ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 7

Prof. Roseli Alves de Moura

Conteúdo:

IV – Aplicação da Derivada:

Derivadas de Ordem Superior

Estudo da Reta Tangente

Derivação Implícita

Fórmula de Taylor → séries

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Consiste em derivar uma função inúmeras vezes, de forma geral.
Contudo deve-se ter cuidado com a simbologia adotada. Exemplo:

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f^{(3)}(x) = 24x^1$$
$$f^{(4)}(x) = 24x^0$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$

$$f(x) = x^4$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$
$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$$
$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = 24x$$

etc

$$\boxed{\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)}$$

$n \Rightarrow$ quant. // derivadas $(n+1)$

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR – EXEMPLO 2

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^4$$
$$f''(x) = 20x^3$$
$$f^{(3)}(x) = 60x^2$$
$$f^{(4)}(x) = 120x$$
$$f^{(5)}(x) = 120$$
$$f^{(n)}(x) = 0,$$
$$para\, n > 5$$

Observe a notação seguinte que será com frequência útil.
Para todo inteiro positivo n, o símbolo n! (lê-se 'n fatorial") é definido como sendo o produto de todos os números positivos de 1 a n: n! = 1.2.3...n
Assim, 1! = 1, 2! = 1.2 = 2, 3! = 1.2.3 = 6, etc
Se derivarmos y = x^n repetidamente, chegaremos a um padrão:

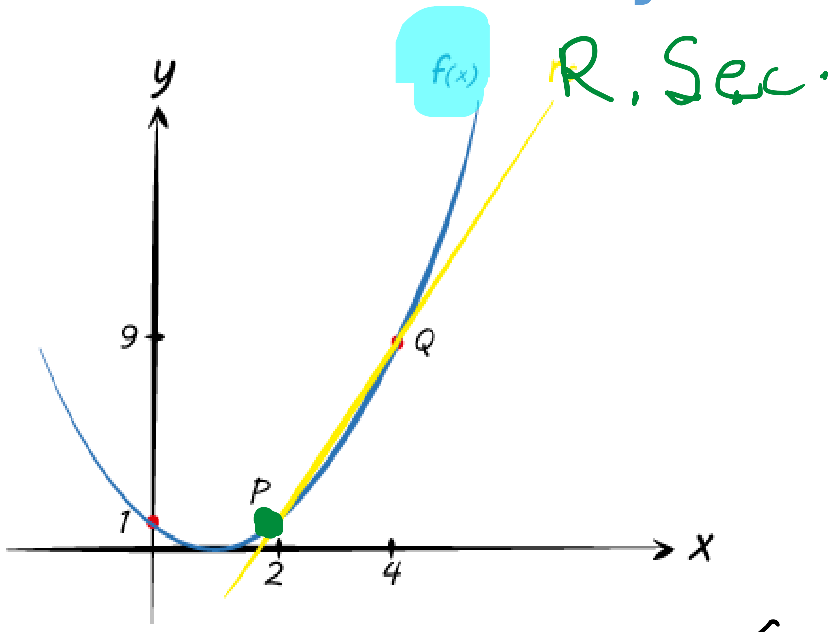
5! = 5.4.3.2.1 = 120

Polinomial

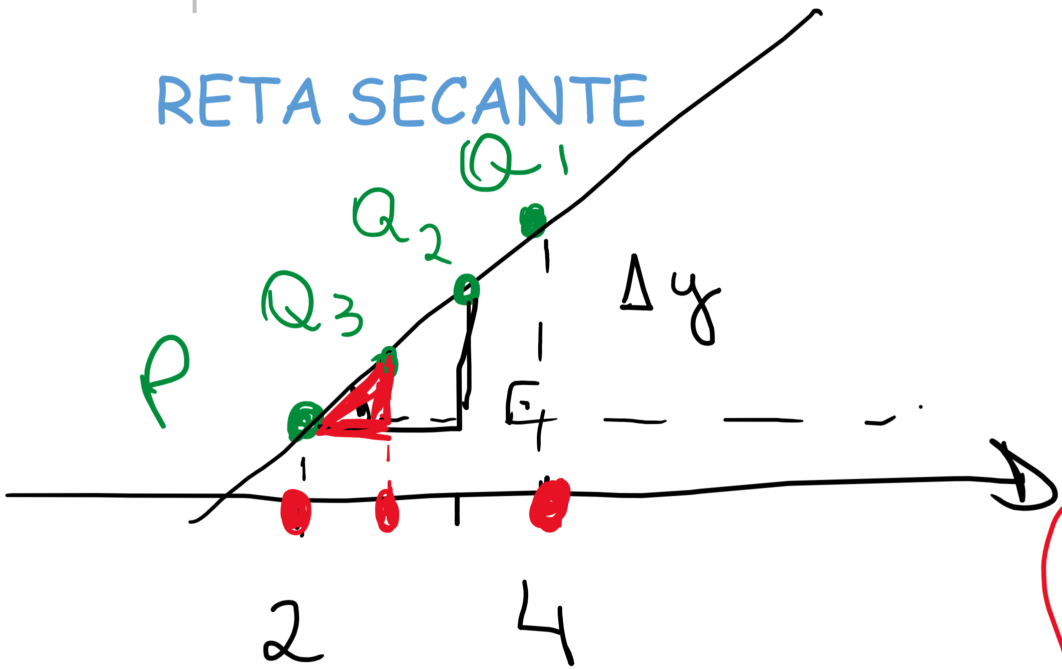
$$f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$
$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$f^{(4)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$
$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\big(n-(n-1)\big)x^{n-n} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1 = n!$$
$$f^{(k)}(x) = 0,$$
$$para\, k > n$$

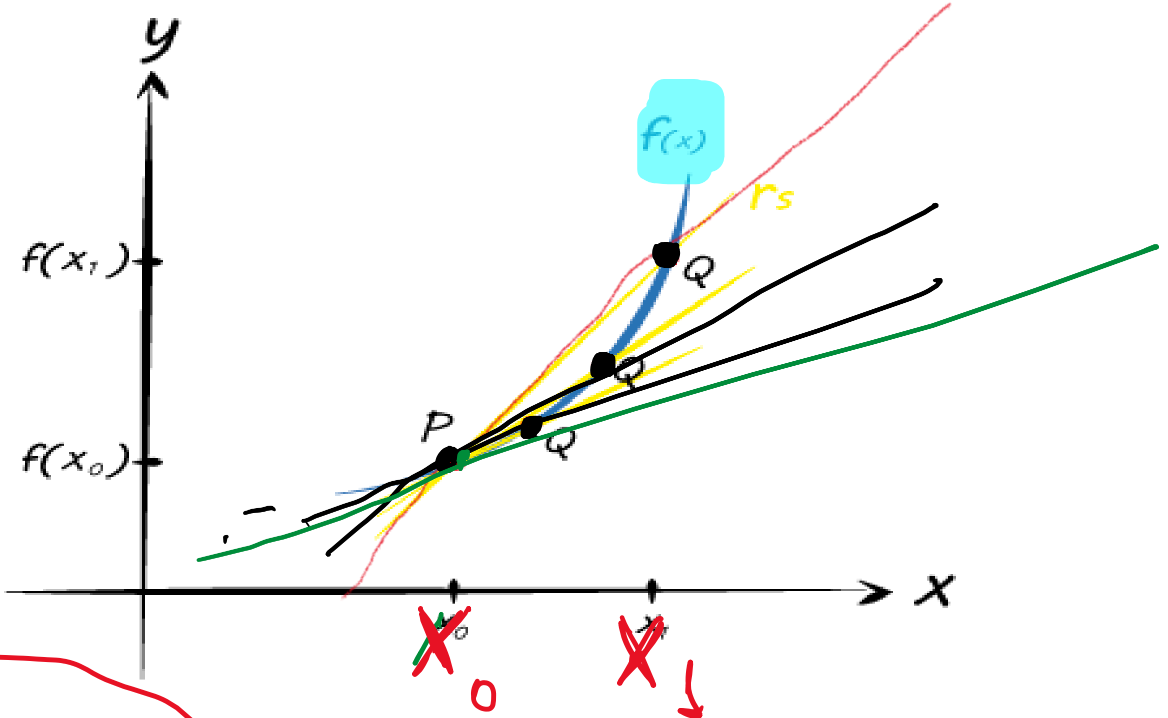
APLICAÇÕES DE DERIVADAS – ESTUDO DA RETA TANGENTE

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE



A reta t (em amarelo) tangencia, toca apenas em um ponto, o gráfico da função f(x) no ponto P, ponto este que passaremos a chamar de ponto de tangência. Partiremos da montagem feita para reta secante e aproximaremos, o máximo possível, o ponto Q do ponto P (que ficará fixo), observe a figura abaixo:





$\lim_{x_1 \to x_0}$

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE

Se pensarmos no caso extremo em que o ponto Q é tão próximo de P quanto pudermos imaginar, deixaremos de ter uma reta secante ao gráfico da função e passaremos a ter uma reta tangente ao gráfico de f(x). Matematicamente, para fazermos esta "aproximação", utilizaremos o conceito de limite como falamos. Para determinarmos o coeficiente angular da reta tangente, tomaremos como ponto de partida o coeficiente angular da reta secante, e aplicaremos o conceito de limite:

$$m_{rs} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad m_{rt} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Sendo assim uma reta tangente ao gráfico da função f(x) no ponto de tangencia é dado por:

$$\Delta y = m \cdot \Delta x \qquad y - f(x_0) = m_{rt} \cdot (x - x_0)$$

Faremos uma mudança de variável no limite que nos fornece o coeficiente angular da reta tangente.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$f'(x_0) = m_{rt} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

, fazendo a mudança:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

, consequentemente: $x_1 = x_0 + \Delta x$, e se $x_1 \to x_0$, temos que $\Delta x \to x_1 - x_1 \to 0$.

Reescrevendo o limite em termos da variável Δx :

$$m_{rt} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Muitas vezes encontramos na literatura esta mesma construção descrita com a letra h no lugar do Δx , neste caso ficaríamos com:

$$m_{rt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

EXEMPLO- EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE E NORMAL

Escreva a equação da reta t que tangência a curva no ponto de abscissa a = 1 . Resp.: y-1 = 1/3(x-1)

$$f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(x_o) = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$$

$$m_{rs} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

VER NO GEOGEBRA (https://www.geogebra.org/

$P(1, y) = P(1, 1)$

$f(x_0) = \sqrt{x_0}$

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f(x) = y$

$f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot x_0^{1/3 - 1}$

$f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot x_0^{-2/3}$

$f'(x_0) = \frac{1}{3 \cdot x_0^{2/3}}$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3 \cdot 1^{2/3}}$

$f'(1) = \frac{1}{3}$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x - 1)$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

2) Determine uma equação para a reta secante ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ nos pontos de $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$.

Inicialmente vamos localizar os dois pontos, que chamaremos de P e Q:

<u>ponto P</u>

$$x_0 = 2$$

$$y = f(2) = 2^2 - 2.(2) + 1$$

$$y = f(2) = 1$$

, portanto: P(2,1).

$\Delta y = 8$

<u>ponto Q</u>

$\Delta x = 2$

$$x_0 = 4$$

$$y = f(4) = 4^2 - 2.(4) + 1$$

$$y = f(4) = 9$$

, portanto: Q(4,9).

Calculando o coeficiente angular: (uso os dois pts)

$$m_{rs} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$m_{rs} = \frac{9 - 1}{4 - 2} = \frac{8}{2}$$

$$m_{rs} = 4$$

$f'(x) = 4$

Utilizando a expressão:

$$y - f(x_0) = m_{rs}.(x - x_0)$$ (escolho um dos pts)

, ficamos com:

$$y - 1 = 4.(x - 2)$$

$$y - 1 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 8 + 1$$

$$y = 4x - 7$$

Portanto:

$$y = 4x - 7$$

descreve uma equação da reta secante ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ nos pontos P e Q.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad Q(4,9)$$

$$y - 9 = 4 \cdot (x - 4)$$

$$y = 4x - 16 + 9$$

$$y = 4x - 7$$

[redacted] Determine uma equação para a reta secante ao gráfico da função $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ nos pontos de $x_0 = 2$ e $x_1 = 4$.

Inicialmente vamos localizar os dois pontos, que chamaremos de P e Q:

<u>ponto P</u>

$$x_0 = 2$$

$$y = f(2) = 2^2 - 2.(2) + 1$$

$$y = f(2) = 1$$

, portanto: P(2,1).

<u>ponto Q</u>

$$x_0 = 4$$

$$y = f(4) = 4^2 - 2.(4) + 1$$

$$y = f(2) = 9$$

, portanto: Q P(4,9).

$$m_{rt} = 4 \Rightarrow m_{rN} = \frac{-1}{4}$$

Escreva a equação da reta perpendicular à reta tangente!

y – 1 = -1/4 .(x-2) **ou** **y – 9 = -1/4. (x-4)**

$$y - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{2}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 1$$

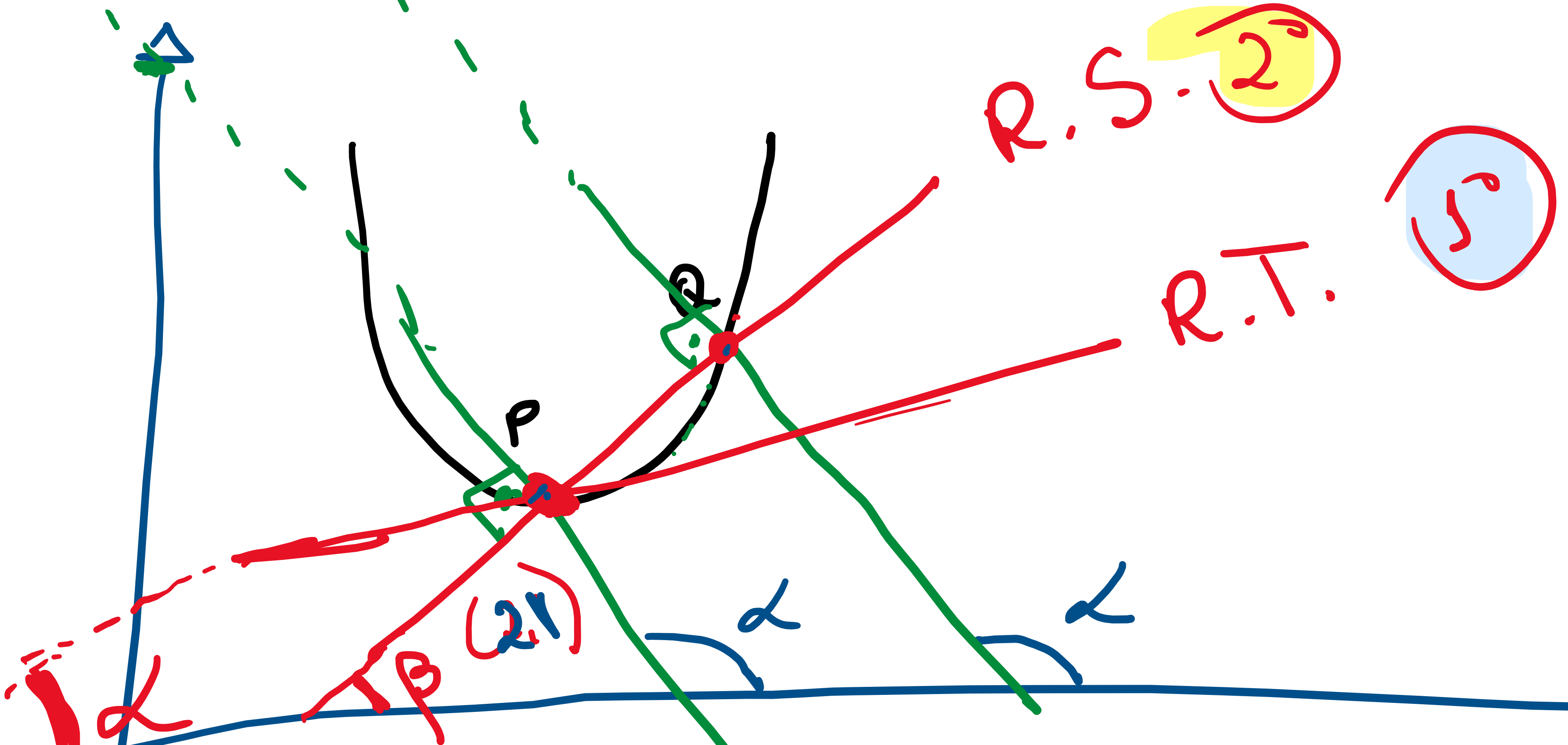
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$y - 9 = -\frac{1}{4}x + \frac{4}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 + 9$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 10$$

https://www.geogebra.org/graphing



$tg\beta = 4$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(2) = 2.2 - 2$

$f'(2) = 2$

$\downarrow$

$tg\,\alpha$

R.T.

$y - 1 = 2(x - 2)$

$\boxed{y = 2x - 3}$

Exemplo:

$$2y + 3x = 7$$

$$f'(x) = ?$$

$$\Downarrow$$

$$y' = ?$$

Explícito

$$2.y = 7 - 3x$$

$$y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$$

$$\downarrow$$

$$y' = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra – por exemplo, $y = \sqrt{x^3 + 1}$ ou

$y = x \operatorname{sen} x$ ou, em geral, $y = f(x)$.

Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tais como: $x^2 + y^2 = 25$ ou $x^3 + y^3 = 6xy$

$y^2 = 25 - x^2$

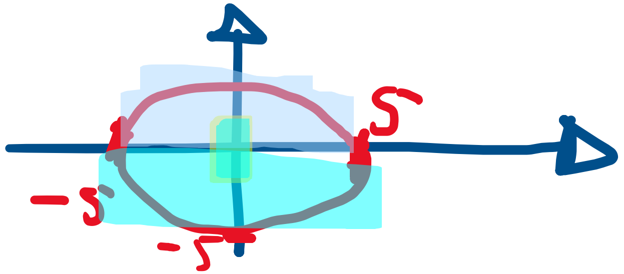
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = R^2$

$x^2 + y^2 = 25$

Em alguns casos é possível resolver tal equação isolando y como uma função explícita (ou diversas funções) de x.

Por exemplo, duas das funções determinadas pela equação 1 implícita são

$f(x) = +\sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$



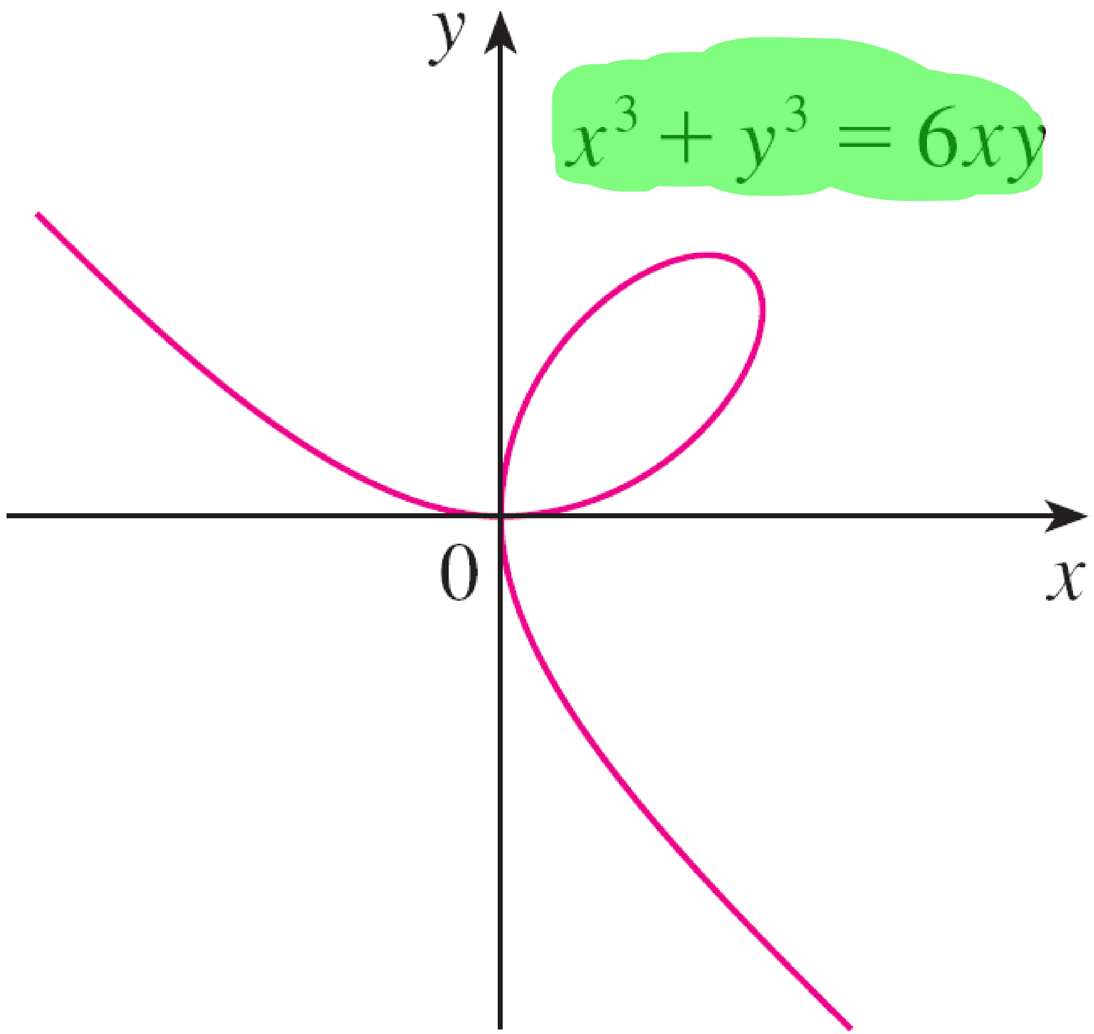
$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$y^3 = 6 \cdot x \cdot y - x^3$$

??

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

DERIVAÇÃO IMPLICITA



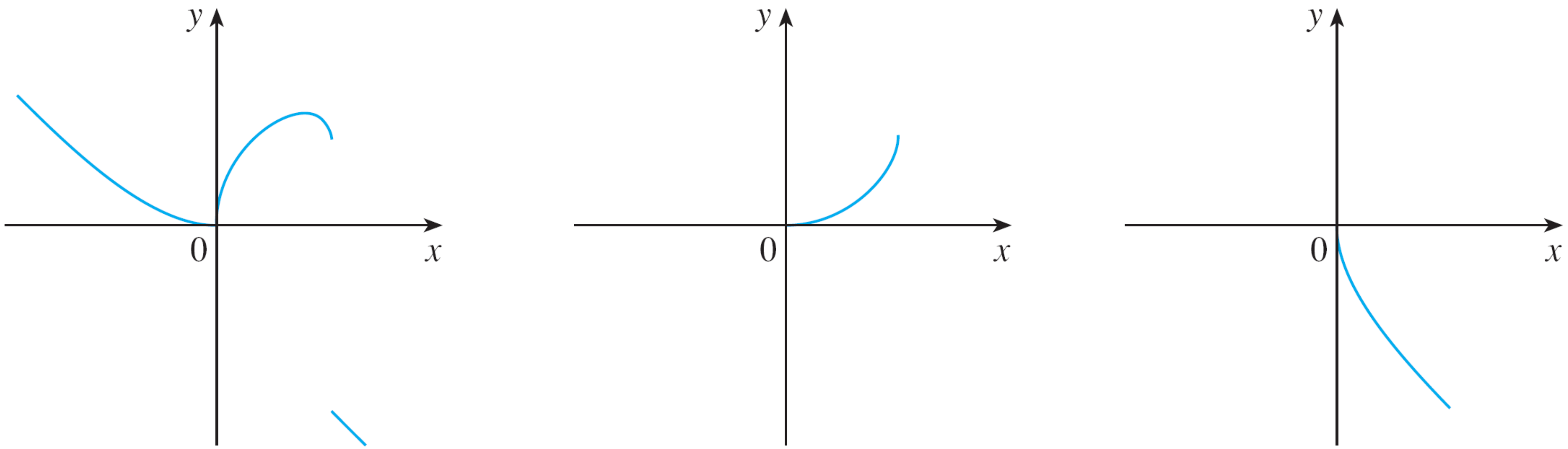
O folium of Descartes

Não é fácil resolver a equação 2 e escrever *y* explicitamente como uma função de *x*.

Esta equação é uma curva chamada **fólio de Descartes**, e implicitamente define *y* como diversas funções de *x*.

DERIVAÇÃO IMPLICITA

Os gráficos dessas três funções são mostrados abaixo. Quando dizemos que f é uma função implicitamente definida pela Equação 2, queremos dizer que a equação $x^3 + [f(x)^3] = 6xf(x)$ é verdadeira para todos os valores de x no domínio de f.



Gráficos de três funções definidas pelo folium de Descartes

DERIVAÇÃO IMPLICITA

Não precisamos resolver uma equação para *y* em termos de *x* para encontrar a derivada de *y*. Em vez disso, podemos usar o método de **derivação implícita**. Isso consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a *x* e, então, na resolução da equação para *y*, e assim determinar *y* implicitamente como uma função derivável de *x*. Podemos também determinar y’ sem explicitar y.

Este é o método!

EXEMPLO 1 – DERIVAÇÃO IMPLICITA

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$ Resp.: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4). (1º Q)

RESOLUÇÃO

(a) Derive ambos os lados da equação, Lembrando que *y* é uma função de *x* e usando a Regra da Cadeia: $x^2 + y^2 = 25$

$$2x\,dx + 2y \cdot dy = 0$$

$$2y \cdot dy = -2x \cdot dx$$

$$\frac{2y \cdot dy}{dx} = \frac{-2x\,\cancel{dx}}{\cancel{dx}}$$

$$\cancel{2}y \cdot \frac{dy}{dx} = -\cancel{2}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

EXEMPLO 1 (x_0, y_0)

R.T. $y - y_0 = f'(P) \cdot (x - x_0)$

(b) No ponto (3, 4), temos $x = 3$ e $y = 4$, logo

a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4} = f'(P)$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em (3, 4) é, portanto,

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \quad \text{ou} \quad 3x + 4y = 25$$

$$y = 4 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad \text{Eq. Red.}$$

Outro modo é lembrar que o ponto (3, 4) está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, podemos derivar e substituir na equação.

$A = l^2$

$\Downarrow$

$\dfrac{dA}{dl}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, etc

$\dfrac{dA}{dh}$

$2x + 2y =$

$2 \cdot (x + y)$

exemplo

$V = \_\_\_\_ \cdot r \cdot l$

$\dfrac{dV}{dr}$, etc

EXEMPLO 2 – DERIVAÇÃO IMPLICITA

Determine a derivada de y = f(x) sabendo que $e^y = x + y$

$$e^y = x + y$$

$$e^y . dy = 1\,dx + 1\,dy$$

$$e^y . dy - 1 . dy = 1\,dx$$

$$(e^y - 1) . dy = 1 . dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - 1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y - 1}$$

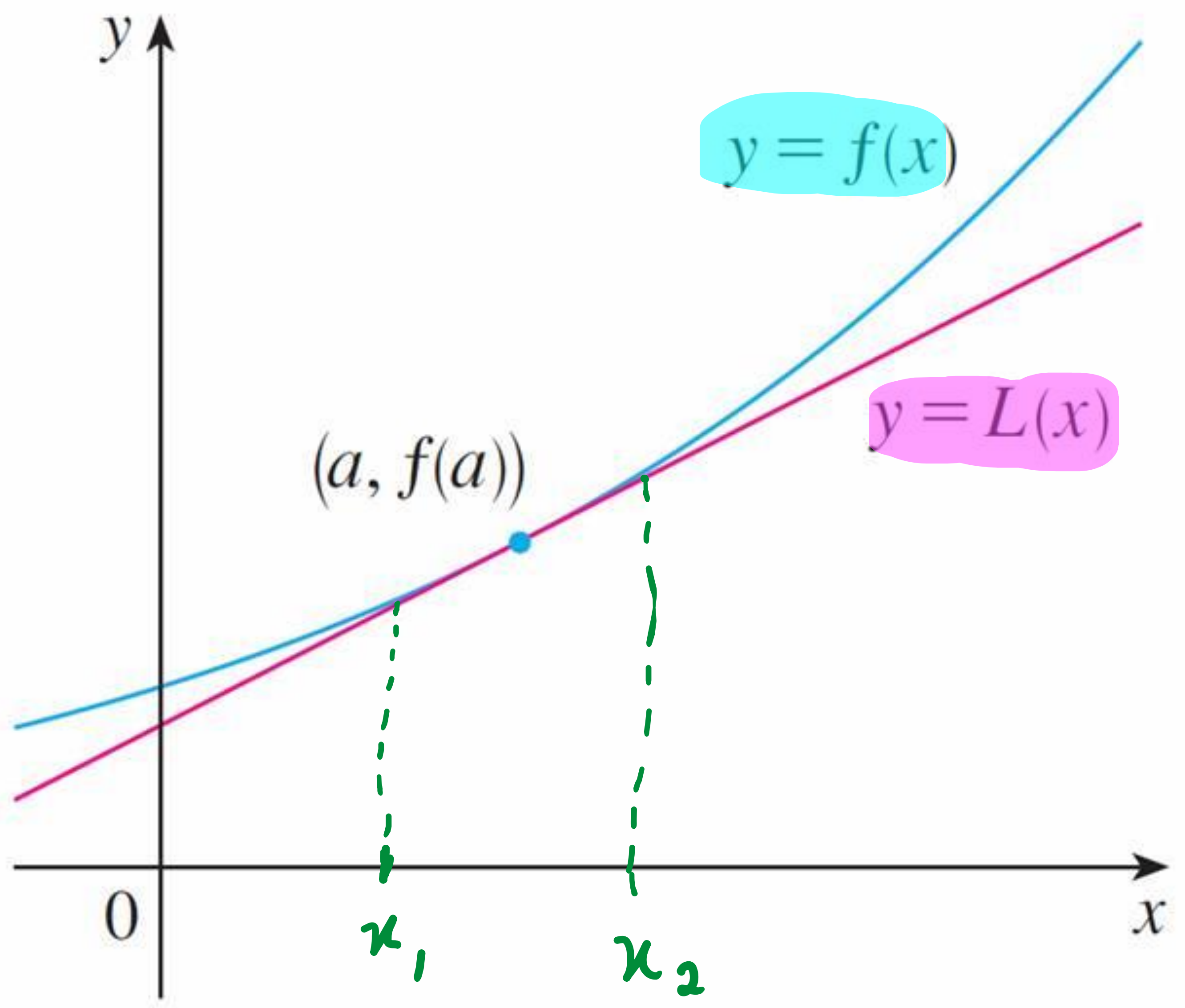
3) $x^2 \cdot y + e^y - \operatorname{sen} x = 0$

casa

$(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$ (dica)

APROXIMAÇÕES LINEARES E DIFERENCIAIS

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. Na realidade, dando um *zoom* em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notamos que o gráfico se assemelha cada vez mais à sua reta tangente. Essa observação é a base para um método de encontrar valores aproximados de funções.



A ideia é que pode ser fácil calcular um valor $f(a)$ de uma função, mas difícil (ou mesmo impossível) calcular os valores de f nas proximidades de a.

Nos contentamos com os valores calculados da função linear L, cujo gráfico é a reta tangente a f em $(a, f(a))$.

De forma geral usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a.

$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

Uma equação dessa reta tangente: $\mathbf{f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)}$

E a aproximação: $\mathbf{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)}$

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em a.

TEOREMA (FÓRMULA) DE TAYLOR

A fórmula de Taylor fornece uma aproximação polinomial local cada vez melhor de uma função (muitas vezes) diferenciável à medida que calculamos as suas derivadas. Ela é um pilar fundamental do Cálculo Numérico pois nos ensina como aproximar funções complicadas por funções mais simples.

A linearização de f em x = a fornece a melhor aproximação linear de f ao redor de a assim como os polinômios de Taylor de maior ordem fornecem as melhores aproximações polinomiais dos seus respectivos graus.

TEOREMA (FÓRMULA) DE TAYLOR

Teorema: Seja f : R → R uma função contínua, bem como suas n+1 primeiras derivadas num intervalo de a e x. Então, para algum inteiro de 0 a n, o polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em x = a é o polinômio:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(x)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(0) + f'(0)\cdot(x-0) \ldots$$

TEOREMA DE TAYLOR

Consideramos que as funções tem tantas derivadas quanto forem necessárias para a discussão. Uma importante aplicação da fórmula de Taylor é a aproximação de derivadas cujo cálculo pode ser trabalhoso principalmente se a função tiver uma fórmula muito complexa. Muitas vezes a função f não é conhecida (não há uma fórmula explícita para ela). Isso ocorre por exemplo se a função puder apenas ser obtida por um programa de computador em que não temos acesso ao código fonte ou através de algum experimento físico.

EXEMPLO:

$x = a$

Encontre a série de Taylor e os polinômios de Taylor gerados por f(x) $= e^x$ em x = 0.

$f(0) = e^0 = 1$

Resolução:

Temos f'(x) $= e^x$, f''(x) $= e^x$ .... f^n (x) $= e^x$ e f(0) = 1, f'(0) = 1 f''(0) = 1.... f^n (x) = 1

A série de Taylor gerada por f em x = 0 é:

$$f(0) + f'(0)(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}(x-0)^n =$$

$$\underbrace{\underbrace{1 + x} + \frac{1}{2}(x)^2} + \ldots + \frac{1}{n!}(x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)$$

Além disso o gráfico de f(x) e seus polinômios de Taylor são: $P_1(x) = 1 + x$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}(x)^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}(x)^2 + \frac{1}{3!}(x)^3$$

Observe que a proximidade dos gráficos é maior perto de x = 0

https://www.geogebra.org/graphing