CÁLCULO 1 – SEMANA 7- RETA TANGENTE E NORMAL

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ no ponto de tangência P(2,1).

RESOLUÇÃO:

Calculando o coeficiente angular da reta tangente no ponto P(2,1):

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Neste caso:

$P(2,1) = P(x_0, f(x_0))$, portanto:

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - 1}{\Delta x}$$

Este limite é indeterminado na forma $\frac{0}{0}$, observe:

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = \frac{f(2 + 0) - 1}{0} = \frac{f(2) - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Sempre que encontramos o coeficiente angular da reta tangente através do limite, de início temos um limite indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$ *, observe:*

$$m_{rt} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_1)}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0}$$

Voltando ao limite de exemplo:

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - 1}{\Delta x}$$

Para resolvermos esta indeterminação, começaremos expressando a função composta envolvida, sendo:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Temos que:

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - 2.(2 + \Delta x) + 1$$

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - 4 - 2\Delta x + 1$$

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - 2\Delta x - 3$$

Usando a adição ao quadrado:

$$(2 + \Delta x)^2 = 2^2 + 2.(2).(\Delta x) + \Delta x^2$$

$$(2 + \Delta x)^2 = 4 + 4\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(2 + \Delta x) = 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x - 3$$

$$f(2 + \Delta x) = \Delta x^2 + 2\Delta x + 1$$

Substituindo no limite:

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x + 1 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

Colocando em evidência o Δx no numerador:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x.(\Delta x + 2)}{\Delta x}$$

Simplificando :

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}.(\Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 2 = 0 + 2 = 2$$

Portanto o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto P é $m_{rt} = 2$.

Usando o coeficiente calculado e o ponto de tangência:

$m_{rt} = 2$ e   P(2,1)

Montamos a equação da reta tangente.

$$y - f(x_0) = m_{rt}.(x - x_0)$$

$$y - 1 = 2.(x - 2)$$

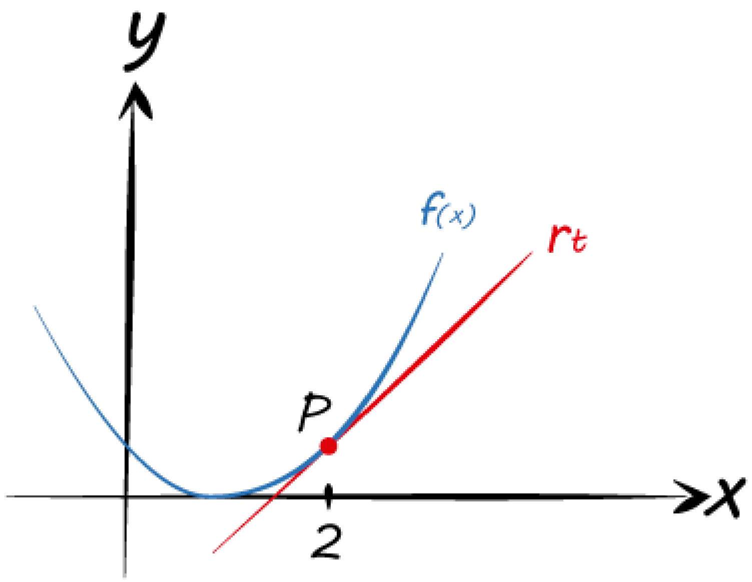
$$y - 1 = 2x - 4$$

$$y = 2x - 4 + 1$$

$$y = 2x - 3$$

Portanto:

$y = 2x - 3$ descreve uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ no ponto de tangência P(2,1).



Visualização da reta tangente ao gráfico da função f(x) no ponto P.

2) Determine as equações das retas tangentes ao gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ nos ponto de tangência $P_1(1,1)$, $P_2(4,2)$ e $P_3(9,3)$.

<u>RESOLUÇÃO:</u>

Este exemplo, a princípio, nos daria o triplo do trabalho, pois teríamos que calcular, através do limite mostrado acima, três coeficientes angulares. Com o objetivo de minimizar o trabalho repetitivo, calcularemos o coeficiente angular da reta tangente para um ponto genérico do gráfico de f(x).

Qualquer ponto que pertença ao gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ tem seu par ordenado descrito por:

$$P(x, f(x)) = P(x, \sqrt{x}).$$

Verifique, para $P_2(4,2)$ temos:

$$x = 4 \rightarrow y = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

Sendo assim, calcularemos o coeficiente angular para este ponto genérico:

P(x_0,f(x_0))= $P(x, \sqrt{x})$.

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Neste caso:

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Para resolvermos esta indeterminação, começaremos expressando a função composta envolvida, sendo: $f(x) = \sqrt{x}$

Temos que: $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$, substituindo no limite

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

Este limite é indeterminado na forma $\frac{0}{0}$, observe:

$$m_{rt} = \frac{\sqrt{x + 0} - \sqrt{x}}{0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0}$$

Neste caso, utilizaremos vamos utilizar a multiplicação e divisão pelo conjugado (conforme aprendemos nos limites- função raiz). Temos o numerador $\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = a - b$ cujo conjugado é $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$.

Aplicando no limite:

$$m_{rt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x. \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x. \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}. \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

O que resulta em:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+0} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Portanto o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto P genérico é $m_{rt} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Não obtivemos <u>um</u> coeficiente angular de <u>uma</u> reta tangente ao gráfico da função em <u>um</u> ponto P, mas sim uma <u>função coeficiente angular</u> que nos fornece <u>todos</u> os coeficientes de <u>todas</u> as retas que tangenciam o gráfico da função f(x).

Agora determinaremos as três equações:

Para $P_1(1,1)$ temos:

$$m_{rt} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$y - 1 = \frac{1}{2}.(x - 1)$$

$$y - 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Descreve uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de tangência $P_1(1,1)$.

Para $P_2(4,2)$ temos:

$$m_{rt} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Portanto:

$$y - 2 = \frac{1}{4}.(x - 4)$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - 1$$

$$y = \frac{x}{4} - 1 + 2$$

$$y = \frac{x}{4} + 1$$

Descreve uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de tangência $P_2(4,2)$.

Para $P_3(9,3)$ temos:

$$m_{rt} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Portanto:

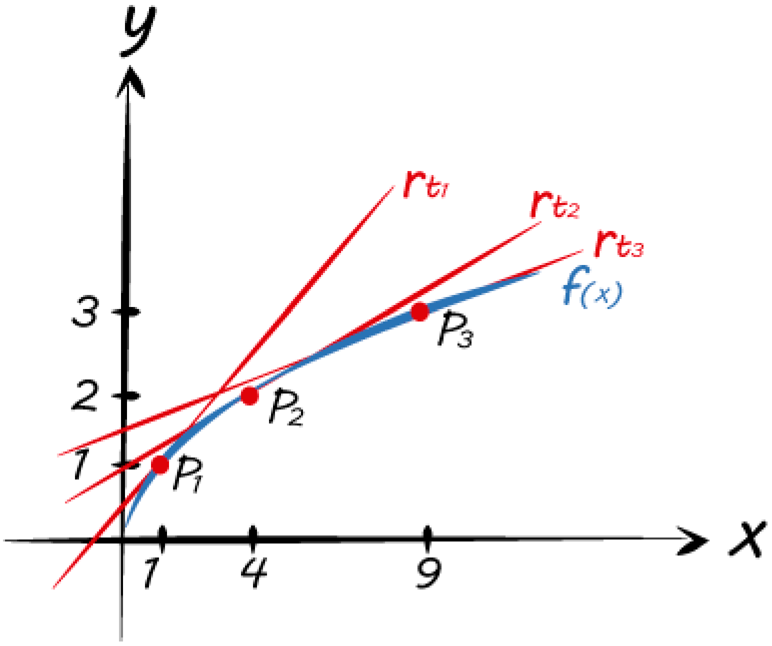
$$y - 3 = \frac{1}{6}.(x - 9)$$

$$y - 3 = \frac{x}{6} - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{x}{6} - \frac{3}{2} + 3$$

$$y = \frac{x}{6} + \frac{3}{2}$$

Descreve uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de tangência $P_3(9,3)$.



Visualização das retas tangentes ao gráfico da função f(x) nos pontos P_1, P_2 e P_3.