Act8

Daniel Rojas

February 2025

1 Operaciones con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Usando la regla de Cramer

$$det(F) = 1 \tag{2}$$

$$C_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24 \tag{3}$$

$$C_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 20 \tag{4}$$

$$C_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5 \tag{5}$$

$$C_{2,1} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 18 \tag{6}$$

$$C_{2,2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \tag{7}$$

$$C_{2,3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \tag{8}$$

$$C_{3,1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \tag{9}$$

$$C_{3,2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \tag{10}$$

$$C_{3,3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{11}$$

$$A^{-1} = 1/det(F) \cdot \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

   Sean A y B matrices cuadradas

   (a) Sea A una matriz no invertible:

   Suponiendo que AB sea invertible, o sea $det(AB) \neq 0$, entonces:

$$(AB)C = I_n \tag{13}$$

$$A^{-1} = BC \tag{14}$$

   Pero esto es contradictorio. Entonces AB no es invertible y por lo tanto $det(AB) = 0$

$$det(A)det(B) = 0 \cdot det(B) = det(AB) = 0 \tag{15}$$

   Lo mismo sucedería si B fuese invertible.

   (b) Para A invertible:
   se sabe que $det(E_iA) = det(E_i)det(A)$ siendo E_i una matriz elemental. También, al A ser invertible, significa que puede ser representada un producto de n matrices elementales.
   Tenemos:

$$det(AB) = det(E_1E_2...E_nB) \tag{16}$$

$$det(AB) = det(E_1E_2...E_n)det(B) = det(A)det(B) \tag{17}$$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

   $4x - y + z = 7$
   $-2x + 4y - 2z = 1$
   $x - y + 3z = 5$

   Suponiendo un error relativo del 10^{-2} y variables iniciales $x = 0, y = 0, z = 0$. Se empieza directo el método ya que la matriz ya tiene la diagonal dominante:

   (a) $1^{\underline{o}}$ iteración

   $x_1 = \frac{1}{4}[7 + (0) - (0)] = \frac{1}{4}[7] = 1.75$
   $y_1 = \frac{1}{4}[1 + 2(1.75) + 2(0)] = \frac{1}{4}[4.5] = 1.125$
   $z_1 = \frac{1}{3}[5 - (1.75) + (1.125)] = \frac{1}{3}[4.375] = 1.4583$

   (b) $2^{\underline{o}}$ iteración

   $x_2 = \frac{1}{4}[7 + (1.125) - (1.4583)] = \frac{1}{4}[6.667] = 1.6667$
   $y_2 = \frac{1}{4}[1 + 2(1.6667) + 2(1.4583)] = \frac{1}{4}[7.25] = 1.8125$
   $z_2 = \frac{1}{3}[5 - (1.6667) + (1.8125)] = \frac{1}{3}[5.1458] = 1.7153$

   error relativo:

   $r_1 = 0.0498$ $r_2 = 0.3793$ $r_3 = 0.1498$

   (c) $3^{\underline{o}}$ iteración

   $x_3 = \frac{1}{4}[7 + (1.8125) - (1.7153)] = \frac{1}{4}[7.0972] = 1.7743$
   $y_3 = \frac{1}{4}[1 + 2(1.7743) + 2(1.7153)] = \frac{1}{4}[7.9792] = 1.9948$
   $z_3 = \frac{1}{3}[5 - (1.7743) + (1.9948)] = \frac{1}{3}[5.2205] = 1.7402$

   error relativo:

   $r_1 = 0.0606$ $r_2 = 0.0914$ $r_3 = 0.143$

   (d) $4^{\underline{o}}$ iteración

   $x_4 = \frac{1}{4}[7 + (1.9948) - (1.7402)] = \frac{1}{4}[7.2546] = 1.8137$
   $y_4 = \frac{1}{4}[1 + 2(1.8137) + 2(1.7402)] = \frac{1}{4}[8.1076] = 2.0269$
   $z_4 = \frac{1}{3}[5 - (1.8137) + (2.0269)] = \frac{1}{3}[5.2133] = 1.7378$

   error relativo:

   $r_1 = 0.0217$ $r_2 = 0.0158$ $r_3 = 0.0014$

   (e) $5^{\underline{o}}$ iteración

   $x_5 = \frac{1}{4}[7 + (2.0269) - (1.7378)] = \frac{1}{4}[7.2892] = 1.8223$
   $y_5 = \frac{1}{4}[1 + 2(1.8223) + 2(1.7378)] = \frac{1}{4}[8.1201] = 2.03$
   $z_5 = \frac{1}{3}[5 - (1.8223) + (2.03)] = \frac{1}{3}[5.2077] = 1.7359$

   error relativo:

   $r_1 = 0.0047$ $r_2 = 0.0015$ $r_3 = 0.0011$

   La respuesta es: $x = 1.8223, y = 2.03, z = 1.7359$

2. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

   $1x + 2y + 3z = 0$
   $2x + 4y + 6z = 0$
   $3x + 6y + 9z = 0$

   La solución más evidente es la trivial:

   $x = 0, y = 0, z = 0$

   Luego, se puede observar que todas las filas son linealmente independientes, al poder ser obtenidas con la primera fila. Esto significa que podemos agarrar solo la primera fila como espacio de solución.

Las otras soluciones serían todos los puntos contenidos en el plano $x + 2y + 3z = 0$.

3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

1. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores (1, 2, 3),(2, 4, 6),(3, 6, 9).

   Por el ejercicio anterior, conocemos que todos estos vectores son linealmente dependientes, y se pueden generar todos usando solo el primer vector. Por lo tanto, el espacio vectorial puede ser generado solo usando $x = (1, 2, 3)^T$ Como x genera al espacio vectorial, una base para el espacio vectorial sería:

   $b = (1, 2, 3)^T$

   Por otro lado, como solo hay un vector independiente que genera al espacio vectorial, la dimensión del espacio vectorial es de 1.

2. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Obtener el determinante de la siguiente matriz e igualarlo a 0:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$det(G_\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \tag{20}$$

$$det(G_\lambda) = (5-\lambda)^2 + 4 = 0 \tag{21}$$

Tenemos lo siguiente: $\lambda = 3, 7$

Cuando $\lambda = 3$:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado por la matriz, obtenemos:

$$x_1 - x_2 = 0 \tag{23}$$

$$x_1 = x_2 \tag{24}$$

Entonces, sea v_1 el autovector de $\lambda = 3$:

$$(x1, x2)^T = (x1, x1)^T = x1(1, 1)^T \tag{25}$$

$$v_1 = (1, 1)^T \tag{26}$$

Cuando $\lambda = 7$:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado por la matriz, obtenemos:

$$x_1 + x_2 = 0 \tag{28}$$

$$x_1 = -x_2 \tag{29}$$

Entonces, sea v_2 el autovector de $\lambda = 7$:

$$(x1, x2)^T = (x1, -x1)^T = x1(1, -1)^T \tag{30}$$

$$v_1 = (1, -1)^T \tag{31}$$

los autovalores con sus respectivos autovectores son los siguientes:

$$\lambda = 3, 7 \tag{32}$$

$$v_1 = (1, 1)^T, v_2 = (1, -1)^T \tag{33}$$

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

1. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.

Cuando descomponemos una matriz en sus componentes principales, o la diagonalizamos en caso de ser cuadrada, podemos ir eliminando los valores principales junto con sus respectivos autovectores para ir reduciendo la dimensión de la matriz original. Por ejemplo, en imágenes, se puede usar para guardar una misma imagen pero ocupando menos espacio, al reducir sus dimensiones.

2. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Obtener los autovalores y autovectores de H:

$$\begin{gathered} det(H_\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ det(H_\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ \lambda = 4, 1 \end{gathered} \tag{35}$$

Para $\lambda = 4$

$$H_\lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Sea v_1 el autovector de $\lambda = 4$, resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \\ v_1 &= (1,1)^T \end{aligned} \tag{37}$$

Para $\lambda = 1$

$$H_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Sea v_2 el autovector de $\lambda = 1$, resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ -2x_1 &= x_2 \\ v_2 &= (1,-2)^T \end{aligned} \tag{39}$$

Sea P la matriz formada por los autovalores, y D la matriz diagonal con los valores propios ordenados de mayor a menor:

$$\begin{gathered} D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{40}$$

3. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

El algebra lineal está muy presente en las redes neuronales, ya que cada neurona de la red es representada matemáticamente como un espacio afín, o sea no tiene como elemento de la imagen el vector nulo. Una neurona tiene, en general, la siguiente forma:

$$y = Ax + b \tag{41}$$

Aquí supongo que la neurona recibe como input, o sea la x, un vector, pero podría ser una matriz si se pasasen batches. El resultado después es desplazado por el vector b. El resultado de la y sería después pasado a las siguientes neuronas, y así sucesivamente.

4. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Los espacios vectorial son muy relevantes para la IA ya que mucha de la información usada en ellos se puede representar como vectores o conjuntos de vectores. Un ejemplo de ello son las redes neuronales usadas en el deep learning: Como ya mencioné, en sí una neurona se podría considerar un espacio vectorial afín.