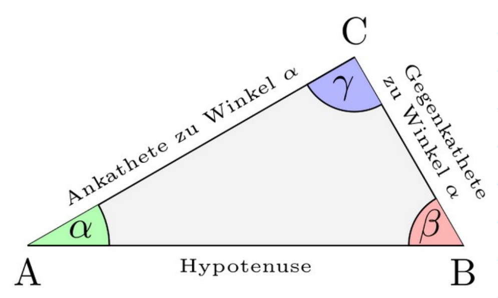
Trigonometrie (grch: trigon: Dreieck, metron: Maß)

Übersicht:

1. Vorüberlegungen im rechtwinkeligen Dreieck
2. Trigonometrie im rechtwinkeligen Dreieck
3. Trigonometrie am Einheitskreis
4. Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

1. Vorüberlegungen zum rechtwinkeligen Dreieck (rw. Dreieck)

So wie in jedem Dreieck ist auch im rw. Dreieck die Winkelsumme 180°.
Die beiden Seiten, die am rechten Winkel anliegen (in der Zeichnung γ) heißen Katheten, die Seite die gegenüber vom rechten Winkel liegt (das ist immer die längste Seite) heißt Hyponenuse.



Klassische Beschriftung im Dreieck mit Punkte gegenüber Seite erklären

Betrachtet man einen bestimmten (spitzen) Winkel im rw. Dreieck, dann gibt es in Bezug auf diesen Winkel eine Ankathete (die an diesem Winkel ANliegt) und eine Gegenkathete (die GEGENüber von diesem Winkel liegt)
In der Zeichnung ist z.B. die Gegenkathete von α auch gleichzeitig die Ankathete von β.

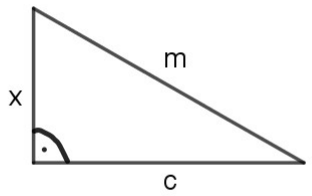
Der Rechte Winkel hat keine AN- und auch keine GEGENkathete.

Weiters gilt im rw. Dreieck der Satz des Pythagoras: $k_1^2 + k_2^2 = h^2$
(k_1, k_2... Katheten, h... Hypotenuse) und die Fläche kann als "halbes Rechteck" gesehen werden, also $A = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$.

Wenn also c die Hypotenuse ist, gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ und $A = \frac{a \cdot b}{2}$

Wie in jedem Dreieck gilbt auch hier die Flächenformel mit jeweils "Seite mal zugehörige Höhe durch 2":

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$



Aufgabe 1:
Beschrifte den Winkel ε so, dass x die Gegenkathete von ε ist.
Beschrifte den Winkel δ so, dass c die Ankathete

von δ ist.
Zeichne die Höhe auf m richtig ein.

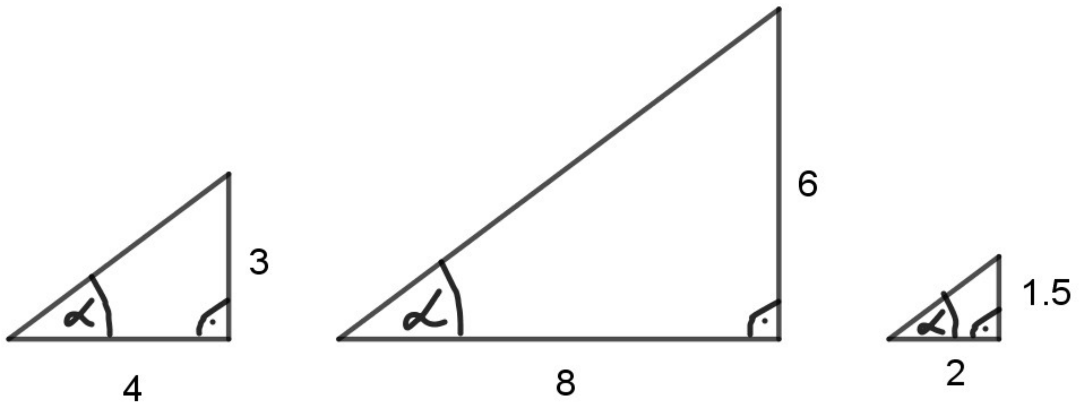
2. Trigonometrie im rechtwinkeligen Dreieck

... gehört zum Teil A und ist im Deskriptor 2.12 dargestellt:

2.12	Sinus, Cosinus und Tangens von Winkeln zwischen 0° und 90° als Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck verstehen und anwenden

Ziel ist es, in einem Dreieck, von dem man z.B. alle 3 Seiten kennt, auch alle 3 Winkel ausrechnen (und nicht nur konstruieren) zu können.
Genau so will man in einem Dreieck, von dem man z.B. 2 Winkel und eine Seite kennt, die Länge der anderen Seiten ausrechnen können.

Unsere Überlegungen beginnen in rechtwinkeligen Dreiecken:
Die folgenden Dreiecke sind alle verschieden groß, haben aber alle den gleichen Winkel α.



Man erkennt: Die Katheten sind zwar jeweils verschieden lang, aber das VERHÄLTNIS der Katheten ist immer gleich:

3 : 4 = 6 : 8 = 1.5 : 2 ....
Man kann die Verhältnisse auch als Bruch anschreiben:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{1.5}{2}$ bzw. als Dezimalzahl ergibt das $0.75 = 0.75 = 0.75$

Der Winkel α in den obigen Dreiecken ist ca. 37°.
Jedes rw. Dreieck mit diesem Winkel hätte auch das gleiche Seitenverhältnis, egal wie groß das Dreieck ist.
Würde man den Winkel α ändern, so würde sich auch das Seitenverhältnis ändern.

> Bedenke: Ein Verhältnis kann auch als Zahl aufgefasst werden.
> Beispiel: "Karl ist 48 Jahre alt, Erwin ist 16 Jahre alt":
>
> Karl : Erwin = 48 :16 = $\frac{48}{16} = \frac{3}{1} = 3$ bedeutet. Karl ist 3 mal so alt.
>
> Beispiel: Susi verdient 2230 Euro, Kathrin verdient 1600 Euro:
>
> $\frac{2230}{1600} = 1.394$ also verdient Susi ca das 1.4-fache

Bei einem rw. Dreieck mit einem Winkel von z.B. 45° wäre das Seitenverhältnis der beiden Katheten 1:1.

Somit ist die erste Erkenntnis:

Zu einem bestimmten Winkel α (hier: ca. 37°) gehört ein bestimmtes Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse (hier: 3:4)

Wie kann man das anschreiben?

<u>Idee 1: mit einem "IST GLEICH":</u>

$37^\circ = \frac{3}{4}$ ... **das geht nicht**!!! denn 37° ist NICHT DAS SELBE wie die Zahl 0.75

<u>Idee 2: mit einem Pfeil:</u>

37° -> $\frac{3}{4}$... das ist nicht hilfreich weil wir mit Pfeilen nicht rechnen können.

<u>Idee 3: "Wir erfinden ein neues Wort: TANGENS"</u> Das Wort Tangens ist eine Abkürzung für folgenden Satz:

Zum Winkel α gehört das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse von 3 : 4.

kürzen wir ab mit

Der Tangens von α ist 3 : 4 (Das Wort Tangens ist also eine Abkürzung für den Satz oben)

noch kürzer:

$tan(\alpha) = \frac{3}{4}$

Somit gilt:
Der TANGENS eines Winkels α ein Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Ankathete.

$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ kurz: $tan(\alpha) = \frac{G}{A}$

Aufgabe 2: Überlege anhand der oberen Zeichnungen, wie sich das Seitenverhältnis ändert, wenn der Winkel größer als 37° wird. wird größer

Aufgabe 3: Überlege, für welche Winkel das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Ankathete größer als 1 ist. über 45 grad

Aufgabe 4: Richtig oder falsch? richtig
Wenn man im obigen Dreieck alle Seitenlängen verzehnfacht, bleiben die Winkel gleich.

Aufgabe 5:
Von einem rechtwinkeligen Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ kennt man die Länge der Seite a = 7,2 cm und den Winkel $\alpha = 24^\circ$.
Berechne die Länge der Seite b und den Winkel β. (ohne Pythagoras und ohne Winkelsumme)
Berechne den Flächeninhalt auf 2 Arten.

b=16,12 66 grad 58,032 fläche

Aufgabe 6:
Von einem rechtwinkeligen Dreieck mit $\alpha = 90^\circ$ kennt man die Länge der beiden Seiten b = 12 cm und c = 7.8 cm. Berechne die beiden anderen Winkel.

beta = 56,98
gamma = 33,02 grad

Aufgabe 7:
Berechne den Steigungswinkel einer Rampe, die eine Steigung von 5% aufweist.

2,86 grad

Bisher haben wir Aufgaben bearbeitet, bei denen es um die beiden Katheten gegangen ist. Man kann aber gleichwertig Problemstellungen bearbeiten, bei denen die Hypotenuse bekannt ist. Für diesen Zweck definiert man 2 weitere Winkelfunktionen: SINUS und COSINUS.

Def: Der SINUS eines Winkels α ist das Seitenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse.
Der COSINUS eines Winkels α ist das Seitenverhältnis von Ankathete zu Hypotenuse.

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$ kurz: $$sin(\alpha) = \frac{G}{H}$$

$$cos(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$ kurz: $$cos(\alpha) = \frac{G}{H}$$ und zur Erinnerung:

$$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$ kurz: $$tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

Außerdem gilt:

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$ denn: $$\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{\frac{G}{H}}{\frac{A}{H}} = \frac{G \cdot H}{A \cdot H} = \frac{G}{A} = tan(\alpha)$$