Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1
Tuần 1

Ngày 15 tháng 1 năm 2024

Tập hợp

Tập hợp là một sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó, các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp đang xét.

+ Nếu x là một phần tử của tập hợp A, thì ta ký hiệu $x \in A$ và đọc là x *thuộc A*.
+ Nếu x không là một phần tử của tập hợp A, thì ta ký hiệu $x \notin A$ và đọc là x *không thuộc A*.
+ Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu $\emptyset$.

Để mô tả một tập hợp chúng ta thường dùng hai cách sau:

1. Liệt kê các phần tử của tập hợp đó
2. Chỉ ra tính chất mà các phần tử của tập hợp đó có và chỉ các phần tử đó mới có.

Các phép toán trên tập hợp

- **Hợp** hay **hội** của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A và tất cả các phần tử của B, kí hiệu $A \cup B$.
  Vậy $x \in A \cup B \iff (x \in A$ hoặc $x \in B)$.
- **Giao** của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A lại vừa thuộc B, kí hiệu $A \cap B$.
  Vậy $x \in A \cap B \iff (x \in A$ và $x \in B)$.
- **Hiệu** của tập A và tập B là tập gồm tất cả các phần tử của A mà không thuộc B, kí hiệu $A \backslash B$.
  Vậy $x \in A \backslash B \iff (x \in A$ và $x \notin B)$.
- **Tích** của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$, kí hiệu $A \times B$.
  Vậy $(x, y) \in A \times B \iff (x \in A$ và $y \in B)$.

Tập hợp các số thực

Tập hợp tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi là tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.
Mối quan hệ giữa các tập hợp $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Ta nói A bị chặn trên nếu có số thực α sao cho $a \leq \alpha$ với mọi $a \in A$.
- Ta nói A bị chặn dưới nếu có số thực β sao cho $b \geq \beta$ với mọi $b \in A$.
- Một tập vừa bị chặn dưới vừa bị chặn trên gọi là bị chặn.
- Nếu có phần tử $\alpha \in A$ và là một chặn trên của A, thì α được gọi là phần tử lớn nhất của tập A, được kí hiệu là $\alpha = \max A$.
- Nếu có phần tử $\beta \in A$ và là một chặn dưới của A, thì β được gọi là phần tử nhỏ nhất của tập A, được kí hiệu là $\beta = \min A$.

Ánh xạ

Ánh xạ là một khái niệm về quan hệ giữa các tập hợp, cho tương ứng giữa phần tử của tập hợp này với phần tử của tập hợp khác.
Một ánh xạ f từ tập X (tập xác định) đến tập Y (tập giá trị) là quy tắc liên kết mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$, kí hiệu

$$\begin{array}{cccccc} f & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Hàm số

Các ánh xạ từ một tập con của tập hợp các số thực vào tập hợp các số thực thường được gọi là các hàm số.

Khái niệm hàm số

Hàm số f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc một tập hợp D với một và chỉ một phần tử, kí hiệu $f(x)$, thuộc một tập hợp E.

D: tập xác định, E: tập giá trị.

Bài tập về xác định tập xác định và tập giá trị của hàm số

- Hàm không căn và không chứa mẫu
- Hàm chứa ẩn dưới mẫu
- Hàm số chứa ẩn trong căn bậc chẵn (căn không dưới mẫu / căn dưới mẫu)
- ...

Hàm số cơ bản

- Hàm đa thức
- Hàm lũy thừa
- Hàm hữu tỷ
- Hàm đại số
- Hàm lượng giác
- Hàm mũ
- Hàm Logarit

Kết hợp hàm số

- Hàm tổng: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Hàm hiệu: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Hàm tích: $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- Hàm thương: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- Hàm hợp: $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$
  Lưu ý. $f \circ g \neq g \circ f$.

Bài tập

Bài 1. Tìm tập xác định và vẽ đồ thị của hàm số

a. $f(x) = 2 - 0.4x$

b. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

c. $g(x) = \sqrt{x-5}$

d. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

e. $g(x) = |x| - x$

f. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 1 - x & x \geq 0 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x, & x \leq 2 \\ 2x - 5 & x > 2 \end{cases}$

h. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1 \\ x^2 & x > -1 \end{cases}$

Bài tập

Bài 2. Xác định hàm số có đồ thị là đường cho trước.

a. Đoạn thẳng nối hai điểm $(1, -3)$ và $(5, 7)$.

b. Đoạn thẳng nối hai điểm $(-5, 10)$ và $(7, -10)$.

c. Nửa dưới của parabol $x + (y-1)^2 = 0$.

d. Nửa trên của đường tròn $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

Bài tập

Bài 3. Xác định các hàm số sau đây là hàm lũy thừa, hàm căn, hàm đa thức, hàm hữu tỷ, hàm đại số, hàm lượng giác, hàm mũ hay hàm logarit.

$(a).\ f(x) = \log_2 x$ $\qquad (b).\ g(x) = \sqrt[4]{x}$

$(c).\ h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ $\qquad (d).\ u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

$(e).\ v(t) = 5^t$ $\qquad (f).\ w(\theta) = \sin\theta\cos^2\theta$

Bài 4. Tìm các hàm số $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ và $g \circ g$. Tìm tập xác định của các hàm số trên.

$$f(x) = 1 - 3x \qquad g(x) = \cos x$$

Ánh xạ

Một ánh xạ f từ tập X (tập xác định) đến tập Y (tập giá trị) là quy tắc liên kết mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$, kí hiệu

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

- Một ánh xạ là một đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau có hai ảnh khác nhau. Bằng kí hiệu,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{nếu } \ x_1 \neq x_2 \text{ thì } \ f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Một ánh xạ là một toàn ánh nếu mọi phần tử của tập đích đều là ảnh. Bằng kí hiệu thì $f : X \to Y$ là toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$; hay nói cách khác, $f(X) = Y$.
- Một ánh xạ là một song ánh nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.

Bài tập ánh xạ

Bài 5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Hàm f có là đơn ánh, toàn ánh hay là song ánh hay không?

Bài 6. Cho $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Hàm f có là đơn ánh hay không?

Bài 7. f có đơn ánh, toàn ánh không?. Giải thích.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $f(x) = 2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ được định nghĩa bởi $f(n) = n^2 + n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $f(x) = 2x^2 + 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

d. Cho $A = \mathbb{R}\backslash\{3\}, B = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. $f : A \to B$ được định nghĩa bởi $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$.