Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1
Tuần 7

Ngày 18 tháng 3 năm 2024

Xấp xỉ tích phân

Quy tắc trung điểm

Nếu f khả tích trên $[a, b]$, khi đó

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x = \Delta x\left[f(\overline{x}_1) + \cdots + f(\overline{x}_n)\right]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và $\overline{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$.

Quy tắc Trapezoidal

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

trong đó $\Delta x = (b-a)/n$ và $x_i = a + i\Delta x$.

Chặn sai số

Giả sử $|f''(x)| \le K$ với $a \le x \le b$. Nếu E_T và E_M là các sai số của quy tắc hình thang và quy tắc trung điểm, khi đó

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \text{ và } |E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Quy tắc Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}\sum_{i=1}^{n/2}\left[f\left(x_{2i-2}\right) + 4f\left(x_{2i-1}\right) + f\left(x_{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots \right.$$

$$\left. + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

trong đó n là số chẵn và $\Delta x = (b-a)/n$.

Chặn sai số

Giả sử $|f^{(4)}(x)| \leq K$ với $a \leq x \leq b$. Nếu E_S là các sai số của quy tắc Simpson, khi đó

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

Bài tập

Bài 1.

(a) Tìm xấp xỉ T_{10}, M_{10} và S_{10} cho $\int\limits_0^\pi \sin x \, dx$ và sai số tương ứng E_T, E_M và E_S.
(b) Tìm chặn sai số của các sai số trên.
(c) Cần phải chọn n lớn bao nhiêu để các xấp xỉ T_n, M_n và S_n của tích phân trong câu (a) có sai số trong phạm vi 0.00001.

Tích phân suy rộng

Định nghĩa tích phân suy rộng loại 1

(a) Nếu $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ thì

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$ nếu giới hạn này tồn tại

(b) Nếu $\int_t^b f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ thì

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$ nếu giới hạn này tồn tại

Các tích phân suy rộng trên được gọi là **hội tụ** nếu các giới hạn tương ứng tồn tại và gọi là **phân kỳ** nếu các giới hạn không tồn tại.

(c) Nếu cả $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ và $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ thì

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Tích phân suy rộng

Định nghĩa tích phân suy rộng loại 2

(a) Cho f liên tục $[a,b)$ và bị gián đoạn tại b, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx \text{ nếu giới hạn này tồn tại}$$

(b) Cho f liên tục $(a,b]$ và bị gián đoạn tại a, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx \text{ nếu giới hạn này tồn tại}$$

Tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ được gọi là **hội tụ** nếu các giới hạn tương ứng tồn tại và gọi là **phân kỳ** nếu các giới hạn không tồn tại.

(c) Nếu f gián đoạn tại c $(a \le c \le b)$, các tính phân $\int_a^c f(x)\,dx$ và $\int_c^b f(x)\,dx$ đều tồn tại thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bài tập

Bài 2. Xác định xem mỗi tích phân sau hội tụ hay phân kì. Tính giá trị tích phân nếu nó hội tụ.

a). $$\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$$

b). $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

c). $$\int_{-\infty}^{6} re^{r/3}\,dr$$

d). $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

Bài tập

Bài 3. Xác định xem tích phân sau hội tụ hay phân kỳ

a). $$\int\limits_0^1 3x^2 \ln x \, dx$$

b. $$\int\limits_0^4 \frac{x}{x^2-9} \, dx$$

c). $$\int\limits_{-2}^6 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}$$

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý (Tích phân suy rộng loại 1, Tiêu chuẩn so sánh 1)

Giả sử f và g là hàm số liên tục với $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với $x \geq a$ thì

(a) Nếu $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ hội tụ

(b) Nếu $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý (Tích phân suy rộng loại 2, Tiêu chuẩn so sánh 1)

Giả sử $\int_a^b f(x)\,dx$ và $\int_a^b g(x)\,dx$ là tích phân suy rộng loại 2, nếu $c \in [a,b]$ là điểm **kỳ dị** của tích phân (không liên tục hay không xác định). Nếu $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với x thuộc lân cận của c. Khi đó,

(a) Nếu $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ thì $\int_a^b g(x)\,dx$ hội tụ

(b) Nếu $\int_a^b g(x)\,dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý (Tích phân suy rộng loại 1, Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử f và g là hàm số liên tục với $f(x), g(x) \geq 0$ với $x \geq a$. Nếu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý (Tích phân suy rộng loại 2, Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử $\int_a^b f(x)\,dx$ và $\int_a^b g(x)\,dx$ là tích phân suy rộng loại 2, nếu $c \in [a, b]$ là điểm **kỳ dị** của tích phân. Nếu

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Bài tập

Bài 4. Xác định tích phân sau hội tụ hay phân kỳ. (Sử dụng tiêu chuẩn so sánh)

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3-1}\,dx$