CHƯƠNG VI

CÁC SỐ ĐẾM NÂNG CAO

I. SỐ ĐẾM CATALAN:

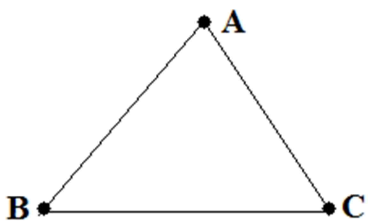
1.1/ PHÉP PHÂN HOẠCH TAM GIÁC: Cho D là *một đa giác lồi* trên một mặt phẳng. Ta dùng *một số đường chéo nào đó không cắt nhau ở phần trong* của D để phân chia D thành *các tam giác rời nhau từng đôi một* (hai tam giác khác nhau có thể có chung đỉnh hay có chung cạnh mà không có phần diện tích chung). Mỗi cách phân chia như vậy được gọi là *một phép phân hoạch tam giác* của đa giác lồi D.

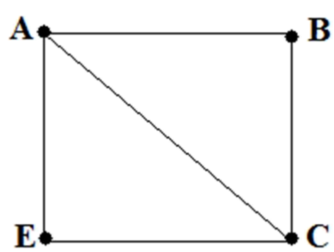
Ta quan tâm *số phép phân hoạch tam giác* của một đa giác lồi trên một mặt phẳng.

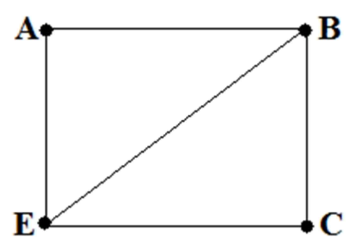
Ví dụ: Xét một đa giác lồi trên một mặt phẳng tùy ý.

a) Tam giác (không có đường chéo) tự nó có một phép phân hoạch tam giác duy nhất.

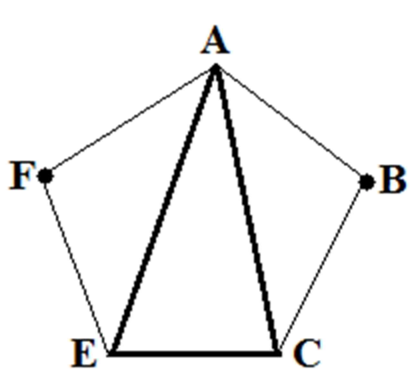
b) Tứ giác lồi có hai phép phân hoạch tam giác (chia bằng một trong hai đường chéo).





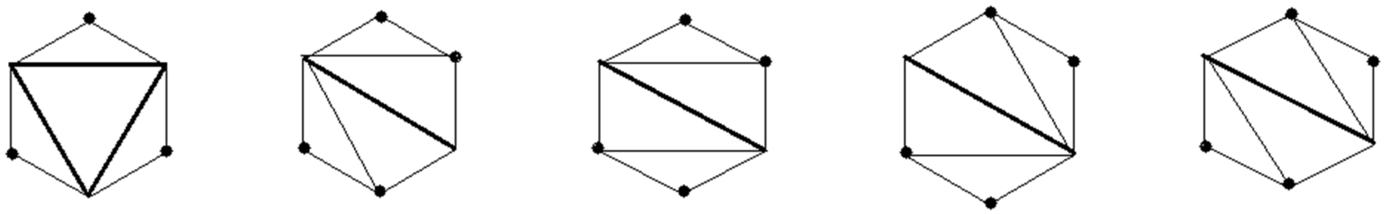


c) Ngũ giác lồi có 5 phép phân hoạch tam giác (mỗi phép phân hoạch tương ứng với một tam giác ở giữa được tạo từ 1 đỉnh bất kỳ cùng 2 đỉnh khác không kề với nó).



d) Lục giác lồi có 9 đường chéo bao gồm 3 đường chéo chính (mỗi đường chéo chính chia lục giác lồi thành 2 tứ giác lồi) và 6 đường chéo phụ.

Trước hết ta có 2 phép phân hoạch tam giác mà mỗi phép phân hoạch có được bằng cách dùng 3 đường chéo phụ nào đó không cắt nhau ở phần trong của lục giác lồi. Mỗi đường chéo chính cùng với 2 đường chéo phụ thích hợp tạo ra một phép phân hoạch tam giác. Do đó mỗi đường chéo chính tương ứng với 4 phép phân hoạch tam giác. Như vậy lục giác lồi có tất cả $2 + (3 \times 4) = 14$ phép phân hoạch tam giác.



1.2/ <u>SỐ CATALAN:</u> Qui ước $C_o = 1$ và $\forall n \geq 1$, đặt C_n là số phép phân hoạch tam giác của một đa giác lồi có $(n + 2)$ cạnh trên mặt phẳng.

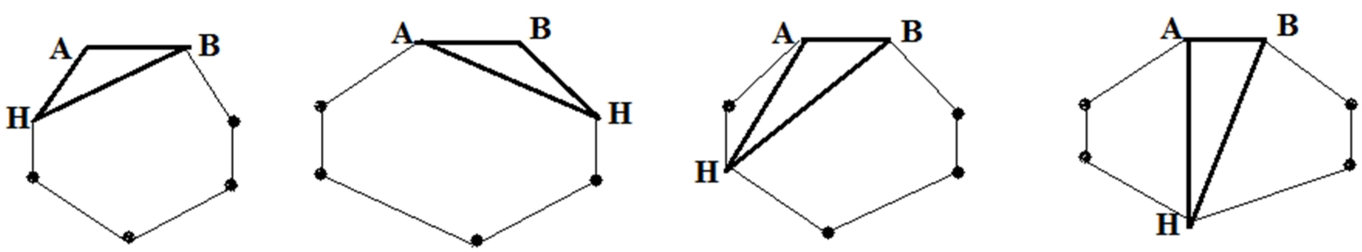
Ta gọi C_n $(n \geq 0)$ là số Catalan thứ n. Ta đã có $C_o = C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$.

1.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> $\forall n \geq 1$, ta có *công thức đệ qui* $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$.

***Chứng minh*:** Giả sử D là đa giác lồi có $(n + 2)$ cạnh trên mặt phẳng. Nếu $n = 1$ và $n = 2$ thì đẳng thức trên đúng ($1 = C_1 = C_oC_{1-o-1}$ và $2 = C_2 = C_oC_{2-o-1} + C_1C_{2-1-1}$).

Xét $n \geq 3$ và giả sử có giả thiết qui nạp cho các trường hợp $\leq (n - 1)$.

Xét cạnh AB tùy ý của D và đỉnh H của D thỏa $A \neq H \neq B$. Tam giác ABH chia D thành một hay hai đa giác lồi tùy theo (H là đỉnh kề với A hay B) hoặc (H là đỉnh không kề với cả A lẫn B).



Nếu H kề với A thì D là phần hội của ΔABH và đa giác lồi D' có $(n + 1)$ cạnh. Lúc đó số phép phân hoạch tam giác của D' là $C_{n-1} = C_oC_{n-o-1}$ (giả thiết qui nạp) và ta có C_oC_{n-o-1} phép phân hoạch tam giác của D một cách tương ứng $(k = 0)$.

Nếu H kề với B thì lý luận tương tự, ta cũng được $C_{n-1} = C_{n-1}C_{n-(n-1)-1}$ phép phân hoạch tam giác của D $(k = n - 1)$.

Nếu H không kề với cả A lẫn B thì D là phần hội của ΔABH, của đa giác lồi D' có $(k + 2)$ cạnh và của đa giác lồi D'' có $(n - k + 1)$ cạnh $(1 \le k \le n - 2)$. Dùng giả thiết qui nạp cho D' và D'', ta có C_kC_{n-k-1} phép phân hoạch tam giác của D $(1 \le k \le n - 2)$.

Từ các trường hợp đã trình bày ở trên, ta có số phép phân hoạch tam giác của D là

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} .$$

<u>Ví dụ:</u>

a) $C_5 = C_oC_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_o = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42.$

b) $C_6 = C_oC_5 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_3C_2 + C_4C_1 + C_5C_o = 42 + 14 + 10 + 10 + 14 + 42 = 132$

1.4/ <u>MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẾM DÙNG SỐ ĐẾM CATALAN:</u>

a) Bài toán 1: Cho hai ký tự V (vay) và T (trả).

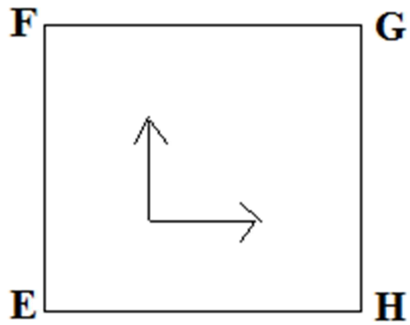
Đặt $a_o = 1$. $\forall n \ge 1$, đặt a_n là số cách sắp n ký tự V và n ký tự T thành một dãy có độ dài 2n sao cho tại mỗi vị trí thứ k của dãy, tính từ đầu dãy đến ký tự thứ k, (số ký tự V) $\ge$ (số ký tự T) $[\, 1 \le k \le 2n \,]$. Khi đó $a_n = C_n$, $\forall n \ge 0$.

b) Bài toán 2: Cho hai ký hiệu **(** và **)** [dấu mở ngoặc đơn và dấu đóng ngoặc đơn].

Đặt $b_o = 1$. $\forall n \ge 1$, đặt b_n là số cách sắp n dấu **(** và n dấu **)** thành một dãy có độ dài 2n sao cho tại mỗi vị trí thứ k của dãy, tính từ đầu dãy đến ký tự thứ k, (số dấu mở ngoặc) $\ge$ (số dấu đóng ngoặc) $[\, 1 \le k \le 2n \,]$. Khi đó $b_n = C_n$, $\forall n \ge 0$.

c) Bài toán 3: Mỗi bước chân của An sẽ đi ngang từ trái qua phải hoặc đi dọc từ dưới lên trên với độ dài 1 mét.

Đặt $d_o = 1$. $\forall n \geq 1$, xét hình vuông EFGH có cạnh dài n mét và đặt d_n là số cách An bước chân đi từ đỉnh E đến đỉnh G sao cho tại bất kỳ thời điểm nào, An cũng có (số bước đã đi ngang) ≥ (số bước đã đi dọc). Khi đó $d_n = C_n$, $\forall n \geq 0$.



d) Bài toán 4: $\forall n \geq 0$, đặt e_n là số cây nhị phân (có gốc a) có n đỉnh trong và đủ. Khi đó $e_n = C_n$, $\forall n \geq 0$.

Chứng minh:

a) $a_o = C_o = 1$, $a_1 = C_1 = 1$ (vì VT là dãy duy nhất), $a_2 = C_2 = 2$ (vì có đúng 2 dãy thỏa là VVTT và VTVT). Ta chứng minh $a_n = C_n$, $\forall n \geq 0$ (*).

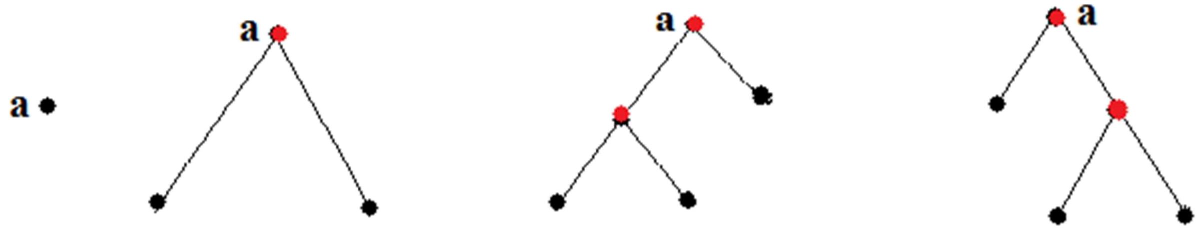
Khi $n = 0$, $n = 1$ và $n = 2$ thì hiển nhiên (*) đúng.

Xét $n \geq 3$ và giả sử có giả thiết qui nạp cho các trường hợp $\leq (n - 1)$. Ký tự đầu của dãy phải là V và ký tự cuối của dãy phải là T. Ta có thể viết dãy theo dạng $V\Delta T\Pi$ trong đó Δ là dãy có (k ký tự V) và (k ký tự T), Π là dãy có $(n - k - 1)$ ký tự V và $(n - k - 1)$ ký tự T $[\ 0 \leq k \leq n - 1\ ]$. Dùng giả thiết qui nạp cho Δ và Π, ta có C_kC_{n-k-1} cách xếp cho dãy ký tự đang xét. Như vậy $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = C_n$, $\forall n \geq 1$.

b) Đây là bài toán 1 nếu xem dấu mở ngoặc **(** là V và dấu đóng ngoặc **)** là T.

c) Đây là bài toán 1 nếu xem mỗi bước ngang chính là V và mỗi bước dọc chính là T.

d) Ta có ngay $e_o = C_o = 1$, $e_1 = C_1 = 1$ và $e_2 = C_2 = 2$.



n = 0 n = 1 n = 2

Ta chứng minh $e_n = C_n$, $\forall n \geq 0$ (**).

Khi n = 0, n = 1 và n = 2 thì hiển nhiên (**) đúng.

Xét $n \geq 3$ và giả sử có giả thiết qui nạp cho các trường hợp $\leq (n-1)$.

Xóa gốc a của cây T, ta có cây con bên trái T' và cây con bên phải T''.

T' và T'' đều là các cây nhị phân (có gốc) đầy đủ với số đỉnh trong lần lượt là k và $(n-k-1)$ [$0 \leq k \leq n-1$]. Dùng giả thiết qui nạp cho T' và T'', ta có $C_k C_{n-k-1}$ cách tạo cây cây nhị phân (có gốc) đầy đủ cho trường hợp đang xét .

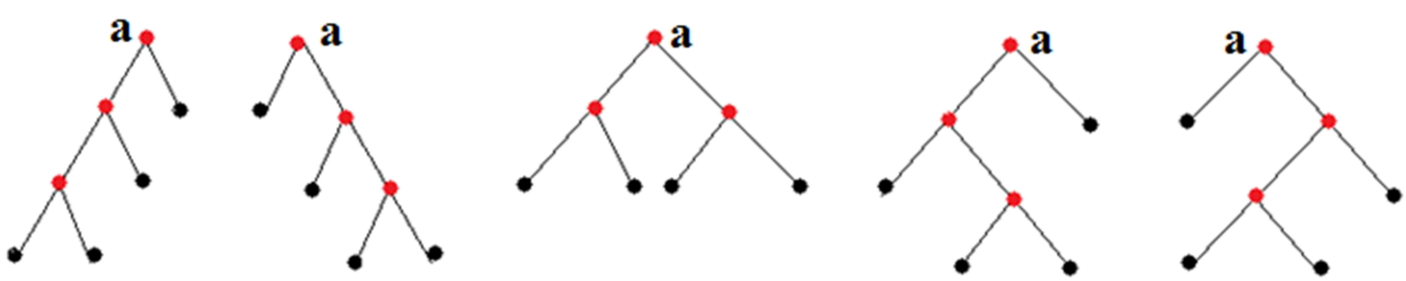
Như vậy $e_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = C_n$, $\forall n \geq 0$.

Ví dụ:

a) Khi n = 3, Bài toán 1 có kết quả là $C_3 = 5$ với 5 dãy như sau :

VVVTTT, VVTTVT, VVTVTT, VTVVTT và VTVTVT .

b) Khi n = 3, Bài toán 4 có kết quả là $C_3 = 5$ với 5 cây nhị phân đủ như sau :



1.5/ ĐỊNH LÝ:

$\forall n \geq 0$, $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$, nghĩa là có thể tính trực tiếp $C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+3)...(2n)}{n!}$.

Ví dụ:

a) $C_6 = \frac{1}{7}C_{12}^{6} = \frac{12!}{7\times 6!(12-6)!} = \frac{8\times 9\times 10\times 11\times 12}{2\times 3\times 4\times 5\times 6} = 132.$

b) Ta có $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{nC_{n+1}^{2n+2}}{(n+1)C_n^{2n}} = \frac{n(2n+2)!n!n!}{(n+1)(2n)!(n+1)!(n+1)!} = \frac{2n(2n+1)}{(n+1)^2}$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4+(2/n)}{1+(2/n)+(1/n^2)} = \frac{4+0}{1+0+0} = 4$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{1}{4}.$

1.6/ HÀM SINH CỦA DÃY CATALAN:

Đặt $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ là *hàm sinh* của dãy Catalan thì $G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Chứng minh:

$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = C_o + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1})x^n = 1 + x\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1})x^{n-1}$

$= 1 + x\sum_{m=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{m} C_k C_{m-k})x^m = 1 + x[\,G(x)\,]^2$ (m = n – 1) , nghĩa là $x[\,G(x)\,]^2 - G(x) + 1 = 0.$

Suy ra $G(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1\mp\sqrt{1-4x}}$. Để ý $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1\mp\sqrt{1-4x}} = \infty$ (dấu $-$) hoặc 1 (dấu +)

và $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = C_o = 1$ nên ta có $G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

II. SỐ ĐẾM STIRLING (LOẠI 2):

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho n, k ≥ 0. Qui ước $S_o^o = 1$, $S_o^k = S_n^o = 0$, ∀n, k ≥ 1.

∀n, k ≥ 1, đặt S_n^k là số cách xếp n *vật khác nhau* vào k *hộp giống nhau* sao cho *không có hộp nào trống*. Rõ ràng $S_n^1 = S_n^n = 1$ và $S_n^k = 0$ nếu k > n.

Ta nói S_n^k là số đếm Stirling (loại 2) và ta cũng dùng ký hiệu $S_n^k = \left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$.

2.2/ MỆNH ĐỀ:

∀n ≥ 2, $S_n^{n-1} = C_n^2$.

Chứng minh: Để xếp n vật khác nhau vào $(n-1)$ hộp giống nhau sao cho không có hộp nào trống, ta sẽ thấy có một hộp nào đó phải chứa 2 vật và các hộp khác sẽ chứa 1 vật cho mỗi hộp. Ta chỉ cần chọn ra 2 vật bất kỳ đặt chung vào một hộp nào đó thì đương nhiên xác định được ngay một cách xếp. Do đó số cách xếp là $S_n^{n-1} = C_n^2$.

<u>Ví dụ:</u> $S_3^2 = S_3^{3-1} = C_3^2 = 3$ và $S_4^3 = S_4^{4-1} = C_4^2 = 6$.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> $\forall n \geq 2$, $S_n^2 = 2^{n-1} - 1$.

Chứng minh: Số cách xếp n vật khác nhau vào hai hộp khác nhau (có thể có hộp trống) là 2^n (mỗi vật có 2 cách xếp vào một hộp tùy ý). Do đó số cách xếp n vật khác nhau vào hai hộp khác nhau (không có hộp trống) là $(2^n - 2)$ vì phải loại bỏ hai trường hợp có hộp trống. Suy ra số cách xếp n vật khác nhau vào hai hộp giống nhau (không có hộp trống) là $S_n^2 = (2!)^{-1}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$.

<u>Ví dụ:</u> $S_3^2 = 2^{3-1} - 1 = 4 - 1 = 3$ và $S_4^2 = 2^{4-1} - 1 = 8 - 1 = 7$.

2.4/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> $\forall n, k \geq 1$, ta có *công thức đệ qui* $S_n^k = k S_{n-1}^k + S_{n-1}^{k-1}$.

Chứng minh: Qui nạp theo $n \geq 1$. Khi $n = 1 = k$ thì cả 2 vế đều bằng 1.

Khi $n = 1 < k$ thì cả 2 vế đều bằng 0. Vậy đẳng thức đúng khi $n = 1$.

Xét $n \geq 2$ và giả sử có đẳng thức đúng cho các trường hợp $\leq (n-1)$.

Xếp n vật khác nhau $v_1, \ldots v_{n-1}, v_n$ vào k hộp giống nhau sao cho không có hộp nào trống. Khi ta đã xếp xong $(n-1)$ vật $v_1, \ldots v_{n-1}$ vào các hộp thì có hai trường hợp sau đây xảy ra cho vật cuối cùng v_n:

TH1: còn một hộp trống và ta đưa vật v_n vào hộp cuối này. Ta có S_{n-1}^{k-1} cách xếp n vật $v_1, \ldots v_{n-1}, v_n$ [vì trước đó đã có S_{n-1}^{k-1} cách xếp $(n-1)$ vật $v_1, \ldots v_{n-1}$ vào $(k-1)$ hộp giống nhau sao cho không có hộp nào trống].

TH2: không còn hộp nào trống. Ta xếp vật v_n vào hộp nào cũng được. Ta có $k S_{n-1}^k$

cách xếp n vật $v_1, \dots v_{n-1}, v_n$ [vì trước đó đã có S_{n-1}^k cách xếp $(n-1)$ vật $v_1, \dots, v_{n-1}$ vào k hộp giống nhau sao cho không có hộp nào trống].

Do đó ta có $S_n^k = k\,S_{n-1}^k + S_{n-1}^{k-1}$.

Ví dụ: $S_5^3 = 3\,S_4^3 + S_4^2 = (3 \times 6) + 7 = 18 + 7 = 25$.

2.5/ <u>HỆ QUẢ</u>: Cho n, k ≥ 1. Khi đó

a) Số cách xếp n *vật khác nhau* vào k *hộp khác nhau* sao cho không có hộp nào trống là $k!\,S_n^k$ (trong mỗi cách xếp, mỗi vật *đặt đúng vào* 1 *hộp* và mỗi hộp có thể *nhận* 1 *hay nhiều vật*).

b) Số cách chia n *viên kẹo khác nhau* cho k *đứa trẻ* sao cho đứa nào cũng có kẹo là $k!\,S_n^k$ (trong mỗi cách chia, mỗi viên kẹo *đưa đúng cho* 1 *đứa trẻ* và mỗi đứa trẻ có thể *nhận* 1 *hay nhiều viên kẹo*).

c) n diễn viên dùng đủ k màu để hóa trang (mỗi diễn viên *dùng đúng* 1 *màu* và mỗi màu có thể *hóa trang cho* 1 *hay nhiều diễn viên*). Số cách hóa trang như vậy là $k!\,S_n^k$

d) Số *toàn ánh* từ một tập hợp X có n phần tử vào một tập hợp Y có k phần tử là $k!\,S_n^k$ (trong mỗi toàn ánh, mỗi phần tử của X *có đúng* 1 *ảnh trong* Y và mỗi phần tử trong Y có thể là *ảnh của* 1 *hay nhiều phần tử trong* X).

***Chứng minh*:**

a) Do xếp n vật khác nhau vào k hộp khác nhau nên phải nhân thêm k! trường hợp cho việc chọn hộp. Như vậy số cách xếp là $k!\,S_n^k$.

b) Xem mỗi vật là một viên kẹo và mỗi hộp là một đứa trẻ thì ta lại trở về phần a).

c) Xem mỗi vật là một diễn viên và mỗi hộp là một màu thì ta lại trở về phần a).

d) Xét toàn ánh $f : V = \{ v_1, \dots v_{n-1}, v_n \} \to H = \{ h_1, \dots h_{k-1}, h_k \}$. Ta có n vật khác nhau và k hộp khác nhau $h_1, \dots h_{k-1}, h_k$. Khi $f(v_i) = h_j$ thì ta xem như vật v_i được xếp vào hộp h_j $(1 \le i \le n, 1 \le j \le k)$ thì ta lại trở về phần a).

2.6/ ĐỊNH NGHĨA: Cho tập hợp T có n phần tử $(n \ge 1)$.

Một phép phân hoạch của T là một phép phân chia T thành k tập hợp con khác $\varnothing$ rời nhau từng đôi một $T_1, \ldots, T_k$ (với $1 \le k \le n$), nghĩa là

$T = T_1 \cup \ldots \cup T_k$, $T_i \neq \varnothing$ và $T_i \cap T_j = \varnothing$ khi $1 \le i \neq j \le k$.

Lúc đó ta cũng nói $\{ T_1, \ldots, T_k \}$ là *một phép phân hoạch của* T.

Ví dụ: Cho $T = \{ 1, 2, \ldots , 10 \}$, $T_1 = \{ 5 \}$, $T_2 = \{ 1, 4, 9 \}$, $T_3 = \{ 2, 7 \}$ và $T_4 = \{ 3, 6, 8, 10 \}$. Ta có $\{ T_1, T_2, T_3, T_4 \}$ là một phép phân hoạch của T.

2.7/ MỆNH ĐỀ: Cho $n, k \ge 1$. Khi đó số phép phân hoạch của một tập hợp có n phần tử thành k tập hợp con là S_n^k.

Chứng minh: Ở đây chúng ta xếp n phần tử (n vật) khác nhau vào k tập hợp con mà không quan tâm đến thứ tự của các tập (k hộp giống nhau) nên số cách xếp là S_n^k.

Ví dụ: Xét số cách phân tích 269.178 thành tích của 3 số nguyên ≥ 2.

Phân tích nguyên tố $269.178 = 2 \times 3 \times 7 \times 13 \times 17 \times 29$.

Mỗi cách phân tích 269.178 thành tích của 3 số nguyên ≥ 2 sẽ tương ứng với một phép phân hoạch $T = \{ 2, 3, 7, 13, 17, 29 \}$ thành 3 tập hợp con khác $\varnothing$. Đảo lại, Mỗi phép phân hoạch $T = \{ 2, 3, 7, 13, 17, 29 \}$ thành 3 tập hợp con khác $\varnothing$ sẽ tương ứng với một cách phân tích 269.178 thành tích của 3 số nguyên ≥ 2.

Chẳng hạn sự phân tích $269.178 = 34 \times 87 \times 91 = (2 \times 17).(3 \times 29).(7 \times 13)$ tương ứng với phép phân hoạch $T = \{ 2, 17 \} \cup \{ 3, 29 \} \cup \{ 7, 13 \}$. Đảo lại, phép phân hoạch $T = \{ 2, 13 \} \cup \{ 29 \} \cup \{ 3, 7, 17 \}$ tương ứng với sự phân tích

$269.178 = (2 \times 13).(29).(3 \times 7 \times 17) = 26 \times 29 \times 357$.

Do đó số cách phân tích 269.178 thành tích của 3 số nguyên ≥ 2 chính là số phép phân hoạch $T = \{ 2, 3, 7, 13, 17, 29 \}$ thành 3 tập hợp con khác $\varnothing$. Ta có số cách phân tích này là $S_6^3 = 3\,S_5^3 + S_5^2 = (3 \times 25) + (2^{5-1} - 1) = 75 + 15 = 90$.

2.8/ <u>ĐỊNH LÝ</u>: ∀n, r ≥ 1, ta có $r^n = \sum_{k=0}^{r} S_n^k A_r^k = \sum_{k=0}^{r} S_n^k \frac{r!}{(r-k)!}$.

***Chứng minh*:** Ta tìm số cách xếp n vật khác nhau vào r hộp khác nhau.

Cách 1 : r^n cách xếp (mỗi vật có r cách xếp).

Cách 2: Xét $k \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Số cách xếp n vật khác nhau vào k hộp khác nhau

(trong r hộp đang có) là $C_r^k k! S_n^k = S_n^k A_r^k$. So sánh 2 cách, ta có $r^n = \sum_{k=0}^{r} S_n^k A_r^k$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Với n = 6 và r = 4, $\sum_{k=0}^{4} S_6^k A_4^k = 4^6 = 4096$.

b) Viết x^3 thành một tổ hợp tuyến tính của các hàm **x**, **x(x – 1)** và **x(x – 1)(x – 2)**.

Với n = 3 và r = x (x là biến số nguyên ≥ 1), ta có đẳng thức

$x^3 = \sum_{k=0}^{x} S_3^k \frac{x!}{(x-k)!}$ = **x** + 3**x(x – 1)** + **x(x – 1)(x – 2)** [để ý $S_3^k = 0$ khi k = 0 hoặc k > 3]

Hai đa thức ở hai vế bằng nhau tại vô số các giá trị nguyên dương của x nên chúng đồng nhất với nhau.

c) Viết x^4 thành một tổ hợp tuyến tính của các hàm **x**, **x(x – 1)**, **x(x – 1)(x – 2)** và **x(x – 1)(x – 2)(x – 3)**.

Với n = 4 và r = x (x là biến số nguyên ≥ 1), ta có đẳng thức

$x^4 = \sum_{k=0}^{x} S_4^k \frac{x!}{(x-k)!}$ = **x** + 7**x(x – 1)** + 6**x(x – 1)(x – 2) + x(x – 1)(x – 2)(x – 3)**.

[để ý $S_4^k = 0$ khi k = 0 hoặc k > 4]. Hai đa thức ở hai vế bằng nhau tại vô số các giá trị nguyên dương của x nên chúng đồng nhất với nhau.

III. SỐ ĐẾM BELL:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Qui ước $B_o = 1$ và $\forall n \geq 1$, đặt B_n là số phép phân hoạch của một tập hợp có n phần tử. Suy ra $\forall n \geq 1$, B_n là số cách chia n vật khác nhau thành các nhóm vật (mỗi nhóm có ít nhất một vật).

Ví dụ: Dễ thấy $B_1 = 1, B_2 = 2$. $B_3 = 5$ vì $T = \{ 1, 2, 3 \}$ có 5 phép phân hoạch như sau: $T = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

3.2/ MỆNH ĐỀ: $\forall n \geq 0, B_n = \sum_{k=0}^{n} S_n^k$.

Chứng minh: Suy ngay từ (**2.7**) và (**3.1**).

Ví dụ:

a) $B_4 = \sum_{k=0}^{4} S_4^k = 0 + 1 + (2^3 - 1) + C_4^2 + 1 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

b) Xét số cách phân tích 666.655 thành tích của các số nguyên ≥ 2.

Phân tích nguyên tố $666.655 = 5 \times 11 \times 17 \times 23 \times 31$.

Mỗi cách phân tích 666.655 thành tích của các số nguyên ≥ 2 tương ứng với một phép phân hoạch của $T = \{ 5, 11, 17, 23, 31\}$ thành các tập hợp con khác $\varnothing$. Đảo lại, mỗi phép phân hoạch của $T = \{ 5, 11, 17, 23, 31\}$ thành các tập hợp con khác $\varnothing$ tương ứng với một cách phân tích 666.655 thành tích của các số nguyên ≥ 2.

Chẳng hạn sự phân tích $666.655 = 34 \times 87 \times 91 = (5 \times 31).(11 \times 17).(23)$ tương ứng với phép phân hoạch $T = \{ 5, 31 \} \cup \{ 11, 17 \} \cup \{ 23 \}$. Đảo lại, phép phân phép phân hoạch $T = \{ 5, 11, 23 \} \cup \{ 17, 31 \}$ tương ứng với sự phân tích $666.655 = (5 \times 11 \times 23).(17 \times 31) = 1265 \times 527$.

Do đó số cách phân tích 666.655 thành tích của các số nguyên ≥ 2 chính là số phép phân hoạch $T = \{ 5, 11, 17, 23, 31 \}$ thành các tập hợp con khác $\varnothing$. Ta có số cách phân tích này là $B_5 = \sum_{k=0}^{5} S_5^k = 0 + 1 + (2^4 - 1) + 25 + 10 + 1 = 52$.

3.3/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> $\forall n \geq 0$, ta có *công thức đệ qui* $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

Chứng minh: $T = \{ v_1, \ldots v_n , v_{n+1} \}$ có B_{n+1} phép phân hoạch.

Xét một phép phân hoạch nào đó của T và A là một tập hợp con của T hiện diện trong phép phân hoạch nói trên thỏa $v_{n+1} \in A$. Ta xét số phân hoạch của $(T \setminus A)$.

Nếu $| A | = k + 1$ và $| T \setminus A | = n - k$ $(0 \leq k \leq n)$ thì ta có C_n^k cách chọn trước A và $(T \setminus A)$ có B_{n-k} phép phân hoạch. Mỗi phép phân hoạch của T bao gồm tập hợp con A cùng với một phép phân hoạch của $(T \setminus A)$. Do đó số phân hoạch của T là

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} = \sum_{m=0}^{n} C_n^{n-m} B_m$ (đổi biến $m = n - k$) $= \sum_{m=0}^{n} C_n^m B_m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$ (đổi tên m thành k).

<u>Ví dụ:</u>

$B_6 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k B_k = (1 \times 1) + (5 \times 1) + (10 \times 2) + (10 \times 5) + (5 \times 15) + (1 \times 52) = 203$.
