Act7

Daniel Rojas

February 17, 2025

1 Tipos de datos y Medidas de tendencia central

1. clasifique las variables en cualitativas o cuantitativas.

   - Nombre: Cualitativa
   - Edad: Cuantitativa
   - Área de trabajo: Cualitativa

2. Determine la media, mediana y moda de la variable "Edad".

   - **Media**

     Utilizar la siguiente fórmula:

     $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

     Donde $\bar{x}$ es la media aritmética, n la cantidad de datos y x_i representa cada dato.

     Sustituyendo nos da que la <u>media vale 35.1</u>

   - **Mediana**

     Ordenar todos los datos de menor a mayor:

     $$25, 27, 28, 30, 33, 35, 38, 40, 45, 50 \tag{2}$$

     sumar 33 y 35 y dividir a la mitad el resultado.

     Esto da que la <u>mediana es 34.</u>

   - **Moda**

     Como todos los datos se repiten a lo mucho 1 vez, cualquier dato puede ser considerado como el valor de la moda

3. Interprete los resultados obtenidos.

   En la empresa, lo normal es que la edad promedio de las personas sea de 35 años. Además, la mitad de las personas tienen menos de 34 años, mientras que la otra mitad tiene más. Por último, la edad de las personas no suele repetirse.

2 Medidas de dispersión

1. Calcule la varianza y la desviacion estandar de los datos.

   - Varianza

     Utilizar la siguiente fórmula:

     $$\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{3}$$

     Donde $\bar{s}^2$ es la varianza, $\bar{x}$ es la media aritmética, n la cantidad de datos y x_i

representa cada dato.

La media es de 84.375.

sustituyendo en la fórmula obtenemos que la varianza es de aproximadamente 75.696

- Desviación estándar

  obtener la raíz de la varianza calculada previamente.

  La desviación estándar es de aproximadamente 8.700

2. Interprete los resultados.

   Alrededor de la media, esperamos que la mayoría de datos se encuentren aproximadamente 9 unidades detrás y 9 unidades delante de la media.

3 Probabilidades y Teorema de Bayes

Utilizar el teorema de Bayes y teorema de la probabilidad total:

Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{4}$$

Donde A y B son eventos Teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \tag{5}$$

Tal que $B_1, B_2, ..., B_n$ son subconjuntos mutuamente excluyentes que al obtener la union de todos obtenemos el conjunto de todos los puntos de la población.

Donde A y B_i son eventos y n el la cantidad de subconjuntos B_i

Sea A el evento de que la persona obtenida sea un programador y B el evento en el que una persona tenga conocimientos de IA, tenemos:

$P(A) = 6/10$
$P(A^c) = 4/10$
$P(B|A) = 7/10$
$P(B|A^c) = 3/10$

Entonces:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \tag{6}$$

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = 54/100 \tag{7}$$

Sustituyendo en el teorema de bayes, tenemos que:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = 7/9 \tag{8}$$

La probabilidad de que una persona sea programador dado que tiene conocimientos de IA es del 77.78%.

4 Distribuciones de probabilidad

1. Calcule la probabilidad de que un lote tenga exactamente 2 defectos.

   Utilizar la distribución de Poisson:

   $$P(X = x) = \frac{\lambda^x + e^- \lambda}{x!} \tag{9}$$

   Donde λ es la media y x la cantidad de defectos.

   Sustituyendo en la ecuación:

   $$P(X = 2) = \frac{(3)^2 + e^- 3}{2!} \approx 0.2240 \tag{10}$$

   La probabilidad de obtener exactamente 2 errores es de 22.40%

2. Calcule la probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto. Calcular la probabilidad de obtener 0 defectos y utilizar el complemento:

   $$P(X = 0) = \frac{(3)^0 + e^- 3}{0!} \approx 0.050 \tag{11}$$

El complemento es de aproximadamente 0.95

La probabilidad de obtener al menos un error de lote es de 95%

5 Funciones de densidad y distribucion acumulativa

1. Determine la probabilidad de que X tome un valor menor que 45.

   Utilizar la función distributiva acumulativa para la normal:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{12}$$

   Primero, normalizar el 45 para utilizar tablas de una distribución normal de $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

   Para normalizar utilizar:

$$x = \frac{(x-\mu)}{\sigma} \tag{13}$$

   Evaluando:

$$x = \frac{(45-50)}{10} = -1/2 \tag{14}$$

   Checando una tabla nos da que $F(x) \approx 0.3085$

   La probabilidad de obtener un valor menor a 45 es de 30.85%

2. Determine la probabilidad de que X este entre 40 y 60.

   Normalizar 40 y 60:

$$x = \frac{(60-50)}{10} = 1 \tag{15}$$

$$x = \frac{(40-50)}{10} = -1 \tag{16}$$

   Restar la probabilidad de obtener menos de 60, y la probabilidad de obtener menos de 40

$$P(40 \leq x \leq 60) = F(60) - F(40) \approx 0.6826 \tag{17}$$

   La probabilidad de obtener un número entre el 40 y el 60 es de 68.26%

6 Probabilidad condicional

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que en el primero salió un número impar?

   Utilizar la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{18}$$

   Sea A el evento donde en la segunda tirada da un número par y B el evento donde la primera tirada da un número impar, tenemos:

   $P(A \cap B) = 1/4$

   $P(B) = 1/2$

   Sustituyendo en la ecuación:

$$P(A|B) = 1/2 \tag{19}$$

   La probabilidad de obtener un número par en la segunda tirada dado que la primera tirada dio un número impar es de 50%

2. Interprete los resultados obtenidos.

   La probabilidad condicional es igual a la probabilidad de obtener un número par en cualquier tirada, lo cual tiene sentido ya que al ser un dado justo, significa que cada tirada es independiente de la anterior.

7 Distribución binomial

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas?

   Utilizar distribución binomial $B(n = 5, p = 1/4)$:

$$P(X = x) = C(5, x)(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{5-x} \tag{20}$$

Sustituyendo x = 3

$$P(X=3) = C(5,3)(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2 \approx 0.088 \quad (21)$$

La probabilidad de obtener 3 respuestas correctas es de 8.8%

2. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una respuesta?

   Obtener la probabilidad de que acierte exactamente 0 y después obtener el complemento

$$P(X=0) = C(5,0)(\frac{3}{4})^5 \approx 0.237 \quad (22)$$

   La probabilidad del complemento es de:

$$P(X = x \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 0.763 \quad (23)$$

   La probabilidad de obtener al menos una pregunta bien es del 76.3%

8 Regla de Laplace

1. Determine la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

   El total de bolas es de 12, y solo hay 5 rojas. Si se saca solo una hay una probabilidad del 41.7% de que sea roja.

2. Si se extraen dos bolas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?

   Sea A el evento en donde la primera y segunda bolas son azules. Considerar que hay 132 casos totales, de los cuales, en 42 se obtienen 2 bolas azules, entonces con la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{42}{132} = \frac{7}{22} \quad (24)$$

   La probabilidad de obtener 2 bolas azules es del 31.8%.

9 Esperanza matemática

1. Calcule la esperanza matemática de la ganancia del jugador.

   Suponiendo que la persona solo compra un solo boleto, la función de probabilidad que modela dicho comportamiento es la de Bernoulli:

$$P(X=x) = (p)^x(1-p)^{1-x} \quad (25)$$

   La fórmula para la esperanza matemática para distribuciones discretas es:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) \quad (26)$$

   Considere que, en caso de perder, la ganancia sería de $-10 y en caso de ganar sería de $990. Utilizando la fórmula de esperanza matemática:

$$E[X] = -10(.99) + 990(0.01) = 0 \quad (27)$$

   La ganacia esperada es de $0.

2. Interprete el resultado obtenido.

   Si solo se compra un boleto, se espera que en realidad no ganes nada de dinero. El riesgo es tan alto que comprar solo un boleto no te garantiza para nada ganar.

10 Ley de los grandes números

1. ¿Cuál es el valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara?

   La distribución asemeja a una binomial, por lo que hay que obtener el valor esperado de $B(n = 1000, p = 1/2)$

$$E[X] = np = 500 \quad (28)$$

   Al tirar 1000 veces una moneda se espera obtener 500 caras.

2. ¿Cómo se relaciona esto con la Ley de los Grandes Números?

La ley de los grandes números dicta que, si nosotros repetimos un experimento un número infinito de veces, deberiamos de obtener la probabilidad de que todos sus eventos sucedan. En este caso, arrojar al infinito la moneda, debería de darnos al final que la probabilidad de obtener cara es de 1/2.