Análisis y Diseño de Algoritmos

Tarea 1

DANIEL ROJO MATA
danielrojomata@gmail.com

Fecha de Entrega: 12 de agosto de 2024

---

1. En cada uno de los siguientes casos, explica el concepto y da un ejemplo:

   a) Demostración por inducción matemática.

   b) Demostración por contradicción.

   c) Demostración por contrapositiva.

   Solución a)

   La *inducción matemática* es un método para demostrar que algunas afirmaciones son ciertas para todos los números naturales. Este principio se basa en lo que se conoce como el *quinto postulado de Peano* el cual reza lo siguiente:

   Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

   a) $0 \in S$, y

   b) para cada número $n \in \mathbb{N}$, sucede que sucesor$(n) \in S$,

   entonces $S = \mathbb{N}$.

   Lo que dice el quinto axioma es que para verificar que un conjunto de números naturales es de hecho el conjunto de los números naturales, se debe verificar que el primer número natural está y cada vez que se vea que un número natural está en el conjunto, su sucesor también deberá estar.

   Así pues, una demostración por inducción debe probar dos cosas.

   a) Base de la inducción: Mostrar que la afirmación es válida para el primer caso, esto es; el punto a) del postulado.

   b) Paso de inducción (inductivo): Suponer que la afirmación es válida en un caso, y mostrar que debe ser cierta en el siguiente caso, esto es; el punto b) del postulado.

En resumen, cuando se tiene una proposición matemática para la cual se desea comprobar que cualquier número natural la cumple, la técnica de demostración por inducción será útil porque en lugar de probar que cada número individualmente la cumple, bastará demostrar que se satisfacen las condiciones anteriores para argumentar que todos los números naturales la cumplen.

`Ejemplo:` Demostrar que la suma de los primeros n números naturales es $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

`Demostración por inducción:`

- `Caso base (base de la inducción):` Supóngase que $n = 0$, así: $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$

  Por lo que se cumple la propiedad para el caso base.

- `Paso inductivo:`

  `Hipótesis de Inducción:` Suponga que para algún $k \in \mathbb{N}$ es cierto que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

  Se prueba que se cumple: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

  Nótese que: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

  Así pues, por el principio de inducción, es cierto que:
  La suma de los primeros n números naturales es $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\square$

Solución b)

La estrategia general para probar una proposición por contradicción es la siguiente:

1. **Suponer que la proposición es falsa:** En este método, se asume que la proposición que se desea demostrar es falsa. Esta suposición inicial se convierte en la base de todo el método.

2. **Consecuencias de la suposición:** A partir de la suposición de falsedad, se derivan consecuencias lógicas mediante una serie de pasos utilizando axiomas, definiciones y teoremas previamente establecidos para deducir nuevas afirmaciones a partir de dicha suposición.

3. **Llegar a una contradicción:** El objetivo es llegar a una afirmación que sea claramente falsa o que contradiga un hecho conocido, un axioma o una de las hipótesis iniciales. Esta contradicción muestra que la suposición inicial no puede ser correcta.

Una contradicción indica que existe una inconsistencia lógica en las premisas o suposiciones. Dado que una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo, la contradicción revela que la suposición inicial (que la proposición era falsa) debe ser incorrecta. Por lo tanto, se concluye que la proposición original debe ser verdadera.

Así pues, al demostrar que la negación de la proposición conduce a una contradicción, se ha demostrado que la proposición es necesariamente verdadera.

`Ejemplo`: Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

`Demostración por contradicción:`

Se desea demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional, es decir, que no puede ser expresado como el cociente de dos números enteros a y b, donde $b \neq 0$ y a y b son coprimos (no tienen divisores comunes excepto 1).

Suposición inicial: Supongamos, por el contrario, que $\sqrt{2}$ es un número racional.
Esto significa que $\sqrt{2}$ puede ser expresado como una fracción en su forma más simple:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

donde a y b son enteros coprimos y $b \neq 0$.

- Elevamos ambos lados de la ecuación al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

- Multiplicamos ambos lados por b^2 para obtener:

$$2b^2 = a^2.$$

  Esto implica que a^2 es un número par (porque es igual a $2b^2$, que es un número par).

- Dado que a^2 es par, a también debe ser par (pues el cuadrado de un número impar es impar). Esto significa que podemos escribir $a = 2k$ para algún entero k.

- Sustituyendo $a = 2k$ en la ecuación $2b^2 = a^2$, obtenemos:

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

- Dividiendo ambos lados de la ecuación por 2, se obtiene:

$$b^2 = 2k^2.$$

  Esto implica que b^2 también es par, y por lo tanto b es par.

- Entonces, tanto a como b son pares, lo que significa que tienen un factor común de 2. Esto contradice la suposición inicial de que a y b son coprimos.

Conclusión: La suposición de que $\sqrt{2}$ es racional debe ser incorrecta, ya que lleva a una contradicción.

Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional.

$\square$

Solución c)

En matemáticas, es habitual que para demostrar ciertos resultados se parta de una serie de proposiciones válidas, conectándolas paso a paso hasta llegar a la conclusión deseada. Por lo general, estas demostraciones se estructuran como cadenas de implicaciones de la forma $p \to q$. Es decir, se parte de p y, a partir de ahí, se busca determinar la validez de q.

Dado que la estructura básica de las afirmaciones que se intentan probar es del tipo antes mencionado, se establece que la contrapositiva de esta proposición es $\neg q \to \neg p$.

Si se hace la tabla de verdad de la condicional con su contrapositiva, se aprecia que ambas son equivalentes.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Cuadro 1: Tabla de verdad para $p \to q$ y su contrapositiva $\neg q \to \neg p$.

De esta manera; en una prueba por contrapositiva, se parte de la suposición inicial de $\neg q$ para deducir $\neg p$. Si se logra demostrar $\neg p$ bajo esta suposición, entonces, dado que un condicional es lógicamente equivalente a su contrapositiva, se concluye que la afirmación original es verdadera, ya que la contrapositiva también lo es.

`Ejemplo:` Demostrar que para todo entero m, si m^2 es impar, entonces m es impar.

`Demostración por contrapositiva:`
La contrapositiva de esta afirmación es:

Para todo entero m, si m es par, entonces m^2 es par.

De esta manera, se trabaja con la contrapositiva.

- Supongamos que m es un número par. Esto significa que existe algún entero k tal que $m = 2k$.
- Queremos demostrar que m^2 es un número par bajo esta suposición.
- Calculamos m^2 de la siguiente manera:

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2).$$

- Observamos que m^2 se puede expresar como el doble de $2k^2$, lo que implica que m^2 es un múltiplo de 2, y por lo tanto, m^2 es un número par.

Conclusión: Dado que se ha demostrado la veracidad de la contrapositiva (es decir, si m es par, entonces m^2 es par), se puede concluir que la afirmación original es verdadera: si m^2 es impar, entonces m también es impar.

$\square$

Referencias

Se consultaron las siguientes ligas para la resolución de la tarea.

- Inciso a)
  - https://blog.nekomath.com/tag/induccion/
  - https://www.matem.unam.mx/~max/AS1/N6.pdf
- Inciso b)
  - https://blog.nekomath.com/algebra-superior-i-demostraciones-por-reduccion-al-absurdo/
- Inciso c)
  - https://blog.nekomath.com/algebra-superior-i-demostraciones-directas-e-indirectas/
  - https://blogmatediscretas.wordpress.com/2018/12/21/prueba-por-contradiccion/