Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 2
Tuần 4

Ngày 09 tháng 06 năm 2024

Lý thuyết Cực trị không điều kiện

Định nghĩa

Một hàm hai biến có một **cực đại địa phương** tại (a, b) nếu $f(x, y) \leq f(a, b)$ khi (x, y) gần (a, b). Giá trị $f(a, b)$ được gọi là **giá trị cực đại địa phương**. Nếu $f(x, y) \geq f(a, b)$ khi (x, y) gần (a, b), thì f có **cực tiểu địa phương** và $f(a, b)$ được gọi là **giá trị cực tiểu địa phương**

Nếu Định nghĩa đúng với mọi (x, y) trong miền xác định của f, thì f có **cực tiểu tuyệt đối** hoặc **cực đại tuyệt đối** tại (a, b).

Định lý

Nếu f đạt cực trị địa phương tại $\boldsymbol{a}$ và tồn tại các đạo hàm riêng tại đó, thì $\boldsymbol{a}$ là điểm dừng của f, nghĩa là $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

Lý thuyết Cực trị không điều kiện

Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

Giả sử các đạo hàm riêng cấp hai của f liên tục trên một đĩa tròn tâm (a, b), và giả sử $f_x(a, b) = 0$ và $f_y(a, b) = 0$. Cho

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$ thì $f(a, b)$ là cực tiểu địa phương.
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$ thì $f(a, b)$ là cực đại địa phương.
- Nếu $D < 0$ thì $f(a, b)$ không là cực tiểu hoặc cực đại địa phương. Ta gọi (a, b) là điểm yên ngựa của f.

Lý thuyết Cực trị không điều kiện

Định lý giá trị cực biên của hàm 2 biến

Nếu f liên tục trên tập hợp D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, thì f có giá trị cực đại tuyệt đối $f(x_1, y_1)$ và giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(x_2, y_2)$ tại các điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) nào đó trong D.

Để tìm giá trị cực đại và cực tiểu tuyệt đối của hàm liên tục f trên tập hợp đóng bị chặn D:

1. Tìm giá trị của hàm f tại các điểm tới hạn.
2. Tìm các cực trị của f trên biên của D.
3. Giá trị lớn nhất trong số các giá trị ở bước 1 và bước 2 là giá trị cực đại tuyệt đối; giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị này là giá trị cực tiểu tuyệt đối;

Bài tập

Bài 1. Tìm các điểm cực tiểu địa phương, cực đại địa phương và điểm yên ngựa của hàm số.

a). $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$.

b). $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$.

c). $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

d). $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}$.

Bài tập

Bài 2. Tìm các giá trị cực đại và cực tiểu tuyệt đối của f trên D.

a). $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x, D$ là miền hình tam giác đóng có các đỉnh $(2, 0), (0, 2)$ và $(0, -2)$.

b). $f(x, y) = 1 + 4x - 5y, D$ là miền hình tam giác đóng có các đỉnh $(0, 0), (2, 0)$ và $(0, 3)$.

c). $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4, D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Bài 3. Tìm 3 số dương mà tổng của chúng là 100 và tích của chúng là một giá trị cực đại.

Hướng dẫn

Bài 2a). $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x, D$ là miền hình tam giác đóng có các đỉnh $(2,0), (0,2)$ và $(0,-2)$.

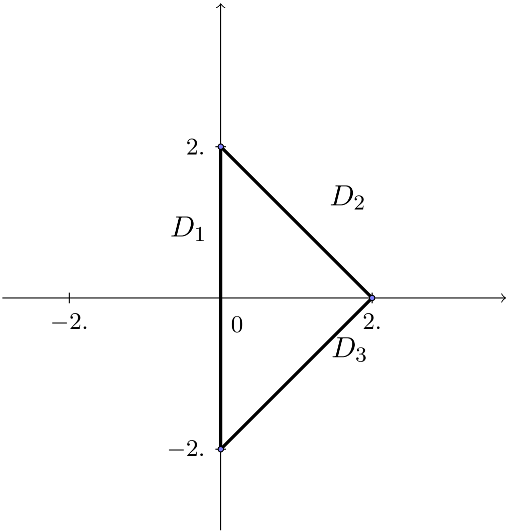
Giải

- Tìm các giá trị của f tại các điểm tới hạn.

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = 0 \\ f_y(x,y) & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2 & = 0 \\ 2y & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = 0 \end{cases}$$

Giá trị tại điểm tới hạn $f(1,0) = -1$.

- Tìm cực trị của f trên biên D.



$+$ Trên đường D_1: $x = 0, -2 \leq y \leq 2$.
Suy ra $f(0, y) = y^2, -2 \leq y \leq 2$.
Đây là hàm tăng theo y, do đó

GTCT của f: $f(0, 0) = 0$

GTCĐ của f: $f(0, 2) = f(0, -2) = 4$.

$+$ Trên đường D_2: $y = 2 - x, 0 \leq x \leq 2$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(x, 2-x) &= x^2 + (2-x)^2 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

Tìm các điểm tới hạn

$$f_x(x, 2-x) = 4x - 6$$

$$f_x(x, 2-x) = 0 \Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}.$$

Suy ra: $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Giá trị của f tại hai đầu mút

$$f(0, 2) = 4$$

$$f(2, 0) = 0.$$

Do đó

GTCT của $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

GTCĐ của f: $f(0, 2) = 4$.

$+$ Trên đường D_3:$y = x - 2, 0 \leq x \leq 2$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(x, x-2) &= x^2 + (x-2)^2 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

Tương tự đường D_2:

GTCT của f: $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

GTCĐ của f: $f(0, -2) = 4$.

Vậy

GTCTTĐ của f trên D: $f(1, 0) = -1$

GTCĐTĐ của f trên D: $f(0, 2) = f(0, -2) = 4$.

Cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y, z)$ phụ thuộc vào điều kiện ràng buộc $g(x, y, z) = k$ (giả sử cực đại này tồn tại và $\nabla g \neq \mathbf{0}$ trên mặt $g(x, y, z) = k$):

a). Tìm tất cả các giá trị của x, y, z, λ sao cho

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$
$$g(x, y, z) = k$$

b). Tìm f tại mọi điểm (x, y, z) tìm được từ bước a). Giá trị lớn nhất trong số các giá trị này là giá trị lớn nhất của f, giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị này là giá trị nhỏ nhất của f.

Bài tập

Bài 1. Sử dụng nhân tử Lagrange để tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số tùy thuộc vào điều kiện ràng buộc được cho.

a). $f(x, y) = 3x + y; \quad x^2 + y^2 = 10.$

b). $f(x, y) = e^{xy}; \quad x^3 + y^3 = 16.$

c). $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 35.$

Bài 2. Tìm 3 số dương mà tổng của chúng là 100 và tích của chúng là một giá trị cực đại.

Hướng dẫn

a). $f(x,y) = 3x + y; \quad x^2 + y^2 = 10.$

Giải

Lấy $f(x,y) = 3x + y; \quad g(x,y) = x^2 + y^2.$
Ta có: $\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 3, 1 \rangle; \quad \nabla g(x,y) = \langle g_x, g_y \rangle = \langle 2x, 2y \rangle.$
Khi đó, theo phương pháp nhân tử Lagrange ta có

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda} & (1) \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} & (2) \\ x^2 + y^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

Thay (1) và (2) vào (3), ta được

$$\frac{10}{4\lambda^2} = 10 \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

- Với $\lambda = \frac{1}{2}$: $x = \frac{3}{2\lambda} = 3, \quad y = \frac{1}{2\lambda} = 1.$
- Với $\lambda = -\frac{1}{2}$: $x = \frac{3}{2\lambda} = -3, \quad y = \frac{1}{2\lambda} = -1.$

Đánh giá hàm f tại $(3, 1)$ và $(-3, -1)$.

- $f(3, 1) = 3.3 + 1 = 10.$
- $f(-3, -1) = 3.(-3) - 1 = -10.$

Vậy

GTCT của f: $f(-3, -1) = -10$

GTCĐ của f: $f(3, 1) = 10.$