EJERCICIO 1: CALCULAR COEFICIENTES

Rosas Avila José Daniel

(a) Calcule los coeficientes A, B y C de One-sided-D_{+2} y diga por qué es de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

(b) Calcule los coeficientes A, B, C y D de One-sided-D_{-3} y diga por qué es de orden $\mathcal{O}(h^3)$.

(c) Explique cómo se obtiene la fórmula de Centered-D_0^2.

Fórmulas para aproximar las derivadas usando diferencias finitas. Los puntos x_i, x_{i+1}, x_{i-1}, x_{i+2}, x_{i-2} están igualmente espaciados por la distancia h.

Tipo	Fórmula	Orden
Forward-D_+	$(u_{i+1} - u_i)/h$	$\mathcal{O}(h^1)$
Backward-D_-	$(u_i - u_{i-1})/h$	$\mathcal{O}(h^1)$
Centered-D_0	$(u_{i+1} - u_{i-1})/2h$	$\mathcal{O}(h^2)$
One-sided-D_{+2}	$Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i$	$\mathcal{O}(h^2)$
One-sided-D_{-2}	$(3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})/2h$	$\mathcal{O}(h^2)$
One-sided-D_{+3}	$(2u_{i+1} + 3u_i - 6u_{i-1} + u_{i-2})/6h$	$\mathcal{O}(h^3)$
One-sided-D_{-3}	$Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i + Du_{i-1}$	$\mathcal{O}(h^3)$
Centered-D_0^2	$(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2$	$\mathcal{O}(h^2)$

a) Por simetría con One Sided D_{-2}

los coeficientes son:

$A = -\frac{1}{2}$ $\quad B = 2$ $\quad C = -\frac{3}{2}$

$$D_{+2} = -\frac{1}{2} U_{i+2} + 2 U_{i+1} - \frac{3}{2} U_i$$

$$D_{+2} = \frac{-U_{i+2} + 4U_{i+1} - 3U_i}{2h}$$

El orden del error es dado que del desarrollo surge

$$f'_i = A f_i + B f_{i+1} + C f_{i+2}$$

Dado que se desconocen 3 incognitas se aproximará hasta la derivada $n-1$ es decir hasta un orden h^2 por lo que lo restante será $O(h^3)$ pero al resolver para la derivada el orden de la aproximación será $O(h^2)$

b) De la misma manera que el anterior, por simetría con $D+3$

$A = -\frac{1}{6}$ $B = 1$ $C = -\frac{1}{2}$ $D = -\frac{1}{3}$

$$AU_{i+2} + BU_{i+1} + CU_i + DU_{i-1}$$

$$-\frac{1}{6}U_{i+2} + U_{i+1} - \frac{1}{2}U_i - \frac{1}{3}U_{i-1} = \frac{-U_{i+2} + 6U_{i+1} - 3U_i - 2U_{i-1}}{6h}$$

Ahora como son 4 incognitas cada punto se aproximará hasta la tercer derivada por lo que $O(h^4)$ y al momento de despejar el órden de la aproximación será $O(h^3)$

c) Las aproximaciones centradas se obtiene de la manipulacion algebraica de las derivadas hacia adelante y hacia atrás en el cuál se eliminan término y se obtiene una derivada con puntos simétricos y se mejora el órden de la aproximación