Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
Tuần 3

Ngày 02 tháng 06 năm 2024

Quy tắc đạo hàm hàm hợp

Quy tắc đạo hàm hàm hợp (Trường hợp 1)

Giả sử $z = f(x, y)$ là hàm khả vi theo x và y, trong đó $x = g(t)$ và $y = h(t)$ đều là hàm khả vi theo t. Thì z là hàm khả vi theo t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Quy tắc đạo hàm hàm hợp

Quy tắc đạo hàm hàm hợp (Trường hợp 2)

Giả sử $z = f(x, y)$ là hàm khả vi theo x và y, trong đó $x = g(s, t)$ và $y = h(s, t)$ đều là hàm khả vi theo s và t. Thì

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Bài tập

Bài 1. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp để tìm $\partial z/\partial t$ với

$$z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^4, \quad y = 1 - t^3$$

Bài 2. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp để tìm $\partial z/\partial s$ và $\partial z/\partial t$ với

$$z = \frac{x}{y}, \quad x = se^t, \quad y = 1 + se^{-t}$$

Bài 3. Cho $g(r, s) = f\left(x(r, s), y(r, s)\right)$, trong đó $x = 2r - s$, $y = s^2 - 4r$. Hãy tính $g_r(1, 2)$ và $g_s(1, 2)$, biết rằng $f_x(0, 0) = 4$ và $f_y(0, 0) = 8$.

Bài tập

Bài 4. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp tìm các đạo hàm riêng theo yêu cầu.

a). $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ve^w;$

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ khi $u = 2, v = 1, w = 0.$

b). $T = \dfrac{v}{2u+v}, \quad u = pq\sqrt{r}, \quad v = p\sqrt{q}r;$

$\dfrac{\partial T}{\partial p}, \dfrac{\partial T}{\partial q}, \dfrac{\partial T}{\partial r}$ khi $p = 2, q = 1, r = 4.$

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa

Đạo hàm theo hướng của f tại (x_0, y_0) theo hướng của vectơ đơn vị $\boldsymbol{u} = \langle a, b \rangle$ là

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{1}$$

Định nghĩa

Nếu f là một hàm theo hai biến x và y, thì **gradient** của f là vectơ ∇f được xác định bởi

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

Đạo hàm theo hướng

Định lý

Nếu f là một hàm khả vi theo x và y, thì f có đạo hàm theo hướng theo hướng của vectơ đơn vị tùy ý $\boldsymbol{u} = \langle a, b \rangle$ và

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b = \nabla f \cdot \boldsymbol{u}.$$

Nếu vector đơn vị $\boldsymbol{u}$ tạo với trục x dương một góc θ thì ta có thể viết $\boldsymbol{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ công thức trên trở thành

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta.$$

Ngoài ra $D_{\boldsymbol{u}} f(x, y)$ có thể được hiểu là tốc độ biến thiên của hàm f theo hướng của vectơ đơn vị $\boldsymbol{u}$.

Cực trị hóa đạo hàm theo hướng

Định lý

Giả sử f là hàm khả vi có hai hoặc ba biến. Khi đó

+ Giá trị cực đại của đạo hàm theo hướng $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$ là $|\nabla f(\boldsymbol{x})|$ và điều này xảy ra khi $\boldsymbol{u}$ có cùng hướng với vectơ gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$.
+ Giá trị cực tiểu của đạo hàm theo hướng $D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$ là $-|\nabla f(\boldsymbol{x})|$ và điều này xảy ra khi $\boldsymbol{u}$ có ngược hướng với vectơ gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$.

Bài tập

Bài 5. Tìm gradient của f. Tính gradient tại điểm P. Tìm tốc độ biến thiên của f tại P theo hướng của vectơ $\boldsymbol{u}$.

a). $f(x,y) = \sin(2x+3y), \quad P(-6,4), \quad \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}).$

b). $f(x,y,z) = x^2yz - xyz^3, \quad P(2,-1,1), \quad \boldsymbol{u} = \left\langle 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle.$

c). $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad (1,2), \quad \boldsymbol{v} = \langle 3,5 \rangle.$

d). $f(x,y,z) = \sqrt{x+yz}, \quad (1,3,1), \quad \boldsymbol{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle.$

e). $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}, \quad (3,4), \quad \boldsymbol{v} = \langle 3,-4 \rangle.$

Đạo hàm hàm ẩn

Đạo hàm của hàm ẩn

Cho F là hàm số 2 biến khả vi. Giả sử hàm ẩn y = y(x) xác định bởi $F(x, y) = k$, thì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Cho F là hàm số 3 biến khả vi. Giả sử hàm ẩn z = z(x,y) xác định bởi $F(x, y, z) = k$, thì

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Bài tập

Bài 6. Sử dụng công thức đạo hàm hàm ẩn để tìm $\dfrac{dy}{dx}$.

a). $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

b). $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

Bài 7. Sử dụng công thức đạo hàm hàm ẩn để tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

a). $x - z = \arctan(yz)$

b). $yz = \ln(x + z)$

Mặt phẳng tiếp xúc - Tiếp tuyến

Mặt phẳng tiếp xúc - Pháp tuyến - Tiếp tuyến

Giả sử S là mặt có phương trình $F(x, y, z) = k$. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt mức $F(x, y, z) = k$ tại $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ là mặt phẳng đi qua P, có vectơ pháp tuyến $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ và có dạng

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Pháp tuyến với mặt S tại P là đường thẳng đi qua P, vuông góc với mặt tiếp xúc và có dạng

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Tiếp tuyến của đường mức $f(x, y) = k$ tại điểm (x_0, y_0) là đường thẳng nhận $\nabla f(x_0, y_0)$ làm vectơ pháp tuyến và có dạng

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Bài tập

Bài 7. Tìm phương trình của mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến với mặt được cho tại điểm tương ứng.

a). $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

b). $xy + yz + zx = 5, \quad (1, 2, 1)$

c). $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2, \quad (1, 1, 1).$