Bài giảng Toán học Tổ hợp

Nguyễn Anh Thi

SỐ ĐẾM NÂNG CAO

Nội dung

1. Số Catalan
2. Số Stirling dạng thứ hai
3. Số Bell

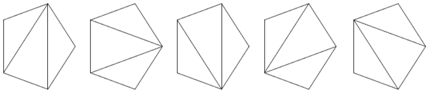
Số Catalan

Định nghĩa

Số Catalan C_n là số cách chia một đa giác đều $n+2$ đỉnh thành các tam giác bằng cách dùng các đường chéo không cắt nhau ở bên trong đa giác. Quy ước $C_0 = 1$.

Ví dụ

Chia ngũ giác đều thành các tam giác.



Hình: *Chia ngũ giác đều*

Ví dụ

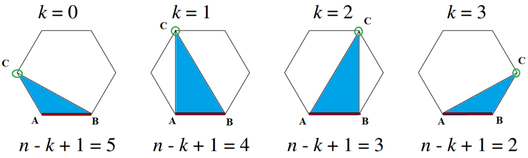
Một số số Catalan đầu tiên thể hiện ở bảng sau.

n	0	1	2	3	4
C_n	1	1	2	5	14

Xây dựng phương trình đệ quy cho số Catalan

Ta xét đa giác đều P có $n+2$ đỉnh.

- Chọn cố định một cạnh của đa giác, chẳng hạn là AB với A, B là hai đỉnh của cạnh đó. Trong n đỉnh còn lại của P, ta chọn ta một đỉnh bất kỳ, chẳng hạn là C nối với hai đỉnh A, B. Khi đó đa giác P được chia ra thành 3 phần: tam giác ABC, đa giác nằm bên trái tam giác ABC gọi là P_L và đa giác nằm bên phải tam giác ABC gọi là P_R. Chẳng hạn trong trường hợp lục giác đều $n = 4$, như hình vẽ sau.



Hình: Chia lục giác đều

Xây dựng phương trình đệ quy cho số Catalan

- Giả sử P_L có $k+2$ đỉnh thì P_R có $n-k+1$ đỉnh.
- Do việc chia đa giác đều và đa giác lồi thành các tam giác là như nhau, nên ta có số cách chia P_L thành các tam giác là C_k và số cách chia P_R thành các tam giác là C_{n-k-1}. Khi đó số cách chia P thành các tam giác trong từng trường hợp sẽ bằng $C_k C_{n-k-1}$ với giá trị k thay đổi.
- Ngoài hai đỉnh A, B, đa giác P còn có n đỉnh khác. Số đỉnh của P_L và P_R sẽ thay đổi theo cách chọn đỉnh C trong số n đỉnh còn lại của P và giá trị của k cũng thay đổi, $k = 0, \ldots, n-1$. Kết hợp tất cả các trường hợp, ta có số cách chia đa giác P thành các tam giác là $\mathbf{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}}$.

Ví dụ

Tính C_5, C_6.

Tìm công thức tường minh cho số Catalan

Gọi $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ là hàm sinh của số Catalan C_n. Ta thấy

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n \geq 0} C_n x^n = C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \right) x^n \\ &= 1 + x \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \right) x^{n-1}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Thay $n-1$ ở (1) bằng m, ta được

$$C(x) = 1 + x\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{m} C_k C_{m-k}\right)x^m = 1 + x(C(x))^2. \qquad (2)$$

Giải (2) ta được hai nghiệm $C_1(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ và $C_2(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Ta thấy $\lim_{x\to 0} C(x) = 1$. Hơn nữa, ta có $\lim_{x\to 0} C_1(x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$ và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} C_2(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-4x})(1+\sqrt{1-4x})}{2x(1+\sqrt{1-4x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1.\end{aligned}$$

Suy ra hàm sinh $\mathbf{C(x)} = \dfrac{\mathbf{1-\sqrt{1-4x}}}{\mathbf{2x}}$.

Bây giờ ta sẽ tìm hệ số của hàm sinh vừa tìm được, hay nói cách khác là tính C_n. Theo Ví dụ 2.48 trang 49 Giáo trình Toán học Tổ hợp, ta có

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n. \tag{3}$$

Thay $n-1$ ở (3) bằng m, ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4x} &= 1 - 2\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}x^{m+1}\\ &= 1 - 2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n.$$

Vậy số Catalan $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Ví dụ (Catalan, 1830s)

Có bao nhiêu cách sắp xếp đúng của n cặp dấu ngoặc đơn?
Chẳng hạn:
-Với $n = 0, 1$, có 1 cách.
-Với $n = 2$, có 2 cách là $\{(()), ()()\}$.

Lời giải. Gọi C_n là số cách sắp xếp đúng của n cặp dấu ngoặc đơn.Mỗi cách sắp xếp đúng là một chuỗi các dấu ngoặc, bắt đầu bằng $''(''$ và có dạng $''(A)B''$. Trong đó A là chuỗi sắp xếp đúng của k cặp dấu ngoặc đơn $(0 \leq k \leq n-1)$, và B là chuỗi sắp xếp đúng của $n-k-1$ cặp dấu ngoặc đơn. Suy ra, số cách sắp xếp đúng của n cặp dấu ngoặc đơn là

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Đây là phương trình đệ quy cho số Catalan thứ n. Đối chiếu với điều kiện đầu, ta thấy phù hợp. Vậy số cách sắp xếp đúng bằng với số Catalan thứ n.

Ví dụ

Cần di chuyển tới một địa điểm cách vị trí đang đứng n bước về hướng bắc và n bước về hướng đông. Có bao nhiêu cách để di chuyển tới vị trí mong muốn nếu yêu cầu tại mọi thời điểm số bước đã đi về hướng bắc không nhiều hơn số bước đã đi về hướng đông. (Lưu ý, chỉ đi về hướng bắc hoặc hướng đông.)

Ví dụ

Có bao nhiêu cây nhị phân đủ có n đỉnh trong?

Số Stirling dạng thứ hai

Định nghĩa

Số các phân hoạch của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ thành k tập con khác rỗng được ký hiệu là $S(n, k)$, và $S(n, k)$ được gọi là *số Stirling dạng thứ hai*.
-Quy ước: $S(0, 0) = 1, S(0, k) = S(n, 0) = 0$. Nếu $k > n$, thì $S(n, k) = 0$.
-$S(n, k)$ còn có thể được ký hiệu là $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Ví dụ

Tập hợp $\{1, 2, 3, 4\}$ *có tất cả bảy phân hoạch thành hai tập con khác rỗng, đó là* $\{1, 2, 3\} \cup \{4\}$, $\{1, 2, 4\} \cup \{3\}$, $\{1, 3, 4\} \cup \{2\}$, $\{2, 3, 4\} \cup \{1\}$, $\{1, 2\} \cup \{3, 4\}$, $\{1, 3\} \cup \{2, 4\}$, $\{1, 4\} \cup \{2, 3\}$. *Do đó* $S(4, 2) = 7$.

Ví dụ

-*Với mọi số nguyên dương* $n \geq 1$, *ta có* $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

-*Với* $n \geq 2$, $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$

Mệnh đề

Cho số nguyên dương $n \geq 2$. *Khi đó*

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1.$$

Chứng minh.

Ta phân hoạch tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ ra thành 2 tập con khác rỗng A, B. Mỗi phần tử trong tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ có 2 lựa chọn được đặt vào A hay B, vậy có tất cả là 2^n cách. Tuy nhiên do A, B khác rỗng nên ta phải trừ đi 2 trường hợp này, đồng thời do A, B có vai trò như nhau nên ta có số phân hoạch là

$$S(n,2) = \frac{1}{2!}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1.$$

$\square$

Định lý

Với mọi số nguyên dương k và n thỏa mãn $k \leq n$, ta có

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k).$$

Chứng minh.

Ta chia thành 2 trường hợp.
-Trường hợp 1, xét các phân hoạch mà chứa tập hợp $\{n\}$. Số các phân hoạch trong trường hợp này bằng với số các phân hoạch của tập $\{1,2,\ldots,n-1\}$ thành $k-1$ tập con, bằng $S(n-1,k-1)$.
-Trường hợp 2, xét các phân hoạch còn lại, không chứa tập $\{n\}$. Số các phân hoạch trong trường hợp này bằng với (số các phân hoạch của tập $\{1,2,\ldots,n-1\}$ thành k tập con) $\times$ (số cách chọn 1 tập con trong k tập con để cho phần tử n vào), bằng $k.S(n-1,k)$.
Kết hợp hai trường hợp ta được

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k).$$

Tam giác Stirling

Dựa vào công thức truy hồi ta có thể đưa ra Tam giác Stirling.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	$\boxed{90}$	65	15	1

Hình: Tam giác Stirling

Tam giác Stirling được xây dựng dựa vào quy tắc: **Chọn một phần tử bất kỳ, nhân phần tử đó với số đầu tiên của cột (k) và cộng với phần tử bên trái của phần tử đó, ta được phần tử nằm bên dưới, cùng cột với phần tử được chọn.**

Ví dụ

$S(5,3) = 25$.

Hệ quả

Cho các số nguyên dương k và n thỏa mãn $k \leq n$. Số các toàn ánh $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ là $k!S(n, k)$.

Chứng minh.

-Mỗi toàn ánh từ tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào tập hợp $\{1, 2, \ldots, k\}$ cho ta một phân hoạch của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ thành k tập con khác rỗng.
-Mỗi phân hoạch là một tập con các phần tử của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ có chung ảnh là một phần tử $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
-Với mỗi phân hoạch đó, ta có thể hoán vị các giá trị của tập hợp $\{1, 2, \ldots, k\}$ để cho ra tất cả $k!$ toàn ánh.
-Do đó số toàn ánh là $k!.S(n, k)$. $\square$

Hệ quả

Với mọi số nguyên không âm n và k ta có $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$, *với* $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$.

Chứng minh.

-Ta thấy vế trái là số ánh xạ đi từ tập $\{1, 2, \dots, n\}$ vào tập $\{1, 2, \dots, x\}$.
-Ta xét số ánh xạ đi từ tập $\{1, 2, \dots, n\}$ vào tập $\{1, 2, \dots, x\}$ có ảnh gồm k phần tử. Theo hệ quả trên thì số ánh xạ đó bằng $k!S(n,k)$. Hơn nữa, ta có $\binom{x}{k}$ cách chọn ra k phần tử từ tập x phần tử. Cho k nhận giá trị từ 0 đến n ta được tổng số ánh xạ từ $\{1, 2, \dots, n\}$ vào tập $\{1, 2, \dots, x\}$, bằng $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!\binom{x}{k} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$. Hệ quả được chứng minh. □

Ví dụ

Có bao nhiêu cách phân tích 7590 *thành tích của ba nhân tử lớn hơn* 1?

Ví dụ

Có bao nhiêu cách phân tích 7590 *thành tích của ba nhân tử lớn hơn* 1?

Lời giải.

Ta có

$$7590 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 23.$$

Số cách phân tích là số cách phân hoạch tập $\{2, 3, 5, 11, 23\}$ thành 3 tập con khác rỗng, bằng $S(5, 3) = 25$.

Ví dụ

Hãy viết đa thức x^3 thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức $1, x, x(x-1)$ *và* $x(x-1)(x-2)$.

Ví dụ

Có bao nhiêu cách phân tích 7590 *thành tích của ba nhân tử lớn hơn* 1?

Lời giải.
Ta có

$$7590 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 23.$$

Số cách phân tích là số cách phân hoạch tập $\{2, 3, 5, 11, 23\}$ thành 3 tập con khác rỗng, bằng $S(5, 3) = 25$.

Ví dụ

Hãy viết đa thức x^3 *thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức* $1, x, x(x-1)$ *và* $x(x-1)(x-2)$.

Đáp án. $x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$.

Ví dụ

Viết đa thức x^4 *thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức* $1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)$ *và* $x(x-1)(x-2)(x-3)$.

Số Bell

Định nghĩa

Số tất cả các phân hoạch của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ thành các tập con khác rỗng, ký hiệu là $B(n)$, và gọi là *số Bell thứ n*.

Quy ước: $B(0) = 1$. Ta dễ dàng thấy $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$.

Ví dụ

Các phân hoạch của tập $\{1, 2, 3\}$ *bao gồm* $\{1\} \cup \{2, 3\}$, $\{2\} \cup \{1, 3\}$, $\{3\} \cup \{1, 2\}$, $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$ *và* $\{1, 2, 3\}$. *Số phân hoạch của* $\{1, 2, 3\}$ *là* 5. *Vậy* $B(3) = 5$.

Định lý

Với mọi số nguyên không âm n,

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

Chứng minh.

Ta chứng minh vế phải là tổng các phân hoạch của $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.
- Xét một phân hoạch bất kỳ, giả sử phần tử $n+1$ nằm trong một tập con có số phần tử là $n-k+1$ với $k \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$. Ta có $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ cách để chọn các phần tử cùng tập với $n+1$. -Ta cũng có $B(k)$ cách để phân hoạch tập con gồm k phần tử còn lại của tập $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Cho k nhận giá trị lần lượt từ 0 đến n, ta được tổng phân hoạch $B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$. □

Tam giác Bell

Việc xây dựng tam giác Bell dựa vào một số quy tắc sau.

- *Dòng một chỉ chứa số 1. Dòng dưới có nhiều hơn một số so với dòng liền trước.*
- *Phần tử đầu tiên của mỗi dòng bằng phần tử cuối của dòng ngay trên nó.*
- *Phần tử khác phần tử đầu tiên của mỗi dòng được tính bằng tổng của phần tử bên trái và phần tử phía trên của phần tử bên trái đó.*
- *Phần tử cuối cùng của mỗi dòng là số Bell tương ứng với dòng đó.*

$\boxed{1}$					
1	$\boxed{2}$				
2	3	$\boxed{5}$			
5	7	10	$\boxed{15}$		
15	20	27	37	$\boxed{52}$	
52	67	87	114	151	$\boxed{203}$

Hình: Tam giác Bell

Ví dụ

Dựa vào tam giác Bell ta có thể tính được $B(7) = 877$ *và* $B(8) = 4140$.

Ví dụ

Có bao nhiêu cách phân hoạch 210 *thành tích các số nguyên lớn hơn* 1?

Ví dụ

Dựa vào tam giác Bell ta có thể tính được $B(7) = 877$ *và* $B(8) = 4140$.

Ví dụ

Có bao nhiêu cách phân hoạch 210 *thành tích các số nguyên lớn hơn* 1?

Lời giải. Ta có

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Số cách phân tích 210 là số phân hoạch của $\{2, 3, 5, 7\}$, bằng $B_4 = 15$.