Hướng dẫn bài tập Vi tích phân 1
Tuần 5

Ngày 04 tháng 03 năm 2024

Ứng dụng của vi phân

Tính đơn điệu của hàm số

Giả sử hàm số f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b)

a). Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng (a, b) thì hàm số tăng trên khoảng ấy.

b). Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng (a, b) thì hàm số giảm trên khoảng ấy.

Tính lồi, lõm của hàm số

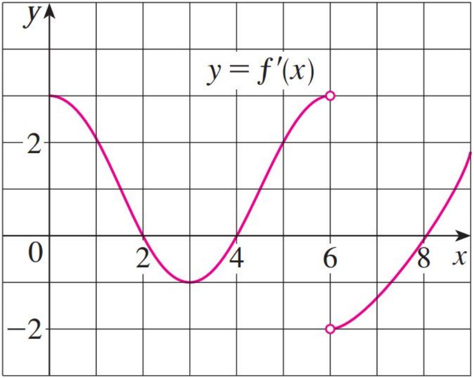
a). Nếu $f''(x) > 0$ trong khoảng (a, b) nào đó thì đồ thị hàm số lõm trong khoảng này.

b). Nếu $f''(x) < 0$ trong khoảng (a, b) nào đó thì đồ thị hàm số lồi trong khoảng này.

c). Nếu $f''(x_i) = 0$ hoặc không tồn tại $f''(x_i)$ và đạo hàm $f''(x)$ đổi dấu khi qua x_i thì hàm số có điểm uốn tại x_i.

Bài tập

Bài 1. Đồ thị của đạo hàm f' của hàm số f liên tục được cho bên dưới.



a). Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

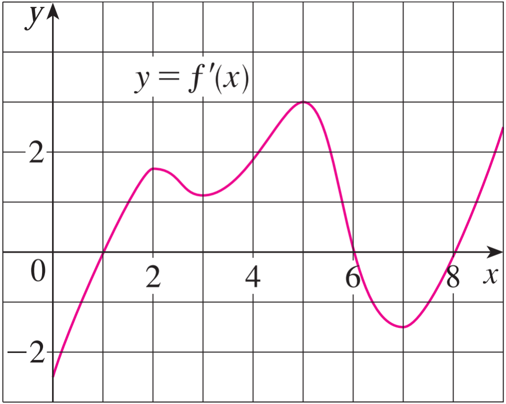
b). Tìm giá trị của x tại đó f đạt cực đại hay cực tiểu.

c). Hàm số f lồi; lõm trên những khoảng nào?

d). Tìm hoành độ của điểm uốn.

Bài tập

Bài 2. Đồ thị của đạo hàm f' của hàm số f liên tục được cho bên dưới.



a). Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến.

b). Tìm giá trị của x tại đó f đạt cực đại hay cực tiểu.

c). Hàm số f lồi; lõm trên những khoảng nào?

d). Tìm hoành độ của điểm uốn.

Quy tắc tính đạo hàm

Quy tắc L'Hospital

Giả sử hàm f, g khả vi và $g'(x) \neq 0$ trên khoảng mở chứa a (có thể ngoại trừ a). Nếu

1. Xảy ra một trong 2 trường hợp

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \left(\text{dạng } \frac{0}{0}\right)$$

hoặc

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \qquad \left(\text{dạng } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$$

2. Tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ hữu hạn hay vô hạn.

Khi đó

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chú ý.

- Nếu $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ có dạng $0\cdot\infty$ thì ta sẽ đưa giới hạn này về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách viết

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}\quad \text{hoặc}\quad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

- Nếu $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định $1^{\infty}, \infty^0$ hoặc 0^0 thì ta có thể đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ bằng cách sử dụng công thức

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

Bài tập

Bài 1. Hãy xác định các giới hạn sau

$$a.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x} \qquad d.\ \lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$$

$$b.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{1-2x^2} \qquad e.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$$

$$c.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \qquad f.\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

Bài tập

Bài 2. Hãy xác định các giới hạn sau

$$a.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2} \qquad d.\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{\sin^2 \pi x}$$

$$b.\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-x^2}{6x^4+12} \qquad e.\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x^2+6}{\pi x^3+4}$$

$$c.\ \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^x \qquad f.\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Nguyên hàm

Định nghĩa

Một hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên khoảng I nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc I.

Định lý

Nếu F là nguyên hàm của f trên khoảng I, thì nguyên hàm của f trên khoảng I có dạng tổng quát là

$$F(x) + C$$

trong đó C là một hằng số tùy ý.

Nguyên hàm

Bảng các công thức nguyên hàm

Hàm số	Nguyên hàm	Hàm số	Nguyên hàm
$cf(x)$	$cF(x)$	$\cos x$	$\sin x$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$x^n (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec^2 x$	$\tan x$

Bài tập

Bài 1. Tìm nguyên hàm tổng quát $f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$.

Bài 2. Tìm nguyên hàm tổng quát $f''(x) = 6x + 12x^2$.

Bài 3. Tìm f biết $f''(\theta) = \sin\theta + \cos\theta$, $f'(0) = 4$ và $f(0) = 3$.

Bài 4. Tìm f biết $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10$, $f'(1) = -3$ và $f(1) = 5$.