2 - $z = 4 - x^2 - 6y^2$ ponto: $P(1,1)$

1

a) $u = (1,0)$ $\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = -2x = -2$

Descendo

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -12y = -12$

$\frac{\partial F}{\partial u}(1,1) = \nabla F(1,1) \cdot \frac{u}{\|u\|} = (-2,-12) \cdot \frac{(1,0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{-2}{1} = -2$

b) $u = (1,1)$ $(-2,-12) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{-2-12}{\sqrt{2}} = \frac{-14}{\sqrt{2}}$ Descendo

c) Na direção e sentido do vetor gradiente $(-2,-12)$

1. Dê a equação do plano tangente à superfície $-x^2 + 2y^2 = 2xz^3 - 1$ no ponto $(1,1,1)$

$G(x,y,z) = -x^2 + 2y^2 - 2xz^3 + 1$

$\nabla G(x,y,z) = (-2x - 2z^3, 4y, -6xz^2)$

$\nabla G(1,1,1) = (-2-2, 4, -6) = (-4, 4, -6)$

Então o vetor normal à superfície S no ponto $(1,1,1)$ é $(-4,4,-6)$

Novo plano tang.: $-4x + 4y - 6z + D = 0$

$-4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + D = 0 \qquad D = 6$

Eq. do plano tang: $-4x + 4y - 6z + 6 = 0$

2

tilibra

2

2. Dê a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no ponto $(0,0,1)$.

$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$\nabla G(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla G(0,0,1) = (0,0,2)$ ← vetor normal

$0x + 0y + 2z + D = 0$

$2 \cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = -2$

Eq. do plano $= 2z - 2 = 0 \rightarrow z = 1$

3. Dê a equação do plano tangente à superfície dada pelo gráfico da função $f(x,y) = y^2 - xy$ no ponto $(1,2,2)$

$f(x,y) = y^2 - xy \rightarrow z = y^2 - xy \rightarrow G(x,y,z) = y^2 - xy - z$

$\nabla G(x,y,z) = (-y, 2y - x, -1)$

$\nabla G(1,2,2) = (-2, 2 \cdot 2 - 1, -1) = (-2, 3, -1)$ ← vetor normal

$-2x + 3y - z + D = 0$

$-2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 + D = 0 \quad D = -2$

Eq. do plano: $-2x + 3y - z - 2 = 0$

Se (i) $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, então f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0)

(ii) $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em (x_0, y_0)

(iii) $B^2 - AC > 0$ então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0)

1. Localize e classifique os pontos críticos da função:

3

$f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6x,\ 3y^2 - 3) = (0,0)$

$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ $\quad 6x(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$ ou $x = 0$

$y = -1$ ou $y = 1$

então os ptos críticos são: $(0,-1)$ $(0,1)$ $(1,-1)$ $(1,1)$

$A = 12x - 6$

$B = 0$

$C = 6y$

em $(0,1)$ temos

$A = -6$

$B = 0$ $\quad B^2 - AC = 36 > 0$ pto de sela

$C = 6$

em $(0,-1)$ temos

$A = -6$

$B = 0$ $\quad B^2 - AC = -36 < 0$

$C = -6$ $\quad A < 0$

máx relativo

em $(1,-1)$ temos

$A = 6$

$B = 0$ $\quad B^2 - AC = 36 > 0$ pto de sela

$C = -6$

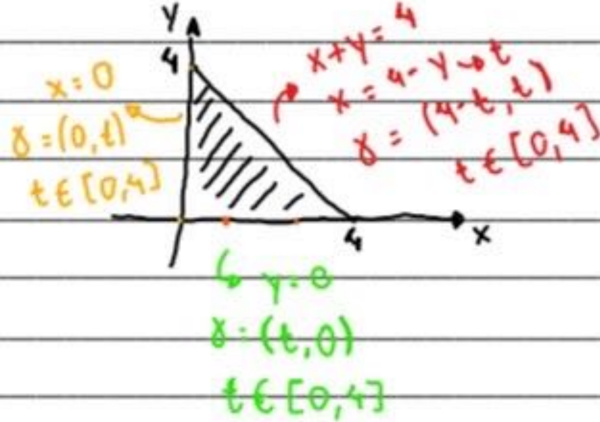
em $(1,1)$ temos

$A = 6$

$B = 0$ $\quad B^2 - AC = -36 < 0$ $\quad$ mínimo relativo

$C = 6$ $\quad A > 0$

$f(x,y) = (x-2)^2 y + y^2 - y \to D\{(x,y) \in D;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4\}$



4

no interior:

$\nabla f(x,y) = (2(x-2)y,\ (x-2)^2 + 2y - 1)$

$$\begin{cases} 2(x-2)y = 0 \\ (x-2)^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$x - 2 = 0 \quad x = 2 \quad \boxed{y = 0} \to \begin{matrix} x = 1 & \cancel{(1,0)} \\ x = 3 & \cancel{(3,0)} \end{matrix}$

$y = 1/2 \quad (2, 1/2)$

na borda

4

$\gamma = (t, 0)$

$f(\gamma(t)) = (t-2)^2 \cdot 0 + 0^2 - 0 = 0$

$\gamma = (0, t)$

$f(\gamma(t)) = (0-2)^2 \cdot t + t^2 - t \to t = \cancel{-\frac{3}{2}}$

$t = [0,4] \quad t = 4 \to (0,4)$

$\qquad\qquad\quad t = 0 \to (0,0)$

$\gamma = (4-t, t)$

$f(\gamma(t)) = (4-t-2)^2 \cdot t + t^2 \cdot t = \cancel{t \cdot -2}$

$t = 1$

$\gamma(t) = (4-t, t)$

$(1) = (3, 1)$

$t = 4 \to (0,4)$

$t = 0 \to (4,0)$

$F(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ mín

5

Aula 27 - Multiplicadores de Lagrange

1- $F(x,y) = x^2 - y^2$ sujeita a restrição $x^2 + y^2 = 1$

$\nabla F(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

$(2x, -2y) = \lambda (2x, 2y)$

$(2x, -2y) = (2\lambda x, 2\lambda y)$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{x = 0} \rightarrow 0^2 + y^2 = 1$

$y = \pm 1$

pontos $(0,1)$ $(0,-1)$

$\boxed{\lambda = 1} \xrightarrow{2^a\ eq} -2y - 2y = 0 \rightarrow y = 0$

$x^2 + 0^2 = 1$

$x = \pm 1$

pontos $(1,0)$ $(-1,0)$

5

testando em $F(x,y) = x^2 - y^2$

$$\left.\begin{aligned} F(0,1) &= 0^2 - 1^2 = -1 \\ F(0,-1) &= 0^2 - (-1)^2 = -1 \end{aligned}\right\} \text{mínimo}$$

$$\left.\begin{aligned} F(1,0) &= 1^2 - 0 = 1 \\ F(-1,0) &= -1^2 - 0 = 1 \end{aligned}\right\} \text{máximo}$$