## Lógica para Computação Lógica Proposicional - Validade de Argumentos

Profa Trícia Souto Adaptado do material do Prof. Hélder Almeida tssantos@uesc.br





#### Cálculo proposicional

- Pode-se usar ferramentas da lógica formal para ver como chegar a conclusões a partir de proposições dadas.
- O sistema formal que usa fórmulas proposicionais é chamado de Lógica Proposicional, Lógica Declarativa e Cálculo Proposicional.
- Um argumento pode ser representado em forma simbólica como p<sub>1</sub> Λ p<sub>2</sub> Λ p<sub>3</sub> Λ ... Λ p<sub>n</sub> → q, onde p<sub>1</sub> Λ p<sub>2</sub> Λ p<sub>3</sub> Λ ... Λ p<sub>n</sub> são chamadas de hipóteses e q de conclusão.
- Um argumento é válido quando p₁ Λ p₂ Λ p₃ Λ ... Λ pn
   → q for uma tautologia.
- q é consequência lógica de p<sub>1</sub> ∧ p<sub>2</sub> ∧ p<sub>3</sub> ∧ ... ∧ p<sub>n</sub>

#### Conceitos

- Dedução: conclusão lógica que resulta de um raciocínio. O processo de prova por dedução consiste em demonstrar que, dada uma ou mais premissas verdadeiras, a conclusão é verdadeira. A prova consiste em derivar a conclusão C a partir das hipóteses H utilizando os recursos de algum Sistema de dedução válido.
- Sistemas de dedução válidos estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento e são:
  - corretos: todo argumento provado é uma tautologia.
  - completos: toda tautologia pode ser demonstrada.

### Regras de equivalência

- Dupla negação
- Lei idempotente
- Comutatividade
- Associatividade
- Leis de De Morgan.
- Distributividade
- Transposição
- Regra do bicondicional
- Regra do condicional

As regras de equivalência funcionam em ambas as direções.



O cálculo proposicional fornece um sistema de regras de inferência que são capazes de gerar todas as formas de argumentos válidas expressáveis na linguagem do cálculo proposicional e somente as formas válidas.

10 regras básicas

### Regras de inferência

- Modus Ponens (MP)
- Eliminação da negação (~E)
- Introdução de conjunção (&I) (conjunção)
- Eliminação de conjunção (&E) (simplificação)
- Introdução de disjunção (vI) (adição)
- Eliminação da disjunção (vE)
- Introdução do bicondicional (<->I)
- Eliminação do bicondicional (<->E)
- Prova do condicional (PC)
- Redução ao absurdo (RAA) (prova indireta)

As regras de inferência não funcionam em ambas as direções.



As regras de inferência geram as formas de argumento numa série de etapas simples e precisas do raciocínio chamadas derivação.

Usando a forma de argumento:

- 2 S->A P
- 3 C->S P
- ∴ 4 S 1,3 MP
- ∴ 5 A 2,4 MP



- Modus Ponens (Regra de eliminação para condicional):
  - De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o consequente
  - De P e P  $\rightarrow$  Q podemos deduzir Q
- Ex.: Prove ~P -> (Q -> R), ~P, Q |- R

```
1 ^{P} - (Q - R) P
```

- Eliminação de negação (~E):
  - De uma wff  $\sim \phi$ , podemos inferir  $\phi$
- Ex.: Prove ~P -> ~~Q, ~~~P |- Q

```
1 ~P -> ~~Q P
```

~~~p

3 ~P

2, ~E

4 ~~Q 1, 3 MP

4 ~E



- Introdução de conjunção (&I ou conjunção):
  - De qq wffs  $\phi$  e  $\psi$ , podemos inferir a conjunção  $\phi$  &  $\psi$
- Eliminação de conjunção (&E ou simplificação):
  - De uma conjunção podemos inferir qq um de seus conjuntos
- Ex.: Prove P -> (Q & R), P | P & Q

```
P -> (Q \& R)
```

Р

3 Q & R 1, 2 MP

3 & E

P & Q

2, 4 & 1

- Introdução de disjunção (vl ou adição):
  - De uma wff  $\phi$ , podemos inferir a disjunção de  $\phi$  com qq wff (sendo  $\phi$  o primeiro ou segundo disjuncto dessa disjunção)

```
Ex.: Prove P |- (P v Q) & (P v R)
```

```
1 P P
2 P v Q 1 vl
3 P v R 1 vl
4 (P v Q) & (P v R) 2, 3 & l
```



- Eliminação da disjunção (vE ou adição):
  - De wffs da forma  $\phi$  v  $\psi$ ,  $\phi$  ->  $\chi$  e  $\psi$  ->  $\chi$ , podemos inferir a wff  $\chi$
- Ex.: Prove S v D, S -> F, D -> F | F

```
1 S v D
```

2 S-> F

3 D -> F

1, 2, 3 vE

Leia S: hoje é sábado, D: hoje é domingo, F: é final de semana



- Introdução do bicondicional (<->I):
  - De qq wffs de formas  $(\phi \rightarrow \psi)$  e  $(\psi \rightarrow \phi)$ , podemos inferir  $\phi \leftarrow \psi$
- Eliminação do bicondicional (<->E):
  - De qq wffs da forma  $\phi <-> \psi$ , podemos inferir  $\phi -> \psi$  ou  $\psi -> \phi$

```
Ex.: Prove F <-> (S v D), S |- F
```

```
1 F <-> (S v D) P
```

- Raciocínio hipotético é o raciocínio baseado em hipóteses, uma suposição feita em consideração ao argumento a fim de mostrar que uma conclusão particular segue daquela suposição.
- As hipóteses não são declaradas como verdadeiras. Elas são artifícios lógicos que acolhemos temporariamente como um tipo especial de estratégia de prova



• Prove:

"Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida."

• Prove:

"Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida."

Hipótese: Suponhamos que você continue correndo.

Suposições: Seu tornozelo estão muito inchado. Se o seu tornozelo está muito inchado e você continuar correndo, então ele não irá sarar em uma semana. Se o seu tornozelo não sarar em uma semana, então

Conclusão: você não estará apto para disputar a corrida.

Levanta a hipótese (que assumimos em relação ao argumento) e admite as suposições como verdadeiras, o que leva a conclusão também ser verdadeira.

• Prove:

"Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida."

- Formalizando:
  - Suposições: I, (I & C) -> ~S, ~S -> ~A
  - Conclusão: C -> ~A

$$I, (I \& C) -> {}^{\sim}S, {}^{\sim}S -> {}^{\sim}A | - C -> {}^{\sim}A$$

# DCET/UESC

19

### Regras Hipotéticas

Prove:

Introduzimos a hipótese vigente

Duração do

argumento hipotético

 $I, (I \& C) -> {}^{\sim}S, {}^{\sim}S -> {}^{\sim}A \mid -C -> {}^{\sim}A$ 

 $\boldsymbol{P}$ 

 $(I \& C) \rightarrow \sim S$ 

 $\boldsymbol{P}$ 

 $\sim S \rightarrow \sim A$ 

 $\boldsymbol{P}$ 

 $\boldsymbol{C}$ 

 $\boldsymbol{H}$ 

I & C

1, 4 &I

6  $\sim S$  2, 5 MP

~A

3,6 MP

4-7 PC

(PC: Prova do

Término (ou ponto de descarte) da hipótese

 $C \rightarrow \sim A$ 8

condicional)

Conclusão

- Prova do condicional (PC):
  - Dada uma derivação de uma wff  $\psi$  a partir de uma hipótese  $\phi$ , podemos descartar a hipótese e inferir  $\phi$  ->  $\psi$  (no exemplo anterior  $\phi$  é  $Ce\psi\acute{e}^{A}$
- Para provar um condicional, a estratégia usual (na falta de algo mais simples) é colocar como hipótese o seu antecedente e então derivar o seu consequente, por PC
- Ex.: Prove P -> Q, Q -> R |- P -> R

```
P -> Q
Q -> R
                    1, 3 MP
                   2, 4 MP
P -> R
                    3-5 PC
```



 Podemos encaixar uma estratégia de PC dentro de outra quando o consequente da conclusão que é um condicional, é outro condicional

Ex.: Prove (P & Q) -> R |- P -> (Q -> R)
1 (P & Q) -> R P
2 | P H
3 | Q H
4 | P & Q 2,3 &I
5 | R 1,4 MP
6 | Q -> R 3-5 PC
7 | P -> (Q -> R)
2 | P -> (Q -> R)



Podemos ter mais de uma hipótese vigente na mesma prova

```
    Ex.: Prove P v Q |- Q v P
```

```
1 PvQ P
2 | P H
3 | QvP 2vl
4 P->QvP 2-3 PC
5 | Q H
6 | QvP 5vl
7 Q->(QvP) 5-6 PC
8 QvP 1,4,7 vE
```



- Regras a serem observadas no uso do raciocínio hipotético:
  - 1. Cada hipótese introduz numa prova o início de uma nova linha vertical
  - 2. Nenhuma ocorrência de uma prova à direita de uma linha vertical pode ser citada em qualquer regra aplicada depois que a linha acaba
  - 3. Se duas ou mais hipóteses estão vigentes simultaneamente, então a ordem inversa na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas foram introduzidas
  - 4. Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas



- Redução ao absurdo (RAA) (prova indireta):
  - Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese  $\phi$ , podemos descartar a hipótese e inferir  $\sim \phi$
  - Tome como contradição qq wff da forma φ & ~φ
- Ex.: Prove P -> Q, ~Q|- ~P

```
1 P-> Q P
2 ~Q P
3 P
4 Q 1,3 MP
5 Q&~Q 2,4 &I
6 ~P 3-5 RAA
```



#### Exercícios

#### Prove:

```
a) P&Q |-Q&P
b) (P&Q) -> (R&S), ~~P, Q |-S
C) P |-P&P
d) P, ~~(P->Q) |-Qv~Q
e) P, ~~(P->Q) |-(R&S) v Q
f) P |-P v P
g) (P v Q) & (P v R), P -> S, Q -> S, P -> T, R -> T |-S&T
h) P v P, P -> (Q&R) |-R
i) P->Q, (P->Q) -> (Q->P) |-P <-> Q
p <->Q |-Q <-> P
k) P |-(P->Q) -> Q
(P&Q) -> R |-P -> (Q-> R)
m) P v Q |-Q v P
n) (P&Q) v (P&R) |-P& (Q v R)
```



#### Exercícios

#### Prove:

- O) P <-> ~Q |- ~(P & Q)
  p) ~P -> P |- P
  q) ~(~P & ~Q), ~P |- Q



#### Outras regras

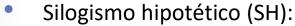
- Modus Tollens (MT):
  - Da premissa de qq instância substitutiva da forma, podemos inferir, validamente, a conclusão da instância substitutiva
  - De P -> Q e ~Q podemos deduzir ~P

```
Ex.: Prove (G v N) -> ~C | - ~~C -> ~(G v N)
```

Você também consegue provar usando apenas as regras básicas

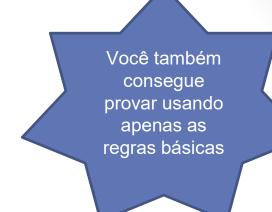
# DCET/UESC

### Outras regras



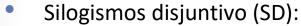
P 
$$\rightarrow$$
 Q, Q  $\rightarrow$  R  $\mid$ -P  $\rightarrow$  R

- Absorção (ABS):
  - $P \rightarrow Q \mid -P \rightarrow (P \& Q)$
- Dilema Construtivo (DC):
  - $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \mid -R \vee S$
- Repetição (RE):
  - Permite repetir uma wff que ocorreu anteriormente numa prova, desde que não faça parte de uma derivação hipotética cuja hipótese foi descartada
  - P |- P
- Contradição (CONTRAD):
  - P, ~P |- Q



# DCET/UESC

### Outras regras



Contra-posição

• 
$$P \rightarrow Q \mid - ^{\sim}Q \rightarrow ^{\sim}P$$

• 
$$^{\sim}Q \rightarrow ^{\sim}P \mid P \rightarrow Q$$

Autoreferência

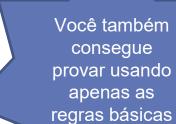
Exportação

• 
$$(P \land Q) \rightarrow R \mid -P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Distributividade

• 
$$P \wedge (Q \vee R) \mid -(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

• 
$$P \vee (Q \wedge R) \mid - (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



#### Exercícios

Prove:

- (G v N) ->  $^{\sim}$ C |-  $^{\sim}$ C ->  $^{\sim}$ (G v N) (utilizando apenas as regras básicas)
- b) P |- Q -> P
- C) P, ~P |- Q
- d)  $P \vee Q$ ,  $P \mid Q$
- e) ~P -> Q, R -> S, ~P v R, ~Q |- S
- f) P -> Q, (P & Q) -> R, ~R |- ~P
  - "Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. Ou a taxa federal de descontos vai cair, ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair".

J: a taxa de juros vai cair.

I: o mercado imobiliário vai melhorar.

F: a taxa federal de descontos vai cair.

$$(J \rightarrow I) \land (F \lor \sim I) \land J \rightarrow F$$

#### Exercícios

#### Prove:

 "Meu cliente é canhoto mas, se o diário não tiver sumido, então meu cliente não é canhoto; portanto, o diário sumiu".

C: meu cliente é canhoto.

D: o diário sumiu.

 $C \wedge (^{\sim}D \rightarrow ^{\sim}C) \rightarrow D.$ 

## Lógica para Computação Lógica Proposicional - Validade de Argumentos

Profa Trícia Souto Adaptado do material do Prof. Hélder Almeida tssantos@uesc.br

