Cálculo de opções - Um experimento de Monte Carlo

Daniel Ryba Zanardini

Introdução

O cálculo de opções, através de uma simulação de Monte Carlo, é um método utilizado com muita frequência na matemática financeira, em ambientes com elevadas fontes de incertezas.

Neste projeto, apresentaremos um comparativo entre os resultados obtidos pelo cálculo de opções européias (compra e venda) através de Black-Scholes, além de algumas simulações de Monte Carlo. Também será apresentado um comparativo para o resultado de opções americanas.

Modelo de Black-Scholes

Considere que o preço à vista de uma ação seja X_t. O preço de uma opção de compra sobre esta ação é $c = f(X, t)$, o contrato tem maturidade T e o preço de exercício é K, considere a taxa livre de risco r constante, a opção é do tipo européia, sem pagamento de dividendos, o ativo subjacente segue um processo geométrico browniano sem custos de transação, a volatilidade é constante e o mercado não permite arbitragem.

$$c(X_t, t) = X_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \qquad , 0 \leq t < T, X_t > 0$$

$$v(X_t, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - X_t N(-d_1)$$

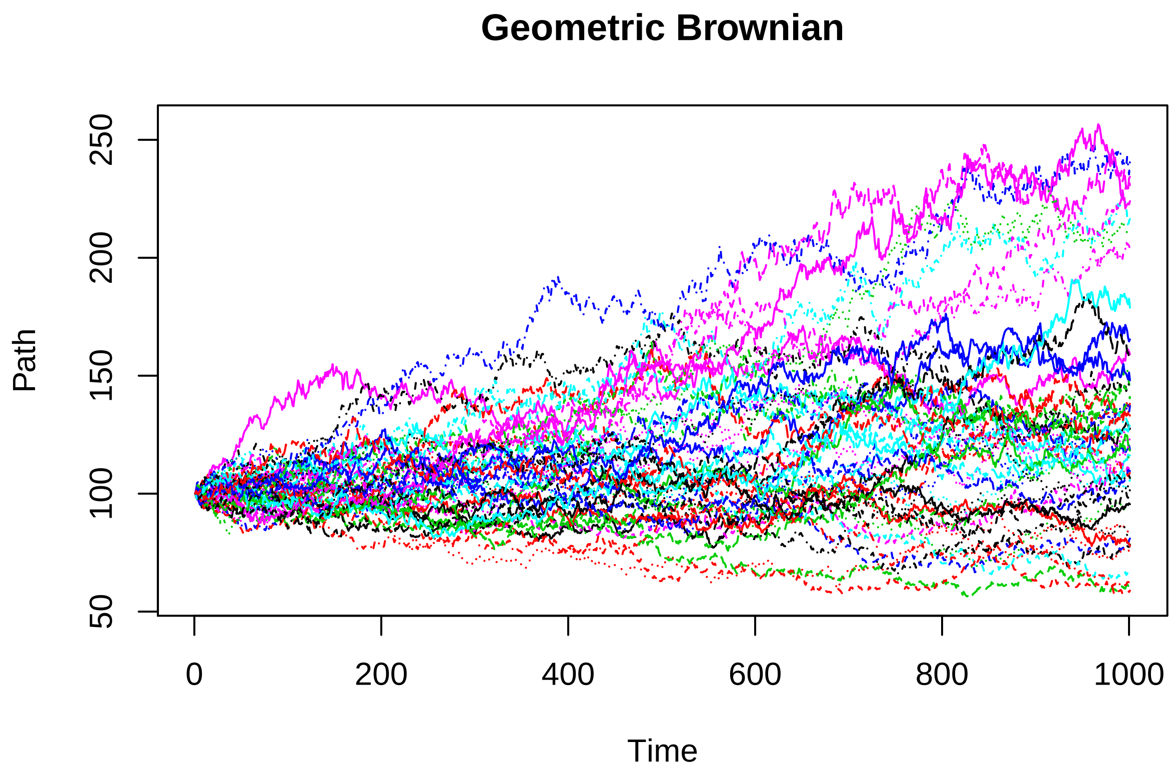
$$d1 = \frac{(ln(\frac{X_t}{K}) + (r + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad e \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Considere que o preço à vista de uma ação seja $X_0 = 1$, com a taxa de juros $r = 3$ a.a., o tempo de vencimento da opção seja 1 ano, $K = 1.1$ e a volatilidade $\sigma = 15$ a.a. Temos a solução analítica para o modelo:

	CALL	PUTT
	$(X\mathtt{t} - k)^+$	$(K - X\mathtt{t})^+$
preço	0.0338	0.1013

Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo, envolve usar números aleatórios para obter uma amostra com vários caminhos diferentes, que poderiam ser seguidos pelas variáveis subjacentes, em um mundo de risco nulo. Para cada caminho, o resultado é calculado e descontado à taxa de juros livre de risco. A média aritmética do somatório dos resultados descontados é o valor estimado do derivativo.



Sejam:

$$c_t = E^Q[e^{-r\tau}(X_T - K)^+ \mid F_t]$$

$$X_T = Xe^{(r-0,5\sigma^2)\tau+\sigma\sqrt{\tau\omega}}$$

onde $\omega \sim N(0,1)$ e X_T é a solução da equação diferencial estocástica do processo geométrico browniano, escrito sobre a medida martingal equivalente (MME) com volatilidade σ.

Simulação	CALL	erro	diferença BMS	PUTT	erro	diferença BMS
100	0.0468	0.0193	0.0130	0.0941	0.0202	-0.0072
1000	0.0318	0.0045	-0.0020	0.0983	0.0062	-0.0003
5000	0.0330	0.0020	-0.0008	0.1018	0.0029	+0.0005
10000	0.0352	0.0014	+0,0014	0.1008	0.0019	-0.0005
100000	0.0338	0.0004	0,0000	0.1008	0.0006	-0.0005

Opção Americana

Seja X_t um processo estocástico browniano governado por B_t com σ algebra natural F_t, Seja Θ o conjunto de todos os tempos de parada entre t e T e seja $\theta \in \Theta$. Considere $\Lambda(X_t, t)$ o preço de um derivativo americano em t sobre o ativo subjacente X_t tal que t $\in [0, T]$.

$$\Lambda(X_t, t) = \max_{\theta \in \Theta} E^Q[e^{-r(\theta - t)}\Lambda(X_\theta, t, \theta) \mid F_t]$$

Um derivativo que possua a possibilidade de exercício antecipado, não possui solução analítica. Sua determinação se dará através de soluções numéricas, como por exemplo, método de Monte Carlo, diferenças finitas, arvores binomiais, dentre outros.

MC	CALL	t	PUTT
100	-	-	0.0929
1000	-	-	0.0984
5000	-	-	0.0987
10000	-	-	0.1004
100000	-	-	0.0998