UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

**ICE – Institutos de Ciências Exatas**
**DEMAT – Departamento de Matemática**

# CÁLCULO 1 - SEMANA 8

*Prof. Roseli Alves de Moura*

**Conteúdo:**
IV – Aplicação da Derivada:
5. Traçado de gráficos
6. Limites de forma indeterminada: Regra de L'Hopital

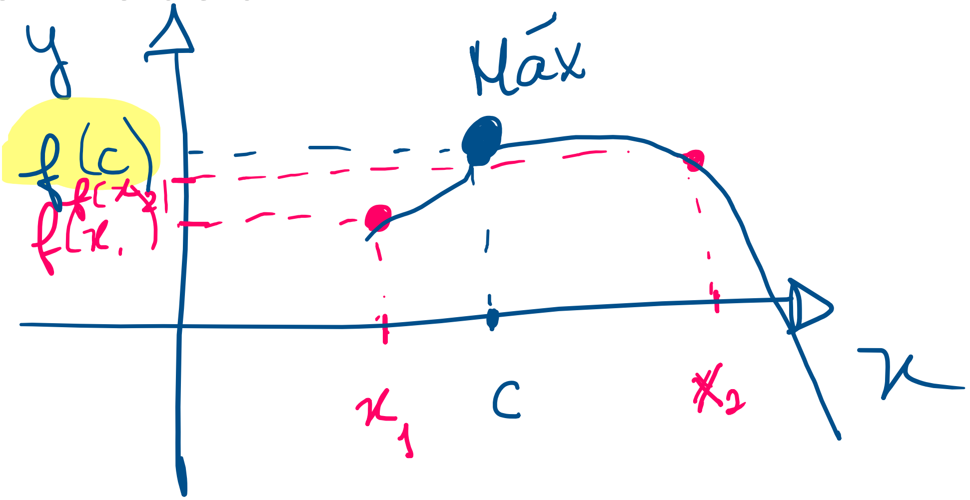
# VALORES MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTOS

Def.: Uma função $f$ tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se f (c) > f(x) para todo x em *D*, onde *D* é o domínio de $f$. O número f (c) é chamado de valor máximo de $f$ em D. Analogamente, $f$ tem um mínimo absoluto em c se f(c) < f(x) para todo x em D, e o número f(c) é denominado valor mínimo de $f$ em D. Os valores máximos e mínimo de $f$ são chamados valores extremos de $f$.

# VALORES MÁXIMO E MÍNIMO LOCAIS

$f(x)$

Def.: Uma função $f$ tem máximo local (ou máximo relativo) em c se f (c) > f(x) quando x estiver nas proximidades de c. [Isto significa que f (c) > f(x) para todo x em algum intervalo aberto contendo c.] Analogamente, $f$ tem um mínimo local em c se f(c) < f(x) quando x estiver próximo de c.




$]a, b[$

# TRAÇADO DE GRÁFICOS

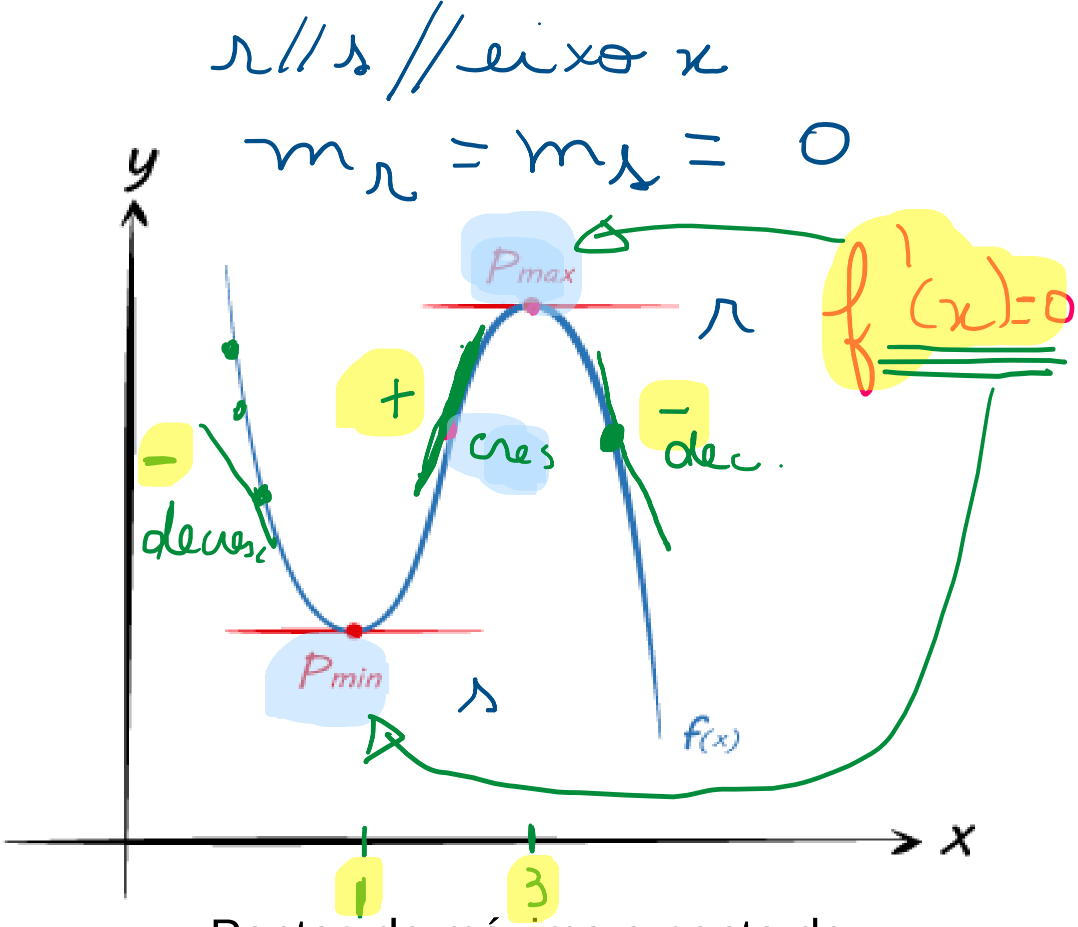
Utilizaremos a derivada da função para estudar a variação da própria função. Descreveremos métodos para a verificação dos intervalos de crescimento e decrescimento da função, determinação dos pontos de máximo e mínimos locais da função, verificação dos intervalos de concavidade da função e determinação dos pontos de inflexão.

Os resultados que serão apresentados são baseados em teoremas tais como:

- ✓ Teorema do Anulamento;
- ✓ Teorema do Valor Intermediário;
- ✓ Teorema da existência de Máximos e Mínimos.

# MÁXIMO/MÍNIMO LOCAL DA FUNÇÃO

Observe os dois pontos especiais mostrados no gráfico: Notem que as retas que tangenciam os dois pontos marcados no gráfico são retas paralelas ao eixo x, consequentemente, são retas com coeficiente angular igual a zero. Sendo o coeficiente angular da reta tangente equivalente a derivada da função, podemos afirmar que nos extremos locais da função (ponto de máximo local $P_{MAX}$ e ponto de mínimo local $P_{MIN}$ da função) a derivada da função se anula (f '(x)=0). Os extremos locais da função não são necessariamente o maior e o menor valores assumidos pela função. O menor valor assumido por f(x) é chamado de Mínimo Global de f(x) e o maior de Máximo Global de f(x).



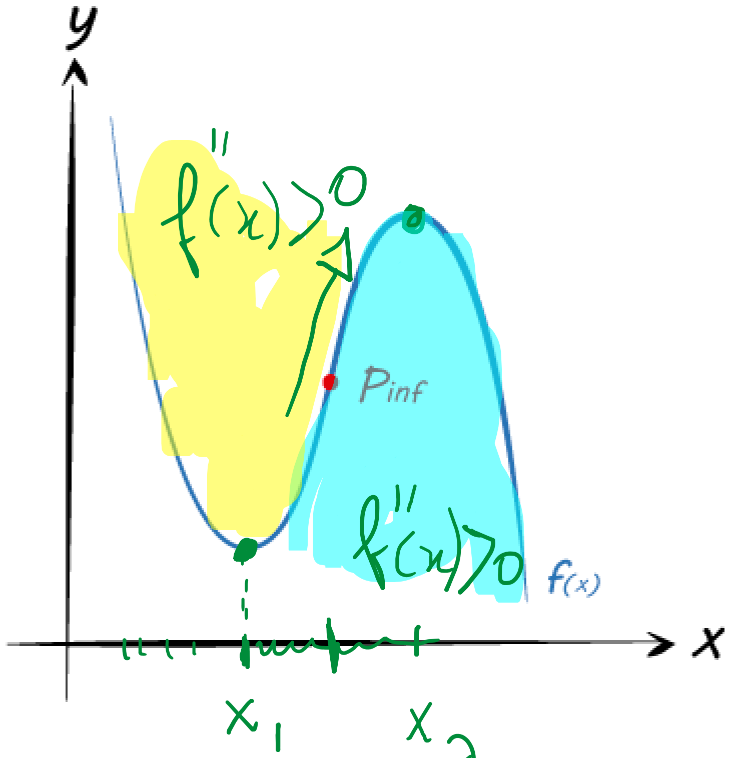

Pontos de máximo e ponto de mínimo locais de f(x)

**Se f '(x)>0 em I então a função f(x) é crescente em I.**

**Se f '(x)<0 em I então a função f(x) é decrescente em I.**

# CONCAVIDADE DA FUNÇÃO E TESTE DA CONCAVIDADE

O ponto destacado no gráfico é chamado de ponto de inflexão de f(x), neste ponto acontece a troca de concavidade da função f(x.). Neste caso, do lado esquerdo do ponto de inflexão, a função f(x) é côncava para cima e do lado direito do mesmo a função é côncava para baixo.




**(a)Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.**

**(b)(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.**

## EXEMPLO 1:

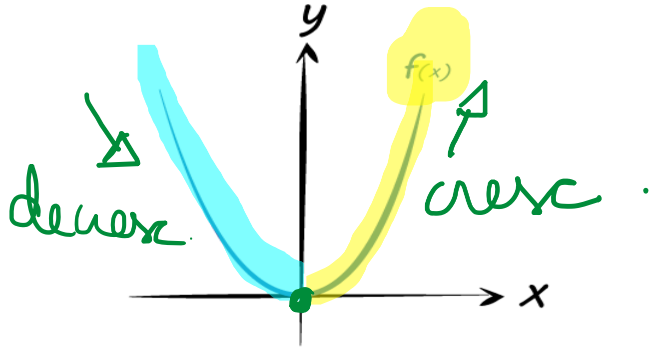
$y = ax + b$

$y = 2x + 0$

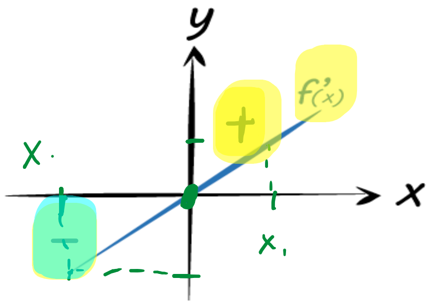
Dada a função $f(x)=x^2$, temos:

reta cresc.

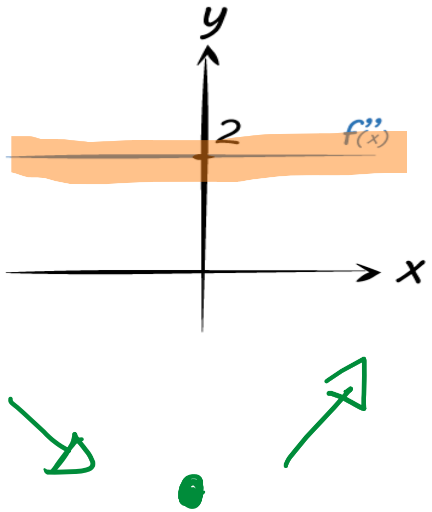
$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = +2x \rightarrow f''(x) = 2$$




Observa-se que a derivada de segunda ordem f ‘’(x) é positiva e a função é côncava para cima. Podemos afirmar que:

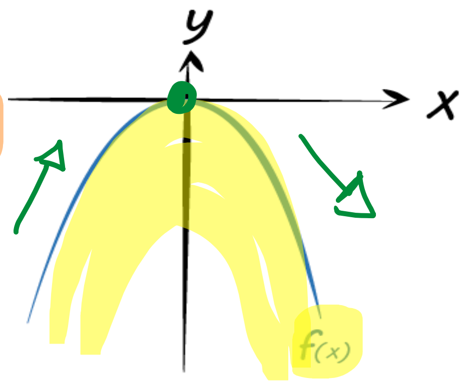



Se f ‘’(x)>0 em I, I é um intervalo, a função f(x) é côncava para cima em I.

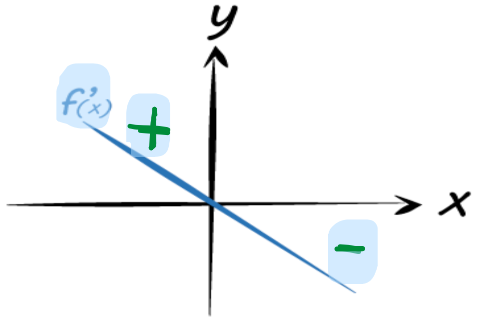


**EXEMPLO 2:** Dada a função $f(x)=-x^2$, temos:

$$f(x) = -x^2 \to f'(x) = -2x \to f''(x) = -2$$

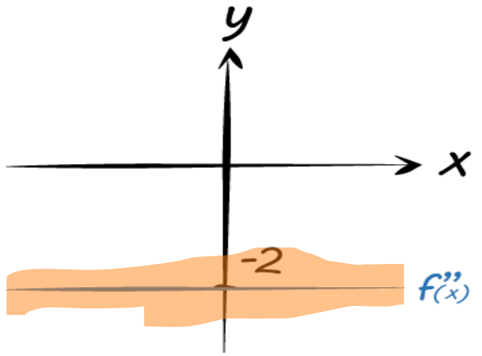



Observa-se a derivada de segunda ordem f ''(x) é negativa e a função é côncava para baixo. :




Se f ''(x) < 0 em I, I é um intervalo, a função f(x) é côncava para baixo em I.

No ponto de inflexão de f(x), ponto de troca de concavidade, a segunda derivada de f(x) é nula (f ''(x)=0)).




Pontos de Inflexão - f ''(x) = 0.

$-2 = 0$ ???

Obs:

a) $f(x) = x^3 + \dots$ $\qquad f'(x) = x^2 \dots$ $\qquad f''(x) = x^1$

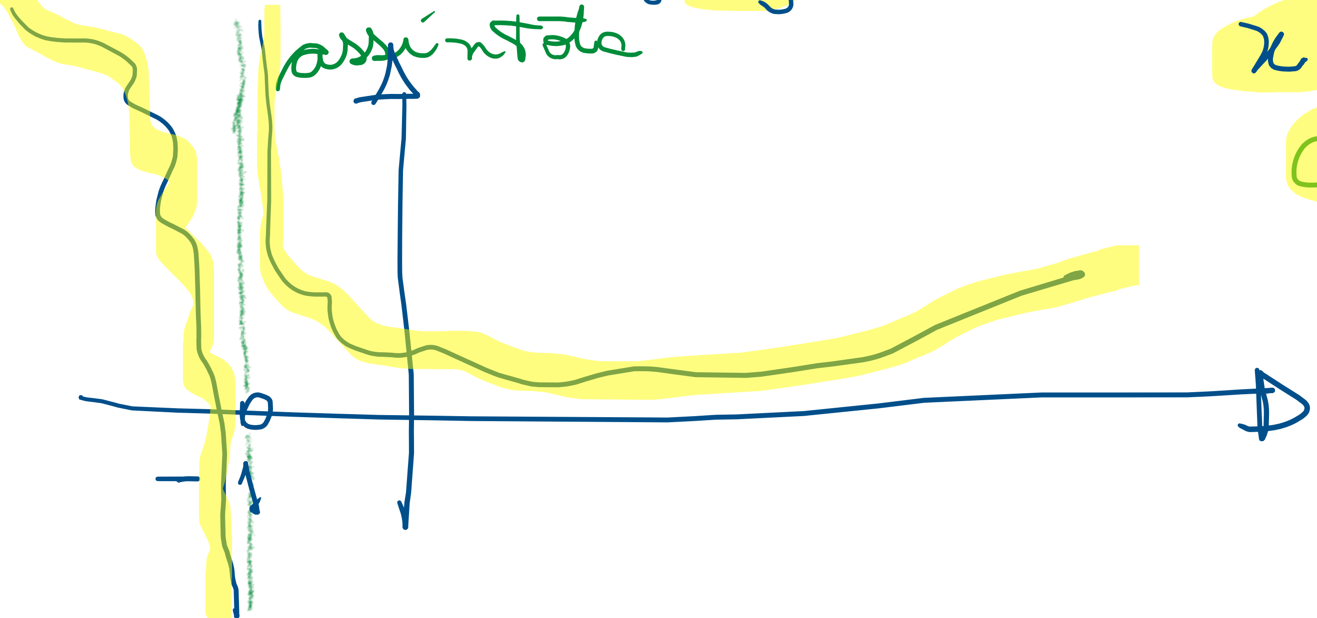
não é reta $\qquad\qquad$ É Reta

b) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ $\qquad \left(\dfrac{2}{0}\ \nexists\right)$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\qquad \rightarrow x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

C.E.

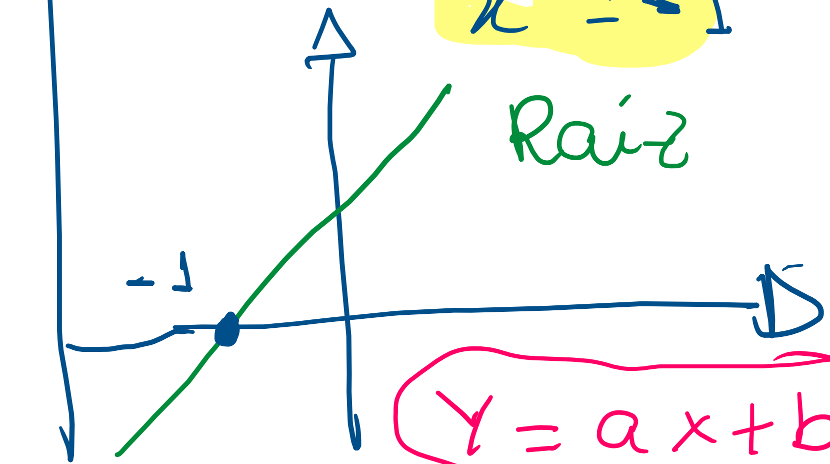



c) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

Raiz




$Y = ax + b$

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$S = \{3\}$$

$$\Delta = 36 - 36 = 0$$

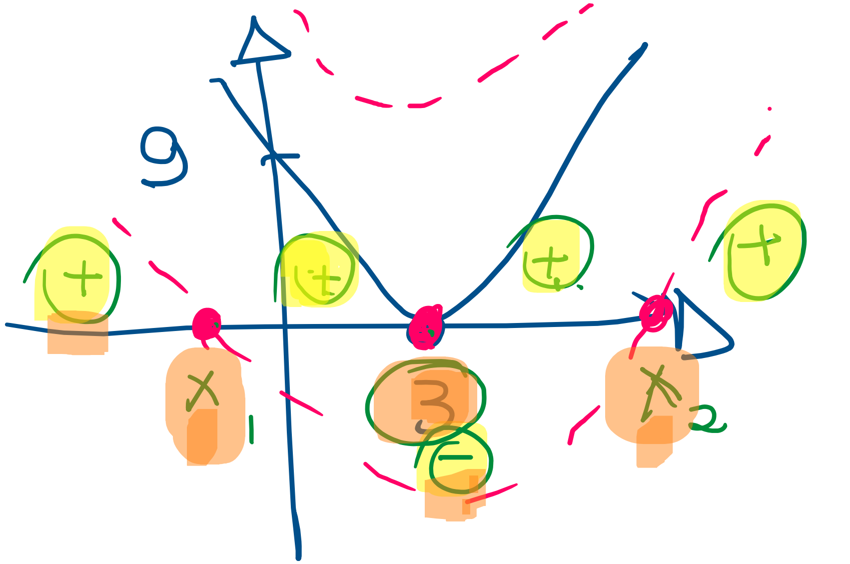
$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

2 raízes = s

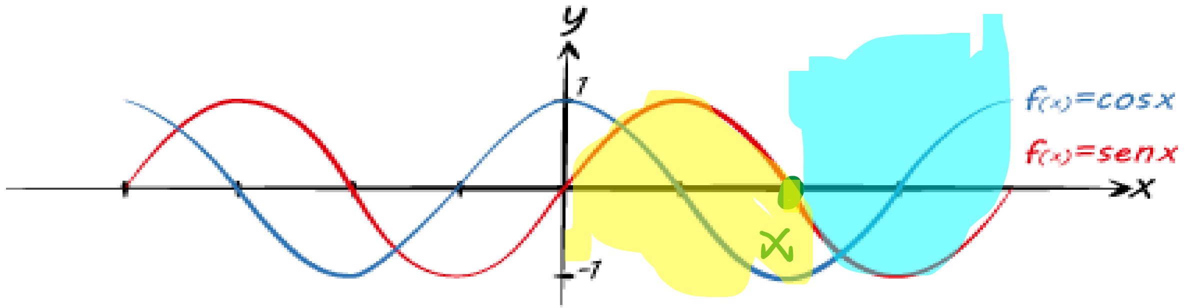
$$-b + \sqrt{0} \rightarrow 3$$

$$-b - \sqrt{0} \rightarrow 3$$



# OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Uma função pode apresentar vários intervalos de crescimento e vários intervalos de decrescimento, e consequentemente, pode ter vários pontos de max e vários pontos de min locais; pode apresentar vários intervalos de concavidade voltada para cima ou para baixo, e consequentemente, pode ter vários pontos de inflexão. O exemplo típico neste caso é a função trigonométrica f(x)=senx ou f(x)=cosx.
Uma função também pode não ser crescente nem decrescente, pode não apresentar pontos de Max ou Min locais, pode não descrever concavidade e nem possuir pontos de inflexão. O exemplo ,neste caso, é a função constante f(x) = 2.



**EXERCÍCIO:** Esboçar o gráfico da função $f(x) = -12 + 8x^2 - x^4$ através do estudo de sua variação determinando:

1) o domínio, cond. exist,

2) as intersecções com os eixos, raízes

Os pontos críticos:

4) onde cresce e onde decresce,

5) pontos de extremos locais,

6) onde tem concavidade para cima onde tem para baixo

7) pontos de inflexão,

① Dom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

② Intersecção com eixos

Eixo y $\Rightarrow$ $x = 0$

$f(0) = -12 + 8.0^2 - 0^4 = -12$

② Raízes $\to$ $x^2 = t$

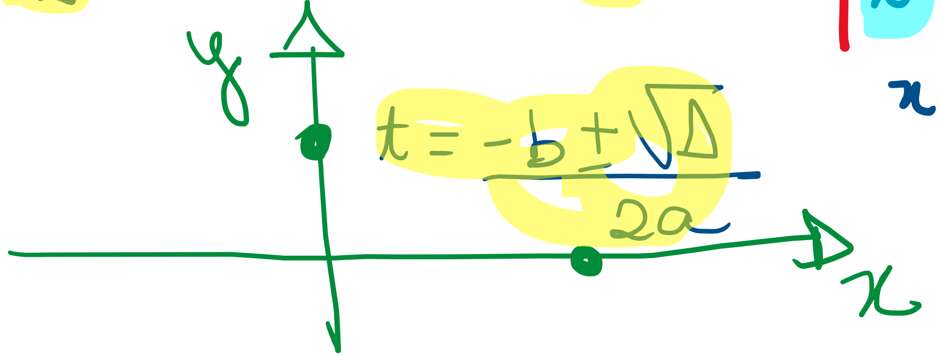
Eixo x $\Rightarrow$ $y = 0$

$0 = -12 + 8x^2 - x^4$

$0 = -12 + 8t - t^2$

$\Delta = 64 - 48 = 16$

$t = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$



$t = \dfrac{-8 \pm 4}{-2}$

$t_1 = 2$ $\qquad$ $t_2 = 6$

$x^2 = 2$ $\qquad$ $x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{6}$

Eixo y : $P(0, -12)$

Eixo x : $(\sqrt{2}, 0)$

$(-\sqrt{2}, 0)$

$(\sqrt{6}, 0)$

$(-\sqrt{6}, 0)$

**EXERCÍCIO:** Esboçar o gráfico da função $f(x) = -12 + 8x^2 - x^4$ através do estudo de sua variação determinando:

Os pontos críticos,

4) onde cresce e onde decresce,

5) pontos de extremos locais,

5 Ponto Máximos $(-2, 4)$ e $(2, 4)$

Ponto Mínimo $(0, -12)$

$f'(x) = +16x - 4x^3$

Equação

$f'(x) = 0 \Rightarrow 16x - 4x^3 = 0$

$x(16 - 4x^2) = 0$

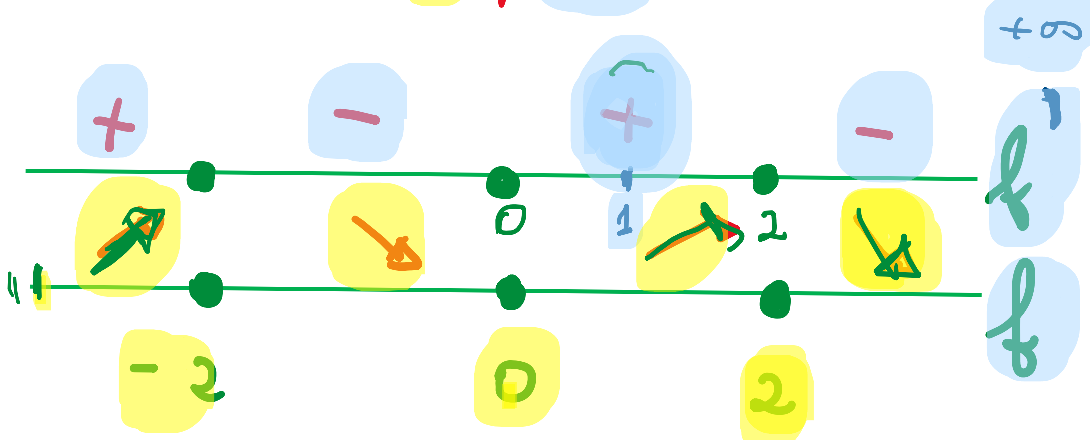
$x = 0$ ou $16 - 4x^2 = 0$

Raiz

$4x^2 = 16$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$




4 $f$ cresce: $]-\infty, -2[$ $\cup$ $]0, 2[$ ou

$f$ decresce: $]-2, 0[$ $\cup$ $]2, +\infty[$

$A \cdot B = 0$

$A = 0$ ou $B = 0$

lembrar

Subst (I) em $f'(x) = 16x - 4x^3$

$f'(1) = 16(1) - 4 \cdot (1^3) = 12$

**EXERCÍCIO:** Esboçar o gráfico da função $f(x) = -12 + 8x^2 - x^4$ através do estudo de sua variação determinando:

6) onde tem concavidade para cima onde tem para baixo

$f' = 16x - 4x^3$

$f'' = 16 - 12x^2$

análise

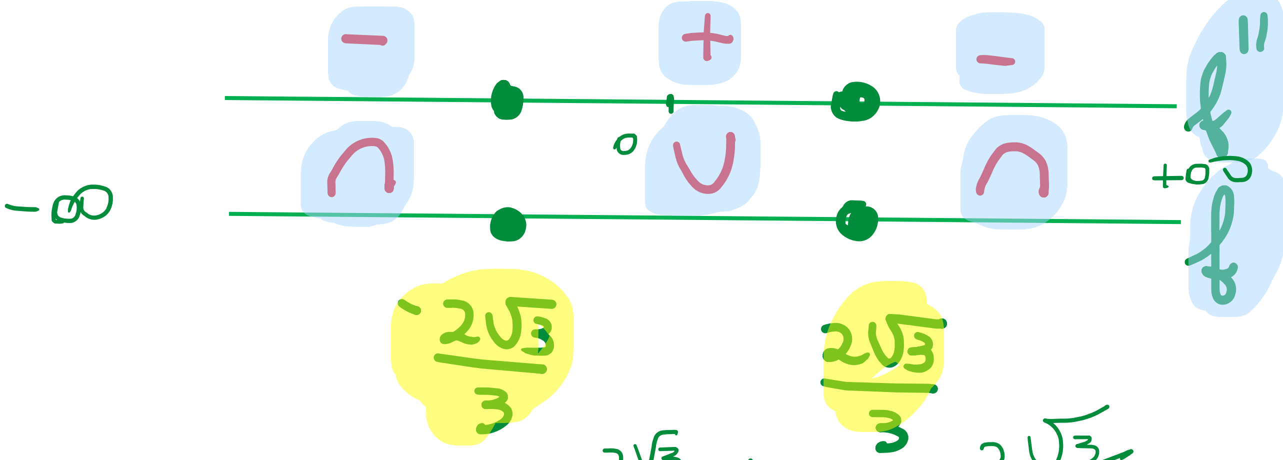
$f''(x) = 0 = 16 - 12x^2$

$12x^2 = 16$

$x^2 = \frac{16}{12} \frac{:4}{:4} = \frac{4}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

$x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$



$-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$

concavidades:

voltada p/ cima: $\left]-2\sqrt{3}/3, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$

voltada p/ baixo: $\left]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[ \cup \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

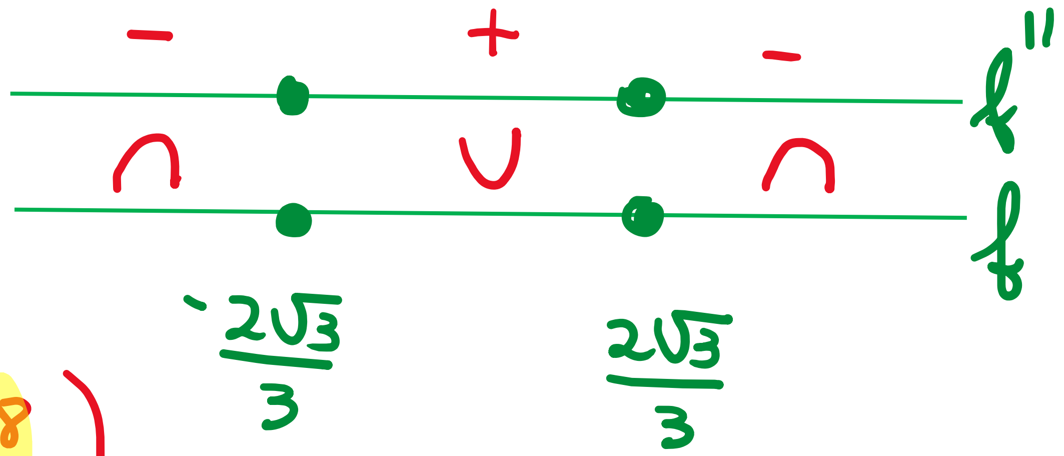
$-\infty$ $+\infty$

**EXERCÍCIO:** Esboçar o gráfico da função $f(x) = -12 + 8x^2 - x^4$ através do estudo de sua variação determinando:

7) pontos de inflexão,

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -12 + 8\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4 = -12 + 8\left(\frac{12}{9}\right) - \left(\frac{144}{81}\right) = \frac{252}{81}$$

$$f\left(+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{252}{81} = \frac{28}{9}$$




$$P_{infl}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{28}{9}\right) \text{ e } P_{infl}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{28}{9}\right)$$

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$1 - 1$$

Apesar de *F* não ser definido em *x* = 1, precisamos saber como *F* se comporta *próximo a* 1.

Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

No cálculo desse limite não podemos aplicar propriedades dos Limites, pois o limite do denominador é 0. Embora o limite exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ é indefinido.

Em geral, se tivermos um limite da forma em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então o limite pode ou não existir, e é chamado forma indeterminada do tipo: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

$\Rightarrow \frac{0}{0}$

Por funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Podemos também usar um argumento geométrico para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

Mas esses métodos não funcionam para limites tais como $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ de modo que introduzimos um método sistemático, conhecido como *a Regra de l'Hôspital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de *F* e precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Não é simples calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \to \infty$

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

$\frac{\infty}{a} = \infty$

Há uma disputa entre o numerador e o denominador.

$\frac{1}{\infty} \to 0$

Se o numerador ganhar, o limite será $\infty$ ; se o denominador ganhar, a resposta será 0.

Contudo pode haver algum equilíbrio e, nesse caso, a resposta será algum número positivo finito. Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo** $\infty/\infty$ .

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

Esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções – incluindo aquelas racionais – dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de *x* que ocorre no denominador. Por exemplo:

$$\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Esse método não funciona para um limite como $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

A Regra de l'Hopital' aplica-se também a esses tipos de formas indeterminadas.

**Regra de l'Hôspital** Suponha que $f$ e $g$ sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto $I$ que contém $a$ (exceto possivelmente em $a$). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\infty/\infty$.) Então

L. H.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for $\infty$ ou $-\infty$).

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

**Observação 1:** A Regra de l'Hôpital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de *f* e *g* antes de usar a Regra de l'Hôspital.

**Observação 2:** A Regra de l'Hôpital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é,

"$x \to a$" pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir:

$x \to a^{+}$, $x \to a^{-}$, $x \to \infty$, ou $x \to -\infty$ .

# FORMAS INDETERMINADAS E REGRA DE L'HOPITAL

**Observação 3:** Para o caso especial no qual $f(a) = g(a) = 0$, $f'$ e $g'$ são contínuas, e $g'(a) \neq 0$, é fácil ver por que a Regra de L'Hôspital é verdadeira. De fato, usando a forma alternativa da definição de derivada, temos

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{\cancel{x-a}}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{\cancel{x-a}}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{[Já que } f(a) = g(a) = 0\text{]}$$

# EXEMPLO 1

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Encontre $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

<u>Resolução</u>: Uma vez que $\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ e $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$

o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$

Podemos aplicar a Regra de l'Hôspital:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

derive

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

simbologia do diferencial

# PRODUTOS INDETERMINADOS

$$\frac{f}{\left(\frac{1}{g}\right)} = f \cdot \left(\frac{g}{1}\right) = f \cdot g$$

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro que valor de $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)]$, se houver algum. Há uma disputa entre $f$ e $g$. Se $f$ ganhar, a resposta é 0; se $g$ vencer, a resposta será $\infty$ (ou $-\infty$). Pode ainda haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero. Esse tipo de limite é chamado forma **indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$**.

Podemos lidar com isso escrevendo o produto $f.g$ como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad \text{ou} \quad fg = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\infty/\infty$ de modo que podemos usar a Regra de L'Hôspital.

# EXEMPLO 2

$f \cdot g$

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x.$

Resolução: O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator ($x$) tende a 0, enquanto o segundo fator (ln $x$) tende a $-\infty$

Escrevendo $x = 1/(1/x)$, temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$, logo, a Regra de L'Hôspital fornece:

$$\lim_{x\to 0^+} \underset{f}{x}.\underset{g}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{g}{\ln x}}{\underset{1/f}{1/x}} \xrightarrow{L.H} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

L.H

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{-1} = \frac{x}{-1} = -x$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

# PRODUTOS INDETERMINADOS

**Observação:** Ao resolver o Exemplo 2, outra opção possível seria escrever:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Isso dá uma forma indeterminada do tipo 0/0, mas, se aplicarmos a Regra de l'Hôspital, obteremos uma expressão mais complicada do que a que começamos.

Em geral, quando reescrevemos o produto indeterminado, tentamos escolher a opção que leva a um limite mais simples.

# DIFERENÇAS INDETERMINADAS

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ , então o limite $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$

é chamado forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$ .

De novo, há uma disputa entre $f$ e $g$. A resposta será $\infty$ (se $f$ ganhar) ou será $-\infty$ (se $g$ ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio, resultando um número finito? Para sabermos, tentamos converter a diferença em um quociente (usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum, por exemplo), de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\infty / \infty$ .

# EXEMPLO 3

$$\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot(\ln x)}$$

Calcule $\lim_{x \to 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$

$\infty - \infty$

Resolução: Observe que $1/(\ln x) \to \infty$ e $1/(x-1) \to \infty$ quando $x \to 1^+$ ; logo, o limite é indeterminado do tipo $\infty - \infty$

Neste caso podemos começar com um denominador comum:

$$\lim_{x \to 1^+} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x}$$

Tanto o numerador quanto o denominador tem limite 0, de modo que a regra de L´Hopital se aplica, fornecendo:

# EXEMPLO 3

LH, ajeitar, ind.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{\underbrace{(x-1)\ln x}_{u\,\cdot\,v}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1\cdot \ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x\ln x + x - 1}{x}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

A.D.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2+\ln x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2+\underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0}}$$

# POTÊNCIAS INDETERMINADAS

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo $0^0$

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo $\infty^0$

3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo $1^\infty$

# POTÊNCIAS INDETERMINADAS

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

seja $y = [f(x)]^{g(x)}$, então $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$,

Como também escrevendo a função como uma exponencial:

$$y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Em qualquer método, somos levados a um produto indeterminado $g(x) \cdot \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

$y = a^b$

$\ln y = \ln(a^b)$

$\ln y = b \cdot \ln a$

$e^{b \cdot \ln a} = y$

# EXEMPLO 4

Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$.

$1^{\infty}$

Resolução: Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ e $\operatorname{cotg} x \to \infty$ , assim, o limite dado é indeterminado (tipo $1^{\infty}$).

Seja $y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}$.

Então: $\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x . \ln(1 + \operatorname{sen} 4x) = \dfrac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x}$

$\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} . \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$

# EXEMPLO 4

Regra Cadeia

$f(x) = \ln(1 + \operatorname{sen}(4x))$

$f'(x) = \dfrac{1}{[1 + \operatorname{sen}(4x)]} \cdot (0 + \cos(4x)) \cdot 4$

$f'(x) = \dfrac{4 \cdot \cos(4x)}{1 + \operatorname{sen}(4x)}$

A Regra de l'Hôspital fornece:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x} \overset{L.H.}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}\right)}{\sec^2 x} = \frac{\frac{4}{1}}{1} = 4$$

*Lembrando que sen 0 = 0 e cos 0 = 1*

Contudo, calculamos o limite de ln y, mas o que realmente queremos é o limite de y.

Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

$\ln_e y = 4$

$e^4 = y$