UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROYECTO: HEAT CRASH
Conducción y convección de calor estacionaria y no estacionara en 1D y 2D

Alumnos:

Angeles Rojo Yosselin Lizbeth - 313120864
De La Fuente Bonfil Alan - 420041050
Hernández Sandoval Kelly Pamela - 312297473
López Garrido Josué - 416070912
Martínez Pérez, José Antonio - 313089796
Hernadez Montejano Hugo Ricardo - 313148512
Rosas Ávila José Daniel - 110004534

Profesor:
Dr. Luis Miguel de La Cruz Salas

Asignatura:
Geofísica Matemática Computacional

5 de enero de 2021

Índice

Introducción

La transferencia de calor es un proceso por el que se intercambia energía en forma de calor entre distintos cuerpos, o entre diferentes partes de un mismo cuerpo que están a distinta temperatura. Sin embargo, hay distintas formas en que este se puede transferir y cada una de estas formas tiene una expresión matemática para poder ser expresada y calculada, sin embargo, para lograr realizar estos cálculos es necesario emplear la tecnología para poder obtener cálculos y resultados de una manera más eficiente, teniendo en cuenta un tiempo y error mínimos al momento de realizar estos cálculos.

Una manera de poder resolver este problema es haciendo uso de un lenguaje de programación, existen diversos tipos de lenguajes, cada uno teniendo sus pros y sus contras o enfocados a ciertos temas en específico, pero en este caso se hará uso de python, ya que este lenguaje posee las herramientas necesarias para llevar a cabo la solución de las ecuaciones y la representación gráfica de estas.

Entre los tipos de transferencia de calor tenemos la conducción y convección, y para ambas se pueden encontrar en estado estacionario o en estado no estacionario, el principal factor que diferencia a estar es el tiempo, el cual posteriormente se puede ver representado en las ecuaciones que cada caso corresponde.

Objetivos

- ❖ Analizar y entender tanto física como matemáticamente el tema de convección y conducción en estado estacionario y no estacionario.
- ❖ Emplear el lenguaje de programación python para dar solución a las ecuaciones de convección y conducción en estado estacionario y no estacionario.
- ❖ Estructurar y crear un proyecto el cual posteriormente sea potencialmente útil para resolver problemas reales y que sea de interés para los usuarios.

Modelo conceptual

La transferencia de calor se puede definir como energía térmica en tránsito debido a la diferencia espacial de temperatura, por lo tanto si existe diferencia de temperatura en un medio, la transferencia de calor ocurrirá (Bergman y Lavine, 2017).

Existen diferentes tipos de transferencias de calor:

- Conducción: se refiere a la transferencia de calor que ocurre por la diferencia de temperatura en un medio estacionario, ya sea un sólido o un fluido. Este calor ira de la región con mayor temperatura a la región con menor temperatura.

- Convección: se refiere a la transferencia de calor que ocurre entre una superficie y un fluido en movimiento, los cuales están a diferente temperatura.

- Radiación térmica: las superficies que tienen una temperatura determinada emiten energía en forma de ondas electromagnéticas, por lo que si no existe un medio entre dos superficies, existirá intercambio de calor entre estas.

Para este proyecto nos enfocaremos solo en los mecanismos de conducción y convección:

Conducción de calor: Su teoría matemática fue desarrollada en el siglo XIX por Joseph Fourier. Serth y Lestina (2014), explican que esta se basó en los resultados de un experimento de un sólido, en el cual uno de sus lados rectangulares se encuentra a una temperatura T1, mientras que el lado opuesto a este se encuentra con una temperatura T2 y las otras caras restantes son aislantes, de este modo, el flujo de calor solo va en una dirección, la dirección x. Para un material dado, la tasa, qx, a la cual el calor se transfiere del lado con mayor temperatura, al lado con menor temperatura es proporcional al área transversal, A en la que pasa el flujo de calor. Además, la diferencia de temperatura, T1 - T2, es inversamente proporcional al grosor del material, por lo tanto, se tiene la siguiente ecuación:

$$q_k \propto KA\frac{(T1-T2)}{B} \qquad (1)$$

considerándolo como igualdad:

$$q_k = KA\frac{(T1-T2)}{B} \qquad (2)$$

Donde k que es la constante de proporcional, que es la conductividad térmica La ecuación 2, puede escribirse de una manera más general para un elemento con espesor diferencial, quedando de la siguiente manera:

$$q_k = -KA\frac{T}{x} \qquad (3)$$

El límite de **Δ**x se acerca a cero, por lo que

$$q_k = -KA\frac{dT}{dx} \qquad (4)$$

Esta es la ecuación de la Ley de Fourier. El signo negativo es necesario debido al flujo de calor en la dirección positiva de x cuando la temperatura decrece en esa dirección. De este modo, con base en la convención de signos estándar, que *qx* es positivo cuando el flujo de calor va en la dirección positiva de x, qx debe ser positivo cuando $\frac{dT}{dx}$.

Es conveniente dividir la ecuación anterior por el área, quedando lo siguiente:

$$q_k'' \equiv \frac{q_k}{A} = \ -K\frac{dT}{dx} \qquad (5)$$

Donde q_k'' es el flujo de calor. Este tiene unidades de j=s m2 = W=m2. Y las unidades de K son W=mK. Estas ecuaciones están restringidas a la situación en la que el calor fluye en dirección de x solamente.
Para entender mejor el tema se propuso conocer la distribución de temperatura al interior de la pared de un horno.

Convección de calor:
Este tipo de mecanismo se divide en 2:

1. Difusión: consiste en la transferencia de energía debido al movimiento aleatorio molecular.
2. Advección: se da por el movimiento de un fluido.

Asimismo, existen diferentes tipos de transferencia de calor por convección: c

a) convección forzada: que es cuando el flujo es causado por algo externo, tal como un ventilador, viento atmosférico, etc.
b) convección natural: en este caso, el flujo es inducido por fuerzas de flotación, los cuales son debido a diferencias de densidad causadas por variación de temperatura en el fluido. Un ejemplo muy claro es en el interior de la Tierra.

Y dos casos especiales son:

c) boiling o hirviendo, que se presenta en la transferencia de calor como resultado del movimiento de fluido inducido por burbujas de vapor generadas en la parte inferior de un contenedor hirviendo.
d) condensación, que se da por ejemplo, por condensación del vapor de agua en la superficie exterior de la tubería de agua fría.

Modelo matemático

Para obtener el modelo matemático adecuado para la resolución del en cuestión, partiremos de la ecuación general de transporte de calor mostrada a continuación:

$$c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon \cdot T) - \frac{1}{\rho} \cdot q_k'' = h \qquad (6)$$

A partir de dicha ecuación, y con la ayuda de la ley de Fourier antes mencionada podemos obtener un modelo matemático con el cual podremos involucrar las propiedades del medio en el que se está transfiriendo el calor. Al sustituir la ley de Fourier en la ecuación se obtiene lo siguiente:

$$c_p(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon \cdot T) - \frac{1}{\rho} \cdot (kT) = h \qquad (7)$$

La ecuación anterior presenta diferentes términos, correspondientes a los diferentes sistemas de transferencia de calor:

- c_p **:** representa el calor específico a presión constante
- $\frac{\partial T}{\partial t}$ **:** es el cambio de la temperatura respecto al tiempo (estado no estacionario)
- $\upsilon \cdot T$ **:** corresponde a la parte de transporte por convección
- kT **:** transporte por conducción.

Esta ecuación nos servirá para realizar las aproximaciones necesarias para los diferentes modelos a emplear.

Conducción:

Para desarrollar el modelo de conducción de calor, primero consideramos un *"estado estacionario"* (no depende del tiempo), con ello la ecuación de transporte de calor modificada anteriormente se reduce, dejando fuera a todos los términos dependientes del tiempo, por lo que queda de la siguiente manera:

$$\cdot (kT) = Q \qquad (8)$$

Donde Q representa una fuente o sumidero de calor en el dominio. Además, si la conductividad térmica k se considera constante, la ecuación se reduce a:

$$k^2 T = Q \qquad (9)$$

Para el caso *"no estacionario",* debemos considerar los términos dependientes del tiempo, esto es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \cdot (kT) = Q \qquad (10)$$

que de igual forma, con una conductividad constante se reduce a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k^2 T = Q \qquad (11)$$

Convección:

Para este caso, también se manejan ambos estados, estacionario y no estacionario. Sin embargo, no solo se toma en cuenta el término convectivo de la ecuación general de transferencia de calor, sino que también se involucra el término de conducción. Para el primer caso mencionado (estado estacionario) se tiene la siguiente ecuación:

$$c_p \upsilon \cdot T - \frac{1}{\rho} \cdot (kT) = Q \qquad (12)$$

Al igual que el caso de conducción, se tiene el caso particular en el que la conductividad térmica es constante, para el cual, se tiene la siguiente modificación:

$$c_p \upsilon \cdot T - \frac{1}{\rho} k^2 T = Q \qquad (13)$$

Para el caso del estado no estacionario (dependiente del tiempo) se tiene la ecuación siguiente:

$$c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon \cdot T\right) - \frac{1}{\rho} \cdot (kT) = Q \qquad (14),$$

que como se puede observar, es la ecuación general de transferencia de calor mencionada con anterioridad, y que al igual que en los demás casos presentados, para el caso particular de conductividad térmica constante, se tiene la siguiente modificación:

$$c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon \cdot T\right) - \frac{1}{\rho} k^2 T = Q \qquad (15)$$

Modelo numérico

Para la solución de este caso se hizo uso de diferencias finitas de segundo orden, el cual está basado en el cálculo del valor de la derivada en un punto a través de la razón de dos diferencias, el cual fue propuesto por Leonard Euler en 1768, para el caso de conducción se hizo uso de la siguiente aproximación:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \qquad (16)$$

Donde h es la distancia entre los nodos de la malla.
Teniendo en cuenta que esta solución está en función de la posición para el caso de una dimensión, se fijan estas condiciones:

- Paredes adiabáticas en todo el dominio
- Temperaturas fijas en los extremos de la barra
- Cálculo de la temperatura interna en todo el dominio

Realizando la discretización del dominio asignado por el número de nodos y las ecuaciones (aproximación de la derivada por diferencias finitas) el modelo numérico al resolver es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ \dots \\ Tn \\ Tn-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \\ \dots \\ Qn \\ Qn-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Ta \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -Tb \end{vmatrix} \tag{17}$$

Mientras que para el caso de dos dimensiones se hace uso de la expresión 16 (diferencias finitas) para la dirección *x* y dirección *y*:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{d^2f(y)}{dy^2} = f \tag{18}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big|_{i,j} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{19}$$

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2}\Big|_{i,j} = \frac{f(y+h) - 2f(y) + f(y-h)}{h^2} \tag{20}$$

Donde $hx = hy = \frac{Lx}{(Nx+1)}$ discretizando el dominio en dos dimensiones considerando una malla cuadrada, se llega a la siguiente expresión:

$$-4f(x) + f(x-h) + f(x+h) + f(y-h) + f(y+h) = h^2 f \tag{21}$$

definiendo así una matriz pentagonal:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right] \tag{22}$$

Mientras que para el caso de convección estacionaria se define como:

$$\rho u \frac{df}{dx} - \frac{d^2f}{dx^2} = S \tag{23}$$

representación en diferencias finitas se tiene:

$$\rho u\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2h} - \frac{T_{i-1}-2T_{i}+T_{i+1}}{h^2} = S_i \qquad (24)$$

reacomodando:

$$-\left(\frac{\rho u}{2h} + \frac{}{h^2}\right)T_{i-1} + \frac{2}{h^2}T_{i} + \left(\frac{\rho u}{2h} - \frac{}{h^2}\right)T_{i+1} = s_i \qquad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\kappa}{h^2} & \frac{\rho u}{2h}-\frac{\kappa}{h^2} & & & \\ -\frac{\rho u}{2h}-\frac{\kappa}{h^2} & \frac{2\kappa}{h^2} & \frac{\rho u}{2h}-\frac{\kappa}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\rho u}{2h}-\frac{\kappa}{h^2} & \frac{2\kappa}{h^2} & \frac{\rho u}{2h}-\frac{\kappa}{h^2} \\ & & & -\frac{\rho u}{2h}-\frac{\kappa}{h^2} & \frac{2\kappa}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 + \left(\frac{\rho u}{2h} + \frac{\kappa}{h^2}\right)T_0 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N - \left(\frac{\rho u}{2h} - \frac{\kappa}{h^2}\right)T_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (26)$$

Para el caso no estacionario se define como:

$$-\left(\frac{h_t u}{2h} + \frac{h_t}{h^2}\right)T^n_{i-1} + \left(\frac{2h_t}{h^2} + 1\right)T^n_i + \left(\frac{h_t u}{2h} - \frac{h_t}{h^2}\right)T^n_{i+1} = Q_i + T^{n-1}_i \qquad (27)$$

Donde:

- h_t : paso en el tiempo
- T : vector que se quiere conocer
- Q : fuente
- h : espaciamiento entre nodos

Cuando se tienen 2 dimensiones se calcula la solución en dos dimensiones definiendo una h_x y una h_y sustituida por h.

Referencias

- Bergman, T. y Lavine, A. (2017). Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons, Estados Unidos, 8va edición.
- I. Herrera & G. F. Pinder,Mathematical Modeling in Science and Engineering: An Axiomatic Approach, John Wiley 2012.
- Serth, R. W. y Lestina, T. G. (2014). Process Heat Transfer Principles, Applications and Rules of Thumb. Academic Press, Boston, second edition.
- Francisco J. Valdés Parada, Transferencia de Calor, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Última actualización: 10 de noviembre de 2019.
- Principios de Transferencia de Calor, Condiciones de Frontera e Iniciales, 12 de diciembre de 2015, consultado en: http://transferenciadecalorjohnmarcillo.blogspot.com/2015/12/condiciones-de-frontera-e-iniciales
- Cengel, Y. A.; Boles, M.A.: Termodinámica. Mc Graw-Hill, 1996, Sexta edición.
- Ecuaciones diferenciales parciales, transferencia de calor y diferencias finitas, 6 de noviembre de 2019, Consultado en: https://www.youtube.com/watch?v=Q1RmaOcI3pQ
- Problemas de valores a la frontera, fenómenos de transporte y diferencias finitas, 4 de noviembre de 2019, Consultado en: https://www.youtube.com/watch?v=d2JBVTmT_OA
- Tipos de condiciones de frontera, 19 de julio de 2017, Consultado en: https://www.youtube.com/watch?v=qvuIA14T2BU
- Luis M. de la Cruz Salas, Geofísica Matemática y Computacional, Diferencias Finitas: Problemas estacionarios, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Semestre 2021-1, Consultado en: https://drive.google.com/file/d/1fgZtNog9qPEwIqfIANu1_4Bhl_hpMc96/view