Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1
Tuần 9

Ngày 1 tháng 4 năm 2024

Chuỗi số thực

Chuỗi số

Cho dãy số $(u_n)_{n \geq n_0}$. Với mỗi $k \geq n_0$, tổng của n số hạng đầu tiên $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ gọi là tổng riêng phần. Dãy $(s_n)_{n \geq n_0}$ được gọi là chuỗi số và được ký hiệu:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k \text{ hay } u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n + \cdots .$$

Nếu dãy $\{s_n\}$ hội tụ về một số thực s (tồn tại $\lim_{n \to \infty} s_n = s$) thì chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$ được gọi là hội tụ và ta viết

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Chuỗi số thực

Sự hội tụ của chuỗi hình học

Chuỗi hình học là chuỗi có dạng $\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n$, $a \neq 0$, các số hạng tổng quát của nó lập nên cấp số nhân với công bội r.
Chuỗi hình học hội tụ nếu $|r| < 1$ và tổng của nó

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n = \frac{ar^{n_0}}{1-r} \quad |r| < 1$$

Nếu $|r| \geq 1$, chuỗi hình học phân kì.

Chuỗi số thực

Định lý

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Tiêu chuẩn phân kỳ

Nếu $\lim_{n \to \infty} a_n$ không tồn tại hoặc $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn tích phân

Giả sử f là một hàm dương, liên tục, nghịch biến trên $[n_0, \infty)$ và lấy $a_n = f(n)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu tích phân suy rộng $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$ hội tụ. Nói cách khác

i). Nếu $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ

ii). Nếu $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$ phân kỳ thì $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Định lý

Chuỗi-p $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kỳ nếu $p \leq 1$.

Bài tập

Bài 1. Dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định chuỗi hội tụ hay phân kì.

a). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

b). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

c). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+1}$

d). $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n-2}$

e). $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\cdots$

Tiêu chuẩn so sánh

Tiêu chuẩn so sánh (bất đẳng thức)

Cho hai chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ thỏa: $0 \leq a_n \leq b_n$ với mọi $n \geq n_0$ thì

(i) Nếu $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ

(ii) Nếu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Tiêu chuẩn so sánh

Tiêu chuẩn so sánh (giới hạn)

Cho hai chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ với $a_n, b_n \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad \text{với } c \in (0, \infty)$$

thì $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Bài tập

Bài 2. Dùng tiêu chuẩn so sánh để xác định chuỗi hội tụ hay phân kì.

a). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

b). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

c). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

d). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n}{n^3+n+1}$

e). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+4}$

Chuỗi đan dấu

Cho dãy số $\{b_n\}$ và $b_n \geq 0$ với mọi $n \geq n_0$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ hay $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ được gọi là chuỗi đan dấu. Hai chuỗi này được sắp xếp âm dương xen kẽ nhau.

Tiêu chuẩn Leinitz cho chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ hay $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ được gọi là chuỗi Leinitz nếu:

(i) $b_{n+1} \leq b_n$ với mọi $n \geq n_0$ (dãy $\{b_n\}$ là dãy giảm)

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

thì chuỗi hội tụ.

Chuỗi đan dấu

Định lý ước lượng chuỗi đan dấu

Nếu $s = \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ là tổng của chuỗi đan dấu thỏa mãn

$$(i)\ b_{n+1} \leq b_n \quad \text{và} \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

thì

$$|R_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}.$$

Bài tập

Bài 3. Dùng tiêu chuẩn Leibniz (chuỗi đan dấu) kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của các chuỗi sau.

a). $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

b). $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$

c). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

d). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{2n}{4n^2+1}$

e). $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$