Evaluación:
Examenes 50%
Tareas 20%
Exposición 10%
Proyectos 20%

Se exenta con 8.
Contacto: ing.lugomg@gmail.com

Tema 2. Conjuntos.

Axiomas.

Potencia: Es finita y crece muchísimo.
Acto: Es infinito, es tan grande que no tiene fin.
Cordinabilidad: Si hay dos colecciones, deben relacionarse cada uno de los elementos de ambas colecciones.

Ejemplo:

Vocales	Números
a	1
e	2
i	3
o	4
u	5

$\therefore$ Son cordinables y tienen el mismo núm. de elementos.

Tamaños de infinitos: Los reales tienen más números que los naturales.
$\therefore \mathbb{R} > \mathbb{N}$ ya que los reales generan un número más, y $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$
$\therefore \mathbb{R} > \mathbb{N} = \mathbb{Z} = \mathbb{I} = \mathbb{Q}$

Conjunto: Es una lista ó colección de objetos bien definidos y dichos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

Ejemplo: Los números 1,2,3,4 y 5
- Las soluciones de $x^2-3x+2=0$
- Los estudiantes de ED del grupo 07
- Los profes de la fac.
- Las materias de la F.I.

Notación: Se utiliza , para diferenciar cada elemento.
27, 1, 5792 $\therefore$ hay 3 elementos.

Se usa {} para contener los elementos.
*La definición de un conjunto no toma en cuenta ningún orden de sus elementos *

Definición por comprensión: Nombra las características más importantes. y todos los elementos deben cumplirla.

Ej. $B=\{x \mid x \text{ es par}\}$
Ej. $C=\{x \mid x \text{ es impar}\}$
Ej. $D=\{x \mid x^2-3x-2=0\}$
Ej. $E=\{x \mid x \text{ es una materia de la F.I.}\}$

Definición por extensión: Se ponen todos los elementos
Ej. $A=\{a,e,i,o,u\}$
Ej. D={Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes}
Ej. $T=\{1,2,7,15\}$
Ej. C={azul, morado, verde, rojo, naranja}

Pertenencia: Se dice que un elemento pertenece a un conjunto mediante $\in$
Se dice que NO pertenece mediante $\notin$
Ej. azul $\in$ C
Ej. negro $\notin$ C
Ej. jueves $\in$ D
Ej. Abril $\notin$ D

07/09/21

Igualdad de conjuntos: 2 conjuntos serán iguales si y solo si tienen los mismos elementos.
Ej. $A\{1,3,5\}$ *NO importa el orden*
$B=\{3,5,1\}$
$\therefore A=B$ *Elementos repetidos, NO modifican el conjunto *

Ej. $C=\{5,6,5,7\}$
$D=\{7,5,7,6\}$
Reescribiendo
$C=\{5,6,7\}$
$D=\{5,7,6\}$
$\therefore C=D$ ← Igualdad de conjuntos.

Becerril Olivar Axel Daniel.

Ej. Determine de los sig. conjuntos cuales son iguales

$E=\{x \mid x^2-3x=-2\}$
$F=\{2,1\}$
$G=\{1,2,2,1\}$
$F=G$ ya que ambos tienen 2 y 1.

Subconjunto:
Si todo elemento de un conjunto a, es también elemento de un conjunto B, se dice que A es un subconjunto de B.

$A \subset B$ ← A subconj. de B.

Ej. Sea $C=\{1,3,5\}$ y $D=\{5,4,3,2,1\}$
$C \subset D$

Ej. $G=\{x \mid x$ es par$\}$ y $F=\{x \mid x$ es potencia entera positiva de $2\}$
entonces $G=\{2,4,6,8,10\}$ y $F=\{2,4,8,16,32,64\}$
¿$G \subset F$? No es porque faltan elementos.

¿$F \subset G$? Si, ya que están todos los elementos.

Igualdad: Se puede definir la ig. de conjuntos si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A=B$.
*Los conjuntos pueden tener otros conjuntos como elementos.
Ej. Sea $R=\{1,3,\{0,1\},4\}$ $Z=\{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$
R tiene 4 elementos y Z tiene 3 elementos

Conjunto universal: Existe un conj. que se llama Conj. Universal o universo del discurso. $\mathcal{U}$
Ej. $A\{1,2,3,4,5\}=\mathcal{U}$ *Solo hay elementos de $\mathcal{U}$*
$B=\{1,2,3\}$; $C=\{3,4\}$

Cardinalidad: Sea f un conjunto, si hay exactamente n elementos distintos en f, decimos que n es el cardinal de f. $|f|$

Ej. $T\{(3,2),(4,4),(2,2),(44,3),(32,2)\}$
¿$|T|$? $|T|=5$

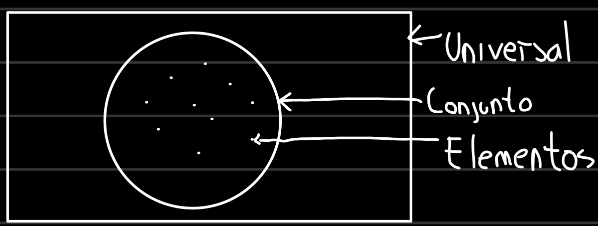
$A=\{x \mid x$ es entero positivo impar y $x<10\}$ $|A|=5$
$\therefore A=\{1,3,5,7,9\}$ $|A|=5$

Conjuntos Disjuntos: Si 2 conjuntos A y B y no tienen elementos comunes es decir, ningún elem. de A está en B y ningún elem. de B está en A, entonces A y B son disjuntos.

Ej. $A=\{1,3,7,8\}$ y $B=\{2,4,7,9\}$
$\therefore$ No son disjuntos.

$E=\{x,y,z\}$ y $F=\{R,S,T\}$
$\therefore$ Son disjuntos.

Diagramas de Venn-Euler.



Represente el conj. de las vocales con diagrama de Venn.

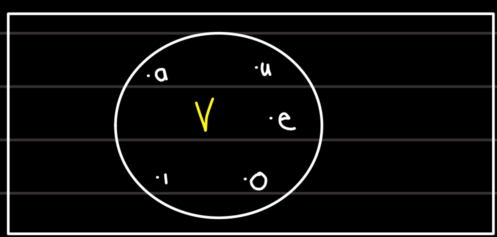
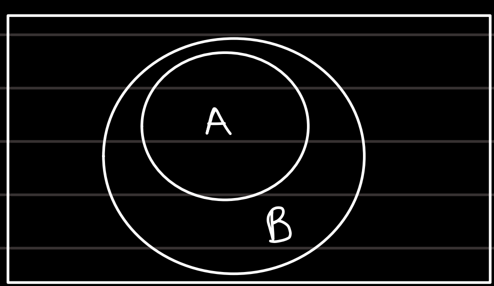
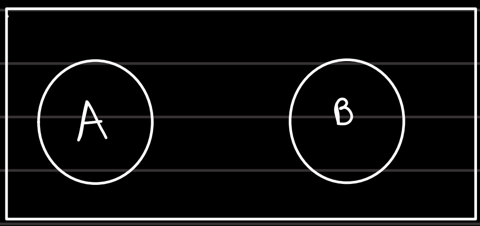


Diagrama de Venn-Subconjuntos.

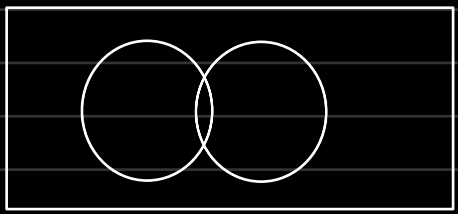


$A \subset B$
$A \neq B$

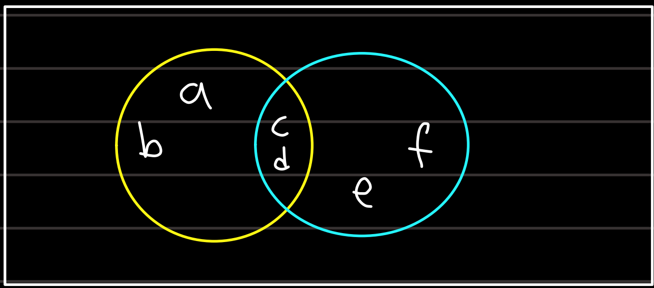
Diagrama Venn - Conj. Disjunto.



A y B son disjuntos.



Represente los sig. conj. en diagrama de Venn.
$A=\{a,b,c,d\}$
$B=\{c,d,e,f\}$



Operaciones con conjuntos:

- Unión: La unión de los conjuntos A y B será el conj. de todos los elementos que pertenecen a A u B o ambos.

Ej. $F=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{f,b,d,g\}$

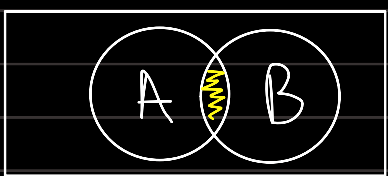
$\therefore F \cup T=\{a,b,c,d,f,g\}$
ó $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$ ← Matemáticamente (por compresión).

La operación unión entre conjuntos es conmutativa.
$A \cup B = B \cup A$

- Intersección: La inter. de los conjuntos A y B es el conjunto de los elem. que son comunes en A y B.

$A \cap B$

Dia Venn



Ej. $A=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{f,b,d,g\}$
$f\cap T=\{b,d\}$
$A\cap B=\{x \mid x\in B, x\in B\}$
También $\cap$ es conmutativa. $A\cap B$ y $B\cap A$
Si A y B son disjuntos. $A\cap B=\emptyset$

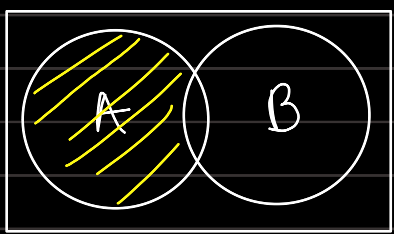
Conjunto Vacío: Es aquel que carece de elementos, también llamado conjunto nulo. $\emptyset$ ó $\{\ \}$

Ej. $B=\{x \mid x^2=4, x \text{ es impar}\}$ $\therefore B=\{\ \}$

Nulo = Vacío *Vacío ≠ Cero*

$A=\{0\} \rightarrow |A|=1$
$|\emptyset|=0$

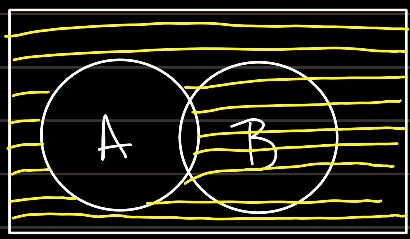
-Diferencia: La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A pero no a B.
$A-B$



Ej. $f=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{f,b,d,g\}$
$f-T=\{a,c\}$
$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}$

NO es conmutativa. $\therefore A-B\neq B-A$

Complemento: El comp. de un conjunto A va a ser el conjunto de elementos que no pertenecen a A, es decir, la diferencia del conj. universal y del A es: A' ó $\bar{A}$ ó $\hat{A}$



Ej. Suponga que el conj. universal es el alfabeto universal. y $T = \{a, b, c\}$
¿T'? $T' = \{d, e, f, \ldots, x, y, z\}$
ó $T' = \{x \mid x \neq a, x \neq b, x \neq c\}$

$A \cup A' = \mathcal{U}$
A y A' son disjuntos.
$A \cap A' = \emptyset$
$\mathcal{U}' = \emptyset$
$\emptyset' = \mathcal{U}$
$(A')' = A$

Ley de identidad:
$A \cup \emptyset = A$
$A \cup \mathcal{U} = A$

Ley de dominación:
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
$A \cap \emptyset = \emptyset$

Leyes idempotentes:
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

Ley del complemento:
$(A')' = A$

Ley conmutativa:
$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Ley asociativa:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Ley distributiva.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ley de morgan.

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ley de absorción.

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Consecuencias ∞ Cantor.

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

Colecciones numerables.

¿Existe una colección cuya cardinalidad sea > que los reales?

No se sabe.

Hipótesis del continuo.

$|\mathbb{R}| \geq |\mathbb{N}|$

¿?| Existe cardinalidad intermedia?

Es una conjetura, no se puede responder.

"No existe una colección infinita con un cardinal intermedio entre los reales y los naturales."

Alef. $\aleph$

$\aleph_0$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, I, \mathbb{Q}$

$\aleph_1$ — ¿?

$\aleph_n$ — ¿?

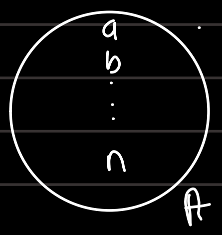
David Hilbert.
- Unificar todas las matemáticas con axiomas generales.
  - Álgebra
  - Cálculo
  - Geometría.

Rusell.
- Paradoja:

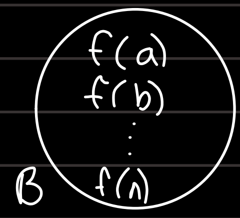
Sicaad.
Núm. cuenta ambos u y c.
Editar perfil, agregar correo, agregar foto y cambiar contra.

Tema Funciones.

Regla f



← Conjuntos.



Se define una regla

Matemáticamente:

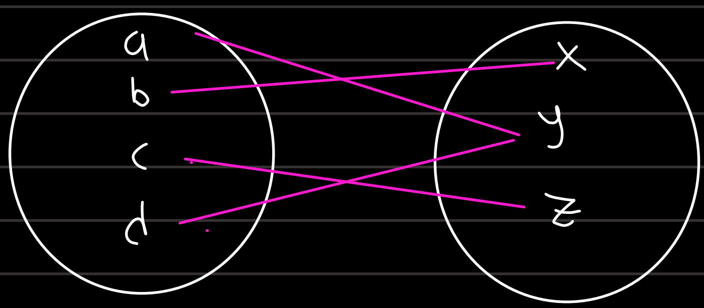
$f: A \to B$

↑ Dominio   ↑ Codominio

"f es una función de A en B"

$a \in A$, es el elemento de B que se le corresponde a a se llama imagen

Ej. Sea $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{x, y, z\}$



$f(a) = y$
$f(b) = x$
$f(c) = z$
$f(d) = y$

Solo debe tener una línea A

Ej 2: Sea f el hacer corresponder a cada número real su cuadrado.

$\therefore f(x) = x^2$
¿ $f(-3)$? $= (-3)^2 = 9$

$\therefore f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ej. 3 Sea $f(x) = x^2 - 2x$
Encuentre
a) $f(4)$
b) $f(4+h)$

a) $f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$

b) $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$f(4+h) = h^2 + 6h + 8$

$f: A \to B \leftarrow$ Var dep.
$\uparrow$
Var. indep.

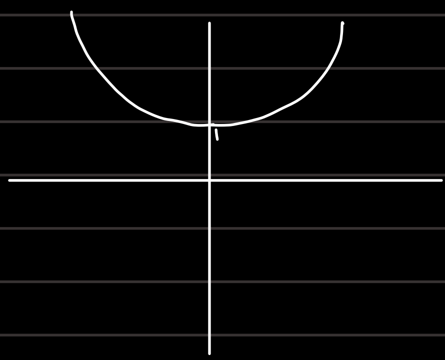
Formas de definir una función.
- Verbalmente
- Visualmente
- Numericamente
- Algebraicamente.

Prueba de la vertical
Una curva en el plano xy, es la grafica de la función si y solo si no hay recta vertical que interprete la curva más de una vez.

Funciones lineales.
$y = f(x) = mx + b$
$b = \cap$ con eje x

Funciones polinomiales.
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Ej. $f(x) = x^2 + x + 1$



Funciones potencia.

$f(x) = x^a$

Ej. $y = x^1$

Funciones racionales:

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde p y q son polimomiales.

Ej. $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funciones exponenciales.

$f(x) = a^x$

Ej. $2x$

Funciones logarítmicas.

$f(x) = \log a X$

Ej. $\log_2 X$

Funcion constante:

$f(x) = C$

Ej. $f(x) = 10$

Operaciones con funciones. Es una estructura discreto.

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División
- Composición

Suma: $f(x) = 2x+1$; $g(x) = x^2-1$

$(f+g)(x) = (2x+1) + (x^2-1)$
$= x^2 + 2x$

Resta: $f(x) = 2x+1$; $g(x) = x^2-1$

$(f-g)(x) = (2x+1) - (x^2-1)$
$= 2x+1-x^2+1$
$= -x^2+2x+2$

Multiplicación:

$(f \cdot g)(x) = (2x+1)(x^2-1)$
$= 2x^3-2x+x^2-1$
$= 2x^3+x^2-2x-1$

División:

$(f/g)(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$

Composición.

Sean las sig. funciones $f(x)$ y $g(x)$ y el dominio de $g(x)$ está incluido en el codominio de $f(x)$, se puede definir una tercera función que asocie a cada elemento del Df el valor $g[f(x)]$, es decir, composición de funciones.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Ej. $f(x) = 2x$; $g(x) = 3x+1$

$(g \circ f)(x) = 6x+1$

Ej. $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $g(x) = 3x - 4$

$(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$

$(g \circ f)(2)$ y $(f \circ g)(2)$

1.- $(g \circ f)(x) = 3(x^2 + 2x - 3) - 4$

$= 3x^2 + 6x - 13$

$(f \circ g)(x) = (3x - 3)^2 + 2(3x - 3) - 3$

$= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$

$= 9x^2 - 18x + 5$

2) $(g \circ f)(2) = 3(2)^2 + 6(2) - 13$

$= 12 + 12 - 13$

$= 11$

$(f \circ g)(2) = 9(2)^2 - 18(2) + 5$

$= 36 - 36 + 5$

$= 5$

Funciones inyectivas.

Sea f de A en B, es inyectiva si elementos distintos de B corresponden a elementos distintos de A.

$$f: A \to B$$
$$f(a) = f(a')$$
$$f(a) \neq f(a')$$

Relación uno a uno.

Ej. Sea $f(x) = x^2$

x	f(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	2

$\therefore$ No es inyectiva.
Ya que se repite el 1 y 2

Ej. Sea $f(x) = x^3$

x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

$\therefore$ Si es inyectiva, no se repiten valores.

Ej. Sea la función "f que asigna a cada país del mundo con su ciudad capital."

$\therefore$ Es inyectiva.

Funciones sobreyectivas.

Sea f de A en B, el dominio de imágenes $f(A)$, son subconjunto de B.

$$f(A) \subset B$$

Si $f(A) = B$, la función es sobreyectiva de A en B.

Ej. Sea $f(x) = x^2$, ¿sobreyectiva?

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
4	4

$\therefore$ No es sobreyectiva

Codominio $Rf = \{4, 1, 0\}$

Dominio $Df = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Ej. Sea $f(x) = 2x$

x	$f(x)$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

$Df = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$Rf = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

$\therefore$ Es sobreyectiva.

Funciones biyectivas.

Si es inyectiva
Si es sobreyectiva
Es biyectiva.

Funciones en Python.

Si no hay entradas sólo se genera una salida.

Si hay entradas la salida sera $f(x_1)$

Si hay muchas entradas la salida será $f(x_i)$

Inducción matemática.

¿Cuál es la suma de los n primeros positivos impares?

$Z^+_{imp} = 1, 3, 5, 7, \ldots, \infty$

$P(n) = 1 + 2 + 3 + n = \frac{n(n+1)}{2}$; n = variable de inducción.

Método:
1.- Paso base: evaluar en $n = 1$
2.- Paso de inducción: Evaluar para otro elemento $P(K)$
Evaluar para el elemento siguiente de K $\therefore P(K+1)$

Ej. Demostrar por inducción la validez de la sig. proposición
$P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1. $n = 1$
$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1$

2.- $n = K$
$K = \frac{K(K+1)}{2}$ ← Suponemos que es verdadera

3.- $n=k+1$

$$k+(k+1)=\frac{k+((k+1)+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}$$ $\therefore$ Es igual

Ejemplo: Demostrar $P(n)=3+5+7+...+(2n+1)=n(n+2)$

1.- $n=1$

$$(2(1)+1)=1(1+2)$$

$$3=3$$

2.- $n=k$

$$(2k+1)=k(k+2)$$ ← hipótesis

3.- $n=k+1$

$$(2k+1)+(2(k+1)+1)=(k+1)(k+1+2)$$

$$k(k+2)+2k+3=(k+1)(k+3)$$

$$k^2+2k+2k+3=k^2+k+3k+3$$

$$k^2+4k+3=k^2+4k+3$$ $\therefore$ Son iguales

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Paso 1. $n=1$

$$(1)^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$$

$$(1)^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$$

$$1 = \frac{6}{6} \rightarrow 1=1$$

Paso 2. $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Paso 3. $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k^2+k)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(k(2k+1)+6k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$\therefore$ son iguales
Es verdadera

T5. Realizar por equipos un video de 1min. donde se explique la analogía de inducción con las fichas de dominó.

Tema 2. Lógica proposicional y cálculo de predicados.

Axioma: Razonamiento que se da como válido.

Teoremas: Cálculo, A'lgebra, Geometría.

Sistemas axiomaticos: Conjunto de axiomas, Reglas, teoremas.
↳ Permite demostrar declaraciones
↳ Una cantidad finita de pasos.

Lógica: Estudio del razonamiento.
↳ Axiomas
↳ Reglas
↳ Conclusión → Falso
↳ Verdadera

1. Paola es mujer
2. Todas las mujeres son buenas.

Conclusión: Paola es buena

V ó F

Proposición P: Es una declaración que es correcta o falsa pero NO ambos a la vez.

Ej. ¿Qué hora es? NO es, ya que no es V o F
CDMX es capital de E.U. → Si es ya que se responde con V o F.

Reglas:

Negación: $\neg$ ← Símbolo

$\neg P$

Sea P la proposición:
Bruselas es la capital de la U.E. = P

C.D.M.X. Es la capital de Canadá = Q

Reglas:
Negación: $\neg P$, No ocurre que P, No es el caso que P, Es falso que P, Ni P

Tabla de verdad

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ej. Es falso que Bruselas sea la capital de la U.E.
Negación ↑ ↑ Proposición.

$\therefore \neg P$

Conjunción: Se tienen dos proposiciones P y Q
P y Q
P pero Q
P aunque Q
P sin embargo Q
P no obstante Q
P a pesar de Q

$\therefore P \wedge Q$

Tabla de verdad

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción:

P o Q
O bien P o bien Q
Al menos P o Q
Como mínimo P o Q

$\therefore P \vee Q$

Tabla de verdad

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional:

Si P entonces Q
P solo si Q
No P a menos que Q
No P o Q
Q si P
Solo si Q entonces P
Q es necesario para P

$\therefore P \rightarrow Q$

Tabla de verdad

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional:

P si y solo Q
P es necesario y suficiente para Q

$\therefore P \rightleftarrows Q$

P	Q	$P \rightleftarrows Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposiciones atómicas.
No tienen conectores lógicos.

Proposiciones moleculares:
Contienen conectores lógicos.

La condicional: $(p \to q)$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conversa : $q \to p$

Inversa: $\neg p \to \neg q$

Contrapositiva: $\neg q \to \neg p$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Equivalencia: $\Longleftrightarrow$

$\therefore\ p \to q \Longleftrightarrow \neg q \to \neg p$

$q \to p \Longleftrightarrow \neg p \to \neg q$

Axel Daniel Becerril Olivar.

Ejercicios:

1.- $\underbrace{\text{Me voy de vacaciones}}_{P}$ si y solo si $\underbrace{\text{apruebo el examen}}_{Q}$.

Bicondicional $\therefore P \rightleftarrows Q$

2. $\underbrace{\text{Una decada tiene 10 años}}_{P}$ y $\underbrace{\text{un milenio 1000 años}}_{Q}$.

Conjunción $\therefore P \wedge Q$

3.- Si no $\underbrace{\text{apruebo los exámenes}}_{P}$ entonces no $\underbrace{\text{apruebo el curso de E.D.}}_{Q}$

Negación $\neg P \to \neg Q$
Condicional

4. $\underbrace{\text{CDMX}}_{P}$ no $\underbrace{\text{es la capital de China}}_{P}$.

$\neg P$

5. $\underbrace{\text{Los alumnos se gradúan}}_{P}$ si y solo si $\underbrace{\text{tienen el 100\% de créditos}}_{Q}$.

$P \rightleftarrows Q$

Ej. $(P \to Q) \vee (P \vee Q)$

—Tablas de verdad

1. ¿Cuántas atómicas hay?

P y Q

$\therefore 2^n$; n es el número de atómicas de la fórmula proposicional

$\therefore 2^2 = 4$

P	Q	$(P \to Q)$	$\vee$	$(P \vee Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Todos V $\therefore$ tautología

Tautología: Una fórmula proposicional es una Tautología, si al obtener su T.V. la columna resultante tiene puros valores VERDADEROS.

Ej. 2.

Sea $(P \vee \neg q) \wedge (P \rightarrow q)$

2 atómicas, $\therefore 2^2$

P	q	$(P \vee$	$\neg q)$	$\wedge$	$(P \rightarrow q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Contingencia: Es cuando hay verdadero y Falso

Ej. 3 $(P \wedge q) \wedge \neg(P \vee q)$

2 atómicas.

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\wedge$	$\neg$	$(P \vee q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F

Contradicción: Es cuando aparecen puros falsos.

Construir la T.V. y determinar que es:

P	q	P	$\vee$	$\neg$	$(P \wedge q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F

$\therefore$ Tautología

Ej. $P \vee (\neg P \to (q \vee (\neg q \to r)))$

p	q	r	$P \vee (\neg P \to (q \vee (\neg q \to r)))$				
V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	F

↑

Contingencia.

$(P \to (q \vee r)) \to ((P \to q) \vee (P \to r))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (q \vee r)) \to (\neg P \vee q) \vee (\neg P \vee r)$ Con-dis

$\Leftrightarrow$

Ejercicio: Demostrar la sig. equivalencia por el método algebraico:

$P \to (q \to p) \Leftrightarrow \neg P \to (P \to q)$

$\Leftrightarrow \neg\neg P \vee (P \to q)$ Con-dis

$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee q)$ Doble negación

$\Leftrightarrow P \vee (q \vee \neg P)$ Conmutativa

$\Leftrightarrow P \vee (q \to P)$

$P \to (q \to P) \Leftrightarrow \neg P \to (P \to q)$

$\Leftrightarrow P \to (\neg q \vee P)$ Con-dis

$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg q \vee P)$ -Con-dis

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee \neg q$ -Asosiativa y Conmu

$\Leftrightarrow T \vee \neg q$ Tautología

$\Leftrightarrow T$ Dominancia

$\Leftrightarrow T \vee q$ Dominancia

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee q$ 3er ex. Tau

$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee q)$ Asocia y Conmut.

$\Leftrightarrow P \vee (P \to q)$ dis-con

$\Leftrightarrow \neg P \to (P \to q)$ Dis-con

$\therefore$ Son equivalentes.

Ej. Demostrar por T.V. y algebraico

$(r \vee \neg r) \wedge S \Leftrightarrow (r \to ((r \wedge q) \vee r)) \to S$

Formas normales principales.

- FNCP – Forma Normal Conjuntiva Principal
  Son expresiones de conjunciones de disyunciones.

- FNDP – Forma Normal Disyuntiva Principal
  Son expresiones de disyunciones de conjunciones.

Características:

- Expresiones que involucran a todas las atómicas.
- FNCP $\wedge$
- FNDP $\vee$
- Mintérmino – Disyunciones
- Maxtérmino – Conjunciones
- FNP son únicas
- $\#FNCP + \#FNDP = 2^n$; n = atómicas

Ejercicio: $P \rightarrow q$

P	q	$P \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$2^n = 2^2 = 4$

$\therefore$ 3 FNDP
1 FNCP
4 FNP

Todos los V se van asociar a las FNDP
Todos los F se van asociar a FNCP

Las FND
$(P \wedge q) \vee (\neg P \wedge q) \vee (\neg P \wedge \neg q)$ — FNDP

$(\neg P \vee q)$ — FNCP (cambia el valor de las atómicas)

$\neg$ Para falsos en la T.V.

Tabla de verdad

P	q	$P \vee (\neg P \wedge q)$		
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

FNDP las V (3)
FNCP las F (1)
4

FNDP

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

FNCP

$(p \vee q)$

Método Algebraico.

$p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee T) \vee (\neg p \wedge q)$ Identidad

$\Leftrightarrow (p \vee (q \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ Tautología

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ Distributiva

FNCP

$p \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$ Distributiva

$\Leftrightarrow (T) \vee (p \vee q)$ Tautología

$\Leftrightarrow (p \vee q)$ Identidad

Álgebra de Boole.

$B = \{1, 0\}$ → Falso, Apagado, bajo, no, interruptor abierto.

↓ Verdadero, encendido, alto, si, interruptor cerrado.

Operaciones. $\{1, 0\}$ ← Constantes booleanas

- NOT
- OR
- AND

Variables booleanas.

- Cantidades que solo pueden adoptar un valor de 0 o 1 en un tiempo determinado.

Operación NOT (complemento o inverso)

$x = \bar{A}$

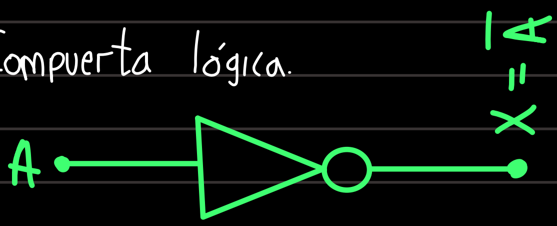
$X = \hat{A}$

$X = \neg A$

A	$X = \bar{A}$
0	1
1	0

← T. V.

Compuerta lógica.

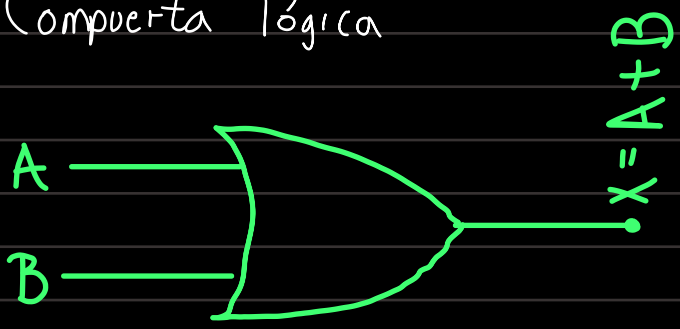


Operación OR

$X = A + B$

A	B	$X = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Compuerta lógica



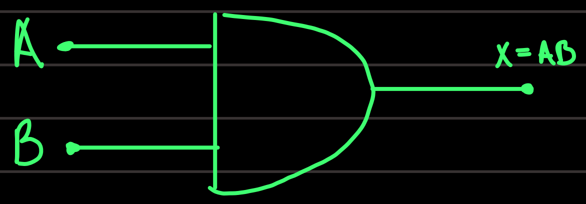
Compuerta AND

$X = AB$

$X = A \cdot B$

$X = (A)(B)$

A	B	$X = AB$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Función booleana:

Expresión algebraica que consta de variables binarias (1, 0).
Y los operadores lógicos (−, +, ·) para un valor dado de las variables.

OR, NOT, AND

$$F_1 = x + \overline{y} z$$

Función booleana

Variables booleanas.

Representación:

-Tablas de verdad.

→ 2^n ; n es el número de variables booleanos.

Ejemplo para F_1

$2^3 = 8$

decimal	X	Y	Z	$F_1 = X + \overline{Y} Z$
0	0	0	0	$F_1 = (0) + (1)(0) = 0$
1	0	0	1	$F_1 = (0) + (1)(1) = 1$
2	0	1	0	$F_1 = (0) + (0)(0) = 0$
3	0	1	1	$F_1 = (0) + (0)(1) = 0$
4	1	0	0	$F_1 = (1) + (1)(0) = 1$
5	1	0	1	$F_1 = (1) + (0)(1) = 1$
6	1	1	0	$F_1 = (1) + (0)(0) = 1$
7	1	1	1	$F_1 = (1) + (0)(1) = 1$

Mintérminos:

Es una expresión que consiste en un conjunto de todas las variables binarias unidas por productos lógicos

Maxtérminos:

Es una expresión que consiste en todas las var. binarias unidas por sumas lógicas.

Forma canónica:

Cuando una función se halla expresada en forma canónica disyuntiva o en forma canónica conjuntiva se dice que está en forma canónica.

For. Can. Dis. FCD

- Constituida de mintérminos.

Ej. Sea $F(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

Para simplificar, se denota cada mintérmino como: m_i ; i es el núm del mintérmino.

$\bar{x}\bar{y}z = x=0, y=0, z=1$
$= 0\ 0\ 1 \rightarrow 1$

$xy\bar{z} = x=1 = y=0\ z=0$
$1\ 0\ 0 = 5$

$x\bar{y}\bar{z} = x=1; y=0; z=0$
$= 1\ 0\ 0 \rightarrow 4$ ← decimal

$xyz = x=1, y=1, z=1$
$1\ 1\ 1 \rightarrow 7$

$x\bar{y}z = x=1, \bar{y}=0 = 1$
$1\ 0\ 1 \rightarrow 5$

$$\boxed{\begin{array}{c} X = 1 \\ \bar{X} = 0 \end{array}}$$

$$F(x,y,z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

Tabla de verdad ↑

	x	y	z	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

$$\Rightarrow F = x + \bar{y} z$$

For. Can. Conjuntiva.

-Constituida por maxtérminos.

$$F(x,y,z) = (x+y+z)(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})$$

Notación M_i

$x = 0$

$\bar{x} = 1$

$(x+y+z) = x=0;\ y=0;\ z=0\ \} = 0$

$(x+\bar{y}+z) = x=0;\ y=1;\ z=0\ \} = 2$

$(x+\bar{y}+\bar{z}) = x=0;\ y=1;\ z=1\ \}\ 3$

$$F(x,y,z) = \Sigma_M (0,2,3)$$

Tabla de verdad.

- Ahora se pone 0 en cada subíndice del Maxtérmino.

	X	Y	Z	F	
0	0	0	0	0	$\leftarrow M_0$
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	0	$\leftarrow M_2$
3	0	1	1	0	$\leftarrow M_3$
4	1	0	0	1	
5	1	0	1	1	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	1	

Maxtérmino 0

Mintérmino 1

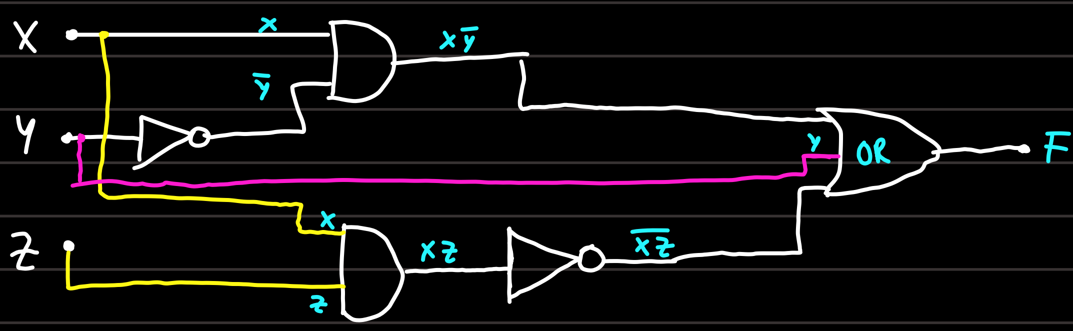
$F = x + \bar{y}z$ ← Función (3 var. booleanas)

Sacar su tabla de verdad

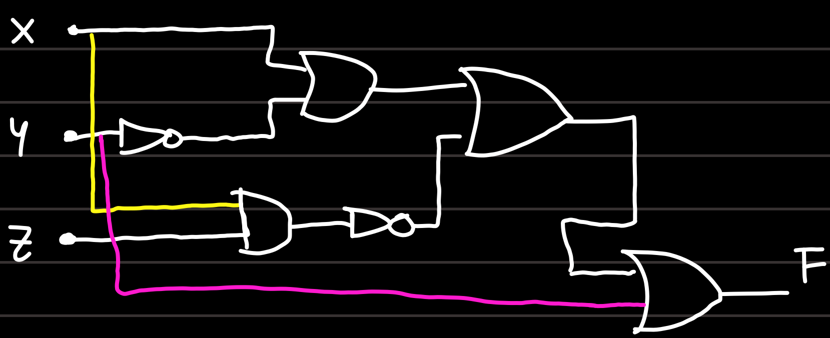
decimal	X	Y	Z	$F_1 = X + \bar{Y}Z$
0	0	0	0	$F_1 = (0) + (1)(0) = 0$
1	0	0	1	$F_1 = (0) + (1)(1) = 1$
2	0	1	0	$F_1 = (0) + (0)(0) = 0$
3	0	1	1	$F_1 = (0) + (0)(1) = 0$
4	1	0	0	$F_1 = (1) + (1)(0) = 1$
5	1	0	1	$F_1 = (1) + (0)(1) = 1$
6	1	1	0	$F_1 = (1) + (0)(0) = 1$
7	1	1	1	$F_1 = (1) + (0)(1) = 1$

Representación mediante compuertas lógicas.

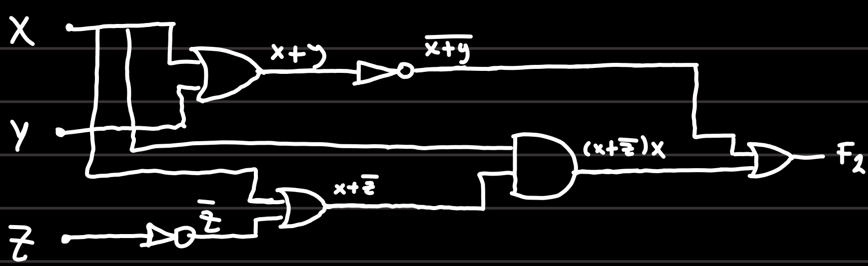
Sea $F_1 = x\bar{y} + \overline{xz} + y$



Opción 2.



Ej. Realizar el esquema de $F_2 = \overline{(x+y)} + (x+\bar{z})x$



Ejemplo completo. En un café internet hay 3 impresoras conectadas a un led verde que indica si se puede mandar a imprimir si está encendido, y si está apagado no se pueden usar las impresoras. Solo se pueden usar 2 impresoras simultáneamente.

- Solución

Impresora 1 = a
Impresora 2 = b
Impresora 3 = c

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ Encendido. 1
Apagado. 0

decimal	a	b	c	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Forma canónica disyuntiva:

$F(a,b,c) = \Sigma_m(1,2,3,4,5,6)$

Forma canónica conjuntiva:

$F(a,b,c) = \Sigma_M(0,7)$

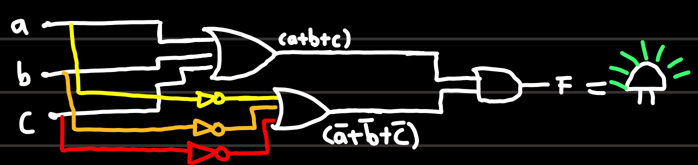
FCD Explícita:

$F(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c}$

FCC Explícita:

$F(a,b,c) = (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

Esquema de compuertas (Más fácil).



Mapas de Karnough

Es un diagrama que sirve para hacer la simplificación de funciones booleanas en forma canónico.

- Se construye a través de su t.v.

Para $n=2$; a y b

a	b	decimal
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	3

M.K.

b\a	1	0
1	3	1
0	2	0

Para $n=3$; a, b y c

a	b	c	decimal
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

M.K.

c\ab	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

→ Cuadrantes se colocan los mintérminos

→ Hacer agrupaciones de mintérminos (1,2,4,6,8,etc).

Mapa K. para la impresora.

$c \backslash ab$	ab 00	ab 01	ab 11	ab 10
$\bar{c}$ 0	0	1	1	1
c 1	1	1	0	1

$F(a,b,c) = \Sigma_m (1,2,3,4,5,6)$

Siempre es:

	00	01	11	01
0	0	1	2	3
1	4	5	7	6

- Hacer agrupaciones

$(1,3) = b\bar{c}$

$(4,5) = \bar{a}c$

$(2,6) = a\bar{b}$

Más fácil $\bar{a}=0$; $a=1$

Cuadrante	letra y valor		
1	~~$\bar{a}$~~	b	$\bar{c}$
3	~~a~~	b	$\bar{c}$
		b	$\bar{c}$

- Solo se escriben las variables fijas ($min = 1$, $Max = 0$)
- Si hay variables que cambian de 0 a 1 o 1 a 0, no se escribe, de un cuadrante a otro
- Si no cambia, si se escribe

Para $(1,3) = c$ no cambia, a cambia de 0 al 1 y b no cambia

(1, 3) — Cuadrante 3

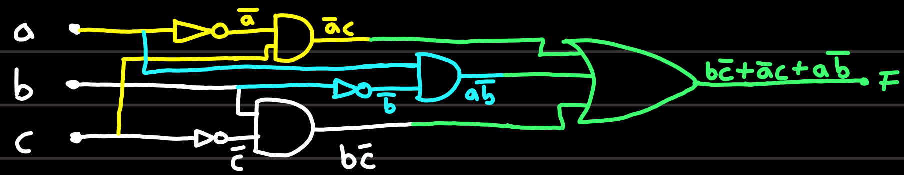
Cuadrante 1

Resultado:

$F(a,b,c) = b\bar{c} + \bar{a}c + a\bar{b}$ ← Función mínima para el problema de la impresora.

Tarea: Realizar en el simulador la función mínima y comprobar la T.V., video de 1 minuto.

Dibujo.



Ejercicio: Obtener la función booleana mínima que representa al problema → Se requiere un circuito lógico de un sistema de votación para un jurado de 3 jueces (x, y, z), donde cada uno puede votar por (0 y 1). La salida del circuito tendrá un led que estará encendido cuando la mayoría de los jueces vote 1 y estará apagado cuando la mayoría vote 0.

– Solución

min

Max

	x	y	z	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

c \ ab	00	01	10	11
0				
1				

FCD

$F(x,y,z) = \sum_m (3,5,6,7)$

FCC

$F(x,y,z) = \prod_M (0,1,2,4)$

FCD – explícita:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

FCC - explícita

$(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)$

M.K.

ab \ c	00	01	11	10
0	^{0} 0	^{1} 0	^{3} 1	^{4} 0
1	^{4} 0	^{5} 1	^{7} 1	^{6} 1

* mintérminos TV

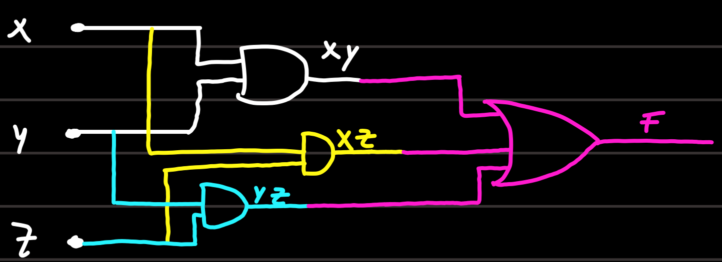
$(3,7) - \begin{array}{l} x\,y\,\cancel{z} \leftarrow 3 \\ x\,y\,\cancel{z} \leftarrow 7 \\ \hline xy \end{array}$

$(5,7) - \begin{array}{l} \cancel{x}\,y\,z \leftarrow 5 \\ \cancel{x}\,y\,z \leftarrow 7 \\ \hline yz \end{array}$

$(7,6) - \begin{array}{l} x\,\cancel{y}\,z \leftarrow 7 \\ x\,\cancel{y}\,z \leftarrow 6 \\ \hline x\,z \end{array}$

$\therefore F(x,y,z) = xy + yz + xz$

Circuito Lógico.



Ejercicio: Encontrar M.K. para

$F(x,y,z) = \Sigma_m(2,4,5,6)$

- T.V.
- Mapa K.
- Esquema de Compuertas.

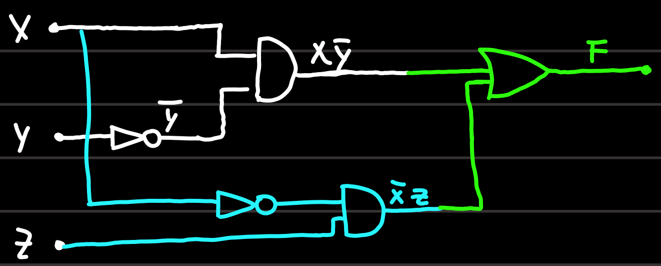
d	x y z	F
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	1
3	0 1 1	0
4	1 0 0	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0

z \ xy	00	01	11	10
0	⁰ 0	¹ 0	³ 0	² 1
1	⁴ 1	⁵ 1	⁷ 0	⁶ 1

$(4,5) - \begin{matrix} \bar{x}\,\cancel{\bar{y}}\,z \\ \bar{x}\,\cancel{y}\,z \end{matrix} \rightarrow \bar{x}z$

$(2,6) - \begin{matrix} x\bar{y}\,\cancel{\bar{z}} \\ x\bar{y}\,\cancel{z} \end{matrix} \rightarrow x\bar{y}$

$\therefore F(x,y,z) = \bar{x}z + x\bar{y}$

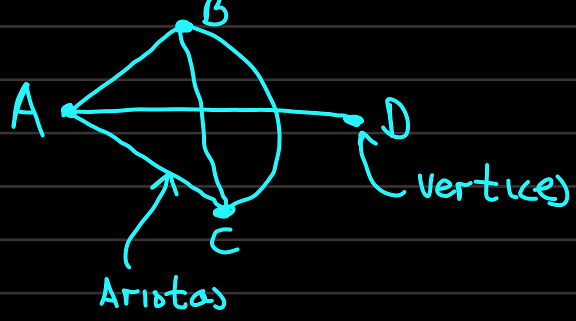


Tema 3. Teoría de grafos.

$G = \{V, A\}$

V: Conjunto de vértices

A: Conjunto de aristas

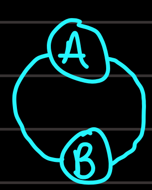


$\therefore\ V = \{A, B, C, D\}$

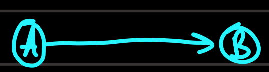
$A = \{(A,B), (A,C), (A,D), (B,D), (B,C), (C,B)\}$

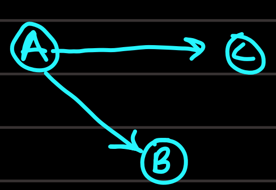
Lazo o bucle: Si una arista conecta un vértice consigomismo.

Arista múltiple: Cuando más de un arista conecta los mismos vertices.

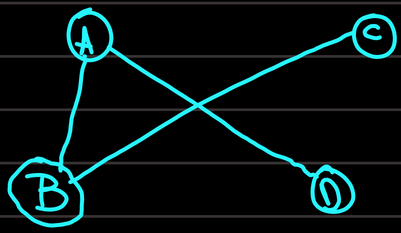


Grafos dirigidos: Indican un sentido en sus aristas.

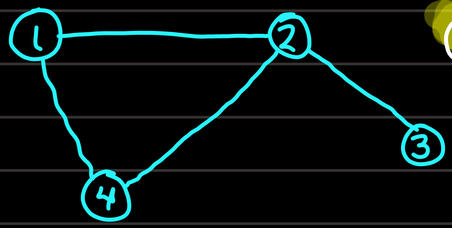




Grafo no dirigido: Sus aristas no tienen un sentido definido.



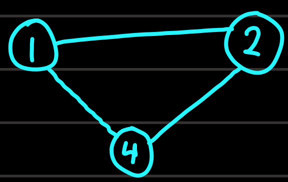
Subgrafo: $G' = \{V, A'\}$
A' = Subconjunto de A.



G

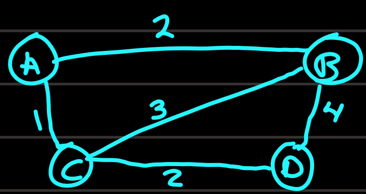
$V = \{1,2,3,4\}$
$A = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

G'

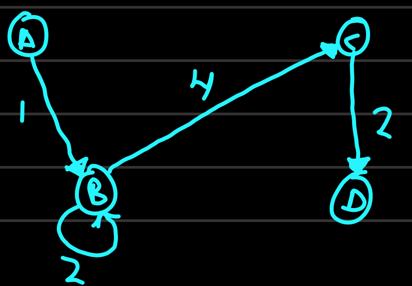


$V = \{1,2,4\}$
$A' = \{(1,2),(2,4),(1,4)\}$

Grafos ponderados: Indica un coste que representa el recorrido de una arista.

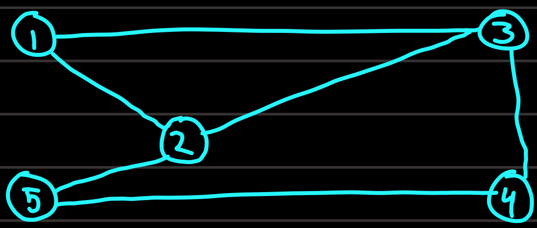


Grafo no dirigido



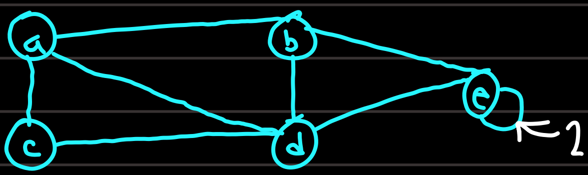
Grafo dirigido

Vértices adyacentes: Dos vértices cualesquiera i y j son adyacentes si existe una arista que los conecte.



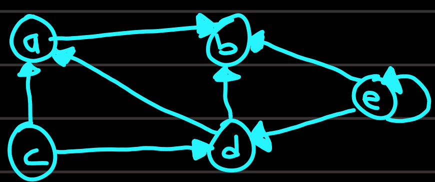
Los vert. 1 y 2 son adyacentes
Los vert. 2 y 4 no son adyacentes
Los vert. 1 y 3 son adyacentes

Grado de un vértice: (Grafo no dirigido) va a ser igual al número de vértices adyacentes a él.



$G(a) = 3$
$G(b) = 3$
$G(c) = 2$
$G(d) = 4$
$G(e) = 4$

Grado de un vértice (grafo dirigido):
- Grado interior: Número de aristas que llegan a un vértice.
- Grado exterior - Núm de aristas que salen de un vértice.



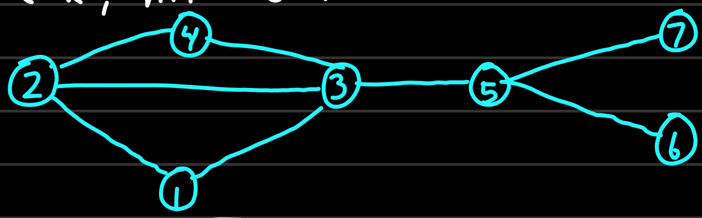
$Gi(a) = 2$
$Gi(b) = 3$
$Gi(c) = 0$
$Gi(d) = 2$
$Gi(e) = 1$

$Ge(a) = 1$
$Ge(b) = 0$
$Ge(c) = 2$
$Ge(d) = 2$
$Ge(e) = 3$

Camino: Un camino entre dos vértices cualesquiera va secuencia i y j de vértices.

$V_i \ldots, V_k \ldots V_j$

$V_k : (V_k, V_{k+1}) \in A$



Camino 1 a 5

$C_1 = 1, 3, 5$

$C_2 = 1, 3, 4, 2, 3, 5$

$C_3 = 1, 2, 4, 3, 5$

Camino simple: Es aquel dond no hay vértices repetidos

C_1

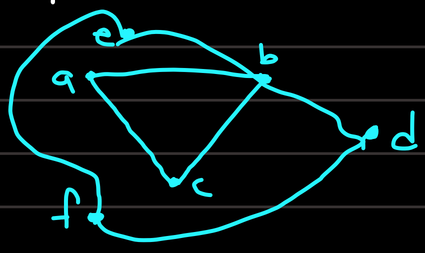
C_3

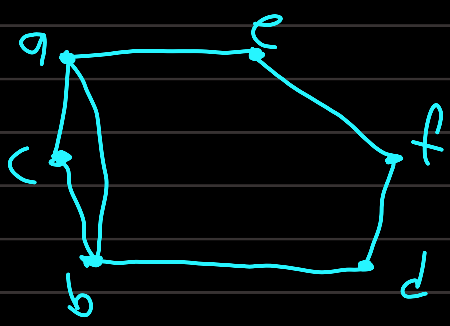
$C_4 = 1, 2, 3, 1$ De 1 a 1

Grafos acíclicos: Todos sus caminos son simples y no existen ciclos.

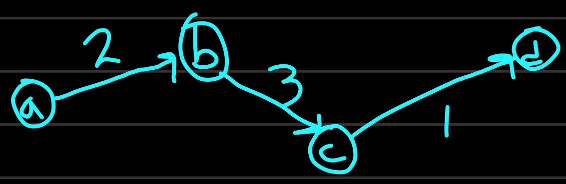
Grafos conectados: Existe como mínimo entre cualquier par de vértices distintos.

Isomorfismo: Puede ser representado de cualquier forma. respetando las mismas conexiones





Longitud de un camino: Es la suma de los costes que recorre el grafo i al j.



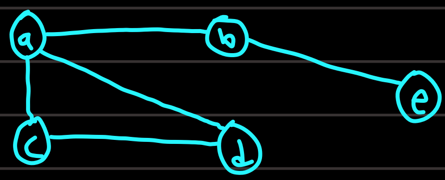
Camino $_{ad}$ = a, b, c, d

$l = 2+3+1 = 6$

Matriz de adyacencia [MA]

Se utiliza de un tamaño nxn, donde las filas de la matriz y las columnas hacen referencia a los vértices del grafo para almacenar la relación entre vértices y aristas.

Ej. Grafo no dirigido.

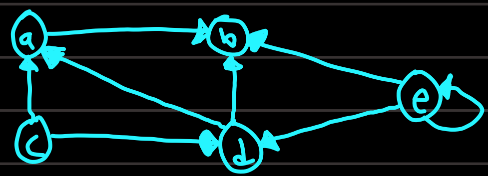


$V = \{a, b, c, d, e\}$

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	0
b	1	0	0	0	1
c	1	0	0	1	0
d	1	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0

$\Rightarrow$ MA

Para grafo dirigido

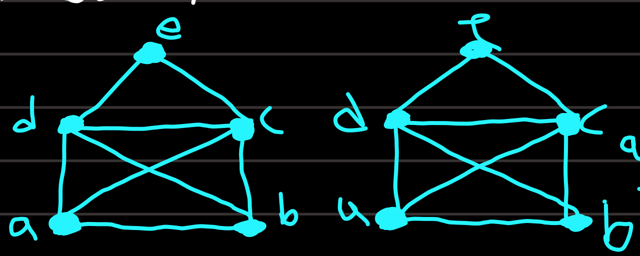


$V = \{a, b, c, d, e\}$

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	0
c	1	0	0	1	0
d	1	1	0	0	0
e	0	1	0	1	1

Caminos Eulerianos.

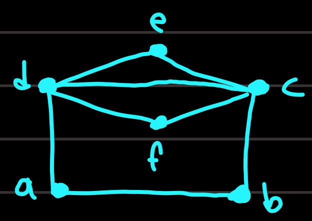
Son grafos de los cuales podemos recorrer sus aristas una sola vez.

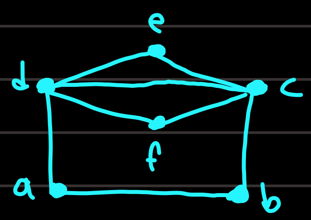


$a \to b \to c \to a \to d$
$\to e \to c \to d \to b$

Circuito Euleriano.

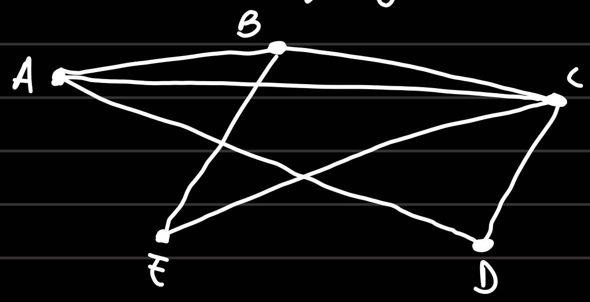
Donde iniciamos debemos terminar sin pasar por el mismo vértice.





← Tiene circutio y camino E.

Ejercicio: Sea el sig. grafo



Encontrar: $G = \{V, A\}$, su grado para cada uno de los vértices

$V = \{A, B, C, D, E\}$

$A = \{(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,E), (C,D), (C,E)\}$

$G(A) = 3$

$G(B) = 3$

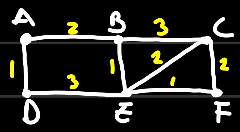
$G(C) = 4$

$G(D) = 2$

$G(E) = 2$

Ejercicio 2.

- 3 caminos simples de A a F
- Longitud de los 3 caminos
- Decir el caminos más óptimo
- M. A.



Camino 1 — Longitud

A → B → C → F — 7

Camino 2 — Longitud

A → D → E → F — 5

Camino 3 — Longitud

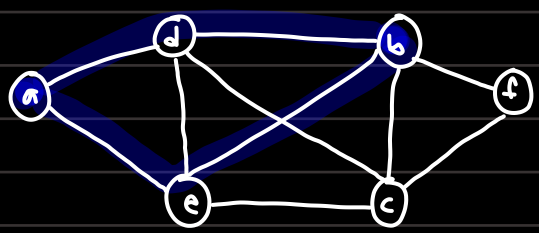
A → B → E → F — 4

Camino óptimo 3

	a	b	c	d	e	f
a	0	2	0	1	0	0
b	2	0	3	0	1	0
c	0	3	0	0	2	2
d	1	0	0	0	3	0
e	0	1	2	3	0	1
f	0	0	2	0	1	0

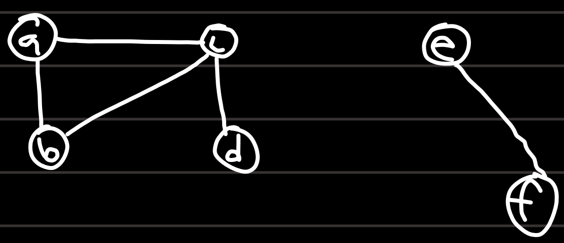
Grafo conexo.

Es un grafo no dirigido, es conexo si existe un camino entre cada par de vértices.



a — b ✓

Grafo no conexo.



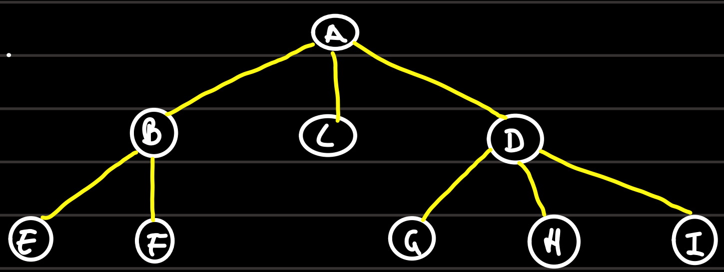
a - f X

Árboles: Es un grafo simple, no dirigido, conexo y sin ciclos.

- Si el árbol tiene un número finito de vértices tendremos n−1 aristas.
- También es llamado K-ario, si cada nodo/vertice tiene como máximo K-hijos.

K=2 → árbol binario

Ej.



Nodo raiz → No tiene padre.
Nodo padre → No tiene nodo arriba
Nodo → Tiene o no hijos.
Nodo hijo → Tienen un padre

Nodo hoja → Nodo externo es el que permanece en los extremos.

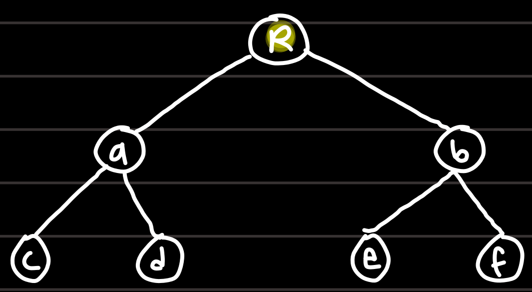
Altura: La longitud del camino más largo que comienza en el nodo y termina en una hoja.

Profundidad: Longitud del camino que comienza en la raíz y termina en un nodo.
La profundidad de un nodo es = a la profundidad de su padre.
El nivel empieza en 0.

Árbol ordenado: Es cuando el orden importa.
Árbol no ordenado: No importa el orden.

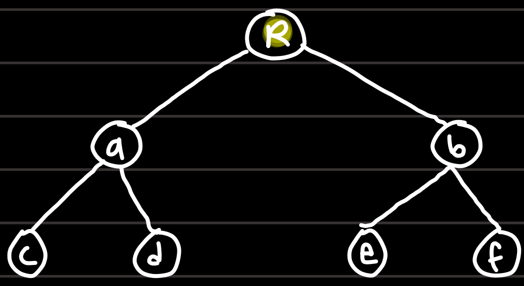
Recorrido de un árbol.

Pre-orden: (Nodo - izq - der) = NID
1. Nodo raíz N
2. Árbol izq. I
3. Árbol der. D



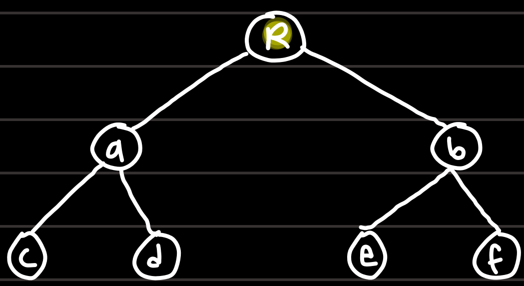
Recorrido: R - a - c - d - b - e - f

In-orden: (Izq-nodo-der) = IND
1. Árbol izq I
2. Nodo N
3. Árbol der. D



Recorrido: c-a-d-r-e-b-f

Post-orden: (Izq-der-nodo) = IDN
1. Árbol izq I
2. Árbol der D
3. Nodo N



Recorrido: c-d-a-e-f-b-r

Algoritmo de dijkstra.
- Etiquetar los vértices del grafo L(i)
- Existen etiquetas temporales y permanentes.
- Elegir nodo inicial

Pasos:
1. Inicializar las distancias con D con un valor infinito relativo ya que al inicio las D son desconocidas, excepto X que es 0, ya que la D de x a X es 0.

2. Sea $a = x$, se toma el vértice a como el actual.

3. Recorrer todos los nodos adyacentes de a, excepto los nodos marcados.

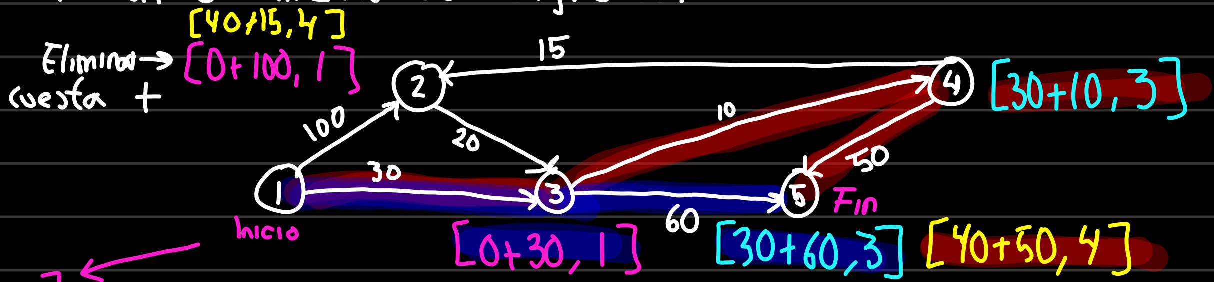
4. Si la distancia de x hasta vi es mayor que la distancia desde x a a, sumada la distancia de a a vi, vamos a sustituir:

$$D_i > D_a + d(a, v_i)$$
$$\therefore D_i = D_a + d(a, v_i)$$

5. Se marca como completo a.

6. Se toma como próximo nodo el de menor valor en D, se vuelve al paso 3, hasta que no haya más nodos marcados.

Ej. Sea G, determinar la ruta más óptima del nodo 1 al 5 mediante Dijkstra.



$[0, \infty]$
$[100, 1]$ ó $[30, 1]$
$[40, 3]$ ó $[90, 3]$ ✓
$[55, 4]$ ó $[90, 4]$ ✓

$\therefore$ Tiene dos rutas óptimas.

$\therefore R_1 = V_1, V_3, V_5 = 90$
$R_2 = V_1, V_3, V_5 = 90$

Algoritmo en tabla.

$v \backslash p$	1	2	3	4
1	0,1			
2	100,2		55,2	
3	30,3	30,3		
4	∞	40.4	40.4	
5	∞	90,5	90,5	

• Definitiva R_1

Ruta: $V_1, V_3, V_5 = 90$ ← Más óptima
R2 : $V_1, V_3, V_4, V_5 = 90$