Exercício 1

Daniel Amorim Vilela de Salis - 123.145

(1) $f(n) = (n+1)^2$; $g(n) = n^2$

a) $f(n) = O(g(n))$

$(n+1)^2 = O(n^2)$

$(n+1)^2 <= c \cdot n^2$

$\frac{n^2+2n+1}{n^2} \leq c$

$1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c$; $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$

$\therefore$ Se $1 \leq C$, então $f(n) = O(g(n))$. Fazendo com que a expressão seja verdadeira.

b) $f(n) = \Omega(g(n))$

$(n+1)^2 = \Omega(n^2)$

$(n+1)^2 \geq c \cdot n^2$

$\frac{n^2+2n+1}{n^2} \geq c$; $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$

Se $1 \geq c$, então $f(n) = \Omega(g(n))$

$c_1 < \frac{n^2}{(n+1)^2} < c_2$

c) $f(n) = \Theta(g(n))$

$(n+1)^2 = \Theta(n^2)$

$(n+1)^2 \leq c_2 \cdot n^2$

$\frac{n^2+2n+1}{n^2} \leq c_2$

$c_1 \cdot n^2 \leq (n+1)^2$

$c_1 \leq \frac{n^2+2n+1}{n^2}$

- A partir dos limites já calculados temos que $c_2 \geq 1$ e $c_1 \leq 1$
- Dessa maneira temos que essa alternativa também é verdadeira.

(2)

a) A função é dada por $f(n)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} i+j\right)$. Em seu pior caso será $O(n^2)$

função	execuções
`int loops(int n){`	
`int i,j,r=0;`	$1+1+1$
`for(i=0; i<n; i++)`	n
`for(j=0; j<i; j++)`	$(n-1$
`r+=i+j;`	$n-1)$
`return r;`	1
`}`	

Assim temos:

$f(n) = 1+1+1+(n)\cdot(n-1+n-1)+1$

$f(n) = (n)\cdot(2n-2)+4$

$f(n) = 2n^2-2n+4$

b) Se $n=0$, a função retornará 0, não chegando a entrar no primeiro laço "for". Se $n=1$, a função também retornará 0, com a diferença que o primeiro laço será executado no entanto não será suficiente para atingir o segundo. Nos outros casos retornará a soma dos incrementos dos índices i e j.

(3)

Utilizando a indução temos que supor que a expressão seja verdadeira para $n-1$. Dessa forma temos:

$p(n-1) \Rightarrow 1+3+5+\ldots+(2(n-1)-1) = (n-1)^2$

$p(n-1) \Rightarrow 1+3+5+\ldots+(2n-3) = (n-1)^2$

$\therefore$

Para $p(n)$ temos:

$p(n) = \underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-3)}_{(n-1)^2} + (2n-1)$

$p(n) = (n-1)^2 + (2n-1)$

$p(n) = n^2-2n+1+2n-1 \Rightarrow p(n) = n^2$

• Assim vimos que a expressão continua sendo verdadeira para $n-1$

(4)

a) A função deste algoritmo é calcular a multiplicação de a por m, e a invariante do laço ocorre no trecho "$x = i \cdot m$"

b) A inicialização seria antes da primeira iteração, visto que $x=0$ e $m=0$ a invariante é satisfeita. Já a manutenção seria nas iterações, quando são executadas as operações $x=x+m$ e $i=i+1$. E por fim, na terminação o laço terminará quando $i=n$. Partindo da invariante $x=i\cdot m$ = $x=n\cdot m$, e assim o valor retornado pela função será $x=n\cdot m$

(5)

a) Este algoritmo calcula a quantidade de divisões que b faz por 2. O mesmo mantém a invariante do laço, sendo ela a quantidade de vezes sucessivas que b é dividido pelo número 2.

b) Quando olhamos para o caso em que b é par, o laço irá ser executado até que b seja 0 e assim retorna o valor atual de x conforme a execução. A mesma situação ocorre para quando b for ímpar, ou seja, o laço será executado até que b tenha valor 0 e retorna x de acordo com as execuções