Vi tích phân 2B

T.S. Nguyễn Thị Hoài Thương vs TS. Lê Ánh Hạ

Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán Tin-học
Bộ môn Giải tích

ngththuong@hcmus.edu.vn

Ngày 6 tháng 6 năm 2023

Outline

Đạo hàm riêng

Định nghĩa

Cho f là hàm số hai biến x và y, cho (a, b) thuộc miền xác định của f, ta có định nghĩa đạo hàm của hàm số f tại (a, b) theo biến x

$$f_x(a, b) = g'(a) \text{ với } g(x) = f(x, b)$$

bằng định nghĩa đạo hàm hàm một biến, ta có đi

$$f_x(a, b) = g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Tương tự ta có đạo hàm của f tại (a, b) theo biến y

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Đạo hàm riêng

Định nghĩa

Cho f là hàm số hai biến x và y, ta coi đạo hàm của hàm số theo biến x và y là hàm số, ta có những định nghĩa sau:

- Nếu ta xem y như hằng số và lấy đạo hàm theo x, ta được đạo hàm riêng của f theo x, kí hiệu bởi f_x

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

- Tương tự, ta được đạo hàm riêng của f theo y, kí hiệu bởi f_y

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

Đạo hàm riêng

Các kí hiệu của đạo hàm riêng

Nếu viết $z = f(x, y)$, người ta cũng có nhiều ký hiệu khác cho đạo hàm riêng như sau

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f.$$

Đạo hàm riêng

Ví dụ

Cho $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, dùng định nghĩa và công thức để tính $f_x(2,1)$ và $f_y(2,1)$.

Giải: Với $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

- Xem y là hằng số, lấy đạo hàm theo x, ta được
$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3.$$
Suy ra
$$f_x(2,1) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 \times 1^3 = 16.$$
- Tương tự, ta có
$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y.$$
Suy ra
$$f_y(2,1) = 3 \times 2^2 \times 1^2 - 4 \times 1 = 8.$$

Đạo hàm riêng

Ví dụ

Tìm f_x và f_y với f định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Đạo hàm riêng

Giải Để tính $f_x(0,0)$, ta dùng định nghĩa

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h \times 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0.$$

Tại điểm $(x,y) \neq (0,0)$, ta có thể xem y như hằng số và tính đạo hàm theo x như hàm một biến và ta được

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vai trò của x và y giống nhau trong biểu thức f, ta đổi vai trò của x và y trong biểu thức f_x sẽ được

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2 x}{(y^2+x^2)^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Đạo hàm riêng - Ý nghĩa đạo hàm riêng

Ta bắt đầu với ví dụ sau: Nếu $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$ thì $f_x(1,1)$ và $f_y(1,1)$ mang ý nghĩa gì?
Ta có

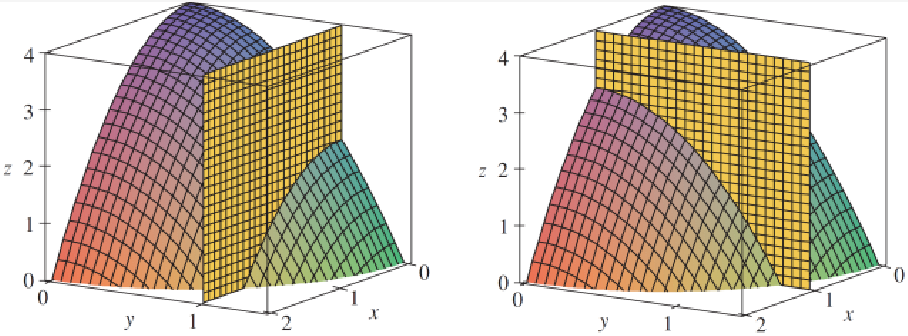
$$f_x(x,y) = -2x, \quad f_y(x,y) = -4y.$$

Suy ra

$$f_x(1,1) = -2, \quad f_y(1,1) = -4.$$

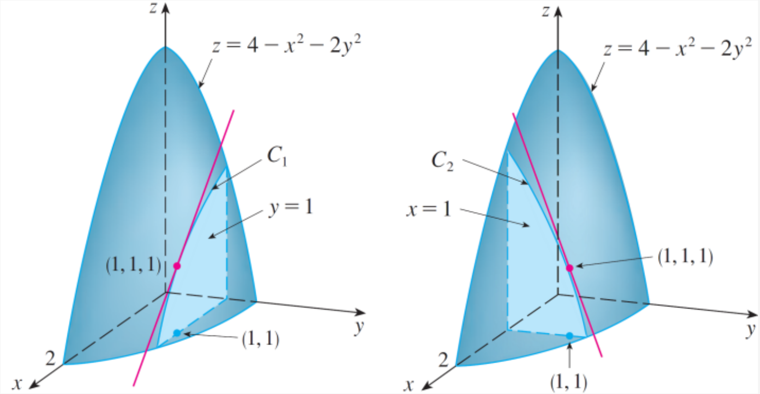
Đạo hàm riêng - Ý nghĩa đạo hàm riêng

Đồ thị của f là mặt parobol. Vết của đồ thị với mặt $y = 1$ là đường parabol $z = 2 - x^2$; với mặt $x = 1$ là đường parabol $z = 3 - 2y^2$.



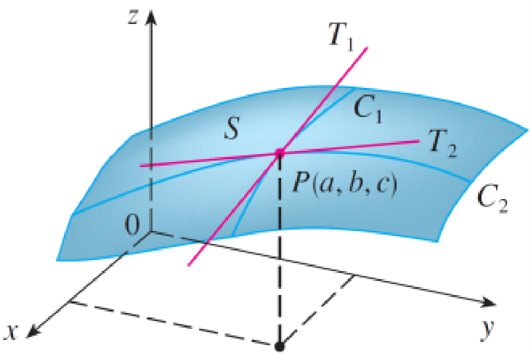
Đạo hàm riêng - Ý nghĩa đạo hàm riêng

Trong mặt phẳng $y = 1$, đường parabol $C_1 : z = 2 - x^2$ có tiếp tuyến tại điểm $(1, 1, 1)$ với độ dốc (hệ số góc) là $f_x(1, 1) = -2$; vết parabol $C_2 : z = 3 - 2y^2$ trên mặt $x = 1$ có tiếp tuyến tại điểm $(1, 1, 1)$ với độ dốc là $f_y(1, 1) = -4$.



Đạo hàm riêng - Ý nghĩa đạo hàm riêng

Tính đạo hàm riêng tại $x = a, y = b$ của f thì hai giá trị $f_x(a, b)$ và $f_y(a, b)$ lần lượt là hệ số góc (hay độ dốc) của hai tiếp tuyến tại điểm $(a, b, f(a, b))$ của hai đường cong C_1 và C_2 tương ứng.
Trong hình dưới đây, C_1 và C_2 là gì?



C_1 và C_2 là hai vết cắt trên mặt đồ thị bởi hai mặt phẳng đứng $y = b$ và $x = a$ tương ứng.

Đạo hàm riêng

Bài tập

Làm bài tập mục 2.1.1 trong file bài tập.

Đạo hàm riêng cấp cao

Nếu f là hàm số hai biến thì f_x và f_y cũng là các hàm số hai biến. Lấy các đạo hàm riêng của f_x và f_y, ta sẽ có bốn đạo hàm riêng là $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của f. Nếu viết $z = f(x, y)$ thì ta có các ký hiệu sau

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Đạo hàm riêng - Đạo hàm riêng cấp cao/bậc cao

Hai đạo hàm riêng f_{xy} và f_{yx} có giống nhau không?

Định lí 2.1 (Định lí Clairaut-Schwartz)

Nếu f xác định trên một đĩa D tâm (a, b) sao cho tồn tại hai đạo hàm f_{xy} và f_{yx} cùng liên tục trên D. Khi đó,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D$$

nghĩa là đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp không phụ thuộc thứ tự lấy đạo hàm theo các biến, miễn là chúng liên tục.

Đạo hàm riêng - Đạo hàm riêng cấp cao/bậc cao

Ví dụ

Cho $f(x,y) = x^2e^y + x^3y^2 - y^5$. Tìm f_{xy} và f_{yx}.

Giải: Ta có

$$f_x(x,y) = 2xe^y + 3x^2y^2, \quad f_y(x,y) = x^2e^y + 2x^3y - 5y^4.$$

Suy ra

$$f_{xy} = 2xe^y + 6x^2y = f_{yx}.$$

Đạo hàm riêng - Đạo hàm riêng cấp cao/bậc cao

Ghi chú:

- Ta cũng có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp 3 hoặc cao hơn, ví dụ

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

- Sử dụng định lí Clairaut và phép quy nạp, nếu các đạo hàm riêng f_{xyy}, f_{yxy} và f_{yyx} cùng liên tục thì chúng bằng nhau (định lí Clairaut mở rộng cho đạo hàm bậc cao hơn).

Đạo hàm riêng - Đạo hàm riêng cấp cao/bậc cao

Bài tập

Làm các bài tập mục 2.1.2 của file bài tập.

Outline

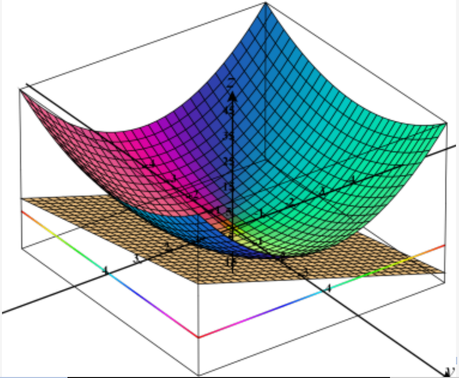
1. Vi phân của hàm số nhiều biến
   - Đạo hàm riêng
   - Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính
   - Sự khả vi
   - Quy tắc mắt xích và đạo hàm của hàm ẩn
   - Đạo hàm theo hướng
   - Cực trị của hàm 2 biến

Mặt phẳng tiếp xúc

Mặt phẳng tiếp xúc

Cho hàm số $f(x,y)$ có đạo hàm liên tục. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt $z = f(x,y)$ tại điểm $P(a,b,c)$ với $c = f(a,b)$ có phương trình

$$z - c = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$



Mặt phẳng tiếp xúc

Ví dụ: Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1, 1, 3)$.
Cho $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Ta có

$$f_x(x, y) = 4x, \quad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4, \quad f_y(1, 1) = 2$$

Do đó phương trình mặt phẳng tiếp xúc:

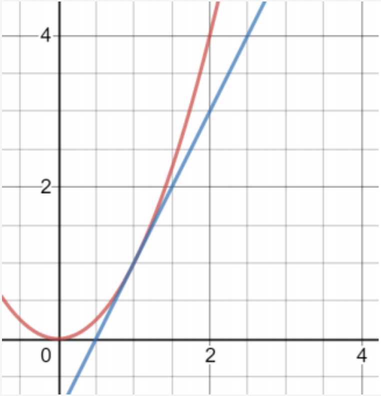
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1).$$

Xấp xỉ tuyến tính

Cho hàm số một biến f có đạo hàm tại a. Ta đã biết

- Hàm số bậc nhất $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ được gọi là tuyến tính hóa của f tại a.
- Đồ thị của L là tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại điểm $(a, f(a))$.
- Khi x càng gần a thì điểm $(x, L(x))$ trên tiếp tuyến càng gần điểm $(x, f(x))$ trên đồ thị của f. Do đó,...
- Ta có phép xấp xỉ tuyến tính $f(x) \approx L(x)$ được áp dụng khi x gần a.

- Minh họa với $a = 1$, $f(x) = x^2, L(x) = 1 + 2(x - 1)$.



Xấp xỉ tuyến tính

- Cho hàm số hai biến f có các đạo hàm riêng tại (a, b). Đặt

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

  Hàm số $L(x, y)$ là hàm tuyến tính hóa của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (a, b)
- Mặt phẳng $z = L(x, y)$ có tiếp xúc mặt đồ thị hàm f tại điểm $(a, b, f(a, b)) \equiv (a, b, L(a, b))$
- Xấp xĩ

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

  được gọi là xấp xĩ tuyến tính của hàm số f tại điểm (a, b).

Ví dụ: Cho $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Tính giá trị xấp xĩ $f(1.1, 0.95)$.
Ta có $f_x(1, 1) = 4, \quad f_y(1, 1) = 2, f(1, 1) = 3$. Do đó

$$L(x, y) = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1) = 4x + 2y - 3.$$

Vậy $f(1.1, 0.95) \approx L(1.1, 0.95) = 4 * 1.1 + 2 * 0.95 - 3 = 3.3$. Trong khi $f(1.1, 0.95) = 3.3225$.

Outline

1. Vi phân của hàm số nhiều biến
   - Đạo hàm riêng
   - Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính
   - Sự khả vi
   - Quy tắc mắt xích và đạo hàm của hàm ẩn
   - Đạo hàm theo hướng
   - Cực trị của hàm 2 biến

Sự khả vi

Định nghĩa

Cho hàm số hai biến $z = f(x, y)$ và (a, b) là điểm trong của miền xác định, theo nghĩa có một đĩa tròn tâm (a, b) nằm lọt trong miền xác định. Ta nói f khả vi tại (a, b) có nghĩa là tồn tại $f_x(a, b)$ và $f_y(a, b)$ sao cho Δz có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \tag{1.1}$$

trong đó ε_1 và ε_2 cùng tiến về 0 khi $(x, y) \to (a, b)$ (cũng có nghĩa là $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$).

Sự khả vi

Từ định nghĩa khả vi và đẳng thức (1.1), ta dễ dàng suy ra

Định lí

Nếu hàm số f khả vi tại (a, b) thì f liên tục tại (a, b).

Trong phạm vi của giải tích B2, chúng ta thừa nhận định lí sau:

Định lí (Điều kiện đủ để khả vi)

Nếu các đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại trong một lân cận của (a, b) và liên tục tại (a, b), thì f khả vi tại (a, b).

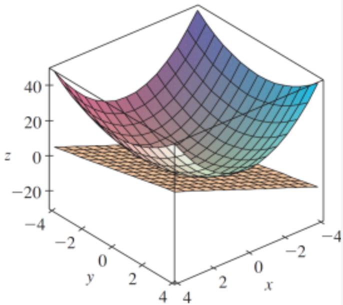
Sự khả vi

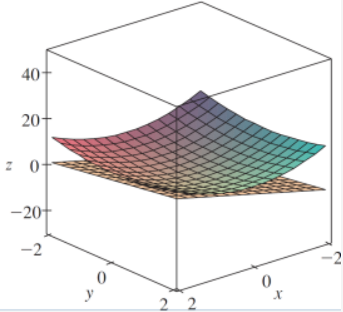
Ví dụ: Hàm số $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ có các đạo hàm riêng $f_x(x,y) = 4x$ và $f_y(x,y) = 2y$ là các hàm sơ cấp, liên tục tại mọi điểm $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Do đó, f khả vi mọi nơi.
Ta xét điểm $(1,1,3)$ thuộc đồ thị của f, $f_x(1,1) = 4, f_y(1,1) = 2$ và ta có mặt phẳng tiếp xúc tại $(1,1,3)$ là

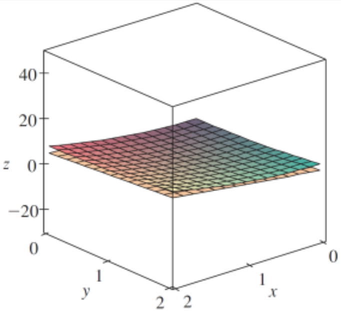
$$z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1).$$

Hình ở trang sau trình bày đồ thị của f cùng với mặt phẳng tiếp xúc tại $(1,1,3)$.

Sự khả vi







Chúng ta thấy rằng khi càng nhìn gần điểm $(1, 1, 3)$, mặt cong đồ thị của f và mặt tiếp xúc (đồ thị của L) dường như gần sát nhau hơn, do đó mới nói $L(x, y) = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$ là xấp xỉ tốt cho f khi (x, y) gần $(1, 1)$.

Sự khả vi

Chú ý: Vẫn tồn tại hàm số có các đạo hàm riêng và các đạo hàm riêng này không liên tục tại (a, b), nhưng hàm đã cho vẫn khả vi tại (a, b).

Ví dụ

Cho hàm f định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh f_x không liên tục tại $(0, 0)$, tuy nhiên f vẫn khả vi tại $(0, 0)$.

Giải: Ta xét

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}\right)\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)\right).$$

Bởi vì bất đẳng thức

$$0 \le \left|h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right)\right| \le |h|$$

Giải: Ta xét

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}\right)\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(h \sin\left(\frac{1}{|h|}\right)\right).$$

Bởi vì bất đẳng thức

$$0 \leq \left| h \sin\left(\frac{1}{|h|}\right)\right| \leq |h|$$

do đó khi áp dụng định lí giới hạn kẹp thì giới hạn sau tồn tại

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\left(h \sin\left(\frac{1}{|h|}\right)\right) = 0.$$

Sự khả vi

Tương tự, $f_y(0,0) = 0$. Nếu đặt

$$\Delta x = x - 0, \Delta y = y - 0, \Delta z = f(x,y) - f(0,0)$$
$$\varepsilon_1 = x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \varepsilon_2 = y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

thì đẳng thức

$$\Delta z = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

thỏa, đồng thời ε_1 và ε_2 cùng tiến về 0 khi $(x,y) \to (0,0)$.
Vậy f khả vi tại $(0,0)$.

Ngoài ra

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Với dãy điểm $M_n\left(\dfrac{1}{2n\pi}, 0\right)$ hội tụ về $(0,0)$ khi $n\to+\infty$.
Khi ta thay vào f_x thì $f_x(M_n) = -1 \nrightarrow f_x(0,0)$ khi $n\to+\infty$.
Vậy f_x không liên tục tại $(0,0)$.

Xấp xỉ vi phân

Sai phân

Cho hàm số hai biến $z = f(x, y)$, chúng ta có sai phân dx và dy. Sai phân dz hay là sai phần toàn phần.

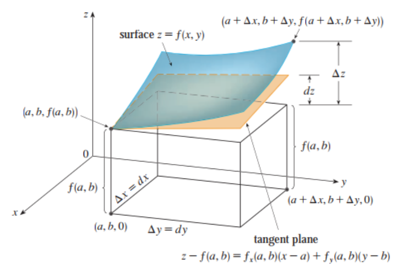
$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Ta lấy $dx = \Delta x = x - a, dy = \Delta y = y - b$. Khi đó, ta có thể viết lại

$$dz = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y \approx \Delta z$$

Khi đó ta thấy xấp xĩ tuyến tính của hàm số f tại điểm (a, b)

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$



Xấp xỉ vi phân

Ví dụ

a) Cho $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, tính dz

b) Nếu x thay đổi từ 2 đến 2.05 và y thay đổi từ 3 đến 2.96. Tính

Xấp xỉ vi phân

Ví dụ

Một hình nón có bán kính đáy 10cm, độ cao 25cm. Giả sử sai số của phép đo độ dài không quá 0.1cm. Dùng vi phân, hãy ước tính sai số khi tính thể tích hình nón theo bán kính và chiều cao nói trên.

Giải: Ta kí hiệu r và h là bán kính đáy và chiều cao của hình nón. Khi đó, thể tích hính nón là

$$V = f(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Suy ra

$$f_r = \frac{2\pi r h}{3}, \quad f_h = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Xấp xỉ vi phân

Bán kính và chiều cao đo được là 10cm và 25cm. Bán kính và chiều cao chính xác (không thể biết) là $10 + \Delta r$ và $25 + \Delta h$. Khi đó, sai số thể tích là

$$|\Delta V| = |f(10 + \Delta r, 25 + \Delta h) - f(10, 25)| \approx |dV|$$

$$|dV| = |f_r(10, 25)\Delta r + f_h(10, 25)\Delta h| = \left|\frac{500\pi}{3}\Delta r + \frac{100\pi}{3}\Delta h\right|$$

$$\leq \frac{500\pi}{3}|\Delta r| + \frac{100\pi}{3}|\Delta h|.$$

Giả thuyết cho $\Delta r \leq 0.1$ và $\Delta h \leq 0.1$. Do đó,

$$|\Delta V| \approx |dV| \leq \frac{500\pi}{3} \times 0.1 + \frac{100\pi}{3} \times 0.1 = 20\pi.$$

Vậy sai số thể tích (được ước tính) không quá 20π cm$^3 \approx 63$ cm^3.

Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính-Xấp xỉ tuyến tính và xấp xỉ vi phân

Bài tập

Làm bài tập mục 2.2 của file bài tập.

Outline

1. Vi phân của hàm số nhiều biến
   - Đạo hàm riêng
   - Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính
   - Sự khả vi
   - Quy tắc mắt xích và đạo hàm của hàm ẩn
   - Đạo hàm theo hướng
   - Cực trị của hàm 2 biến

Định lí (Quy tắc mắt xích 1)

Giả sử rằng $z = f(x,y)$ là hàm số khả vi với biến x và y, ở đây $x = g(t)$ và $y = g(t)$ là những hàm số khả vi với biến t thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ví dụ:Cho $z = x^2\sin(y)$, trong đó $x = \sqrt{t}, y = t^2$, tìm $\frac{dz}{dt}$?

Áp dụng quy tắc trên, ta được

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{x\sin(y)}{\sqrt{t}} + 2x^2t\cos(y) \\ &= \sin(t^2) + 2t^2\cos(t^2).\end{aligned}$$

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Định lí (Quy tắc mắt xích 2)

Giả sử rằng $z = f(x, y)$ là hàm số khả vi với biến x và y, ở đây $x = g(t, s)$ và $y = g(t, s)$ là những hàm số khả vi với biến t thì

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{= \partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Ví dụ:Cho $z = e^x \sin(y)$, trong đó $x = st^2, y = s^2 t$, tìm $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial s}$?

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Định lí (Quy tắc mắt xích tổng quát)

Giả sử rằng u là hàm số khả vi với biến $x_1, x_2, \cdots, x_n$, và mỗi x_j là hàm số khả vi m biến $t_1, t_2, \cdots, t_m$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

với mọi $i = 1, \cdots, m$

Ví dụ:Cho $u = x^4 y + y^2 z^3 \sin(y)$, trong đó $x = rse^t, y = rs^2 e^{-t}$ và $z = r^2 s \sin(t)$, tìm $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ và $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ tại $r = 2, s = 1, t = 0$

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Ví dụ

Nếu $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$, trong đó f là hàm số hai biến khả vi, hãy chứng minh g thỏa phương trình

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Giải: Đặt

$$x = s^2 - t^2 \quad \text{và } y = t^2 - s^2.$$

Khi đó:

$$g(t,s) = f(x,y).$$

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Áp dụng quy tắc mắt xích 2, ta được

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \times 2s + \frac{\partial f}{\partial y} \times -2s$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \times -2t + \frac{\partial f}{\partial y} \times 2t.$$

Do đó

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Bài tập

Làm bài tập 1-24 mục 2.3 của file bài tập.

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Nếu F là hàm số hai biến khả vi thì phương trình $F(x,y)=0$ biểu diễn một đường cong phẳng nói chung. Giả sử một phần của đường cong này là đồ thị của hàm số $y=f(x,y)$, f là ẩn hàm chưa biết. Ta sẽ tìm $f'(x)$, tức là dy/dx như sau:

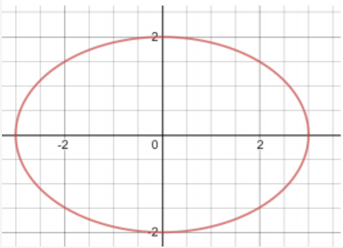
- Lấy đạo hàm theo biến x ở hai vế của phương trình $F(x,y)=0$ theo quy tắc mắt xích, ta được
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$
- Vì $dx/dx=1$ và giả sử $\partial F/\partial y\neq 0$, từ phương trình trên, ta được
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{1.2}$$

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Ví dụ

Tìm dy/dx với y phụ thuộc x như là hàm số được xác định bởi phương trình $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Phương trình đã cho là của ê-lip (E) như hình sau



Xét hàm 2 biến $F(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36$ xác định trên $D = \mathbb{R}^2 \setminus Ox$ thì

- $F \in C^1(D)$

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

- $\forall (x, y) \in D \cap E$, ta có

$$F_x(x, y) = 8x, F_y(x, y) = 18y \neq 0.$$

- Áp dụng công thức (1.2), ta được

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{8x}{18y} = -\frac{4x}{9y}. \tag{1.3}$$

Lưu ý: Nếu viết $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ rồi tính y', ta cũng được kết quả như trên.

Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Tương tự, nếu F là hàm số ba biến khả vi. Phương trình $F(x, y, z) = 0$ biểu diễn một mặt cong nói chung. Giả sử rằng một phần của mặt cong là đồ thị của một hàm $z = f(x, y)$, f là ẩn hàm chưa biết. Ta tìm $\partial f/\partial x$ và $\partial f/\partial y$ như sau:

- Dùng quy tắc mắt xích, lấy đạo hàm theo x ở hai vế phương trình $F(x, y, z) = 0$ (xem y là hằng), ta được

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

- Bởi vì $\partial x/\partial x = 1$, $\partial y/\partial x = 0$ (xem y là hằng) và giả sử $\partial F/\partial z \neq 0$ nên từ phương trình trên ta được

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}. \tag{1.4}$$

Ví dụ

Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial z}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ với $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

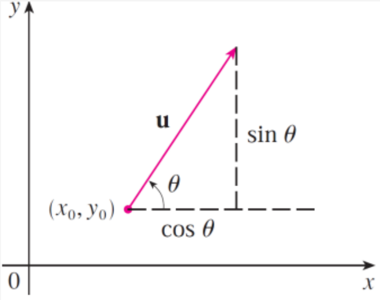
Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Bài tập

Làm bài tập 25-46 mục 2.3 của file bài tập.

Outline

Đạo hàm theo hướng

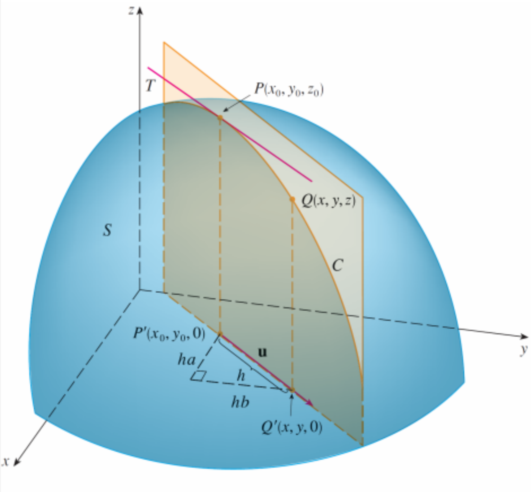


Xét điểm (x_0, y_0) là điểm trong của miền xác định của hàm $z = f(x, y)$. Tại đó, ta đặt:

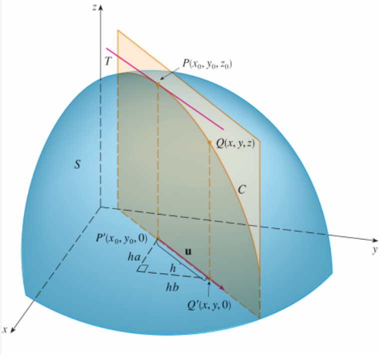
- Vectơ đơn vị $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \langle a, b \rangle$ là vectơ thỏa $a^2 + b^2 = 1$. Đôi khi vectơ $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ cũng được cho bởi góc chỉ hướng θ và $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \langle \cos(\theta), \sin(\theta) \rangle$ như hình bên.
- Trong mặt phẳng Oxy, xét điểm $P'(x_0, y_0)$. Đi từ P' theo hướng của $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ một độ dời h (h có thể âm hoặc dương), ta đến điểm $Q'(x, y)$, nghĩa là $\overrightarrow{P'Q'} = h\overrightarrow{\mathbf{u}}$ hay $x = x_0 + ha,\ y = y_0 + hb$.

Đạo hàm theo hướng

Xét hai điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ với $z_0 = f(x_0, y_0)$ và $Q(x, y, z)$ với $z = f(x, y)$ thuộc đồ thị của f. Hình chiếu của hai điểm này lên mặt phẳng Oxy là P' và Q'.



Đạo hàm theo hướng



Khi đó, tỉ lệ biến thiên của $z = f(x, y)$ từ (x_0, y_0) đến (x, y), cũng gọi là độ dốc của đường thẳng PQ, là tỉ số

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa đạo hàm theo hướng

Đạo hàm của f theo hướng $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \langle a, b\rangle$ tại (x_0, y_0) là

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

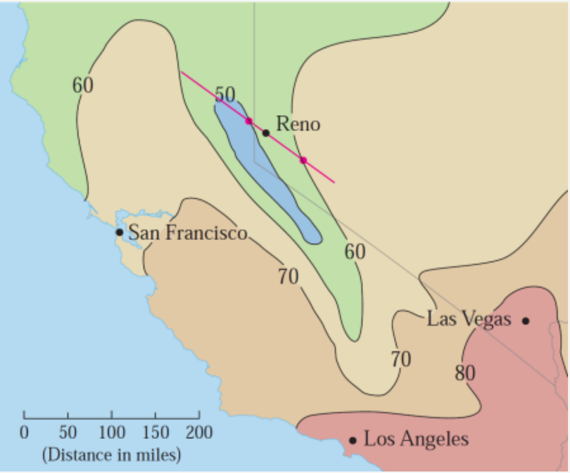
miễn là giới hạn trên tồn tại.

Lưu ý: Với hai hướng đặc biệt, $\overrightarrow{\mathbf{i}} = \langle 1, 0\rangle$ và $\overrightarrow{\mathbf{j}} = \langle 0, 1\rangle$ thì $D_{\overrightarrow{\mathbf{i}}} f(x_0, y_0)$ trở thành đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ và $D_{\overrightarrow{\mathbf{j}}} f(x_0, y_0)$ trở thành đạo hàm riêng $f_y(x_0, y_0)$.

Ý nghĩa: Tưởng tượng rằng đồ thị của f là bề mặt địa hình (bề mặt đồi núi). Nếu đứng tại P trên địa hình ấy, xoay người nhìn về hướng $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ thì độ dốc trước mặt là $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0)$. Nếu $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) > 0$ thì địa hình lên dốc. Nếu $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x_0, y_0) < 0$ thì địa hình xuống dốc.

Đạo hàm theo hướng

Ví dụ: Bản đồ các đường đẳng nhiệt kế bên mô tả nhiệt độ $T(x, y)$ của bang California và Neveda lúc 3:00 PM vào một ngày tháng 10, 1997. Hãy ước tính tốc độ biến thiên nhiệt độ theo khoảng cách tại địa điểm Reno, khi đi về hướng Đông-Nam.



Đạo hàm theo hướng

Giải:

- Vectơ đơn vị chỉ hướng Đông-Nam là $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, -1\rangle$, tuy nhiên ta không cần quan tâm đến biểu thức này. Thay vào đó, ta vẽ đường thẳng qua Reno, hướng về Đông-Nam như trong biểu đồ.
- Tốc độ biến thiên nhiệt theo khoảng cách, khi hướng về Đông-Nam, tại Reno, tức là $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}T$(Reno), được xấp xỉ bởi tốc độ biến thiên trung bình của nhiệt độ giữa hai điểm bị cắt bởi đường thẳng nói trên với hai đường đẳng nhiệt $T = 50$ và $T = 60$.
- Khoảng cách giữa hai điểm này khoảng 75 dặm (dựa vào tỉ xích trên bản đồ).
- Khi đi về hướng Đông-Nam, T biến thiên từ 50^0F đến 60^0F, cho thấy $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}T$(Reno)$> 0$, là tốc độ tăng nhiệt. Vậy

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}}T(\text{Reno}) \approx \frac{60-50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13^0\text{F/dặm}.$$

Đạo hàm theo hướng

Định lí (Công thức tính đạo hàm theo hướng)

Nếu hàm số f khả vi tại (x, y) thì f có đạo hàm theo mọi hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \langle a, b\rangle$ $(a^2 + b^2 = 1)$ và được tính theo công thức

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b. \tag{1.5}$$

Người ta đưa vào kí hiệu sau

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle$$

được gọi là gradient của f tại (x, y). Khi đó, công thức (1.5) được viết dưới hình thức khác

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}.$$

Đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Tính $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y)$ và $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(1, 2)$ nếu $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ và $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ là vectơ đơn vị có góc chỉ hướng $\theta = \pi/6$.

Giải: Áp dụng công thức (1.5), ta có

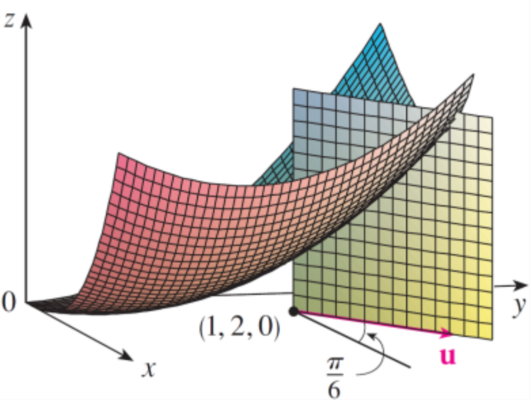
$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y) &= f_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + f_y(x, y) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(1, 2) = (3 \times 1^2 - 3 \times 2)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3 \times 1 + 8 \times 2)\frac{1}{2} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Đạo hàm theo hướng

Đạo hàm $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(1,2)$ trong ví dụ trên đại diện cho tốc độ biến thiên của z theo hướng của $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Đó là độ dốc của đường tiếp tuyến với đường cong giao tuyến của mặt $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ với mặt phẳng đứng đi qua $(1, 2, 0)$ theo hướng $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ như hình bên.



Đạo hàm theo hướng

Bài tập

Làm bài tập mục 2.4.1 của file bài tập.

Cực đại và cực tiểu của đạo hàm theo hướng

Xét hàm 2 biến f và một điểm (x, y) thuộc miền xác định. Giả sử tồn tại $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y)$ theo mọi hướng $\overrightarrow{\mathbf{u}}$. Câu hỏi đặt ra là đi theo hướng nào, giá trị của $f(x, y)$ sẽ thay đổi nhanh nhất, tức là giá trị của $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y)$ lớn nhất? Tương tự, đi theo hướng nào, giá trị của $f(x, y)$ sẽ thay đổi chậm nhất, tức là giá trị của $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y)$ nhỏ nhất? Câu trả lời được cho trong định lí sau

Định lí (Cực trị hóa đạo hàm theo hướng)

Nếu f là hàm số thuộc lớp C^1 thì tại một điểm (x, y) cố định,

- giá trị lớn nhất của $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y)$ là $|\nabla f(x, y)|$, đạt được khi $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ cùng hướng với vectơ $\nabla f(x, y)$, nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \dfrac{1}{|\nabla f(x, y)|} \nabla f(x, y)$.
- giá trị nhỏ nhất của $D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(x, y)$ là $-|\nabla f(x, y)|$, đạt được khi $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ngược hướng với vectơ $\nabla f(x, y)$, nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{u}} = -\dfrac{1}{|\nabla f(x, y)|} \nabla f(x, y)$.

Cực đại và cực tiểu của đạo hàm theo hướng

Ví dụ

Cho hàm số $f(x, y) = xe^y$. Tính đạo hàm của f tại $P(2, 0)$ theo hướng từ P đến $Q(1/2, 2)$. Xác định hướng làm cho đạo hàm tại P lớn nhất.

Lưu ý:

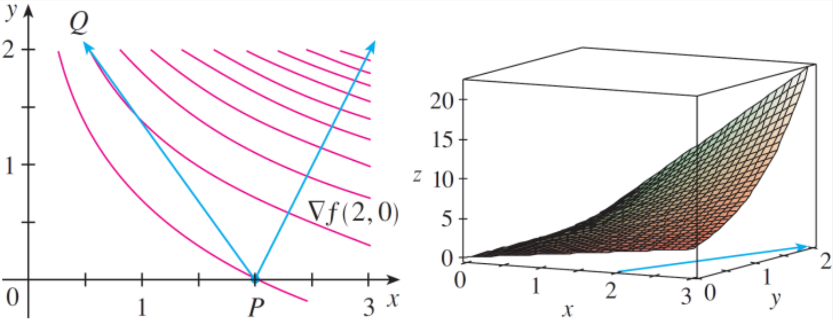
- Với hai điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$, ta có vectơ hình học $\overrightarrow{AB}$ được định nghĩa như sau
$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle .$$
- Với vectơ $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq 0$ thì vectơ đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ là $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{v}}}{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|}$.

Giải:

- Ta có $\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e^y, xe^y\rangle$. Suy ra
$$\nabla f(2,0) = \langle 1, 2\rangle \,.$$
- Mặt khác, ta có $\overrightarrow{PQ} = \left\langle -\frac{3}{2}, 2\right\rangle$. Do đó, vectơ đơn vị theo hướng $\overrightarrow{PQ}$ là $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$. Khi đó, đạo hàm của f tại P theo hướng $\overrightarrow{PQ}$ là
$$D_{\overrightarrow{\mathbf{u}}} f(2,0) = \nabla f(2,0)\cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = 1\times -\frac{3}{5} + 2\times \frac{4}{5} = 1.$$
- Đạo hàm của f tại P theo hướng $\nabla f(2,0) = \langle 1,2\rangle$ sẽ đạt giá trị lớn nhất bằng $|\nabla f(2,0)| = \sqrt{5}$.

Cực đại và cực tiểu của đạo hàm theo hướng

Hình dưới là contour map và đồ thị của hàm f. Hình bên phải cho thấy nếu tại P đi theo hướng $\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle$ thì đồ thị có độ dốc lớn nhất.



Nhận xét: Hình bên trái cho "cảm giác" rằng theo hướng vectơ $\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle$ hàm số có tốc độ biến thiên lớn nhất, là vectơ vuông góc với tiếp tuyến tại P của đường đồng mức qua P.

Cực đại và cực tiểu của đạo hàm theo hướng

Bài tập

Làm bài tập mục 2.4.2 trong file bài tập.

Gradient với mặt phẳng tiếp xúc

Định lí (Gradient và mặt phẳng tiếp xúc)

Cho hàm số 3 biến $F(x,y,z)$ khả vi tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$. Với hằng số $k = F(x_0,y_0,z_0)$, phương trình $F(x,y,z) = k$ biểu diễn một mặt đồng mức (level surface) (S) đi qua P. Giả sử $\nabla F(P) = \langle F_x(P), F_y(P), F_z(P)\rangle \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Khi đó, mặt phẳng qua P với $\nabla F(P)$ là vectơ pháp tuyến, có phương trình

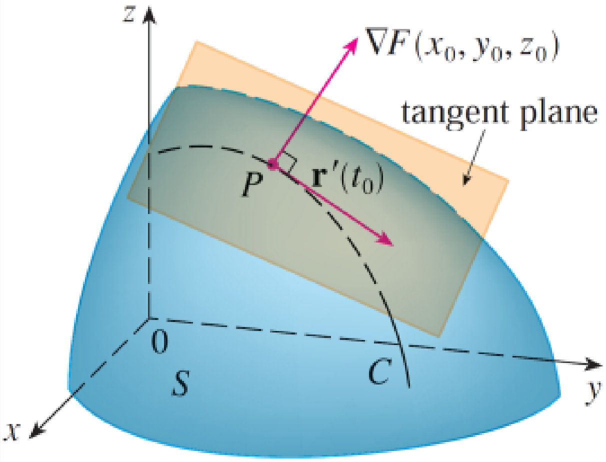
$$F_x(P)(x-x_0) + F_y(P)(y-y_0) + F_z(P)(z-z_0) = 0 \qquad (1.6)$$

là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại P, và người ta gọi đường thẳng qua P với $\nabla F(P)$ là vectơ chỉ phương, có phương trình

$$\frac{x-x_0}{F_x(P)} = \frac{y-y_0}{F_y(P)} = \frac{z-z_0}{F_z(P)}$$

là đường pháp tuyến của mặt (S) tại P (với giả thiết các mẫu số ở trên khác 0).

Gradient với mặt phẳng tiếp xúc



Gradient với mặt phẳng tiếp xúc

Ví dụ

Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến với mặt ellipsoid $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 3$, tại điểm $P(-2, 1, -3)$.

- Mặt ellipsoid là mặt đồng mức với $k = 3$ của hàm 3 biến

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}.$$

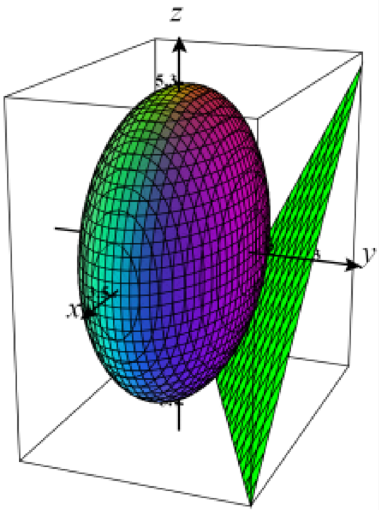
- Ta có:

$$\nabla F = \left\langle \frac{x}{2}, 2y, \frac{2z}{9} \right\rangle.$$

Suy ra:

$$\nabla F(P) = \left\langle -1, 2, -\frac{2}{3} \right\rangle.$$

Gradient với mặt phẳng tiếp xúc



- Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại P là

$$-1(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0$$

và pháp tuyến tại P là

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-\frac{2}{3}}.$$

Gradient với tiếp tuyến

Định nghĩa (Gradient và đường tiếp tuyến)

Cho hàm số 2 biến f thuộc lớp C^1. Điểm $P(x_0, y_0)$ thuộc đường cong (C) cho bởi phương trình $(C) : f(x, y) = k$ với $k = f(P)$. Giả sử $\nabla f(P) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Khi đó, đường thẳng qua P với $\nabla f(P)$ là vectơ pháp tuyến, có phương trình

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

là tiếp tuyến của (C) tại P.
Người ta gọi đường thẳng qua P với $\nabla f(P)$ là vectơ chỉ phương, có phương trình

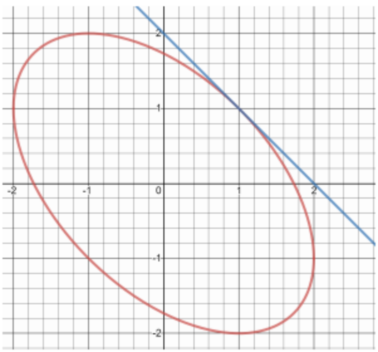
$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}$$

là đường pháp tuyến của đường cong (C) tại P (với giả thiết các mẫu số ở trên khác 0).

Gradient với tiếp tuyến

Ví dụ

Tìm phương trình tiếp tuyến của êlip $x^2 + xy + y^2 = 3$ tại điểm $(1, 1)$.



- Đường cong có phương trình $f(x, y) = 3$ với $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
- Ta có

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 2x + y, x + 2y \rangle .$$

- Do đó, vectơ pháp tuyến tại $(1, 1)$ là

$$\nabla f(1, 1) = \langle 3, 3 \rangle .$$

- Phương trình tiếp tuyến của êlip tại $(1, 1)$ là

$$3(x - 1) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x.$$

Gradient với tiếp tuyến

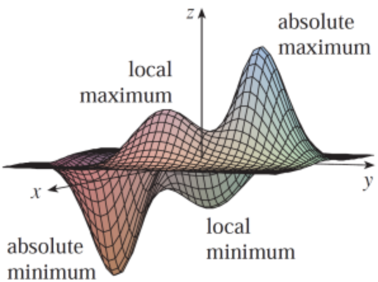
Bài tập

Làm bài tập mục 2.4.3 trong file bài tập.

Outline

1. Vi phân của hàm số nhiều biến
   - Đạo hàm riêng
   - Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính
   - Sự khả vi
   - Quy tắc mắt xích và đạo hàm của hàm ẩn
   - Đạo hàm theo hướng
   - Cực trị của hàm 2 biến

Cực trị của hàm 2 biến



- Đồ thị của một hàm số f như hình bên, có hai đỉnh đồi và hai thung lũng.
- Nếu điểm $(a, b, f(a, b))$ là đỉnh ngọn đồi thì $f(a, b)$ lớn hơn mọi giá trị $f(x, y)$ khi (x, y) gần (a, b), và ta nói f có cực đại địa phương (local maximum) tại (a, b).
- Có một đỉnh đồi cao nhất, tại đó f đạt cực đại tuyệt đối (absolute maximum), hay giá trị lớn nhất.

Ta cũng có khái niệm cực tiểu tương tự cho điểm đáy thung lũng.

Cực trị của hàm 2 biến

Định nghĩa

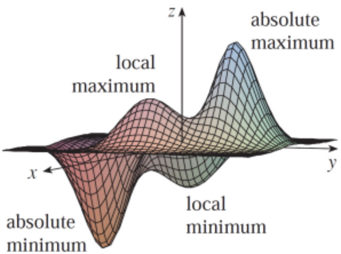
- Một hàm số 2 biến f có cực đại địa phương (gọi tắt là cực đại) tại (a, b) có nghĩa là tồn tại một đĩa tròn T tâm (a, b) bên trong miền xác định sao cho

$$\forall (x, y) \in T, f(a, b) \geq f(x, y).$$

  Số $f(a, b)$ được gọi là giá trị cực đại (địa phương) của f.
- Nếu bất đẳng thức đúng với mọi (x, y) thuộc miền xác định của f thì ta nói f có cực đại tuyệt đối (hay giá trị lớn nhất) tại điểm (a, b) trên tập xác định.
- Nếu dấu bất đẳng thức ở trên đổi chiều, ta có khái niệm tương ứng là cực tiểu địa phương, cực tiểu tuyệt đối.
- Cực đại hay cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

Cực trị của hàm 2 biến

Từ hình vẽ dưới đây



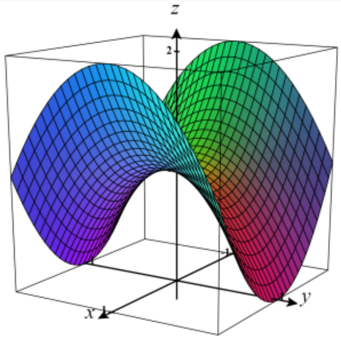
ta thấy nếu f đạt cực trị tại điểm (a, b) thì mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của f tại điểm $(a, b, f(a, b))$ nằm ngang, song song với mặt Oxy.
Ta thừa nhận định lí sau

Định lí (Điều kiện cần của cực trị)

Nếu f đạt cực trị địa phương và có đạo hàm riêng tại (a, b) thì (a, b) là **điểm dừng** (stationary point) của f, nghĩa là $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Chiều đảo của định lí trên đúng không?

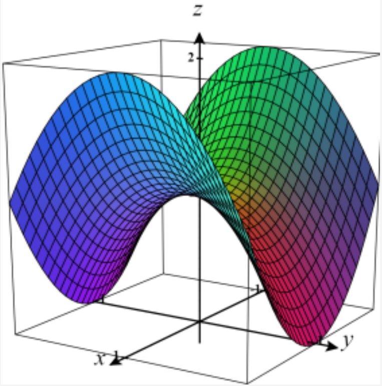
Ví dụ: Xét hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ có đồ thị như hình sau



Ta có $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, nghĩa là $(0,0)$ là điểm dừng của f. Tuy nhiên, từ đồ thị, ta thấy điểm $(0,0,1)$ không phải là đỉnh đồi hay đáy thung lũng. Do đó, ta suy đoán f không có cực trị tại $(0,0)$.

Điểm yên ngựa

- Điểm yên ngựa của hàm số f là điểm dừng của f, nhưng tại đó f không có cực trị.
- Trong ví dụ trước, điểm $(0,0)$ là điểm yên ngựa của hàm số $f(x,y)=x^2-y^2+1$. Ở xung quanh điểm $(0,0,1)$, mặt đồ thị của f có hình dáng giống yên ngựa.



Điều kiện đủ của cực trị

Nếu (a, b) là điểm dừng của hàm f, thì điều này chưa đủ kết luận f đạt cực trị tại (a, b). Ta thừa nhận định lí sau

Định lí (Điều kiện đủ của cực trị)

Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một đĩa tròn tâm (a, b), đồng thời (a, b) là điểm dừng của f. Đặt

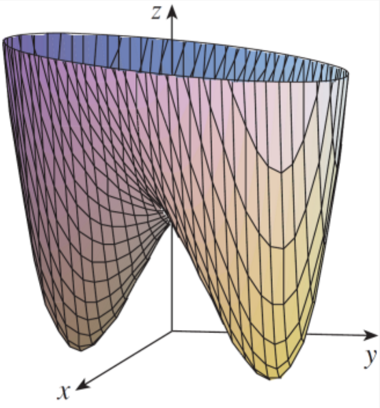
$$D(a,b) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 .$$

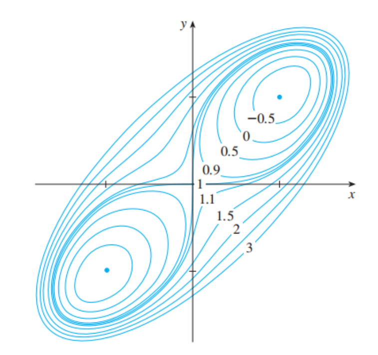
- Nếu $D(a, b) > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$ thì $f(a, b)$ là cực tiểu địa phương.
- Nếu $D(a, b) > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$ thì $f(a, b)$ là cực đại địa phương.
- Nếu $D(a, b) < 0$ thì (a, b) là điểm yên ngựa, nghĩa là f không có cực trị tại (a, b).
- Nếu $D(a, b) = 0$ thì ta không có kết luận tổng quát, tùy bài toán cụ thể mà ta xét.

Điều kiện đủ của cực trị

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.





Điều kiện đủ của cực trị

Giải:

- Tìm các điểm dừng của f bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 0, f_{xy} = -4, f_{xx} = 12x^2 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0, f_{yx} = -4, f_{yy} = 12y^2 \end{cases}$$

  Do đó, các điểm dừng của f là $(0,0), (1,1)$ và $(-1,-1)$.

- Mặt khác, ta có

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

  - Vì $D(0,0) < 0$ nên $(0,0)$ là điểm yên ngựa.
  - Vì $D(1,1) = 128$ và $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ nên $(1,1)$ là điểm cực tiểu.
  - Vì $D(-1,-1) = 128$ và $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ nên $(1,1)$ cũng là điểm cực tiểu.

Điều kiện đủ của cực trị

Ví dụ

Tìm khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ và mặt $x + 2y + z = 4$

Khoảng cách từ điểm (x, y, z) đến điểm $(1, 0, -2)$ là

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

Vì điểm (x, y, z) thuộc mặt phẳng $x + 2y + z = 4$ nên $z = 4 - x - 2y$ nên $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$. Khoảng cách nhỏ nhất giá trị nhỏ nhất của

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

Ta có

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 4x + 4y - 14 = 0 \\ f_y &= 2y - 4(6-x-2y) = 4x + 10y - 24 = 0 \end{aligned}$$

Điều kiện đủ của cực trị

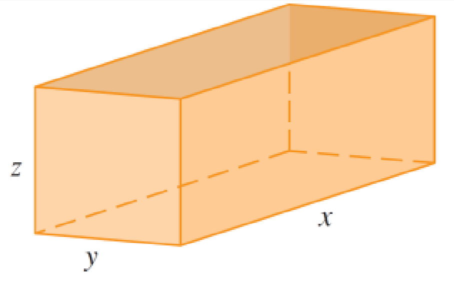
Ta xác định được điểm cực trị $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$. $f_{xx} = 4$, f_{xy}, $f_{yy} = 10$, $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ và $f_{xx} > 0$. Vậy hàm f đạt cực tiểu tại điểm $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$. Vậy khoảng cách nhỏ nhất

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(\frac{5}{6})^2 + (\frac{5}{3})^2 + (\frac{5}{6})^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

Điều kiện đủ của cực trị

Ví dụ

Một hộp chữ nhật không có nắp, được làm từ $12m^2$ bìa cứng. Hãy tìm thể tích lớn nhất của hộp này.



Điều kiện đủ của cực trị

Giải: Như hình minh họa ở trên,thể tích hộp là

$$V = xyz$$

với điều kiện

$$2xz + 2yz + xy = 12.$$

Từ điều kiện này thì

$$z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}.$$

Do đó, thể tích là

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}.$$

Điều kiện đủ của cực trị

Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2} = 0. \end{cases}$$

Vì $x > 0, y > 0$ nên ta suy ra được $x = y$. Thay $y = x$ vào phương trình trên ta được $12 - 3x^2 = 0$, điều này cho $x = y = 2$ và

$$z = \frac{12 - 2 \times 2}{2(2+2)} = 1.$$

Vậy $(2, 2, 1)$ là điểm dừng duy nhất.
Hơn nữa, vật liệu hữu hạn sẽ cho thể tích hộp lớn nhất có thể, đạt được tại điểm dừng $(2, 2, 1)$ mà thôi

$$V_{max} = 2 \times 2 \times 1 = 4(m^3).$$

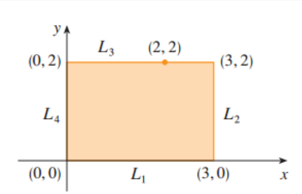
Điều kiện đủ của cực trị

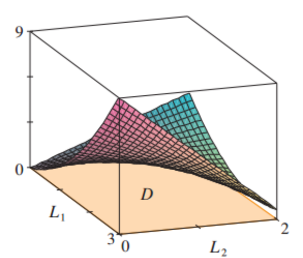
Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền đóng D của hàm số liên tục f

1. Tìm điểm cực trị của hàm f trên miền D
2. Tìm giá trị cực đại và cực tiểu trên biên D.
3. Giá trị lớn nhất của bước 1 và bước 2 là giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất của bước 1 và bước 2 là giá trị lớn nhỏ,

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$.





Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất

Vì hàm số f là hàm đa thức nên nó liên tục trên D, D đóng và bị chặn trên $\mathbb{R}^2$ nên D là tập compact. Vậy hàm số f tồn tại giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.

• **Bước 1:** Tìm điểm cực trị của hàm f trên miền D. Giải hệ tìm cực trị địa phương:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có một điểm cực trị duy nhất là $(1,1)$ và $f(1,1) = 1$.

• **Bước 2:** Chúng ta xét giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên biên của D, ta có $\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ như hình.

• Trên L_1 thì $y = 0$ thì

$$f(x,0) = x^2 \quad \forall 0 \le x \le 3$$

Đây là hàm số tăng, giá trị nhỏ nhất của nó là $f(0,0) = 0$ tại $(0,0)$ và giá trị lớn nhất của nó là $f(3,0) = 9$ tại $(3,0)$.

Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất

- Trên L_2 thì $x = 3$ thì

$$f(3, y) = 9 - 4y \quad \forall 0 \leq y \leq 2$$

Đây là hàm số giảm, giá trị lớn nhất của nó là $f(3, 0) = 9$ tại $(0, 0)$ và giá trị nhỏ nhất của nó là $f(3, 2) = 1$ tại $(3, 2)$.

- Trên L_3 thì $y = 2$ thì

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \quad \forall 0 \leq x \leq 3$$

Đây là hàm số tăng trên $[2, 3]$ và giảm trên $[0, 2]$, vậy giá trị lớn nhất của nó là $f(0, 2) = 4$ tại $(0, 2)$ và giá trị nhỏ nhất của nó là $f(2, 2) = 0$ tại $(3, 2)$.

- Trên L_4 thì $x = 0$ thì

$$f(0, y) = 2y \quad \forall 0 \leq y \leq 2$$

Đây là hàm số tăng, giá trị lớn nhất của nó là $f(0, 2) = 4$ tại $(0, 2)$ và giá trị nhỏ nhất của nó là $f(0, 0) = 1$ tại $(0, 0)$.

• Tổng kết bước 2 ta được giá trị nhỏ nhất trên biên là $f(0,0) = f(2,2) = 0$ và giá trị lớn nhất là $f(3,0) = 9$.

• **Bước 3:** So sánh giá trị cực trị địa phương của bước 1 và giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên D, ta thấy rằng hàm số f đạt giá trị lớn nhất trên D là $f(3,0) = 0$ và giá trị nhỏ nhất là $f(0,0) = f(2,2) = 0$.

Ví du:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$$

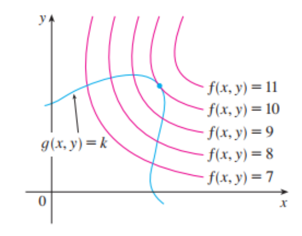
trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$

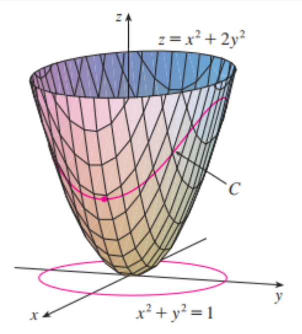
Điều kiện đủ của cực trị

Bài tập

Làm bài tập mục 2.5.1 của file bài tập

Cực trị có điều kiện





Điều kiện đủ của cực trị

Định Lý

Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z)$ với sự ràng buộc $g(x, y, z) = k$ với $\nabla g \neq 0$

a) Tìm giá trị x, y, z và λ thỏa điều kiện

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= k \end{aligned}$$

b) Tính giá trị f tại những điểm tìm được ở bước a. Giá trị lớn nhất của những giá trị là giá trị lớn nhất của f, giá trị nhỏ nhất giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của f.

Điều kiện đủ của cực trị

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ thỏa điều kiện $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$

a) Tìm x, y và λ thỏa điều kiện

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= 1 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} (2x, 4y) &= \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Ta có 3 phương trình sau

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ của cực trị

a) Từ phương trình đầu tiên, ta có $x = 0$ hay $\lambda = 1$

- Nếu $x = 0$ thì từ phương trình thứ 3 ta được $y = \pm 1$
- Nếu $\lambda - 1$ thì từ phương trình số 2, ta được $y = 0$, từ phương trình thứ 3, ta được $x = \pm 1$

Ta có 4 điểm thỏa mãn và

$$f(0,1) = 2, \quad f(0,-1) = 2, \quad f(-1,0) = 1, \quad f(1,0) = 1$$

b) Giá trị lớn nhất f trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là $f(\pm 1, 0) = 2$ và giá trị nhỏ nhất của f trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là $f(0, \pm 1) = 1$

Điều kiện đủ của cực trị

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ thỏa $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$