# Теоретико-категорная семантика модальной теории типов, основанной на интуиционистской эпистемической логике

# 1 Приложение А. Глоссарий по теории категорий.

**Определение 1.** *Категория* C *состоит из:* 

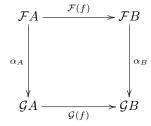
- Класса объектов  $Ob_{\mathcal{C}}$ ;
- Для любых объекта  $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$  определено множество стрелок (или морфизмов) из A в B  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ;
- Ecau  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$  u  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ , mo  $g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$ ;
- Для любого объекта  $A \in Ob_{\mathcal{C}}$ , определен тождественный морфизм  $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ ;
- Для любой стрелки  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ , для любой стрелки  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$  и для любой стрелки  $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$ ,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- Для любой стрелки  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ ,  $f \circ id_A = f$  и  $id_B \circ f = f$ .

#### Определение 2. Функтор

Пусть  $\mathcal{C},\mathcal{D}$  – категории. Функтором называется отображение  $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D},\ makoe,\ что:$ 

- $F: A \mapsto FA$ ,  $\epsilon \partial e \ A \in Ob_{\mathcal{C}}$ ;
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ;
- $F(id_A) = id_{FA}$ .

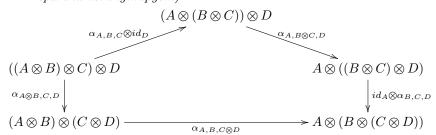
Определение 3. Естественное преобразование Пусть  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$  - функторы. Естественным преобразованием  $\alpha: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$  называется такое индексированное семейство стрелок  $(\alpha_X)_{X \in Ob_{\mathcal{C}}}$ , что для любых  $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$ , для любой стрелки  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , диаграмма коммутирует:



#### Определение 4. Моноидальная категория

Моноидальная категория – это категория  $\mathcal C$  с дополнительной структурой:

- Бифунктор  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ , который мы будем называть тензором;
- Единица 1;
- Изоморфизм, который мы будем называть ассоциатором:  $\alpha_{A,B,C}$ :  $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C);$
- Изоморфизм  $L_A : \mathbb{1} \otimes A \cong A;$
- Изоморфизм  $R_A: A \otimes \mathbb{1} \cong A$ ;
- Первое условие когерентности (пятиугольник Маклейна) (данная диаграмма коммутирует):



• Второе условие когерентности (тождество треугольника):

$$(A \otimes 1) \otimes B \xrightarrow{\alpha_{A,1,B}} A \otimes (1 \otimes B)$$

$$R_A \otimes id_B \xrightarrow{id_A \otimes L_B}$$

• Моноидальная категория C называется симметрической, если для любых  $A, B \in Ob_{\mathcal{C}}$ , имеет место изоморфизм  $\sigma_{A,B} : A \otimes B \cong B \otimes A$ .

#### Определение 5. Декартово замкнутная категория

Декартово замкнутная категория – это категория с терминальным объектом, конечными произведениями и экспоненцированием.

Заметим, что декартово замкнутая категория – это частный случай (симметрической) моноидальной категории, в котором тензор – это произведения, а единица – это терминальный объект.

### Определение 6. Нестрогий моноидальный функтор

 $\Pi ycmb \langle \mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \rangle \ u \langle \mathcal{D}, \otimes_2, \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \rangle$  моноидальные категории.

Нестрогий моноидальный функтор  $\mathcal{F}:\langle \mathcal{C},\otimes_1,\mathbb{1}\rangle \to \langle \mathcal{D},\otimes_2,\mathbb{1}'\rangle$  это функтор  $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$  с дополнительными естественными преобразованиями:

- $u: \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}};$
- $*_{A,B}: \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B \to \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B).$

и условиями когерентности:

• Ассоциативность:

$$\begin{array}{c|c} (\mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}A,\mathcal{F}B,\mathcal{F}C}^{\mathcal{D}}} \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{F}B \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C) \\ *_{A,B} \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}B} & & \downarrow id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}C) \\ \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C} & & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(B \otimes_{\mathcal{C}} C) \\ *_{A \otimes_{\mathcal{C}} B, \mathcal{C}} & & & \downarrow *_{A,B \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}} \\ \mathcal{F}((A \otimes_{\mathcal{C}} B) \otimes_{\mathcal{C}} C) & & & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} (B \otimes_{\mathcal{C}} C)) \end{array}$$

• Свойство левой единицы:

$$\mathbb{1}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F} A \xrightarrow{u \otimes_{\mathcal{D}} id_{\mathcal{F}A}} \mathcal{F} \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F} A 
\downarrow^{L_{\mathcal{F}A}} \downarrow \qquad \qquad \downarrow^{*1_{\mathcal{C}}, A} 
\mathcal{F} A \iff \mathcal{F} (\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathcal{C}} A)$$

• Свойство правой единицы:

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{id_{\mathcal{F}A} \otimes_{\mathcal{D}} u} & \mathcal{F}A \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{F}\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \\ R^{\mathcal{D}}_{\mathcal{F}A} & & & & \\ & \mathcal{F}A \longleftarrow & \mathcal{F}(R^{\mathcal{C}}_{A}) & & \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{C}} \mathbb{1}_{\mathcal{C}}) \end{array}$$

Определение 7. Тензорно-сильный функтор – это эндофунктор над моноидальной категорией с дополнительным естественным преобразованием и условиями когерентности для него (ниже соответствующие коммутирующие диаграмы):

$$\tau_{A,B}: A \otimes \mathcal{K}B \to \mathcal{K}(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes \mathcal{K}C \xrightarrow{\tau_{A \otimes B,C}} \mathcal{K}((A \otimes B) \otimes C)$$

$$\downarrow^{\kappa} \mathcal{K}(\alpha_{A,B,C})$$

$$A \otimes (B \otimes \mathcal{K}C) \xrightarrow{id_A \otimes \tau_{B,C}} A \otimes \mathcal{K}(B \otimes C) \xrightarrow{\tau_{A,(B \otimes C)}} \mathcal{K}(A \otimes (B \otimes C))$$

$$1 \otimes \mathcal{K}A \xrightarrow{\mu_{1,A}} \mathcal{K}(1 \otimes A)$$

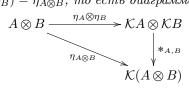
$$\downarrow^{\kappa} \mathcal{K}(R_A)$$

## Определение 8. Аппликативный функтор

Аппликативный функтор – это тройка  $\langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \eta \rangle$ , где  $\mathcal{C}$  – это моноидальная категория,  $\mathcal{K}$  - это тензорно-сильный нестрогий моноидальный эндофунктор и  $\eta: Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{K}$  – это естественное преобразование, такое, что:

•  $u = \eta_1$ ;

•  $*_{A,B} \circ (\eta_A \otimes \eta_B) = \eta_{A \otimes B}, \ mo \ ecmь \ duarpamma \ коммутирует:$ 



•  $\tau_{A,B} = *_{A,B} \circ \eta_A \otimes id_{\mathcal{K}B}$ .

По умолчанию мы будем рассматривать ниже аппликативный функтор над декартово замкнутой категорией.