

Una aproximación algebraica al problema SAT y su implementación funcional

Daniel Rodríguez Chavarría

Tutor: Joaquín Borrego Díaz
Cotutor: José Antonio Alonso Jiménez

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

El Problema SAT

Satisfacibilidad de una fórmula

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

En el marco de la lógica proposicional y asumiendo que se tiene un conocimiento básico de la misma,

Definición

Una fórmula se dice **satisfacible** si existe al menos una valoración o interpretación de la misma que sea modelo de ella.

El Problema SAT

Enunciado

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Sea F una fórmula
proposicional,

El Problema SAT

Enunciado

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Sea F una fórmula
proposicional,
¿Es satisfacible?

El Problema SAT

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

- Es un problema NP completo ($NP + NP$ -duro).
- Pieza clave en el problema P versus NP , uno de los problemas del milenio.
- Debido a su gran importancia, tanto teórica como práctica, se celebra desde 2002 la *SAT Competition*.

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

Método de refutación mediante omisión de variables

Consideraciones del método

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Se aplicará el método a un conjunto de fórmulas (o base de conocimiento) en lugar de a una única fórmula.

Se resolverá determinando si el conjunto de fórmulas es inconsistente ya que una fórmula (o conjunto de fórmulas) es satisfacible si y sólo si no es inconsistente.

Método de refutación mediante omisión de variables

Retracción conservativa

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Sean K y K' bases de conocimiento:

Definición

Se dice que K' es **retracción** de K si $\mathcal{L}(K') \subseteq \mathcal{L}(K)$ y

$$\forall F \in \text{Form}(\mathcal{L}(K')) \quad [K' \models F \Rightarrow K \models F]$$

Además, se dice que es **conservativa** si también cumple:

$$\forall F \in \text{Form}(\mathcal{L}(K')) \quad [K \models F \Rightarrow K' \models F]$$

Método de refutación mediante omisión de variables

Operador de omisión

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Definición

El operador $\delta : Form(\mathcal{L}) \times Form(\mathcal{L}) \rightarrow Form(\mathcal{L} \setminus \{p\})$ es:

- 1 **Correcto** si $\{F, G\} \models \delta(F, G)$.
- 2 Un **operador de omisión** para la variable $p \in \mathcal{L}$ si $\{\delta(F, G)\}$ es una retracción conservativa de la base de conocimiento $\{F, G\}$ al lenguaje $\mathcal{L} \setminus \{p\}$.

Método de refutación mediante omisión de variables

Lema de elevación

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Lema (de elevación)

Sean $v : \mathcal{L} \setminus \{p\} \rightarrow \{0, 1\}$ una valoración o interpretación, $F, G \in \text{Form}(\mathcal{L})$ fórmulas y δ un operador de omisión de la variable p . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1 $v \models \delta(F, G)$
- 2 Existe una valoración $\hat{v} : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\hat{v} \models F \wedge G$ y $\hat{v} \upharpoonright_{\mathcal{L} \setminus \{p\}} = v$

Método de refutación mediante omisión de variables

Lema de elevación

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

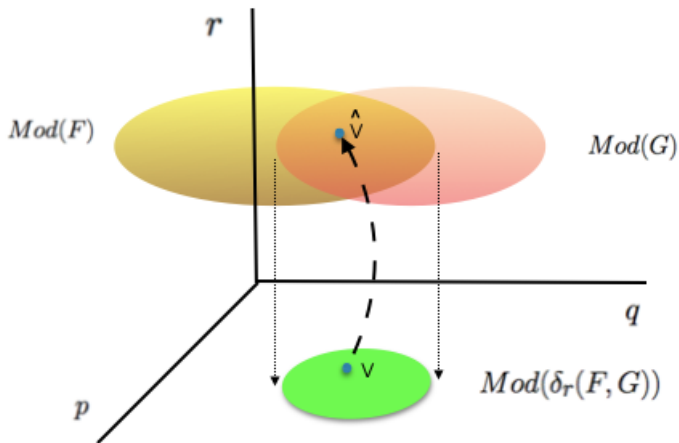
Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros



Método de refutación mediante omisión de variables

Extensión de δ y saturación

Definición

Sean δ_p un operador de omisión de la variable p y K una base de conocimiento. Se define $\delta_p[\cdot]$ como $\delta_p[K] := \{\delta_p(F, G) : F, G \in K\}$.

Definición

Suponiendo que se tiene un operador de omisión δ_p para cada $p \in \mathcal{L}$. Se llamará **saturación** de la base de conocimiento K al proceso de aplicar los operadores $\delta_p[\cdot]$ (en algún orden) respecto a todas las variables proposicionales de $\mathcal{L}(K)$, denotando al resultado como $\text{sat}_\delta(K)$ (el cual será, por tanto, un subconjunto de $\{\top, \perp\}$).

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Método de refutación mediante omisión de variables

\vdash_δ -refutación

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Definición

Sea K una base de conocimiento, $F \in \text{Form}(\mathcal{L})$ y $\{\delta_p : p \in \mathcal{L}(K)\}$ una familia de operadores de omisión.

- Una \vdash_δ -prueba en K es una secuencia de fórmulas F_1, \dots, F_n tal que para todo $i \leq n$, $F_i \in K$ ó existen $F_j, F_k (j, k < i)$ tal que $F_i = \delta_p(F_j, F_k)$ para algún $p \in \mathcal{L}$.
- $K \vdash_\delta F$ si existe una \vdash_δ -prueba en K , F_1, \dots, F_n , con $F_n = F$.
- Una \vdash_δ -refutación es una \vdash_δ -prueba de \perp .

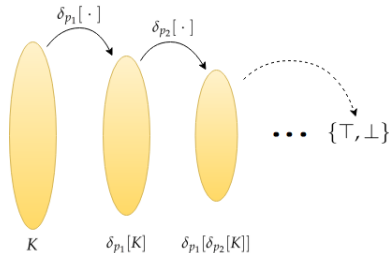
Método de refutación mediante omisión de variables

Corrección del método

Teorema

Sea $\{\delta_p : p \in \mathcal{L}\}$ una familia de operadores de omisión (correctos). Entonces \vdash_δ es refutacionalmente completo; es decir, K es inconsistente si y sólo si $K \vdash_\delta \perp$.

Prueba: La idea es saturar la base de conocimiento.



Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Método de refutación mediante omisión de variables

Corrección del método

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Si $\text{sat}_\delta(K) = \{\top\}$, entonces, aplicando repetidas veces el lema de elevación, se puede extender la valoración vacía (la cual es modelo de $\{\top\}$) a un modelo de K .

Si $\perp \in \text{sat}_\delta(K)$ entonces K es inconsistente, porque $K \models \text{sat}_\delta(K)$ al ser correctos los operadores. \square

Ya tenemos el método, pero...

Ya tenemos el método,
pero... ¿Quién es δ ?

Regla de independencia

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Definición

La regla de independencia se define como:

$$\partial_p(F_1, F_2) = \Theta(\partial_{x_p}(\pi(F_1), \pi(F_2)))$$

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

Interpretación algebraica de la lógica

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

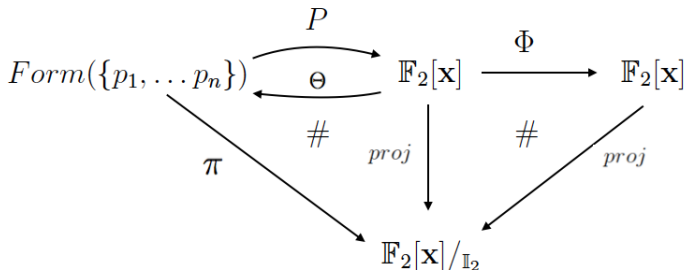
Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros



Interpretación algebraica de la lógica

De fórmulas a polinomios

Definición

Se define la función $P : Form\{\mathcal{L}\} \rightarrow \mathbb{F}_2[\mathbf{x}]$ por:

- $P(\perp) = 0$, $P(p_i) = x_i$, $P(\neg F) = 1 + P(F)$
- $P(F_1 \wedge F_2) = P(F_1) \cdot P(F_2)$
- $P(F_1 \vee F_2) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_1) \cdot P(F_2)$
- $P(F_1 \rightarrow F_2) = 1 + P(F_1) + P(F_1) \cdot P(F_2)$
- $P(F_1 \leftrightarrow F_2) = 1 + P(F_1) + P(F_2)$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(p \wedge (q \vee r)) &= P(p) \cdot P(q \vee r) = \\ &= x_p \cdot (x_q + x_r + x_q \cdot x_r) = x_p x_q x_r + x_p x_q + x_p x_r \end{aligned}$$

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Interpretación algebraica de la lógica

De polinomios a fórmulas

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Definición

Se define la función $\Theta : \mathbb{F}_2[\mathbf{x}] \rightarrow \text{Form}\{\mathcal{L}\}$ por:

- $\Theta(0) = \perp$
- $\Theta(1) = \top$
- $\Theta(x_i) = p_i$
- $\Theta(a + b) = \neg(\Theta(a) \leftrightarrow \Theta(b))$
- $\Theta(a \cdot b) = \Theta(a) \wedge \Theta(b)$

Notar que Θ no es la inversa de P .

Interpretación algebraica de la lógica

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

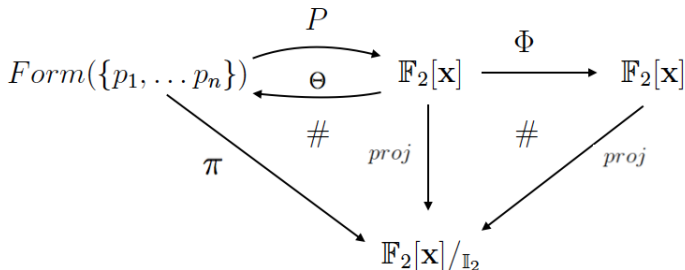
Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros



Interpretación algebraica de la lógica

Proyección polinomial

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Definición

Se define la función Φ por:

$$\Phi : \mathbb{F}_2[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{F}_2[\mathbf{x}]$$

$$\Phi\left(\sum_{\alpha \in I} \mathbf{x}^\alpha\right) := \sum_{\alpha \in I} \mathbf{x}^{sg(\alpha)}$$

siendo $sg(\alpha) := (\delta_1, \dots, \delta_n)$ donde δ_i es 0 si $\alpha_i = 0$ y 1 en cualquier otro caso.

Interpretación algebraica de la lógica

Transformación polinomial

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Finalmente,

Definición

La función que define la transformación es:

$$\pi = \Phi \circ P$$

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

Regla de independencia

Recapitulando

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Definición

La regla de independencia se define como:

$$\partial_p(F_1, F_2) = \Theta(\partial_{x_p}(\pi(F_1), \pi(F_2)))$$

Regla de independencia

Polinomios

Definición

Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_2[x]$ y x una variable indeterminada, la **regla de independencia** (o regla ∂) sobre fórmulas polinomiales se define como sigue:

$$\frac{a_1, a_2}{\partial_x(a_1, a_2)}$$

donde:

$$\partial_x(a_1, a_2) = 1 + \Phi[(1 + a_1 \cdot a_2) \cdot (1 + a_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} a_2 + a_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} a_1 + \frac{\partial}{\partial x} a_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} a_2)]$$

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Regla de independencia

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

En el trabajo se prueba que esta regla es un operador correcto y de omisión; por tanto, es fácil ver que dada una base de conocimiento, K :

Corolario

K es inconsistente si y sólo si $K \vdash_{\partial} \perp$.

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

SAT_Solver

Tecnologías

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

- 1 Lenguaje funcional Haskell.
- 2 Stack.
- 3 Haskell Literario.
- 4 Librerías como HaskellForMaths, doctest o quickCheck.
- 5 Git y GitHub.

SAT_Solver

Estructura de la herramienta

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
interdependencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

El proyecto está formado por 9 módulos, aunque la herramienta se divide principalmente en dos etapas secuenciales:

- 1 Preprocesado del fichero de entrada en formato DIMACS
- 2 Saturación del conjunto de polinomios y decisión.

SAT_Solver

Demostración

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Ejemplo de uso desde consola

```
[MacBook-Air-de-Daniel:TFM danielrodriguezchavarria$ stack build]
[MacBook-Air-de-Daniel:TFM danielrodriguezchavarria$ stack exec ]
TFM-exe "exDIMACS/medium/exampleSat0.txt"
True
[MacBook-Air-de-Daniel:TFM danielrodriguezchavarria$ stack exec ]
[TFM-exe "exDIMACS/medium/exampleSat1.txt"
True
[MacBook-Air-de-Daniel:TFM danielrodriguezchavarria$ stack exec ]
TFM-exe "exDIMACS/hard/unsat250.cnf"
False
```

① El Problema SAT

② Método de refutación mediante omisión de variables

③ Interpretación algebraica de la lógica

④ Regla de independencia

⑤ SAT_Solver

⑥ Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones y trabajos futuros

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Destacan tres líneas de investigación:

- Mejorar la eficiencia de la implementación
- Extender el modelo a lógicas multi-valuadas
- Dar de explícitamente el algoritmo formal, estudiando su complejidad computacional teórica.

Conclusiones y trabajos futuros

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

Desarrollando la primera:

- 1 Implementar una librería de polinomios específica.
- 2 Tratar de encontrar alguna propiedad que permita reducir el número de polinomios de una base de conocimiento, ya que, el principal problema detectado es de espacio computacional.
- 3 Profundizar en el estudio de heurísticas a fin de encontrar una que se adecúe mejor al problema, por ejemplo, ayundándonos del aprendizaje automático.

Conclusiones y trabajos futuros

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros

- ④ Tratar de incluir la paralelización de procesos, por ejemplo, mediante el cálculo de la regla de independencia de conjuntos con variables disjuntas.
- ⑤ Se podría combinar este método con otros más eficientes a la hora de responder afirmativamente al problema de satisfacibilidad, por ejemplo, con métodos de fuerza bruta o el DPLL.

Bibliografía I

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros



J. A. Alonso-Jiménez, G. A. Aranda-Corral, and
J. Borrego-Díaz.

Sistema certificado de decisión proposicional basado
en polinomios.

*Computational Logics and Artificial Intelligence in
Seville, 2009.*

Bibliografía II

Aproximación
algebraica al
problema SAT

Daniel Rodríguez
Chavarría

El Problema SAT

Método de
refutación
mediante omisión
de variables

Interpretación
algebraica de la
lógica

Regla de
independencia

SAT_Solver

Conclusiones y
trabajos futuros



J. A. Alonso-Jiménez, G. A. Aranda-Corral,
J. Borrego-Díaz, M. M. Fernández-Lebrón, and
M. J. H. Doblado.

A logic-algebraic tool for reasoning with
knowledge-based systems.

*Sometido a revisión en Journal of Logical and
Algebraic Methods in Programming, 2017.*

Gracias por la atención

Gracias por la atención

¿Preguntas?

Gracias por la atención

¿Preguntas?

Demostración