ICE – Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 7 - DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

1) DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, a derivada de f' denomina-se derivada de ordem 2 ou a segunda derivada de f e indica-se por $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$. A derivada de f'' denomina-se derivada de terceira ordem de f e indica-se $f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}$.

A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f é: $f^{(x)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}[\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}]$.

Exemplo: Mostrar que $y = e^{2x} + e^{3x} + x$ é solução da equação diferencial: $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$

Resolução:

$y = e^{2x} + e^{3x} + x$	6y=	$6e^{2x} + 6e^{3x} + 6x$
$y' = 2e^{2x} + 3e^{3x} + 1$	-5y'=	$-10e^{2x} - 15e^{3x} - 5$
$y'' = 4e^{2x} + 9e^{3x}$	Y''=	$4e^{2x} + 9e^{3x}$
	Somando a última coluna obteremos	$6x - 5 =$ ao 2º membro da eq.

Ou seja, a função da é solução da equação.

2) DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NA FORMA PARAMÉTRICA

Seja y uma função de x definida pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [a,b] \end{cases}$

A derivada de y em relação x é: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

Exemplo: Ache y' para a curva: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$

Resolução: $y' = \dfrac{2\cos t}{-2\,\text{sen}\, t} = -\dfrac{\cos t}{\text{sen}\, t} = -\dfrac{x}{y}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1)Mostrar que a derivada de ordem n de

a) $y = \dfrac{1}{x}$ é $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Resolução:

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -x^{-2} \Rightarrow y'' = 2x^{-3} \Rightarrow y''' = -3.2.1.x^{-4} \Rightarrow y^{iv} = 4.3.2.1.x^{-5}$$

Assim, por indução teremos : $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Nota: Fatorial do número n: $n! = \begin{cases} 1, & se \quad n = 0, n = 1 \\ n.(n-1)! & se \quad n \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & se \quad n = 0, n = 1 \\ n.(n-1)(n-2)(n-3)..3.2.1 & se \quad n \geq 2 \end{cases}$

b) $y = e^{ax}$ é $y^{(n)} = a^n.e^{ax}$

Resolução:

$y' = ae^{ax} \Rightarrow y'' = a^2 e^{ax} \Rightarrow y''' = a^3 e^{ax}$ e assim sucessivamente , obtemos: $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

c) $y = \text{sen}\, x$ é $y^{(n)} = \text{sen}(x + n\dfrac{\pi}{2})$

Resolução:

$$y' = \cos x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y'' = -\text{sen}\, x = \text{sen}(x + \pi) \Rightarrow y''' = -\cos x = \text{sen}(x + \frac{3\pi}{2}),$$

assim por indução e com auxílio das identidades trigonométricas teremos: $y^{(n)} = \text{sen}(x + n\dfrac{\pi}{2})$

2) Verificar nos casos abaixo que a função y=f(x) é solução da equação diferencial dada.

a) $y = x.e^{2x}$ equação : $y'' - 4y' + 4y = 0$

Resolução: Calculando as derivadas e substituindo na equação teremos:

$y = e^{2x} + 2xe^{2x}$	4y=	$4e^{2x} + 8xe^{2x}$
$y' = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}$	-4y'=	$-16e^{2x} - 16xe^{2x}$
$y'' = 8e^{2x} + 4e^{2x} + 8xe^{2x}$	Y''=	$8e^{2x} + 8xe^{2x}$
	Somando a última coluna obteremos	0 = ao 2º membro da eq.

Ou seja, a função dada é solução da equação proposta.

b) $y = \ln x$ equação: $y'' + \dfrac{y'}{x} + y = \ln x$

Resolução: Substituindo: $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$ na equação teremos:

$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \ln x = \ln x$ como queríamos provar.

3) Determinar a equação da reta tangente à curva $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \\ t \in [0.2\pi] \end{cases}$ no ponto em que $t = \frac{\pi}{4}$

Resolução: $\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t}{-2\operatorname{sen} t} = -\frac{3\frac{x}{2}}{2\frac{y}{3}} = -\frac{9}{4}\frac{x}{y}$

Para $t = \frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} x = 2\cos \pi/4 = \sqrt{2} \\ y = 3\operatorname{sen} \pi/4 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Logo $m_t = \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}\frac{\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{3}{2}$

Portanto RT: $y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{2}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3\sqrt{2}$