Vi tích phân 2B

T.S. Nguyễn Thị Hoài Thương vs TS. Lê Ánh Hạ

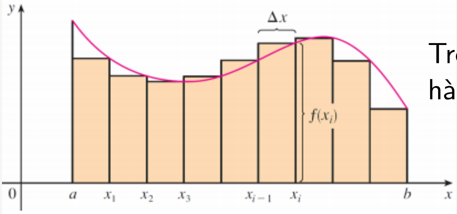
Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM
Khoa Toán Tin-học
Bộ môn Giải tích

ngththuong@hcmus.edu.vn

Ngày 19 tháng 5 năm 2022

Tích phân của hàm hai biến (tích phân kép)

Nhắc lại bài toán diện tích



Trong Vi tích phân B1, xét đồ thị của hàm f như hình bên, trong đó

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0, ..., n.$$

Diện tích hình phẳng trên được xấp xỉ bởi tổng các diện tích hình chữ nhật theo ba cách

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

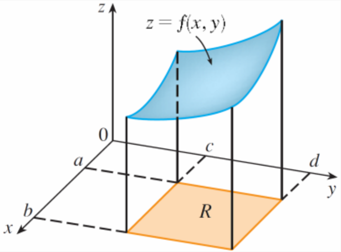
Nhắc lại bài toán diện tích

- Nếu tồn tại giới hạn sau, không phụ thuộc vào cách chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

  thì giá trị của giới hạn trên được lấy làm số đo diện tích của hình phẳng nói trên.
- Ghi chú: Người ta có thể chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con có độ dài Δx_i không đều nhau, miễn là trong giới hạn trên, khi $n \to \infty$ thì độ dài mỗi đoạn con tiến dần về 0.
- Ta có định lí phát biểu rằng giới hạn trên sẽ tồn tại khi f liên tục.

Đo thể tích



Hình bên là đồ thị của một hàm số f dương, xác định trên hình chữ nhật

$$R = [a, b] \times [c, d]$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b \text{ và } c \le y \le d\right\}.$$

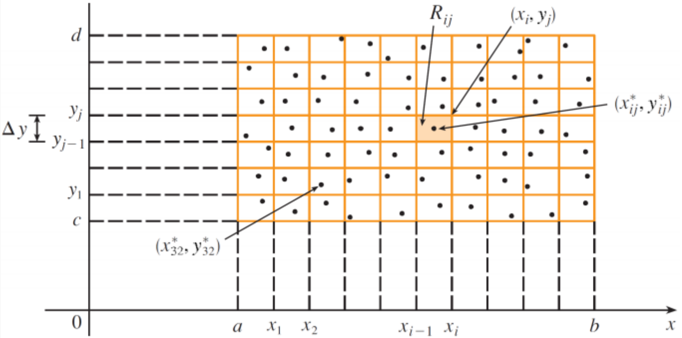
Đồ thị là mặt cong có phương trình $z = f(x, y)$.

Gọi S là khối nằm dưới đồ thị của f và nằm trên hình chữ nhật R

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le z \le f(x, y), (x, y) \in R\right\}.$$

Cách đo thể tích của khối S tương tự phương pháp của diện tích.

Xấp xỉ thể tích



Chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ đều nhau với độ dài $\Delta x = (b-a)/m$. Chia đoạn $[c, d]$ thành n đoạn con $[y_{j-1}, y_j]$ đều nhau với độ dài $\Delta y = (d-c)/n$. Như vây, ta có $m \times n$ hình chữ nhật con có dạng

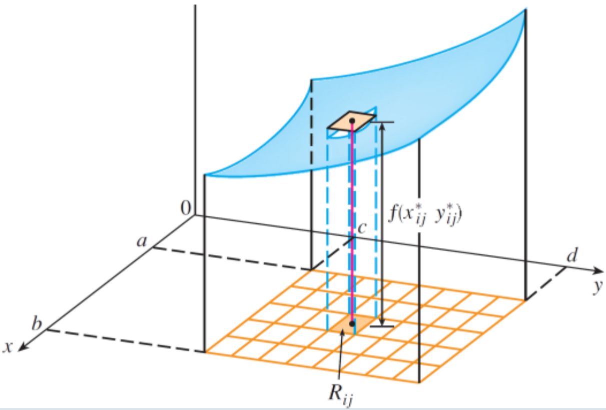
$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

với diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Xấp xỉ thể tích

Trên mỗi ô con R_{ij} chọn một điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) ngẫu nhiên. Ta có thể xấp xỉ một phần thể tích của khối S nằm phía trên ô con R_{ij} bằng thể tích cột dạng hộp có đáy R_{ij} và chiều cao bằng $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. Thể tích này bằng

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

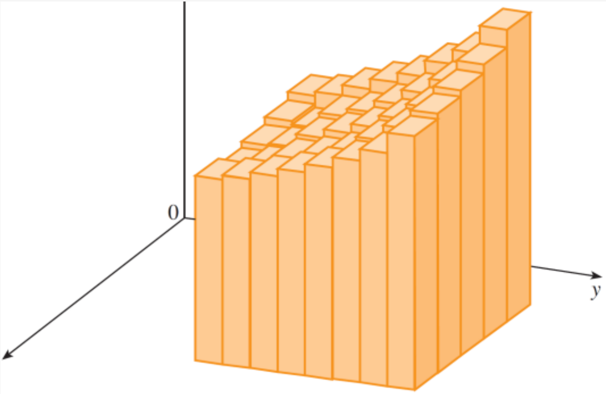


Xấp xỉ thể tích

Khi đó, thể tích toàn khối S được xấp xỉ bởi

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

và được gọi là tổng Riemann của f trên hình chữ nhật R.



Định nghĩa tích phân kép

- Nếu hàm số f liên tục, dương thì thể tích khối S được định nghĩa là

$$V(K) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

- Nếu hàm số f liên tục và không nhất thiết dương thì giới hạn trên được kí hiệu là

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

và được gọi là *tích phân kép* của f trên hình chữ nhật R.

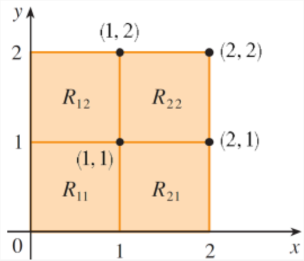
Định nghĩa tích phân kép

Ví dụ

Hãy ước tính thể tích khối nằm trên hình vuông $R = [0, 2] \times [0, 2]$ và nằm dưới mặt $z = 16 - x^2 - y^2$, bằng cách chia thành bốn hình vuông nhỏ và chọn điểm mẫu là góc trên bên phải của mỗi hình vuông con R_{ij}. Phác họa khối đó và các hộp chữ nhật để tính xấp xỉ.

Định nghĩa tích phân kép

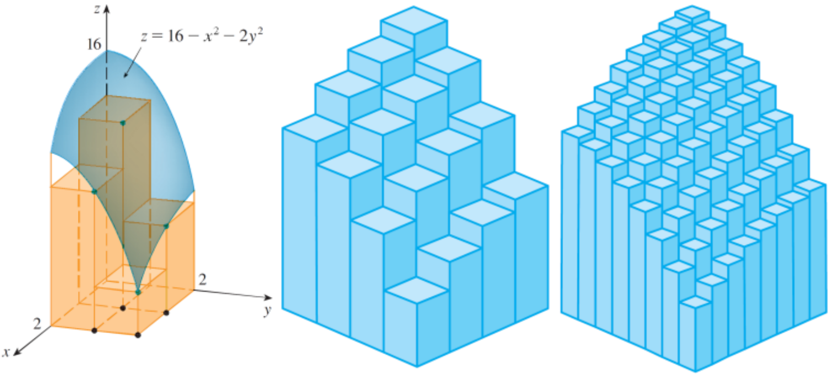
Giải: Yêu cầu của phép xấp xỉ ứng với $m = n = 2, \Delta A = 1$ và được phác họa như sau



Ta có

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\Delta A \\
&= f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A \\
&= 13 \times 1 + 7 \times 1 + 10 \times 1 + 4 \times 1 = 34.
\end{aligned}
$$

Định nghĩa tích phân kép



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$

Ta thấy rằng nếu m, n càng lớn thì phép xấp xỉ càng chính xác.

Quy tắc trung điểm: xấp xỉ tích phân

Tổng Riemann dùng để xấp xỉ tích phân với điểm mẫu $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ tùy ý. Có nhiều cách chọn điểm mẫu cho thuận tiện, trong đó có quy tắc sau đây

Quy tắc trung điểm của tích phân kép

$$\int\int_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta A$$

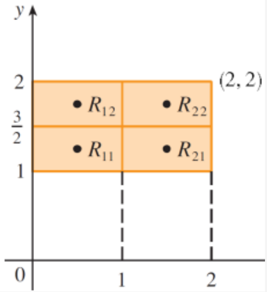
trong đó $\overline{x}_i$ là trung điểm đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ và $\overline{y}_j$ là trung điểm của đoạn $[y_{j-1}, y_j]$. Nói cách khác, $(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$ là tâm của hình chữ nhật con R_{ij}.

Quy tắc trung điểm: xấp xỉ tích phân

Ví dụ

Dùng quy tắc trung điểm với $m = n = 2$, hãy xấp xỉ giá trị của $\int\int_R (x - 3y^2)dA$, trong đó $R = [0, 2] \times [1, 2]$.

Giải:



Diện tích của mỗi hình chữ nhật con là $\Delta A = 1/2$.

Quy tắc trung điểm: xấp xỉ tích phân

Theo quy tắc trung điểm thì

$$
\begin{aligned}
\int\int_R (x-3y^2)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\overline{x}_i,\overline{y}_j)\Delta A \\
&= \Delta A\left[f(\overline{x}_1,\overline{y}_1), f(\overline{x}_1,\overline{y}_2), f(\overline{x}_2,\overline{y}_1), f(\overline{x}_2,\overline{y}_2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{67}{16}\right)+\left(-\frac{139}{16}\right)+\left(-\frac{51}{16}\right)+\left(-\frac{123}{16}\right)\right] \quad =
\end{aligned}
$$

Vì vậy, $\displaystyle\int\int_R (x-3y^2)dA \approx -11.875.$

Giá trị trung bình

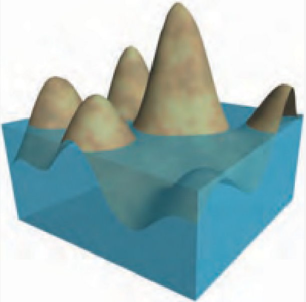
Định nghĩa

Giá trị trung bình (the average value) của hàm f hai biến được định nghĩa là

$$f_{ave} = \frac{1}{A(R)} \int\int_R f(x,y)dA$$

trong đó $A(R)$ là diện tích của R.

Giá trị trung bình



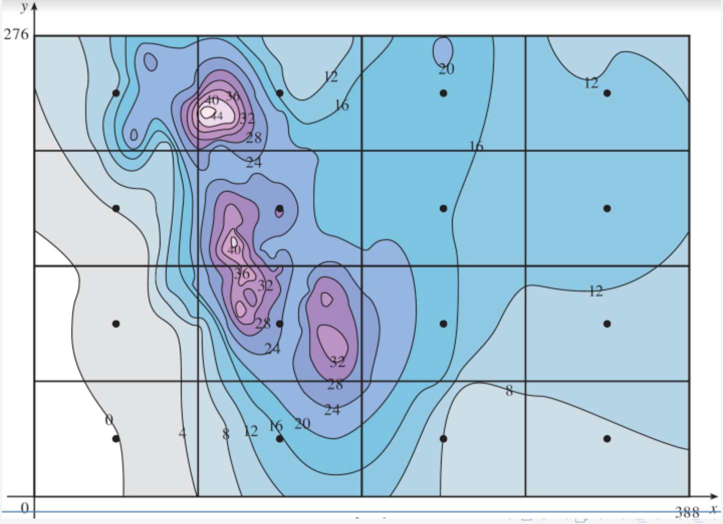
Hình trên nói rằng nếu $z = f(x, y) \geq 0$ mô tả bề mặt địa hình thì ta có thể cắt bỏ các chỏm đồi tại độ cao f_{ave} và dùng đất dư để lấp các thung lũng thì ta được một vùng an toàn bằng phẳng có độ cao f_{ave}.

Định lí

Nếu hàm số f liên tục trên R thì tồn tại $(\xi, \eta) \in R$ sao cho $f(\xi, \eta) = f_{ave}$.

Giá trị trung bình

Ví dụ: Cho một contour map biểu thị độ dày (đơn vị inch) của tuyết phủ ở bang Colorado trong hai ngày 20 và 21 tháng 12 năm 2006 như sau



Giá trị trung bình

Bang này có hình chữ nhật, từ Tây sang Đông là 388 dặm, từ Nam lên Bắc là 276 dặm. Hãy ước tính độ dày trung bình của tuyết phủ trên toàn bang.

Giải:

- Lấy góc Tây Nam của bang làm gốc tọa độ thì bang Colorado được biểu thị bởi hình chữ nhật $R = [0, 388] \times [0, 276]$.
- Đặt $f(x, y)$ là độ dày tuyết phủ tại vị trí sang Đông x dặm và lên Bắc y dặm tính từ gốc.
- Khi đó, độ dày trung bình của tuyết phủ toàn bang là

$$f_{ave} = \frac{1}{A(R)} \int\int_R f(x, y) dA$$

  trong đó: $A(R) = 388 \times 276 = 107088$ dặm vuông.
- Để ước tính giá trị của tích phân kép ở trên, ta dùng quy tắc trung điểm với $m = n = 4$, nghĩa là chia bang Colorado thành 16 hình chữ nhật đều nhau, với diện tích mỗi hình là

$$\Delta A = \frac{1}{16} \times A(R) = 6693 \text{ dặm vuông.}$$

Giá trị trung bình

Contour map cho ta ước đoán giá trị của f cho ta đoán giá trị của f tại mỗi tâm hình chữ nhật con. Do đó

$$f_{ave} = \frac{1}{A(R)} \int\int_R f(x,y)dA \approx \frac{1}{A(R)} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta A$$

$$\approx \frac{6693}{107088} (0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18.5 + 11 + 4.5$$

$$+28 + 17 + 13.5 + 12 + 15 + 17.5 + 13)$$

$$\approx 12.9 \text{ inches.}$$

Tính chất của tích phân kép

Giả sử các tích phân sau tồn tại. Khi đó

1. $\displaystyle\int\int_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \int\int_R f(x,y)dA + \int\int_R g(x,y)dA.$
2. $\displaystyle\int\int_R cf(x,y)dA = c\int\int_R f(x,y)dA.$
3. Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in R$ thì

$$\int\int_R f(x,y)dA \geq \int\int_R g(x,y)dA.$$

Tính chất 1,2 được gọi là tính chất tuyến tính của tích phân kép.

Tính chất của tích phân kép

Định lí (Định lí Fubini)

Giả sử f là hàm số liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$. Khi đó

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \tag{1.1}$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy. \tag{1.2}$$

Vế phải của (1.1) và (1.2) được gọi là tích phân lặp, nghĩa là lấy tích phân theo từng biến

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Tính chất của tích phân kép

Ví dụ

Tính tích phân kép $\displaystyle\iint_R (x-3y^2)dA$ với $R=\{(x,y)|0\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

Giải: Áp dụng định lí Fubini, ta có

- Cách 1: Lấy tích phân theo biến y trước

$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)dydx = \int_0^2 (xy-y^3)|_{y=1}^{y=2}dx$$
$$= \int_0^2 (x-7)dx = \left(\frac{x^2}{2}-7x\right)\Big|_0^2 = -12.$$

- Cách 2: Lấy tích phân theo biến x trước

$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}-3xy^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2}$$
$$= \int_1^2 (2-6y^2)dy = (2y-3y^3)|_1^2 = -12.$$

Tính chất của tích phân kép

Bài tập

Làm bài tập mục 3.1.1 của file bài tập.

Tính chất của tích phân kép

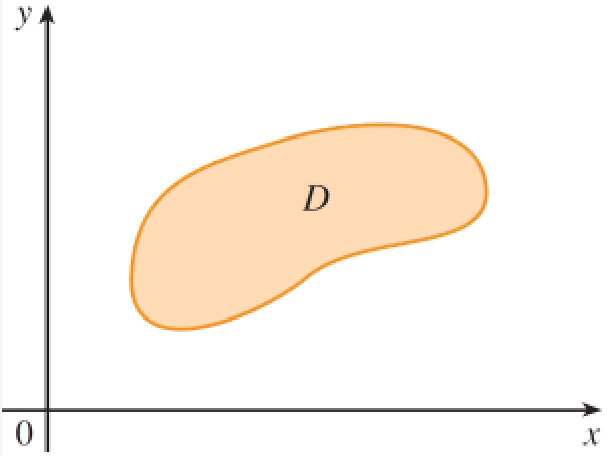
Trường hợp đặc biệt, hàm số $f(x, y)$ có dạng tách biến, $f(x, y) = g(x)h(y)$, trong đó g và h là hai hàm số một biến. Khi đó, định lí Fubini có dạng

$$\int\int_R f(x, y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$$

với $R = [a, b] \times [c, d]$.

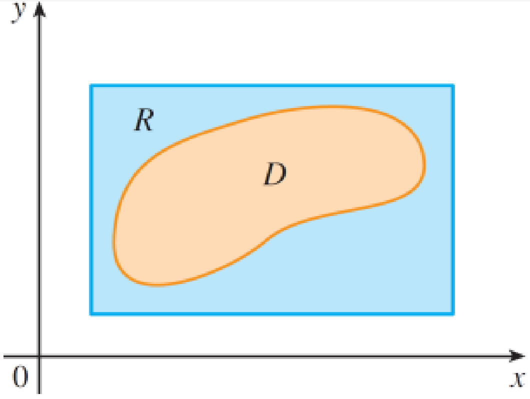
Tích phân kép trên một miền tổng quát

Ở phần trước, chúng ta tính tích phân kép trên hình chữ nhật. Bây giờ, chúng ta sẽ tính tích phân kép trên một miền D có dạng tổng quát hơn, bị chặn, như hình sau



Tích phân kép trên một miền tổng quát

Ta chọn một hình chữ nhật R bao quanh miền D

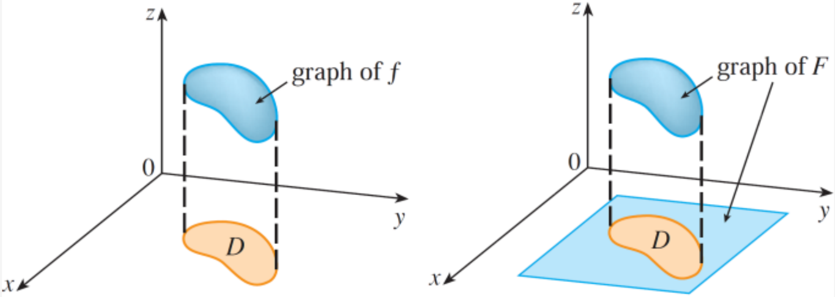


và đưa ra hàm mới F xác định trên R

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Tích phân kép trên một miền tổng quát

Đồ thị của f và của F được minh họa như sau



Nếu F khả tích trên R thì ta định nghĩa tích phân kép của f trên D như sau

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA.$$

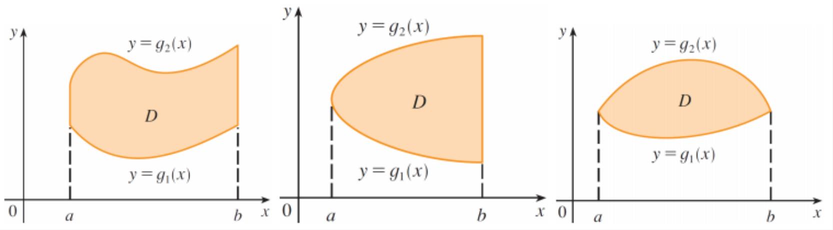
Áp dụng định lí Fubini

Để tính tích phân kép trên miền D không phải là hình chữ nhật, ta có thể áp dụng định lí Fubini cho các trường hợp của miền D như sau:

- Miền D được gọi là lồi theo phương Oy, hoặc là đơn giản theo phương Oy, nếu D nằm giữa hai đồ thị của hai hàm số theo x

$$D = \{(x, y) | x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Sau đây là vài hình ảnh cho miền lồi theo phương Oy

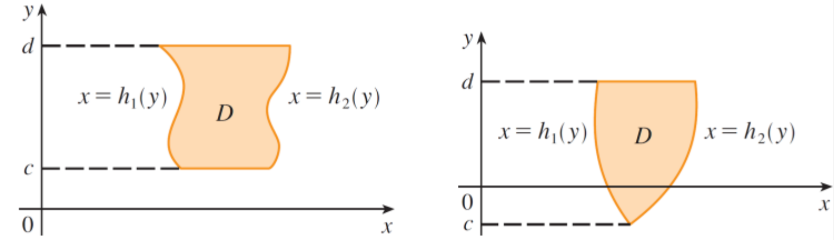


Áp dụng định lí Fubini

- Miền D được gọi là lồi theo phương Ox, hoặc là đơn giản theo phương Ox, nếu D nằm giữa hai đồ thị của hai hàm số theo biến y

$$D = \{(x, y) | y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Sau đây là hình minh họa cho miền **lồi theo Ox**



Áp dụng định lí Fubini

Định lí Fubini

Cho hàm số f khả tích trên miền D

- Nếu $D = \{(x,y)|x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(y)\}$ (D lồi theo phương Oy) thì

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

  miễn là tích phân lặp ở trên tồn tại.

- Nếu $D = \{(x,y)|y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ (D lồi theo phương Ox) thì

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

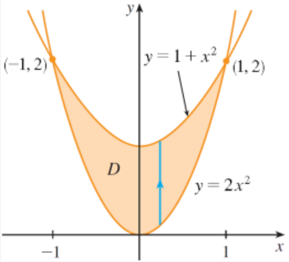
  miễn là tích phân lặp ở trên tồn tại.

Áp dụng định lí Fubini

Ví dụ

Tính $\displaystyle\int\int_D (x+2y)dA$, trong đó D bị bao bởi hai parabol: $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Giải: Giao điểm hai parabol là $(-1, 2)$ và $(1, 2)$



Do đó D có dạng

$$D = \{(x, y)|x \in [-1, 1], 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$

Áp dụng định lí Fubini

Áp dụng định lí Fubini, ta có

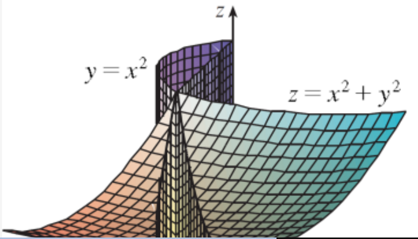
$$
\begin{aligned}
\int\int_D (x+2y)dA &= \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)dydx \\
&= \int_{-1}^{1}(xy+y^2)\big|_{y=2x^2}^{y=1+x^2}dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(-3x^4-x^3+2x^2+x+1\right)dx \\
&= \left(-\frac{3}{5}x^5-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{32}{15}.
\end{aligned}
$$

Tích phân kép trên miền tổng quát

Lưu ý: Khi tính tích phân kép thông qua tích phân lặp, điều chủ yếu là vẽ sơ đồ mũi tên để biểu diễn miền lấy tích phân dưới dạng lồi theo một phương, giống như trong hình của ví dụ trước. Nó giúp ta xác định cận dưới và trên của tích phân lặp.

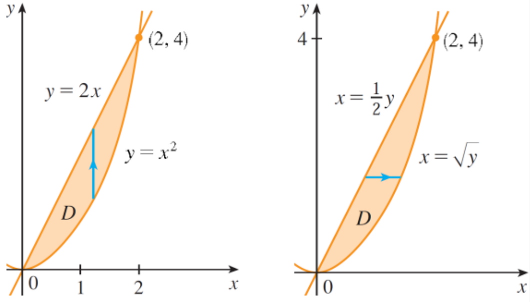
Ví dụ

Tìm thể tích của miền nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và nằm trên miền D trong mặt phẳng xy bị bao bởi hai đường $y = 2x$ và $y = x^2$.



Tích phân kép trên miền tổng quát

Với hai sơ đồ mũi tên trong miền D dưới đây:



thì ta có hai cách biểu diễn D lồi theo phương Oy hoặc Ox:

$$D = \left\{(x, y)|x \in [0, 2], x^2 \leq y \leq 2x\right\}$$
$$D = \{(x, y)|y \in [0, 4], y/2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Tích phân kép trên miền tổng quát

Do đó, thể tích V của khối nằm dưới mặt $z = x^2 + y^2$ nà nằm trên D được tính theo hai cách

- **Cách 1:**

$$V = \int\int_D (x^2+y^2)dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy\,dx$$
$$= \int_0^2 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right)\Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx = \frac{216}{35}.$$

- **Cách 2:**

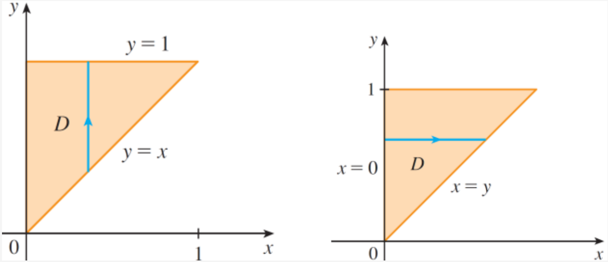
$$V = \int\int_D (x^2+y^2)dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx\,dy$$
$$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right)\Big|_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{216}{35}.$$

Tích phân kép trên miền tổng quát

Ví dụ

Tính tích phân lặp $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dy\,dx$

Giải: Nếu tính tích phân theo biến y trước thì bất khả thi, vì ta không tìm được nguyên hàm. Do đó, ta dùng định lí Fubini cho tích phân kép trên miền D như hình dưới



Tích phân kép trên miền tổng quát

và ta có:

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy\, dx = \int\int_D \sin(y^2) dA = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx\, dy$$
$$= \int_0^1 y \sin(y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(t) dt \text{ (đổi biến } t = y^2)$$
$$= -\frac{1}{2} \cos(t) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(1).$$

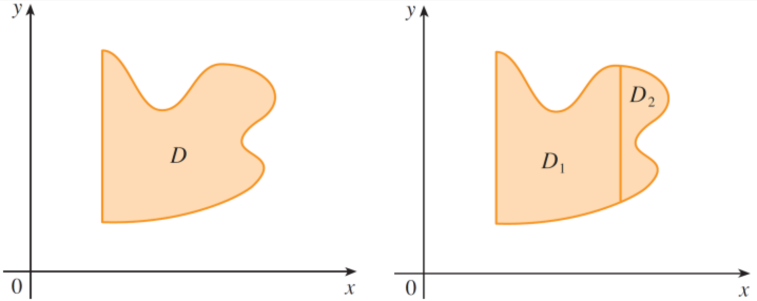
Tích phân kép trên miền tổng quát

Nếu D_1 và D_2 không "giẫm đè" lên nhau, ngoại trừ có thể dính nhau trên biên thì

$$\int\int_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA. \tag{1.3}$$

Tính chất (1.3) được dùng khi D không có dạng lồi theo phương nào. Trong trường hợp đó ta có thể chia D thành nhiều miền, mỗi miền lồi theo một phương Ox hoặc Oy. Trong trường hợp đó ta có thể chia D thành nhiều miền, mỗi miền lồi theo một phương Ox hoặc Oy

Tích phân kép trên miền tổng quát



Miền D trong hình trên không lồi theo phương nào, khi chia ra thì miền D_1 lồi theo Oy, miền D_2 lồi theo Ox.

Bài tập

Bài tập

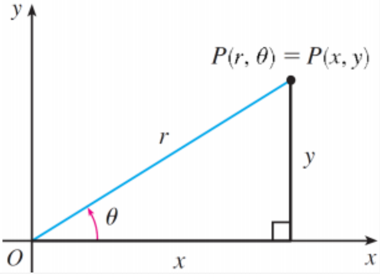
Làm bài tập mục 3.1.3 của file bài tập.

Tích phân kép trong tọa độ cực

Với mỗi điểm $P(x, y)$ trong mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy, ta đặt

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \measuredangle\left(\vec{\mathbf{i}}, \overrightarrow{OP}\right)$$

thì $x = r\cos(\theta)$ và $y = r\sin(\theta)$. Cặp số (r, θ) được gọi là tọa độ cực của điểm P.



Quy ước

Trong tọa độ cực, điểm $(-r, \theta)$ đối xứng với điểm (r, θ) qua gốc $\mathrm{O}(0, 0)$.

Tích phân kép trong tọa độ cực

Vậy một tập hợp D trong mặt phẳng Descartes có dạng

$$D = \Big\{(x, y)|x \text{ và } y \text{ thỏa tính chất (T) nào đó}\Big\}$$

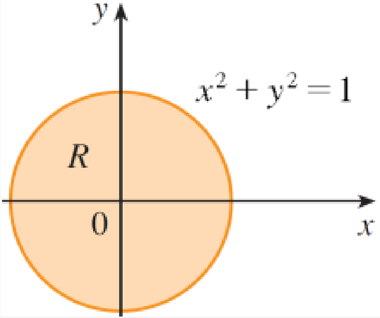
có thể được viết dưới dạng tọa độ cực như sau

$$D = \Big\{(r, \theta)|r \text{ và } \theta \text{ thỏa tính chất ``tương đồng'' với (T)}\Big\}.$$

Ví dụ về tọa độ cực

- Miền R trong hình ở bên dưới có thể viết theo ba dạng sau

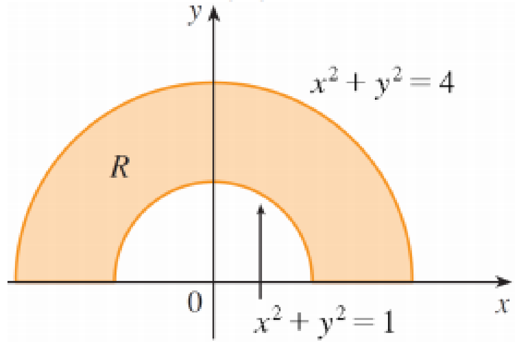
$$R = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$$
$$R = \{(x,y)|x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), (r,\theta) \in [0,1]\times[0,2\pi]\}$$
$$R = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



Ví dụ về tọa độ cực

- Trong hình bên dưới, miền R được viết dưới dạng

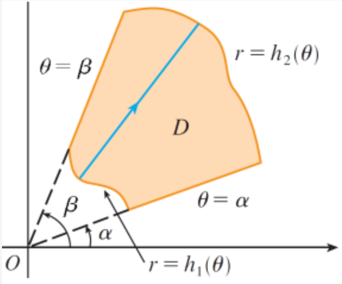
$$R = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$
$$R = \{(x, y) | x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), (r, \theta) \in [1, 2] \times [0, \pi]\}$$
$$R = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình quạt

$$D = \{(r,\theta) | \theta \in [\alpha,\beta], h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\} \quad (1.4)$$



Công thức đổi biến tích phân theo tọa độ cực

Nếu hàm số hai biến f liên tục trên một miền D được biểu diễn theo dạng tọa độ cực như (1.4) thì

$$\iint_D f(x,y)dA$$

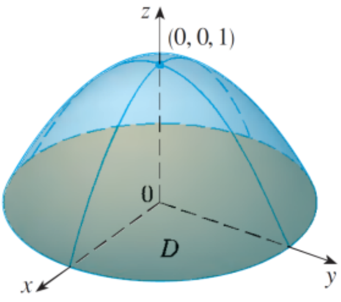
$$= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr\, d\theta.$$

Ví dụ

Tìm thể tích của khối bị bao bởi mặt $z = 0$ và paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$

Giải:
Mặt $z = 0$ cắt paraboloid tạo thành hình tròn $D : x^2 + y^2 \leq 1$, có biểu diễn tọa độ cực là $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Do đó, thể tích khối là

$$V = \int\int_D (1 - x^2 - y^2) dA$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr\, d\theta$$
$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$



Tích phân kép trong tọa độ cực

Ví dụ

Tìm diện tích một cánh hoa bởi đường cong hình hoa 4 cánh có phương trình $r = \cos(2\theta)$ (Xem hình).

Giải:

Ta thấy miền D có dạng tọa độ cực

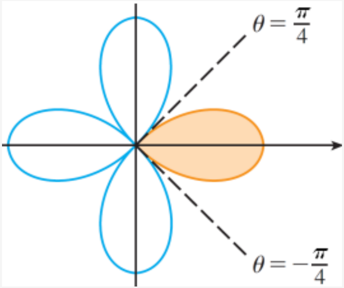
$$D = \left\{(r,\theta)|\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], 0 \le r \le \cos(2\theta)\right\}$$

Do đó, diện tích một cánh hoa là

$$A(D) = \int\int_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos(2\theta)} r dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}r^2\right)\Big|_0^{\cos(2\theta)} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

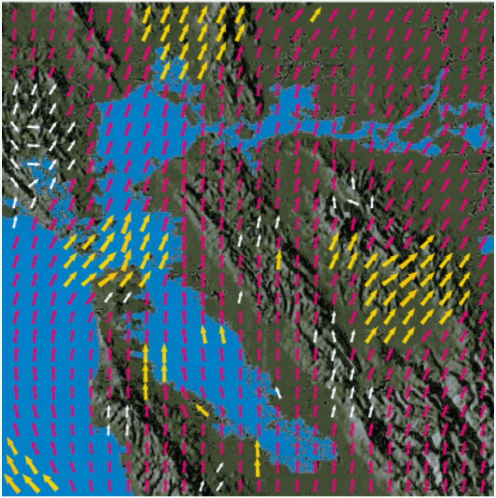


Bài tập

Làm bài tập mục 3.1.4 của file bài tập.

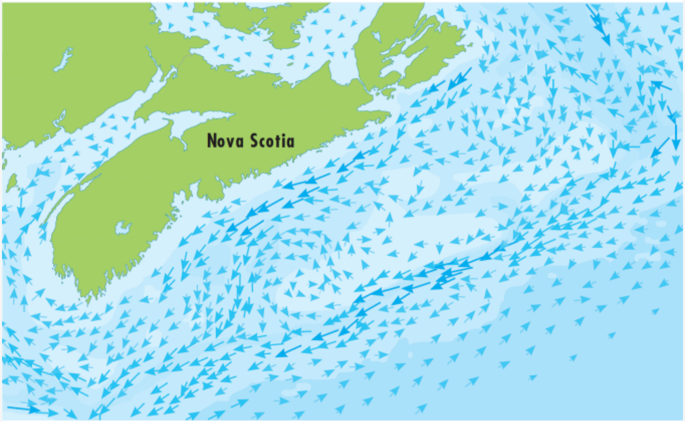
Tích phân đường loại 1

Trường vectơ



Trường vectơ vân tốc, biểu thị hướng và độ lớn của gió ở San Francisco Bay, 2:00, Feb, 21,2007

Trường vectơ



Trường vectơ vân tốc, biểu thị các dòng hải lưu quanh bờ biển Nova Scotia.

Định nghĩa

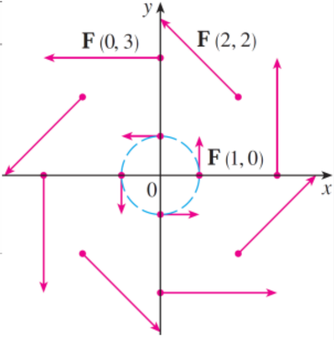
- D là một tập trong $\mathbb{R}^2$ (miền phẳng). Một trường vectơ trên D là một hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ gán mỗi điểm $(x, y) \in D$ với một vectơ hai chiều $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y)$.
- E là một tập trong $\mathbb{R}^3$. Một trường vectơ trên E là một hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ gán mỗi điểm $(x, y, z) \in E$ với một vectơ 3 chiều $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z)$.

Ví dụ

Phác họa trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y) = -y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

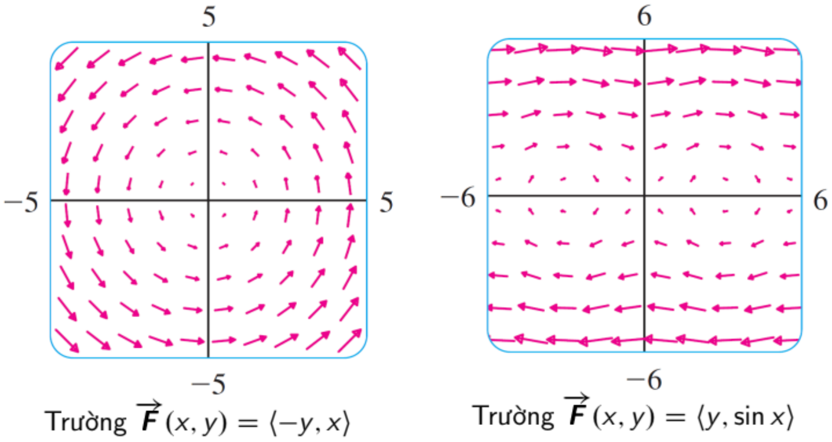
Giải: Ta lập bảng giá trị và vẽ vài vectơ

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

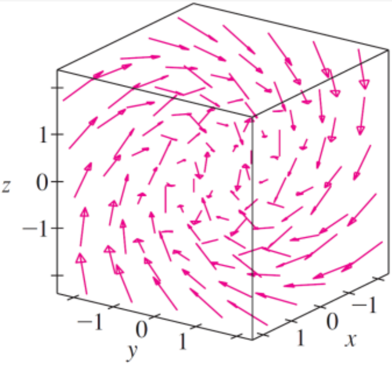


Trường vectơ

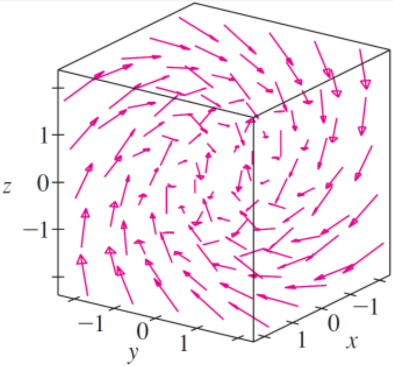
Sau đây thêm vài ví dụ về trường vectơ



Trường vectơ



Trường $\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + z\,\vec{x}$



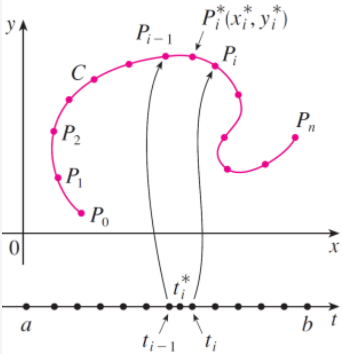
Trường $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, -2, x \rangle$

Tích phân đường loại 1

Cho đường cong C có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2.1)$$

hoặc phương trình vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ và giả sử C là trơn (nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) = x'(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y'(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ liên tục và $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$)



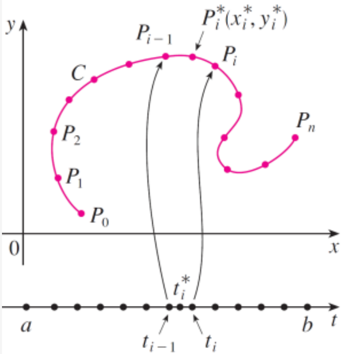
Nếu ta chia đoạn tham số $[a, b]$ thành n đoạn con $[t_{i-1}, t_i]$ có độ dài bằng nhau và đặt $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i)$ thì các điểm $P(x_i, y_i)$ chia C thành n cung có độ dài $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$. Chọn điểm tùy ý $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ (tương ứng với tham số $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$).

Tích phân đường loại 1

Cho đường cong C có phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2.1)$$

hoặc phương trình vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ và giả sử C là trơn (nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) = x'(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y'(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ liên tục và $\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$)



Nếu ta chia đoạn tham số $[a, b]$ thành n đoạn con $[t_{i-1}, t_i]$ có độ dài bằng nhau và đặt $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i)$ thì các điểm $P(x_i, y_i)$ chia C thành n cung có độ dài $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$. Chọn điểm tùy ý $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ (tương ứng với tham số $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$). Giả sử một hàm số hai biến f xác định trên C thì tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$ tương tự tổng Riemann của hàm số một biến.

Tích phân đường loại 1

Định nghĩa

Giả sử f là hàm số hai biến, xác định trên đường cong C cho bởi (2.1). Ta định nghĩa tích phân đường của f dọc theo C là

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

miễn là giới hạn tồn tại.

Điều kiện đủ để giới hạn tồn tại là hàm f liên tục. Khi đó, tích phân đường được tính theo công thức

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)ds &= \int_a^b f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right| dt \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.\end{aligned} \tag{2.2}$$

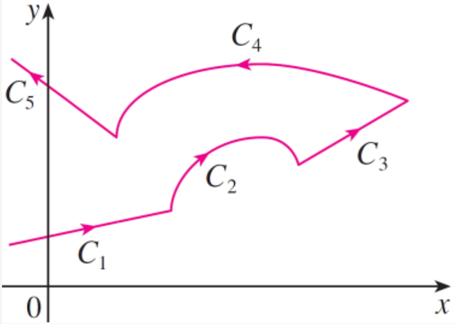
Tích phân đường loại 1

Nếu f là hàm số 3 biến xác định trên đường cong $C - 3-$chiều, trơn từng khúc, biểu diễn bởi $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{y(t)\mathbf{j} + z(t)\overrightarrow{\mathbf{k}}}, a \le t \le b$, thì tích phân đường của f dọc theo C cũng được định nghĩa tương tự.
Hơn nữa, nếu f liên tục thì ta cũng có công thức

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right| dt$$

$$= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt. \quad (2.3)$$

Tích phân đường loại 1



Nếu C là đường cong trơn từng khúc, nghĩa là C là hợp của hữu hạn đường cong trơn, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, trong đó điểm cuối của C_{i-1} là điểm đầu của C_i, thì ta định nghĩa

$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f ds.$$

Tích phân đường loại 1

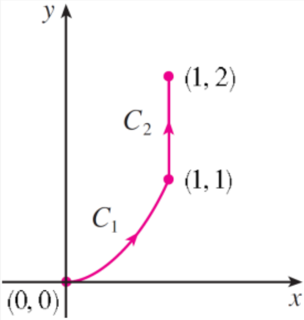
Ví dụ

Tính $\int_C 2x\,ds$, trong đó C bao gồm cung C_1 của parabola $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$, được nối tiếp sau đó đoạn thẳng C_2 từ $(1,1)$ đến $(1,2)$.

Giải:

Ta có $C_1 : x = x, y = x^2, 0 \le x \le 1$. Do đó:

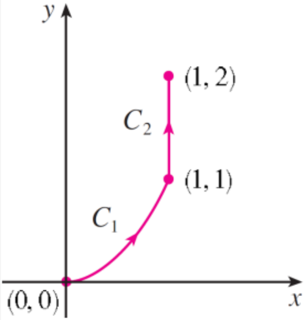
$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$
$$= \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{t}dt = \frac{1}{6}t^{3/2}\Big|_1^5$$
$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}.$$



Tích phân đường loại 1

Tương tự, $C_2 : x = 1, y = y, 1 \le y \le 2$ và

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2 \times 1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2} dx$$
$$= \int_1^2 2\sqrt{0^2 + 1^2} dy = 2.$$

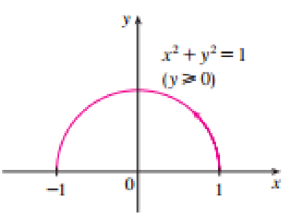


Vậy

$$\int_C 2x\,ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2 = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{6}.$$

Ví dụ

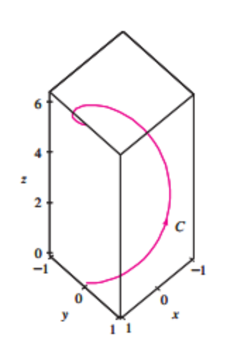
Tính $\int_C (2 + x^2 y)ds$ với C là đường tròn trên tâm $(0, 0)$, bán kính 1.



Tích phân đường loại 1

Ví dụ

Tính $\int_C y\sin(z)ds$ với C là đường cong định được nghĩa sau:
$x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t), z(t) = t, 0 \le t \le \pi$



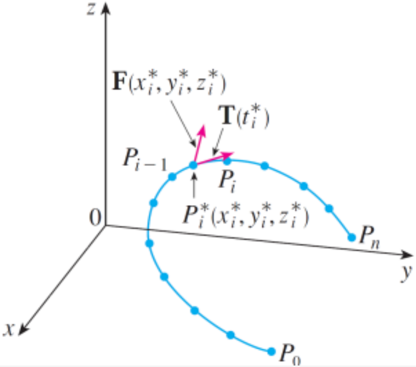
Tích phân đường loại 1

Bài tập

Làm bài tập mục 4.1.3 của file bài tập.

Tích phân đường loại 2

Nhắc lại, lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ tác động vào vật dịch chuyển từ A đến B thì công của lực trên đoạn đường đó là $W = \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{AB}$.



Giả sử, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}} + R\overrightarrow{\mathbf{k}}$ là một trường vectơ lực 3 chiều, ví dụ như trường hấp dẫn (2 chiều ứng với $R = 0$). Để tính công của trường lực này tác động vào một chất điểm dịch chuyển trên đường cong trơn C, 3-chiều, ta chia C thành nhiều cung nhỏ $P_{i-1}P_i$ có độ dài Δs_i, bằng cách chia đều đoạn tham số $[a, b]$ thành nhiều đoạn con.

Trên cung nhỏ thứ i, ta chọn điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ tương ứng với giá trị t_i^* của tham số. Lộ trình trên cung từ P_{i-1} đến P_i xấp xỉ với đoạn thẳng dài Δs_i, theo hướng của $\overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)$, vectơ tiếp tuyến đơn vị của C tại điểm P_i^*.

Tích phân đường loại 2

Do đó, công của lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ tác động vào chất điểm di chuyển trên cung $P_{i-1}P_i$ được xấp xỉ bằng

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \left[\Delta s_i \overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)\right] \Delta s_i$$

và công dịch chuyển trên toàn C được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\overrightarrow{\mathbf{F}}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(t_i^*)\right] \Delta s_i. \qquad (2.4)$$

Định nghĩa

Công của trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ được định nghĩa là giới hạn của tổng Riemann (2.4), khi $n \to \infty$, nghĩa là

$$W = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}}(x, y, z) ds = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}} ds. \qquad (2.5)$$

Tích phân đường loại 2

Trong công thức tính **Tích phân đường loại 2**, ta thay

$$ds = \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right|, \overrightarrow{\mathbf{T}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)/\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right|$$

nên ta có thể viết

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}} ds = \left[\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)}{\left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right|}\right] \left|\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)\right| = \overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) dt = \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}.$$

Và công thức (2.5) có thể được viết lại dưới dạng $W = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$.

Định nghĩa Tích phân đường loại 2

Cho trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ liên tục, xác định trên đường cong trơn C định bởi hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$. Khi đó, tích phân đường của $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ dọc theo C được kí hiệu và định nghĩa như sau

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{T}} ds = \int_a^b \overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) dt.$$

Tích phân đường loại 2

Ghi chú 1. Giả sử đường cong C có phương trình vecto

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}} + z(t)\overrightarrow{\mathbf{k}}, \quad a \le t \le b$$

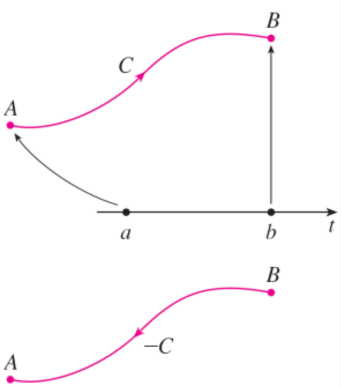
và trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, xác định trên C, được cho bởi

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) = P(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\overrightarrow{\mathbf{j}} + R(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t))\overrightarrow{\mathbf{k}}$$

(hoặc $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = x(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + y(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}}$, nếu xét 2 chiều). Khi đó, ta còn có ký hiệu khác cho tích phân đường loại 2

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)dt &= \int_a^b \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right] dt \\ &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz.\end{aligned}$$

Ghi chú 2: Vì Tích phân loại 2 gắn liền với khái niệm công của trường lực tác động lên chất điểm trên đường cong C, do đó hướng di chuyển của C ảnh hưởng đến giá trị của tích phân.



Cụ thể, nếu $C : \overrightarrow{r}(t), a \leq t \leq b$ là đường cong định hướng từ điểm A đến điểm B khi t tăng, thì đường cong $-C$ cho bởi $\overrightarrow{r}(a+b-t), a \leq t \leq b$ định hướng từ

Tích phân đường loại 2

Ví dụ

Tính công của trường lực $\overrightarrow{\mathbf{F}} = x^2\overrightarrow{\mathbf{i}} - xy\overrightarrow{\mathbf{j}}$ trong dịch một chất điểm dọc theo một phần tư đường tròn $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = \cos(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}, 0 \leq t \leq \pi/2$.

Giải: Trên $1/4$ đường tròn, $x = \cos(t), y = \sin(t)$. Do đó

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) = \cos^2(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} - \cos(t)\sin(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

và

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}'(t) = -\sin(t)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos(t)\overrightarrow{\mathbf{j}}.$$

Vì vậy, công thực hiện là

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \int_0^{\pi/2} \overrightarrow{\mathbf{F}}(\overrightarrow{\mathbf{r}}(t)) \cdot \overrightarrow{\mathbf{r}}'(t)dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2(t)\sin(t))dt$$

$$= \frac{2}{3}\cos^3(t)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

Tích phân đường loại 2

Ví dụ

Tính tích phân $I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ với C là đường cong có phương trình $y^2 = 1 - x$ nối từ điểm $A(0, -1)$ đến điểm $B(0, 1)$.

Giải:

- Ta tiến hành tham số hóa

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2t \\ y'(t) = 1 \end{cases}$$

- Tại $A(0, -1)$, ta có $t = -1$.
- Tại $B(0, 1)$, ta có $t = 1$.
- Khi đó

$$I = \int_{-1}^{1} \left\{ \left[2(1 - t^2)t - (1 - t^2)^2 \right] \times (-2t) + \left[1 - t^2 + t^2 \right] \times 1 \right\} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 4t^2 + 2t + 1 \right) dt = \frac{14}{15}.$$

Tích phân đường loại 2

Bài tập

Làm bài tập mục 4.1.4 của file bài tập.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Trong giải tích một biến, ta nhớ lại Định lí cơ bản của Giải tích phát biểu rằng

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

trong đó đạo hàm F' liên tục trên $[a, b]$. Trong tích phân đường, ta cũng có một phát biểu tương tự. Hãy xem ∇f của một hàm số f, 2 hoặc 3 biến, như là đạo hàm của f. Khi đó, ta có

Định lí cơ bản của tích phân đường (Định lí Newton-Leibnitz)

Cho C là đường cong trơn cho bởi hàm vectơ $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$. Nếu f là một hàm số nhiều biến khả vi sao cho vectơ gradient của nó, ∇f, liên tục trên C, thì

$$\int_C \nabla f \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(b)) - f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(a)) = f(B) - f(A)$$

trong đó điểm A và B là điểm đầu và điểm cuối của đường cong C.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Định nghĩa

- Một đường cong C được gọi là đường cong kín (closed curve) nếu điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Định nghĩa

- Một đường cong C được gọi là đường cong kín (closed curve) nếu điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$.
- Đường cong C được gọi là đường cong đơn (simple curve) cho bởi $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t), a \leq t \leq b$, là đường cong không tự cắt nó tại điểm nào giữa điểm đầu và điểm cuối, nghĩa là, nếu $a < t_1 < t_2 < b$ thì $\overrightarrow{\mathbf{r}}(t_1) \neq \overrightarrow{\mathbf{r}}(t_2)$. (Có thể xảy ra $\overrightarrow{\mathbf{r}}(a) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(b)$ nếu đường cong là kín).

Đường cong đơn, không kín | Đường cong đơn, kín | Đường cong kín, không đơn | Đường cong không đơn, không kín

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Định nghĩa

- Ta nói $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ có tích phân độc lập với đường đi trong D nghĩa là giá trị $\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$ là như nhau với mọi đường cong C nằm trong D và có cùng điểm đầu, cùng điểm cuối. Điều này cũng đồng nghĩa với $\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = 0$ với mọi **đường cong kín** C bên trong D.
- Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ được gọi là trường bảo toàn trong D nghĩa là trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ có nguyên hàm hay hàm thế xác định trên D, tức là hàm số nhiều biến f thỏa

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}(P) = \nabla f(P), \quad \forall P \in D.$$

Định lí

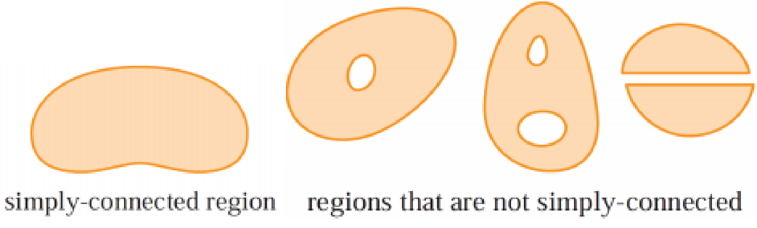
Cho $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường liên tục trên miền D. Nếu $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn thì $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ có tích phân độc lập với đường đi trong D.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Định nghĩa

- Tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là mở (open) có nghĩa là mỗi điểm P trong D, luôn có một đĩa tròn tâm P nằm hoàn toàn trong D. Định nghĩa khái niệm mở cho $D \subset \mathbb{R}^3$ tương tự như trên, với đĩa tròn được thay bởi khối cầu.
- Tập hợp D được gọi là tập liên thông có nghĩa là hai điểm bất kì thuộc D luôn là điểm đầu và điểm cuối của một đường đi **liên tục** nằm trong D.
- Tập hợp D trong $\mathbb{R}^2$ (D là miền phẳng) được gọi là tập đơn liên khi nó là tập liên thông sao cho mọi đường cong đơn-kín bên trong D sẽ bao quanh một miền hoàn toàn nằm trong D.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều



Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Định lí (Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều)

Cho $\overrightarrow{\mathbf{F}} = P\overrightarrow{\mathbf{i}} + Q\overrightarrow{\mathbf{j}}$ là trường vectơ hai chiều sao cho các hàm số P và Q có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên tập xác định D, viết là $P, Q \in C^1(D)$. Khi đó

- Nếu $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn trên D thì
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{trên tập } D.$$
- Nếu D là **miền đơn liên, mở** và $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên tập D thì $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ là trường bảo toàn trên D.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Ví dụ

Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x-2)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ có bảo toàn hay không?

Giải: Ta thấy rằng

$$P = x - y, Q = x - 2$$

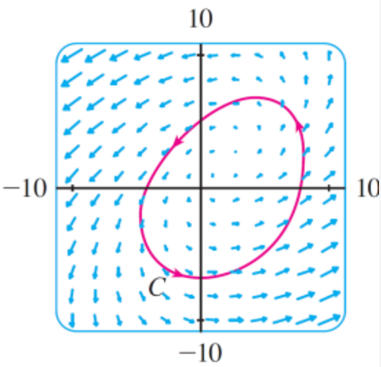
và hiển nhiên $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Tuy nhiên

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \langle P, Q \rangle$ không phải là trường bảo toàn.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ được minh họa ở hình bên. Ta thấy rằng những vectơ có điểm đặt trên đường cong kín C có khuynh hướng xuôi theo chiều của C. Do đó, ta phán đoán rằng $\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} > 0$, nghĩa là $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ không thể là trường bảo toàn.



Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Ví dụ

Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (3+2xy)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x^2-3y^2)\overrightarrow{\mathbf{j}}$ có bảo toàn hay không?

Giải: Ta thấy rằng

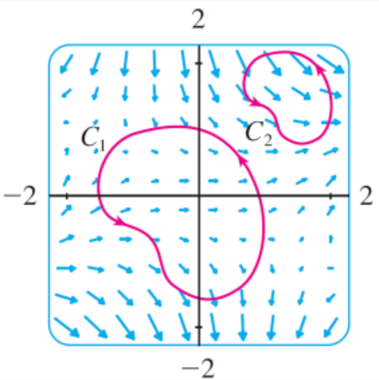
$$P = 3+2xy, Q = x^2-3y^2$$

và hiển nhiên $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2$ là miền mở đơn liên. Hơn nữa

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{trên } \mathbb{R}^2.$$

Vậy $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \langle P, Q \rangle$ là trường bảo toàn.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều



Trường vectơ $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ được minh họa ở hình trên. Ta thấy rằng vài vectơ có điểm đặt trên đường cong kín C có khuynh hướng xuôi theo chiều của C, trong khi đó những vectơ khác lại ngả theo hướng ngược với C. Điều này hợp lý vì $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ bảo toàn, làm cho $\int_C \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = 0$.

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Ví dụ

Trường $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \langle P, Q \rangle = \langle 3 + 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$ trong ví dụ trước là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$. Vậy hãy tìm thế f thỏa $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \nabla f$.

Giải: Ta có

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle P, Q \rangle .$$

Suy ra

$$P_x = 3 + 2xy.$$

Nói cách khác, f là nguyên hàm theo biến x của P,

$$f = \int (3 + 2xy)dx = 3x + x^2y + g(y). \tag{2.6}$$

Đặc trưng của trường bảo toàn 2 chiều

Hơn nữa, $f_y = Q$. Do đó,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[3x + x^2 y + g(y)\right] = Q = x^2 - 3y^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x^2 + g'(y) &= x^2 - 3y^2 \\ \Rightarrow g(y) &= -y^3 + c \end{aligned} \tag{2.7}$$

với c là hằng số.
Thay (2.7) vào (2.6), ta được

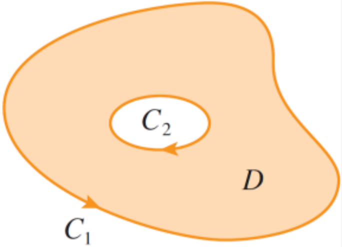
$$f(x, y) = 3x + x^2 y - y^3 + c.$$

Bài tập

Làm bài tập mục 4.1.6 của file bài tập.

Định lí Green

Cho D là miền phẳng bị chặn sao cho biên ∂D của D là hữu hạn các đường cong đơn kín, được định hướng dương, nghĩa là khi đi theo hướng đó, miền trong của D luôn nằm bên tay trái. Hình bên cho thấy $\partial D = C_1 \cup C_2$ được định hướng dương.



Tích phân đường của trường $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \langle P, Q \rangle$ dọc theo ∂D theo hướng dương được kí hiệu bởi

$$\oint_{\partial D} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}} = \oint_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Định lí Green

Định lí Green sau đây cho mối liên hệ giữa tích phân kép trên miền phẳng D với tích phân đường trên biên ∂D. Do đó, định lý Green cũng được xem như là Định lý cơ bản của tích phân kép.

Định lí Green

Giả sử D là miền phẳng bị chặn sao cho biên ∂D là hữu hạn các đường cong đơn kín, trơn từng khúc. Giả sử P, Q là các hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên một tập mở chứa D, viết là $P, Q \in C^1(D \cup \partial D)$. Khi đó

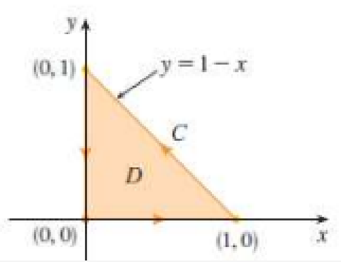
$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\partial D} P dx + Q dy \tag{2.8}$$

Định lí Green

Ví dụ

Tính tích phân $\oint_C x^4 dx + xydy$ với C là tam giác ABC, trong đó $A(0,0), B(1,0)$ và $C(0,1)$.

Giải:



Đặt $P(x,y) = x^4$ và $Q(x,y) = xy$.

Định lí Green

Áp dụng định lí Green (2.8), ta có

$$\oint_C x^4 dx + xydy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y-0)dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx$$
$$= -\frac{1}{6}(1-x^3)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ

Tính tích phân $\oint_C \left(3y - e^{\sin(x)}\right) dx + \left(7x + \sqrt{1+y^4}\right) dy$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

Giải: Áp dụng định lí Green (2.8), ta có

$$\oint_C \left(3y - e^{\sin(x)}\right) dx + \left(7x + \sqrt{1+y^4}\right) dy$$
$$= \int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x + \sqrt{1+y^4}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(3y - e^{\sin(x)}\right)\right] dA$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (7-3) r dr\, d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\, dr = 36\pi.$$

Ứng dụng định lí Green

Như đã biết, diện tích mặt phẳng D cho bởi

$$A(D) = \int\int_D 1\, dA = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \right)$$

với trường hợp $\langle P, Q\rangle = \langle 0, x\rangle$ hoặc $\langle P, Q\rangle = \langle -y, 0\rangle$ hoặc $\langle P, Q\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x \right\rangle$. Nếu ta áp dụng định lý Green cho trường hợp trên thì ta có công thức diện tích của D như sau

$$A(D) = \oint_{\partial D} xdy = -\oint_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy - ydx.$$

Ứng dụng định lí Green

Ví dụ

Hãy tính diện tích của hình ê-lip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Giải: Miền ê-lip D được bao quanh bởi đường ê-lip ∂D có phương trình tham số

$$x = a\cos(t), y = b\sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Do đó, diện tích ê-lip D được cho bởi

$$\begin{aligned} A(D) &= \oint_{\partial D} x dy = \int_0^{2\pi} (a\cos(t)) y'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a\cos(t))(b\cos(t)) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \pi ab + \frac{1}{4} ab \sin(2t) \Big|_0^{2\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Bài tập

Bài tập

Làm bài tập mục 4.1.5 của file bài tập.