X] = \sum_x xp_X(x) =$
$0 \times 0,6 + 1 \times 0,2 + 3 \times 0,2 = 0,8.$
$\mathbb{E}[Y] == 0,62.$

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_x \sum_y xyp_{XY}(x, y)$$
$$= 0 \times (-1) \times 0 + \cdots + 3 \times 2 \times 0,1 = 0,36.$$

Vậy $\mathbb{C}ov\,(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
$$= 0,36 - 0,8 \times 0,62 = 0,18.$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến ngẫu nhiên
1.1 Định nghĩa và phân loại biến ngẫu nhiên
1.2 Quy luật phân phối xác suất
1.2.1 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
1.2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục
1.3 Một số đặc trưng của biến ngẫu nhiên
2. Véc-tơ ngẫu nhiên
2.1 Khái niệm véc-tơ ngẫu nhiên
2.2 Véc-tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều
Phân phối đồng thời
Phân phối lề
Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Giải ví dụ (tt)

3. Tính ρ_{XY}.

Ta có $$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}}$$

nên trước tiên, ta cần tính $\mathbb{V}ar(X)$, $\mathbb{V}ar(Y)$:

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}[X^2] - (E[X])^2 = 0^2 \times 0,6 + 1^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,2 - 0,8^2 = 1,36.$$

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = 1,38 - 0,62^2 = 0,9956.$$

Vậy

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\mathbb{V}ar(Y)}} = \frac{0,18}{\sqrt{1,36 \times 0,9956}} = 0,1548.$$

$\rho_{XY} = 0,1548$ cho ta thấy rằng giữa X và Y có tương quan thuận nhưng mối liên hệ giữa X và Y yếu.