Категорная модель модального лямбда-исчисления, основанного на интуиционистской эпистемической логике.

Даня Рогозин

Март, 2018

Мотивация. Функциональное программирование на языке Haskell.

- Обратимся в рамках мотивации к функциональному программированию на таких языках, как Haskell, Purescript, Elm или Idris;
- Без ограничения общности разделим типы в языке Haskell (или в любом другом из языков выше) на две части: простые типы и параметризованные;
- Простые типы (`Int`, `String`, `Char`, etc) – это привычные типы данных;
- Параметризованные типы (`List Int`, `Maybe Char`, `IO String`) используются для вычислений в рамках оговоренного вычислительного контекста;
- Аналогично можно и разделить функции.

Мотивация. Функтор.

Класс типов Functor – это общий интерфейс для “выполнения действия над параметризованным типом, обобщение функции map на списках”:

```
class Functor f where
    fmap :: (a -> b) -> f a -> f b.
```

Конечная цель: аппликативные функторы.

Аппликативные функторы сильнее функторов и слабее монад:

```
class Functor f => Applicative f where
    pure :: a -> f a
    (<*>) :: f (a -> b) -> f a -> f b
```

Используя аппликативный функтор, мы можем вложить значение в вычислительный контекст `f` с помощью `pure` и выполнить аппликацию внутри `f` применением `<*>`.

Использование:

- Обобщение `fmap` для функции произвольной арности:
  `liftAn = pure f <*> a1 <*> ... <*> an`
- Парсинг;
- Монада в современном Haskell является наследником аппликатива.

Монадические вычисления в теории.

1) *Eugenio Moggi.* "Notions of computation and monads." Inf. Comput., 93(1): 55–92, 1991.

2) *Frank Pfenning and Rowan Davies.* "A judgmental reconstruction of modal logic." Mathematical. Structures in Comp. Sci. 11, 4 (August 2001), 511—540.

3) *Bierman, G., and De Paiva, V.*. On an Intuitionistic Modal Logic. Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, 65(3), 2000. 383–416.
etc...

Аппликативные функторы.

К сожалению, аппликативный функтор является далеко не самой известной концепцией за вне сообщества хаскеллистов. Возможная причина: аппликативные функторы рассмотрены с программистской точки зрения, без теоретического рассмотрения, то есть теоретико-доказательного построения синтаксиса и алгебраической (категорной) модели.

Пример нескольких работ:

1) *Conor McBride and Ross Paterson.* "Applicative Programming with Effects." Journal of Functional Programming 18:1 (2008), pages 1–13.
2) *Ross Paterson.* "Constructing Applicative Functors." Mathematics of Program Construction, Madrid, 2012, Lecture Notes in Computer Science vol. 7342, pp. 300–323, Springer, 2012.

Белое пятно: стоит рассмотреть модальное лямбда-исчисление, которые могло бы аксиоматизировать вычисления с аппликативным функтором и имело хорошую алгебраическую модель.

Интуиционистская эпистемическая логика IEL^-.

Данную проблему удобно решать, если мы располагает некоторой конструктивной модальной логикой с хорошими аксиомами, по которой мы можем построить интересное нам модальное лямбда-исчисление:

Определение

Интуиционистская эпистемическая логика IEL^-:
1) Аксиомы IPC;
2) $\mathbf{K}(A \to B) \to (\mathbf{K}A \to \mathbf{K}B)$ (нормальность);
3) $A \to \mathbf{K}A$ (ко-рефлексия);
Правило: MP.

1) *Artemov S., Protopopescu T.* (2014, June). Intuitionistic epistemic logic. ArXiv, math.LO 1406.1582v1.
2) *Krupski V. N., Alexey Y.* "Sequent calculus for intuitionistic epistemic logic IEL" // Logical Foundations of Computer Science – Vol. 9537 of Lecture Notes in Computer Science. – Springer, 2016. – P. 187–201.

Натуральный вывод для IEL$^-$.

Определение

Натуральное исчисление $NIEL^-$ *для интуиционистской эпистемической логики* IEL^- *– это расширение натурального исчисления для интуиционистской логики высказываний с добавлением следующих правил вывода для модальности:*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathbf{K}A}\ \mathbf{K}_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{K}A_1, \ldots, \Gamma \vdash \mathbf{K}A_n \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash B}{\Gamma \vdash \mathbf{K}B}$$

Модальное лямбда-исчисление по IEL$^-$

Определение

Модальное λ-исчисление, основанное на исчислении IEL$^-$:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \textbf{pure}\ \ M : \mathbf{K}A}\ \mathbf{K}_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \textbf{let pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \textbf{in}\ N : \mathbf{K}B}\ let_{\mathbf{K}}$$

$\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}$ – это синтаксический сахар для $\Gamma \vdash M_1 : \mathbf{K}A_1, \dots, \Gamma \vdash M_n : \mathbf{K}A_n$ и $\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B$ – это краткая форма для $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash N : B$. $\textbf{let pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \textbf{in}\ N$ – это мгновенное локальное связывание в терме N. Мы будем использовать такую краткую форму вместо $\textbf{let pure}\ x_1, \dots, x_n = M_1, \dots, M_n\ \textbf{in}\ N$.

Метатеоретические свойства системы

(Само определение редукции довольно сложное и длинное)

Теорема

Редукция субъекта
Если $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $\Gamma \vdash N : A$

Теорема

Отношение $\twoheadrightarrow_{\beta}$ *сильно нормализуемо;*

Теорема

Отношение $\twoheadrightarrow_{\beta}$ *конфлюентно.*

Теорема

Нормальная форма $\lambda_{\mathbf{K}}$ *со стратегией вычисления с вызовом по имени обладает свойством подформульности: если* M *в нормальной форме, то всего его подтермы также в нормальной форме.*

Определение аппликативного функтора.

Определение

Аппликативный функтор – это тройка $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$*, где* $\mathcal{C}$ *– это моноидальная категория,* $\mathcal{K}$ *- это моноидальный эндофунктор и* $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$ *– это естественное преобразование с условиями когерентности для него.*

Теоретико-категорная семантика.

Теорема

Корректность Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M =_{\beta\eta} N$, *тогда* $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$

Интерпретация модальных правил:

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash \textbf{pure}\ M : \mathbf{K}A]\!] := [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A]\!] \xrightarrow{\eta_{[\![A]\!]}} \mathcal{K}[\![A]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}]\!] = \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{K}[\![A_i]\!] \qquad [\![\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B]\!] = [\![N]\!] : \prod_{i=1}^{n} [\![A_i]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash \textbf{let pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \textbf{in}\ M : \mathbf{K}B]\!] = \mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!], \ldots, [\![A_n]\!]} \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{K}[\![B]\!]}$$

Теоретико-категорная семантика.

Лемма

Интерпретация сохраняет подстановку.
$[\![M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n]]\!] = [\![M]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle$.

Лемма

Интерпретация сохраняет редукцию.
Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$;

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Эквивалетность на парах вида переменная-терм:
Определим такое бинарное отношение $\sim_{A,B} \subseteq \mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}}$, *что:*
$(x, M) \sim_{A,B} (y, N) \Leftrightarrow x : A \vdash M : B \ \& \ y : A \vdash N : A \ \& \ M =_{\beta\eta} N[y := x]$.

Обозначим класс эквивалентности как $[x, M]_{A,B} = \{(y, N) \mid (x, M) \sim_{A,B} (y, N)\}$ (ниже мы будем опускать индексы).

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Категория $\mathcal{C}(\lambda)$:

- $Ob_{\mathcal{C}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathbb{T}\} \cup \{\mathbb{1}\}$;
- $Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}) = (\mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}})/_{\sim_{A,B}}$;
- *Пусть* $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$ *и* $[y, N] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{B}, \hat{C})$, *тогда* $[y, M] \circ [x, M] = [x, N[y := M]]$;
- *Тождественный морфизм* $id_{\hat{A}} = [x, x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{A})}$;
- *Терминальный объект* $\mathbb{1}$;
- $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$;
- *Каноническая проекция:* $[x, \pi_i x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}_1 \times \hat{A}_2, \hat{A}_i)$ *for* $i \in \{1, 2\}$;
- $\widehat{A \to B} = \hat{B}^{\hat{A}}$;
- *Вычисляющая стрелка* $\epsilon = [x, (\pi_2 x)(\pi_1 x)] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{B}^{\hat{A}} \times \hat{A}, \hat{B})}$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Необходимо показать, что **K** – это аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией $\mathcal{C}(\lambda)$.

Теорема

K – *это аппликативный функтор над* $\mathcal{C}(\lambda)$.

Спасибо за внимание!

Черепашка ниндзя Донателло пишет представителя класса типов `Applicative`: