Категорная модель модального лямбда-исчисления, основанного на интуиционистской эпистемической логике.

Даня Рогозин

МГУ

Март, 2018

Мотивация. Функциональное программирование на языке Haskell.

- Обратимся в рамках мотивации к функциональному программированию на таких языках, как Haskell, Purescript, Elm или Idris;
- Без ограничения общности разделим типы в языке Haskell (или в любом другом из языков выше) на две части: простые типы и параметризованные;
- Простые типы (`Int`, `String`, `Char`, etc) – это привычные типы данных;
- Параметризованные типы (`List Int`, `Maybe Char`, `IO String`) используются для вычислений в рамках оговоренного вычислительного контекста;
- Аналогично можно и разделить функции.

Мотивация. Функтор.

Класс типов `Functor` – это общий интерфейс для “выполнения действия над параметризованным типом, обобщение функции `map` на списках”:

```
class Functor f where
    fmap :: (a -> b) -> f a -> f b.
```

Motivation. Monad.

Согласно Hackage: “С точки зрения хаскеллиста лучше всего определять монаду как тип данных для произвольных действий”. В частности, вычисления в мире ввода-вывода – частный случай монадических вычислений.

(Старое) определение монады:

```
class Functor m => Monad m where
    return : a -> m a
    (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b.
```

Монадическая композиция (композиция действий):

```
(>=>) :: Monad m => (a -> m b) -> (b -> m c) -> a -> m c
```

Конечная цель: аппликативные функторы.

Аппликативные функторы сильнее функторов и слабее монад:

```
class Functor f => Applicative f where
    pure :: a -> f a
    (<*>) :: f (a -> b) -> f a -> f b
```

Используя аппликативный функтор, мы можем вложить значение в вычислительный контекст `f` с помощью `pure` и выполнить аппликацию внутри `f` применением `<*>`.

Использование:

- Обобщение `fmap` для функции произвольной арности:
  `pure f <*> a1 <*> ... <*> an`
- Парсинг;
- Монада в современном Haskell является наследником аппликатива.

Монадические вычисления в теории.

1) *Eugenio Moggi.* "Notions of computation and monads." Inf. Comput., 93(1): 55–92, 1991.

2) *Frank Pfenning and Rowan Davies.* "A judgmental reconstruction of modal logic." Mathematical. Structures in Comp. Sci. 11, 4 (August 2001), 511—540.

3) *Bierman, G., and De Paiva, V.*. On an Intuitionistic Modal Logic. Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, 65(3), 2000. 383–416.
etc...

Аппликативные функторы.

К сожалению, аппликативный функтор является далеко не самой известной концепцией за вне сообщества хаскеллистов. Возможная причина: аппликативные функторы рассмотрены с программистской точки зрения, без теоретического рассмотрения, то есть теоретико-доказательного построения синтаксиса и алгебраической (категорной) модели.

Пример нескольких работ:

1) *Conor McBride and Ross Paterson.* “Applicative Programming with Effects.” Journal of Functional Programming 18:1 (2008), pages 1–13.
2) *Ross Paterson.* “Constructing Applicative Functors.” Mathematics of Program Construction, Madrid, 2012, Lecture Notes in Computer Science vol. 7342, pp. 300–323, Springer, 2012.

Белое пятно: стоит рассмотреть модальное лямбда-исчисление, которые могло бы аксиоматизировать вычисления с аппликативным функтором и имело хорошую алгебраическую модель.

Интуиционистская эпистемическая логика IEL^-.

Данную проблему удобно решать, если мы располагает некоторой конструктивной модальной логикой с хорошими аксиомами, по которой мы можем построить интересное нам модальное лямбда-исчисление:

Определение

Интуиционистская эпистемическая логика IEL^-:
1) Аксиомы IPC;
2) $\mathbf{K}(A \to B) \to (\mathbf{K}A \to \mathbf{K}B)$ (нормальность);
3) $A \to \mathbf{K}A$ (ко-рефлексия);
Правило: MP.

1) *Artemov S., Protopopescu T.* (2014, June). Intuitionistic epistemic logic. ArXiv, math.LO 1406.1582v1.
2) *Krupski V. N., Alexey Y.* “Sequent calculus for intuitionistic epistemic logic IEL” // Logical Foundations of Computer Science – Vol. 9537 of Lecture Notes in Computer Science. – Springer, 2016. – P. 187–201.

Натуральный вывод для IEL^-.

Определение

Натуральное исчисление $NIEL^-$ *для интуиционистской эпистемической логики* IEL^- *– это расширение натурального исчисления для интуиционистской логики высказываний с добавлением следующих правил вывода для модальности:*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathbf{K}A}\,\mathbf{K}_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{K}A_1, \ldots, \Gamma \vdash \mathbf{K}A_n \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash B}{\Gamma \vdash \mathbf{K}B}$$

Натуральный вывод для IEL^-.

Лемма

$\Gamma \vdash_{NIEL^-} A \Rightarrow IEL^- \vdash \bigwedge \Gamma \to A.$

Proof.

Индукция по построению вывода. Рассмотрим модальные случаи.

1) Если $\Gamma \vdash_{\mathrm{NIEL}^-} A$, тогда $\mathrm{IEL}^- \vdash \bigwedge \Gamma \to \mathbf{K}A$.

(1)	$\bigwedge \Gamma \to A$	предположение индукции
(2)	$A \to \mathbf{K}A$	ко-рефлексия
(3)	$(\bigwedge \Gamma \to A) \to ((A \to \mathbf{K}A) \to (\bigwedge \Gamma \to \mathbf{K}A))$	теорема IPC
(4)	$(A \to \mathbf{K}A) \to (\bigwedge \Gamma \to \mathbf{K}A)$	из (1), (3) и MP
(5)	$\bigwedge \Gamma \to \mathbf{K}A$	из (2), (4) и MP

$\square$

Натуральный вывод для IEL^-.

Proof.

2) Если $\Gamma \vdash_{\mathsf{NIEL}^-} \mathbf{K}\vec{A}$ и $\vec{A} \vdash B$, то $\mathsf{IEL}^- \vdash \bigwedge \Gamma \to \mathbf{K}B$.

(1)	$\bigwedge \Gamma \to \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{K}A_i$	предположение индукции
(2)	$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{K}A_i \to \mathbf{K} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$	теорема IEL^-
(3)	$\bigwedge \Gamma \to \mathbf{K} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$	по (1), (2) и правилу силлогизма
(4)	$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to B$	предположение индукции
(5)	$(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to B) \to \mathbf{K}(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to B)$	ко-рефлексия
(6)	$\mathbf{K}(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to B)$	из (4), (5) и MP
(7)	$\mathbf{K} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \to \mathbf{K}B$	по (6) и по нормальности
(8)	$\bigwedge \Gamma \to \mathbf{K}B$	по (3), (7) и правилу силлогизма

$\square$

Натуральный вывод для IEL^-.

Лемма

Если $IEL^- \vdash A$, то $NIEL^- \vdash A$.

Proof.

Построение выводов для модальных аксиом в NIEL^-. $\square$

Модальное лямбда-исчисление по IEL^-

Определение

Модальное λ-исчисление, основанное на исчислении IEL^-:

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathbf{pure}\ \ M : \mathbf{K}A}\ \mathbf{K}_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \mathbf{K}B}\ let_{\mathbf{K}}$$

$\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}$ – это синтаксический сахар для $\Gamma \vdash M_1 : \mathbf{K}A_1, \dots, \Gamma \vdash M_n : \mathbf{K}A_n$ и $\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B$ – это краткая форма для $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash N : B$. $\mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N$ – это мгновенное локальное связывание в терме N. Мы будем использовать такую краткую форму вместо $\mathbf{let\ pure}\ x_1, \dots, x_n = M_1, \dots, M_n\ \mathbf{in}\ N$.

Примеры деревьев вывода

$$\dfrac{\dfrac{x : A \vdash x : A}{x : A \vdash \mathbf{pure}\, x : \mathbf{K}A}}{\vdash (\lambda x.\mathbf{pure}\, x) : A \to \mathbf{K}A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f : \mathbf{K}(A \to B) \vdash f : \mathbf{K}(A \to B) \qquad x : \mathbf{K}A \vdash x : \mathbf{K}A \qquad \dfrac{g : A \to B \vdash g : A \to B \qquad y : A \vdash y : A}{g : A \to B, y : A \vdash gy : B}}{f : \mathbf{K}(A \to B), x : \mathbf{K}A \vdash \mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\, \mathbf{in}\, gy : \mathbf{K}B}\,\mathrm{let}_{\mathbf{K}}}{f : \mathbf{K}(A \to B) \vdash \lambda x.\mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\, \mathbf{in}\, gy : \mathbf{K}A \to \mathbf{K}B}}{\vdash \lambda f.\lambda x.\mathbf{let\ pure}\, g, y = f, x\, \mathbf{in}\, gy : \mathbf{K}(A \to B) \to \mathbf{K}A \to \mathbf{K}B}$$

Подстановка

Определение

Подстановка:

1) $x[x := N] = N$, $x[y := N] = x$;
2) $(MN)[x := N] = M[x := N]N[x := N]$;
3) $(\lambda x.M)[x := N] = \lambda x.M[y := N]$, $y \in FV(M)$;
4) $(M, N)[x := P] = (M[x := P], N[x := P])$;
5) $(\pi_i M)[x := P] = \pi_i(M[x := P])$, $i \in \{1, 2\}$;
6) $(\textbf{pure } M)[x := P] = \textbf{pure } (M[x := P])$;
7) $(\textbf{let pure } \vec{x} = \vec{M} \textbf{ in } N)[y := P] = \textbf{let pure } \vec{x} = (\vec{M}[y := P]) \textbf{ in } N$.

Редукция

Определение

Правила β-редукции и η-редукции:

1) $(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$;

2) $\pi_1\langle M, N\rangle \to_\beta M$;

3) $\pi_2\langle M, N\rangle \to_\beta N$;

4) $$\begin{array}{l}\textbf{let pure } \vec{x}, y, \vec{z} = \vec{M}, \textbf{let pure } \vec{w} = \vec{N} \textbf{ in } Q, \vec{P} \textit{ in } R \to_\beta \\ \textbf{let pure } \vec{x}, \vec{w}, \vec{z} = \vec{M}, \vec{N}, \vec{P} \textbf{ in } R[y := Q]\end{array}$$

5) $\textbf{let pure } \vec{x} = \textbf{pure } \vec{M} \textbf{ in } N \to_\beta \textbf{pure } N[\vec{x} := \vec{M}]$

6) $\textbf{let pure } \_\_ = \_\_ \textbf{ in } M \to_\beta \textbf{pure } M$, где $\_\_$ – это пустая последовательность термов.

7) $\lambda x.fx \to_\eta f$;

8) $\langle \pi_1 P, \pi_2 P\rangle \to_\eta P$;

9) $\textbf{let pure } x = M \textbf{ in } x \to_\eta M$;

Метатеоретические свойства системы

Теорема

Редукция субъекта
Если $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $\Gamma \vdash N : A$

Теорема

Отношение $\twoheadrightarrow_{\beta}$ *сильно нормализуемо;*

Теорема

Отношение $\twoheadrightarrow_{\beta}$ *конфлюентно.*

Теорема

Нормальная форма $\lambda_{\mathbf{K}}$ *со стратегией вычисления с вызовом по имени обладает свойством подформульности: если* M *в нормальной форме, то всего его подтермы также в нормальной форме.*

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии.

Определение

Моноидальная категория – это категория $\mathcal{C}$ с дополнительной структурой:

- *Бифунктор $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to C$, который мы будем называть тензором;*
- *Единица $\mathbb{1}$;*
- *Изоморфизм, который мы будем называть ассоциатором:* $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$;
- *Изоморфизм $L_A : \mathbb{1} \otimes A \cong A$;*
- *Изоморфизм $R_A : A \otimes \mathbb{1} \cong A$;*
- *Первое условие когерентности (пятиугольник Маклейна);*
- *Второе условие когерентности (тождество треугольника).*

Легко видеть, что декартово замкнутая категория – это частный случай (симметрической) моноидальной категории, в котором тензор – это произведения, а единица – это терминальный объект.

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии. Пятиугольник Маклейна.

$$
\begin{tikzcd}
 & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}
$$

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии. Тождество треугольника.

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes \mathbb{1}) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathbb{1},B}"] \arrow[dr, "R_A \otimes id_B"'] & & A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \arrow[dl, "id_A \otimes L_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии.

Определение

Нестрогий моноидальный функтор

Пусть $\langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rangle$ *и* $\langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rangle$ *моноидальные категории.*

Нестрогий моноидальный функтор $\mathcal{F} : \langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1} \rangle \to \langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}' \rangle$ *это функтор* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *с дополнительными естественными преобразованиями:*

- $u : \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$;
- $*_{A,B} : \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B \to \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B)$;
- *Три условия когеретности: ассоциативность, свойство левой и правой единиц.*

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии. Ассоциативность.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C \arrow[r, "\alpha^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}"] \arrow[d, "*_{A,B} \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}B}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{F}B \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C) \arrow[d, "id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} *_{B,C}"] \\
\mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C} \arrow[d, "*_{A \otimes_{\mathcal{C}} B, C}"'] & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B \otimes_{\mathcal{C}} C) \arrow[d, "*_{A, B \otimes_{\mathcal{C}} C}"] \\
\mathcal{F}((A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{C}} C) \arrow[r, "\mathcal{F}(\alpha^{\mathcal{C}}_{A,B,C})"'] & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} (B \otimes_{\mathcal{C}} C))
\end{tikzcd}
$$

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии. Свойство левой единицы.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}A \arrow[r, "u \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}A}"] \arrow[d, "L^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A}"'] & \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}A \arrow[d, "*_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}}, A}"] \\
\mathcal{F}A & \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} A) \arrow[l, "\mathcal{F}(L^{\mathcal{C}}_{A})"']
\end{tikzcd}$$

Категорная модель. Теоретико-категорные прелиминарии.

Определение

Тензорно-сильный функтор – это эндофунктор над моноидальной категорией с дополнительным естественным преобразованием:

$$\tau_{A,B} : A \otimes \mathcal{K}B \to \mathcal{K}(A \otimes B)$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes \mathcal{K}C \arrow[rr, "\tau_{A\otimes B, C}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,\mathcal{K}C}"'] & & \mathcal{K}((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "\mathcal{K}(\alpha_{A,B,C})"] \\
A \otimes (B \otimes \mathcal{K}C) \arrow[r, "id_A \otimes \tau_{B,C}"'] & A \otimes \mathcal{K}(B \otimes C) \arrow[r, "\tau_{A,(B\otimes C)}"'] & \mathcal{K}(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes \mathcal{K}A \arrow[r, "\mu_{\mathbb{1},A}"] \arrow[dr, "R_{\mathcal{K}A}"'] & \mathcal{K}(\mathbb{1} \otimes A) \arrow[d, "\mathcal{K}(R_A)"] \\
& \mathcal{K}A
\end{tikzcd}$$

Определение аппликативного функтора.

Определение

Аппликативный функтор – это тройка $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$*, где* $\mathcal{C}$ *– это моноидальная категория,* $\mathcal{K}$ *- это тензорно-сильный нестрогий моноидальный эндофунктор и* $\eta : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$ *– это естественное преобразование, такое, что:*
(сейчас будут условия когерентности для η*)*

Условия когерентности для η

- $u = \eta_{\mathbb{1}}$;
- $*_{A,B} \circ (\eta_A \otimes \eta_B) = \eta_{A \otimes B}$:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\eta_A \otimes \eta_B"] \arrow[dr, "\eta_{A \otimes B}"'] & \mathcal{K}A \otimes \mathcal{K}B \arrow[d, "*_{A,B}"] \\
& \mathcal{K}(A \otimes B)
\end{tikzcd}
$$

- $\tau_{A,B} = *_{A,B} \circ \eta_A \otimes id_{\mathcal{K}B}$;
- $\tau_{A,B} \circ id_A \otimes \eta_B = \eta_{A \otimes B}$:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "id_A \otimes \eta_B"] \arrow[dr, "\eta_{A \otimes B}"'] & A \otimes \mathcal{K}B \arrow[d, "\tau_{A,B}"] \\
& \mathcal{K}(A \otimes B)
\end{tikzcd}
$$

Теоретико-категорная семантика.

Теорема

Корректность Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M =_{\beta\eta} N$, *тогда* $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$

Интерпретация модальных правил:

$$\frac{[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![M]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash \mathbf{pure}\ M : \mathbf{K}A]\!] := [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![M]\!]} [\![A]\!] \xrightarrow{\eta_{[\![A]\!]}} \mathcal{K}[\![A]\!]}$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash \vec{M} : \mathbf{K}\vec{A}]\!] = \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{K}[\![A_i]\!] \qquad [\![\vec{x} : \vec{A} \vdash N : B]\!] = [\![N]\!] : \prod_{i=1}^{n} [\![A_i]\!] \to [\![B]\!]}{[\![\Gamma \vdash \mathbf{let\ pure}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ M : \mathbf{K}B]\!] = \mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!], \ldots, [\![A_n]\!]} \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle : [\![\Gamma]\!] \to \mathcal{K}[\![B]\!]}$$

Теоретико-категорная семантика.

Лемма

Интерпретация сохраняет подстановку.

$[\![M[x_1 := M_1, \ldots, x_n := M_n]]\!] = [\![M]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \ldots, [\![M_n]\!] \rangle.$

Лемма

Интерпретация сохраняет редукцию.

Пусть $\Gamma \vdash M : A$ *и* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$, *тогда* $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$;

Теоретико-категорная семантика. Пример.

1) $[\![\Gamma \vdash \textbf{let pure } \vec{x} = \textbf{pure } \vec{M} \textbf{ in } N : \mathbf{K}B]\!] = [\![\Gamma \vdash \textbf{pure } N[\vec{x} := \vec{M}] : \mathbf{K}B]\!]$

$[\![\Gamma \vdash \textbf{let pure } \vec{x} = \textbf{pure } \vec{M} \textbf{ in } N : \mathbf{K}B]\!] =$

интепретация

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\dots,[\![A_n]\!]} \circ \langle \eta_{[\![A_1]\!]} \circ [\![M_1]\!], \dots, \eta_{[\![A_n]\!]} \circ [\![M_n]\!] \rangle =$

свойство пары морфизмов

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ *_{[\![A_1]\!],\dots,[\![A_n]\!]} \circ (\eta_{[\![A_1]\!]} \times \dots \times \eta_{[\![A_n]\!]}) \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!] \rangle =$

по определению аппликативного функтора

$\mathcal{K}([\![N]\!]) \circ \eta_{[\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!]} \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!] \rangle =$

естественность η

$\eta_{[\![B]\!]} \circ [\![N]\!] \circ \langle [\![M_1]\!], \dots, [\![M_n]\!] \rangle =$

по лемме об одновременной подстановке

$\eta_{[\![B]\!]} \circ [\![N[\vec{x} := \vec{M}]]\!] =$

интерпретация

$[\![\Gamma \vdash \textbf{pure } (N[\vec{x} := \vec{M}]) : \mathbf{K}B]\!]$

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Эквивалетность на парах вида переменная-терм:
Определим такое бинарное отношение $\sim_{A,B} \subseteq \mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}}$*, что:*
$(x, M) \sim_{A,B} (y, N) \Leftrightarrow x : A \vdash M : B \;\&\; y : A \vdash N : A \;\&\; M =_{\beta\eta} N[y := x]$.

Обозначим класс эквивалентности как $[x, M]_{A,B} = \{(y, N) \mid (x, M) \sim_{A,B} (y, N)\}$ (ниже мы будем опускать индексы).

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Категория $\mathcal{C}(\lambda)$:

- $Ob_{\mathcal{C}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathbb{T}\} \cup \{\mathbb{1}\}$;
- $Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}) = (\mathbb{V} \times \Lambda_{\mathbf{K}})/_{\sim_{A,B}}$;
- *Пусть* $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B})$ *и* $[y, N] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{B}, \hat{C})$, *тогда* $[y, M] \circ [x, M] = [x, N[y := M]]$;
- *Тождественный морфизм* $id_{\hat{A}} = [x, x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{A})}$;
- *Терминальный объект* $\mathbb{1}$;
- $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$;
- *Каноническая проекция:* $[x, \pi_i x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}_1 \times \hat{A}_2, \hat{A}_i)$ *for* $i \in \{1, 2\}$;
- $\widehat{A \to B} = \hat{B}^{\hat{A}}$;
- *Вычисляющая стрелка* $\epsilon = [x, (\pi_2 x)(\pi_1 x)] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)(\hat{B}^{\hat{A}} \times \hat{A}, \hat{B})}$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Необходимо показать, что **K** – это аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией $\mathcal{C}(\lambda)$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Определим эндофунктор $\mathcal{K} : \mathcal{C}(\lambda) \to \mathcal{C}(\lambda)$ таким образом, что для любых $[x, M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \hat{B}), \mathbf{K}([x, M]) = [y, \mathbf{let\ pure}\ x = y\ \mathbf{in}\ M] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbf{K}\hat{A}, \mathbf{K}\hat{B})$ *(обозначения: fmap f для произвольной стрелки f).*

Лемма

Функториальность

- $fmap\ (g \circ f) = fmap\ (g) \circ fmap\ (f)$;
- $fmap\ (id_{\hat{A}}) = id_{\mathbf{K}\hat{A}}$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

Определим естественные преобразования:

- $\eta : Id \Rightarrow \mathcal{K}$, *такое, что* $\forall \hat{A} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $\eta_{\hat{A}} = [x, \textbf{pure}\ x] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\hat{A}, \mathbf{K}\hat{A})$;
- $*_{A,B} : \mathbf{K}\hat{A} \times \mathbf{K}\hat{B} \to \mathbf{K}(\hat{A} \times \hat{B})$, *такое, что* $\forall \hat{A}, \hat{B} \in Ob_{\mathcal{C}(\lambda)}$, $*_{\hat{A},\hat{B}} = [p, \textbf{let pure}\ x, y = \pi_1 p, \pi_2 p\ \textbf{in}\ \langle x, y \rangle] \in Hom_{\mathcal{C}(\lambda)}(\mathbf{K}A \times \mathbf{K}B, \mathbf{K}(A \times B))$.

Лемма

$\mathbf{K}$ *нестрогий моноидальный функтор.*

Лемма

Естественность и когерентность η*:*

- $fmap\ f \circ \eta_A = \eta_B \circ f$;
- $*_{\hat{A},\hat{B}} \circ (\eta_A \times \eta_B) = \eta_{\hat{A} \times \hat{B}}$;
- $\tau_{A,B} \circ id_A \times \eta_B = \eta_{\widehat{A \times B}}$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота. Пример.

$$\tau_{\hat{A},\hat{B}} \circ id_{\hat{A}} \times \eta_{\hat{B}} =$$

раскрытие

$$[q, \textbf{let pure } x, y = \textbf{pure } (\pi_1 q), \pi_2 q \textbf{ in } \langle x, y \rangle] \circ [p, \langle \pi_1 p, \textbf{pure } (\pi_2 p) \rangle] =$$

композиция

$$[p, \textbf{let pure } x, y = \textbf{pure } (\pi_1 q), \pi_2 q \textbf{ in } \langle x, y \rangle [q := \langle \pi_1 p, \textbf{pure } (\pi_2 p) \rangle]]$$

подстановка

$$[p, \textbf{let pure } x, y = \textbf{pure } (\pi_1 p), \textbf{pure } (\pi_2 p) \textbf{ in } \langle x, y \rangle] =$$

правило редукции

$$[p,\ \textbf{pure } (\langle x, y \rangle)[x := \pi_1 p, y := \pi_2 p]]$$

подстановка

$$[p,\ \textbf{pure } (\langle \pi_1 p, \pi_2 p \rangle)] =$$

η-редукция

$$[p,\ \textbf{pure } p] =$$

определение η

$$\eta_{\widehat{A \times B}}$$

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Определение

$u_{\mathbb{1}} = [\blacksquare, \textbf{let pure}\ \_\_ = \_\_\ \textbf{in}\ \blacksquare].$

Лемма

$u_{\mathbb{1}} = \eta_{\mathbb{1}}$

Определение

$\tau_{\hat{A},\hat{B}} = [p, \textbf{let pure}\ x, y = \textbf{pure}\ (\pi_1 p), \pi_2 p\ \textbf{in}\ \langle x, y\rangle]$

Lemma

- $fmap\ \alpha_{\hat{A},\hat{B},\hat{C}} \circ \tau_{\hat{A}\times\hat{B},\hat{C}} = \tau_{\hat{A},\hat{B}\times\hat{C}} \circ (id_{\hat{A}} \times \tau_{\hat{B},\hat{C}}) \circ \alpha_{\hat{A},\hat{B},\mathbf{K}\hat{C}};$
- $\mathbf{K}(R_{\hat{A}}) \circ \tau_{\mathbb{1},\hat{A}} = R_{\mathbf{K}\hat{A}}.$

где $\alpha_{\hat{A},\hat{B},\hat{C}} = [p, \langle\pi_1(\pi_1 p), \langle\pi_2(\pi_1 p), \pi_2 p\rangle\rangle]$ и $R = \pi_2$.

Теоретико-категорная семантика. Полнота.

Из рассмотренных выше лемм легко заключить, что **K** – аппликативный функтор.
Положим $[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [x, M[x_i := \pi_i x]]$, тогда $M =_{\beta\eta} N \Leftrightarrow [\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$.

Спасибо за внимание!

Черепашка ниндзя Донателло пишет представителя класса типов `Applicative`: