Lógica para Computação
Lógica Proposicional - Validade de Argumentos

Profa Trícia Souto
Adaptado do material do Prof. Hélder Almeida
tssantos@uesc.br

Cálculo proposicional

- Pode-se usar ferramentas da lógica formal para ver como chegar a conclusões a partir de proposições dadas.
- O sistema formal que usa fórmulas proposicionais é chamado de Lógica Proposicional, Lógica Declarativa e Cálculo Proposicional.
- Um argumento pode ser representado em forma simbólica como $\mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q}$, onde $\mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n}$ são chamadas de **hipóteses** e **q** de **conclusão**.
- Um argumento é válido quando $\mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q}$ for uma tautologia.
- **q** é **conseqüência lógica** de $\mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n}$

Conceitos

- **Dedução**: conclusão lógica que resulta de um raciocínio. O processo de prova por dedução consiste em demonstrar que, dada uma ou mais premissas verdadeiras, a conclusão é verdadeira. A prova consiste em derivar a conclusão C a partir das hipóteses H utilizando os recursos de algum Sistema de dedução válido.

- **Sistemas de dedução válidos** estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento e são**:**
  - **corretos**: todo argumento provado é uma tautologia.
  - **completos**: toda tautologia pode ser demonstrada.

Regras de equivalência

- Dupla negação
- Lei idempotente
- Comutatividade
- Associatividade
- Leis de De Morgan.
- Distributividade
- Transposição
- Regra do bicondicional
- Regra do condicional

As regras de equivalência funcionam em ambas as direções.

Regras de inferência

O cálculo proposicional fornece um sistema de regras de inferência que são capazes de gerar todas as formas de argumentos válidas expressáveis na linguagem do cálculo proposicional e somente as formas válidas.

Regras de inferência

10 regras básicas

- Modus Ponens (MP)
- Eliminação da negação (~E)
- Introdução de conjunção (&I) (conjunção)
- Eliminação de conjunção (&E) (simplificação)
- Introdução de disjunção (vI) (adição)
- Eliminação da disjunção (vE)
- Introdução do bicondicional (<->I)
- Eliminação do bicondicional (<->E)
- Prova do condicional (PC)
- Redução ao absurdo (RAA) (prova indireta)

As regras de inferência não funcionam em ambas as direções.

Regras de inferência

As regras de inferência geram as formas de argumento numa série de etapas simples e precisas do raciocínio chamadas *derivação*.

- Usando a forma de argumento:

C, S -> A, C -> S |- A

	1	C	P
	2	S->A	P
	3	C->S	P
∴	4	S	1, 3 MP
∴	5	A	2, 4 MP

Regras de inferência

- Modus Ponens (Regra de eliminação para condicional):
  - De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o consequente
  - De P e P $\rightarrow$ Q podemos deduzir Q
- Ex.: Prove ~P -> (Q -> R), ~P, Q |- R

1	~P -> (Q -> R)	P
2	~P	P
3	Q	P
4	Q -> R	1, 2 MP
5	R	3, 4 MP

Regras de inferência

- Eliminação de negação (~E):
  - De uma wff ~~ϕ, podemos inferir ϕ

- Ex.: Prove ~P -> ~~Q, ~~~P |- Q

1	~P -> ~~Q	P
2	~~~P	P
3	~P	2, ~E
4	~~Q	1, 3 MP
5	Q	4 ~E

Regras de inferência

- Introdução de conjunção (&I ou conjunção):
  - De qq wffs ϕ e ψ, podemos inferir a conjunção ϕ & ψ
- Eliminação de conjunção (&E ou simplificação):
  - De uma conjunção podemos inferir qq um de seus conjuntos

- Ex.: Prove P -> (Q & R), P |- P & Q

1	P -> (Q & R)	P
2	P	P
3	Q & R	1, 2 MP
4	Q	3 &E
5	P & Q	2, 4 &I

Regras de inferência

- Introdução de disjunção (vI ou adição):
  - De uma wff ϕ, podemos inferir a disjunção de ϕ com qq wff (sendo ϕ o primeiro ou segundo disjuncto dessa disjunção)

- Ex.: Prove P |- (P v Q) & (P v R)

1	P	P
2	P v Q	1 vI
3	P v R	1 vI
4	(P v Q) & (P v R)	2, 3 &I

Regras de inferência

- Eliminação da disjunção (vE ou adição):
  - De wffs da forma ϕ v ψ, ϕ -> χ e ψ -> χ, podemos inferir a wff χ

- Ex.: Prove S v D, S -> F, D -> F |- F

1	S v D	P
2	S -> F	P
3	D -> F	P
4	F	1, 2, 3 vE

Leia S: hoje é sábado, D: hoje é domingo, F: é final de semana

Regras de inferência

- Introdução do bicondicional (<->I):
  - De qq wffs de formas (ϕ -> ψ) e (ψ -> ϕ), podemos inferir ϕ <-> ψ
- Eliminação do bicondicional (<->E):
  - De qq wffs da forma ϕ <-> ψ, podemos inferir ϕ -> ψ ou ψ -> ϕ

- Ex.: Prove F <-> (S v D), S |- F

1	F <-> (S v D)	P
2	S	P
3	(S v D) -> F	1 <->E
4	S v D	2 vI
5	F	3, 4 MP

DCET/UESC

Regras Hipotéticas

- Raciocínio hipotético é o raciocínio baseado em hipóteses, uma suposição feita em consideração ao argumento a fim de mostrar que uma conclusão particular segue daquela suposição.
- As hipóteses não são declaradas como verdadeiras. Elas são artifícios lógicos que acolhemos temporariamente como um tipo especial de estratégia de prova

Regras Hipotéticas

- Prove:

"Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida."

DCET/UESC

Regras Hipotéticas

- Prove:

"Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida."

Hipótese: Suponhamos que você continue correndo.
Suposições: Seu tornozelo estão muito inchado. Se o seu tornozelo está muito inchado e você continuar correndo, então ele não irá sarar em uma semana. Se o seu tornozelo não sarar em uma semana, então
Conclusão: você não estará apto para disputar a corrida.

Levanta a hipótese (que assumimos em relação ao argumento) e admite as suposições como verdadeiras, o que leva a conclusão também ser verdadeira.

Regras Hipotéticas

- Prove:

"Se você continuar correndo, você não estará apto para disputar a corrida."

- Formalizando:

  - Suposições: I, (I & C) -> ~S, ~S -> ~A
  - Conclusão: C -> ~A

I, (I & C) -> ~S, ~S -> ~A |- C -> ~A

Regras Hipotéticas

- Prove:

$$I, (I \& C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$$

1	I	*P*
2	$(I \& C) \rightarrow \sim S$	*P*
3	$\sim S \rightarrow \sim A$	*P*
4	│ C	*H*
5	│ $I \& C$	1, 4 &I
6	│ $\sim S$	2, 5 MP
7	│ $\sim A$	3, 6 MP
8	$C \rightarrow \sim A$	4-7 PC

Introduzimos a hipótese vigente

Duração do argumento hipotético

Término (ou ponto de descarte) da hipótese

Conclusão (PC: Prova do condicional)

Regras hipotéticas

- Prova do condicional (PC):
  - Dada uma derivação de uma wff ψ a partir de uma hipótese ϕ, podemos descartar a hipótese e inferir ϕ -> ψ (no exemplo anterior ϕ é C e ψ é ~A)
- Para provar um condicional, a estratégia usual (na falta de algo mais simples) é colocar como hipótese o seu antecedente e então derivar o seu consequente, por PC
- Ex.: Prove P -> Q, Q -> R |- P -> R

1	P -> Q	P
2	Q -> R	P
3	| P	H
4	| Q	1, 3 MP
5	| R	2, 4 MP
6	P -> R	3-5 PC

Regras hipotéticas

- Podemos encaixar uma estratégia de PC dentro de outra quando o consequente da conclusão que é um condicional, é outro condicional

- Ex.: Prove (P & Q) -> R |- P -> (Q -> R)

1	(P & Q) -> R	P
2	P	H
3	Q	H
4	P & Q	2,3 &I
5	R	1, 4 MP
6	Q -> R	3-5 PC
7	P -> (Q -> R)	2-6 PC

DCET/UESC

Regras hipotéticas

- Podemos ter mais de uma hipótese vigente na mesma prova

- Ex.: Prove P v Q |- Q v P

1	P v Q	P
2	| P	H
3	| Q v P	2 vI
4	P -> Q v P	2-3 PC
5	| Q	H
6	| Q v P	5 vI
7	Q -> (Q v P)	5-6 PC
8	Q v P	1, 4, 7 vE

Regras hipotéticas

- Regras a serem observadas no uso do raciocínio hipotético:
  1. Cada hipótese introduz numa prova o início de uma nova linha vertical
  2. Nenhuma ocorrência de uma prova à direita de uma linha vertical pode ser citada em qualquer regra aplicada depois que a linha acaba
  3. Se duas ou mais hipóteses estão vigentes simultaneamente, então a ordem inversa na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas foram introduzidas
  4. Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas

Regras hipotéticas

- Redução ao absurdo (RAA) (prova indireta):
  - Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese ϕ, podemos descartar a hipótese e inferir $\sim\phi$
  - Tome como contradição qq wff da forma ϕ & $\sim\phi$
- Ex.: Prove P -> Q, ~Q|- ~P

1	P -> Q	P
2	~Q	P
3	| P	H
4	| Q	1, 3 MP
5	| Q & ~Q	2, 4 &I
6	~P	3-5 RAA

DCET/UESC

Exercícios

Prove:

a) P & Q |- Q & P
b) (P & Q) -> (R & S), ~~P, Q |- S
c) P |- P & P
d) P, ~~(P -> Q) |- Q v ~Q
e) P, ~~(P -> Q) |- (R & S) v Q
f) P |- P v P
g) (P v Q) & (P v R), P -> S, Q -> S, P -> T, R -> T |- S & T
h) P v P, P -> (Q & R) |- R
i) P -> Q, (P -> Q) -> (Q -> P) |- P <-> Q
j) P <-> Q |- Q <-> P
k) P |- (P -> Q) -> Q
l) (P & Q) -> R |- P -> (Q -> R)
m) P v Q |- Q v P
n) (P & Q) v (P & R) |- P & (Q v R)

Exercícios

Prove:

o) P <-> ~Q |- ~(P & Q)

p) ~P -> P |- P

q) ~(~P & ~Q), ~P |- Q

Outras regras

- Modus Tollens (MT):
  - Da premissa de qq instância substitutiva da forma, podemos inferir, validamente, a conclusão da instância substitutiva
  - De P -> Q e ~Q podemos deduzir ~P

- Ex.: Prove (G v N) -> ~C |- ~~C -> ~(G v N)

1	(G v N) -> ~C	P
2	~~C	H (para PC)
3	~(G v N)	1, 2 MT
4	~~C -> ~)G v N)	2-3 PC

Você também consegue provar usando apenas as regras básicas

DCET/UESC

Outras regras

Você também consegue provar usando apenas as regras básicas

- Silogismo hipotético (SH):
  - $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R$ |- $P \rightarrow R$
- Absorção (ABS):
  - $P \rightarrow Q$ |- P -> (P & Q)
- Dilema Construtivo (DC):
  - P v Q, $P \rightarrow R$, Q -> S |- R v S
- Repetição (RE):
  - Permite repetir uma wff que ocorreu anteriormente numa prova, desde que não faça parte de uma derivação hipotética cuja hipótese foi descartada
  - P |- P
- Contradição (CONTRAD):
  - P, ~P |- Q

DCET/UESC

Outras regras

- Silogismos disjuntivo (SD):
  - $P \vee Q, \sim P \mid\!- Q$
- Contra-posição
  - $P \to Q \mid\!- \sim Q \to \sim P$
  - $\sim Q \to \sim P \mid\!- P \to Q$
- Autoreferência
  - $P \mid\!- P \wedge P$
  - $P \vee P \mid\!- P$
- Exportação
  - $(P \wedge Q) \to R \mid\!- P \to (Q \to R)$
- Distributividade
  - $P \wedge (Q \vee R) \mid\!- (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  - $P \vee (Q \wedge R) \mid\!- (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Você também consegue provar usando apenas as regras básicas

Exercícios

Prove:

a) (G v N) -> ~C |- ~~C -> ~(G v N) (utilizando apenas as regras básicas)
b) P |- Q -> P
c) P, ~P |- Q
d) P $\vee$ Q, ~P |- Q
e) ~P -> Q, R -> S, ~P v R, ~Q |- S
f) P -> Q, (P & Q) -> R, ~R |- ~P
g) "Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. Ou a taxa federal de descontos vai cair, ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair".

   J: a taxa de juros vai cair.
   I: o mercado imobiliário vai melhorar.
   F: a taxa federal de descontos vai cair.

   $\mathbf{(J \to I) \land (F \lor \sim I) \land J \to F}$

Exercícios

Prove:

- "Meu cliente é canhoto mas, se o diário não tiver sumido, então meu cliente não é canhoto; portanto, o diário sumiu".

  C: meu cliente é canhoto.

  D: o diário sumiu.

  $C \wedge (\sim D \rightarrow \sim C) \rightarrow D.$

Lógica para Computação
Lógica Proposicional - Validade de Argumentos

Profa Trícia Souto
Adaptado do material do Prof. Hélder Almeida
tssantos@uesc.br