

# Вектори и матрици

Иво Стратев

13 ноември 2017 г.

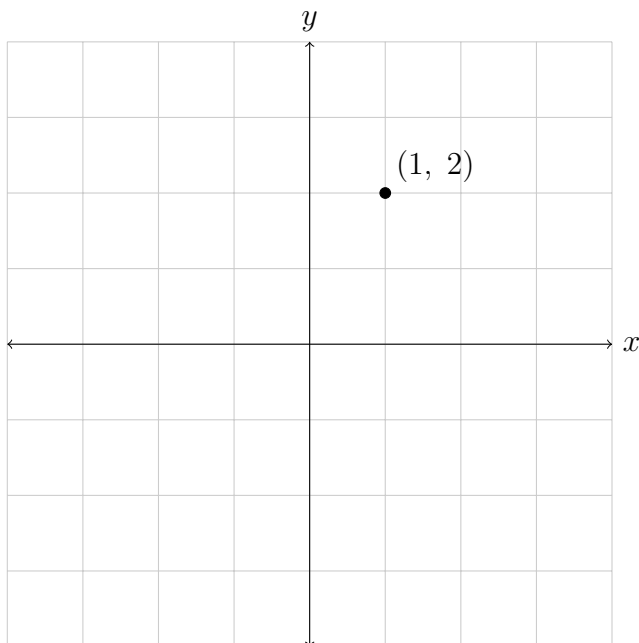
## Вектори

### Наредена двойка от реални числа

Произволна наредена двойка от реални числа записваме като:  $(a, b)$ , където  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Множеството от всички наредени двойки от реални числа означаваме с  $\mathbb{R}^2$  и на езика на математиакта записваме като:  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Подобно на начина, по който си мислим за реални числа като точки от една безкрайна права множеството  $\mathbb{R}^2$  можем да си мислим че е множеството от точки в равнината. По този начин на наредената двойка  $(1, 2)$  можем да съпоставим точка от равнината с координати  $(1, 2)$ , която се намира на разстояние 1 спрямо центъра на координатната система по абсисата и на разстояние 2 по ординатата . Графично:



## Наредена тройка от реални числа

Аналогично на понятието наредена двойка от реални числа можем да си въведем понятието наредена тройка от реални числа.

Произволна наредена тройка от реални числа записваме като:  $(a, b, c)$ , където  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Множеството от всички наредени тройки от реални числа означаваме с  $\mathbb{R}^3$  и на езика на математиакта записваме като:  $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Подобно на начина, по който си мислим за наредените двойки от реални числа катоточки в равнината. Можем да си мислим за една наредена тройка от наредени реални числа като точка от пространството. Така на произволна наредена тройка  $(x, y, z)$  от реални числа можем по единствен начин да съпоставим точка от пространството, която се намира на отместване  $x$  спрямо началото на координатната система по абсцисата (остта  $Ox$ ), отместване  $y$  спрямо началото на координатната система по ординатата (остта  $Oy$ ) и на отместване  $z$  по апликатата (остта  $Oz$ ).

## Наредена n-торка от реални числа

Понятието наредена n-торка от реални числа можем да изградим като обобщим това за наредена двойка, тройка.

Произволна наредена n-торка от реални числа записваме като:  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , където  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Аналогично множеството от всички наредени n-торки от реални числа ще обозначаваме с  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ .

При  $n > 3$  вече нямаме пряка геометрична репрезентация ...

## Вектор

Нека  $n$  е фиксирано естествено число (тоест  $n \in \mathbb{N}$ ).

Сега ако в множеството  $\mathbb{R}^n$  си дефинираме по подходящ начин операция събиране на наредени n-торки и умножение с реално число на наредена n-торка получаваме нещо, на което в математиката (а и не само там) наричаме вектор(и). Тези две операции дефинираме по следния начин:

Нека  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  са произволни наредени n-торки от реални числа. Тогава  $a + b \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ . Тоест извършваме покомпонентно операцията събиране на реални числа за всяка компонента.

Нека  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  е произволна наредена n-торка от реални числа и  $\lambda$  е произволно реално число. Тогава  $\lambda \cdot a \stackrel{def}{=} (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \dots, \lambda \cdot a_n)$ . Отново извършва-

ме покомпонентно операцията умножение на реални числа за всяка компонента.

Под вектор ние ще разбираме всяка наредена  $n$ -торка от реални числа имайки в предвид двете операции, които дефинирахме.

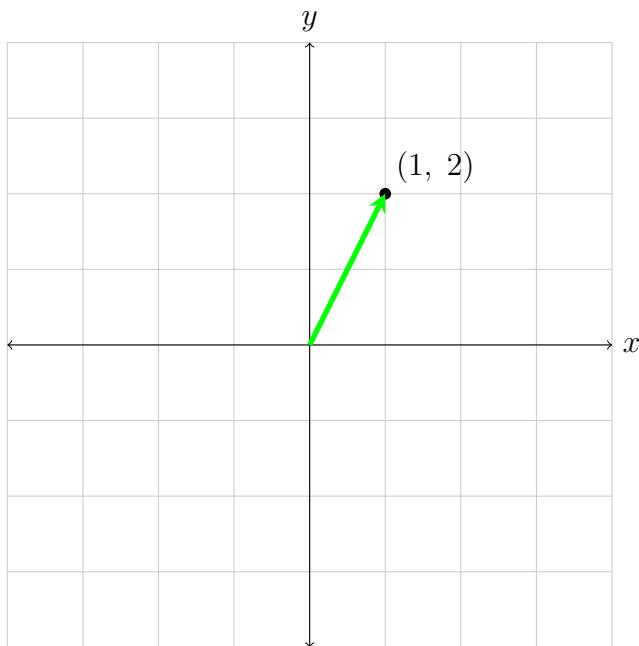
Забележка: по начина по-който дефинирахме операцията умножение с число е ясно, че можем да я прилагаме върху каквато и да е наредена  $k$ -торка (тоес и за наредена двойка, тройка, четворка и тн.). Обаче операцията събиране можем да прилагаме само върху вектори от един и същ тип (тоест не можем директно да съберем наредена двойка с тройка).

Забележка: честно ще изпускате да пишем точката за умножение подобно на изпускането ѝ което сте свикнали да правите в часовете по математика.

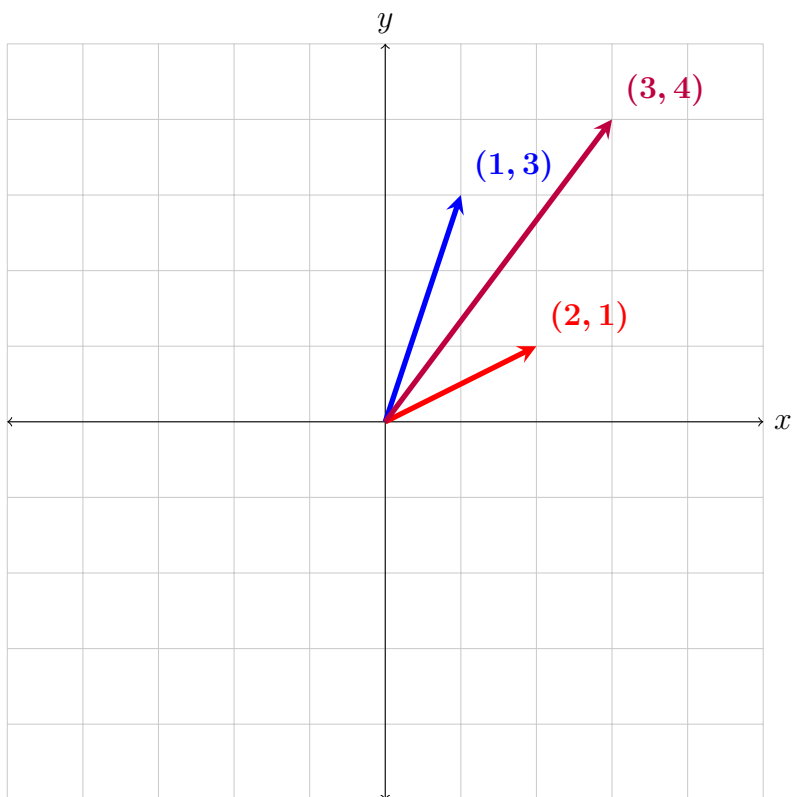
Забележка: понятието вектор в математика представлява абстракция която има широко приложение и различни математически обекти се превръщат във вектори с подходяща дефиниция на двете операции. В този курс ще се занимаваме с доста ограничени видове вектори, които обаче се приемат за фундаментални и основни и на практика почти всички вектори са подобни на тях.

### Геометрична интерпретация на двете операции в множеството $\mathbb{R}^2$

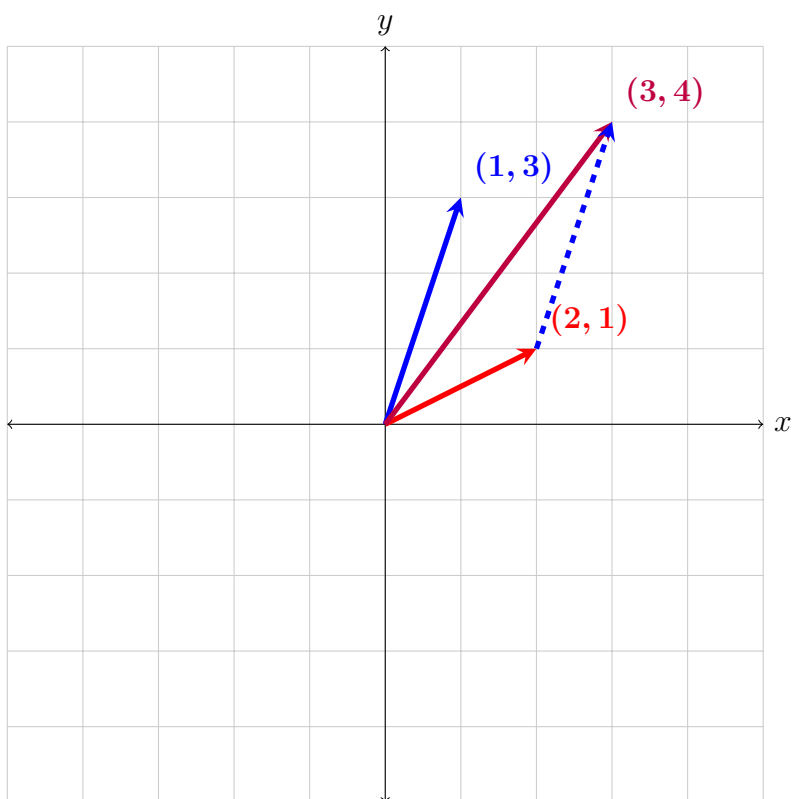
Геометрично векторите ще изобразяваме като вместо точка свържем центъра на координатната система и за край използваме стрелка в съответната посока. Тоест:



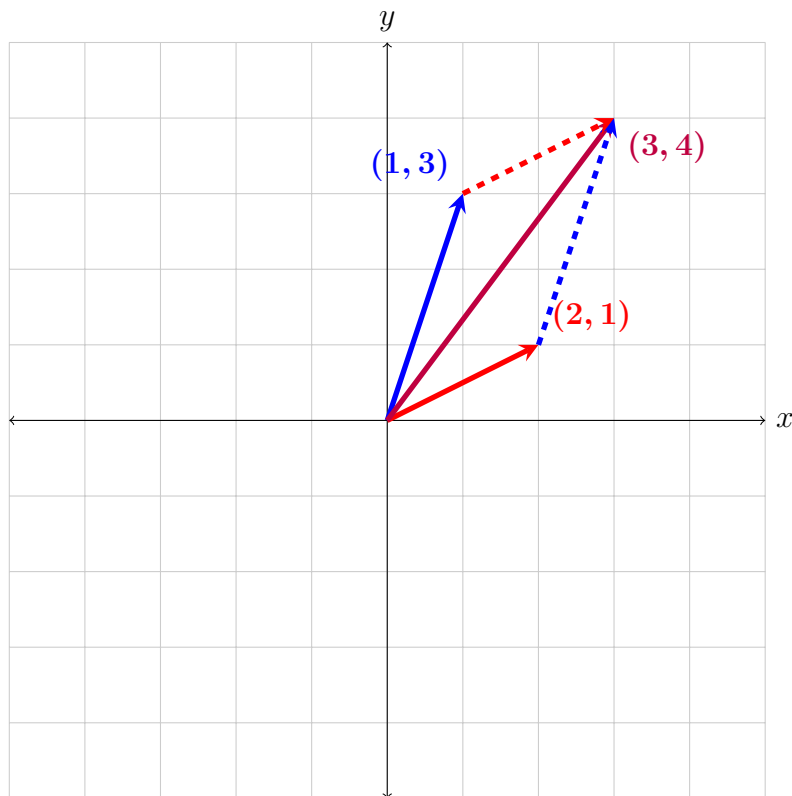
Нека сега съберем векторите:



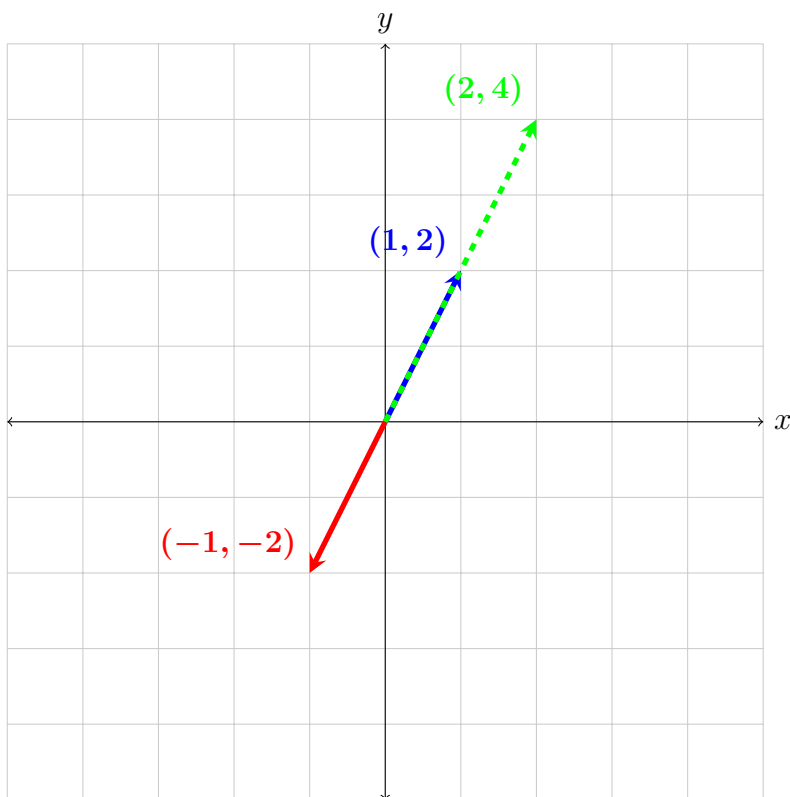
Казваме, че събираме векторите е по така нареченото правило на триъгълника. Тоест като в края на първия успоредно пренесем втория такаче началото на пренесения на съвпада с края на другия. Или:



Или казваме, че събираме вектори по правилото на успоредника, защото всъщност сборът на двата вектора е диагонал на успоредник построен със "страни" двата вектора, или:

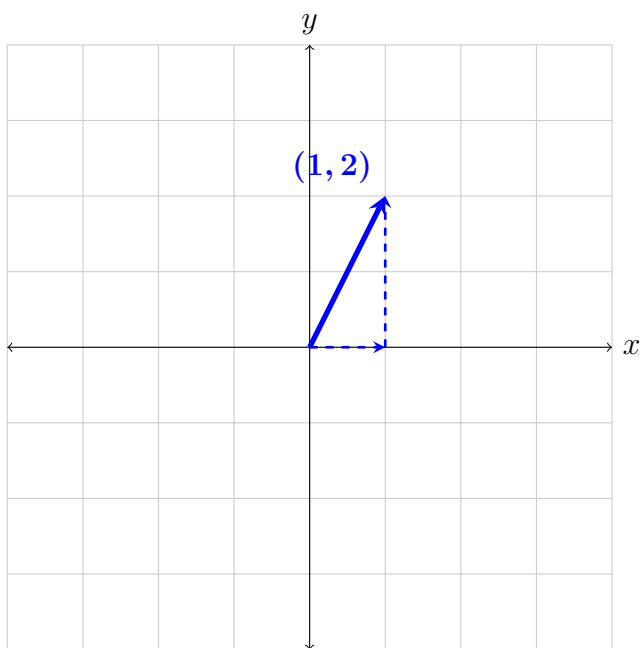


Нека сега да умножим вектора  $(1, 2)$  с числото 2 и с числото  $-1$ .



Очевидно всеки вектор геометрически се характеризира с посока и дължина. Сега ще получим формула за дължината на даден вектор, която след това ще обобщим за  $n$ -мерните вектори (наредните  $n$ -торки).

Нека си начертаем вектора  $(1, 2)$ , след което успоредно си пренесем разстоянието по ординатата в края на разстоянието по абсцисата:



Очевидно получаваме правоъгълен триъгълник с дължини на катетите 1 и 2 тогава от формулата на Питагор за хипотенузата на този триъгълник  $\rho$  получаваме:  $\rho^2 = 1^2 + 2^2$ , но понеже дължината винаги е неотриателно число получаваме:  $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ .

Нека сега сметнем дължината  $h$  на вектора  $2(1, 2) = (2, 4)$ :  
 $h^2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{2^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot (1^2 + 2^2)} = 2\sqrt{5}$

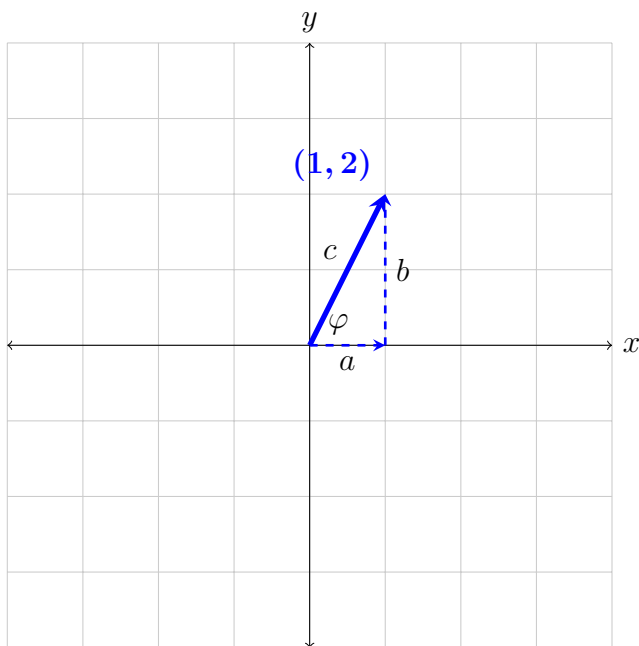
Ако  $a = (a_1, a_2)$  дължината на вектора  $a$  ще означаваме с  $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Сега ще си докажем едно много важно свойство на умножението на вектор с число:

Нека  $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  тогава  $\|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$

Доказателство:  $\|\lambda \cdot a\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \cdot \|a\| \quad \square$

Очевидно посоката на даден вектор можем да определим на базата ъгъла, който той сключва с абсцисата. На помощ ни идват любимите на учениците тригонометрични функции  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$ . Ще използваме горния чертеж в комбинация със стандартните означения за триъгълници:



Очевидно  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = \|(1, 2)\| = \sqrt{5}$

Така  $\sin(\varphi) \stackrel{def}{=} \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  и  $\cos(\varphi) \stackrel{def}{=} \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Нека сега се уверим, че умножавайки вектора  $(1, 2)$  с произволно положително реално число реално резултатния вектор ще има същата посока. Нека  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\mu > 0$  тогава за  $\mu(1, 2) = (\mu, 2\mu)$  имаме  $\sin(\psi) \stackrel{def}{=} \frac{\mu \cdot b}{\mu \cdot c} = \frac{\mu 2\sqrt{5}}{\mu 5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sin(\varphi)$  и  $\cos(\psi) \stackrel{def}{=} \frac{\mu \cdot a}{\mu \cdot c} = \frac{\mu \sqrt{5}}{\mu 5} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \cos(\varphi)$

Нека сега  $\mu < 0 \implies |\mu| = -\mu \implies \mu = -|\mu|$ .

Тогава за  $\mu(1, 2) = (\mu, 2\mu)$  имаме:

$$\sin(\psi) \stackrel{def}{=} \frac{-|\mu| \cdot b}{|\mu| \cdot c} = \frac{-|\mu| \cdot 2\sqrt{5}}{|\mu| \cdot 5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} = -\sin(\varphi)$$

$$\text{и } \cos(\psi) \stackrel{def}{=} \frac{-|\mu| \cdot a}{|\mu| \cdot c} = \frac{-|\mu| \cdot \sqrt{5}}{|\mu| \cdot 5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\cos(\varphi)$$

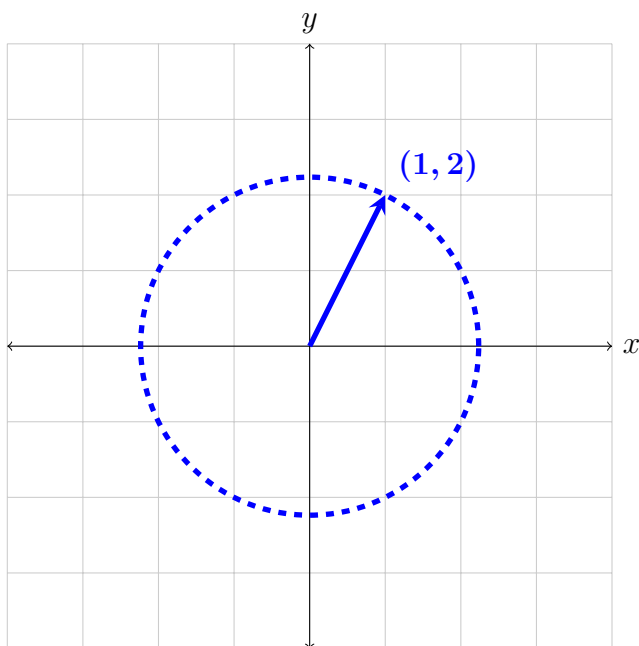
Очевидно умножавайки вектор с отрицателно реално число получаваме вектор с противоположна посока.

Ето защо когато умножаваме даден вектор с число още казваме, че го умножаваме със скалар или че скалираме дадения вектор. Защото по този начин променяме само дължината на дадения вектор, но неговата посока се запазва ако умножаваме с положително по знак число и получаваме противоположна посока в случай на отрицателно число.

Знаем, че модула на реално число играе ролята на разстояние от центъра на реалната права, точката отговаряща на числото 0. Също така знаем, че ако  $\lambda \in \mathbb{R}$  то  $|\lambda| = \sqrt{\lambda^2}$  И има точно две реални числа на разстояние  $|\lambda|$  -  $\lambda$  и  $-\lambda$ , защото върху една права имаме точно две посоки положителна и отрицателна.

В равнината обаче имаме безброй много посоки защото имаме безброй много ъгли, които дават различни двойка стойности  $(\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ , по-точно  $\varphi \in [0, \pi)$ , но това е отворен интервал от реални числа и с помощта на математиката (логиката и теорията на множествата) лесно се доказва, че интервала  $[0, \pi)$  съдържа безброй много реални числа (всъщност той съдържа толкова на брой реални числа колкото и самото множество  $\mathbb{R}$ ).

Така получаваме цяла окръжност от точки (вектори), които са на едно и също разстояние:





## Дефиниция на дължина на вектор

Дължина и разстояние за нас практически са едно и също понятие и така дължина на едномерен вектор всъщност съвпада с модула на числото, което е единствена компонента на вектора, тоест:

$$\|(a)\| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Двумерния случай вече е ясен, дължина там е мярката на радиуса на окръжността, която можем да опишем около даден вектор.

В тримерния случай по аналогия на идеята с окръжността получаваме, че дължина на тримерен вектор всъщност ще съвпада с радиуса на единствената сфера, която можем да опишем около дадения вектор, тоест:

$$\|(a, b, c)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Така за n-мерен вектор е естествено да стигнем до следната формула:

$$\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Очевидно отново ще имаме свойството  $\|\lambda \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n)\| = |\lambda| \cdot \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|$