Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Định nghĩa
- Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
- Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

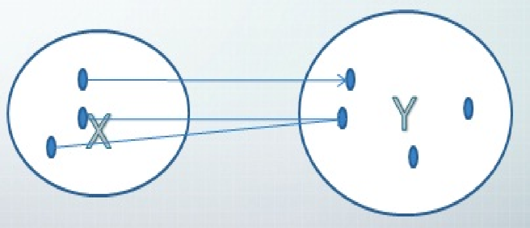
4.1. Định nghĩa

1. **Ánh xạ**
2. **Ánh xạ tuyến tính**

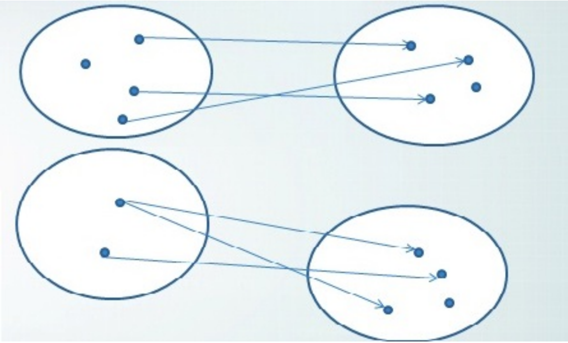
4.1.1. Ánh xạ

Định nghĩa. Một ***ánh xạ*** f từ tập X vào tập Y là một phép liên kết từ X vào Y sao cho mỗi phần tử x của X được liên kết duy nhất một phần tử y của Y, ký hiệu: $\boldsymbol{y = f(x)}$

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$



Khi đó X được gọi là ***tập nguồn***, Y được gọi là ***tập đích***.



Không là ánh xạ

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$ là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $h(\frac{m}{n}) = m$ **không** là ánh xạ.

4.1.2. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ta nói ánh xạ $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu thỏa hai điều kiện sau:

- i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;
- ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

Ký hiệu.

- $L(V, W)$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào W.
- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một ***toán tử tuyến tính*** trên V. Viết tắt $f \in L(V)$.

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z,\ 2x + z).$$

Chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Với mọi $u = (x_1, y_1, z_1)$ và $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$ được kiểm tra tương tự.

Ví dụ.(tự làm) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ x - 2y,\ y - 3z).$$

Chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề. *Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

ii) *Với mọi $u \in V$, ta có $f(-u) = -f(u)$;*

iii) *Với mọi $u_1, \ldots, u_m \in V$ và với mọi $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, ta có*

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_m f(u_m).$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ và

$$f(1,2,1) = (2,1);\ f(-1,2,3) = (4,-3).$$

Tính $f(5,2,-3)$.

Giải. Ta có $(5,2,-3) = 3(1,2,1) - 2(-1,2,3)$. Suy ra

$$f(5,2,-3) = 3(2,1) - 2(4,-3) = (-2,9).$$

Định lý. *Cho V và W là hai không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V. Khi đó, nếu $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một tập con của W thì* **tồn tại duy nhất** *một ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho*

$$\boldsymbol{f(u_1) = v_1,\ f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n}.$$

Hơn nữa, nếu $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *thì*

$$\boldsymbol{f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

- (a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- (b) Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho

$$f(u_1) = (2, 1, -2);\ f(u_2) = (1, 2, -2);\ f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Giải.

$a)$ Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ bằng số vectơ của $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$b)$ Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:
$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta sẽ tìm $[u]_{\mathcal{B}}$. Lập ma trận mở rộng

$$\left(u_1^\top\, u_2^\top\, u_3^\top \,|\, u^\top\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array}\right).$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ 2x+y-z \\ -x+z \end{pmatrix}$. Suy ra

$$u = (x-y-z)u_1 + (2x+y-z)u_2 + (-x+z)u_3.$$

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x-y-z)f(u_1) + (2x+y-z)f(u_2) + (-x+z)f(u_3) \\ &= (x-y-z)(2,1,-2) + (2x+y-z)(1,2,-2) \\ &\qquad + (-x+z)(3,5,-7) \\ &= (x-y, y+2z, x-3z). \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho
$\mathcal{B} = (u_1 = (1,-2,2); u_2 = (-2,5,-4); u_3 = (0,-1,1))$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ thỏa

$$f(u_1) = (1,1,-2); f(u_2) = (1,-2,1); f(u_3) = (1,2,-1).$$

Đáp án. $f(x,y,z) = (-x+3y+4z, -3x+2z, -3y-4z)$.

Mệnh đề. *Cho ánh xạ* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Khi đó* f *là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại ma trận* $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *sao cho với mọi* $u \in \mathbb{R}^n, f(u) = uA$.

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ x - 2y,\ y - 3z,\ 2x - y + 5z).$$

Chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Ta xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó với $u = (x, y, z)$ ta có $f(u) = uA$. Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ.(tự làm) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (-x + 5y + 2z, -2x + 5z, x - 3y - 4z).$$

Chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

4.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

1. **Không gian nhân**

2. **Không gian ảnh**

4.2.1. Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f} = \{u \in V \mid f(u) = \mathbf{0}\}$$

Khi đó $\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f}$ là không gian con của V, ta gọi $\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f}$ là ***không gian nhân*** của f.

Nhận xét. *Dựa vào định nghĩa, ta được*

$$u \in \mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f} \Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0}.$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Ker}\, f$.

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Giải. Gọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z) = (2t, -t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2, -1, 1)$.

Vậy, $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t,\ x + 3y + 3z - t,\ 2x + 3y + 6z + 7t).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$.

Hướng dẫn. Xét hệ phương trình thuần nhất với ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z, t) = (-3a - 8b, 3b, a, b) \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (-3, 0, 1, 0)$ và $u_2 = (-8, 3, 0, 1)$.

Vậy, $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (-3, 0, 1, 0); u_2 = (-8, 3, 0, 1)\}$.

4.2.1. Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}\}.$$

Khi đó $\mathrm{Im}\boldsymbol{f}$ là không gian con của W, ta gọi $\mathrm{Im}\boldsymbol{f}$ là ***không gian ảnh*** của f.

Nhận xét. *Dựa vào định nghĩa, ta được*

$$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\boldsymbol{f} \Leftrightarrow \text{ tồn tại } u \in V \text{ sao cho } f(u) = \boldsymbol{v}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y) = (\, x + 2y,\, 2x + 5y,\, 3x + 4y \,)$$

và $u = (1, 5, 3)$. Hỏi $u \in \mathrm{Im}f$ không? Tại sao?

Giải. $u \in \text{Im} f \Leftrightarrow f(x, y) = (1, 5, 3)$ có nghiệm. Ta xét

$$\begin{cases} x \;+\; 2y = 1 \\ 2x + 5y = 5 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$.

Ta có hệ phương trình vô nghiệm. Suy ra $u \notin \text{Im} f$.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu*

$$\boldsymbol{S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}}$$

là tập sinh của V thì

$$\boldsymbol{f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)\}}$$

là tập sinh của $\text{Im} f$.

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im}f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta nên chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im}f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(x+y-z,2x+3y-z,3x+5y-z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im}f$.

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned}f(e_1)&=f(1,0,0)=(1,2,3),\\ f(e_2)&=f(0,1,0)=(1,3,5),\\ f(e_3)&=f(0,0,1)=(-1,-1,-1).\end{aligned}$$

Khi đó $\mathrm{Im}f$ sinh bởi $\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Do đó Imf có cơ sở là $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ được xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x + 2y - 3z,\ 3x + 2y,\ 2x + 2y - z, 4x - y + 5z).$$

Tìm một cơ sở của Imf.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và V hữu hạn chiều. Khi đó*

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathbf{Ker} f = \dim V.$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^8, \mathbb{R}^7)$. Biết số chiều của Im$f$ là 5, hãy tìm số chiều của Ker$f$.

Đáp án. 3.

4.3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V, $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ là cơ sở của W và $f \in L(V, W)$. Ta đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}} \;\; [f(u_2)]_{\mathcal{C}} \;\; \ldots \;\; [f(u_n)]_{\mathcal{C}}).$$

Khi đó ma trận P được gọi là ***ma trận biểu diễn*** của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$).

Nhận xét. *Khi $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, ta có phương pháp tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ như sau:*

- *Tính $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$.*
- *Đặt $M = \left(v_1^\top \; v_2^\top \ldots \; v_m^\top \,|\, f(u_1)^\top \; f(u_2)^\top \ldots \; f(u_n)^\top\right)$.*
- *Dùng thuật toán Gauss-Jordan, đưa M về dạng $(I_m \mid P)$*
- *Khi đó $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P$.*

Ví dụ. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$, $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0, 3), \\ f(u_2) &= (-1, 3), \\ f(u_3) &= (0, 4). \end{aligned}$$

Lập

$$\left(v_1^\top \; v_2^\top \mid f(u_1)^\top \; f(u_2)^\top \; f(u_3)^\top\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -6 & -4 \end{array}\right).$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, -y + 2z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0),\ u_2 = (1, 0, 1),\ u_3 = (0, 1, 1)\}$
$\mathcal{C} = \{u_1' = (1, 2),\ u_2' = (3, 5)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Đáp án. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -18 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V và $f \in L(V)$. Khi đó ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ được gọi là ***ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính*** f, ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$. Rõ ràng

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}} \ \ [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \ \ \ldots \ \ [f(u_n)]_{\mathcal{B}})$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x - 4y + 3z, 2x - y - z)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$.

Đáp án.

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$$u_1 = (1, 1, 0);\ u_2 = (0, 2, 1);\ u_3 = (2, 3, 1)$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

a. Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$.

Đáp án. $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở của V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

1. $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.
2. $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C}' \to \mathcal{C})[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') \; = \; (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

1. $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.
2. $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B}' \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') \; = \; (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,2,1); u_3 = (2,3,1))$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi:
$f(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z)$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$.

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta được

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} u_1^\top & u_2^\top & u_3^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f theo cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,0,1); u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1,1); v_2 = (2,1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của f.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập $(u_1^\top\, u_2^\top\, u_3^\top\, |u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x+y+z \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-z \end{array}\right)$.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \, v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \, u_2^\top \, u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hơn nữa $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Ví dụ.(tự làm) Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, -2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3).$$

a. Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b. Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)).$$