Date No

BÀI TẬP VỀ TÍCH PHÂN

Môn: Vi tích phân 1

Nguyễn Hải Đăng ~ 23127165

Bài tập 1:

a) $\int_0^1 e^x dx$ $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ n=10 \end{cases}$

Ta có: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{10}$

. $x_i = a + i.\Delta x = 0 + \frac{i}{10} = \frac{i}{10}$

. $x_{i-1} = a + (i-1)\Delta x = \frac{i-1}{10}$

$\Rightarrow \overline{x_i} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{2i-1}{20}$

$\Rightarrow M_{10} = \Delta x. \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} e^{\overline{x_i}} = 1,71757$

mà $I = \int_0^1 e^x dx = 1,718281828$

$E_M = |I - M_x| = 0,0007118$

. $T_{10} = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{9} f(x_i) + f(x_{10}) \right]$

$= \frac{1}{20} \left[f(0) + 2\sum_{i=1}^{9} f\left(\frac{i}{10}\right) + f(1) \right]$

$= \frac{1}{20} [1 + 30,675988 + e) = 1,719713491$

$E_T = |I - T_{10}| = 0,001431662541$

. $x_{2i} = a + 2i\Delta x = \frac{i}{5}$

THUẬN TIẾN

Scanned with CamScanner

Date . . . No

$$S_{10} = \frac{\Delta x}{3} \sum_{i=1}^{n/2} \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right]$$

mà $x_{2i-2} = (2i-2) \cdot \frac{1}{10}$

$x_{2i-1} = \frac{2i-1}{30}$

$x_{2i} = \frac{2i}{10}$

$\Rightarrow S_{10} = 1{,}718282782 \Rightarrow E_S = |I - S_{10}| = 0{,}000001828$

b)

$K = e$

$$|E_M| = \frac{K(b-a)^3}{24n^2} = \frac{e(1-0)^3}{24 \cdot 10^2} = \frac{e}{2400}$$

$$|E_T| = \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{e}{1200}$$

Ta có: $f^{(4)}(x) = e^x < e, \forall x \in [0;1]$

$$\Rightarrow |E_S| = \frac{K(b-a)^5}{180 \cdot n^4} = \frac{e}{1800000}$$

c) Ta có: $|E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$ với $K = e$

Để sai số của tích phân có sai số trong phạm vi 0,00001:

- $E_M \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2} \le 10^{-5} \Rightarrow n \geq 106{,}42 \Rightarrow n = 107$
- $E_T \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \le 10^{-5} \Rightarrow n \geq 150{,}5 \Rightarrow n = 151$
- $E_S \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4} \le 10^{-5} \Rightarrow n \geq 6{,}23 \Rightarrow n = 8$

THUẬN TIẾN

Scanned with CamScanner

Date . . . No

Bài tập 2:

a) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(3r+1)^2} dr = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{(3r+1)^2} . dr + \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{(3r+1)^2} dr.$

Giả sử: $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(3r+1)^2} dr = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ta xét: $\int_{-\frac{1}{3}}^{1} \frac{dr}{(3r+1)^2} = \lim_{t \to -\frac{1}{3}^+} \int_{t}^{1} \frac{dr}{(3r+1)^2} = \frac{-1}{3} \lim_{t \to -1/3^+} \left(\frac{1}{3r+1}\right)\Big|_{t}^{1}$

$= \frac{-1}{3} \lim_{t \to -1/3^+} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3t+1}\right) = -\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{1} \frac{dr}{(3r+1)^2} = \alpha,$ với $\alpha \in \mathbb{R}$

là sai $\Rightarrow$ Phân kỳ.

b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} dv$

Xét: $\lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} \frac{v . dv}{\sqrt{1+v^2}} = \lim_{t \to +\infty} \left(-1 + \sqrt{1+t^2}\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ Tích phân phân kỳ.

c) $\int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$ (gián đoạn tại $x = 2$)

$= \lim_{t \to 2^-} \int_{0}^{t} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} + \lim_{t \to 2^+} \int_{t}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim_{t \to 2^-} \frac{-3}{2} (2-x)^{2/3} \Big|_{0}^{t}$

$+ \lim_{t \to 2^+} \frac{-3}{2} (2-x)^{2/3} \Big|_{t}^{5}$

$= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9})$

Vậy $\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} dx$ hội tụ về $\frac{3}{2} (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9})$

THUẬN TIẾN

Scanned with CamScanner

Date . . . No

d) $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6} dx = \int_0^4 \frac{1}{(x+3)(x-2)} dx$ => không xác định tại $x=2$.

$= \lim_{t\to 2^-} \int_0^t \frac{dx}{x^2+x-6} + \lim_{t\to 2^+} \int_t^4 \frac{dx}{x^2+x-6}$

Mà $\lim_{t\to 2^-} \int_0^t \frac{1}{x^2+x-6} dx = \frac{1}{5} \lim_{t\to 2^-} \left(\ln|x-2| - \ln|x-3|\right)\Big|_0^t$

=> Tích phân phân kỳ.

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx = \lim_{t\to -\infty} \int_t^0 \frac{x^2}{9+x^6} dx + \lim_{t\to +\infty} \int_0^t \frac{x^2}{9+x^6} dx$

$= \frac{1}{9} \lim_{t\to -\infty} \arctan(a) da \Big|_{\frac{t^3}{3}}^0 + \frac{1}{9} \lim_{t\to +\infty} \arctan(u) du \Big|_0^{t^3/3}$

$= \frac{\pi}{9}$ => Tích phân hội tụ về $\frac{\pi}{9}$

f) $\int_2^\infty \frac{1}{v^2+2v-3} dv = \lim_{t\to +\infty} \int_2^t \frac{dv}{v^2+2v-3} = \frac{1}{4} \lim_{t\to +\infty} \int_2^t \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+3}\right) dv$

$= \frac{1}{4} \lim_{t\to +\infty} \left(\ln(t-1) - \ln(t+3) + \ln 5\right) = \frac{1}{4} \lim_{t\to +\infty} \left(\ln\left(\frac{t-1}{t+3}\right) + \ln 5\right)$

$= \frac{\ln 5}{4}$ => tích phân hội tụ về $\frac{\ln 5}{4}$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . e^{-x^3} dx = \lim_{t\to -\infty} \int_t^0 x^2 . e^{-x^3} dx + \lim_{t\to +\infty} \int_0^t x^2 . e^{-x^3} . dx$

$= \lim_{t\to -\infty} \frac{-e^{-x^3}}{3} \Big|_t^0 + \lim_{t\to +\infty} \frac{-e^{-x^3}}{3} \Big|_0^t$ => Tích phân phân kỳ

THUẬN TIẾN

Scanned with CamScanner

Date . . . No

h) $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt[4]{10-x}}$ => Tích phân không xác định tại $x=10$

$= \lim_{t\to 10^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[4]{10-x}} = \lim_{t\to 10^-} \int_0^t \frac{dx}{(10-x)^{1/4}}$

$= \lim_{t\to 10^-} (-1).\frac{4}{3}.(10-x)^{\frac{3}{4}} \Big|_0^t$

$= \lim_{t\to 10^-} \left[\frac{-4}{3}(10-t)^{3/4} + \frac{4.10^{3/4}}{3}\right] = \frac{4.10^{3/4}}{3}$ => Tích phân hội tụ về $\frac{4.10^{3/4}}{3}$

i) $\int_0^{\infty} s.e^{-5s}\,ds = \lim_{t\to +\infty} \int_0^t s.e^{-5s}\,ds$

$= \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{-1}{5}s.e^{-5s}\Big|_0^t + \frac{1}{5}\int_0^t e^{-5s}\,ds\right)$

$= \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{-t.e^{-5t}}{5} + \frac{-1}{25}\left(e^{-5t}-1\right)\right) = \frac{1}{25}$

=> Tích phân hội tụ về $\frac{1}{25}$

Scanned with CamScanner