Теоретико-категорная семантика модальной теории типов, основанной на интуиционистской эпистемической логике

1 Предварительные замечания и определения

1.1 Глоссарий по основным конструкциям функционального языка программирования Haskell: функторы, монады, аппликативные функторы

Определение 1. *Класс типов*

Классом типов в языке Haskell – это реализация некоторого общего интерфейса для совокупности типов.

Представителем (или наследников) класса типов называется реализация данного класса для конкретного типа.

Определение 2. *Функтор*

Функтор – это однопараметрический класс типов, позволяющий пронести действие функции через значения, полученные в результате применения к их типу одноместного типового оператора.

Определение в стандартной библиотеке выглядит следующим образом:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

Рассмотрим примеры:

- Список (неограниченная в длине последовательность) является функтором: Определение в стандартной библиотеке выглядит следующим образом:

  ```
  instance Functor [] where
    fmap :: (a -> b) -> [a] -> [b]
    fmap f [] = []
    fmap f (x:xs) = (f x) : (fmap f xs)
  ```

  Данный пример достаточно прост: реализация функтора для списка – это функция высшего порядка, которая, принимая на входе одноместную функцию из типа a в тип b и список элементов типа a, возвращает список элементов типа b, который получен применением функции к каждому элементу списка, полученного на вход.

- Пара (тип декартова произведения типов) также функтор:

```haskell
instance Functor (b,) where
  fmap :: (a -> c) -> (b,a) -> (b,c)
  fmap f (x,y) = (x, f y)
```

Конструктор пары является двухпараметрическим типовым оператором, но мы сделали из него однопараметрический оператор фиксацией первого параметра.

Данная реализация также довольно проста: на вход принимается функция из типа a в тип c и кортеж, в котором первая координата имеет тип b, а вторая – тип a. На выходе мы получаем кортеж типа (b, c), применяя полученную на вход функцию ко второй координате пары.

- Тип $Maybe$ – это однопараметрический типовой оператор, для обработки неопределенных значений:

  ```haskell
  data Maybe a = Nothing | Just a
  ```

  Реализация функтора для типа $Maybe$:

  ```haskell
  instance Functor Maybe where
    fmap :: (a -> b) -> Maybe a -> Maybe b
    fmap f Nothing = Nothing
    fmap f (Just x) = Just (f x)
  ```

  Если второй аргумент является неопределенным значением (на вход передан $Nothing$), то и возвращается $Nothing$. Если же значение определено, то есть оно имеет вид $Just\, x$, тогда мы применяем функцию функцию к x, а результат вычисления оборачиваем в конструктор $Just$.

1.2 Приложение А. Глоссарий по теории категорий.

Определение 3. *Категория $\mathcal{C}$ состоит из:*

- *Класса объектов $Ob_{\mathcal{C}}$;*
- *Для любых объекта $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$ определено множество стрелок (или морфизмов) из A в B $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$;*
- *Если $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, то $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$;*
- *Для любого объекта $A \in Ob_{\mathcal{C}}$, определен тождественный морфизм $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$;*
- *Для любой стрелки $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, для любой стрелки $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ и для любой стрелки $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*
- *Для любой стрелки $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \circ id_A = f$ и $id_B \circ f = f$.*

Примеры категорий:

- Set – категория всех множеств, объекты – класс всех множеств, морфизмы – теоретико-множественные функции;
- $Group$ – категория всех групп, морфизмы которой – гомоморфизмы групп;
- Пусть $\langle A, \leq \rangle$ – частично-упорядоченное множество; Тогда $\langle A, \leq \rangle$ – это категория, объекты которой – элементы множества A, а морфизмы определяются порядком: $a \to b$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$, для $a, b \in A$;
- Top – категория топологических пространств и непрерывных отображений между ними.
- Каждый моноид $\langle M, \cdot, e \rangle$ является категорией: моноид можно определять как категорию с одним объектом.

Определение 4. *Функтор*

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ – категории. Функтором называется отображение $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, такое, что:

- *$F : A \mapsto FA$, где $A \in Ob_{\mathcal{C}}$;*
- *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;*
- *$F(id_A) = id_{FA}$.*

Примеры функторов:

- Булеан множества является эндофунктором $\mathcal{P}() : Set \Rightarrow Set$.
- Пусть $AssocRing$ – категория ассоциативных колец, $Semi$ – категория полугрупп. $F : AssocRing \Rightarrow Semi$ – забывающий функтор, который берет кольцо $\langle A, +, \cdot \rangle$ “стирает” аддитивную структуру кольца, оставляя при этом мультипликативную, и возвращает полугруппу $\langle A, \cdot \rangle$;
- Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ – группа. Коммутантом группы G называется называется группа $[G, G] = \{x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} | x, y \in G\}$. Легко проверить, что коммутант функториален: гомоморфизм групп переводится в гомоморфизм между порожденными им коммутантами, сохраняя при этом композицию гоморфзимов и тождественный гомоморфизм;

- Гомоморфизм моноидов является функтором (поскольку каждый моноид является категорией).

Определение 5. *Естественное преобразование Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – функторы. Естественным преобразованием $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ называется такое индексированное семейство стрелок $(\alpha_X)_{X \in Ob_\mathcal{C}}$, что для любых $A, B \in Ob_\mathcal{C}$, для любой стрелки $f \in Hom_\mathcal{C}(A, B)$, диаграмма коммутирует:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & \mathcal{F}B \arrow[d, "\alpha_B"] \\
\mathcal{G}A \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}$$

Определение 6. *Моноидальная категория*

Моноидальная категория – это категория $\mathcal{C}$ с дополнительной структурой:

- *Бифунктор $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to C$, который мы будем называть тензором;*
- *Единица $\mathbb{1}$;*
- *Изоморфизм, который мы будем называть ассоциатором: для любых $A, B, C \in Ob_\mathcal{C}, \alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$;*
- *Изоморфизм $L_A : \mathbb{1} \otimes A \cong A$;*
- *Изоморфизм $R_A : A \otimes \mathbb{1} \cong A$;*
- *Первое условие когерентности (пятиугольник Маклейна) (данная диаграмма коммутирует):*

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C}\otimes id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "id_A\otimes\alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

- *Второе условие когерентности (тождество треугольника):*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes \mathbb{1}) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathbb{1},B}"] \arrow[dr, "R_A\otimes id_B"'] & & A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \arrow[dl, "id_A\otimes L_B"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Определение 7. *Декартово замкнутая категория*

Декартово замкнутая категория – это категория с терминальным объектом, произведениями и экспоненцированием:

1) Объект $\mathbb{1}$ в категории $\mathcal{C}$ называется терминальных, если для любого объекта $A \in Ob_\mathcal{C}$ и для любых морфизмов $f, g \in Hom_\mathcal{C}(A, 1)$, $f = g$.

2) Пусть $A, B \in Ob_\mathcal{C}$, тогда произведением объектов A и B называется объект $A \times B$, такой, для любого $C \in Ob_\mathcal{C}$ и для любых морфизмов $f \in Hom_\mathcal{C}(C, A)$ и $g \in Hom_\mathcal{C}(C, B)$, что диаграмма коммутирует:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "f"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Морфизм $\langle f, g\rangle$ называется парой морфизмов f и g, а морфизмы вида π_1 и π_2 – каноническими проекциями.

3) Пусть $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$, тогда экспонентой объектов A и B называется объект B^A, такой, что диаграмма коммутирует для любого объекта $C \in Ob_{\mathcal{C}}$ и для любого морфизма $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$:

$$
\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\epsilon_{A,B}"] & B \\
C \times A \arrow[u, "\Lambda(f)\times id_A"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Морфизмы вида $\epsilon_{A,B}$ называются вычисляющими стрелками, а морфизмы вида $\Lambda(f)$ – каррированием стрелки f.

Примеры декартово замкнутых категорий:

- Категория всех множеств Set: терминальный объект – любой синглетон, произведение – декартово произведение, экспоненциальный объект – множество $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$;
- Пусть A – алгебра Гейтинга, тогда терминальным объектом будет верхний элемент множества A, произведение – точная нижняя грань, экспоненциальный объект – импликация;
-

Определение 8. *Моноидальный функтор*

Пусть $\langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}}\rangle$ и $\langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}}\rangle$ моноидальные категории.

Моноидальный функтор $\mathcal{F} : \langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}\rangle \to \langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}'\rangle$ это функтор $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ с дополнительными естественными преобразованиями:

- $u : \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$;
- $*_{A,B} : \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B \to \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B)$.

и условиями когерентности:

- *Ассоциативность:*

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C \arrow[r, "\alpha^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}"] \arrow[d, "*_{A,B} \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}B}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{F}B \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C) \arrow[d, "id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} *_{B,C}"] \\
\mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C} \arrow[d, "*_{A \otimes_{\mathcal{C}} B, C}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B \otimes_{\mathcal{C}} C) \arrow[d, "*_{A, B \otimes_{\mathcal{C}} C}"] \\
\mathcal{F}((A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{C}} C) \arrow[r, "\mathcal{F}(\alpha^{\mathcal{C}}_{A,B,C})"'] & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} (B \otimes_{\mathcal{C}} C))
\end{tikzcd}
$$

- *Свойство левой единицы:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}A \arrow[r, "u \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}A}"] \arrow[d, "L^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A}"'] & \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}A \arrow[d, "*_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}}, A}"] \\
\mathcal{F}A & \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} A) \arrow[l, "\mathcal{F}(L^{\mathcal{C}}_A)"']
\end{tikzcd}
$$

- *Свойство правой единицы:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \arrow[r, "id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} u"] \arrow[d, "R^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \arrow[d, "*_{A,\mathbb{1}_{\mathcal{C}}}"] \\
\mathcal{F}A & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \arrow[l, "\mathcal{F}(R^{\mathcal{C}}_A)"]
\end{tikzcd}
$$

Определение 9. *Аппликативный функтор*

Аппликативный функтор – это тройка $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$, где $\mathcal{C}$ – это моноидальная категория, $\mathcal{K}$ - это моноидальный эндофунктор и $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$ – это естественное преобразование, такое, что:

- $u = \eta_{\mathbb{1}}$;

- $*_{A,B} \circ (\eta_A \otimes \eta_B) = \eta_{A \otimes B}$, *то есть диаграмма коммутирует:*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\eta_A \otimes \eta_B"] \arrow[dr, "\eta_{A \otimes B}"'] & \mathcal{K}A \otimes \mathcal{K}B \arrow[d, "*_{A,B}"] \\
& \mathcal{K}(A \otimes B)
\end{tikzcd}
$$

По умолчанию мы будем рассматривать ниже аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией.

2 Введение

2.1 Обзор имеющихся результатов

Модальная теория типов – относительная молодая область современной математической логики, изучающая конструктивные модальные логики с точки зрения программных вычислений, в котором каждому объекту, участвующему в вычислительной процедуре приписан свой тип данных, представляющий тот или иной объект.

Если в обычной теории типов, рассматриваются системы типов, соответствующие по Карри-Говарду, интуиционистским логикам (исчисление высказываний, исчисление высказываний второго порядка, исчисления предикатов первого или высших порядков, и т.д.), то в модальной теории типов изучатся системы типов, изоморфные по Карри-Говарду, интуиционистским модальным логикам.

2.2 Задача исследования

2.2.1 Логика $\mathbf{IEL}^-$

Модальная интуиционистская логика IEL^- была предложена С. Артемовым и Т. Протопопеску [?]. IEL^- предлагает свою формальную теорию интуиционистских убеждений, согласанную с BHK-семантикой интуиционистской логики.

Неформально $\mathbf{K}A$ означает, что A верифицировано интуиционистки.

Логика IEL^- следующими схемами аксиом и правилами вывода:

Определение 10. *Intuitionistic epistemic logic IEL:*

1) Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний;

2) $\mathbf{K}(A \to B) \to (\mathbf{K}A \to \mathbf{K}B)$ *(нормальность);*

3) $A \to \mathbf{K}A$ *(ко-рефлексия);*

Правило вывода: MP.

Легко видеть, что правило усиления в этой логике является производным.

В. Крупский и А. Ятманов построили секвенциальное исчисление для логики IEL ($\mathrm{IEL}^- + \mathbf{K}A \to \neg\neg A$) и показали, что задача поиска вывода в данной логике PSPACE-полна [?].

2.2.2 Мотивация из функционального программирования

Функциональные языки программирования, такие, как Haskell [?], Idris [?], Purescript [?] или Elm [?] содержат специальные классы типов [1] для вычислений с типами, вложенных в вычислительных контекст. Основные и наиболее интересные нам классы типов: `Functor` и `Applicative` [2]:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b


class Functor f => Applicative f where
  pure :: a -> f a
  (<*>) :: f (a -> b) -> f a -> f b
```

[1] Класс типов – это общий интерфейс (наличие одних и тех же методов) для специальной группы типов данных.

[2] Читатель может более подробно узнать о данной разновидности вычислений в стандартной библиотеке языка [?] или в следующей книге [?]

Вычислительным контекстом (или *контейнером*) мы называем оператор над типами f, где f – это "функция" из $*$ в $*$: типовой оператор берет простой тип (имеющий сорт $*$) и возвращает другой простой тип сорта $*$. Более подробное описание системы типов с сортами, используемая для этих целей в Haskell, описана здесь [?].

Applicative functor allows to generalize the action of a functor for functions with arbitrary number of arguments, for instance:

```
liftA2 :: Applicative f => (a -> b -> c) -> f a -> f b -> f c
liftA2 f x y = ((pure f) <*> x) <*> y
```

It's not difficult to see that modal axioms in IEL^- and types of the methods of Applicative class in Haskell-like languages (which is described below) are syntactically similar and we are going to show that this coincidence has a non-trivial computational meaning.

We investigate the relationship between intuitionistic epistemic logic IEL$^-$ and applicative programming with side-effects by constructing the type system (which is called $\lambda_{\mathbf{K}}$) which is Curry-Howard isomorphic to IEL^-. So we will consider **K**-modality as an arbitrary applicative functor and we prove that obtained type system is sound and complete for applicative functor on cartesian closed category (using the categorical definition proposed by Paterson [?]).

$\lambda_{\mathbf{K}}$ consists of the rules for simply typed lambda-calculus and special typing rules for lifting types into the applicative functor **K**. We assume that our type system will axiomatize the simplest case of computation with effects with one container. We provide a proof-theoretical view at this kind of computations in functional programming and prove strong normalization and confluence.

3 Модальное λ-исчисление, основанное на исчислении $\mathbf{IEL}^-$

Определим натуральное исчисление для IEL^- :

Определение 11. *Натуральное исчисление $NIEL^-$ для интуиционистской эпистемической логики IEL^- – это расширение натурального исчисления для интуиционистской логики высказываний с добавлением следующих правил вывода для модальности:*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Box A}\Box_I \qquad \frac{\Gamma \vdash \Box A_1, \ldots, \Gamma \vdash \Box A_n \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash B}{\Gamma \vdash \Box B}$$

Первое правило позволяет выводить ко-рефлексию. Второе модальное правило – это аналог для правила $\Box_I$ в натуральном исчислении для конструктивной K (see [?]) без $\Diamond$.

Мы будем обозначать $\Gamma \vdash \Box A_1, \ldots, \Gamma \vdash \Box A_n$ и $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ соответственно как $\Gamma \vdash \mathbf{K}\vec{A}$ и $\vec{A} \vdash B$ для краткости.

Лемма 1. $\Gamma \vdash_{NIEL^-} A \Rightarrow IEL^- \vdash \bigwedge \Gamma \to A$.

Доказательство. Индукция по построению вывода. Рассмотрим модальные случаи.

1) Если $\Gamma \vdash_{\mathrm{NIEL}^-} A$, тогда $\mathrm{IEL}^- \vdash \bigwedge \Gamma \to \Box A$.

(1)	$\bigwedge \Gamma \to A$	предположение индукции
(2)	$A \to \Box A$	ко-рефлексия
(3)	$(\bigwedge \Gamma \to A) \to ((A \to \Box A) \to (\bigwedge \Gamma \to \Box A))$	теорема IEL^-
(4)	$(A \to \Box A) \to (\bigwedge \Gamma \to \Box A)$	из (1), (3) и MP
(5)	$\bigwedge \Gamma \to \Box A$	из (2), (4) и MP

2) Если $\Gamma \vdash_{\mathrm{NIEL}^-} \Box\vec{A}$ и $\vec{A} \vdash B$, то $\mathrm{IEL}^- \vdash \bigwedge \Gamma \to \Box B$.

(1)	$\bigwedge \Gamma \to \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \Box A_i$	предположение индукции
(2)	$\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \Box A_i \to \Box \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i$	теорема IEL^-
(3)	$\bigwedge \Gamma \to \Box \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i$	по (1), (2) и правилу силлогизма
(4)	$\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B$	предположение индукции
(5)	$(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B) \to \Box(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B)$	ко-рефлексия
(6)	$\Box(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to B)$	из (4), (5) и MP
(7)	$\Box \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \to \Box B$	по (6) и по нормальности
(8)	$\bigwedge \Gamma \to \Box B$	по (3), (7) и правилу силлогизма

$\Box$

Лемма 2. *Если $IEL^- \vdash A$, то $NIEL^- \vdash A$.*

Доказательство. Построение выводов для модальных аксиом в NIEL^-. Мы рассмотрим эти выводы ниже с использованием термов. $\Box$

Далее мы построим типизированное λ-исчисление по фрагменту NIEL^- с правилами для импликации, конъюнкции и модальности. Данный фрагмент экивалентен IEL^- без аксиом для отрицания и дизъюнкции, что элементарно проверяется аналогично.

Определим термы и типы:

Определение 12. *Множество термов:*

Пусть $\mathbb{V}$ *счетное множество переменных. Термы* $\Lambda_{\mathbf{K}}$ *порождается следующей грамматикой:*

$$\Lambda_{\mathbf{K}} ::= \mathbb{V} \mid (\lambda\mathbb{V}.\Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\Lambda_{\mathbf{K}}\Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\Lambda_{\mathbf{K}}, \Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\pi_1\Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\pi_2\Lambda_{\mathbf{K}}) \mid$$
$$(\mathbf{pure}\ \Lambda_{\mathbf{K}}) \mid (\mathbf{let\ pure}\, \mathbb{V}^* = \Lambda_{\mathbf{K}}^* \,\mathbf{in}\, \Lambda_{\mathbf{K}})$$

Где $\mathbb{V}^*$ и $\Lambda_{\mathbf{K}}^*$ обозначают множество всех конечных последовательностей переменных $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathbb{V}^i$ и множество всех конечных последовательностей термов $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} {\Lambda_{\mathbf{K}}}^i$. Последовательность переменных $\vec{x}$ и последовательность термов $\vec{M}$ в терме вида **let pure** должны иметь одинаковую длину. Иначе терм не будет правильно построенным.

Определение 13. *Множество типов:*

Пусть $\mathbb{T}$ *– это счетное множество атормарных типов. Типы* $\mathbb{T}_{\mathbf{K}}$ *с типовым оператором* $\Box$ *порождаются следующей грамматикой:*

$$\mathbb{T}_{\mathbf{K}} ::= \mathbb{T} \mid (\mathbb{T}_{\mathbf{K}} \to \mathbb{T}_{\mathbf{K}}) \mid (\mathbb{T}_{\mathbf{K}} \times \mathbb{T}_{\mathbf{K}}) \mid (\Box\mathbb{T}_{\mathbf{K}}) \tag{1}$$

Контекст, его домен и кодомен определены стандартно [?][?].

Наша система состоит из следующих правил типизации в стиле Карри:

Определение 14. *Модальное* λ*-исчисление, основанное на исчислении IEL*$^-$*:*

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ ax$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : A \times B} \times_i \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M : A_i} \times_e,\ i \in \{1, 2\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\ M : \mathbf{K}A} \Box_I \qquad \frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}\ let_{\Box}$$

Правило типизации $\Box$ аналогично правилу $\bigcirc_I$ в монадическом метаязыке [?].

$\Box_I$ позволяет вкладывать объект типа A в текущиц вычислительный контекст, изменяя его тип на $\Box A$.

Правило типизации $\text{let}_{\Box}$ аналогично правилу $\Box$-правилу в модальном λ-исчислении для интуционистской минимальной нормальной модальной логики **IK** [?].

$\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A}$ – это синтаксический сахар для $\Gamma \vdash M_1 : \Box A_1, \ldots, \Gamma \vdash M_n : \Box A_n$ и $\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B$ – это краткая форма для $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash N : B$. $\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N$ – это мгновенное локальное связывание в терме N. Мы будем использовать такую краткую форму вместо $\mathbf{let\ pure}\, x_1, \ldots, x_n = M_1, \ldots, M_n\ \mathbf{in}\ N$.

Примеры выводов:

$$\dfrac{\dfrac{x : A \vdash x : A}{x : A \vdash \mathbf{pure}\, x : \square A}}{\vdash (\lambda x.\mathbf{pure}\, x) : A \to \square A}$$

$$\dfrac{\dfrac{f : \square(A \to B) \vdash f : \square(A \to B) \qquad x : \square A \vdash x : \square A \qquad \dfrac{g : A \to B \vdash g : A \to B \qquad y : A \vdash y : A}{g : A \to B, y : A \vdash gy : B}\to_e}{\dfrac{f : \square(A \to B), x : \square A \vdash \mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\ \mathbf{in}\ gy : \square B}{f : \square(A \to B) \vdash \lambda x.\mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\ \mathbf{in}\ gy : \square A \to \square B}}\mathrm{let}_{\mathbf{K}}}{\vdash \lambda f.\lambda x.\mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\ \mathbf{in}\ gy : \square(A \to B) \to \square A \to \square B}$$

Определим свободные переменные, подставновку, β-редукцию и η-редукцию. Многошаговая β-редукция и $\beta\eta$-эквивалентность определены стандартно:

Определение 15. *Множество свободных переменных $FV(M)$ для произвольного терма M:*

1) $FV(x) = \{x\}$;

2) $FV(\lambda x.M) = FV(M) \backslash \{x\}$;

3) $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$;

4) $FV(\langle M, N\rangle) = FV(M) \cup FV(N)$;

5) $FV(\pi_i M) \subseteq FV(M)$, $i \in \{1, 2\}$;

6) $FV(pure\ M) = FV(M)$;

7) $FV(\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \ \mathbf{in}\ \ N) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} FV(M)$, *где* $n = |\vec{M}|$.

Во избежание лишних коллизий мы будем полагать, что если терм вида $\mathbf{let\ pure}\, x = (\mathbf{let\ pure}\, \vec{y} = \vec{N}\ \mathbf{in}\ P)\ \mathbf{in}\ M$ типизируется, то x не содержится в $\vec{y}$, то есть последовательное применение локальных связываний требует на каждом шаге различных переменных.

Определение 16. *Подстановка:*

1) $x[x := N] = N$, $x[y := N] = x$;

2) $(MN)[x := N] = M[x := N]N[x := N]$;

3) $(\lambda x.M)[x := N] = \lambda x.M[y := N]$, $y \in FV(M)$;

4) $(M, N)[x := P] = (M[x := P], N[x := P])$;

5) $(\pi_i M)[x := P] = \pi_i(M[x := P])$, $i \in \{1, 2\}$;

6) $(\mathbf{pure}\, M)[x := P] = \mathbf{pure}\,(M[x := P])$;

7) $(\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N)[y := P] = \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = (\vec{M}[y := P])\ \mathbf{in}\ N$.

Определение 17. *Правила β-редукции и η-редукции:*

1) $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$;

2) $\pi_1\langle M, N\rangle \to_\beta M$;

3) $\pi_2\langle M, N\rangle \to_\beta N$;

4) $\mathbf{let\ pure}\, \vec{x}, y, \vec{z} = \vec{M}, \mathbf{let\ pure}\, \vec{w} = \vec{N}\ \mathbf{in}\ Q, \vec{P}\ in\ R \to_{\beta\square}$
$\mathbf{let\ pure}\, \vec{x}, \vec{w}, \vec{z} = \vec{M}, \vec{N}, \vec{P}\ \mathbf{in}\ R[y := Q]$

5) $\mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \mathbf{pure}\, \vec{M}\ \mathbf{in}\ N \to_{\beta\square\mathbf{pure}} \mathbf{pure}\, N[\vec{x} := \vec{M}]$

6) $\mathbf{let\ pure}\ \_\_ = \_\_\ \mathbf{in}\ M \to_{\beta\mathbf{nec}} \mathbf{pure}\, M$, *где* $\_\_$ *– это пустая последовательность термов.*

7) $\lambda x.fx \to_\eta f$;

8) $\langle \pi_1 P, \pi_2 P\rangle \to_\eta P$;

9) $\mathbf{let\ pure}\, x = M\ \mathbf{in}\ x \to_{\square id} M$;

Мы будет писать $M \to_r N$, если терм M редуцируется к терму N по одному из перечисленных выше правил.

По умолчанию мы используем стратегию вычисления с вызовом по имени.

Докажем стандартные леммы о контекстах [3]:

Лемма 3. *Инверсия отношения типизации* $\Box_I$.

Пусть $\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A$, *тогда* $\Gamma \vdash M : A$;

Доказательство. Очевидно. $\Box$

Лемма 4. *Базовые леммы.*

- *Если* $\Gamma \vdash M : A$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta$, *тогда* $\Delta \vdash M : A$;
- *Если* $\Gamma \vdash M : A$, *тогда* $\Delta \vdash M : A$, *где* $\Delta = \{x_i : A_i \mid (x_i : A_i) \in \Gamma \,\&\, x_i \in FV(M)\}$
- *Если* $\Gamma, x : A \vdash M : B$ *и* $\Gamma \vdash N : A$, *где* $\Gamma \vdash M[x := N] : B$.

Рассмотрим случаи для правила $\mathrm{let}_\Box$.

Доказательство.

1) Пусть вывод заканчивается следующим правилом:

$$\frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}\ \mathrm{let}_\Box$$

По предположению индукции $\Delta \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}$, тогда $\Delta \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B$.

Случаи 2)–3) рассматриваются аналогично.

$\Box$

Теорема 1. *Редукция субъекта*

Если $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $\Gamma \vdash N : A$

Доказательство. Индукция по выводу $\Gamma \vdash M : A$ и по порождению $\to_{\beta\eta}$.

Случаи с функцией и парами рассмотрены здесь [?] [?].

1) Если $\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x}, y, \vec{z} = \vec{M}, \mathbf{let\ pure}\, \vec{w} = \vec{N}\ \mathbf{in}\ Q, \vec{P}\ \mathbf{in}\ R : \Box B$, тогда $\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x}, \vec{w}, \vec{z} = \vec{M}, \vec{N}, \vec{P}\ \mathbf{in}\ R[y := Q] : \Box B$ по правилу 4).

2) Если $\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, x = M\ \mathbf{in}\ x : \Box A$, тогда $\Gamma \vdash M : \mathbf{K}A$ по правилу 9).

Рассмотрено здесь [?].

3) Пусть вывод заканчивается применением следующего правила

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\, \vec{x} = \mathbf{pure}\, \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}$$

Тогда $\Gamma \vdash \vec{M} : \vec{A}$ по инверсии отношения типизации для $\Box_I$ и $\Gamma \vdash N[\vec{x} := \vec{M}] : B$ по лемме 4, часть 3.

Тогда мы можем преобразовать данный вывод в следующий:

[3] Мы не будем рассматривать случаи для стандартных связок, так как они уже доказаны для просто типизированного λ-исчисления [?] [?]. Мы будем рассматривать только модальные случаи

$$\frac{\Gamma \vdash N[\vec{x} := \vec{M}] : B}{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, N[\vec{x} := \vec{M}] : \Box B}\ \Box_I$$

4) Пусть вывод заканчивается применением правила $let_\Box$ для типового объявления, выводимого из пустого контекста:

$$\frac{\vdash M : A}{\vdash \mathbf{let\ pure}\ \_\_ = \_\_\ \mathbf{in}\ M : \Box A}$$

Тогда, если $\vdash M : A$, тогда $\vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A$.

Данное рассуждение действует также и в обратную сторону. ☐

Теорема 2.

$\twoheadrightarrow_r$ сильно нормализуемо;

Доказательство.

Мы модифицируем технику Тэйта с логическими отношениями для модальностей [?] [?].

Определение 18. *Множества строго вычислимых термов:*

- $SC_A = \{M : A \mid M$ *сильно нормализуем* $\}$ *for* $A \in \mathbb{T}$;
- $SC_{A \to B} = \{M : A \to B \mid \forall N \in SC_A, MN \in SC_B\}$, *длф* $A, B \in \mathbb{T}_{\mathbf{K}}$ *и* $A, B \in \mathbb{T}_{\mathbf{K}}$;
- $SC_{\Box A} = \{M : \mathbf{K}A \mid M$ *сильно нормализуем* $\}$ *для атомарного типа* A;
- $SC_{\Box A} = \{M : \Box A \mid \forall B \in \mathbb{T}_{\mathbf{K}}, (N \in SC_B \Rightarrow \mathbf{let\ pure}\, x = M\ \mathbf{in}\ N \in SC_{\Box B})\}$ *для составного типа* A.

Заметим, что определение $SC_{\Box A}$ для составного типа A в указанном виде справедливо для терма N с одной свободной переменной x. Если в терме N больше одной свободной переменной, тогда мы рассматриваем вектор $\langle M_1, \ldots, M_n \rangle$, каждый из элементов которого принадлежит соотвествующему множеству строго вычислимых термов, согласованному с определением $SC_{\Box A}$ для составного типа A.

Лемма 5.

Для любого типа A, если $M \in SC_A$, тогда M сильно нормализуем.

Доказательство.

Индукция по длине A.

1) Если A атомарный и $M \in SC_A$, тогда утвержение непосредственно следует из определения множества строго вычислимых термов. Аналогично для $M \in SC_{\Box A}$, где A – атомарный тип.

2) Пусть $M \in SC_{\Box A}$ и $N \in SC_B$, тогда $\mathbf{let\ pure}\, x = M\ \mathbf{in}\ N \in SC_{\Box B}$, который сильно нормализуем по предположению индукции, тогда и нормализуем и M, в противном случае существовал бы бесконечный редукционный путь в $\mathbf{let\ pure}\, x = M\ \mathbf{in}\ N$. ☐

Лемма 6.

- *Если $M \in SC_A$, то* $\mathbf{pure}\, M$ *сильно нормализуем.*
- *Если M сильно нормализуем, то* $\mathbf{pure}\, M$ *сильно нормализуем.*

Доказательство.

1) Индукция по длине A.

2) Напрямую следует из леммы 5 и первого пункта данной леммы. ☐

Лемма 7.

Если $M \in SC_A$ и $M \to_r N$, тогда и только тогда, когда $N \in SC_A$.

Доказательство.

Индукция по длине A.

1) Пусть A атомарный, тогда случаи для SC_A и $SC_{\Box A}$ очевидны.

2) Пусть $M \in SC_{\Box A}$ и $N \in SC_B$ и при этом $M \to_r P$.

По определению $SC_{\Box A}$, $\textbf{let pure}\, x = M\ in\ N \in SC_{\Box B}$.

По предположению индукции, $\textbf{let pure}\, x = M \textbf{ in } N \to_r \textbf{let pure}\, x = P \textbf{ in } N$, тогда $\textbf{let pure}\, x = P \textbf{ in } N \in SC_{\Box B}$, откуда $P \in SC_{\Box A}$.

3) Пусть $M \in SC_A$ и $M \to_r N$. Тогда $\textbf{pure}\, M \in SC_{\Box A}$ и $\textbf{pure}\, M \to_r \textbf{pure}\, N$, тогда $N \in SC_{\Box A}$.

Рассуждение в обратную сторону проводится симметрично.

□

Лемма 8.

Пусть $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$ и для любых $i, M_i \in SC_{A_i}$, тогда $M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_A$.

Доказательство.

Индукция по построению $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$.

1) Пусть вывод заканчивается применением правила $\Box_I$:

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \textbf{pure}\, M : \Box A}\ \Box_I$$

По предположению индукции $M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_A$, тогда $\textbf{pure}\, M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_{\Box A}$.

2) Пусть вывод заканчивается применением правила $\text{let}_{\mathbf{K}}$.

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \vec{M'} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash \textbf{let pure}\, \vec{x} = \vec{M'} \textbf{ in } N : \Box B}\ \text{let}_{\Box}$$

По предположению индукции $i \in \{1, \ldots, \text{length}(\vec{M'})\}$, $M_i'[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \in SC_{\Box A_i}$.

Тогда $\textbf{let pure}\, \vec{x} = \vec{M'}[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n] \textbf{ in } N \in SC_{\Box B}$, иначе мы имели бесконечный путь редукций в терме $\vec{M'}[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n]$. □

Следствие 1. *Все термы строго вычислимы, следовательно, сильно нормализуемы.*

□

Теорема 3. *Свойство Черча-Россера*

$\twoheadrightarrow_r$ конфлюентно.

Доказательство. По лемме Ньюмана, если отношение сильно нормализуемо и локально конфлюентно, то отношение конфлюентно.

Достаточно показать локальную конфлюентность.

Лемма 9. *Локальная конфлюентность.*

Если $M \to_r N$ и $M \to_r Q$, тогда найдется такой терм P, что $N \twoheadrightarrow_r P$ и $Q \twoheadrightarrow_r P$.

Доказательство. Рассмотрим следующий набор критических пар и покажем, что оба терма из данной пары редуцируются к одному и тому же терму:

1) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \textbf{let pure}\ x = (\textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ \vec{M}\ \textbf{in}\ N)\ \textbf{in}\ x \arrow[dl, "\Box\mathbf{id}"'] \arrow[dr, "\beta\Box"] & \\ \textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ \vec{M}\ \textbf{in}\ N & & \textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ M\ \textbf{in}\ N \end{tikzcd}$$

$\textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ \vec{M}\ \textbf{in}\ N \to_{\beta\Box\mathbf{pure}} \textbf{pure}\ N[\vec{y} := \vec{M}]$

2) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \textbf{let pure}\ x = (\textbf{let pure}\ y = \textbf{pure}\ M\ \textbf{in}\ y)\ \textbf{in}\ N \arrow[dl, "\Box\mathbf{id}"'] \arrow[dr, "\beta\Box"] & \\ \textbf{let pure}\ x = \textbf{pure}\ M\ \textbf{in}\ N & & \textbf{let pure}\ y = \textbf{pure}\ M\ \textbf{in}\ N[x := y] \end{tikzcd}$$

$\textbf{let pure}\ x = \textbf{pure}\ M\ \textbf{in}\ N$

$\to_{\beta\Box\mathbf{pure}} \textbf{pure}\ N[x := M]$

$\textbf{let pure}\ y = \textbf{pure}\ M\ \textbf{in}\ N[x := y]$

$\to_{\beta\Box\mathbf{pure}} (\textbf{pure}\ N[x := y])[y := M] \equiv \textbf{pure}\ N[x := M]$

3) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \textbf{let pure}\ x = (\textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ \vec{N}\ \textbf{in}\ P)\ \textbf{in}\ M \arrow[dl, "\beta\Box"'] \arrow[dr, "\beta\Box\mathbf{pure}"] & \\ \textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ \vec{N}\ \textbf{in}\ M[x := P] & & \textbf{let pure}\ x = \textbf{pure}\ P[\vec{y} := \vec{N}]\ \textbf{in}\ M \end{tikzcd}$$

$\textbf{let pure}\ \vec{y} = \textbf{pure}\ \vec{N}\ \textbf{in}\ M[x := P] \to_{\beta\Box\mathbf{pure}}$

$\textbf{pure}\ M[x := P][\vec{y} = \vec{N}]$

$\textbf{let pure}\ x = \textbf{pure}\ P[\vec{y} := \vec{N}]\ \textbf{in}\ M \to_{\beta\Box\mathbf{pure}}$

$\textbf{pure}\ M[x := P[\vec{y} := \vec{N}]]$

По лемме о подстановке

$\textbf{pure}\ M[x := P][\vec{y} = \vec{N}] \equiv \textbf{pure}\ M[\vec{y} = \vec{N}][x := P[\vec{y} := \vec{N}]]$

По нашему соглашению, $x \notin \vec{y}$, тогда

$M[\vec{y} = \vec{N}][x := P[\vec{y} := \vec{N}]] \equiv M[x := P[\vec{y} := \vec{N}]]$

$\Box$

$\Box$

Теорема 4.

Нормальная форма $\lambda_{\mathbf{K}}$ со стратегией вычисления с вызовом по имени обладает свойством подформульности: если M в нормальной форме, то всего его подтермы также в нормальной форме.

Доказательство. Индукция по структуре M.

Случай $\textbf{let pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \textbf{in}\ N$ рассмотрен Какутани [?] [?].

Пусть $\textbf{pure}\ M$ в нормальной форме, тогда M в нормальной форме и все его подтермы также в нормальной форме по предположению индукции.

Тогда, если $\textbf{pure}\ M$ в нормальной форме, то и все его подтермы также в нормальной форме. $\Box$

4 Теоретико-категорная семантика

Теорема 5. *Корректность*

Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M =_{\beta\eta} N$, *тогда* $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$

Доказательство.

Определение 19. *Семантическая трансляция из* $\lambda_{\mathbf{K}}$ *в аппликативный функтор* $\langle \mathcal{C}, \boxdot, \eta \rangle$ *над декартово замкнутой категорией* $\mathcal{C}$, *где* $\boxdot$ *– это моноидальный эндофунктор и* η *– это естественное преобразование* $Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \boxdot$:

- *Интерпретация типов:*
  - $[\![A]\!] := \hat{A}, A \in \mathbb{T}$, *где* $\hat{A}$ *– это объект категории* $\mathcal{C}$, *полученный в результате некоторого присваивания;*
  - $[\![A \to B]\!] := [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$;
  - $[\![A \times B]\!] := [\![A]\!] \times [\![B]\!]$.
- *Интерпретация для модальных типов:*
  - $[\![\Box A]\!] = \boxdot[\![A]\!]$;
- *Интерпретация для контекстов:*
  - $[\![\quad]\!] = \mathbb{1}$, *где* $\mathbb{1}$ *– это терминальный объект в заданной декартово замкнутой категории;*
  - $[\![\Gamma, x : A]\!] = [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!]$
- *Интерпретация для типовых объявлений:*
  - $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] := [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]$.
- *Интерпретация для правил типизации:*

$$\frac{}{[\![\Gamma, x : A \vdash x : A]\!] = \pi_2 : [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \to [\![A]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma, x : A \vdash M : B]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \to B]\!] = \Lambda([\![M]\!]) : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]^{[\![A]\!]}}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A \to B]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \qquad [\![\Gamma \vdash N : A]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash (MN) : B]\!] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{\langle [\![M]\!], [\![N]\!] \rangle} [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \times [\![A]\!] \xrightarrow{\epsilon} [\![B]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!] \qquad [\![\Gamma \vdash N : B]\!] = [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \times B]\!] = \langle [\![M]\!], [\![N]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!] \times [\![B]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A_1]\!] \times [\![A_2]\!]}{[\![\Gamma \vdash \pi_i M : A_i]\!] = [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A_1]\!] \times [\![A_2]\!] \xrightarrow{\pi_i} [\![A_i]\!]} \; i \in \{1, 2\}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A]\!] := [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A]\!] \xrightarrow{\eta_{[\![A]\!]}} \boxdot[\![A]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A}]\!] = \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle : [\![\Gamma]\!] \to \prod_{i=1}^{n} \boxdot[\![A_i]\!] \qquad [\![\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B]\!] = [\![N]\!] : \prod_{i=1}^{n} [\![A_i]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ M : \Box B]\!] = \boxdot([\![N]\!]) \circ ([\![A_1]\!] * \dots * [\![A_n]\!]) \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle : [\![\Gamma]\!] \to \boxdot[\![B]\!]}$$

Определение 20. *Одновременная подстановка*

Пусть $\Gamma = \{x_1 : A_1, ..., x_n : A_n\}$, $\Gamma \vdash M : A$ *и для любых* $i \in \{1, ..., n\}$, $\Gamma \vdash M_i : A_i$.

Одновременная подстановка $M[\vec{x} := \vec{M}]$ *определяется рекурсивно:*

- $x_i[\vec{x} := \vec{M}] = M_i$;
- $(\lambda x.M)[\vec{x} := \vec{M}] = \lambda x.(M[\vec{x} := \vec{M}])$;
- $(MN)[\vec{x} := \vec{M}] = (M[\vec{x} = \vec{M}])(N[\vec{x} := \vec{M}])$;
- $\langle M, N\rangle = \langle (M[\vec{x} = \vec{M}]), (N[\vec{x} := \vec{M}])\rangle$;
- $(\pi_i P)[\vec{x} := \vec{M}] = \pi_i(P[\vec{x} = \vec{M}])$;
- $(\mathbf{pure}\, M)[\vec{x} := \vec{M}] = \mathbf{pure}\,(M[\vec{x} = \vec{M}])$;
- $(\mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N)[\vec{y} := \vec{P}] = \mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = (\vec{M}[\vec{y} := \vec{P}])\ \mathbf{in}\ N$

Лемма 10.

$[\![M[x_1 := M_1, \dots, x_n := M_n]]\!] = [\![M]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle$.

Доказательство.

1)

$[\![\Gamma \vdash (\mathbf{pure}\, M)[\vec{x} := \vec{M}] : \Box A]\!] = [\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\,(M[\vec{x} := \vec{M}]) : \Box A]\!]$

Определение подстановки

$\eta_{[\![A]\!]} \circ [\![(M[\vec{x} := \vec{M}])]\!]$

интерпретация для **pure**

$\eta_{[\![A]\!]} \circ ([\![M]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle) =$

предположение индукции$*$

$(\eta_{[\![A]\!]} \circ [\![M]\!]) \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle =$

ассоциативность композиции

$[\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\, M : \Box A]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!]\rangle =$

интерпретация для **pure**

2)

$$\llbracket \Gamma \vdash (\textbf{let pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \textbf{in}\ N)[\vec{y} := \vec{P}] : \Box B \rrbracket =$$

определение одновременной подстановки

$$\llbracket \Gamma \vdash \textbf{let pure}\, \vec{x} = (\vec{M}[\vec{y} := \vec{P}])\ \textbf{in}\ N : \Box B \rrbracket =$$

интерпретация $let_{\Box}$

$$\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ (\llbracket A_1 \rrbracket * \dots * \llbracket A_n \rrbracket) \circ \llbracket \Gamma \vdash (\vec{M}[\vec{y} := \vec{P}]) : \Box\vec{A} \rrbracket =$$

предположение индукция

$$\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ (\llbracket A_1 \rrbracket * \dots * \llbracket A_n \rrbracket) \circ (\llbracket \vec{M} \rrbracket \circ \langle \llbracket P_1 \rrbracket, \dots, \llbracket P_n \rrbracket \rangle) =$$

ассоциативность композиции

$$(\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ (\llbracket A_1 \rrbracket * \dots * \llbracket A_n \rrbracket) \circ \llbracket \vec{M} \rrbracket) \circ \langle \llbracket P_1 \rrbracket, \dots, \llbracket P_n \rrbracket \rangle =$$

по интерпретации

$$\llbracket \Gamma \vdash \textbf{let pure}\, \vec{x} = \vec{M}\ \textbf{in}\ N : \Box B \rrbracket \circ \langle \llbracket P_1 \rrbracket, \dots, \llbracket P_n \rrbracket \rangle$$

□

Лемма 11.

Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash N : A \rrbracket$;

Доказательство.

Случаи с правилом β-редукции для $let_{\Box}$ рассмотрены здесь [**?**]. Рассмотрим случаи с **pure**.

1) $\llbracket \Gamma \vdash \textbf{let pure}\, \vec{x} = \textbf{pure}\, \vec{M}\ \textbf{in}\ N : \Box B \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash \textbf{pure}\, N[\vec{x} := \vec{M}] : \Box B \rrbracket$

$$\llbracket \Gamma \vdash \textbf{let pure}\, \vec{x} = \textbf{pure}\, \vec{M}\ \textbf{in}\ N : \Box B \rrbracket =$$

интепретация

$$\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ (\llbracket A_1 \rrbracket * \dots * \llbracket A_n \rrbracket) \circ \langle \eta_{\llbracket A_1 \rrbracket} \circ \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \eta_{\llbracket A_n \rrbracket} \circ \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

свойство пары морфизмов

$$\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ (\llbracket A_1 \rrbracket * \dots * \llbracket A_n \rrbracket) \circ (\eta_{\llbracket A_1 \rrbracket} \times \dots \times \eta_{\llbracket A_n \rrbracket}) \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

ассоциативность композиции

$$\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ ((\llbracket A_1 \rrbracket * \dots * \llbracket A_n \rrbracket) \circ (\eta_{\llbracket A_1 \rrbracket} \times \dots \eta_{\llbracket A_n \rrbracket})) \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

по определению аппликативного функтора

$$\boxdot(\llbracket N \rrbracket) \circ \eta_{\llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket} \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

естественность η

$$\eta_{\llbracket B \rrbracket} \circ \llbracket N \rrbracket \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket \rangle =$$

ассоциативность композиции

$$\eta_{\llbracket B \rrbracket} \circ (\llbracket N \rrbracket \circ \langle \llbracket M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket M_n \rrbracket)\rangle =$$

по лемме об одновременной подстановке

$$\eta_{\llbracket B \rrbracket} \circ \llbracket N[\vec{x} := \vec{M}] \rrbracket$$

интерпретация

$$\llbracket \Gamma \vdash \textbf{pure}\, (N[\vec{x} := \vec{M}]) : \Box B \rrbracket$$

2) $\llbracket \vdash \textbf{let pure}\, \_\_ = \_\_\ \textbf{in}\ M : \Box A \rrbracket = \llbracket \vdash \textbf{pure}\, M : \Box A \rrbracket$

$$\llbracket \vdash \textbf{let pure}\ \_\_ = \_\_\ \textbf{in}\ M : \Box A \rrbracket =$$

интерпретация

$$\boxdot(\llbracket M \rrbracket) \circ u_{\mathbb{1}} =$$

определение аппликативного функтора

$$\boxdot(\llbracket M \rrbracket) \circ \eta_{\mathbb{1}} =$$

естественность η

$$\eta_{\llbracket A \rrbracket} \circ \llbracket M \rrbracket =$$

интерпретация

$$\llbracket \vdash \textbf{pure}\ M : \Box A \rrbracket$$

□

□

Теорема 6. *Полнота*

Пусть $\llbracket \Gamma \vdash M : A \rrbracket = \llbracket \Gamma \vdash N : A \rrbracket$, *тогда* $M =_{\beta\eta} N$.

Доказательство.

Мы будем работать с термовой моделью для простого типизированного λ-исчисления с $\times$ и $\to$, стандартно описанной здесь [?]:

Определение 21. *Эквивалетность на парах вида переменная-терм:*

Определим такое бинарное отношение $\sim_{A,B} \subseteq \mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}}$, *что:*

$(x, M) \sim_{A,B} (y, N) \Leftrightarrow x : A \vdash M : B \ \&\ y : A \vdash N : A \ \&\ M =_{\beta\eta} N[y := x]$.

Нетрудно заметить, что данное отношение является отношением эквивалентности.

Обозначим класс эквивалентности как $[x, M]_{A,B} = \{(y, N) \mid (x, M) \sim_{A,B} (y, N)\}$ (ниже мы будем опускать индексы).

Определение 22. *Категория* $\mathcal{C}(\lambda)$*:*

- $Ob_{\mathcal{C}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathbb{T}\} \cup \{\mathbb{1}\}$;
- $Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}) = (\mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}})/_{\sim_{A,B}}$;
- *Пусть* $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$ *и* $[y, N] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{B}, \hat{C})$, *тогда* $[y, M] \circ [x, M] = [x, N[y := M]]$;
- *Тождественный морфизм* $id_{\hat{A}} = [x, x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{A})}$;
- *Терминальный объект* $\mathbb{1}$;
- $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$;
- *Каноническая проекция:* $[x, \pi_i x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}_1 \times \hat{A}_2, \hat{A}_i)$ *for* $i \in \{1, 2\}$;
- $\widehat{A \to B} = \hat{B}^{\hat{A}}$;
- *Вычисляющая стрелка* $\epsilon = [x, (\pi_2 x)(\pi_1 x)] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{B}^{\hat{A}} \times \hat{A}, \hat{B})}$.

Определение 23. *Определим эндофунктор* $\boxdot : \mathcal{C}(\lambda) \to \mathcal{C}(\lambda)$ *таким образом, что для любых* $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}), \boxdot([x, M]) = [y, \textbf{let pure}\ x = y\ \textbf{in}\ M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\boxdot\hat{A}, \boxdot\hat{B})$ *(обозначения: fmap* f *для произвольной стрелки* f*).*

Достаточно показать, что $\boxdot$ – это аппликативный функтор над $\mathcal{C}(\lambda)$.

Лемма 12. *Функториальность*

- $fmap\ (g \circ f) = fmap\ (g) \circ fmap\ (f)$;
- $fmap\ (id_{\hat{A}}) = id_{\boxdot\hat{A}}$.

Доказательство.

1)

$\text{fmap}\ (g \circ f) = \text{fmap}([y, N] \circ [x, M]) =$

По определению композиции

$\text{fmap}\ ([x, N[y := M]]) =$

По определению fmap

$[z, \textbf{let pure}\ x = z\ \textbf{in}\ N[y := M]]$

$\text{fmap}\ (g) \circ \text{fmap}\ (f) = \text{fmap}\ ([y, N]) \circ \text{fmap}\ ([x, M]) =$

По определению fmap

$[y_1, \textbf{let pure}\ y = y_1\ \textbf{in}\ N] \circ [z, \textbf{let pure}\ x = z\ \textbf{in}\ M] =$

По определению композиции

$[z, \textbf{let pure}\ y = y_1\ \textbf{in}\ N[y_1 := \textbf{let pure}\ x = z\ \textbf{in}\ M]] =$

Подстановка

$[z, \textbf{let pure}\ y = (\textbf{let pure}\ x = z\ \textbf{in}\ M)\ \textbf{in}\ N] =$

Правило $\beta\Box$

$[z, \textbf{let pure}\ x = z\ \textbf{in}\ N[y := M]]$

2)

$\text{fmap}\ (id_{\hat{A}}) =$

Определение тождественного морфизма

$\text{fmap}\ [x, x] =$

По определению fmap

$[z, \textbf{let pure}\ x = z\ \textbf{in}\ x]$

Правило $\Box id$

$[z, z] = id_{\boxdot\hat{A}}$

$\Box$

Определение 24. *Определим естественные преобразования:*

- $\eta : Id \Rightarrow \boxdot$, *такое, что* $\forall \hat{A} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $\eta_{\hat{A}} = [x, \textbf{pure}\ x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \boxdot\hat{A})$;
- $*_{A,B} : \boxdot\hat{A} \times \boxdot\hat{B} \to \boxdot(\hat{A} \times \hat{B})$, *такое, что* $\forall \hat{A}, \hat{B} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}, *_{\hat{A},\hat{B}} = [p, \textbf{let pure}\ x, y = \pi_1 p, \pi_2 p\ \textbf{in}\ \langle x, y\rangle] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\boxdot A \times \boxdot B, \boxdot(A \times B))$.

Реализация $*$ в нашей термовой модели – это частный случай правила $\text{let}_\Box$:

$$\dfrac{\dfrac{p : \Box A \times \Box B \vdash p : \Box A \times \Box B}{p : \Box A \times \Box B \vdash \pi_1 p : \Box A} \quad \dfrac{p : \Box A \times \Box B \vdash p : \Box A \times \Box B}{p : \Box A \times \Box B \vdash \pi_2 p : \Box B} \quad \dfrac{x : A \vdash x : A \qquad y : B \vdash y : B}{x : A, y : B \vdash \langle x, y\rangle : A \times B}}{p : \Box A \times \Box B \vdash \textbf{let pure}\ x, y = \pi_1 p, \pi_2 p\ \textbf{in}\ \langle x, y\rangle : \Box(A \times B)}$$

Лемма 13.

$\boxdot$ – *моноидальный эндофунктор.*

Доказательство.

Показывается аналогично [?]. □

Лемма 14. *Естественность и когерентность η:*

- $\mathit{fmap}\ f \circ \eta_A = \eta_B \circ f$;
- $*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_A \times \eta_B) = \eta_{\hat{A}\times\hat{B}}$;

Доказательство.

i) fmap $f \circ \eta_{\hat{A}} = \eta_{\hat{B}} \circ f$

$\eta_{\hat{B}} \circ f =$

по определению

$[y, \mathbf{pure}\, y] \circ [x, M] =$

композиция

$[x, \mathbf{pure}\, y[y := M]] =$

подстановка

$[x, \mathbf{pure}\, M]$

С другой стороны:

fmap $f \circ \eta_{\hat{A}} =$

по определению

$[z, \mathbf{let}\,\mathbf{pure}\, x = z\ \mathbf{in}\ M] \circ [x, \mathbf{pure}\,\mathbf{x}] =$

композиция

$[x, \mathbf{let}\,\mathbf{pure}\, x = z\ \mathbf{in}\ M[z := \mathbf{pure}\, x]] =$

подстановка

$[x, \mathbf{let}\,\mathbf{pure}\, x = \mathbf{pure}\, x\ \mathbf{in}\ M] =$

правило β-редукции

$[x, \mathbf{pure}\, M[x := x]] =$

постановка

$[x, \mathbf{pure}\, M]$

ii) $*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_{\hat{A}} \times \eta_{\hat{B}}) = \eta_{\hat{A}\times\hat{B}}$

$*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_{\hat{A}} \times \eta_{\hat{B}}) =$

раскрытие

$[q, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1 q, \pi_2 q\ \mathbf{in}\, \langle x, y \rangle] \circ [p, \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \mathbf{pure}\,(\pi_2 p)\rangle] =$

композиция

$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1 q, \pi_2 q\ \mathbf{in}\, \langle x, y \rangle[q := \langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \mathbf{pure}\,(\pi_2 p)\rangle]] =$

подстановка

$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \pi_1(\langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \mathbf{pure}\,(\pi_2 p)\rangle), \pi_2(\langle \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \mathbf{pure}\,(\pi_2 p)\rangle)\ \mathbf{in}\, \langle x, y \rangle] =$

правило β-редукции

$[p, \mathbf{let\ pure}\, x, y = \mathbf{pure}\,(\pi_1 p), \mathbf{pure}\,(\pi_2 p)\ \mathbf{in}\, \langle x, y \rangle] =$

правило β-редукции

$[p, \mathbf{pure}\,(\langle x, y \rangle[x := \pi_1 p, y := \pi_2 p])] =$

подстановка

$[p, \mathbf{pure}\,\langle \pi_1 p, \pi_2 p \rangle] =$

правило η-редукции

$[p, \mathbf{pure}\, p] =$

определение

$\eta_{\hat{A} \times \hat{B}}$

□

Определение 25.

$u_{\mathbb{1}} = [\blacksquare, \mathbf{let\ pure}\, \_\_ = \_\_\ \mathbf{in}\, \blacksquare] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbb{1}, \boxdot\mathbb{1})$.

Лемма 15.

$u_{\mathbb{1}} = \eta_{\mathbb{1}}$

Доказательство. Следует напрямую из правила β**nec**. □

Лемма 16. $\boxdot$ *– это аппликативный функтор.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущих лемм. □

Аналогично [**?**], мы применяем трансляцию из $\lambda_{\mathbf{K}}$ к произвольной декартово замкнутой категории с аппликативным функтором $\boxdot$, тогда мы имеем $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [x, M[x_i := \pi_i x]]$, so $M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow [\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$.

□