ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1- SEMANA 8 - GRÁFICOS

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

1) O que f' nos diz sobre f ?

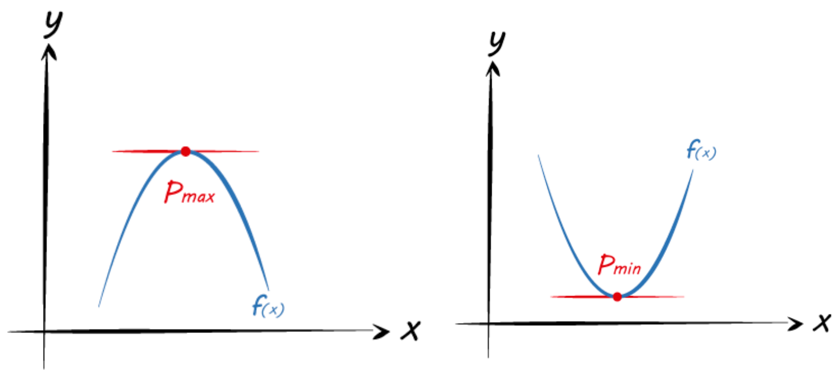
Definição 1: Chamamos número crítico de uma função f a um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Teste Crescente / Decrescente

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nesse intervalo.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nesse intervalo.

Teste da Primeira Derivada: Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f. (a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c. (b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c. (c) Se f' tem mesmo sinal à esquerda e à direita de c, então f não tem máximo ou mínimo locais em c.



Pontos de Máximo e Mínimo Local

Exemplo: Dada a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, determinar:

a) os intervalos abertos nos quais f é crescente;
b) os intervalos abertos nos quais f é decrescente;

c) os valores máximo e mínimo locais de f.

Resolução:

a) Determinar os números críticos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

$f\,'(x) = 0 = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

Dividindo os 2 lados da igualdade por 12 e colocando x em evidência:

$x.\,(x^2 - x - 2) = 0$

$x = 0 \; ou \; x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1 \; ou \; x = 2$

Os números críticos de f são −1, 0 e 2.

Resposta:

f é crescente em (−1, 0) e (2, ∞) e f é decrescente em (−∞, −1) e (0, 2)

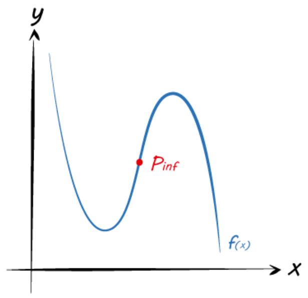
f (0) = 3. 0 4 − 4. 0 3 − 12. 0 2 + 5 = 5 é valor máximo local de f

f (−1) = 3. (−1) 4 − 4. (−1) 3 − 12. (−1) 2 + 5 = 0 é valor mínimo local de f

f (2) = 3. 2 4 − 4. 2 3 − 12. 2 2 + 5 = −27 é valor mínimo local de f

2) O que *f ''* nos diz sobre f?

Definição 2: Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então f é chamada côncava para cima nesse intervalo. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada côncava para baixo nesse intervalo.



Ponto de inflexão de f(x).

Definição 3: Um ponto P na curva y = f(x) é chamado ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Teste da Concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

3) Assíntotas

1) Uma reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical da função f se, e somente se, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, isto é, se f se torna infinita nas vizinhanças de a.

2) Uma reta horizontal $y = b$ (finito) é uma assíntota horizontal de f se, e somente se, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3) Uma reta inclinada $y = a.x + b,\ a \neq 0,\ a, b$ finitos, é uma assíntota obliqua de f se, e somente se,

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{a} \quad e \quad b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - a.x] \\ ou \\ a = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{a} \quad e \quad b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - a.x] \end{cases}$$

4) Roteiro – Gráfico de uma função

Para esboçar o gráfico da função f é preciso fazer um estudo de sua variação determinando:

1) o domínio,
2) as intersecções com os eixos,
3) os pontos críticos,
4) onde cresce e onde decresce,
5) pontos de extremos locais,
6) onde tem concavidade para cima onde tem para baixo
7) pontos de inflexão,
8) comportamento da função nos extremos" do domínio: assíntotas, etc.

9) paridade, etc.

10) esboço do gráfico.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Esboçar o gráfico de:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

<u>Resolução</u>:

1.1) $D = \Re - \{0\}$

1.2) Intersecções com os eixos.

1) com o eixo y: não tem, pois x não pode ser igual a zero.

2) com o eixo x: não tem, pois $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ que não tem solução real.

1.3) pontos críticos: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

1.4) classificação dos pontos críticos:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(1) > 0 \Rightarrow (x = 1; 2) \quad \textit{ponto} \quad \textit{de} \quad \textit{mínimo} \\ f''(-1) < 0 \Rightarrow (x = -1; -2) \quad \textit{ponto} \quad \textit{de} \quad \textit{máximo} \end{cases}$$

1.5) Onde f cresce, onde decresce:

para $-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decresce

para $x < -1 \quad ou \quad x > 1 \quad \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ cresce

1.6) Concavidades: para $\begin{cases} x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \quad cpb \\ x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \quad cpc \end{cases}$

1.7) Ponto de Inflexão: Não tem ponto de inflexão pois x=0 não pertence ao domínio de f.

1.8) 1.8.1) comportamento de f na vizinhança de x=0.

$$\lim_{x \to 0^+} (x + \frac{1}{x}) = 0 + \infty = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} (x + \frac{1}{x}) = 0 - \infty = -\infty$$

Portanto, $x = 0$ é uma assíntota vertical da função

1.8.2) comportamento de f em $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} (x + \frac{1}{x}) = \infty + 0 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} (x + \frac{1}{x}) = -\infty + 0 = -\infty$$

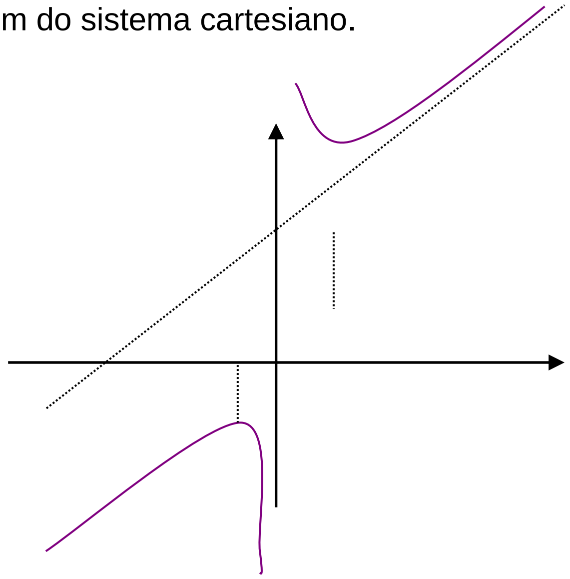
Portanto, a função não tem assíntota horizontal.

1.8.3) Observe que, quando $x \to \pm\infty$, f tem um comportamento parecido com a reta y =x pois o termo $1/x$ é próximo de zero (tende a zero). Isto é, tem assíntota obliqua:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=1=a \text{ e } \lim_{x\to\pm\infty}[x+\frac{1}{x}-1.x]=0=b \Rightarrow y=x \text{ é uma assíntota de f.}$$

1.9) paridade $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-(x+\frac{1}{x})=-f(x) \Rightarrow f \quad ímpar$. O gráfico de f é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.

1.10) Gráfico.



2) $f(x)=x^3-x^2-x+1$

<u>Resolução</u>:

2.1) Domínio $D_f=\Re$

2.2) Intersecções com os eixos coordenados:

interseção com eixo y: $f(0)=1$

interseção com eixo x: $x^3-x^2-x+1=0$

<u>Nota</u>: Se a equação $f(x)=0$ admitir uma raiz racional $x=\frac{p}{q}$ (irredutível) então p e q são divisores do último (termo independente) e do primeiro coeficiente da equação respectivamente. Assim vamos testar $x=\pm1$. Calculando $f(1)=0$ e $f(-1)=0$.

Conhecendo uma raiz podemos usar Briot-Ruffini para achar (se existir) as outras. Se a equação não admitir raízes racionais só com técnicas do calculo numérico podemos determinar a raiz (aproximadamente).

A função pode ser escrita na forma fatorada: $f(x)=(x-1)^2(x+1)$.

2.3) Paridade: $f(-x)\neq f(x)\approx -f(x) \Rightarrow$ não par e nem ímpar

2.4) Pontos críticos e intervalos de crescimento e decrescimento

sinal de: $f'(x)=3x^2-2x-1\begin{cases} =0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow x=1 \ e \ x=-\dfrac{1}{3}: \ pontos \ críticos \\ >0 \ para \ \ x<-\tfrac{1}{3} \ \ ou \ \ x>1 \Rightarrow f \ \ é \ crescente \\ <0 \ para \ \ -\tfrac{1}{3}<x<1 \Rightarrow f \ \ é \ decrescente \end{cases}$

2.5) Concavidades:

sinal de: $f''(x)=6x-2\begin{cases} =0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}: \ pontos \ críticos \ de \ f' \\ >0 \ para \ \ x>\tfrac{1}{3} \Rightarrow f \ \ é \ côncava \ \cup \\ <0 \ para \ \ x<\tfrac{1}{3} \Rightarrow f \ \ é \ convexa \ \cap \end{cases}$

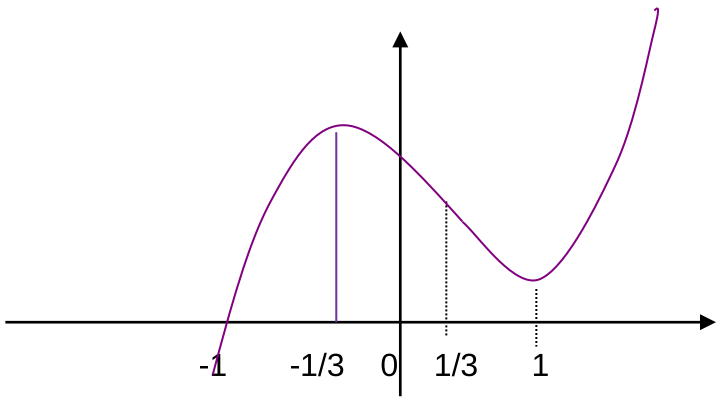
2.6) Extremos locais e pontos de inflexão:

classificação dos pontos críticos: $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \ Há \ um \ ponto \ de \ máximo \\ x=1 \ \ Há \ um \ ponto \ de \ mínimo \\ x=\dfrac{1}{3} \ Há \ um \ ponto \ de \ inflexão \end{cases}$

2.7) Assíntotas:

não têm assíntotas: (função contínua com $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$)

2.8) Gráfico



3) $f(x)=\dfrac{1}{12}.x^3(x-4)$

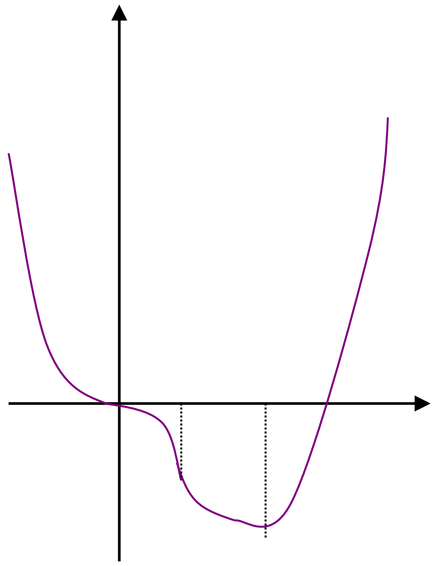
Resolução:

3.1 Domínio: $\Re$

3.2 Intersecções com os eixos coordenados:

$(0,0) \ e \ (4,0)$

3.3 pontos críticos: $y' = \frac{x^2}{3}.(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x = 3 \rightarrow (3, -\frac{9}{4}) \end{cases}$



3.4 onde cresce, onde decresce:

$$y' > 0, \ \ se \ \ x > 3 \Rightarrow f \ \ cresce \ \ em \ \ ]3, +\infty[$$
$$y' < 0, \ \ se \ \ x < 3 \Rightarrow f \ \ decresce \ \ em \ \ ]-\infty, 3[$$

3.5 concavidades:

$$y'' = x.(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x = 2 \rightarrow (2, -\frac{4}{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' < 0 \ \ se \ \ 0 < x < 2 \ onde \ f \ \ tem \ cpb \\ y'' > 0 \ nos \ demais \ \ casos \ \ onde \ \ f \ \ tem \ \ cpc \end{cases}$$

3.6 Extremos locais e pontos de inflexão:

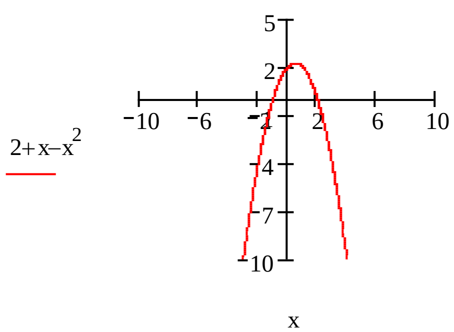
$$(0,0) \ \ e \ \ (2, -\frac{4}{3}) \ \ pontos \, de \ \ \inf. (3, -\frac{9}{4}) \ \ mínimo \ local$$

3.7 Não têm assíntotas.

4) Se $g(x) = f'(x)$ e $g(x) = 2 + x - x^2$ então esboçar o gráfico de g e, em seguida, achar os extremos locais de f (classificando-os) e os pontos de inflexão de f.

Resolução:

1a) g(x) é uma parábola com concavidade para baixo que intercepta o eixo dos x nos



pontos de abscissa x=-1 e x=2. O vértice da parábola é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$

b) $g(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \quad e \quad x = 2$. São as abscissas dos pontos críticos de f.

$$f''(x) = g'(x) = 1 - 2x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = g'(-1) = 3 > 0 \Rightarrow x = -1; \quad ponto \quad de \quad mínimo \\ f''(2) = g'(2) = -3 < 0 \Rightarrow x = 2; \quad ponto \quad de \quad máximo \end{cases}$$

c) ponto de inflexão - $g'(x)=0 \Rightarrow x = 1/2$.

para $x < 1/2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para cima

para $x > 1/2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo

Portanto x=1/2 é abscissa de um ponto de inflexão.

5) Esboçar o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Resolução:

$D_f = \Re$

interseção com eixo y: $f(0)=1$

interseção com eixo x: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Nota: Se a equação admitir uma raiz racional $x = \frac{p}{q}$ (irredutível) então p e q são divisores do último (termo independente) e do primeiro coeficiente da equação respectivamente. Assim vamos testar $x = \pm 1$. Calculando $f(1)=0\ e\ f(-1)=0$. Conhecendo uma raiz podemos usar Briot-Ruffini para achar (se existir) as outras. Se a equação não admitir raízes racionais só com técnicas do cálculo numérico podemos determinar a raiz (aproximadamente).

A função pode ser escrita na forma fatorada: $f(x) = (x-1)^2(x+1)$.

$f(-x) \neq f(x) \approx -f(x) \Rightarrow$ não par e nem ímpar

sinal de: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \begin{cases} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow x = 1\ e\ x = -\dfrac{1}{3}:\ pontos\ críticos \\ > 0\ \ para\ \ x < -1/3\ \ ou\ \ x > 1 \Rightarrow f\ \ é\ crescente \\ < 0\ \ para\ \ -1/3 < x < 1 \Rightarrow f\ \ é\ decrescente \end{cases}$

sinal de: $f''(x) = 6x - 2 \begin{cases} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}:\ pontos\ críticos\ de\ f' \\ > 0\ \ para\ \ x > 1/3 \Rightarrow f\ \ é\ \ côncava\ \cup \\ < 0\ \ para\ \ x < 1/3 \Rightarrow f\ \ é\ \ convexa\ \cap \end{cases}$

classificação dos pontos críticos: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3};\, ponto\ de\ máximo \\ x = 1\,;\, ponto\ de\ \ mínimo \end{cases}$