

## **Ficha de trabalho - Programação Linear**

### **Definição e objetivos da Programação Linear**

A Programação Linear pode ser considerada uma ciência voltada para a resolução de problemas reais, em que se procura trazer para o campo de tomada de decisões (Economia, Medicina, Agricultura, etc.) os métodos próprios de outras áreas científicas; refere-se a um conjunto de métodos cujo objetivo principal é tirar o maior proveito possível de sistemas económicos, industriais, militares, ..., cuja estrutura possa ser definida matematicamente. Um Programa Linear é pois, um problema de otimização em que a função que se pretende otimizar (função objetivo) é linear e está sujeita a restrições (geralmente inequações lineares) que redefinem o seu domínio, ou seja, num problema de Programação Linear pretende-se determinar o ótimo de uma função linear num conjunto convexo (um conjunto  $X$  diz-se convexo se dados dois quaisquer pontos de  $X$  o segmento de recta que os une está contido em  $X$ ) que resulta da intersecção de inequações lineares. Num Programa Linear, a otimização poderá ser maximização ou minimização da função objetivo, e as restrições podem ser do tipo  $\leq$ ,  $=$ ,  $\geq$ . As variáveis reais podem ser não negativas e/ou assumir qualquer valor real.

### **Onde se aplica?**

Os domínios de aplicação da Programação Linear são vastíssimos, podendo citar-se fundamentalmente os seguintes: \_ Economia e especialmente Economia de Empresa, onde se situam as aplicações mais férteis e os estímulos mais fortes para os desenvolvimentos teóricos da Programação Linear; \_ Matemática, onde a Programação Linear tem impulsionado a obtenção de importantes resultados teóricos e o aperfeiçoamento das técnicas de análise numérica; \_ Militar, onde as aplicações são numerosas mas normalmente pouco divulgadas por razões de segurança.

Como exemplos destas áreas de aplicação podemos referir mais explicitamente: ■ *Gestão de empresas* (determinação das quantidades a produzir dos diferentes produtos da empresa de acordo com os recursos disponíveis, as condições tecnológicas existentes e a situação do mercado.); ■ *Problemas de Transportes* (conhecido o custo de transporte de uma unidade de produto de cada origem para cada destino, procede-se à determinação do plano de distribuição que torna mínimo o custo total de transporte.); ■ «Triam-Ihos» (determinação do número de unidades a cortar com determinadas dimensões de modo a minimizar os desperdícios envolvidos face às dimensões da produção. Exemplos: indústria do papel e do cartão, siderúrgica, têxtil, coinfecções, vidreira, ...); ■ *Estrutura financeira dos bancos* (o banco pretende estabelecer a estrutura do cativo que maximiza o seu lucro global, sabendo que devem ser respeitados os condicionalismos legais e de gestão que asseguram o equilíbrio financeiro.); ■ *Problemas de Mistura* (pretende-se obter, com custo mínimo ou lucro máximo, um ou vários produtos, a satisfazer certos requisitos técnicos, através de vários ingredientes possuidores em grau diferente dessas características técnicas. Exemplo: rações para animais, adubos, produtos alimentares e farmacêuticos, ligas metálicas, tintas, gasolinas.); ■ *Planeamento Agrícola* (o problema consiste em afetar recursos escassos, tais como superfície arável, mão-de-obra, água, etc..., à produção de diversos bens de modo a maximizar o resultado de exploração.).

### A quem se destina?

Destina-se, essencialmente, a administradores, engenheiros, técnicos, ..., com o objetivo de, por exemplo, minimizar custos ou maximizar lucros.

## Problemas

**Problema 1:** A Direção de Marketing do IKEA sugere o lançamento de um novo modelo de secretária e de estante em substituição dos modelos atuais. Aquela Direção não vê dificuldade de colocação no mercado para as estantes enquanto aconselha que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades. Após estudos levados a cabo pela Direção de Produção, conclui-se que: \_ A disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 horas-máquina; \_ A disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem; \_ Cada secretária necessita de 2 horas-máquina de Estampagem e 4 horas-homem de Montagem e Acabamento; \_ Cada estante necessita de 4 horas-máquina de Estampagem e 4 horas-homem de Montagem e Acabamento. Por outro lado, as margens brutas unitárias estimadas são de 60 euros para as secretárias e 30 euros para as estantes. A empresa pretende determinar o plano de produção mensal para estes novos modelos que maximiza a margem bruta.

**Problema 2:** Uma das tarefas propostas para a “Quinta das Celebridades” consiste em determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal de forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo. Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades destes existentes em cada tipo de ração (g/kg) constam no quadro seguinte:

Ração Ing. Nutritivos	Granulado	Farinha	Quantidade mínima requerida
Hidratos de carbono	20	50	200
Vitaminas	50	10	150
Proteínas	30	30	210
Custo (cênts/kg)	10	5	

Tabela 1: Dados técnico-económicos.

**Problema 3:** Para angariarem fundos para o Carro da "Queima das Fitas", os alunos do 3º ano de Matemática optaram por vender 300 t-shirts e 600 esferográficas. Para tal, decidiram fazer dois tipos de lotes: tipo A: uma t-shirt e uma esferográfica; tipo B: duas t-shirts e cinco esferográficas. Os lotes do tipo A foram vendidos a 8€ e os do tipo B a 18€. Quantos lotes de cada tipo convém formar para obter o lucro máximo com a sua venda?

**Problema 4:** Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 80 hectares. Pretende semear pelo menos 20 hectares de trigo e pelo menos 10 hectares de milho. Sabe-se que:

- o custo de produção de um hectare de trigo é 1500 euros,
  - o custo de produção de um hectare de milho é 1000 euros,
- e que,
- cada hectare de trigo dá um lucro de 700 euros,
  - cada hectare de milho dá um lucro de 600 euros.

Admitindo que o agricultor não pode investir mais do que 100 000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo a que tenha um lucro máximo?

**Problema 5:** Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia elétrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: de origem convencional, maioritariamente da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período noturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a 40 MWh.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida. Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- O preço por cada MWh é de 80 euros. Relativamente à energia eólica, tem-se:

- O preço por cada MWh é de 90 euros;
- O fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os 40 MWh.

Pretende-se determinar que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

**Problema 6:** Uma frutaria confeciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.

Bebida X: com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Bebida Y: com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.

Para confeccionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 3 euros e cada litro de bebida Y dá um lucro de 2 euros.

Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confeccionar por dia, para maximizar o lucro?

**Problema 7:** O proprietário de uma estufa pretende planificar o trabalho de fornecimento de flores para parques da cidade. Para o efeito vai usar tulipas, narcisos e arbustos floridos em três tipos de esquemas.

No esquema do tipo 1 são utilizadas 30 tulipas, 20 narcisos e 4 arbustos floridos.

No esquema do tipo 2 são utilizadas 10 tulipas, 40 narcisos e 3 arbustos floridos.

No esquema do tipo 3 são utilizadas 20 tulipas, 50 narcisos e 2 arbustos floridos.

O lucro líquido é de 50 euros para cada esquema do tipo 1, 30 euros para cada esquema do tipo 2 e 60 euros para cada esquema do tipo 3. O proprietário da estufa dispõe de 1000 tulipas, 800 narcisos e 100 arbustos floridos.

Quantos esquemas de cada tipo deve usar para obter o máximo lucro?

**Problema 8:** Um ginásio oferece dois tipos de treino.

O treino A custa 7,5 € por sessão e inclui: 30 minutos de ginástica rítmica, 30 minutos de musculação, 90 minutos de corrida + alongamentos.

O treino B custa 12 € por sessão e inclui: 120 minutos de ginástica rítmica, 30 minutos de musculação, 30 minutos de corrida + alongamentos.

Um cliente pretende treinar, no mínimo, 3,5 horas de ginástica rítmica, 2 horas de musculação e 4 horas de corrida + alongamentos durante uma semana.

Quantas sessões de treino A e B deve comprar para ter um custo mínimo?

**Bom Trabalho!**