Primeira Lista de Àlgebra Linear II: Geometria Analítica

O Espaço R^2

1 - Questões do Livro Texto: exercícios 1 até 12 .

ÁLGEBRA LINEAR BÁSICA com GEOMETRIA ANALÍTICA – Paulo Parga, editora EDUR, Seropédica 2014 – 4ª ou 5ª edição.

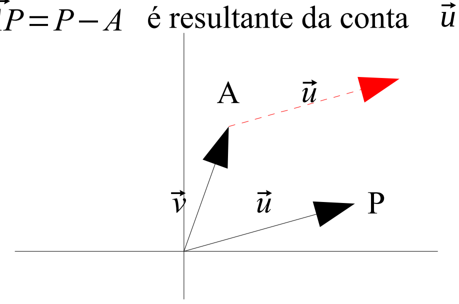
Questão 2: Dados vetores $\vec{u}=(u_{1,}u_2),\ \vec{v}=(v_{1,}v_2)\ e\ \vec{w}=(w_{1,}w_2)$, sendo k e λ números reais qualquer. Já dabemos que podemos realizar a adição de vetores e a multiplicação por escalar. Verifique que tais operações satisfazem as propriedades:

1. comutatividade da soma: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
2. associatividade da soma: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;
3. distributividade 1: $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$;
4. distributividade 2: $(k+\lambda)\vec{u}=k\vec{u}+\lambda\vec{u}$;
5. associatividade na multiplicação: $(k.\lambda)\vec{u}=k(\lambda\vec{u})$

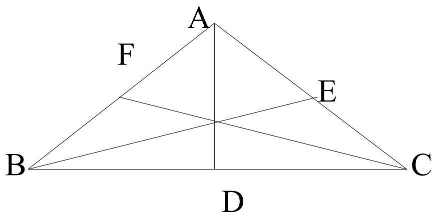
Quetão 3: Considere $P=(1,-1), Q=(-2,4)e\ R=(-\frac{3}{2},-3)$ e encontre

1. P+Q+R;
2. $\frac{1}{2}Q-P+2R$
3. um valor de λ e um valor de k tal que $P=\lambda Q+kR$. Faça a prova real e mostre que você acertou as contas.

Questão 3: Já sabemos, pela regra do paralelogramo a interpretação geométrica da adição de vetores $\vec{u}+\vec{v}$ que não possuem a mesma direção. Ou seja, o vetor soma é uma das diagonais do paralelogramo. Se $\vec{u}$ é representado por $\vec{OP}$ e $\vec{v}$ é representado por $\vec{OA}$, então escreva que a outra diagonal $\vec{A}P=P-A$ é resultante da conta $\vec{u}-\vec{v}$



Questão 4 (desafio): Seja ABC um triângulo qualquer com medianas AD, BE e CF.



Verifique que os passos abaixo estão corretos e podem ser utilizados para provar que

$$\vec{BE}+\vec{AD}+\vec{CF}=(0,0) \quad .$$

Passo 1: Pela regra do paralelogramo valem

- $\vec{BE}=\vec{BC}+\vec{CE}$,
- $\vec{AD}=\vec{AC}+\vec{CD}$,
- $\vec{CF}=\vec{CB}+\vec{BF}$

Passo2: Some as equações anteriores e obtenha

- $\vec{BE}+\vec{AD}+\vec{CF}=(\vec{CE}+\vec{AC})+\vec{CD}+\vec{BF}=(-\vec{EC}+\vec{AC})+\vec{CD}+\vec{BF}$;

Passo3: Como foram construídas medianas, então

- $\vec{BE}+\vec{AD}+\vec{CF}=\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{CB}+\frac{1}{2}\vec{BA}=\frac{1}{2}[(\vec{AC}+\vec{CB})+\vec{BA}]=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BA})$.

Questão 4:

4.1) Encontre as equações paramétricas e cartesianas da reta *r* que passa por A=(1,2) e B=(2,1). A reta *r intercepta o eixo x? Em que ponto?*

4.2) Encontre um vetor unitário na direção de $\vec{AB}$. Existe mais de um? Quantos?

4.3) Quais são as coordenadas do ponto que divide o segmento AB ao meio?

4.4) Encontre uma reta ortogonal a reta *r e* que passa pelo ponto médio do segmento AB

Questão 5: Calcule a distância entre o ponto $A=(\cos\theta, sen\theta)$ e a origem. Em que figura geométrica estão todos os pontos do R^2 com as coordenadas desse tipo?

Questão 6: Verifique se os pontos (1,2) , (2,1) e (2,-2) estão na mesma reta.

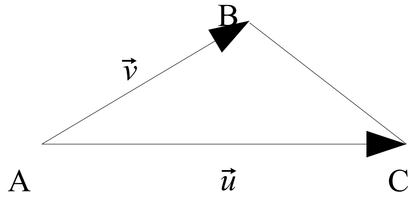
Questão 7: Exercício sobre o produto interno. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer e verifique que

7.1) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=\|\vec{u}\|^2$,

7.2) $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|^2+2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\|\vec{v}\|^2$,

7.3) $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Questão 8: Considere um triangulo ABC qualquer de lados $a=\|\vec{BC}\|,\ b=\|\vec{AC}\|\ e\ c=\|\vec{AB}\|$ e chamemos de Â o ângulo entre $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Lembrando que o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer não nulos satisfaz $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\beta)$ e utilizando os resultados do exercício 7, verifique que vale a lei dos cossenos, isto é,



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A}),$$

Questão 9: Desigualdades importantes:

9.1) Desigualdade de Schwartz: $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|\leq\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, pode ser demonstrada utilizando que $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\beta)$ e que $|\cos(\beta)|\leq 1$.

9.2) Desigualdade triangular: $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

Dica: A desigualdade 9.2 pode ser obtida utilizando a expressão $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle$ *e a desigualdade de Schwartz.*

Questão 10: Determine os ângulos do triângulo cujos vértices são A= (1,2), B= (2,4) e C= (4,2). Encontre as coordenadas de um quarto ponto D de forma que ABCD formam um parelelogramo.

Questão 11: Encontre as distâncias

11.1) Entre o ponto (1,-1) e a reta *r* de equações paramétricas *x=1 + 2t* e *y=2-3t;*

11.2) Entre as retas *r* do item anterior e a reta de equação cartesiana *3x+2y=7.*