Вектори и матрици

Иво Стратев

18 ноември 2017 г.

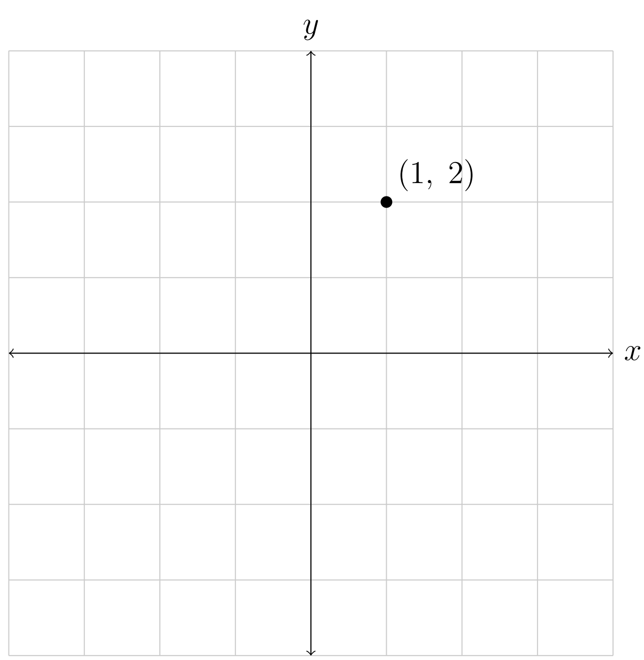
Вектори

Наредена двойка от реални числа

Произволна наредена двойка от реални числа записваме като: $(a,\ b)$, където $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Множеството от всички наредени двойки от реални числа означаваме с $\mathbb{R}^2$ и на езика на математиакта записваме като: $\mathbb{R}^2 = \{(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$

Подобно на начина, по който си мислим за реални числа като точки от една безкрайна права множеството $\mathbb{R}^2$ можем да си мислим че е множеството от точки в равнината. По този начин на наредената двойка $(1,\ 2)$ можем да съпоставим точка от равнината с координати $(1,\ 2)$, която се намира на разтояние 1 спрямо центъра на координаттната система по абцисата и на разтояние 2 по ординатата . Графично:



Наредена тройка от реални числа

Аналогично на понятието наредена двойка от реални числа можем да си въведем понятието наредена тройка от реални числа.
Произволна наредена тройка от реални числа записваме като: $(a,\ b,\ c)$, където $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Множеството от всички наредени тройки от реални числа означаваме с $\mathbb{R}^3$ и на езика на математиакта записваме като: $\mathbb{R}^3 = \{(a,\ b,\ c) \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$

Подобно на начина, по който си мислим за наредените двойки от реални числа катоточки в равнината. Можем да си мислим за една наредена тройка от наредени реални числа като точка от пространството. Така на произволна наредена тройка $(x,\ y,\ z)$ от реални числа можем по единствен начин да съпоставим точка от пространството, която се намира на отместване x спрямо началото на координатната система по абсцисата (остта Ox), отместване y спрямо началото на координатната система по ординатата (остта Oy) и на отместване z по апликатата (остта Oz).

Наредена n-торка от реални числа

Понятието наредена n-торка от реални числа можем да изградим като обобщим това за наредена двойка, тройка.

Произволна наредена n-торка от реални числа записваме като: $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, където $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$.

Аналогично множеството от всички наредени n-торки от реални числа ще обозначаваме с $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n = \{(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \mid a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}\}$.

При $n > 3$ вече нямаме пряка геометрична репрезентация ...

Вектор

Нека n е фиксирано естествено число (тоест $n \in \mathbb{N}$).

Сега ако в множеството $\mathbb{R}^n$ си дефинираме по подходящ начин операция събиране на наредени n-торки и умножение с реално число на наредена n-торка получаваме нещо, на което в математиката (а и не само там) наричаме вектор(и). Тези две операции дефинираме по следния начин:

Нека $a = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ и $b = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ са произволни наредени n-торки от реални числа. Тогава $a + b \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n)$. Тоест извършваме покомпонентно операцията събиране на реални числа за всяка компонента.

Нека $a = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ е произволна наредена n-торка от реални числа и λ е произволно реално число. Тогава $\lambda.a \stackrel{def}{=} (\lambda.a_1,\ \lambda.a_2,\ \ldots,\ \lambda.a_n)$. Отново извършваме покомпонентно операцията умножение на реални числа за всяка компонента.

Под вектор ние ще разбираме всяка наредена n-торка от реални числа имайки в предвид двете операции, които дефинирахме.

Забележка: по начина по-който дефинирахме операцията умножение с число е ясно, че можем да я прилагаме върху каквато и да е наредена k-торка (тоес и за наредена двойка, тройка, четворка и тн.). Обаче операцията събиране можем да прилагаме само върху вектори от един и същ тип (тоест не можем директно да съберем наредена двойка с тройка).

Забележка: честно ще изпускаме да пишем точката за умножение подобно на изпускането ѝ което сте свикнали да правите в часовете по математика.

Забележка: понятието вектор в математика представлява абстракция която има широко приложение и различни математически обекти се превръщат във вектори с подходяща дефиниция на двете операции. В този курс ще се занимаваме с доста ограничени видове вектори, които обаче се приемат за фундаментални и основни и напрактика почти всички вектори са подобни на тях.

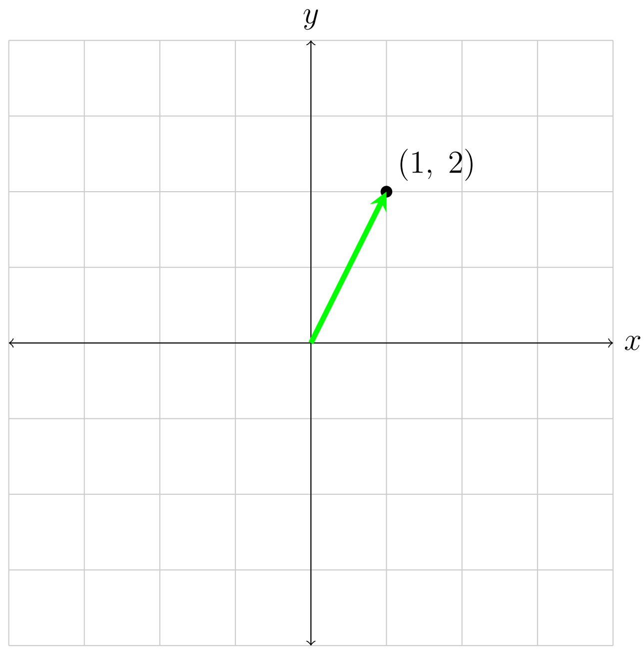
Примери:

$$(1,\ 2,\ 3,\ 4) + (2,\ 4,\ 6,\ 8) = (1+2,\ 2+4,\ 3+6,\ 4+8) = (3,\ 6,\ 9,\ 12)$$

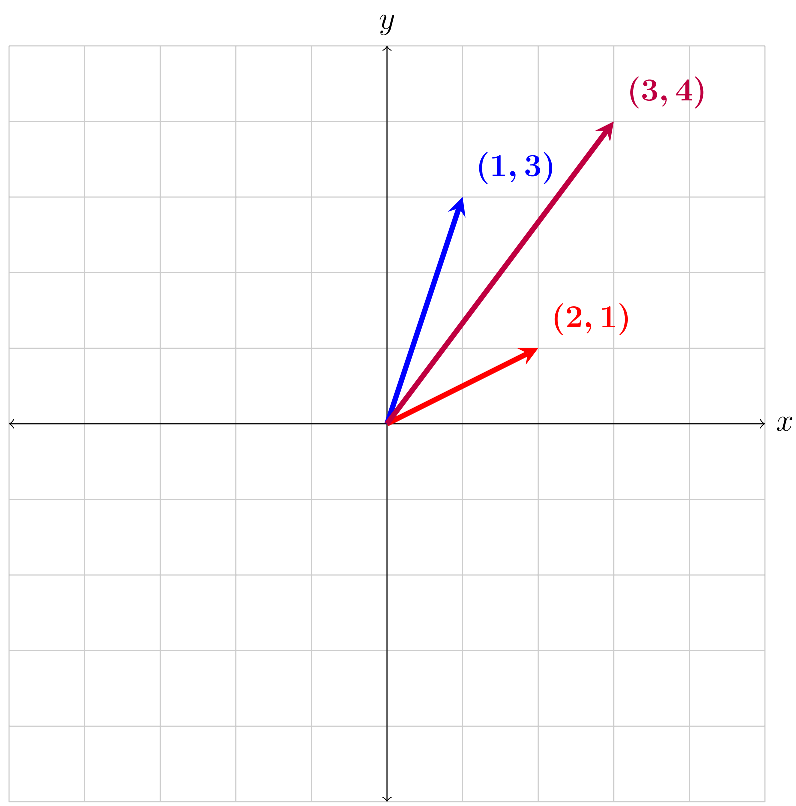
$$3(1,\ 2,\ 3,\ 4) = (3.1,\ 3.2,\ 3.3,\ 3.4) = (3,\ 6,\ 9,\ 12)$$

Геометрична интерпретация на двете операции в множеството $\mathbb{R}^2$

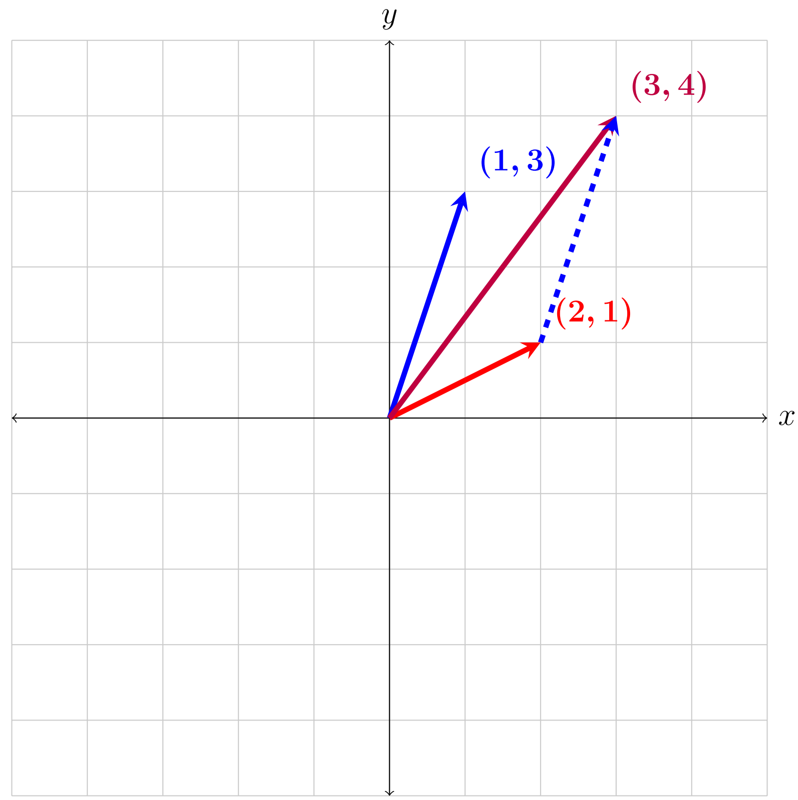
Геометрично векторите ще изобразяваме като вместо точка свържем центъра на координатната система и за край изпозлваме стрелка в съответната посока. Тоест:



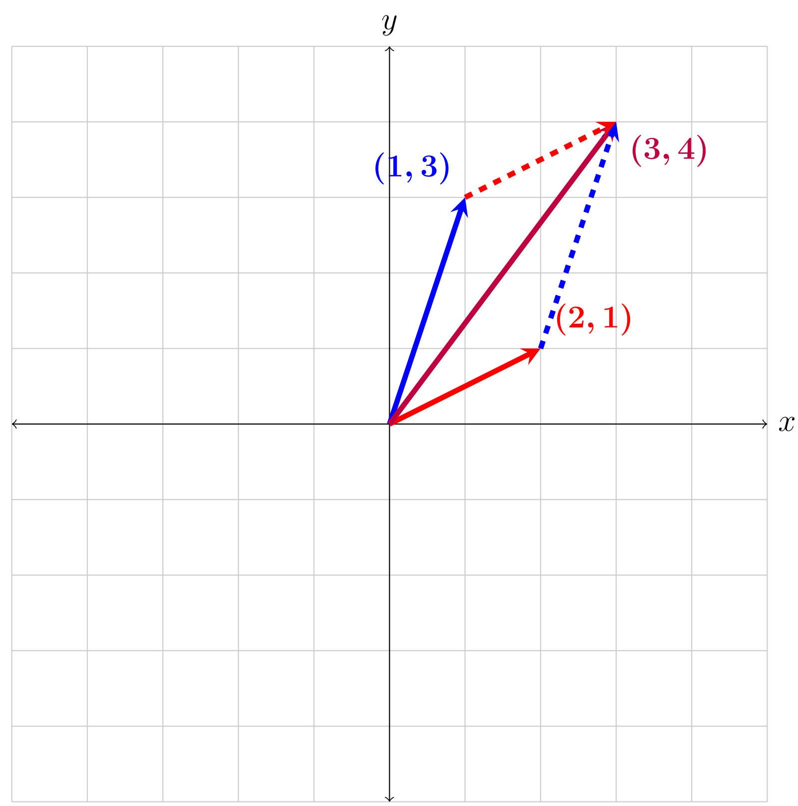
Нека сега съберем векторите:



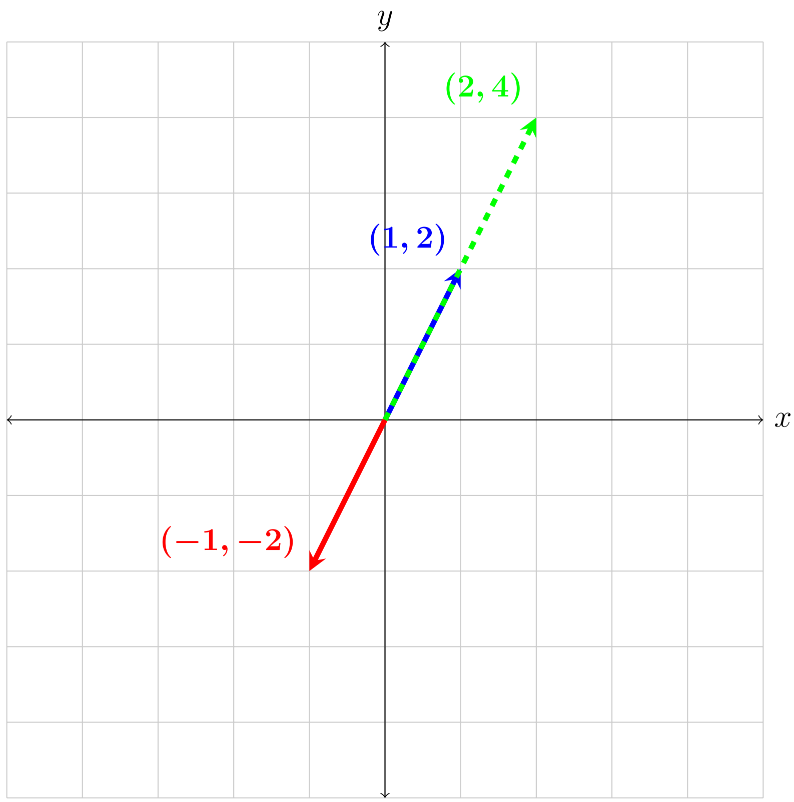
Казваме, че събираме векторите е по така нареченото правило на триъгълника. Тоест като в края на първия успоредно пренесем втория такаче началото на пренесения на съвпада с края на другия. Или:



Или казваме, че събираме вектори по правилото на успоредника, защото всъщност сборът на двата вектора е диагонал на успоредник построен със "страни"двата вектора, или:

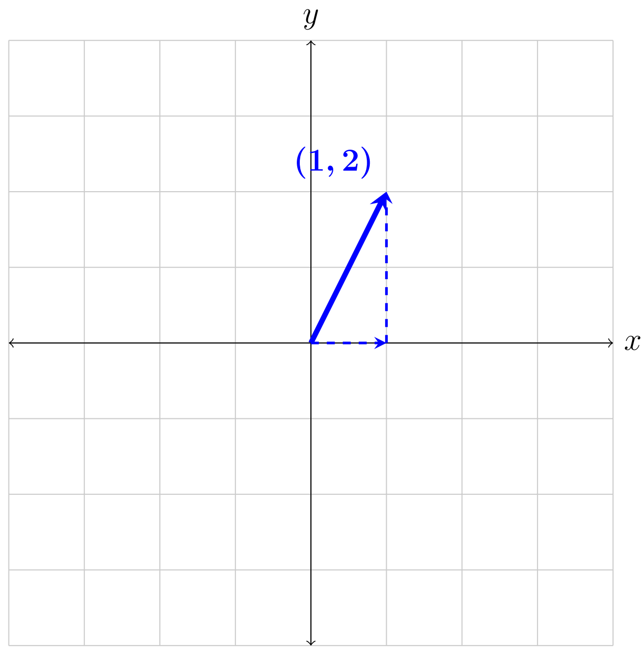


Нека сега да умножим вектора $(1,\ 2)$ с числото 2 и с числото -1.



Очевидно всеки вектор геометрически се характеризира с посока и дължина. Сега ще получим формула за дължината на даден вектор, която след това ще обобщим за n-мерните вектори (наредните n-торки).

Нека си начертаем вектора $(1,\ 2)$, след което успоредно си пренесем разтоянието по ординатата в края на разтоянието по абсцисата:



Очевидно получаваме правоъгален триъгълник с дължини на катетите 1 и 2 тогава от формулата на Питагор за хипотенузата на този тригълник ρ получаваме:
$\rho^2 = 1^2 + 2^2$, но понеже дължината винаги е неотриателно число получаваме:
$\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Нека сега сметнем дължината h на вектора $2(1,\ 2) = (2,\ 4)$:
$h^2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{2^2.1^2 + 2^2.2.^2} = \sqrt{2^2.(1^2 + 2^2)} = 2\sqrt{5}$

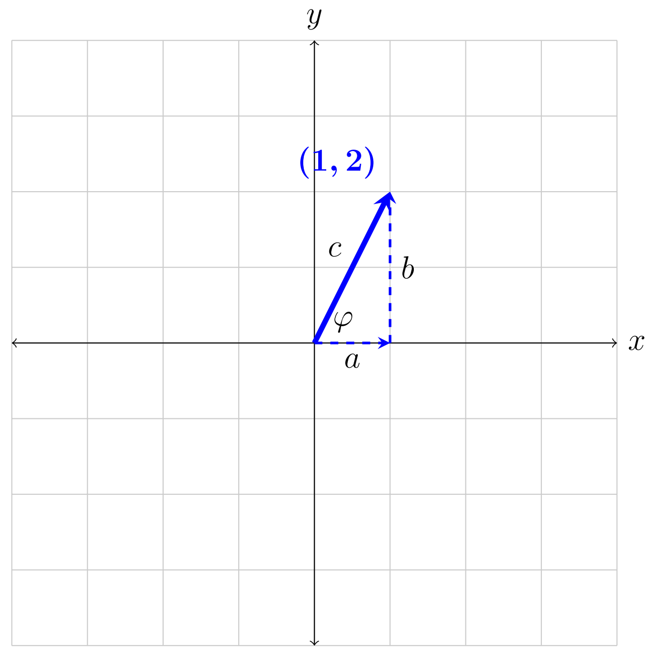
Ако $a = (a_1,\ a_2)$ дължината на вектора a ще означаваме с $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Сега ще си докажем едно много важно свойстово на умножението на вектор с число:

Нека $a = (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ тогава $\|\lambda.a\| = |\lambda|.\|a\|$

Доказателство: $\|\lambda.a\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} =$
$= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda|.\|a\| \quad \square$

Очевидно посоката на даден вектор можем да определим на базата ъгъла, който той сключва с абсцисата. На помощ ни идват любимите на учениците тригонометрични функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Ще използваме горния чертеж в комбинация със стандартните означения за триъгълници:



Очевидно $a = 1,\ b = 2,\ c = \|(1,\ 2)\| = \sqrt{5}$

Така $\sin(\varphi) \overset{def}{=} \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\cos(\varphi) \overset{def}{=} \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Нека сега се уверим, че умножавайки вектора $(1,\ 2)$ с произволно положително реално число реално резултатния вектор ще има същата посока. Нека $\mu \in \mathbb{R}$ и $\mu > 0$ тогава за $\mu(1,\ 2) = (\mu,\ 2\mu)$ имаме $\sin(\psi) \overset{def}{=} \frac{\mu.b}{\mu.c} = \frac{\mu 2\sqrt{5}}{\mu 5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sin(\varphi)$ и $\cos(\psi) \overset{def}{=} \frac{\mu.a}{\mu.c} = \frac{\mu\sqrt{5}}{\mu 5} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \cos(\varphi)$
Нека сега $\mu < 0 \implies |\mu| = -\mu \implies \mu = -|\mu|$.
Тогава за $\mu(1,\ 2) = (\mu,\ 2\mu)$ имаме:
$\sin(\psi) \overset{def}{=} \frac{-|\mu|.b}{|\mu|.c} = \frac{-|\mu|2\sqrt{5}}{|\mu|5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} = -\sin(\varphi)$
и $\cos(\psi) \overset{def}{=} \frac{-|\mu|.a}{|\mu|.c} = \frac{-|\mu|\sqrt{5}}{|\mu|5} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\cos(\varphi)$

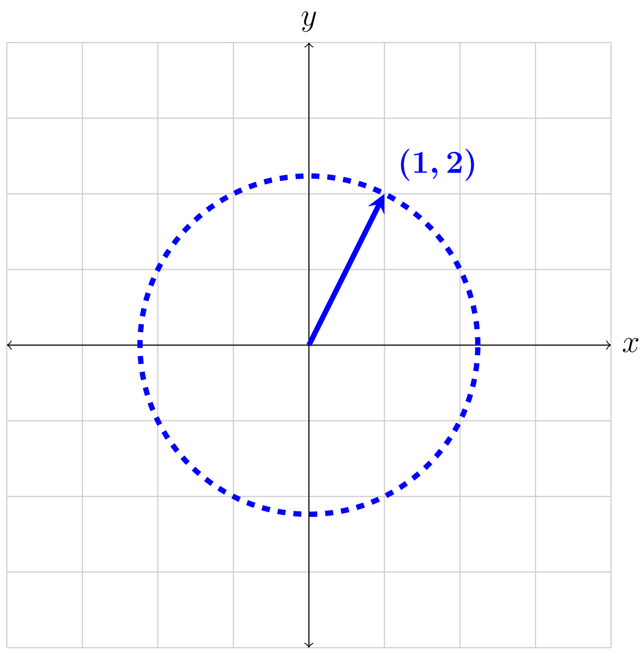
Очевидно умножавайки вектор с отрицателно реално число получаваме вектор с противоположна посока.

Ето защо когато умножаваме даден вектор с число още казваме, че го умножаваме със скалар или че скалираме дадения вектор. Защото по този начин променяме само дължината на дадения вектор, но неговата посока се запазва ако умножаваме с положително по знак число и получаваме противоположна посока в случай на отрицателно число.

Знаем, че модула на реално число играе ролята на разтояние от центъра на реалната права, токчата отговаряща на числото 0. Също така знаем, че ако $\lambda \in \mathbb{R}$ то $|\lambda| = \sqrt{\lambda^2}$ И има точно две реални числа на разтояние $|\lambda|$ - λ и $-\lambda$, защото върху една права имаме точно две посоки положителна и отрицателна.

В равнината обаче имаме безброй много посоки защото имаме безборй много ъгли, които дават различни двойка стойности $(\sin(\varphi),\ \cos(\varphi))$, по-точно $\varphi \in [0, \pi)$, но това е отворен интервал от реални числа и с помощта на математиката (логиката и теорията на множествата) лесно се доказва, че интервала $[0, \pi)$ съдържа безброй много реални числа (всъщност той съдържа толкова на брой реални числа колкото и самото множество $\mathbb{R}$).

Така получаваме цяла окръжност от точки (вектори), които са на едно и също разстояние:



Дефиниция за дължина на вектор

Дължина и разстояние за нас практически са едно и също понятие и така дължина на едномерен вектор всъщност съвпада с модула на числото, коеот е единствена компонента на вектора, тоест:

$\|(a)\| = \sqrt{a^2} = |a|.$

Двумерния случай вече е ясен, дължина там е мярката на радиоса на окръжността, която можем да опишем около даден вектор.

В тримерния случай по аналогия на идеята с окръжността получаваме, че дължина на тримерен вектор всъщност ще съвпада с радиоса на единствената сфера, която можем да опишем около дадения вектор, тоест:

$\|(a,\ b,\ c)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

Така за n-мерен вектор е естесвено да стигнем до следната формула:

$$\|(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Очевидно отново ще имаме свойстовото $\|\lambda.(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\| = |\lambda|.\|(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\|$

Матрици

Забележка: В този курс ще разглеждаме само матрици от реални числа.

Неформалната ни дефиниция за матрица с m реда и n стълба е: правоъгълна табличка от числа (с размерност $m \times n$).

Множеството от всички матрици с m реда и n стълба от рални числа ще бележим с $\mathbb{R}_{m\times n}$ и то за нас ще бъде следното множество:

$$\mathbb{R}_{m\times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; i = 1,\ \dots,\ m,\ j = 1,\ \dots,\ n \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Да направим Матриците вектори

Първото нещо, което забелязваме е че можем да "постройм"функция, която на всяка матрица от $\mathbb{R}_{m\times n}$ съпоставим точно един елемент на множеството $\mathbb{R}^{m.n}$. Една такава функция на езика на математиката е например следната:

$\varphi \ : \ \mathbb{R}_{m\times n} \to \mathbb{R}^{m.n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11},\ \dots,\ a_{1n},\ a_{21},\ \dots,\ a_{2n}, \dots,\ a_{m1},\ \dots,\ a_{mn})$$

Много ни се иска матриците да се държат като вектори, за целта искаме да си дефинирами операции събиране на матрци и умножение на матрица с число. Тоест много ни се иска да е изпълнено следното свойство:

Ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

да е изпълнено:
$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ (1)
$\varphi(\lambda.A) = \lambda.\varphi(A)$ (2)

От всичко, което знаем до сега последователно получаваме:

$\varphi(A) + \varphi(B) =$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\right) =$$

$= (a_{11},\ \dots,\ a_{1n},\ a_{21},\ \dots,\ a_{2n}, \dots,\ a_{m1},\ \dots,\ a_{mn})$
$+ (b_{11},\ \dots,\ b_{1n},\ b_{21},\ \dots,\ b_{2n}, \dots,\ b_{m1},\ \dots,\ b_{mn}) =$
$= (a_{11}+b_{11},\ \dots,\ a_{1n}+b_{1n},\ a_{21}+b_{21},\ \dots,\ a_{2n}+b_{2n}, \dots,\ a_{m1}+b_{m1},\ \dots,\ a_{mn}+b_{mn}) =$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}\right) = \varphi(A+B) \implies$$

$A + B =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$\lambda.\varphi(A) =$

$$= \lambda.\varphi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) =$$

$= \lambda.(a_{11},\ \dots,\ a_{1n},\ a_{21},\ \dots,\ a_{2n}, \dots,\ a_{m1},\ \dots,\ a_{mn}) =$
$= (\lambda.a_{11},\ \dots,\ \lambda.a_{1n},\ \lambda.a_{21},\ \dots,\ \lambda.a_{2n}, \dots,\ \lambda.a_{m1},\ \dots,\ \lambda.a_{mn}) =$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \lambda.a_{13} & \dots & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \lambda.a_{23} & \dots & \lambda.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & \lambda.a_{m3} & \dots & \lambda.a_{mn} \end{pmatrix}\right) = \varphi(\lambda.A) \implies$$

$$\lambda.A = \lambda.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \lambda.a_{13} & \dots & \lambda.a_{1n} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \lambda.a_{23} & \dots & \lambda.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda.a_{m1} & \lambda.a_{m2} & \lambda.a_{m3} & \dots & \lambda.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тоест операциите отново си ги дефинираме като покомпонентно извършване на съответните операции между реални числа.

Примери:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+3 & 0+0 & 7+1 \\ 2+2 & -5-3 & 4-4 & -3+0 \\ 1+6 & 0+0 & -1+0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 8 \\ 4 & -8 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.1 & 9.3 & 9.0 & 9.7 \\ 9.2 & 9.-5 & 9.4 & 9.-3 \\ 9.1 & 9.0 & 9.-1 & 9.-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 0 & 63 \\ 18 & -45 & 36 & -27 \\ 9 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

Транспониране на матрица

Нека имаме следната функция дефинирана за всяко $m,\ n \in \mathbb{N}$:

$\tau\ :\ \mathbb{R}_{m\times n} \to \mathbb{R}_{n\times m}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тоест τ е функция, която от една матрица констуира матрица, чиито стълбове съвпадат с редовете на подадената матрица.

Нека резултатната матрица от прилагането на функцията τ към матрицата A означим с A^t, тоест $A^t = \tau(A)$. Матрицата A^t ще наричаме транспонирана матрица на матрицата A, а самото действие ще наричаме транспониране.

Примери:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & -1 \\ -4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножение на матрици

Две матрици ще умножаваме по следното правило за всеки ред от лявата матрица и всеки стълб от дясната матрица сумираме произведението на елементите на еднакви позиции. Следователно броя на колоните на лявата и редовете на дясната матрица трябва да съвпадат ...

Нека $A \in \mathbb{R}_{m\times n},\ B \in \mathbb{R}_{n\times k}$ и нека $C = A.B \implies C \in \mathbb{R}_{m\times k}$.

Нека матриците A, B и C съкратено са записани по следния начин:

$A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{hl})_{n\times k}$ и нека $C = (c_{st})_{m\times k}$ тогава за елементите на матрицата C е изпълнено:

За всяко $s = 1,\ \dots,\ m,\ t = 1,\ \dots,\ k\ c_{st} = a_{s1}.b_{1t} + a_{s2}.b_{2t} + \dots + a_{sn}.b_{nt} = \sum_{v=1}^{n}(a_{sv}.b_{vt})$

Примери:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 7 & -1\\ -4 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1.1+2.0+3.(-4) & 1.2+2.5+3.2 & 1.3+2.7+3.5 & 1.(-1)+2.(-1)+3.1\\ 0.1+5.0+7.(-4) & 0.2+5.5+7.2 & 0.3+5.7+7.5 & 0.(-1)+5.(-1)+7.1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1+0-12 & 2+10+6 & 3+14+15 & -1-2+3\\ 0+0-28 & 0+25+14 & 0+35+35 & 0-5+7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11 & 18 & 32 & 0\\ -28 & 39 & 70 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.0+2.1+3.(-1)\\ 0.0+5.1+7.(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.3+(-1).4 & 1.(-2)+(-1).5\\ 1.3+0.4 & 1.(-2)+0.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -7\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.1+(-2).1 & 3.(-1)+(-2).0\\ 4.1+5.1 & 4.(-1)+5.0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -4\end{pmatrix}$$

Скаларно произведение на два вектора от $\mathbb{R}^n$

Очевидно на всеки вектор от множеството $\mathbb{R}^n$ директно можем да съпоставим единствена матрица от $\mathbb{R}_{1\times n}$ по следното правило:

$\psi\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{1\times n}$
$(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n) \mapsto \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}$

Очевидно по аналогичен начин на всеки вектор от множеството $\mathbb{R}^n$ директно можем да съпоставим единствена матрица от $\mathbb{R}_{n\times 1}$ по следното правило:

$\Psi\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{n\times 1}$

$$(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n) \mapsto \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

Под скаларно произведение на два вектора ние ще разбираме следната функция:

$\sigma\ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\sigma(a,\ b) = \sigma\left((a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n),\ (b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)\right) =$
$= \psi((a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)).\Psi((b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)) =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (a_i.b_i)$$

Въвеждаме и следния "съкратен" запис за скаларно произведение на два вектора:

$$< a,\ b >= \sigma(a,\ b) = \sigma\left((a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n),\ (b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} (a_i.b_i)$$

Примери:

$< (2),\ (3) >= 2.3 = 6$

$< (2,\ 3),\ (3,\ 4) >= 2.3 + 3.4 = 6 + 12 = 18$

$< (2,\ 3,\ 0,\ -1),\ (3,\ 4,\ 1,\ 0) >= 2.3 + 3.4 + 0.1 + (-1).0 = 6 + 12 + 0 + 0 = 18$

Да си припомним, че дефинирахме дължина на вектор a от $\mathbb{R}^n$ по следния начин:

$$\|a\| = \|(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Тогава е ясно и че $\|a\| = \sqrt{< a, a >}$