Теоретико-категорная семантика модальной теории типов, основанной на интуиционистской эпистемической логике

Приложение А. Глоссарий по теории категорий.

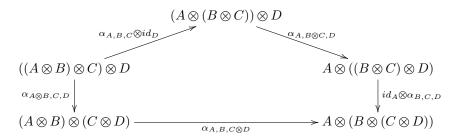
Определение 1. *Категория* C *состоит из:*

- Класса объектов $Ob_{\mathcal{C}}$;
- Для любых $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$ определено множество стрелок из A в B $Hom_{\mathcal{C}}(A, B);$
- $Ecnu \ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \ u \ g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C), \ mo \ g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C);$
- Для любого $A \in Ob_{\mathcal{C}}$, определен тождественный морфизм $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$;
- Для любой $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, для любой $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ и для любой $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Для любой $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B), f \circ id_A = f \ u \ id_B \circ f = f.$

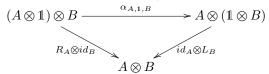
Определение 2. Моноидальная категория

Моноидальная категория – это категория $\mathcal C$ с дополнительной структурой:

- Бифунктор $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, который мы будем называть тензором;
- *Единица* 1;
- Изоморфизм, который мы будем называть ассоциатором: $\alpha_{A,B,C}$: $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C);$
- Изоморфизм $L_A : \mathbb{1} \otimes A \cong A$;
- Изоморфизм $R_A: A \otimes \mathbb{1} \cong A$;
- Первое условие когерентности (пятиугольник Маклейна) (данная диаграмма коммутирует):



• Второе условие когерентности (тождество треугольника):



• Моноидальная категория C называется симметрической, если для любых $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$, имеет место изоморфизм $\sigma_{A,B} : A \otimes B \cong B \otimes A$.

Определение 3. Декартово замкнутная категория

Декартово замкнутная категория – это категория с терминальным объектом, конечными произведениями и экспоненцированием.

Заметим, что декартово замкнутая категория – это частный случай (симметрической) моноидальной категории, в котором тензор – это произведения, а единица – это терминальный объект.

Определение 4. Нестрогий моноидальный функтор

 $\Pi ycmb \langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rangle \ u \langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rangle$ моноидальные категории.

Нестрогий моноидальный функтор $\mathcal{F}:\langle\mathcal{C},\otimes_1,\mathbb{1}\rangle\to\langle\mathcal{D},\otimes_2,\mathbb{1}'\rangle$ это функтор $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ с дополнительными естественными преобразованиями:

- $u: \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$;
- $*_{A,B}: \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B \to \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B).$

и условиями когерентности:

• Ассоциативность:

$$(\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}^{\mathcal{D}}} \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{F}B \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C)$$

$$*_{A,B} \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}B} \downarrow \qquad \qquad \downarrow id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} *_{B,C}$$

$$\mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C} \qquad \qquad \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B \otimes_{\mathcal{C}} C)$$

$$*_{A \otimes_{\mathcal{C}} B,C} \downarrow \qquad \qquad \downarrow *_{A,B \otimes_{\mathcal{C}} C}$$

$$\mathcal{F}((A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{C}} C) \xrightarrow{\qquad \mathcal{F}(\alpha_{A,B,C}^{\mathcal{C}})} \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} (B \otimes_{\mathcal{C}} C))$$

• Свойство левой единицы:

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F} A \xrightarrow{u \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}A}} \mathcal{F} \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F} A$$

$$\downarrow^{*_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}}, A}} \downarrow^{*_{\mathbb{1}_{\mathcal{C}}, A}}$$

$$\mathcal{F} A \longleftarrow \mathcal{F} (\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} A)$$

• Свойство правой единицы:

Определение 5. Тензорно-сильный функтор – это эндофунктор над моноидальной категорией с дополнительным естественным преобразованием и условиями когерентности для него (ниже соответствующие коммутирующие диаграмы):

$$\tau_{A,B}: A \otimes \mathcal{K}B \to \mathcal{K}(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes \mathcal{K}C \xrightarrow{\tau_{A \otimes B,C}} \mathcal{K}((A \otimes B) \otimes C)$$

$$\downarrow^{\kappa(\alpha_{A,B,C})} \downarrow^{\kappa(\alpha_{A,B,C})} \mathcal{K}(A \otimes B) \otimes C)$$

$$\downarrow^{\kappa(\alpha_{A,B,C})} \mathcal{K}(A \otimes B) \otimes C$$

$$\downarrow^{\kappa(\alpha_{A,B,C})} \mathcal{K}(A \otimes B) \otimes C$$

$$\downarrow^{\kappa(\alpha_{A,B,C})} \mathcal{K}(A \otimes B) \otimes C$$

Определение 6. Аппликативный функтор

Аппликативный функтор – это тройка $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$, где \mathcal{C} – это моноидальная категория, \mathcal{K} - это тензорно-сильный нестрогий моноидальный эндофунктор и $\eta: Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$ – это естественное преобразование, такое, что:

- $\bullet \ u = \eta_1;$
- $*_{A,B} \circ (\eta_A \otimes \eta_B) = \eta_{A \otimes B}$, то есть диаграмма коммутирует:

$$A \otimes B \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} \mathcal{K}A \otimes \mathcal{K}B$$

$$\downarrow^{*_{A,B}}$$

$$\mathcal{K}(A \otimes B)$$

• $\tau_{A,B} = *_{A,B} \circ \eta_A \otimes id_{\mathcal{K}B}$.

По умолчанию мы будем рассматривать ниже аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией.