UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ingeniería

<u>Proyecto 1 “Funciones”</u>

Materia:

Estructuras Discretas

Alumnos:

Alcantar Correa Vianey

Becerril Olivar Axel Daniel

Cano Ortiz Tania Itzel

Cedillo Palacios Chirstian Javier

Juárez Terrazas Al Nair

Meneses Mercado Alejandro

Zetina Muciño Aldo

Profesor:

Germán Lugo Martínez

Grupo: 07 Semestre: 2022-1

Introducción

¿Que es una función?

A simple vista una función es una acción que puede llegar a realizar una persona o una cosa dentro de un sistema de elementos, personas, relaciones, etc, con un fin determinado.

Pero visto desde el punto de vista matemático, utiliza el mismo principio pero aplicado con unas que otras diferencias. Una función es un objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre otras magnitudes y puede representar a través de varios aspectos complementarios.

La definición general de una función (Según Wikipedia) referenciando a la dependencia entre los elementos de 2 conjuntos dados es la siguiente:

Dados dos conjuntos A y B, una función (también aplicación o mapeo) entre ellos es una asociación. f que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B.

Se dice entonces que A es el dominio (también conjunto de partida o conjunto inicial) de f y que B es su codominio (también conjunto de llegada o conjunto final).

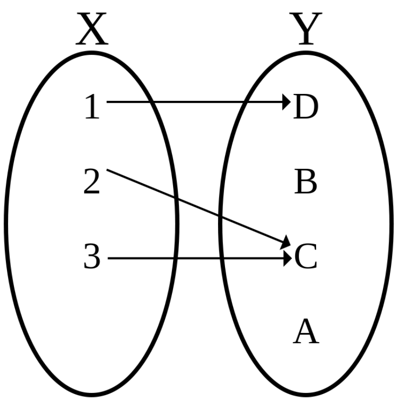
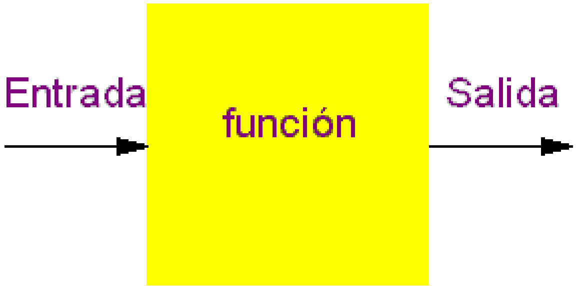


Diagrama de una función

con dominio X y codominio Y

Una función se puede concebir también como un aparato de cálculo. La entrada es el dominio, los cálculos que haga el aparato con la entrada son en sí la función y la salida sería el contradominio.

Esta forma de concebir la función facilita el encontrar su dominio.



Notación: al número que "entra" a la máquina usualmente lo denotamos con una letra, digamos *x* o *s*, o cualquier otra.

Al número que "sale" de la máquina lo denotamos con el símbolo *f(x)* ó *f(s)*.

Tipos de funciones

Teniendo en cuenta la introducción acerca de las funciones podemos entrar de lleno en cada una de las funciones que se pueden abarcar en esto.

- **Funciones lineales**

Una función lineal es aquella cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado. Es decir, tiene la siguiente forma:

$$f(x) = mx + b$$

siendo $m \neq 0$.

Donde:

- ❖ m es la pendiente de la función.
- ❖ b es la ordenada (en el origen) de la función.

La pendiente es el coeficiente de la variable, es decir, m.

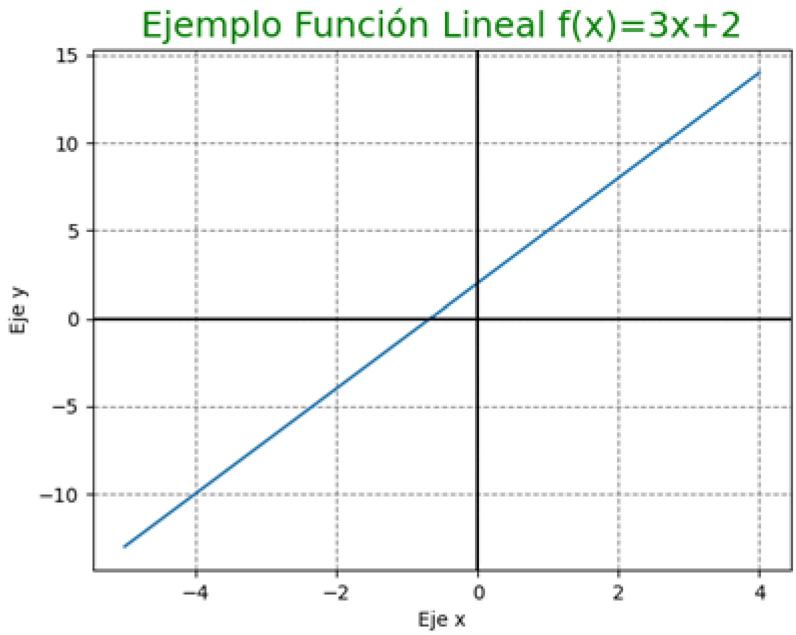
- ❖ Cuando $m > 0$ (positivo), la función $f(x) = mx + b$ será de tipo creciente, es decir, el valor de $f(x)$ aumenta a medida que aumenta el valor de x.
- ❖ Cuando $m < 0$ (negativo), la función $f(x) = mx + b$ será decreciente, es decir, cuando el valor de x aumenta, el valor de $f(x)$ disminuye.

El gráfico que representa una función de primer grado es siempre una recta; En esta representación gráfica, el coeficiente b determinará el punto de corte o intersección con el eje vertical (eje y).

El dominio y rango de las funciones lineales corresponden a todos los números reales, ya que no hay restricciones en la fórmula $f(x) = mx + b$

- ➔ $D_f = (-\infty, \infty)$
- ➔ $R_f = (-\infty, \infty)$

Ejemplo: Tenemos la función $f(x) = 3x + 2$, donde $m = 3$ y $b = 2$



Aplicaciones de las Funciones Lineales

Algunas aplicaciones comunes involucran la resolución de:

★ Problemas de edades
★ Problemas de velocidad, tiempo y distancia
★ Problemas de geometría
★ Problemas de porcentajes y dinero
★ Problemas de presión y fuerzas
★ Problemas de salarios

Estos problemas de la vida cotidiana son convertidos a formas matemáticas para formar ecuaciones lineales, las cuales son resueltas usando varios métodos. Estas ecuaciones deben explicar claramente la relación entre los datos y las variables.

En economía hay dos funciones que tienen especial trascendencia, como son la función de la oferta y la función de la demanda, que se consideran lineales y son las dos funciones que determinan el equilibrio de mercado.

En física se estudia el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) en el cual, la posición de un móvil en función del tiempo viene dada mediante funciones lineales.

En la ciencia en general se utilizan con mucha frecuencia, por ejemplo, para hallar tasas de variación (por ejemplo, en el cálculo de velocidades o en el estudio de reacciones químicas).

También se usan para efectuar cambios de unidades de medida (por ejemplo, pasar de kilómetros a millas, o de grados centígrados a grados Fahrenheit) y para realizar predicciones siempre que la relación entre las variables sea aproximadamente lineal.

- **Funciones definidas por partes**

Una función a trozos, también llamada función a tramos, función segmentada o función seccionada, es aquella que se define con una expresión analítica diferente para distintos intervalos de su dominio. Tienen la forma general:

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{Expr}_1 & \mathrm{si} \quad \mathrm{Subconjunto}_1 \\ \mathrm{Expr}_2 & \mathrm{si} \quad \mathrm{Subconjunto}_2 \\ \quad\vdots & \\ \mathrm{Expr}_n & \mathrm{si} \quad \mathrm{Subconjunto}_n \end{cases}$$

Donde:

Expr*$_1$*, Expr*$_2$*, Expr*$_n$*: Son las fórmulas concretas con las que se obtiene el valor de la función f(x) (variable dependiente y). Se utiliza una u otra según la rama o intervalo del dominio en el que esté la variable independiente x.

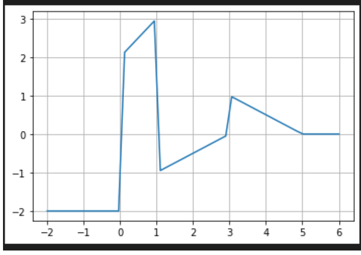
Subconjunto*$_1$*, Subconjunto*$_2$*, Subconjunto*$_n$*: Son los intervalos de números reales para los cuales está definida esa rama. Deben expresar un rango de valores *disjuntos* de la variable independiente *x*. Dicho de otra manera, un valor de *x* no puede estar dividido en dos ramas distintas.

Ejemplo en Python:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2, 6)
y = np.piecewise(x, [ (x <= 0) & (x >= -2), (x <= 1) & (x >= 0),(x <= 3) & (x >= 1), (x <= 5) & (x >= 3)], [-2, lambda x: x+2, lambda x: 0.5*x-1.5, lambda x: -0.5*x+2.5])
plt.plot(x, y)
plt.grid()
plt.show()
```

0.6s



Aplicaciones de las funciones definidas por partes:

Este tipo de funciones pueden aplicarse en varios ámbitos laborales, por ejemplo para el registro en una sala de fiestas, con aforo para 300 personas establece el precio de la entrada cada día en función del número de asistentes que se prevé que habrá en dicho día, se puede calcular el precio de la entrada con un determinado número de asistentes. También sirve si un un bróker (agente financiero) está estudiando alguna gráfica que proporciona los valores en bolsa de las acciones de la empresa de uno de sus clientes durante las 24 horas de un determinado día, con esto se podría calcular el calor máximo que puede haber en un día.

Otro ejemplo puede ser que una compañía telefónica establece el precio de una llamada con un coste de establecimiento de 1€. Además, los primeros 5 minutos de llamada se pagan a 0.5€ a partir de entonces el costo del minuto es de 0.7€.

El primer tramo, en los primeros 5 minutos de llamada: **0<x<=5⇒1+0.5x**

El segundo tramo, a partir del minuto 5 de la llamada, en el que el coste será el coste completo de los 5 primeros minutos de llamada, más 0.7€ por minuto:

x>5⇒3.5+0.7(x−5)=0.7x

Resultando la siguiente operación

$$f(x)=\begin{cases} 1+0.5\cdot x & \text{si} \quad 0<x\leq 5 \\ 0.7x & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$$

- **Funciones polinomiales**

Una función polinomial es una función cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, una función polinomial está definida por la suma o resta de un número finito de términos de diferente grado.

Por lo tanto, una función polinomial se describe matemáticamente con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Por otro lado, las funciones polinomiales también se pueden definir usando la siguiente fórmula:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k * x^k$$

Donde los términos a_k y x^k son el coeficiente y la variable respectivamente de cada monomio que forma la función polinómica.

Los diferentes $a_k(a_0, a_1,..., a_n)$son números reales llamados coeficientes de un polinomio.

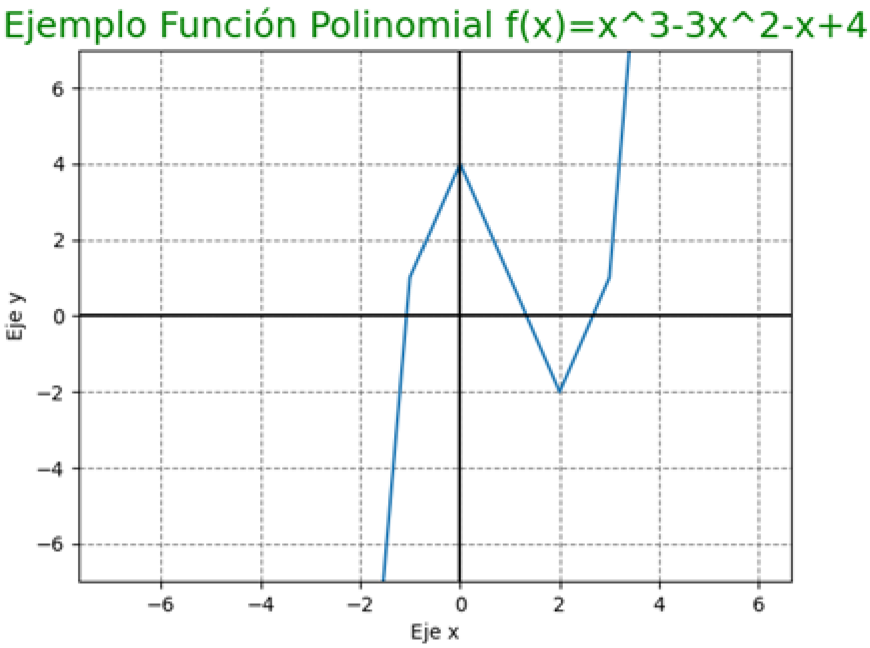
El término $a_n x^n$, llamado término principal, indica el grado de la función polinómica, ya que es el monomio de mayor grado de la función. O, dicho de otra forma, el exponente de valor más grande es el que indica el grado de la función polinómica.

- ➢ El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales, $D_f = (- \infty, \infty)$
- ➢ Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.
- ➢ Los exponentes (o índices) son positivos y enteros.
- ➢ Las funciones polinómicas de grado mayor que 1 no tienen asíntotas.
- ➢ Independientemente del tipo de función polinómica que sea, el único punto de corte con el eje de las ordenadas (eje Y) está a la altura de su término independiente, es decir, en el siguiente punto: (0,
- ➢ En cambio, una función polinómica intercepta el eje de las abscisas (eje X), a lo sumo, tantas veces como el grado de la función.
- ➢ Si el grado de todos los términos fuese impar, la gráfica sería simétrica respecto al origen de coordenada. Pero si todos los términos tuviesen grado par, la gráfica sería simétrica respecto al eje OY.

Entre las funciones polinomiales se encuentran, por ejemplo: las funciones constantes, las funciones lineales, las funciones cuadráticas, las funciones cúbicas, etc.

Ejemplo:

Tenemos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$, donde, $D_f = (-\infty, \infty)$ y $R_f = (-\infty, \infty)$.



Aplicaciones de las Funciones Polinomiales

Debido a su estructura simple, los polinomios son muy sencillos de evaluar, y se usan ampliamente en análisis numérico para interpolación polinómica o para integrar numéricamente funciones más complejas.

Las funciones polinomiales tienen una gran aplicación en la elaboración de modelos que describen fenómenos reales. Algunos de ellos son: la concentración de una sustancia en un compuesto, la distancia recorrida por un móvil a velocidad constante, la compra de cierta cantidad de objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión, la variación de la altura de un proyectil, entre otros.

En álgebra lineal el polinomio característico de una matriz cuadrada codifica muchas propiedades importantes de la matriz. En teoría de los grafos el polinomio cromático de un grafo codifica las distintas maneras de colorear los vértices del grafo usando x colores.

Con el desarrollo de la computadora, los polinomios han sido reemplazados por funciones spline en muchas áreas del análisis numérico. Las splines se definen a partir de polinomios y tienen mayor flexibilidad que los polinomios ordinarios cuando definen funciones simples y suaves. Éstas son usadas en la interpolación spline y en gráficos por computadora.

En el ámbito científico, la parábola puede describir trayectorias de chorros de agua en una fuente o el botar de una pelota, y otras muchas situaciones físicas en las que interviene la gravedad.

En física, permite estudiar con precisión el tiro parabólico (por ejemplo, la trayectoria de un proyectil, la trayectoria de un balón lanzado a canasta) y los movimientos uniformemente acelerados (MUA).

- **Función potencia**

  La función potencia está definida por la expresión general f (x) = ax^S, el exponente n puede ser un número entero o real (positivo o negativo), el factor a es real.

  Se definen de la siguiente manera ax^ndonde n es la potencia a la cual se elevará la base.

Características

- Se pueden aplicar las leyes de los exponentes
- Si n = 0, f(x) = 1
- Si n = 1, f(x) = a
- Su dominio son todos los números reales

Aplicaciones en la vida cotidiana

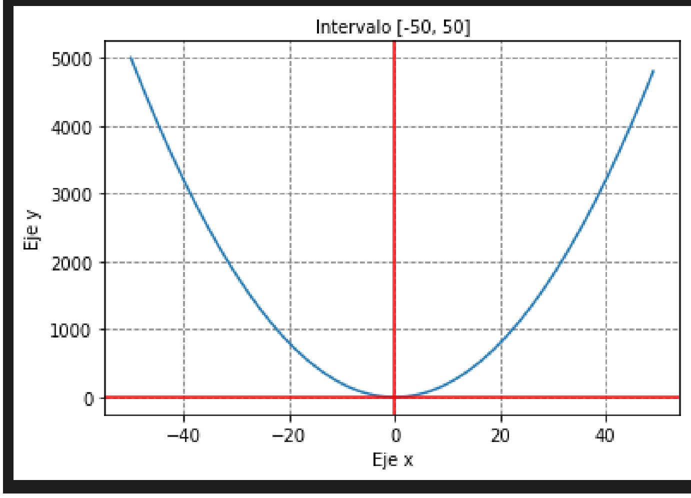
Suele utilizarse en casos cuando los valores varían de manera continua, ya sea creciendo o decreciendo, por ejemplo en la reproducción de bacterias. modelar una progresión geométrica, etc.

Ejemplo en python

```python
from matplotlib import pyplot
def f_lineal(x):
    return 2*x**2

x = range(-50,50)
pyplot.plot(x,[f_lineal(i) for i in x])
pyplot.title("Intervalo [-50, 50]",fontsize=10, color="black")
pyplot.axhline(0,color="red")
pyplot.axvline(0,color="red")
pyplot.xlabel("Eje x")
pyplot.ylabel("Eje y")
pyplot.grid(color="gray",linestyle="dashed")
pyplot.show()
```

✓ 0.1s



- **Función racional**

  Es cualquier función que pueda definirse mediante una fracción racional, que es una fracción algebraica de modo que tanto el numerador como el denominador son polinomios.

  Se definen como el cociente de dos funciones enteras o polinomiales, las cuales se representan de la siguiente manera:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \; donde \; g(x) \neq 0$$

  Otra forma más representativa es la siguiente:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + bx^2 + \cdots + b_nx^n}$$

Siempre y cuando el denominador no sea 0.

Características de las funciones racionales.

- El denominador debe ser distinto a cero.
- La gráfica generada es una hipérbola.
- Su dominio son todos los números reales a excepción de las raíces del denominador.
- Tienen asíntotas verticales en las raíces del denominador.
- Tiene asíntotas horizontales si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador
- Tiene asíntotas oblicuas si el grado del numerador es mayor por un grado que el denominador.
- Tienen puntos de inflexión.

Aplicación en la vida cotidiana

Suelen ser utilizadas en el análisis numérico para aproximar resultados de funciones más complejas, calcular distancias, calcular el ritmo de trabajo, etc.

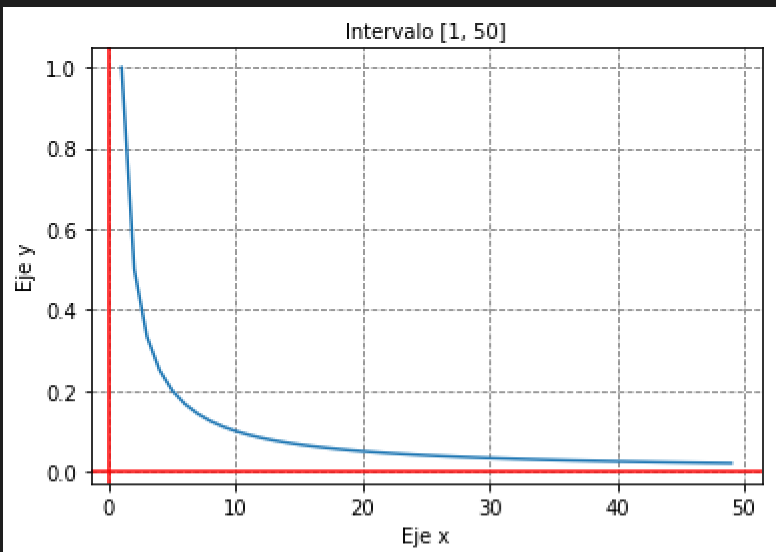
Función racional gráfica en Python.

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot

def f_racional(x):
    return 1/x

x = range(1,50)
pyplot.plot(x,[f_racional(i) for i in x])
pyplot.title("Intervalo [1, 50]",fontsize=10, color="black")
pyplot.axhline(0,color="red")
pyplot.axvline(0,color="red")
pyplot.xlabel("Eje x")
pyplot.ylabel("Eje y")
pyplot.grid(color="gray",linestyle="dashed")
pyplot.show()
```

✓ 0.2s



- **Función algebraica**

Es una función que se puede definir como la raíz de una ecuación polinomial. Muy a menudo, las funciones algebraicas son expresiones algebraicas que usan un número finito de términos, que involucran sólo las operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división y elevación a una potencia fraccionaria.

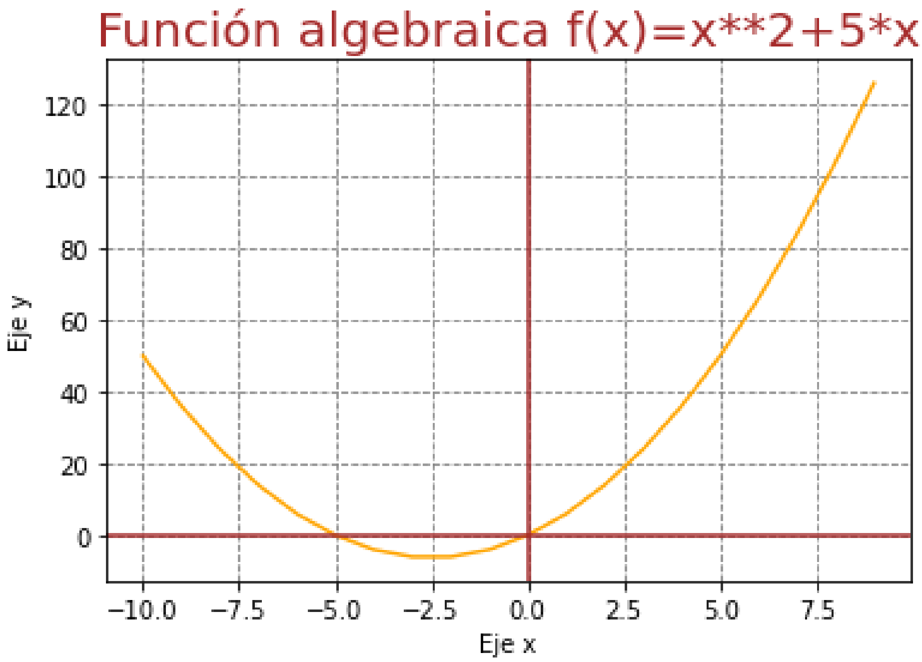
Características

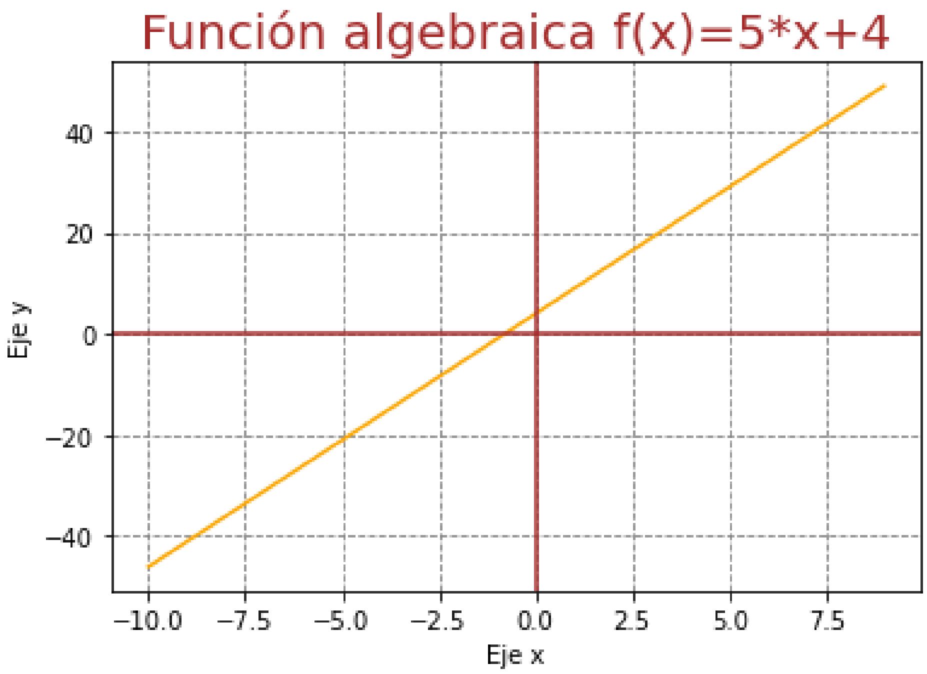
- Satisface una ecuación polinómica
- Existen tres tipos:
    - Racional entera
    - Racional fraccionaria
    - Irracionales

Aplicación a la vida cotidiana.

Ejemplo en python

En la vida cotidiana es muy común utilizar este tipo de funciones para tener una predicción de cuánto dinero ganará o perderá un negocio, graficar el curso de objetos en movimiento y obtener valores máximos y mínimos.


Función algebraica f(x)=x**2+5*x
Eje y
Eje x
120
100
80
60
40
20
0
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5


Función algebraica f(x)=5*x+4
Eje y
Eje x
40
20
0
−20
−40
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5

- **Función trigonométrica**

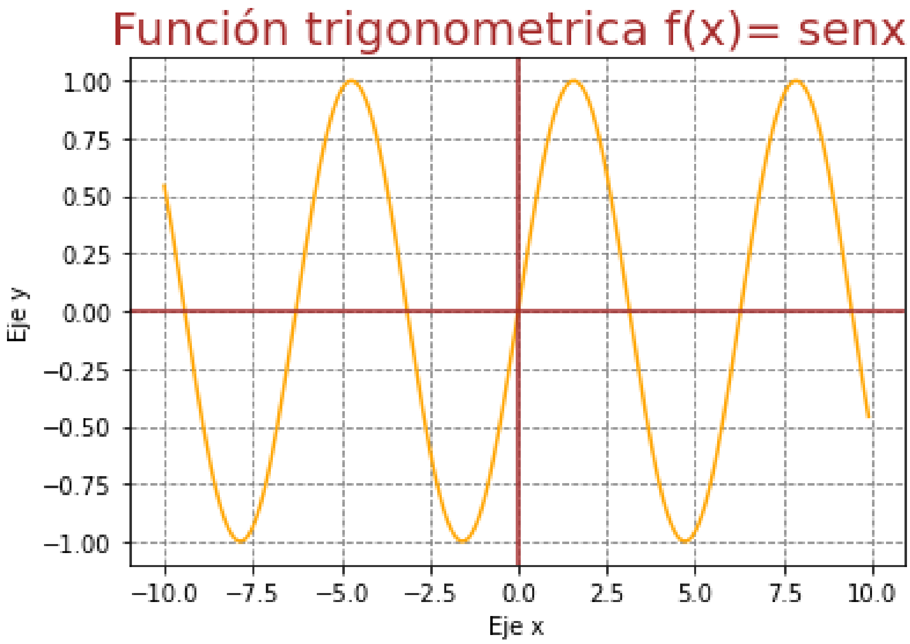
  Son funciones reales que relacionan un ángulo de un triángulo rectángulo con razones de dos longitudes de lados. Son muy utilizados en todas las ciencias relacionadas con la geometría, como la navegación, la mecánica de sólidos, la mecánica celeste, la geodesia y muchas otras. Se encuentran entre las funciones periódicas más simples y, como tales, también se utilizan ampliamente para estudiar fenómenos periódicos a través del análisis de Fourier.

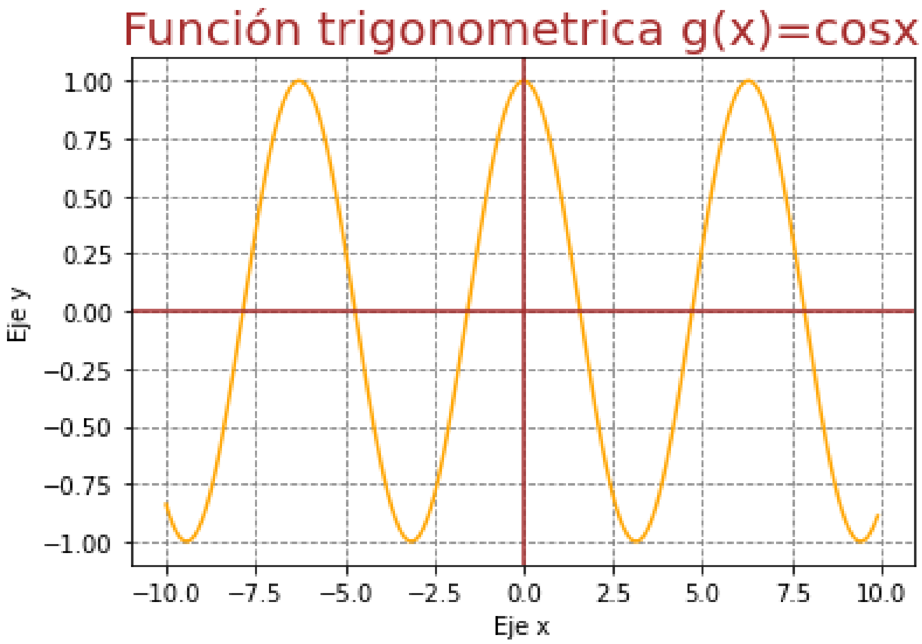
  Características de seno y coseno

  - Son de naturaleza periódica
  - El periodo de estas funciones es 2p
  - Están definidas para todo el conjunto de números reales
  - Son funciones continuas
  - Están acotadas ya que sus valores están en [-1,1]
  - La función seno es simétrica respecto al origen
  - La función coseno es simétrica respecto al eje y

  Aplicaciones en la vida cotidiana

  Ejemplo en python





- **Funciones exponenciales**

La función exponencial es una función matemática denotada por $f(x) = exp(x)\ o\ e^{x}$ o a^{2} (donde el argumento x se escribe como exponente). Puede definirse de varias formas equivalentes. Su omnipresente aparición en las matemáticas puras y aplicadas ha llevado al matemático W. Rudin a opinar que la función exponencial es "la función más importante en matemáticas". Su valor en 1, $e = exp(1)$ es una constante matemática llamada número de Euler.

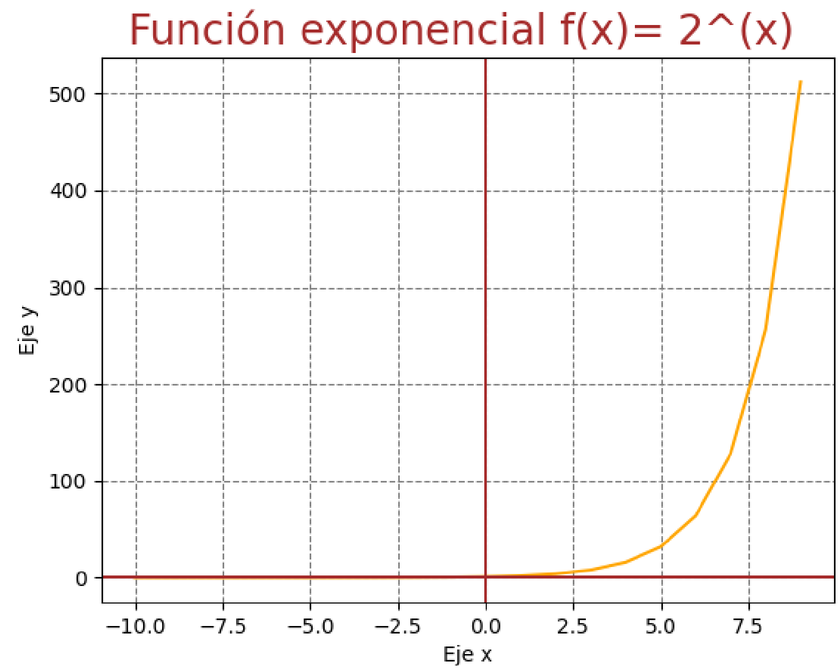
Características

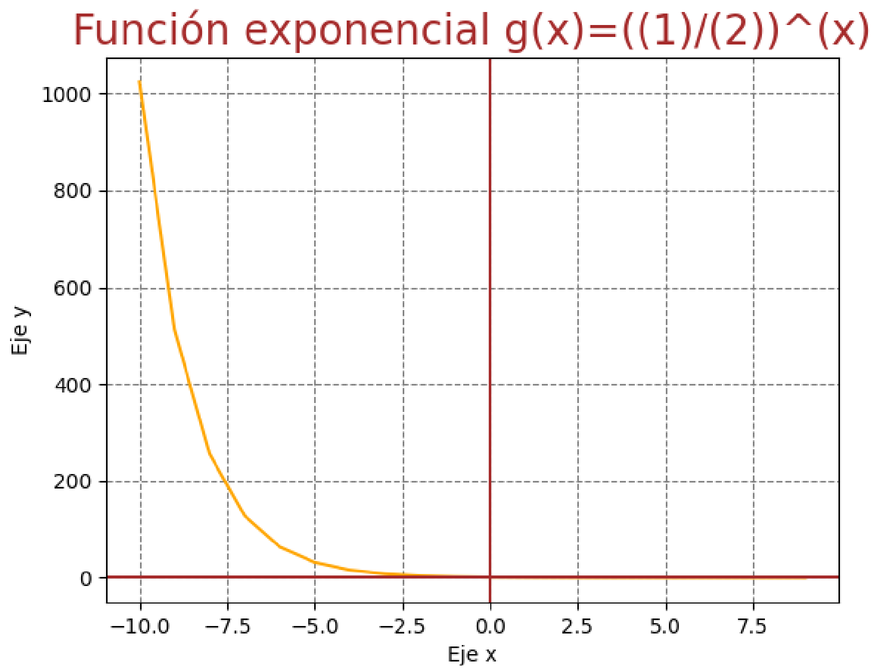
- Si x es = 0 f(x) vale 1
- Si x es = 1, f(x) vale a
- Su dominio y rango son todos los reales
- Se pueden utilizar las leyes de los exponentes
- Si x < 1, f(x) es decreciente
- Si x>1, f(x) es creciente

Aplicaciones en la vida cotidiana

Suele utilizarse para el estudio de fenómenos físicos del mundo real, pues ayuda a saber qué tan rápido crece una población, un claro ejemplo fue el crecimiento poblacional de personas infectadas por VIH.
Puede ayudar a la medición de la intensidad de un terremoto, estimar la edad de un fósil, medir qué porcentaje de interés genera cierta capital, etc.

Ejemplo en python





- **Funciones logarítmicas**

La función logarítmica es una relación matemática que asocia a cada número real positivo x con su logaritmo y en una base a. Esta relación cumple con los requisitos para ser una función: cada elemento x perteneciente al dominio tiene una imagen única.

Propiedades:

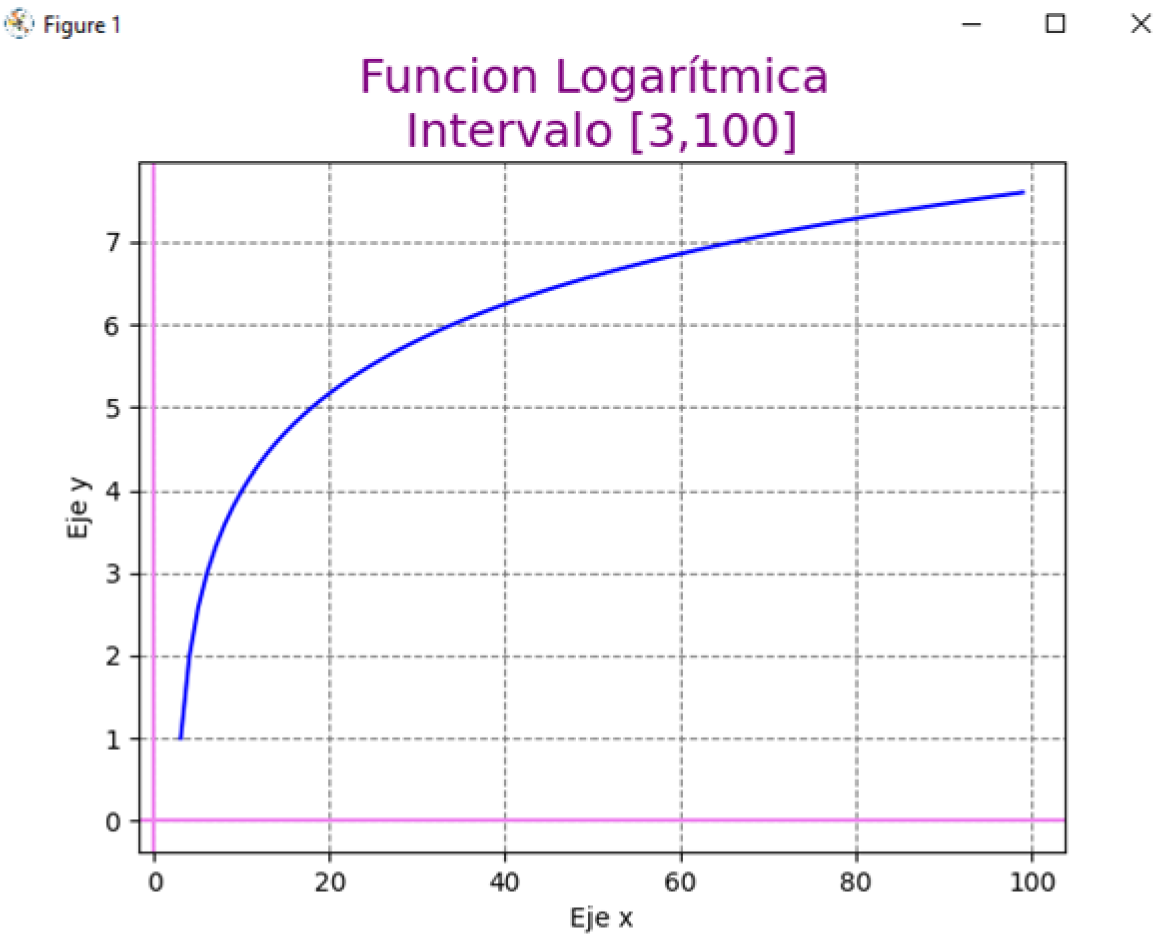
- El dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.
- El rango es el conjunto de todos los números reales.
- (Ya que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, el dominio de la función logarítmica es el rango de la función exponencial y el rango de la función logarítmica es el dominio de la función exponencial)
- La función es continua y uno-a-uno.
- El eje de las y es la asíntota de la gráfica.
- La gráfica intersecta al eje de las x en (1, 0). Esto es, la intercepción en x es 1.

Ejemplo en Python:

```python
'''
Sea la función f(x)=log(2x-4, 2)
'''
import math
from matplotlib import pyplot

def f1(x):
    return math.log(2*x-4, 2)

x = range (3,100)
pyplot.plot(x,[f1(i) for i in x],'b')
pyplot.axhline(0, color = 'violet')
pyplot.axvline(0, color = 'violet')
pyplot.title("Funcion Logarítmica \nIntervalo [3,100]", fontsize=14,color='purple')
pyplot.xlabel("Eje x")
pyplot.ylabel("Eje y")
pyplot.grid(color= "gray",linestyle = 'dashed')
pyplot.show()
```



Aplicaciones:

Las funciones logarítmicas son muy útiles cuando se trabaja con fenómenos que tienen un rango muy amplio de valores, porque te permiten mantener los valores que sí funcionan en un rango más pequeño.

El poder de los logaritmos consiste en su utilidad para resolver ecuaciones exponenciales. Algunos ejemplos incluyen sonido (medidas de decibeles), terremotos (escala Richter), el brillo de las estrellas y química (balance de pH, una medida de acidez y alcalinidad).

- **Funciones constantes**

En matemáticas, una función constante es una función cuyo valor (de salida) es el mismo para cada valor de entrada. Por ejemplo, la función y(x) = 4 es una función constante porque el valor de y(x) es 4 independientemente del valor de entrada x.

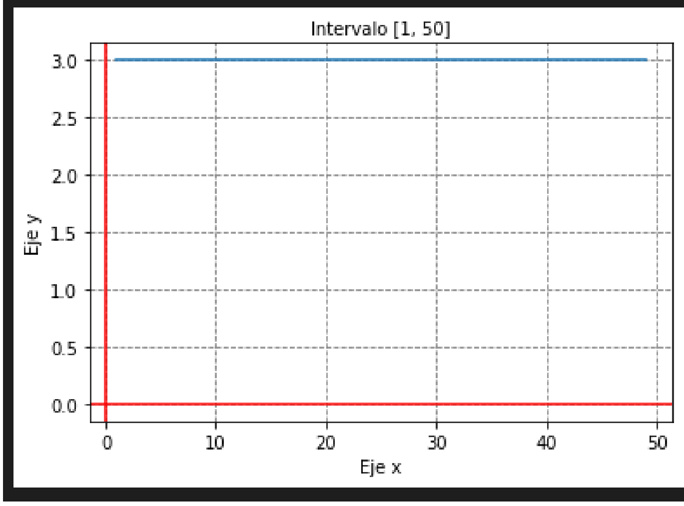
Ejemplo en python

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot

def f_constante(x):
    return 3

x = range(1,50)
pyplot.plot(x,[f_constante(i) for i in x])
pyplot.title("Intervalo [1, 50]",fontsize=10, color="black")
pyplot.axhline(0,color="red")
pyplot.axvline(0,color="red")
pyplot.xlabel("Eje x")
pyplot.ylabel("Eje y")
pyplot.grid(color="gray",linestyle="dashed")
pyplot.show()
```

✓ 0.1s



- **Función valor absoluto**

El valor absoluto es una función, denotada como |x| que se encuentra definida sobre todos los números reales y que devuelve, por cada número real, su respectivo valor positivo. Una función de valor absoluto es una función que contiene una expresión algebraica dentro de los símbolos de valor absoluto. Recuerde que el valor absoluto de un número es su distancia desde 0 en la recta numérica.

Propiedades:

- El valor absoluto o numérico de un número es la distancia del mismo con respecto al 0 en la recta numérica.
- El valor absoluto de cualquier número es siempre positivo. Este valor puede ser conocido también como el módulo del número.
- El valor absoluto de un número x se escribe como | x |, y se lee como “módulo de x”.
- Por ejemplo, la posición de 2 y −2 en la recta numérica indica que −2 <2, pero que ambos están a la misma distancia de 0.
  Por lo tanto, se dice que −2 y 2 tienen el mismo valor absoluto.

Ejemplo en Python:

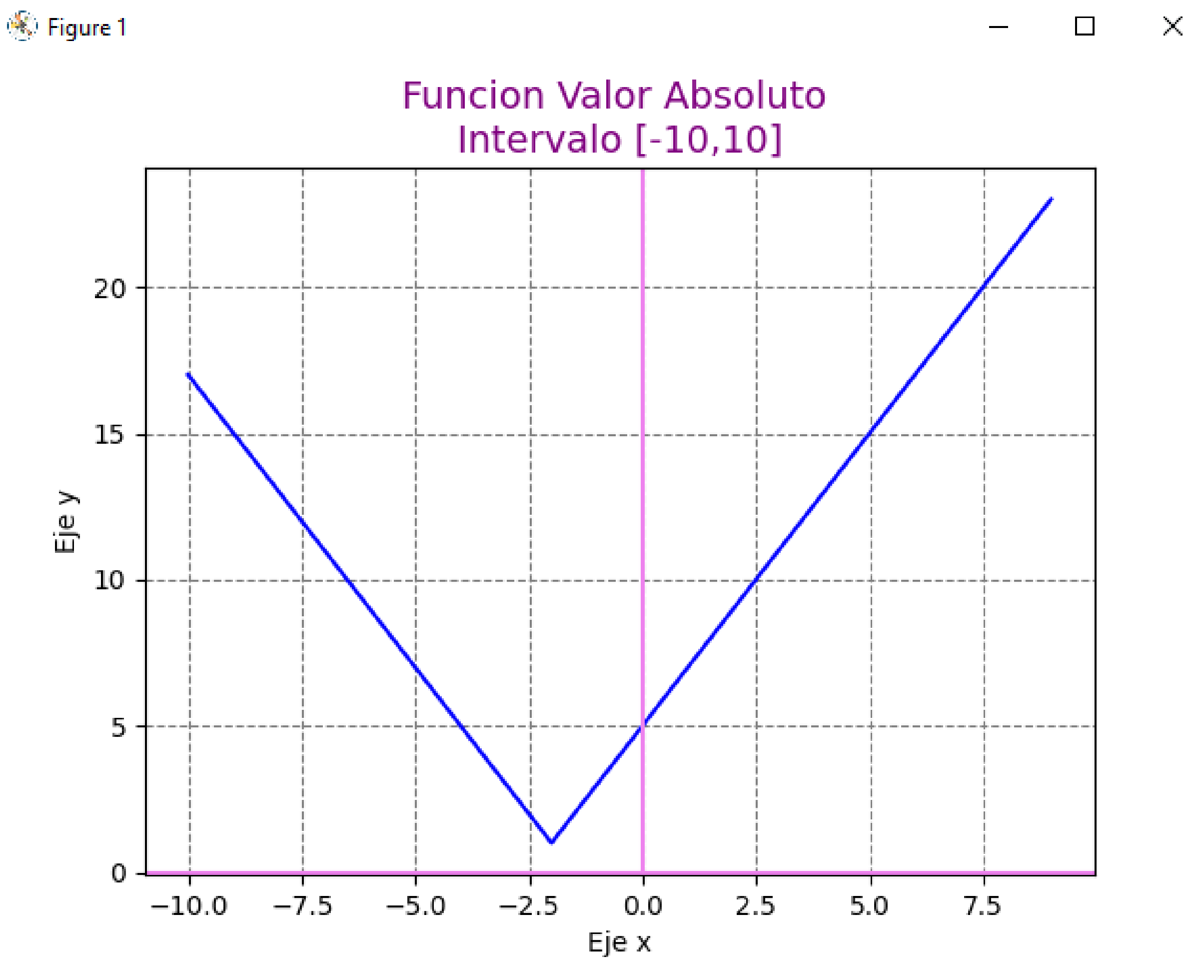
```python

'''
Sea la función f(x)=1+|2x+4|
'''

def f2(x):
    return 1+abs(2*x+4)

x = range (-10,10)
pyplot.plot(x,[f2(i) for i in x],'b')
pyplot.axhline(0, color = 'violet')
pyplot.axvline(0, color = 'violet')
pyplot.title("Funcion Valor Absoluto \nIntervalo [-10,10]", fontsize=14,color='purple')
pyplot.xlabel("Eje x")
pyplot.ylabel("Eje y")
pyplot.grid(color= "gray",linestyle = 'dashed')
pyplot.show()

```



Aplicaciones:

El valor absoluto está relacionado con las nociones de magnitud, distancia y norma en diferentes contextos matemáticos desde cuaterniones, hasta anillos vectoriales.

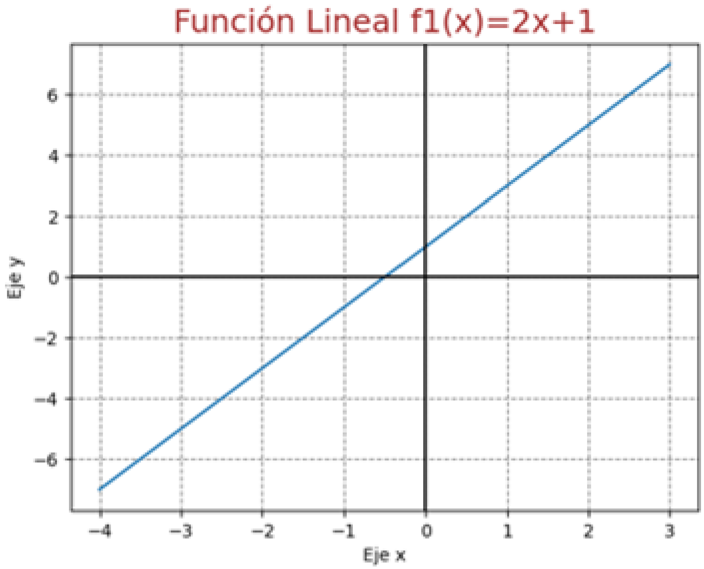
Un ejemplo claro de la vida diaria son las altitudes, las distancias y la temperatura ya que estas siempre son absolutas, no decimos estas a -15 metros de distancia, siempre se dice la magnitud absoluta.

Operaciones con funciones

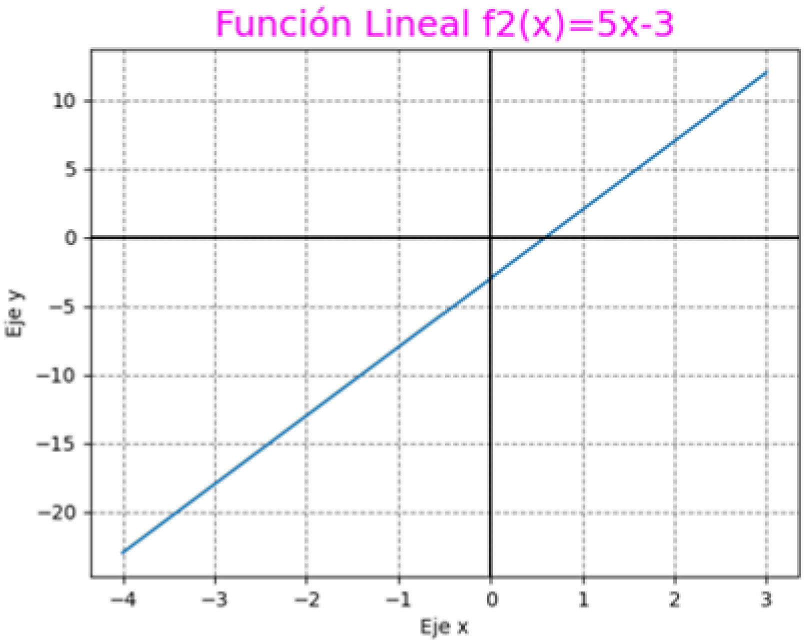
- **Funciones lineales**

a) Suma:

Tenemos la función $f_1(x) = 2x + 1$, donde $m = 2,\ b = 1$, $D_{f1} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f1} = (-\infty, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = 5x - 3$, donde $m = 5,\ b = -3$, $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \infty)$

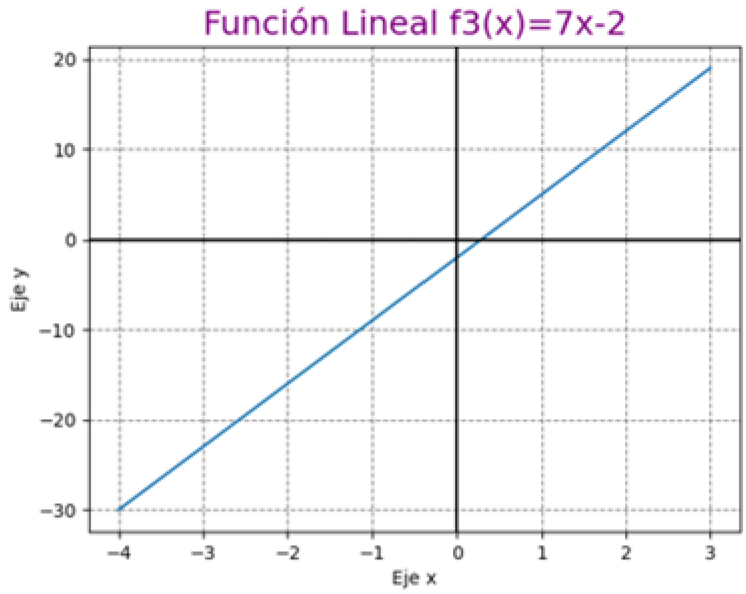


La suma de funciones lineales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

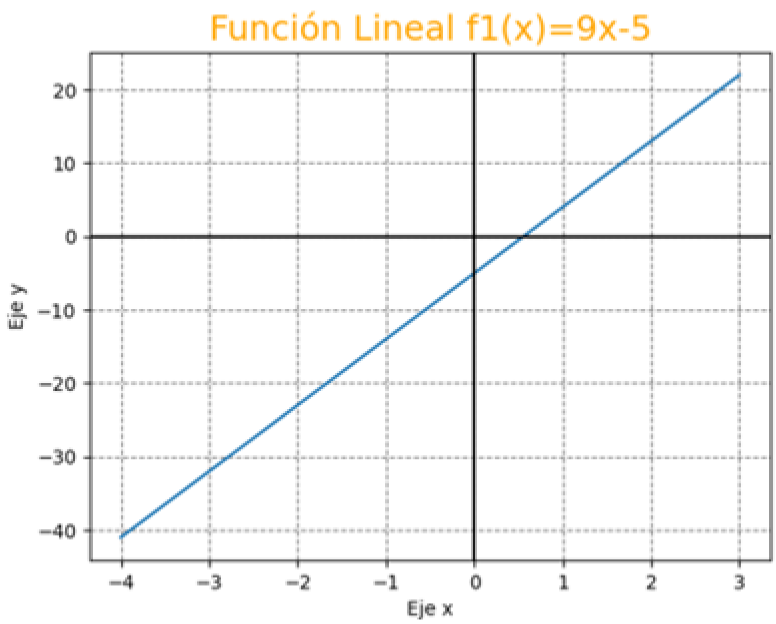
$$f_3(x) = (2x + 1) + (5x - 3) = 7x - 2$$

Nos queda la función $f_3(x) = 7x - 2$, donde $m = 7,\ b = -2$, $D_{f3} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f3} = (-\infty, \infty)$

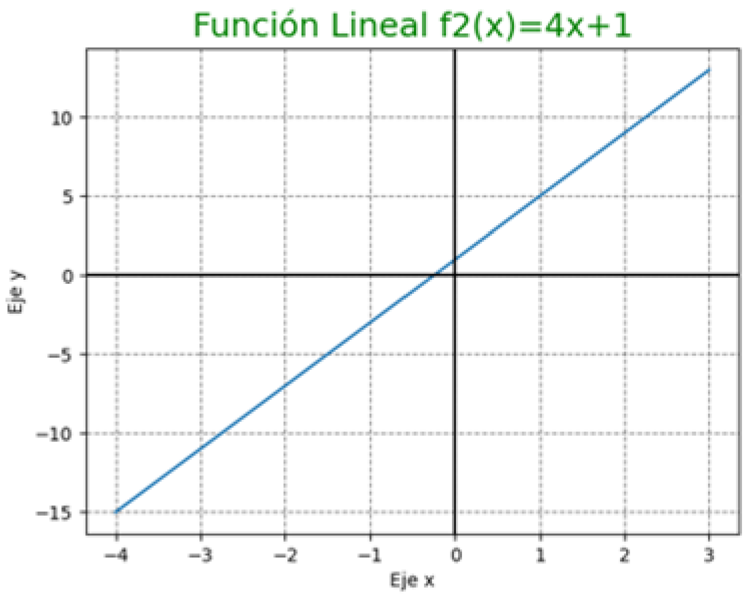


b) Resta

Tenemos la función $f_1(x) = 9x - 5$, donde $m = 9,\ b = -5,\ D_{f1} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f1} = (-\infty, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = 4x + 1$, donde $m = 4$, $b = 1$, $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \infty)$

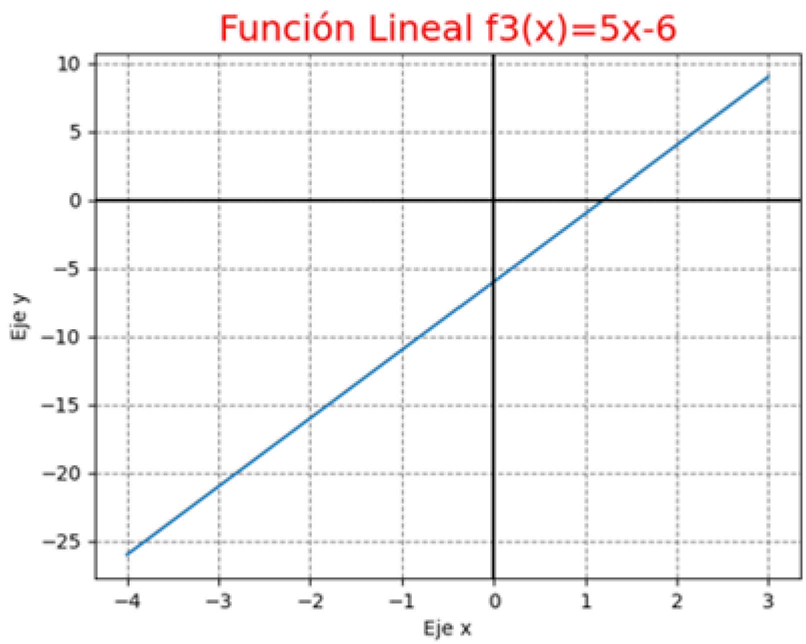


La resta de funciones lineales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

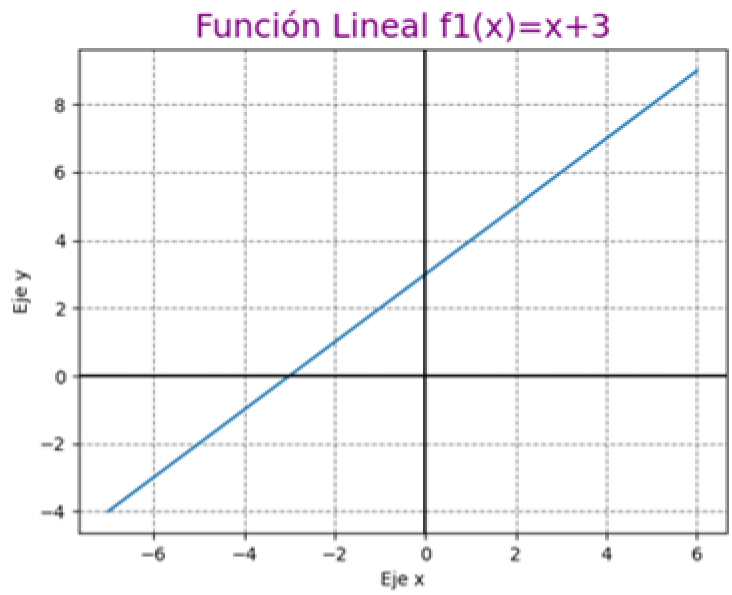
$$f_3(x) = (9x - 5) - (4x + 1) = 5x - 6$$

Nos queda la función $f_3(x) = 5x - 6$, donde $m = 5$, $b = -6$, $D_{f3} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f3} = (-\infty, \infty)$

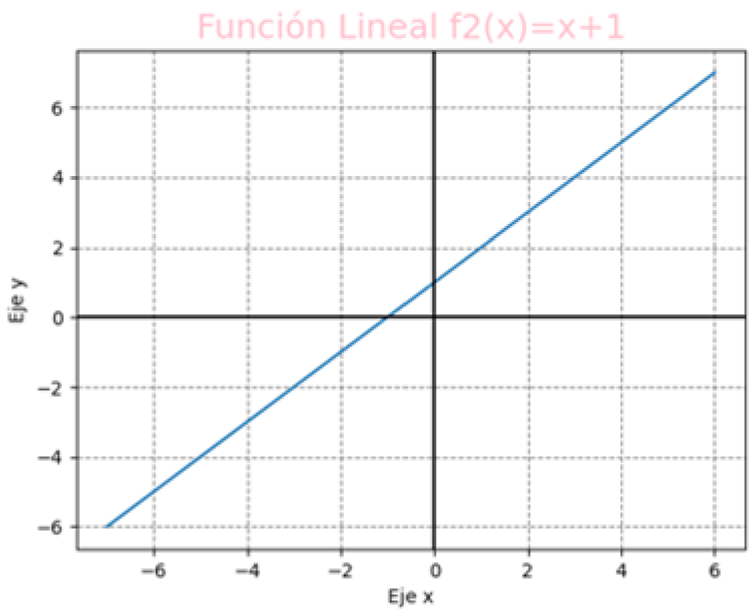


c) Multiplicación

Tenemos la función $f_1(x) = x + 3$, donde $m = 1$, $b = 3$, $D_{f1} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f1} = (-\infty, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = x + 1$, donde $m = 1$, $b = 1$, $D_{f2} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f2} = (-\infty, \infty)$

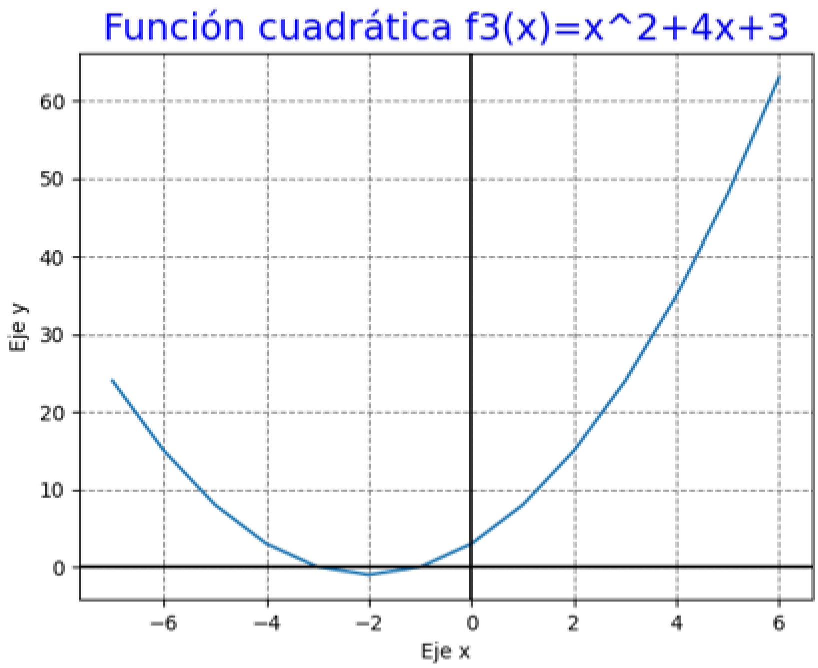


La multiplicación de funciones lineales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = f_1(x) * f_2(x)$$

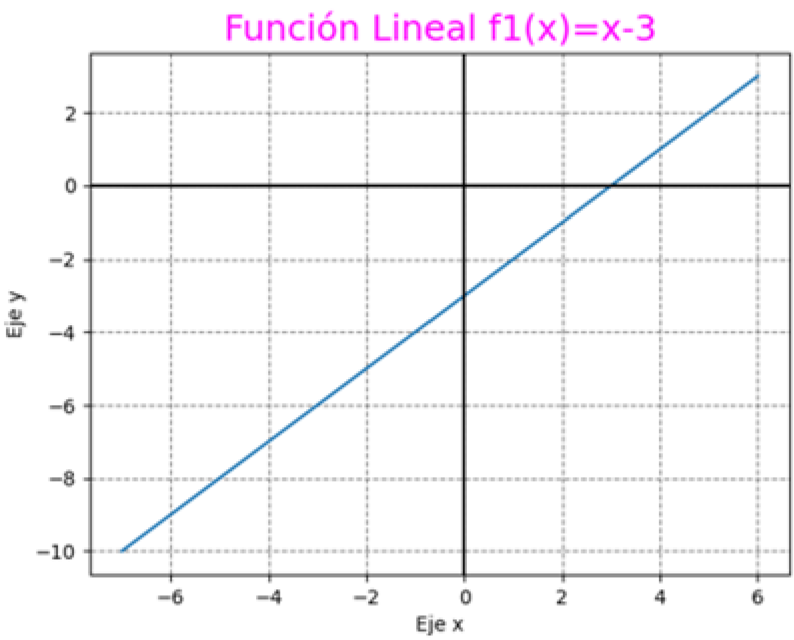
$$f_3(x) = (x+3)*(x+1) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Nos queda la función $f_3(x) = x^2 + 4x + 3$, donde $D_{f3} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f3} = [-1, \infty)$

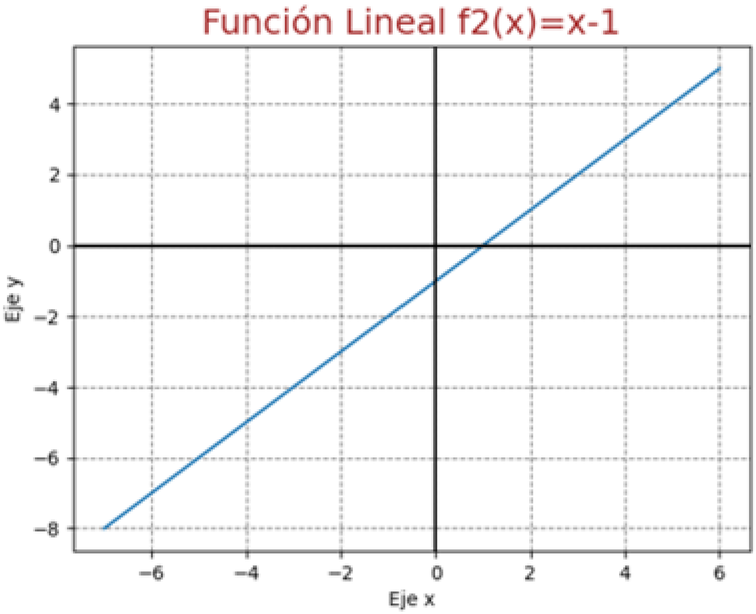


d) División

Tenemos la función $f_1(x) = x - 3$, donde $m = 1$, $b = -3$, $D_{f1} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f1} = (-\infty, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = x - 1$, donde $m = 1$, $b = -1$, $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \infty)$

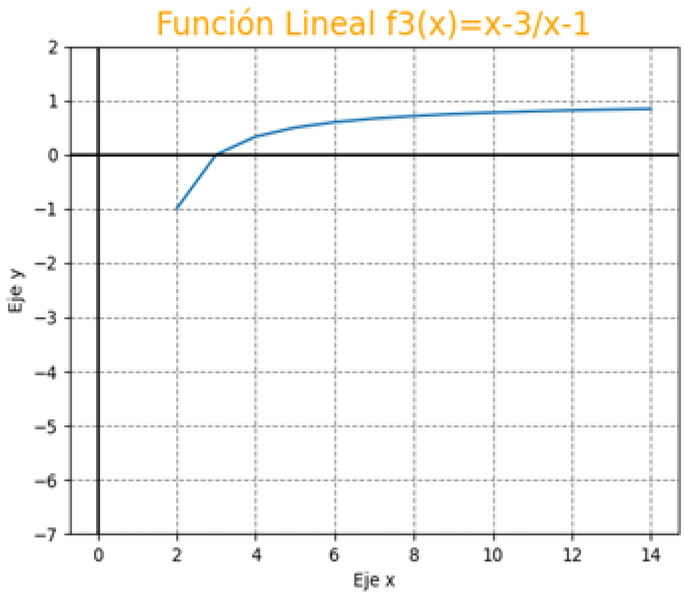


La división de funciones lineales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

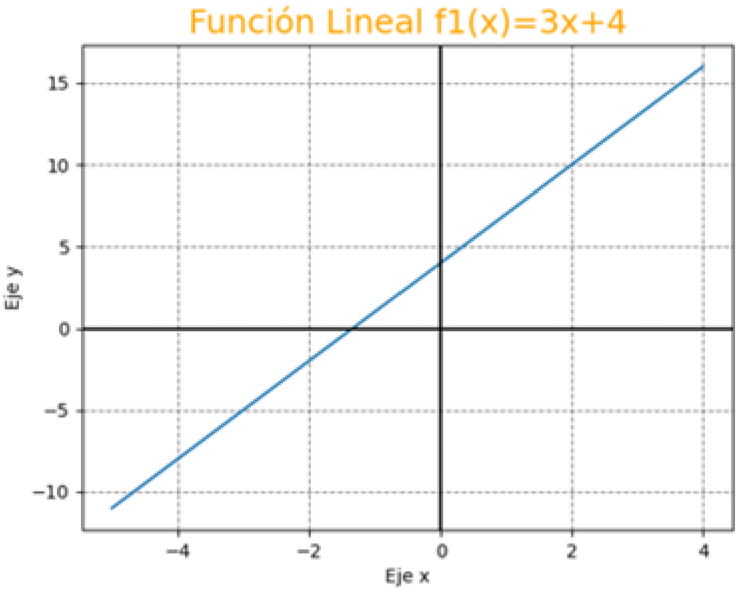
$$f_3(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x - 3}{x - 1}$$

Nos queda la función racional $f_3(x) = \frac{x-3}{x-1}$, donde $D_{f3} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ y $R_{f3} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

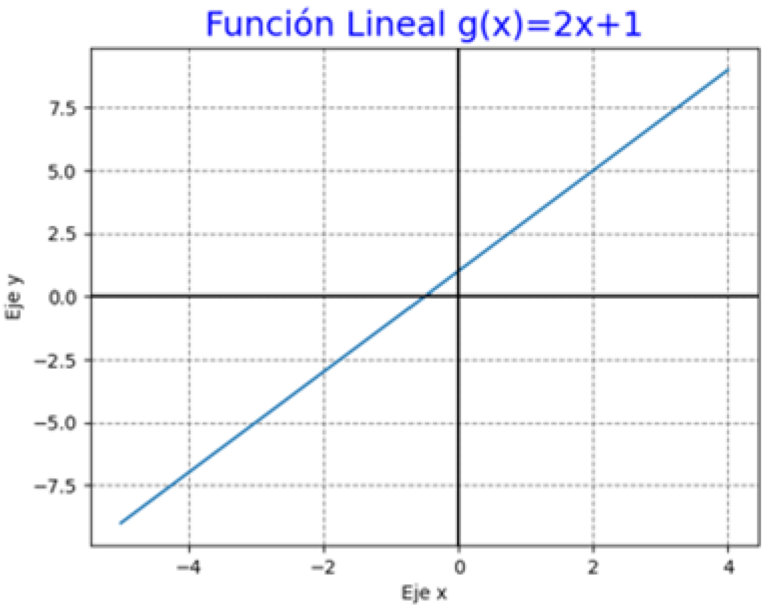


e) Composición

Tenemos la función $f(x) = 3x + 4$, donde $m = 3$, $b = 4$, $D_{f1} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f1} = (-\infty, \infty)$



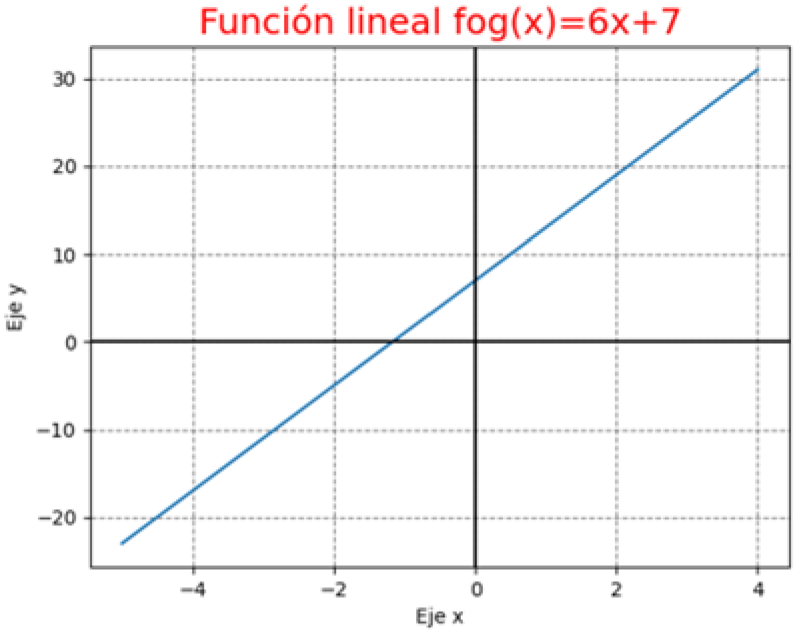
Tenemos la función $g(x) = 2x + 1$, donde $m = 2$, $b = 1$, $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \infty)$



La composición de funciones lineales se realiza de la siguiente manera:

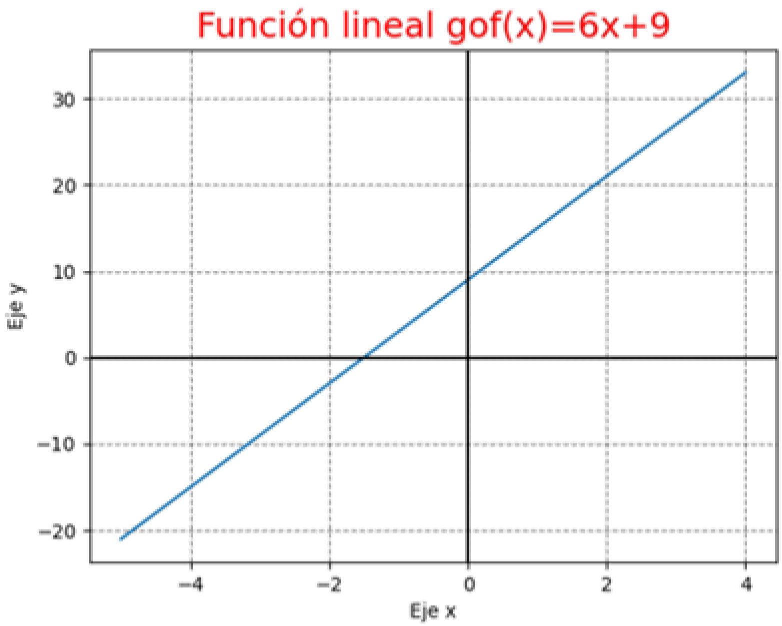
$$fog(x) = 3(2x + 1) + 4 = 6x + 7$$

Nos queda la función $fog(x) = 6x + 7$, donde $m = 6,\ b = 7$, $D_{fog} = (-\infty, \infty)$ y $R_{fog} = (-\infty, \infty)$



$$gof(x) = 2(3x + 4) + 1 = 6x + 9$$

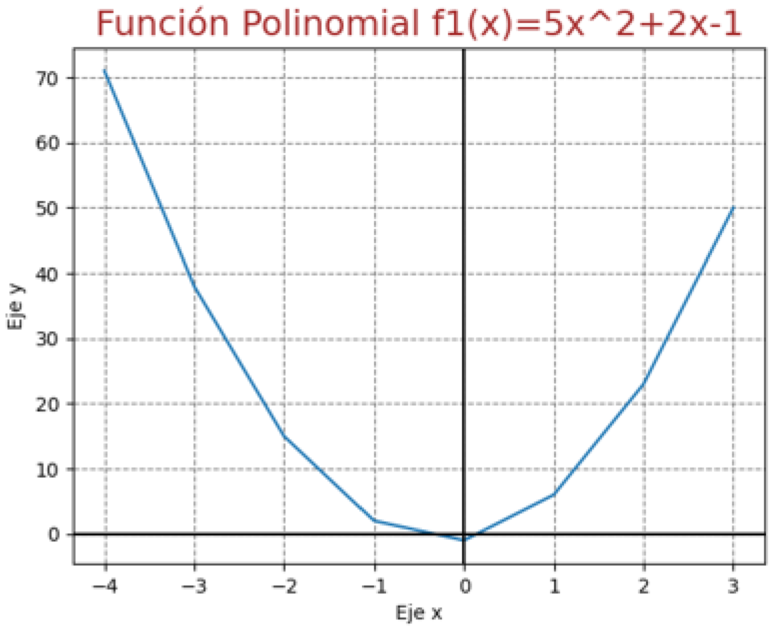
Nos queda la función $gof(x) = 6x + 9$, donde $m = 6,\ b = 9$, $D_{gof} = (-\infty, \infty)$ y $R_{gof} = (-\infty, \infty)$



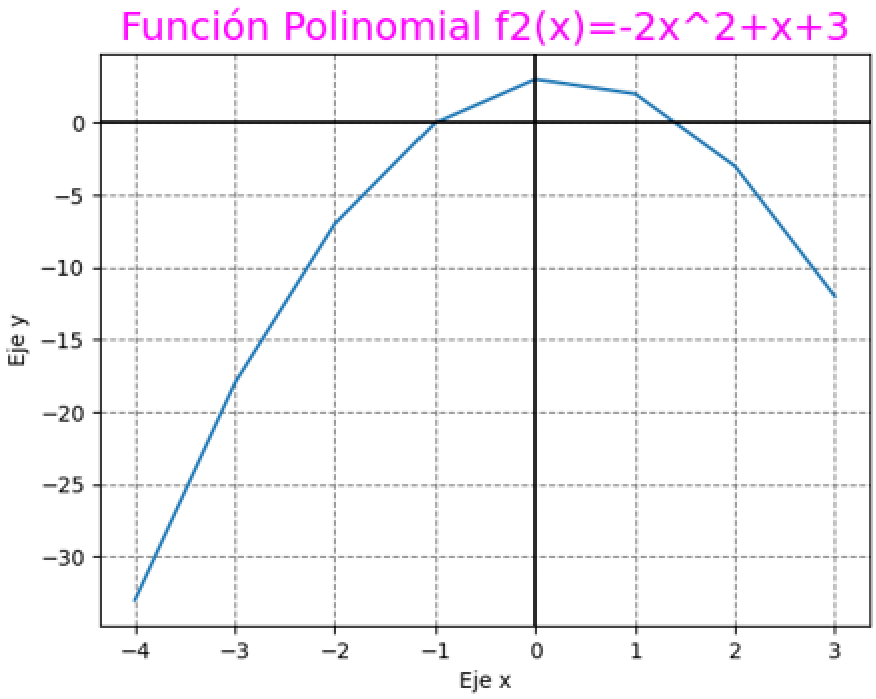
- **Funciones polinomiales**

a) Suma

Tenemos la función $f_1(x) = 5x^2 + 2x - 1$, $D_{f1} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f1} = [-\frac{6}{5}, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = -2x^2 + x + 3$, $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \frac{25}{8}]$

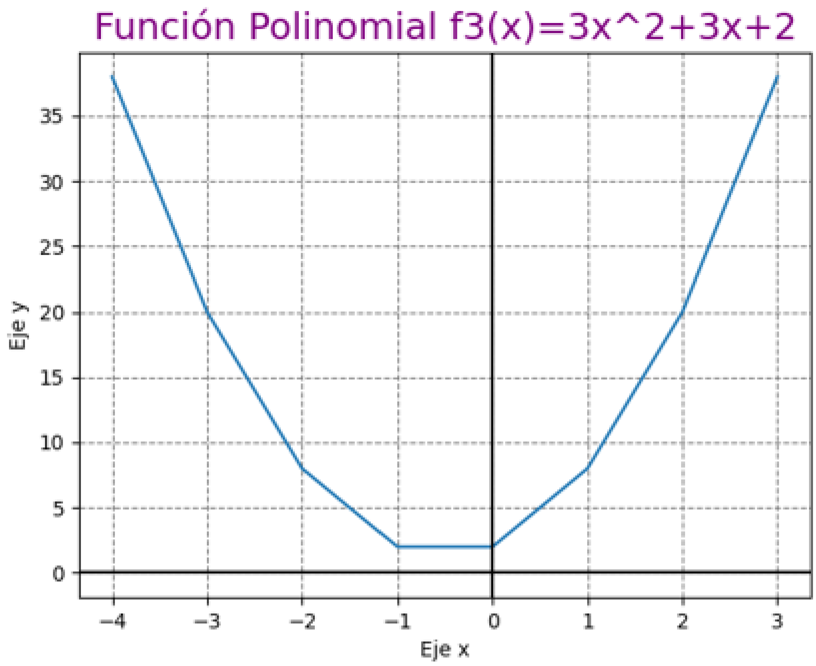


La suma de funciones polinomiales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

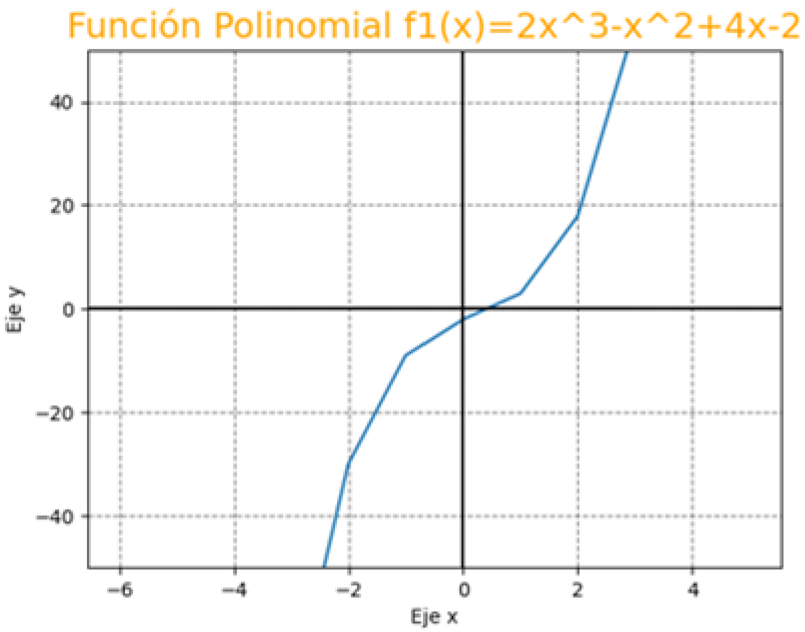
$$f_3(x) = (5x^2 + 2x - 1) + (-2x^2 + x + 3) = 3x^2 + 3x + 2$$

Nos queda la función $f_3(x) = 3x^2 + 3x + 2$, $D_{f3} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f3} = [\frac{5}{4}, \infty)$

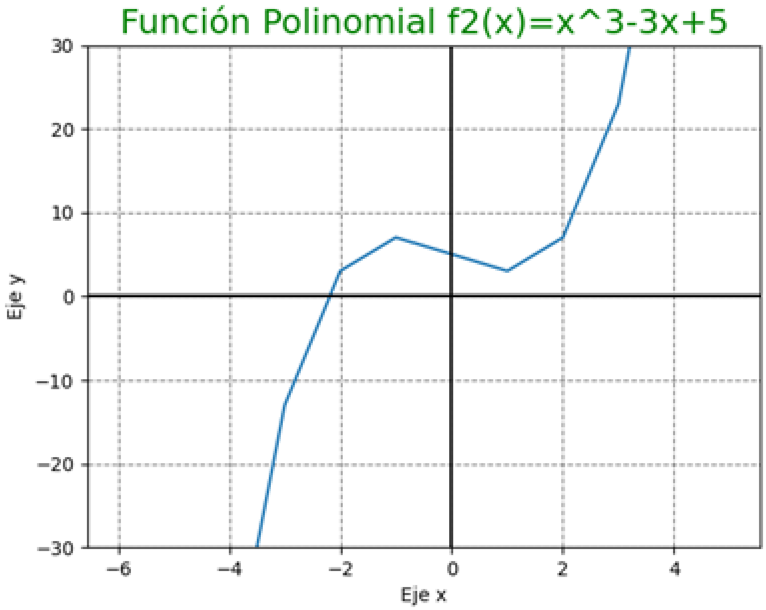


a) Resta

Tenemos la función $f_1(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 2$, donde $D_{f1} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f1} = (-\infty, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = x^3 - 3x + 5$, donde $D_{f2} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f2} = (-\infty, \infty)$

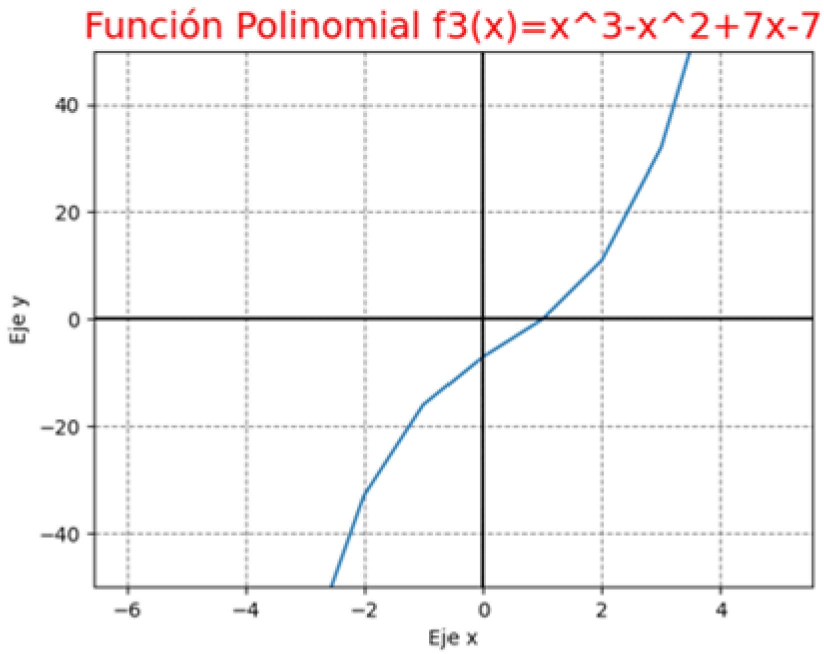


La resta de funciones polinomiales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

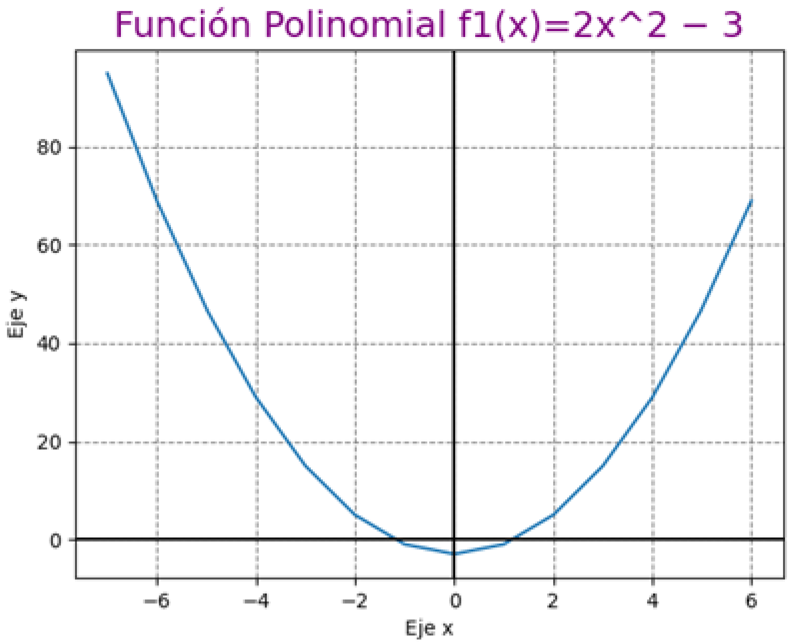
$$f_3(x) = (2x^3 - x^2 + 4x - 2) - (x^3 - 3x + 5\ ) = x^3 - x^2 + 7x - 7$$

Nos queda la función $f_3(x) = x^3 - x^2 + 7x - 7$, donde $D_{f3} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f3} = (-\infty, \infty)$

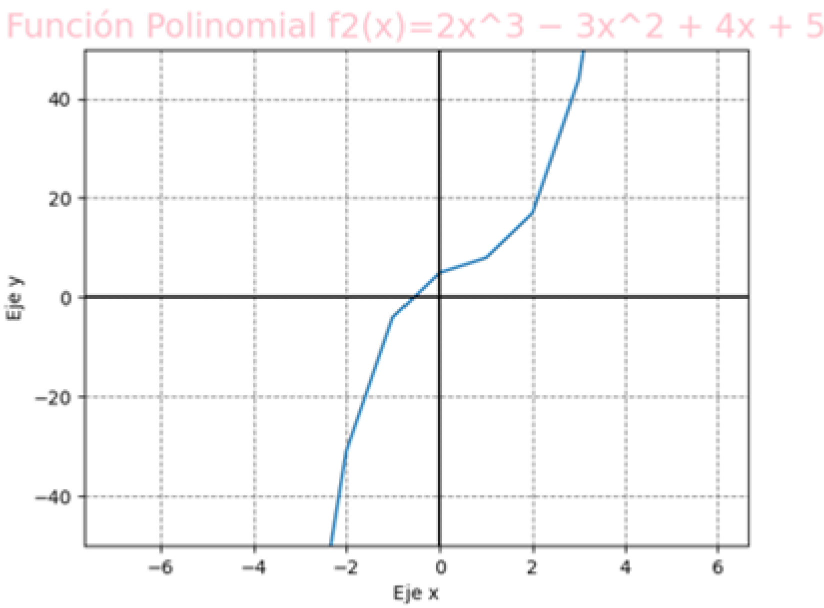


b) Multiplicación

Tenemos la función $f_1(x) = 2x^2\ -\ 3$, donde $D_{f1} = (-\infty, \infty)\ y\ R_{f1} = [-3, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, donde $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \infty)$

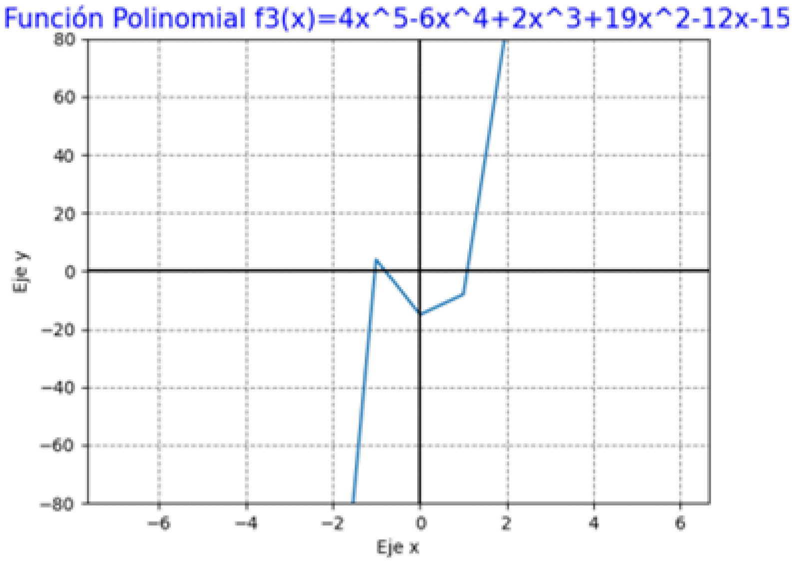


La multiplicación de funciones polinomiales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = f_1(x) * f_2(x)$$

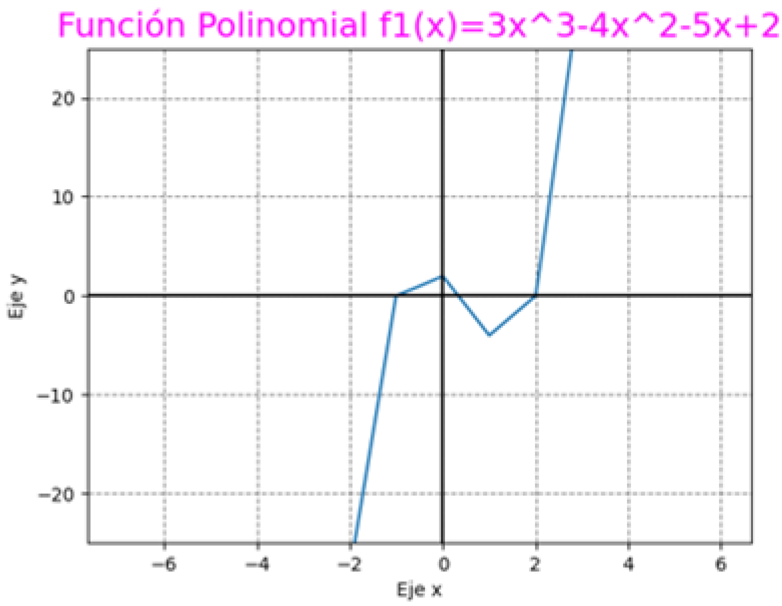
$$\begin{aligned} f_3(x) = (2x^2 - 3) * (2x^3 - 3x^2 + 4x + 5) \\ = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 12x - 15 \\ = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 19x^2 - 12x - 15 \end{aligned}$$

Nos queda la función $f_3(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 19x^2 - 12x - 15$, donde $D_{f3} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f3} = (-\infty, \infty)$

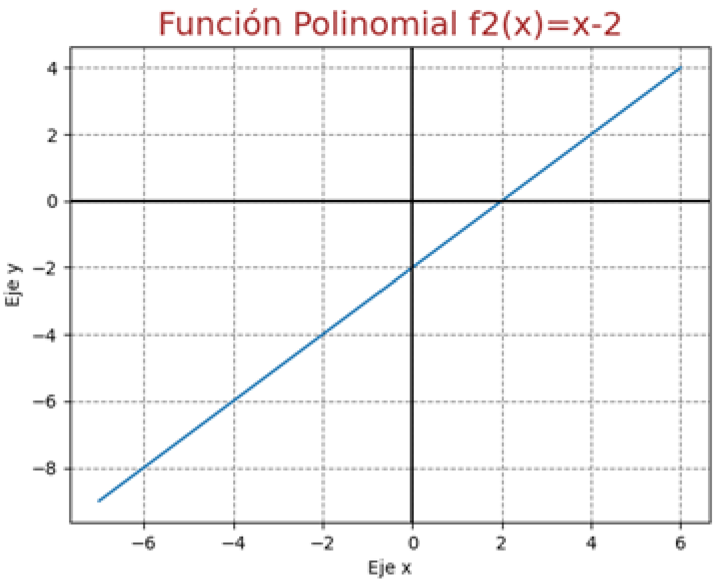


c) División

Tenemos la función $f_1(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$, donde $D_{f1} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f1} = (-\infty, \infty)$



Tenemos la función $f_2(x) = x - 2$ que es una función polinomial de grado 1, donde $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (\infty, \infty)$



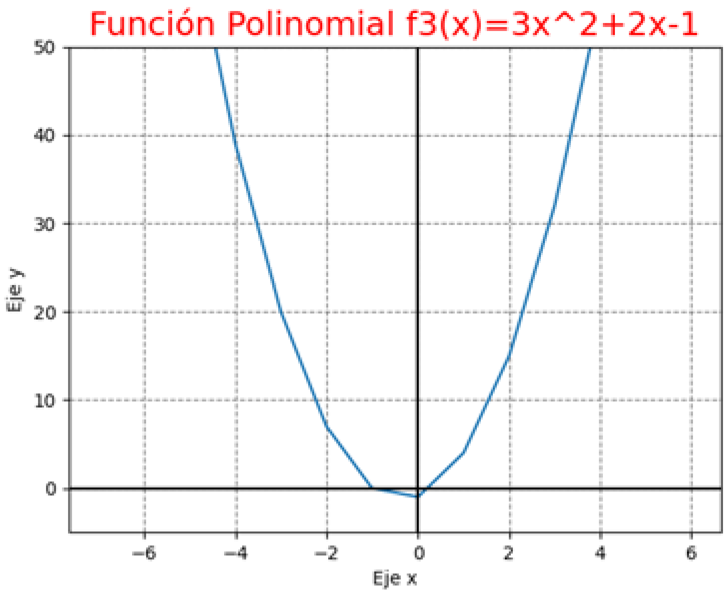
La división de funciones polinomiales se realiza de la siguiente manera:

$$f_3(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$f_3(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{x - 2} = Div.Sintetica \quad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & -5 & 2 \\ 2 & - & 6 & 4 & -2 \\ \hline & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

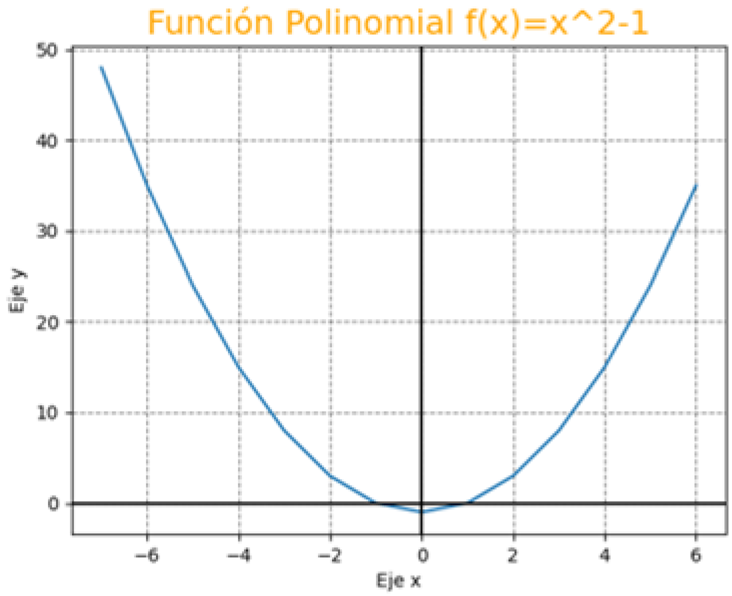
$$= 3x^2 + 2x - 1$$

Nos queda la función $f_3(x) = 3x^2 + 2x - 1$, donde $D_{f3} = (-\infty, \infty) y \ R_{f3} = [-\frac{4}{3}, \infty)$

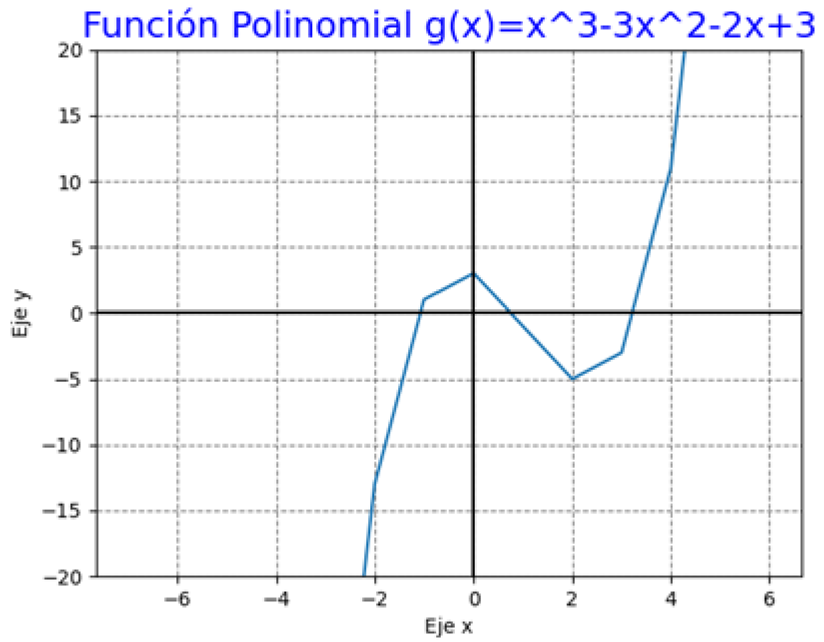


d) Composición

Tenemos la función $f(x) = x^2 - 1$, donde $D_{f1} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f1} = [-1, \infty)$



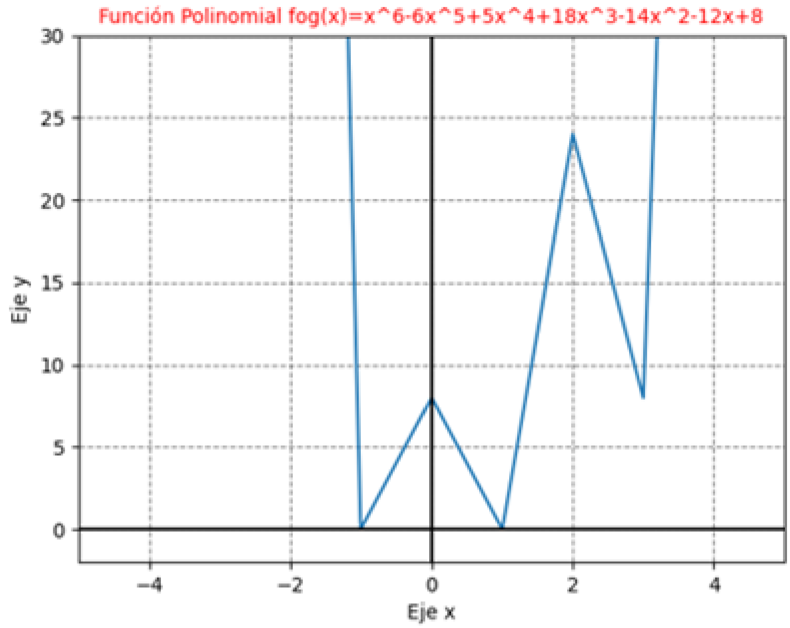
Tenemos la función $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$, donde $D_{f2} = (-\infty, \infty)$ y $R_{f2} = (-\infty, \infty)$



La composición de funciones polinomiales se realiza de la siguiente manera:

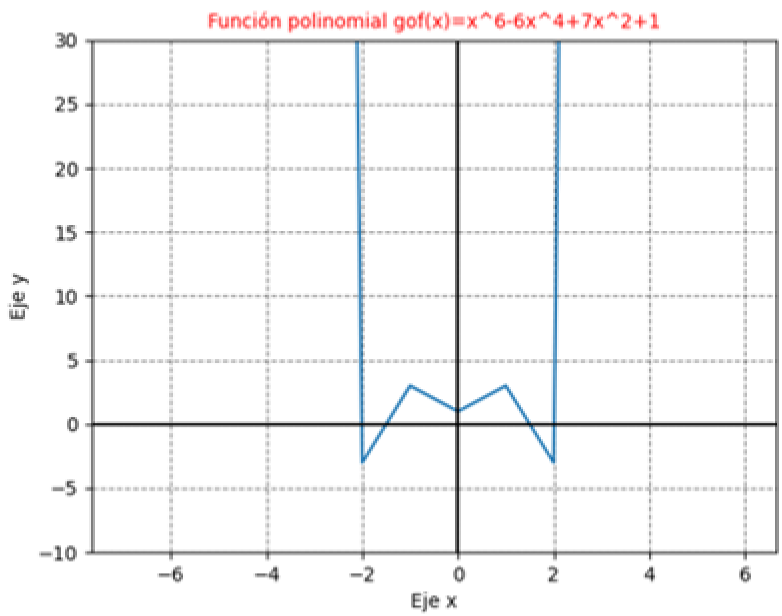
$$fog(x) = (x^3 - 3x^2 - 2x + 3)^2 - 1 = x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 18x^3 - 14x^2 - 12x + 8$$

Nos queda la función $fog(x) = x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 18x^3 - 14x^2 - 12x + 8$, donde $D_{fog} = (-\infty, \infty)$ y $R_{fog} = [-1, \infty)$



$$gof(x) = (x^2-1)^3 - 3(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) + 3$$
$$= (x^2-1)^3 - 3(x^2-1)^2 - 2(x^2-1) + 3 = x^6 - 6x^4 + 7x^2 + 1$$

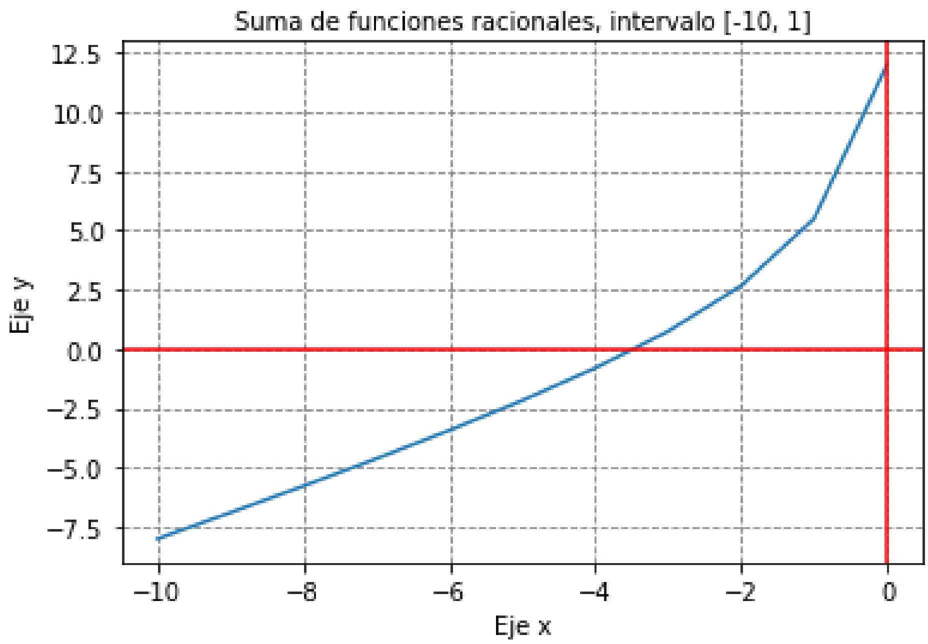
Nos queda la función $gof(x) = x^6 - 6x^4 + 7x^2 + 1$, donde $D_{gof} = (-\infty, \infty)$ y $R_{gof} = (-5.30, \infty)$



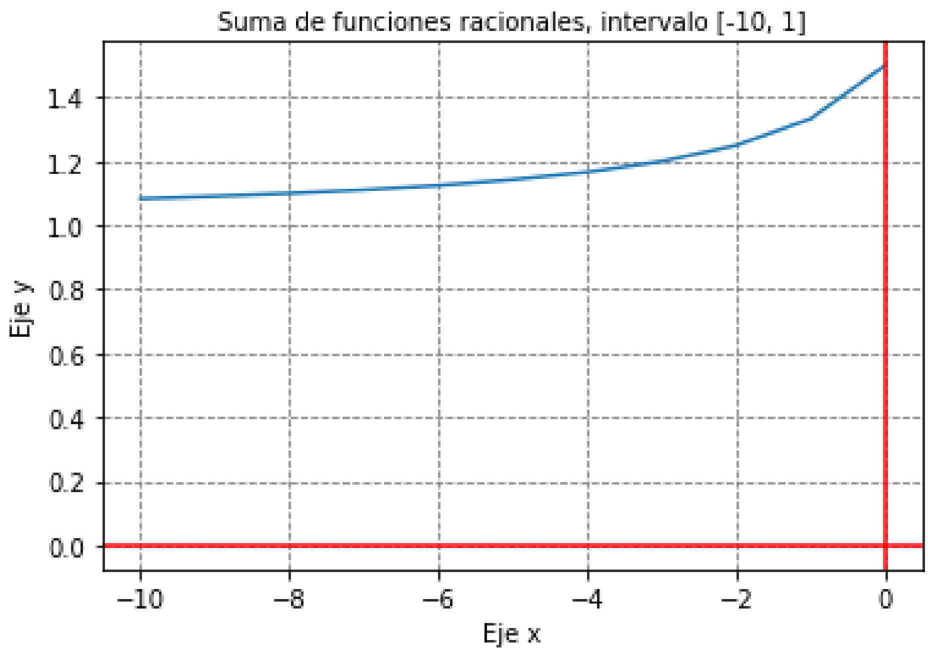
- **Funciones racionales**

$$f(x) = \frac{x^2-12}{x-1} \; donde\ x\ \neq\ 1 \quad ;\ g(x) = \frac{x-3}{x-2} \; donde\ x\ \neq 2$$

Gráfica f(x)



Gráfica g(x)

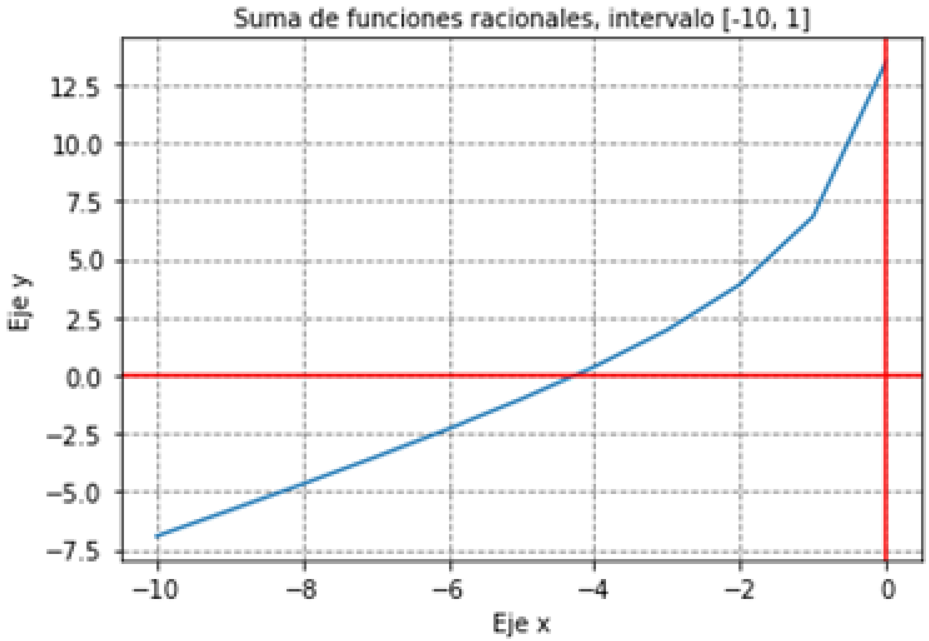


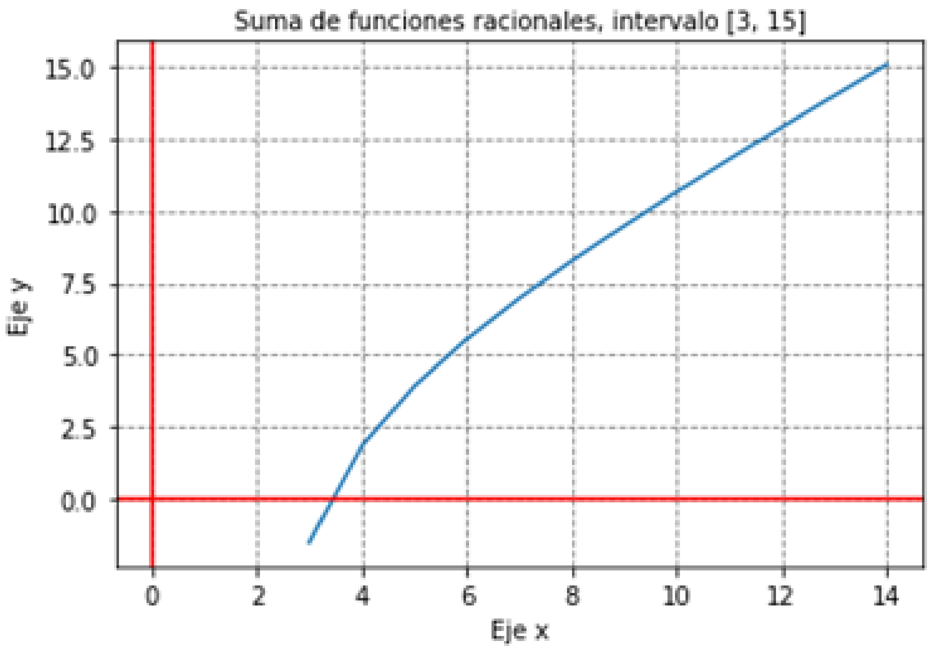
1. Suma

$$f(x) + g(x)$$

$$\frac{x^2-12}{x-1} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x^2-12)(x-2) + (x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x^3-x^2-16x+27}{x^2-3x+2}$$



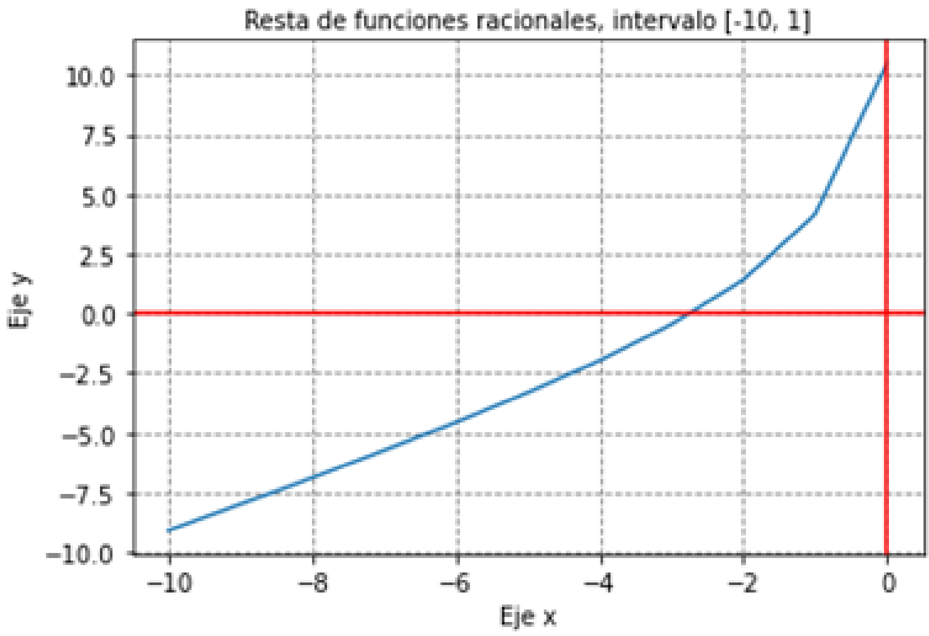


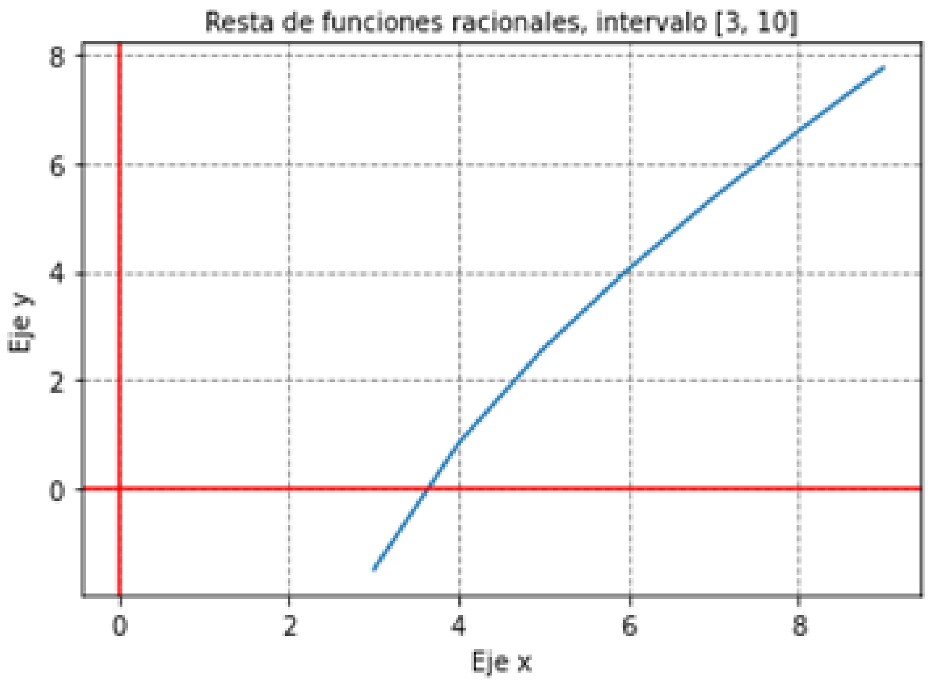
2. Resta

$$f(x) - g(x)$$

$$\frac{x^2-12}{x-1} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x^2-12)(x-2) - (x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x^3-3x^2-8x+21}{x^2-3x+2}$$


Resta de funciones racionales, intervalo [-10, 1]
Eje y
Eje x
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−10
−8
−6
−4
−2
0

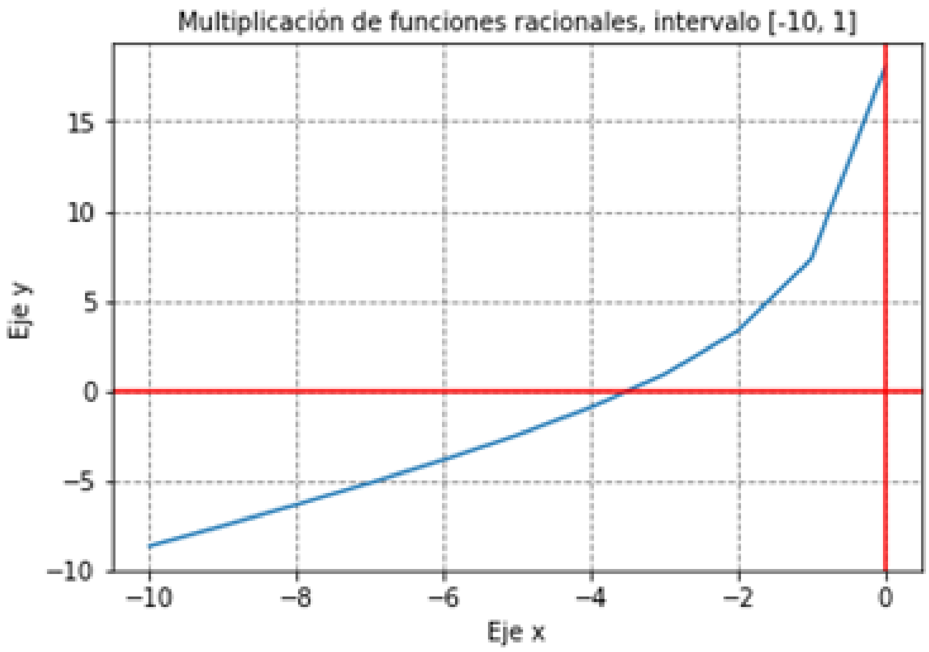

Resta de funciones racionales, intervalo [3, 10]
Eje y
Eje x
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8

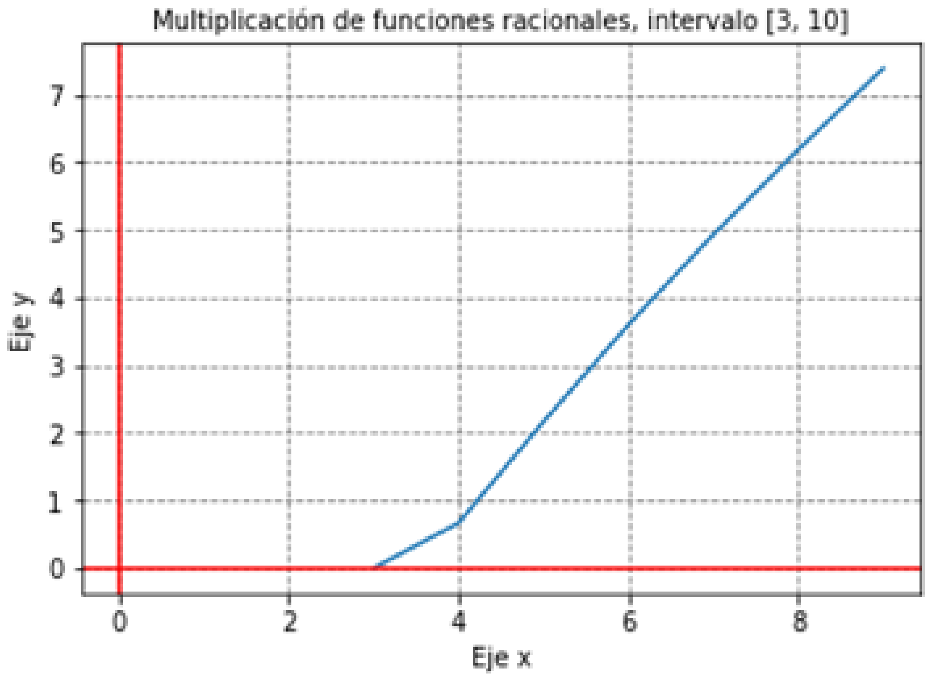
3. Multiplicación

$$f(x) * g(x)$$

$$\frac{x^2-12}{x-1} * \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x^2-12)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x^3-3x^2-12x+36}{x^2-3x+2}$$



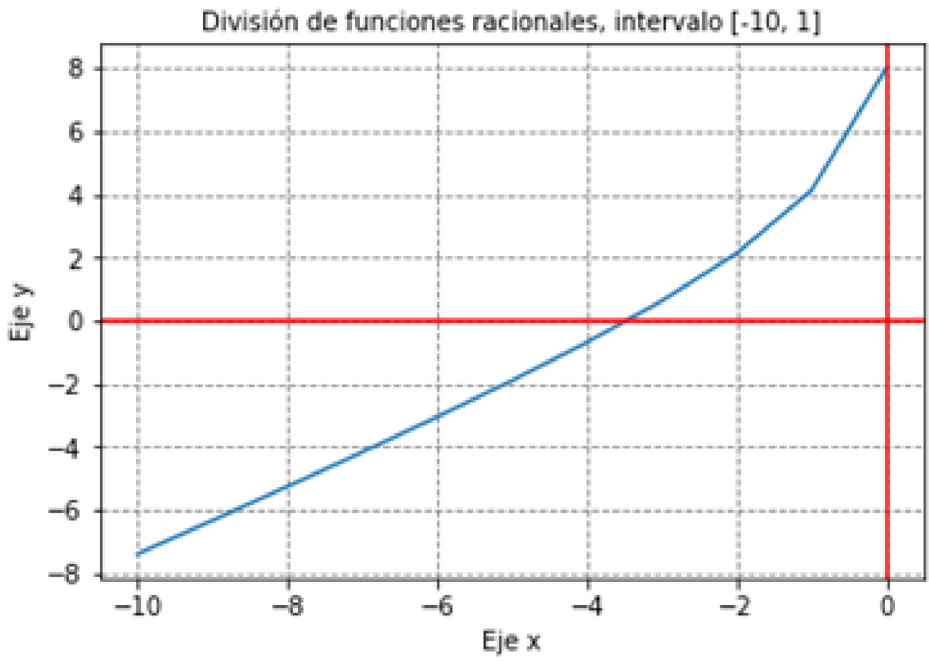


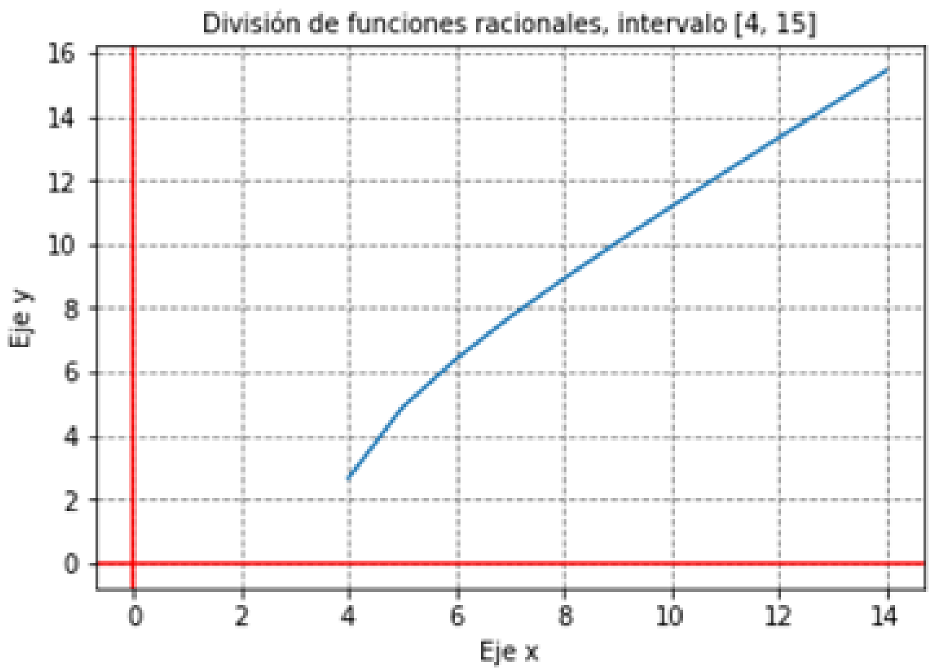
4. División

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{x^2-12}{x-1} \div \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x^2-12)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{x^3-2x^2-12x+24}{x^2-4x+3}$$

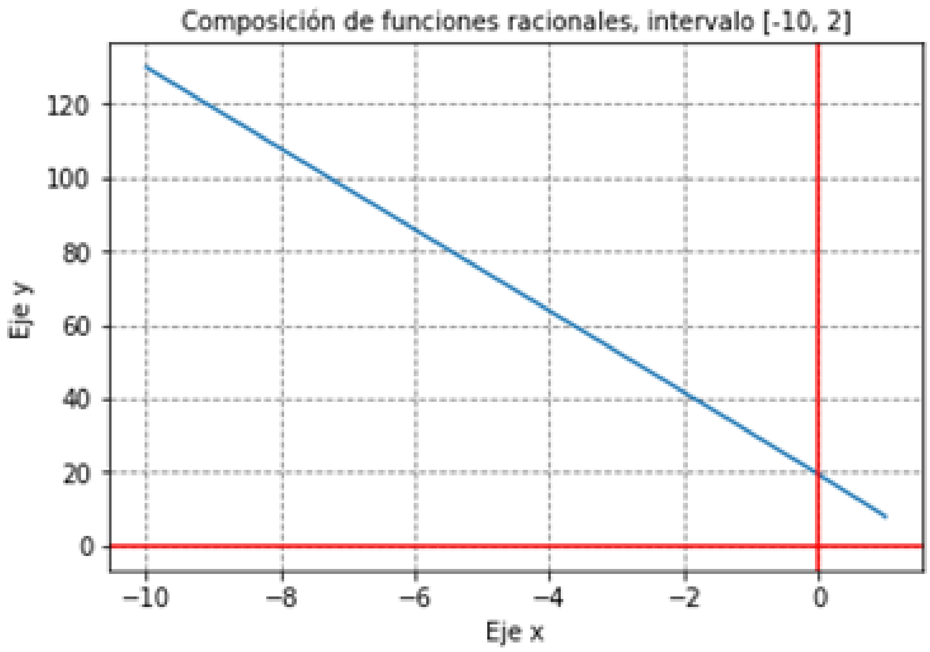


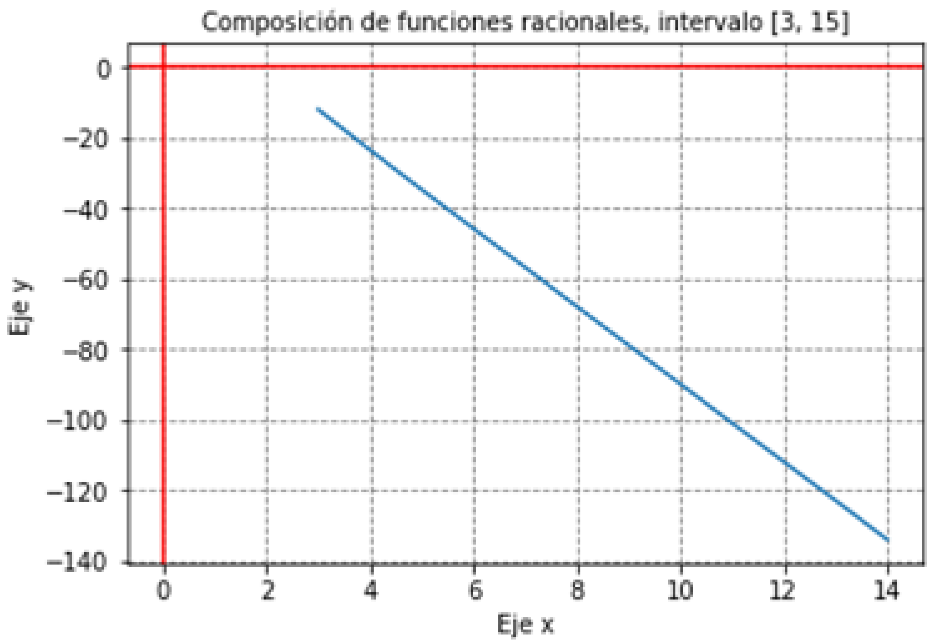


5. Composición

$$(fog)(x)$$

$$\frac{(\frac{x-3}{x-2})^2-12}{(\frac{x-3}{x-2})-1} = \frac{-11x^2+42x-39}{x-2}$$





$(gof)(x)$

$$\frac{(\frac{x^2-12}{x-1})-3}{(\frac{x^2-12}{x-1})-2} = \frac{x^2-3x-9}{x^2-2x-10}$$

Conclusiones

Como vimos durante el desarrollo del proyecto, de los once tipos de funciones que vimos, se pueden clasificar de la siguiente manera:

1. Inyectivas
2. Sobreyectivas
3. Biyectivas

Además este proyecto nos ayudó a profundizar acerca del tema ya que lo pasamos por alto, pues en la escuela solo nos enseñaban a mecanizar los pasos que se deben seguir para resolver y/o realizar operaciones con ellas, ya sea sumar, componer, dividir, restar o multiplicar, con la investigación pudimos tener un panorama más amplio.

Observamos que cada una de estas funciones tiene aplicaciones importantes para el desarrollo de nuevas tecnologías, el estudio de aplicaciones matemáticas como simplificar fórmulas y sobre todo calcular los valores de cada una en función de otros valores a los cuales depende.

Bibliografías

- S.A. (s.f.). *Google Sites*. Recuperado el 20 de 10 de 2021, de https://sites.google.com/site/4esofunciones/funcion-racional
- S.A. (s.f). Recuperado el 27 de OCtubre de 2021, de https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-15-19_RESOURCE/U18_L4_T2_text_final_es.html#:~:text=Las%20funciones%20logar%C3%ADtmicas%20y%20exponenciales%20pueden%20usarse%20para,Las%20funciones%20exponenciales%20son%20%C3%BAtiles%20con%20fen%C3%B3menos%20
- Bilski, E. (s/f). Características de las Funciones Lineales. Recuperado el 20 de octubre 2021, de https://www.caracteristicass.de/funciones-lineales/
- Serapio, E. (2015). Funciones lineales y sus elementos. Recuperado el 20 de octubre 2021, de https://sites.google.com/site/portafoliodeerick26/parcial-2/division-sintetica

- Anónimo. (s/f). Operaciones aritméticas con funciones. Recuperado el 20 de octubre 2021, de https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-15-19_RESOURCE/U17_L3_T1_text_final_es.html
- Gisbert, M. (s/f). Función polinómica. Recuperado el 24 de octubre 2021, de https://www.funciones.xyz/funcion-polinomica/
- Requena, B. (2014). Función polinómica. Recuperado el 24 de octubre 2021, de https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-polinomica/
- Bravo, J. (s/f). Función polinomial. Recuperado el 24 de octubre 2021, de https://sites.google.com/site/desarrollomate1g4/l--funcion-polinomial
- Anónimo. (s/f). Aplicaciones de las funciones lineales. Recuperado el 20 de octubre 2021, de https://www.neurochispas.com/wiki/aplicaciones-de-las-funciones-lineales/
- García, J. (2016). Las funciones en la vida cotidiana (1ª parte). Recuperado el 20 de octubre 2021, de http://entenderlasmates.blogspot.com/2016/09/las-funciones-en-la-vida-cotidiana-1.html
- Cango, A. (2013). Aplicación de las funciones polinomiales. Recuperado el 24 de octubre 2021, de https://es.slideshare.net/andrec392/aplicacin-de-las-funciones-polinomiales-17738200
- S.A. (2020). Python: Función abs(). 26-10-2021, de Tech Krowd Sitio web: https://techkrowd.com/2020/07/14/python-funcion-abs/
- L. Fernández . (NA). Función Definida a Trozos. 26-10-2021, de Fisicalab Sitio web: https://www.fisicalab.com/apartado/funcion-a-trozos
- S.A. (2019). Cómo calcular el logaritmo en Python. 26-10-2021, de Okpedia Sitio web: http://how.okpedia.org/es/python/como-calcular-el-logaritmo-en-python
- S.A. (s.f.). Funciones logarítmicas. Octubre 28, 2021, de Varsity Tutors Sitio web: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/logarithmic-functions#:~:text=Observe%20que%20la%20funci%C3%B3n%20logar%C3%ADtmica%20es%20la%20inversa,las%20y%20es%20la%20as%C3%ADntota%20de%20la%20gr%C3%A1fica.