Теоретико-категорная семантика модальной теории типов, основанной на интуиционистской эпистемической логике

1 Модальное λ-исчисление, основанное на исчислении $\mathbf{IEL}^-$

Определим натуральное исчисление для IEL^- :

Определение 1. *Натуральное исчисление $NIEL^-$ для интуиционистской эпистемической логики IEL^- – это расширение натурального исчисления для интуиционистской логики высказываний с добавлением следующих правил вывода для модальности:*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Box A}\,\Box_I \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Box A_1, \ldots, \Gamma \vdash \Box A_n \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash B}{\Gamma \vdash \Box B}$$

Первое правило позволяет выводить ко-рефлексию. Второе модальное правило – это аналог для правила $\Box_I$ в натуральном исчислении для конструктивной K (see [?]) без $\Diamond$.

Мы будем обозначать $\Gamma \vdash \Box A_1, \ldots, \Gamma \vdash \Box A_n$ и $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ соответственно как $\Gamma \vdash \mathbf{K}\vec{A}$ и $\vec{A} \vdash B$ для краткости.

Лемма 1. $\Gamma \vdash_{NIEL^-} A \Rightarrow IEL^- \vdash \bigwedge \Gamma \to A$.

Доказательство. Индукция по построению вывода. Рассмотрим модальные случаи.

1) Если $\Gamma \vdash_{\mathrm{NIEL}^-} A$, тогда $\mathrm{IEL}^- \vdash \bigwedge \Gamma \to \Box A$.

(1)	$\bigwedge \Gamma \to A$	предположение индукции
(2)	$A \to \Box A$	ко-рефлексия
(3)	$(\bigwedge \Gamma \to A) \to ((A \to \Box A) \to (\bigwedge \Gamma \to \Box A))$	теорема IEL^-
(4)	$(A \to \Box A) \to (\bigwedge \Gamma \to \Box A)$	из (1), (3) и MP
(5)	$\bigwedge \Gamma \to \Box A$	из (2), (4) и MP

2) Если $\Gamma \vdash_{\mathrm{NIEL}^-} \Box\vec{A}$ и $\vec{A} \vdash B$, то $\mathrm{IEL}^- \vdash \bigwedge \Gamma \to \Box B$.

(1)	$\bigwedge \Gamma \to \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \Box A_i$	предположение индукции
(2)	$\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \Box A_i \to \Box \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i$	теорема IEL^-
(3)	$\bigwedge \Gamma \to \Box \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i$	по (1), (2) и правилу силлогизма
(4)	$\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B$	предположение индукции
(5)	$(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B) \to \Box(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B)$	ко-рефлексия
(6)	$\Box(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B)$	из (4), (5) и MP
(7)	$\Box \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to \Box B$	по (6) и по нормальности
(8)	$\bigwedge \Gamma \to \Box B$	по (3), (7) и правилу силлогизма

$\Box$

Лемма 2. *Если $\mathrm{IEL}^- \vdash A$, то $\mathrm{NIEL}^- \vdash A$.*

Доказательство. Построение выводов для модальных аксиом в NIEL^-. Мы рассмотрим эти выводы ниже с использованием термов. $\Box$

Далее мы построим типизированное λ-исчисление по фрагменту NIEL^- с правилами для импликации, конъюнкции и модальности. Данный фрагмент экивалентен IEL^- без аксиом для отрицания и дизъюнкции, что элементарно проверяется аналогично.

Определим термы и типы:

Определение 2. *Множество термов:*

Пусть $\mathbb{V}$ счетное множество переменных. Термы $\Lambda_{\mathbf{K}}$ порождается следующей грамматикой:

$$\Lambda_{\mathbf{K}} ::= \mathbb{V} \mid (\lambda \mathbb{V}.\Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\Lambda_{\mathbf{K}}\Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\Lambda_{\mathbf{K}}, \Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\pi_1 \Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\pi_2 \Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\mathbf{pure}\ \Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\mathbf{let\ pure}\ \mathbb{V}^* = \Lambda_{\mathbf{K}}^* \ \mathbf{in}\ \Lambda_{\mathbf{K}})$$

Где $\mathbb{V}^*$ и $\Lambda_{\mathbf{K}}^*$ обозначают множество всех конечных последовательностей переменных $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathbb{V}^i$ и множество всех конечных последовательностей термов $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} {\Lambda_{\mathbf{K}}}^i$. Последовательность переменных $\vec{x}$ и последовательность термов $\vec{M}$ в терме вида **let pure** должны иметь одинаковую длину. Иначе терм не будет правильно построенным.

Определение 3. *Множество типов:*

Пусть $\mathbb{T}$ – это счетное множество атормарных типов. Типы $\mathbb{T}_{\mathbf{K}}$ с типовым оператором $\Box$ порождаются следующей грамматикой:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{K}} ::= \mathbb{T} \mid (\mathbb{T}_{\mathbf{K}} \to \mathbb{T}_{\mathbf{K}}) \mid (\mathbb{T}_{\mathbf{K}} \times \mathbb{T}_{\mathbf{K}}) \mid (\Box \mathbb{T}_{\mathbf{K}}) \tag{1}$$

Контекст, его домен и кодомен определены стандартно [?][?].

Наша система состоит из следующих правил типизации в стиле Карри:

Определение 4. *Модальное λ-исчисление, основанное на исчислении IEL^-:*

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ ax$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B} \times_i \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M : A_i} \times_e,\ i \in \{1, 2\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\ M : \mathbf{K}A} \Box_I \qquad \frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}\ let_\Box$$

Правило типизации $\Box$ аналогично правилу $\bigcirc_I$ в монадическом метаязыке [**?**].

$\Box_I$ позволяет вкладывать объект типа A в текущиц вычислительный контекст, изменяя его тип на $\Box A$.

Правило типизации $\mathrm{let}_\Box$ аналогично правилу $\Box$-правилу в модальном λ-исчислении для интуционистской минимальной нормальной модальной логики **IK** [**?**].

$\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A}$ – это синтаксический сахар для $\Gamma \vdash M_1 : \Box A_1, \dots, \Gamma \vdash M_n : \Box A_n$ и $\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B$ – это краткая форма для $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash N : B$. $\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\, N$ – это мгновенное локальное связывание в терме N. Мы будем использовать такую краткую форму вместо $\mathbf{let\ pure}\, x_1, \dots, x_n = M_1, \dots, M_n\ \mathbf{in}\, N$.

Примеры выводов:

$$\cfrac{\cfrac{x : A \vdash x : A}{x : A \vdash \mathbf{pure}\, x : \Box A}}{\vdash (\lambda x.\mathbf{pure}\, x) : A \to \Box A}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{f : \Box(A \to B) \vdash f : \Box(A \to B) \qquad x : \Box A \vdash x : \Box A \qquad \cfrac{g : A \to B \vdash g : A \to B \qquad y : A \vdash y : A}{g : A \to B, y : A \vdash gy : B} \to_e}{f : \Box(A \to B), x : \Box A \vdash \mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\ \mathbf{in}\, gy : \Box B}\ \mathrm{let}_{\mathbf{K}}}{f : \Box(A \to B) \vdash \lambda x.\mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\ \mathbf{in}\, gy : \Box A \to \Box B}}{\vdash \lambda f.\lambda x.\mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\ \mathbf{in}\, gy : \Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B}$$

Определим свободные переменные, подставновку, β-редукцию и η-редукцию. Многошаговая β-редукция и $\beta\eta$-эквивалентность определены стандартно:

Определение 5. *Множество свободных переменных $FV(M)$ для произвольного терма M:*

1) $FV(x) = \{x\}$;

2) $FV(\lambda x.M) = FV(M) \backslash \{x\}$;

3) $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$;

4) $FV(\langle M, N\rangle) = FV(M) \cup FV(N)$;
5) $FV(\pi_i M) \subseteq FV(M)$, $i \in \{1,2\}$;
6) $FV(pure\ M) = FV(M)$;
7) $FV(\mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \ \mathbf{in}\ \ N) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} FV(M)$, где $n = |\vec{M}|$.

Определение 6. *Подстановка:*
1) $x[x := N] = N$, $x[y := N] = x$;
2) $(MN)[x := N] = M[x := N]N[x := N]$;
3) $(\lambda x.M)[x := N] = \lambda x.M[y := N]$, $y \in FV(M)$;
4) $(M, N)[x := P] = (M[x := P], N[x := P])$;
5) $(\pi_i M)[x := P] = \pi_i(M[x := P])$, $i \in \{1,2\}$;
6) $(\mathbf{pure}\, M)[x := P] = \mathbf{pure}\,(M[x := P])$;
7) $(\mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N)[y := P] = \mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = (\vec{M}[y := P])\ \mathbf{in}\ N$.

Определение 7. *Правила β-редукции и η-редукции:*
1) $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$;
2) $\pi_1\langle M, N\rangle \to_\beta M$;
3) $\pi_2\langle M, N\rangle \to_\beta N$;
4) $\begin{array}{l}\mathbf{let\ pure}\ \vec{x}, y, \vec{z} = \vec{M}, \mathbf{let\ pure}\ \vec{w} = \vec{N}\ \mathbf{in}\ Q, \vec{P}\ in\ R \to_{\beta\Box} \\ \mathbf{let\ pure}\ \vec{x}, \vec{w}, \vec{z} = \vec{M}, \vec{N}, \vec{P}\ \mathbf{in}\ R[y := Q]\end{array}$
5) $\mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \mathbf{pure}\ \vec{M}\ \mathbf{in}\ N \to_{\beta\Box\mathbf{pure}} \mathbf{pure}\ N[\vec{x} := \vec{M}]$
6) $\mathbf{let\ pure}\ \_\_ = \_\_\ \mathbf{in}\ M \to_{\beta\mathbf{nec}} \mathbf{pure}\, M$, где $\_\_$ – это пустая последовательность термов.
7) $\lambda x.fx \to_\eta f$;
8) $\langle \pi_1 P, \pi_2 P\rangle \to_\eta P$;
9) $\mathbf{let\ pure}\ x = M\ \mathbf{in}\ x \to_{\Box id} M$;

Мы будет писать $M \to_r N$, если терм M редуцируется к терму N по одному из перечисленных выше правил.

По умолчанию мы используем стратегию вычисления с вызовом по имени.

Докажем стандартные леммы о контекстах [1]:

Лемма 3. *Инверсия отношения типизации $\Box_I$.*
Пусть $\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A$, тогда $\Gamma \vdash M : A$;

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 4. *Базовые леммы.*

- *Если $\Gamma \vdash M : A$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, тогда $\Delta \vdash M : A$;*
- *Если $\Gamma \vdash M : A$, тогда $\Delta \vdash M : A$, где $\Delta = \{x_i : A_i \,|\, (x_i : A_i) \in \Gamma \,\&\, x_i \in FV(M)\}$*
- *Если $\Gamma, x : A \vdash M : B$ и $\Gamma \vdash N : A$, где $\Gamma \vdash M[x := N] : B$.*

Рассмотрим случаи для правила $\mathrm{let}_\Box$.

[1] Мы не будем рассматривать случаи для стандартных связок, так как они уже доказаны для просто типизированного λ-исчисления [?] [?]. Мы будем рассматривать только модальные случаи

Доказательство.

1) Пусть вывод заканчивается следующим правилом:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}\ \mathrm{let}_\Box$$

По предположению индукции $\Delta \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}$, тогда $\Delta \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B$.

Случаи 2)–3) рассматриваются аналогично.

$\Box$

Теорема 1. *Редукция субъекта*

Если $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$*, тогда* $\Gamma \vdash N : A$

Доказательство. Индукция по выводу $\Gamma \vdash M : A$ и по порождению $\to_{\beta\eta}$.

Случаи с функцией и парами рассмотрены здесь [?] [?].

1) Если $\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x}, y, \vec{z} = \vec{M}, \mathbf{let\ pure}\, \vec{w} = \vec{N}\ \mathbf{in}\ Q, \vec{P}\ \mathbf{in}\ R : \Box B$, тогда $\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x}, \vec{w}, \vec{z} = \vec{M}, \vec{N}, \vec{P}\ \mathbf{in}\ R[y := Q] : \Box B$ по правилу 4).

2) Если $\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, x = M\ \mathbf{in}\ x : \Box A$, тогда $\Gamma \vdash M : \mathbf{K}A$ по правилу 9).

Рассмотрено здесь [?].

3) Пусть вывод заканчивается применением следующего правила

$$\dfrac{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \mathbf{pure}\, \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}$$

Тогда $\Gamma \vdash \vec{M} : \vec{A}$ по инверсии отношения типизации для $\Box_I$ и $\Gamma \vdash N[\vec{x} := \vec{M}] : B$ по лемме 4, часть 3.

Тогда мы можем преобразовать данный вывод в следующий:

$$\dfrac{\Gamma \vdash N[\vec{x} := \vec{M}] : B}{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, N[\vec{x} := \vec{M}] : \Box B}\ \Box_I$$

4) Пусть вывод заканчивается применением правила $\mathrm{l}et_\Box$ для типового объявления, выводимого из пустого контекста:

$$\dfrac{\vdash M : A}{\vdash \mathbf{let\ pure}\ \_\_ = \_\_\ \mathbf{in}\ M : \Box A}$$

Тогда, если $\vdash M : A$, тогда $\vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A$.

Данное рассуждение действует также и в обратную сторону. $\Box$

Теорема 2.

$\twoheadrightarrow_r$ *сильно нормализуемо;*

Доказательство.

Мы модифицируем технику Тэйта с логическими отношениями для модальностей [?] [?].

Определение 8. *Множества строго вычислимых термов:*

- $SC_A = \{M : A \mid M$ *сильно нормализуем* $\}$ *for* $A \in \mathbb{T}$*;*

- $SC_{A\to B} = \{M : A \to B \mid \forall N \in SC_A, MN \in SC_B\}$, *длф* $A, B \in \mathbb{T}_{\mathbf{K}}$ *и* $A, B \in \mathbb{T}_{\mathbf{K}}$*;*

- $SC_{\Box A} = \{M : \mathbf{K}A \mid M$ *сильно нормализуем* $\}$ *для атомарного типа* A*;*

- $SC_{\Box A} = \{M : \Box A \mid \forall B \in \mathbb{T}_{\mathbf{K}}, (N \in SC_B \Rightarrow \mathbf{let\,pure}\, x = M\, \mathbf{in}\, N \in SC_{\Box B})\}$ *для составного типа* A*.*

Заметим, что определение $SC_{\Box A}$ для составного типа A в указанном виде справедливо для терма N с одной свободной переменной x. Если в терме N больше одной свободной переменной, тогда мы рассматриваем вектор $\langle M_1, \ldots, M_n\rangle$, каждый из элементов которого принадлежит соотвествующему множеству строго вычислимых термов, согласованному с определением $SC_{\Box A}$ для составного типа A.

Лемма 5.

Для любого типа A*, если* $M \in SC_A$*, тогда* M *сильно нормализуем.*

Доказательство.

Индукция по длине A.

1) Если A атомарный и $M \in SC_A$, тогда утвержение непосредственно следует из определения множества строго вычислимых термов. Аналогично для $M \in SC_{\Box A}$, где A – атомарный тип.

2) Пусть $M \in SC_{\Box A}$ и $N \in SC_B$, тогда $\mathbf{let\,pure}\, x = M\, \mathbf{in}\, N \in SC_{\Box B}$, который сильно нормализуем по предположению индукции, тогда и нормализуем и M, в противном случае существовал бы бесконечный редукционный путь в $\mathbf{let\,pure}\, x = M\, \mathbf{in}\, N$. □

Лемма 6.

- *Если* $M \in SC_A$*, то* $\mathbf{pure}\, M$ *сильно нормализуем.*

- *Если* M *сильно нормализуем, то* $\mathbf{pure}\, M$ *сильно нормализуем.*

Доказательство.

1) Индукция по длине A.

2) Напрямую следует из леммы 5 и первого пункта данной леммы. □

Лемма 7.

Если $M \in SC_A$ *и* $M \to_r N$*, тогда и только тогда, когда* $N \in SC_A$*.*

Доказательство.

Индукция по длине A.

1) Пусть A атомарный, тогда случаи для SC_A и $SC_{\Box A}$ очевидны.

2) Пусть $M \in SC_{\Box A}$ и $N \in SC_B$ и при этом $M \to_r P$.

По определению $SC_{\Box A}$, $\mathbf{let\,pure}\, x = M\, in\, N \in SC_{\Box B}$.

По предположению индукции, $\mathbf{let\,pure}\, x = M\, \mathbf{in}\, N \to_r \mathbf{let\,pure}\, x = P\, \mathbf{in}\, N$, тогда $\mathbf{let\,pure}\, x = P\, \mathbf{in}\, N \in SC_{\Box B}$, откуда $P \in SC_{\Box A}$.

3) Пусть $M \in SC_A$ и $M \to_r N$. Тогда $\mathbf{pure}\, M \in SC_{\Box A}$ и $\mathbf{pure}\, M \to_r \mathbf{pure}\, N$, тогда $N \in SC_{\Box A}$.

Рассуждение в обратную сторону проводится симметрично.

□

Лемма 8.

Пусть $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$ *и для любых* $i, M_i \in SC_{A_i}$*, тогда* $M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_A$.

Доказательство.

Индукция по построению $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$.

1) Пусть вывод заканчивается применением правила $\Box_I$:

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A}\,\Box_I$$

По предположению индукции $M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_A$, тогда $\mathbf{pure}\, M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_{\Box A}$.

2) Пусть вывод заканчивается применением правила $\mathrm{let}_{\mathbf{K}}$.

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \vec{M}' : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}'\ \mathbf{in}\ N : \Box B}\,\mathrm{let}_{\Box}$$

По предположению индукции $i \in \{1, \ldots, \mathrm{length}(\vec{M}')\}$, $M_i'[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_{\Box A_i}$.

Тогда $\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}'[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n]\ \mathbf{in}\ N \in SC_{\Box B}$, иначе мы имели бесконечный путь редукций в терме $\vec{M}'[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n]$. $\Box$

Следствие 1. *Все термы строго вычислимы, следовательно, сильно нормализуемы.*

$\Box$

Теорема 3. *Свойство Черча-Россера*

$\twoheadrightarrow_r$ *конфлюентно.*

Доказательство. По лемме Ньюмана, если отношение сильно нормализуемо и локально конфлюентно, то отношение конфлюентно.

Достаточно показать локальную конфлюентность.

Лемма 9. *Локальная конфлюентность.*

Если $M \to_r N$ *и* $M \to_r Q$*, тогда найдется такой терм* P*, что* $N \twoheadrightarrow_r P$ *и* $Q \twoheadrightarrow_r P$.

Доказательство. Рассмотрим следующую критическую пару и покажем, что оба терма из данной пары редуцируются к одному и тому же терму:

1) $\mathbf{let\ pure}\, x = (\mathbf{let\ pure}\, \vec{y} = \mathbf{pure}\, \vec{N}\ \mathbf{in}\ P)\ \mathbf{in}\ M$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{let\ pure}\, x = (\mathbf{let\ pure}\, \vec{y} = \mathbf{pure}\, \vec{N}\ \mathbf{in}\ P)\ \mathbf{in}\ M \arrow[d, "\beta\Box"'] \arrow[dr, "\beta\Box\mathbf{pure}"] & \\
\mathbf{let\ pure}\, \vec{y} = \mathbf{pure}\, \vec{N}\ \mathbf{in}\ M[x := P] & \mathbf{let\ pure}\, x = \mathbf{pure}\, P[\vec{y} := \vec{N}]\ \mathbf{in}\ M
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{let\ pure}\, \vec{y} = \mathbf{pure}\, \vec{N}\ \mathbf{in}\ M[x := P] \to_{\beta\Box\mathbf{pure}}$$
$$\mathbf{pure}\, M[x := P][\vec{y} = \vec{N}]$$
$$\mathbf{let\ pure}\, x = \mathbf{pure}\, P[\vec{y} := \vec{N}]\ \mathbf{in}\ M \to_{\beta\Box\mathbf{pure}}$$
$$\mathbf{pure}\, M[x := P[\vec{y} := \vec{N}]] \qquad .$$

В общем случае, эквивалентность термов $M[x := P][\vec{y} = \vec{N}] \equiv M[x := P[\vec{y} := \vec{N}]]$ не имеет места, но в данном случае, но переменные $\vec{y}$ входят свободно только в P. В таком случае, результаты обеих подстановок одинаковы. $\square$

$\square$

Теорема 4.

Нормальная форма $\lambda_{\mathbf{K}}$ со стратегией вычисления с вызовом по имени обладает свойством подформульности: если M в нормальной форме, то всего его подтермы также в нормальной форме.

Доказательство. Индукция по структуре M. Случай $\mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N$ рассмотрен Какутани [**?**] [**?**].

Пусть $\mathbf{pure}\ M$ в нормальной форме, тогда M в нормальной форме и все его подтермы также в нормальной форме по предположению индукции.

Тогда, если $\mathbf{pure}\ M$ в нормальной форме, то и все его подтермы также в нормальной форме. $\square$

2 Теоретико-категорная семантика

Теорема 5. *Корректность*

Пусть $\Gamma \vdash M : A$ и $M =_{\beta\eta} N$, тогда $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$

Доказательство.

Определение 9. *Семантическая трансляция из $\lambda_{\mathbf{K}}$ в аппликативный функтор $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$ над декартово замкнутой категорией $\mathcal{C}$:*

- *Интерпретация типов:*
  - $[\![A]\!] := \hat{A}, A \in \mathbb{T}$, *где $\hat{A}$ – это объект категории $\mathcal{C}$, полученный в результате некоторого присваивания;*
  - $[\![A \to B]\!] := [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$;
  - $[\![A \times B]\!] := [\![A]\!] \times [\![B]\!]$.
- *Интерпретация для модальных типов:*
  - $[\![\mathbf{K}A]\!] = \mathcal{K}[\![A]\!]$;
- *Интерпретация для контекстов:*
  - $[\![\quad]\!] = \mathbb{1}$, *где $\mathbb{1}$ – это терминальный объект в заданной декартово замкнутой категории;*
  - $[\![\Gamma, x : A]\!] = [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!]$
- *Интерпретация для типовых объявлений:*
  - $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] := [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- *Интерпретация для правил типизации:*

$$\frac{}{[\![\Gamma, x : A \vdash x : A]\!] = \pi_2 : [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \to [\![A]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \to B]\!] = \Lambda([\![M]\!]) : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]^{[\![A]\!]}}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A \to B]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \qquad [\![\Gamma \vdash N : A]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash (MN) : B]\!] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle [\![M]\!], [\![N]\!] \rangle} [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \xrightarrow{\epsilon} [\![B]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!] \qquad [\![\Gamma \vdash N : B]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B]\!] = \langle [\![M]\!], [\![N]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!] \times [\![B]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A_1]\!] \times [\![A_2]\!]}{[\![\Gamma \vdash \pi_i M : A_i]\!] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A_1]\!] \times [\![A_2]\!] \xrightarrow{\pi_i} [\![A_i]\!]} \, i \in \{1, 2\}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, M : \mathbf{K}A]\!] := [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A]\!] \xrightarrow{\eta_{[\![A]\!]}} \mathcal{K}[\![A]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}]\!] = \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{K}[\![A_i]\!] \qquad [\![\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B]\!] = [\![N]\!] : \prod_{i=1}^{n} [\![A_i]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\, M : \mathbf{K}B]\!] = \mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!], \ldots, [\![A_n]\!]} \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{K}[\![B]\!]}$$

Определение 10. *Одновременная подстановка*

Пусть $\Gamma = \{x_1 : A_1, ..., x_n : A_n\}$, $\Gamma \vdash M : A$ *и для любых* $i \in \{1, ..., n\}$, $\Gamma \vdash M_i : A_i$.

Одновременная подстановка $M[\vec{x} := \vec{M}]$ *определяется рекурсивно:*

- $x_i[\vec{x} := \vec{M}] = M_i$;
- $(\lambda x.M)[\vec{x} := \vec{M}] = \lambda x.(M[\vec{x} := \vec{M}])$;
- $(MN)[\vec{x} := \vec{M}] = (M[\vec{x} = \vec{M}])(N[\vec{x} := \vec{M}])$;
- $\langle M, N \rangle = \langle (M[\vec{x} = \vec{M}]), (N[\vec{x} := \vec{M}]) \rangle$;
- $(\pi_i P)[\vec{x} := \vec{M}] = \pi_i(P[\vec{x} = \vec{M}])$;
- $(\mathbf{pure}\, M)[\vec{x} := \vec{M}] = \mathbf{pure}\, (M[\vec{x} = \vec{M}])$;
- $(\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\, N)[\vec{y} := \vec{P}] = \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = (\vec{M}[\vec{y} := \vec{P}])\ \mathbf{in}\, N$

Лемма 10.

$[\![M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n]]\!] = [\![M]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle$.

Доказательство.

1)

$$[\![\Gamma \vdash (\mathbf{pure}\, M)[\vec{x} := \vec{M}] : \mathbf{K}A]\!] = [\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, (M[\vec{x} := \vec{M}]) : \mathbf{K}A]\!]$$

Определение подстановки

$$\eta_{[\![A]\!]} \circ [\![(M[\vec{x} := \vec{M}])]\!]$$

интерпретация для **pure**

$$\eta_{[\![A]\!]} \circ ([\![M]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle) =$$

предположение индукции$*$

$$(\eta_{[\![A]\!]} \circ [\![M]\!]) \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle =$$

ассоциативность композиции

$$[\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, M : \mathbf{K}A]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle =$$

интерпретация для **pure**

2)

$$[\![\Gamma \vdash (\mathbf{let\, pure}\, \vec{x} = \vec{M}\, \mathbf{in}\, N)[\vec{y} := \vec{P}] : \mathbf{K}B]\!] =$$

определение одновременной подстановки

$$[\![\Gamma \vdash \mathbf{let\, pure}\, \vec{x} = (\vec{M}[\vec{y} := \vec{P}])\, \mathbf{in}\, N : \mathbf{K}B]\!] =$$

интерпретация $let_{\mathbf{K}}$

$$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\ldots,[\![A_n]\!]} \circ [\![\Gamma \vdash (\vec{M}[\vec{y} := \vec{P}]) : \mathbf{K}\vec{A}]\!] =$$

предположение индукция

$$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\ldots,[\![A_n]\!]} \circ ([\![\vec{M}]\!] \circ \langle [\![P_1]\!], \ldots, [\![P_n]\!] \rangle) =$$

ассоциативность композиции

$$(\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\ldots,[\![A_n]\!]} \circ [\![\vec{M}]\!]) \circ \langle [\![P_1]\!], \ldots, [\![P_n]\!] \rangle =$$

по интерпретации

$$[\![\Gamma \vdash \mathbf{let\, pure}\, \vec{x} = \vec{M}\, \mathbf{in}\, N : \mathbf{K}B]\!] \circ \langle [\![P_1]\!], \ldots, [\![P_n]\!] \rangle$$

□

Лемма 11.

Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$;

Доказательство.

Случаи с правилом β-редукции для $let_{\mathbf{K}}$ рассмотрены здесь [**?**]. Рассмотрим случаи с **pure**.

1) $[\![\Gamma \vdash \mathbf{let\, pure}\, \vec{x} = \mathbf{pure}\, \vec{M}\, \mathbf{in}\, N : \mathbf{K}B]\!] = [\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, N[\vec{x} := \vec{M}] : \mathbf{K}B]\!]$

$[\![\Gamma \vdash \textbf{let pure}\, \vec{x} = \textbf{pure}\, \vec{M}\, \textbf{in}\, N : \mathbf{K}B]\!] =$

интепретация

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\dots,[\![A_n]\!]} \circ \langle \eta_{[\![A_1]\!]} \circ [\![M_1]\!], \dots, \eta_{[\![A_n]\!]} \circ [\![M_n]\!]\rangle =$

свойство пары морфизмов

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\dots,[\![A_n]\!]} \circ (\eta_{[\![A_1]\!]} \times \dots \times \eta_{[\![A_n]\!]}) \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle =$

ассоциативность композиции

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ (*_{[\![A_1]\!],\dots,[\![A_n]\!]} \circ (\eta_{[\![A_1]\!]} \times \dots \eta_{[\![A_n]\!]})) \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle =$

по определению аппликативного функтора

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ \eta_{[\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!]} \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle =$

естественность η

$\eta_{[\![B]\!]} \circ [\![N]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle =$

ассоциативность композиции

$\eta_{[\![B]\!]} \circ ([\![N]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle) =$

по лемме об одновременной подстановке

$\eta_{[\![B]\!]} \circ [\![N[\vec{x} := \vec{M}]]\!]$

интерпретация

$[\![\Gamma \vdash \textbf{pure}\, (N[\vec{x} := \vec{M}]) : \mathbf{K}B]\!]$

2) $[\![\vdash \textbf{let pure}\, \_\_ = \_\_\, \textbf{in}\, M : \mathbf{K}A]\!] = [\![\vdash \textbf{pure}\, M : \mathbf{K}A]\!]$

$[\![\vdash \textbf{let pure}\, \_\_ = \_\_\, \textbf{in}\, M : \mathbf{K}A]\!] =$

интерпретация

$\mathcal{K}([\![M]\!]) \circ u_{\mathbb{1}} =$

определение аппликативного функтора

$\mathcal{K}([\![M]\!]) \circ \eta_{\mathbb{1}} =$ □

естественность η

$\eta_{[\![A]\!]} \circ [\![M]\!] =$

интерпретация

$[\![\vdash \textbf{pure}\, M : \mathbf{K}A]\!]$

□

Теорема 6. *Полнота*

Пусть $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$, *тогда* $M =_{\beta\eta} N$.

Доказательство.

Мы будем работать с термовой моделью для простого типизированного λ-исчисления с $\times$ и $\to$, стандартно описанной здесь [**?**]:

Определение 11. *Эквивалетность на парах вида переменная-терм:*

Определим такое бинарное отношение $\sim_{A,B} \subseteq \mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}}$, *что:*

$(x, M) \sim_{A,B} (y, N) \Leftrightarrow x : A \vdash M : B \;\&\; y : A \vdash N : A \;\&\; M =_{\beta\eta} N[y := x]$.

Нетрудно заметить, что данное отношение является отношением эквивалентности.

Обозначим класс эквивалентности как $[x, M]_{A,B} = \{(y, N) \mid (x, M) \sim_{A,B} (y, N)\}$ (ниже мы будем опускать индексы).

Определение 12. *Категория* $\mathcal{C}(\lambda)$*:*

- $Ob_{\mathcal{C}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathbb{T}\} \cup \{\mathbb{1}\}$;
- $Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}) = (\mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}})/_{\sim_{A,B}}$;

- *Пусть* $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$ *и* $[y, N] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{B}, \hat{C})$, *тогда* $[y, M] \circ [x, M] = [x, N[y := M]]$;
- *Тождественный морфизм* $id_{\hat{A}} = [x, x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{A})}$;
- *Терминальный объект* $\mathbb{1}$;
- $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$;
- *Каноническая проекция:* $[x, \pi_i x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}_1 \times \hat{A}_2, \hat{A}_i)$ *for* $i \in \{1, 2\}$;
- $\widehat{A \to B} = \hat{B}^{\hat{A}}$;
- *Вычисляющая стрелка* $\epsilon = [x, (\pi_2 x)(\pi_1 x)] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{B}^{\hat{A}} \times \hat{A}, \hat{B})}$.

Достаточно показать, что $\mathbf{K}$ – это аппликативный функтор над $\mathcal{C}(\lambda)$.

Определение 13. *Определим эндофунктор* $\mathcal{K} : \mathcal{C}(\lambda) \to \mathcal{C}(\lambda)$ *таким образом, что для любых* $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$, $\mathbf{K}([x, M]) = [y, \textbf{let pure}\, x = y\, \textbf{in}\, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbf{K}\hat{A}, \mathbf{K}\hat{B})$ *(обозначения: fmap f для произвольной стрелки f).*

Лемма 12. *Функториальность*

- *fmap* $(g \circ f) =$ *fmap* $(g) \circ$ *fmap* (f);
- *fmap* $(id_{\hat{A}}) = id_{\mathbf{K}\hat{A}}$.

Доказательство. Простая проверка с использованием правил редукции.

∎

Определение 14. *Определим естественные преобразования:*

- $\eta : Id \Rightarrow \mathcal{K}$, *такое, что* $\forall \hat{A} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $\eta_{\hat{A}} = [x, \textbf{pure}\, x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \mathbf{K}\hat{A})$;
- $*_{A,B} : \mathbf{K}\hat{A} \times \mathbf{K}\hat{B} \to \mathbf{K}(\hat{A} \times \hat{B})$, *такое, что* $\forall \hat{A}, \hat{B} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}, *_{\hat{A},\hat{B}} = [p, \textbf{let pure}\, x, y = \pi_1 p, \pi_2 p\, \textbf{in}\, \langle x, y \rangle] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbf{K}A \times \mathbf{K}B, \mathbf{K}(A \times B))$.

Реализация $*$ в нашей термовой модели – это частный случай правила $\text{let}_{\mathbf{K}}$:

$$\dfrac{\dfrac{p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B \vdash p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B}{p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B \vdash \pi_1 p : \mathbf{K}A} \quad \dfrac{p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B \vdash p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B}{p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B \vdash \pi_2 p : \mathbf{K}B} \quad \dfrac{x : A \vdash x : A \qquad y : B \vdash y : B}{x : A, y : B \vdash \langle x, y \rangle : A \times B}}{p : \mathbf{K}A \times \mathbf{K}B \vdash \textbf{let pure}\, x, y = \pi_1 p, \pi_2 p\, \textbf{in}\, \langle x, y \rangle : \mathbf{K}(A \times B)}$$

Лемма 13.
$\mathbf{K}$ *нестрогий моноидальный функтор.*

Доказательство.
See [**?**]

∎

Лемма 14. *Естественность и когерентность* η:

- *fmap* $f \circ \eta_A = \eta_B \circ f$;

- $*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_A \times \eta_B) = \eta_{\hat{A}\times\hat{B}}$;

Доказательство.
i) $\text{fmap}\ f \circ \eta_{\hat{A}} = \eta_{\hat{B}} \circ f$

$\eta_{\hat{B}} \circ f =$
по определению
$[y, \mathbf{pure}\, y] \circ [x, M] =$
композиция
$[x, \mathbf{pure}\, y[y := M]] =$
подстановка
$[x, \mathbf{pure}\, M]$

С другой стороны:
$\text{fmap}\ f \circ \eta_{\hat{A}} =$
по определению
$[z, \mathbf{let\ pure}\, x = z\ \mathbf{in}\ M] \circ [x, \mathbf{pure}\, \mathbf{x}] =$
композиция
$[x, \mathbf{let\ pure}\, x = z\ \mathbf{in}\ M[z := \mathbf{pure}\, x]] =$
подстановка
$[x, \mathbf{let\ pure}\, x = \mathbf{pure}\, x\ \mathbf{in}\ M] =$
правило β-редукции
$[x, \mathbf{pure}\, M[x := x]] =$
постановка
$[x, \mathbf{pure}\, M]$

ii) $*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_{\hat{A}} \times \eta_{\hat{B}}) = \eta_{\hat{A}\times\hat{B}}$

$*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_{\hat{A}} \times \eta_{\hat{B}}) =$
раскрытие
$[q, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1 q, \pi_2 q\ \mathbf{in}\ \langle x, y\rangle] \circ [p, \langle \mathbf{pure}\, (\pi_1 p), \mathbf{pure}\, (\pi_2 p)\rangle] =$
композиция
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1 q, \pi_2 q\ \mathbf{in}\ \langle x, y\rangle[q := \langle \mathbf{pure}\, (\pi_1 p), \mathbf{pure}\, (\pi_2 p)\rangle]] =$
подстановка
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1(\langle \mathbf{pure}\, (\pi_1 p), \mathbf{pure}\, (\pi_2 p)\rangle), \pi_2(\langle \mathbf{pure}\, (\pi_1 p), \mathbf{pure}\, (\pi_2 p)\rangle)\ \mathbf{in}\ \langle x, y\rangle] =$
правило β-редукции
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \mathbf{pure}\, (\pi_1 p), \mathbf{pure}\, (\pi_2 p)\ \mathbf{in}\ \langle x, y\rangle] =$
правило β-редукции
$[p, \mathbf{pure}\, (\langle x, y\rangle[x := \pi_1 p, y := \pi_2 p])] =$
подстановка
$[p, \mathbf{pure}\, \langle \pi_1 p, \pi_2 p\rangle] =$
правило η-редукции
$[p, \mathbf{pure}\, p] =$
определение
$\eta_{\hat{A}\times\hat{B}}$

$\square$

Определение 15.
$u_{\mathbb{1}} = [\blacksquare, \mathbf{let\ pure}\, \_\_ = \_\_\ \mathbf{in}\ \blacksquare] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbb{1}, \mathbf{K}\mathbb{1})$.

Лемма 15.
$u_{\mathbb{1}} = \eta_{\mathbb{1}}$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Определение 16. *Естественное преобразование для тензорно-сильного функтора*
Пусть $[p, \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A} \times \mathbf{K}\hat{B}, \mathbf{K}\hat{A} \times \mathbf{K}\hat{B})$.
Тогда естественное преобразование для тензорно-сильного функтора $\tau_{\hat{A},\hat{B}} = *_{\hat{A},\hat{B}} \circ [p, \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle]$.

Ясно, что полученное определение легко упрощается:

$*_{\hat{A},\hat{B}} \circ [p, \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle] =$
определение
$[p', \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1 p', \pi_2 p'\ \mathbf{in}\, \langle x, y\rangle] \circ [p, \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle] =$
композиция
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1 p', \pi_2 p'\ \mathbf{in}\, \langle x, y\rangle[p' := \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle]] =$
подстановка
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1(\langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle), \pi_2(\langle \pi_1 p, \mathbf{pure}\,(\pi_2 p)\rangle)\ \mathbf{in}\, \langle x, y\rangle] =$
правило β-редукции
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle x, y\rangle]$

Лемма 16. *Когерентность для* τ*:*

- *fmap* $\alpha_{\hat{A},\hat{B},\hat{C}} \circ \tau_{\hat{A}\times\hat{B},\hat{C}} = \tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} \circ (id_{\hat{A}} \times \tau_{\hat{B},\hat{C}}) \circ \alpha_{\hat{A},\hat{B},\mathbf{K}\hat{C}}$;
- $\mathbf{K}(R_{\hat{A}}) \circ \tau_{\mathbb{1},\hat{A}} = R_{\mathbf{K}\hat{A}}$.

где $\alpha_{\hat{A},\hat{B},\hat{C}} = [p, \langle \pi_1(\pi_1 p), \langle \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle\rangle]$ *и* $R = \pi_2$.

Доказательство.
1) Определим $\tau_{\hat{A}\times\hat{B},\hat{C}}$ как:
$\tau_{\hat{A}\times\hat{B},\hat{C}} = [p,\ \mathbf{let\ pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\,(\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\,(\pi_2(\pi_1 p)), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle\langle x, y\rangle, z\rangle]$

Тогда:

$\mathrm{fmap}\ \alpha_{\hat{A},\hat{B},\hat{C}} \circ \tau_{\hat{A}\times\hat{B},\hat{C}} =$
$[q, \mathbf{let\ pure}\, r = q\ \mathbf{in}\, \langle \pi_1(\pi_1 r), \langle \pi_2(\pi_1 r), \pi_2 r\rangle\rangle] \circ$
$\circ [p,\ \mathbf{let\ pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\,(\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\,(\pi_2(\pi_1 p)), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle\langle x, y\rangle, z\rangle] =$
композиция
$[p, \mathbf{let\ pure}\, r = q\ \mathbf{in}\, \langle \pi_1(\pi_1 r), \langle \pi_2(\pi_1 r), \pi_2 r\rangle\rangle$
$[q :=\ \mathbf{let\ pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\,(\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\,(\pi_2(\pi_1 p)), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle\langle x, y\rangle, z\rangle]] =$
подстановка и правило β-редукции
$[p, \mathbf{let\ pure}\, r = (\mathbf{let\ pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\,(\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\,(\pi_2(\pi_1 p)), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle\langle x, y\rangle, z\rangle)$
$\mathbf{in}\, \langle \pi_1(\pi_1 r), \langle \pi_2(\pi_1 r), \pi_2 r\rangle\rangle] =$
правило β-редукции
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\,(\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\,(\pi_2(\pi_1 p)), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle \pi_1(\pi_1 r), \langle \pi_2(\pi_1 r), \pi_2 r\rangle\rangle$
$[r := \langle\langle x, y\rangle, z\rangle]] =$
правило β-редукции
$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\,(\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\,(\pi_2(\pi_1 p)), \pi_2 p\ \mathbf{in}\, \langle x, \langle y, z\rangle\rangle]$

С другой стороны,

Определим $\tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}}$:

$$\tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} = [r, \mathbf{let\,pure}\, x, y, z = (\mathbf{pure}\, \pi_1 r, \mathbf{let\,pure}\, q^{'} = \pi_2 r\, \mathbf{in}\, \pi_1 q^{'}, \mathbf{let\,pure}\, q^{'} = \pi_2 r\, \mathbf{in}\, \pi_2 q^{'})$$
$$\mathbf{in}\, \langle x, \langle y, z\rangle\rangle]$$

Упростим данный частный случай естественного преобразования для тензорно-сильного функтора:

$$[p, \mathbf{let\,pure}\, x, y, z = (\mathbf{pure}\, \pi_1 p, \mathbf{let\,pure}\, p^{'} = \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \pi_1 p^{'}, \mathbf{let\,pure}\, p^{'} = \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \pi_2 p^{'})$$
$$\mathbf{in}\, \langle x, \langle y, z\rangle\rangle] =$$
подстановка и правила редукции
$$[p, \mathbf{let\,pure}\, x, p^{'}, z = (\mathbf{pure}\, \pi_1 p, \pi_2 p, \mathbf{let\,pure}\, p^{'} = \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \pi_2 p^{'})\, \mathbf{in}\, \langle x, \langle \pi_1 p^{'}, z\rangle\rangle] =$$
подстановка и правила редукции
$$[p, \mathbf{let\,pure}\, x, p^{'} = \mathbf{pure}\, \pi_1 p, \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \langle x, \langle \pi_1 p^{'}, \pi_2 p^{'}\rangle\rangle]$$

Тогда:

$$\tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} \circ (id_{\hat{A}} \times \tau_{\hat{B},\hat{C}}) \circ \alpha_{\hat{A},\hat{B},\mathbf{K}\hat{C}} =$$
раскрытие
$$\tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} \circ [q, \langle \pi_1 q, \mathbf{let\,pure}\, y, z = \mathbf{pure}\, (\pi_1(\pi_2 q)), \pi_2(\pi_2 q)\, \mathbf{in}\, \langle y, z\rangle\rangle] \circ$$
$$\circ\, [p, \langle \pi_1(\pi_1 p), \langle \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle\rangle] =$$
композиция
$$\tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} \circ [p, \langle \pi_1 q, \mathbf{let\,pure}\, y, z = \mathbf{pure}\, (\pi_1(\pi_2 q)), \pi_2(\pi_2 q)\, \mathbf{in}\, \langle y, z\rangle\rangle$$
$$[q := \langle \pi_1(\pi_1 p), \langle \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle\rangle]] =$$
подстановка и редукция
$$\tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} \circ [p, \langle \pi_1(\pi_1 p), \mathbf{let\,pure}\, y, z = \mathbf{pure}\, \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \langle y, z\rangle\rangle] =$$
подстановка
$$[r, \mathbf{let\,pure}\, x, p^{'} = \mathbf{pure}\, \pi_1 r, \pi_2 r\, \mathbf{in}\, \langle x, \langle \pi_1 p^{'}, \pi_2 p^{'}\rangle\rangle] \circ$$
$$\circ\, [p, \langle \pi_1(\pi_1 p), \mathbf{let\,pure}\, y, z = \mathbf{pure}\, \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \langle y, z\rangle\rangle] =$$
подстановка и редукция
$$[p, \mathbf{let\,pure}\, x, p^{'} = (\mathbf{pure}\, (\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{let\,pure}\, y, z = (\mathbf{pure}\, \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \langle y, z\rangle)$$
$$\mathbf{in}\, \langle x, \langle \pi_1 p^{'}, \pi_2 p^{'}\rangle\rangle] =$$
редукция
$$[p, \mathbf{let\,pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\, (\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\, \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \langle x, \langle \pi_1 p^{'}, \pi_2 p^{'}\rangle\rangle[p^{'} := \langle y, z\rangle]] =$$
подстановка и редукция
$$[p, \mathbf{let\,pure}\, x, y, z = \mathbf{pure}\, (\pi_1(\pi_1 p)), \mathbf{pure}\, \pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\, \mathbf{in}\, \langle x, \langle y, z\rangle\rangle]$$

2) Очевидно.

□

Лемма 17. **K** – *это аппликативный функтор.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущих лемм. □

Аналогично [?], мы применяем трансляцию из $\lambda_{\mathbf{K}}$ к произвольной декартово замкнутой категории с аппликативным функтором $\mathcal{K}$, тогда мы имеем $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [x, M[x_i := \pi_i x]]$, so $M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow [\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$.

□

3 Приложение A. Глоссарий по теории категорий.

Определение 17. *Категория $\mathcal{C}$ состоит из:*

- *Класса объектов $Ob_{\mathcal{C}}$;*
- *Для любых объекта $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$ определено множество стрелок (или морфизмов) из A в B $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$;*
- *Если $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, то $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$;*
- *Для любого объекта $A \in Ob_{\mathcal{C}}$, определен тождественный морфизм $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$;*
- *Для любой стрелки $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, для любой стрелки $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ и для любой стрелки $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*
- *Для любой стрелки $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \circ id_A = f$ и $id_B \circ f = f$.*

Определение 18. *Функтор*
Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ – категории. Функтором называется отображение $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, такое, что:

- *$F : A \mapsto FA$, где $A \in Ob_{\mathcal{C}}$;*
- *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;*
- *$F(id_A) = id_{FA}$.*

Определение 19. *Естественное преобразование Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – функторы. Естественным преобразованием $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ называется такое индексированное семейство стрелок $(\alpha_X)_{X \in Ob_{\mathcal{C}}}$, что для любых $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$, для любой стрелки $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, диаграмма коммутирует:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & \mathcal{F}B \arrow[d, "\alpha_B"] \\
\mathcal{G}A \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

Определение 20. *Моноидальная категория*
Моноидальная категория – это категория $\mathcal{C}$ с дополнительной структурой:

- *Бифунктор $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to C$, который мы будем называть тензором;*
- *Единица $\mathbb{1}$;*
- *Изоморфизм, который мы будем называть ассоциатором: $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$;*
- *Изоморфизм $L_A : \mathbb{1} \otimes A \cong A$;*

- *Изоморфизм $R_A : A \otimes \mathbb{1} \cong A$;*
- *Первое условие когерентности (пятиугольник Маклейна) (данная диаграмма коммутирует):*

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C}\otimes id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "id_A\otimes\alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

- *Второе условие когерентности (тождество треугольника):*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes \mathbb{1}) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathbb{1},B}"] \arrow[dr, "R_A\otimes id_B"'] & & A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \arrow[dl, "id_A\otimes L_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

- *Моноидальная категория $\mathcal{C}$ называется симметрической, если для любых $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$, имеет место изоморфизм $\sigma_{A,B} : A \otimes B \cong B \otimes A$.*

Определение 21. *Декартово замкнутная категория*
Декартово замкнутная категория – это категория с терминальным объектом, конечными произведениями и экспоненцированием.

Легко видеть, что декартово замкнутая категория – это частный случай (симметрической) моноидальной категории, в котором тензор – это произведения, а единица – это терминальный объект.

Определение 22. *Нестрогий моноидальный функтор*
Пусть $\langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rangle$ и $\langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rangle$ моноидальные категории.
Нестрогий моноидальный функтор $\mathcal{F} : \langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1} \rangle \to \langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}' \rangle$ это функтор $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ с дополнительными естественными преобразованиями:

- *$u : \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$;*
- *$*_{A,B} : \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B \to \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B)$.*

и условиями когерентности:

- *Ассоциативность:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C \arrow[r, "\alpha^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}"] \arrow[d, "*_{A,B}\otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}B}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{F}B \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C) \arrow[d, "id_{\mathcal{F}A}\otimes_{\mathcal{D}} *_{B,C}"] \\
\mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C} \arrow[d, "*_{A\otimes_{\mathcal{C}} B,C}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B \otimes_{\mathcal{C}} C) \arrow[d, "*_{A,B\otimes_{\mathcal{C}} C}"] \\
\mathcal{F}((A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{C}} C) \arrow[r, "\mathcal{F}(\alpha^{\mathcal{C}}_{A,B,C})"'] & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} (B \otimes_{\mathcal{C}} C))
\end{tikzcd}$$

- *Свойство левой единицы:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}A \arrow[r, "u \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}A}"] \arrow[d, "L^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A}"'] & \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}A \arrow[d, "*_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}},A}"] \\
\mathcal{F}A & \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} A) \arrow[l, "\mathcal{F}(L^{\mathcal{C}}_{A})"']
\end{tikzcd}$$

- *Свойство правой единицы:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \arrow[r, "id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} u"] \arrow[d, "R^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \arrow[d, "*_{A,\mathbb{1}_{\mathcal{C}}}"] \\
\mathcal{F}A & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "\mathcal{F}(R^{\mathcal{C}}_{A})"]
\end{tikzcd}$$

Определение 23. *Тензорно-сильный функтор – это эндофунктор над моноидальной категорией с дополнительным естественным преобразованием и условиями когерентности для него (ниже соответствующие коммутирующие диаграмы):*

$$\tau_{A,B} : A \otimes \mathcal{K}B \to \mathcal{K}(A \otimes B)$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes \mathcal{K}C \arrow[rr, "\tau_{A\otimes B,C}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,\mathcal{K}C}"'] & & \mathcal{K}((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "\mathcal{K}(\alpha_{A,B,C})"] \\
A \otimes (B \otimes \mathcal{K}C) \arrow[r, "id_A \otimes \tau_{B,C}"'] & A \otimes \mathcal{K}(B \otimes C) \arrow[r, "\tau_{A,(B\otimes C)}"'] & \mathcal{K}(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes \mathcal{K}A \arrow[r, "\mu_{\mathbb{1},A}"] \arrow[dr, "R_{\mathcal{K}A}"'] & \mathcal{K}(\mathbb{1} \otimes A) \arrow[d, "\mathcal{K}(R_A)"] \\
& \mathcal{K}A
\end{tikzcd}$$

Определение 24. *Аппликативный функтор*

Аппликативный функтор – это тройка $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$, где $\mathcal{C}$ – это моноидальная категория, $\mathcal{K}$ - это тензорно-сильный нестрогий моноидальный эндофунктор и $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$ – это естественное преобразование, такое, что:

- $u = \eta_{\mathbb{1}}$;
- $*_{A,B} \circ (\eta_A \otimes \eta_B) = \eta_{A\otimes B}$, *то есть диаграмма коммутирует:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\eta_A \otimes \eta_B"] \arrow[dr, "\eta_{A\otimes B}"'] & \mathcal{K}A \otimes \mathcal{K}B \arrow[d, "*_{A,B}"] \\
& \mathcal{K}(A \otimes B)
\end{tikzcd}$$

- $\tau_{A,B} = *_{A,B} \circ \eta_A \otimes id_{\mathcal{K}B}$.

По умолчанию мы будем рассматривать ниже аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией.

4 Глоссарий по основным конструкциям функционального языка программирования Haskell: функторы, монады, аппликативные функторы

Определение 25. *Класс типов*

Классом типов в языке Haskell – это реализация некоторого общего интерфейса для совокупности типов.

Представителем (или наследников) класса типов называется реализация данного класса для конкретного типа.

Определение 26. *Функтор*

Функтор – это однопараметрический класс типов, позволяющий пронести действие функции через значения, полученные в результате применения к их типу одноместного типового оператора.

Определение в стандартной библиотеке выглядит следующим образом:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

Рассмотрим примеры:

- Список (неограниченная в длине последовательность) является функтором: Определение в стандартной библиотеке выглядит следующим образом:

  ```
  instance Functor [] where
    fmap :: (a -> b) -> [a] -> [b]
    fmap f [] = []
    fmap f (x:xs) = (f x) : (fmap f xs)
  ```

  Данный пример достаточно прост: реализация функтора для списка – это функция высшего порядка, которая, принимая на входе одноместную функцию из типа a в тип b и список элементов типа a, возвращает список элементов типа b, который получен применением функции к каждому элементу списка, полученного на вход.

- Пара (тип декартова произведения типов) также функтор:

  ```
  instance Functor (b,) where
    fmap :: (a -> c) -> (b,a) -> (b,c)
    fmap f (x,y) = (x, f y)
  ```

  Конструктор пары является двухпараметрическим типовым оператором, но мы сделали из него однопараметрический оператор фиксацией первого параметра.

  Данная реализация также довольно проста: на вход принимается функция из типа a в тип c и кортеж, в котором первая координата имеет тип b, а вторая – тип a. На выходе мы получаем кортеж типа (b, c), применяя полученную на вход функцию ко второй координате пары.

- Тип $Maybe$ – это однопараметрический типовой оператор, для обработки неопределенных значений:

  ```haskell
  data Maybe a = Nothing | Just a
  ```

  Реализация функтора для типа $Maybe$:

  ```haskell
  instance Functor Maybe where
    fmap :: (a -> b) -> Maybe a -> Maybe b
    fmap f Nothing = Nothing
    fmap f (Just x) = Just (f x)
  ```

  Если второй аргумент является неопределенным значением (на вход передан $Nothing$), то и возвращается $Nothing$. Если же значение определено, то есть оно имеет вид $Just\,x$, тогда мы применяем функцию функцию к x, а результат вычисления оборачиваем в конструктор $Just$.