Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Professor: Montauban Oliveira

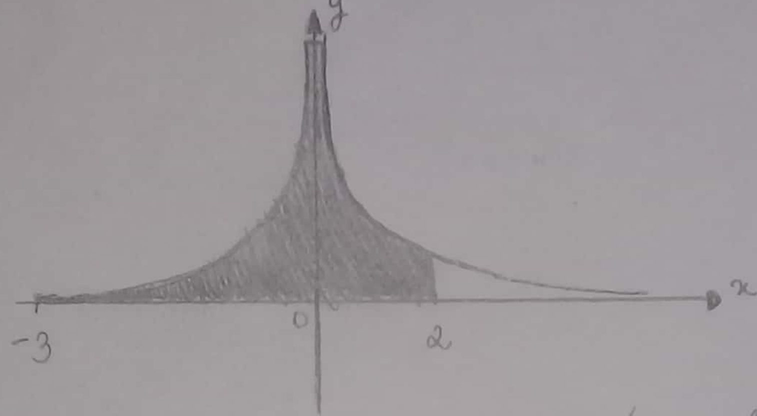
Monitor: Matheus dos Santos Martins

Disciplina: Cálculo 2

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

• Antes de iniciarmos com o gabarito, vamos citar alguns exemplos e definições de integrais impróprias clássicas.

Observe o gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$:



Suponha que seu objetivo seja calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$ no intervalo $[-3, 2]$, assim, teríamos:

$$\Rightarrow A = \int_{-3}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{-3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{-5}{6}}$$

Mas, observe que achamos uma área negativa para tal região, o que não deveria ocorrer, ainda mais que a região está acima do eixo x. O que aconteceu é que $y = \frac{1}{x^2}$, como se nota no gráfico, não é contínua em todo o intervalo $[-3, 2]$, pois, para $x = 0$, y não está definido, com isso, teremos que dividir tal intervalo para estudar de uma outra forma tal indeterminação. Logo, utilizando propriedades das integrais, teremos:

$$\Rightarrow A = \int_{-3}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Visto a indeterminação para $x = 0$, vamos reescrever essa soma da seguinte maneira:

$$\Rightarrow A = \lim_{w \to 0^-} \int_{-3}^{w} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{w \to 0^+} \int_{w}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow A = \lim_{w \to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{w} + \lim_{w \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{w}^{2}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{w \to 0^-} \left[-\frac{1}{w} - \frac{1}{3}\right] + \lim_{w \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{w}\right]$$

Observe que em cada parcela temos a indeterminação $\frac{K}{0}$, $K \in \mathbb{R}^*$, assim observe que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{w \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \infty \\[2ex] \lim\limits_{w \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \infty \end{array} \right.$$

ou seja, ambas as parcelas divergem, com isso, ambas as integrais divergem. Temos então $A = \infty$.

Tal conceito visto acima introduz o que chamamos de integral imprópria, na qual possuem limites infinitos de integração ou ainda limites de integração onde o integrando não está definido (Exemplo visto acima). Observe outros exemplos abaixo:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x}\,dx$
- $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx$
- $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$

Questão 1 - Mostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ e que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty$

I

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_1^{w} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{w \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^w =$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to +\infty} \left[-\frac{1}{w} - (-1)\right] = \lim_{w \to +\infty} \left[\overset{0}{\cancel{-\frac{1}{w}}} + 1\right] = \lim_{w \to +\infty} 1 = 1$$

II

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_1^{w} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{w \to +\infty} \left[\ln(x)\right]_1^w$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to +\infty} \left[\ln(w) - \overset{0}{\cancel{\ln(1)}}\right] = \lim_{w \to +\infty} \ln(w) = +\infty$$

- Observe que:

↳ Se $\lim_{w \to \infty} \int_a^w f(x)\,dx$, com $f(x)$ contínua em $[a, \infty]$, existir, então, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge para um valor real expresso pelo limite.

Por outro lado se $\lim_{w \to \infty}$ não existir, então diremos que a integral imprópria diverge. Visto por I e II, diremos que I converge e II diverge. Esse é um dos principais tipos de integrais impróprias.

Questão 2 -

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{w\to\infty}\int_0^{w} e^{-2x}\,dx$. Utilizando uma mudança de variável, Teremos:

$\Rightarrow \begin{cases} u=-2x \\ du=-2dx \end{cases}$ — $\begin{cases} \text{para } x=0 \text{, Temos } u=0 \\ \text{para } x=w \text{, Temos } u=-2w \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty}\int_0^{-2w} e^{u}\,\frac{du}{-2} = \lim_{w\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^{-2w} e^{u}\,du = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{w\to\infty} e^{u}\Big|_0^{-2w}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{w\to\infty}\left[e^{-2w} - e^{0}\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{w\to\infty}\left[\cancel{\frac{1}{e^{2w}}}^{\,0} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) = \frac{1}{2}$$. Convergente!

b) $$\int_8^{\infty}\frac{1}{x^{4/3}}\,dx = \lim_{w\to\infty}\int_8^{w}\frac{1}{x^{4/3}}\,dx = \lim_{w\to\infty}\int_8^{w} x^{-4/3}\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty}\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}\Bigg|_8^{w} = \lim_{w\to\infty}\left[\frac{x^{-1/3}}{-1/3}\right]\Bigg|_8^{w} = \lim_{w\to\infty}\frac{-3}{x^{1/3}}\Bigg|_8^{w} = \lim_{w\to\infty}\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\Bigg|_8^{w}$$

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty}\left[\cancel{\frac{-3}{\sqrt[3]{w}}}^{\,0} + \frac{3}{\sqrt[3]{8}}\right] = \frac{3}{2}$$. Convergente!

c) $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{w \to \infty} \int_1^{w} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{w \to \infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{w} = \lim_{w \to \infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{w}}_{\to 0} + 1\right] = 1$$

➡ Convergente!

d) $$\int_0^{\infty} \frac{1}{2^x}\,dx = \lim_{w \to \infty} \int_0^{w} \frac{1}{2^x}\,dx = \lim_{w \to \infty} \int_0^{w} 2^{-x}\,dx = \begin{cases} u = -x \\ du = -dx \\ x \to 0,\ u = 0 \\ x \to w,\ u = -w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \int_0^{-w} -2^{u}\,du = -\lim_{w \to \infty} \int_0^{-w} 2^{u}\,du$$

ATENÇÃO

Lembrando que $\int e^x\,dx = e^x + C$, talvez, por intuição, seja natural à primeira vista achar que $\int 2^x\,dx = 2^x + C$, porém, não é o correto.

Lembre-se ainda do seguinte fato: $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$. Tal derivada surge através da definição de derivada. Observe! $\left(f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$

$$\Rightarrow (e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{(e^h - 1)}{h} =$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} e^x \cdot \left\{ \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right\} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot 1 = e^x$$

Observe agora a derivada de 2^x:

$$\Rightarrow (2^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^x(2^h - 1)}{h} =$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} 2^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = 2^x \cdot \ln 2 = 2^x \ln 2$$

■

. Ou seja, sendo $y = 2^x$, então, $y' = 2^x \ln 2$. Mas ainda, usando a notação $\frac{dy}{dx}$ para derivada, teremos:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 \Rightarrow dy = (2^x \ln 2)\, dx \Rightarrow \int dy = \int 2^x \ln 2 \, dx$$

$\Rightarrow y = \ln 2 \cdot \int 2^x dx$. Como definimos $y = 2^x$:

$$\Rightarrow 2^x = \ln 2 \int 2^x dx \Rightarrow \frac{2^x}{\ln 2} = \int 2^x dx$$

Com isso, achamos o que precisávamos, logo:

$$\Rightarrow -\lim_{w\to\infty} \int_0^{-w} 2^u du = -\lim_{w\to\infty} \left[\frac{2^u}{\ln 2}\right]_0^{-w} = -\lim_{w\to\infty} \left[\frac{2^{-w}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right]$$

$$\Rightarrow -\lim_{w\to\infty} \left[\cancel{\frac{1}{2^w \ln 2}}^{\,0} - \frac{1}{\ln 2}\right] = -\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

DESTAQUES

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = \ln 2$$

• Os limites acima foram marcados para que possamos demonstrá-los e mostrar de onde surgiram. Observe que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 = \ln e$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = \ln 2$$

Seria errado imaginarmos então que: $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$?

Vamos analisar. Antes de tudo, guarde um limite super importante, o limite fundamental exponencial: $\lim_{h\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$, pois vamos utilizá-lo na demonstração.

• I) Se $a = 0$, teremos $\lim_{h\to 0} \frac{0^h - 1}{h}$, que nos fornece a indeterminação 0^0, que estudando seus limites laterais chegaremos que seu limite não existe.

• II) Se $a = 1$, teremos $\lim_{h\to 0} \frac{1^h - 1}{h} = \frac{1^0 - 1}{0}$, que nos fornece a indeterminação $\frac{0}{0}$. Podemos, então, aplicar a regra de L'Hospital, assim:

➡ $\lim_{h\to 0} \frac{1^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1^h \ln 1}{1} = 1 . \ln 1 = \boxed{\ln 1}$ //

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

• III) Se $a = 2$, afirmamos que equivale a $\ln 2$.

Vamos agora generalizar. Seja $a > 0$, $a \neq 1$:

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$. Façamos $u = a^h - 1$, logo, quando $h \to 0$, temos que $u \to 0$.

Mais ainda: $u + 1 = a^h \Rightarrow \ln(u+1) = h \ln a \Rightarrow h = \frac{\ln(u+1)}{\ln a}$

Aplicando as mudanças, teremos:

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln a}} = \lim_{u \to 0} \ln a \cdot \frac{u}{\ln(u+1)}$$

$\Rightarrow$ Como $\ln a$ é constante: $\ln a \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}} = \ln a \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$

Focando no limite, façamos agora $w = \frac{1}{u}$, quando $u \to 0$, temos que $w \to \infty$:

$$\Rightarrow \ln a \cdot \lim_{w \to \infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{w} + 1\right)^w} = \ln a \cdot \frac{\lim_{w \to \infty} 1}{\lim_{w \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{w}\right)^w} = \ln a \cdot \frac{1}{\ln\left[\lim_{w \to \infty} \left(1 + \frac{1}{w}\right)^w\right]}$$

$\Rightarrow$ Aplicando o <u>limite fundamental exponencial</u>, teremos:

$\Rightarrow \ln a \cdot \frac{1}{\ln[e]} = \ln a \cdot \frac{1}{1} = \ln a$. Logo, $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$

Assim, se $a = e$, realmente teremos $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \ln e = 1$ e para $a = 2$

teremos $\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} = \ln 2$

• Uma outra maneira de demonstrar o limite, seria utilizando a Regra de L'Hospital, pois, Tal limite gera a indeterminação $\frac{0}{0}$. Observe:

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1)'}{(h)'} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h \ln a}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} a^h \ln a = \boxed{\ln a}, \ a > 0, \ a \neq 1$$

Após Todos esse detalhes vistos nessa questão, guarde:

• Limite fundamental exponencial $\Rightarrow \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

• Derivada de $a^x \Rightarrow (a^x)' = a^x \ln a$

• Integral de $a^x \Rightarrow \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}}\right) dx = \lim_{w \to \infty} \int_1^{w} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}}\right) dx$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{w \to \infty} \left[\int_1^{w} x^{-1/2} \, dx - \int_1^{w} (x+3)^{-1/2} \, dx \right]$. Para a segunda integral,

façamos $\begin{cases} u = x + 3 \rightarrow \begin{cases} x \to 1, \text{ então } u = 4 \\ x \to w, \text{ então } u = w + 3 \end{cases} \\ du = dx \end{cases}$, logo, podemos reescrever:

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\left(\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right) \Bigg|_1^{w} - \int_4^{w+3} u^{-1/2} \, du \right] = \lim_{w \to \infty} \left[\left(\frac{x^{1/2}}{1/2} \right) \Bigg|_1^{w} - \left(\frac{u^{1/2}}{1/2} \right) \Bigg|_4^{w+3} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_1^w - \left(2\sqrt{u}\right)\Big|_4^{w+3} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\left(2\sqrt{w} - 2\right) - \left(2\sqrt{w+3} - 4\right) \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[2\sqrt{w} - 2\sqrt{w+3} + 2 \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[2\sqrt{w} - 2\sqrt{w+3} \right] + \lim_{w \to \infty} 2$$

$$\Rightarrow 2 . \lim_{w \to \infty} \left[\sqrt{w} - \sqrt{w+3} \right] + 2$$

• Focando apenas em $\lim_{w \to \infty} \sqrt{w} - \sqrt{w+3}$, note que teremos a indeterminação $\infty - \infty$. Logo, vamos utilizar outra estratégia. Tal limite pode ser resolvido multiplicando tanto o numerador quanto o denominador por $\sqrt{w} + \sqrt{w+3}$ (REFLITA!):

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left(\sqrt{w} - \sqrt{w+3}\right) . \frac{\left(\sqrt{w} + \sqrt{w+3}\right)}{\left(\sqrt{w} + \sqrt{w+3}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \frac{\cancel{w} + \cancel{\sqrt{w}\sqrt{w+3}} - \cancel{\sqrt{w}\sqrt{w+3}} - (\cancel{w}+3)}{\sqrt{w} + \sqrt{w+3}} = \lim_{w \to \infty} \frac{-3}{\sqrt{w} + \sqrt{w+3}}$$

$\Rightarrow$ $= \dfrac{-3}{\infty} = 0$, assim, teremos:

$$\Rightarrow 2\left[\lim_{w \to \infty} \left(\sqrt{w} - \sqrt{w+3}\right) \right] + 2 = 2.0 + 2 = 2$$ Convergente!

f) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{5-x}}\,dx$. Observe que $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5-x}}$ possui um ponto de descontinuidade em $x = 5$, logo, estudaremos o limite nas proximidades do mesmo.

$$\Rightarrow \lim_{w \to 5} \int_1^w \frac{x}{\sqrt{5-x}}\,dx$$

. Para a integral, fazemos:

$$\begin{cases} u = 5 - x \Rightarrow x = 5 - u \\ \text{para } x \to 1 \text{, } u \to 4 \\ \text{para } x \to w \text{, } u \to 5-w \\ du = -dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to 5} \int_4^{5-w} \frac{5-u}{\sqrt{u}}(-du) \Rightarrow \lim_{w \to 5} (-1) \cdot \int_4^{5-w} \frac{5}{\sqrt{u}} - \frac{u}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to 5} (-1) \cdot \int_4^{5-w} (5u^{-1/2} - u^{1/2})\,du = (-1) \cdot \lim_{w \to 5} \left[\left(\frac{5 \cdot u^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right) - \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} \right]$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot \lim_{w \to 5} \left[\frac{5u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_4^{5-w} \Rightarrow (-1) \cdot \lim_{w \to 5} \left[10u^{1/2} - \frac{2u^{3/2}}{3} \right]_4^{5-w}$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot \lim_{w \to 5} \left[\left(10\sqrt{5-w} - \frac{2}{3}\sqrt{5-w} \right) - \left(10\sqrt{4} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow (-1) \left[\left(10 \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \right) - \left(10 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 8 \right) \right] = (-1) \left[0 - \left(20 - \frac{16}{3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow (-1) \left[0 - \left(\frac{44}{3} \right) \right] = \frac{44}{3}$$

Convergente!

g) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{w\to\infty} \int_e^{w} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

• Lembrando que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, para a integral $\displaystyle\int_e^{w} \frac{1}{x\ln x}\,dx$, façamos

$$\begin{cases} u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x}\,dx \\ \text{para } x \to e,\ u \to 1 \\ \text{para } x \to w,\ u \to \ln(w) \end{cases} \Rightarrow \lim_{w\to\infty} \int_1^{\ln(w)} \frac{1}{u}\,du$$

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty} \Big[\ln(u)\Big]_1^{\ln(w)} = \lim_{w\to\infty} \Big[\ln[\ln(w)] - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\Big]$$

$\Rightarrow \ln(\infty) = \infty$ Divergente!

Questão 3 - Calculemos a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ de maneira direta:

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty} \int_1^{w} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{w\to\infty} \int_1^{w} x^{-p}\,dx = \lim_{w\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{w}$$

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty} \left[\frac{x^{-(p-1)}}{(1-p)}\right]_1^{w} = \lim_{w\to\infty} \left[\frac{1}{x^{(p-1)}\cdot(1-p)}\right]_1^{w}$$

$$\Rightarrow \lim_{w\to\infty} \left[\frac{1}{w^{(p-1)}(1-p)} - \frac{1}{1^{(p-1)}\cdot(1-p)}\right]$$. Vamos agora analisar as condições impostas para p.

• Para $p = 1$, observe que limite não existiria (Verifique!) fazendo a integral divergir. De fato, nota-se que, para $p = 1$, teríamos:

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^{\infty} = \infty \quad \text{DIVERGE!}$$

• Para $p < 1$, tendo o limite: $\lim\limits_{w \to \infty} \left[\frac{1}{w^{(p-1)} \cdot (1-p)} - \frac{1}{1^{(p-1)} \cdot (1-p)} \right]$

podemos notar que $p - 1 < 0$, ou seja, um valor negativo, digamos da forma $-K$ com $K > 0$.

Assim, com foco nos denominadores de tal limite teríamos:

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\frac{1}{w^{-K} \cdot (1-p)} - \frac{1}{1^{-K}\,(1-p)} \right] = \lim_{w \to \infty} \left[\frac{w^K}{(1-p)} - \frac{1}{(1-p)} \right], K > 0$$

$$\Rightarrow = \frac{\infty^K - 1}{(1-p)} = +\infty, \text{ logo, DIVERGE!}$$

• Para $p > 1$, nota-se que $p - 1 > 0$, ou seja, um valor positivo, digamos da forma K, $K > 0$, assim

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\frac{1}{w^K \cdot (1-p)} - \frac{1}{(1-p)} \right] = \cancelto{0}{\frac{1}{\infty^K (1-p)}} - \frac{1}{(1-p)}$$

$$\Rightarrow = -\frac{1}{1-p}$$. Como $p > 1$, nosso limite existirá e nossa integral convergirá.

CONVERGE!

Assim, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Questão 4 -

• Para a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, observe que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é contínua em todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$, assim, teremos:

➡ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{w \to \infty} \int_{-w}^{+w} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Vamos agora utilizar uma propriedade de integrais:

✱ Seja uma função $f(x)$ contínua em $(-\infty, +\infty)$, tomando um valor c pertencente a tal intervalo, podemos fazer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad , \; c \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ pode ser reescrito como:

➡ $\lim_{w \to \infty} \int_{-w}^{w} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{w \to \infty} \left[\int_{-w}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{w} \frac{1}{1+x^2}\,dx \right]$

➡ Pelo enunciado: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + c$. Caso queira entender de onde se origina tal resultado, basta utilizar uma derivação implícita:

• $y = \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow \operatorname{Tg}(y) = x$. Esse primeiro resultado indica o seguinte:

" Se y é igual ao ângulo cuja tangente vale um valor real x, então x é igual a tangente do ângulo y."

$$\Rightarrow Tg(y) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}[Tg(y)] = \frac{d}{dx}[x] \Rightarrow sec^2(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2(y)}$. Lembrando das relações Trigonométricas que:

* $sec^2(y) = 1 + Tg^2(y)$, Teremos.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + Tg^2(y)}$. Mas $x = Tg(y)$, logo, $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}}$

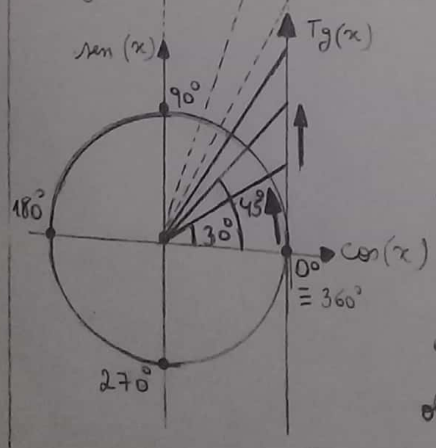
Prosseguindo com nossa resolução, Teremos:

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\int_{-w}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{w} \frac{1}{1+x^2}\, dx \right] = \lim_{w \to \infty} \left[\left(arctg(x)\right)\Big|_{-w}^{0} + \left(arctg(x)\right)\Big|_{0}^{w} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} \left[\left(\cancelto{0}{arctg\, 0} - arctg(-w)\right) + \left(arctg\, w - \cancelto{0}{arctg\, 0}\right) \right]$$

"O ângulo cuja Tangente vale 0 é 0°."

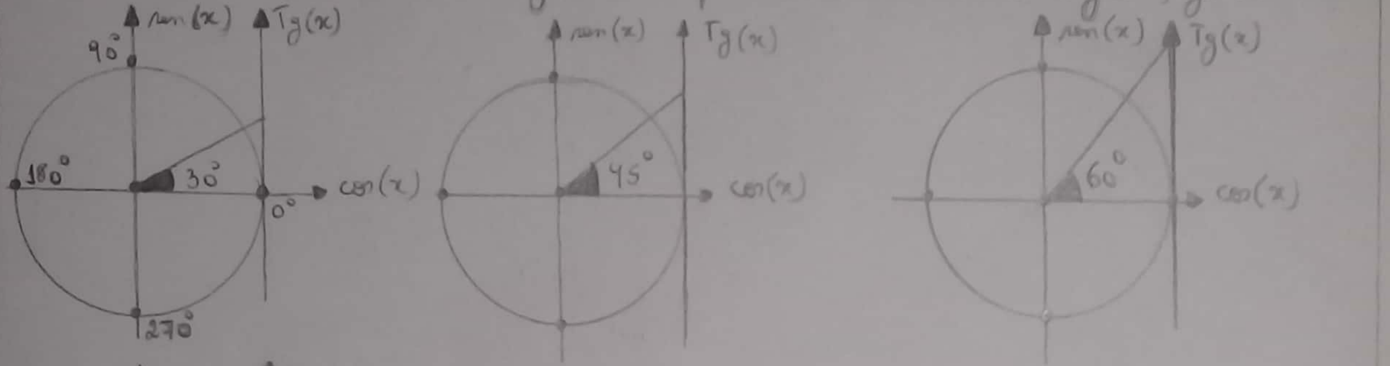
$\Rightarrow \lim_{w \to \infty} [-arctg(-w) + arctg(w)] = -arctg(-\infty) + arctg(\infty)$. Nosso Trabalho agora é Tentar solucionar o seguinte questionamento: "Existe algum ângulo cuja Tangente vale ∞ ou $-\infty$?". Vamos então ao círculo Trigonométrico.

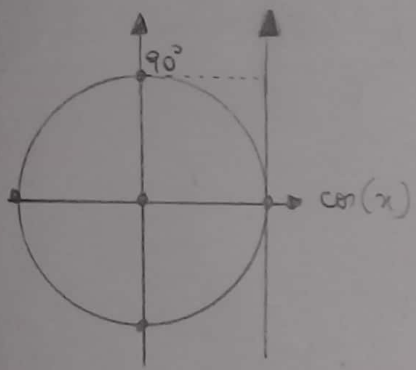


• Se atente ao primeiro quadrante e considere o sentido anti-horário. Lembrando dos ângulos mais conhecidos 30°, 45°, 60°, vamos marcar suas respectivas Tangentes e observe a Tendência. Note como as marcações no eixo das Tangentes Tendem a subir mais e mais. Mais ainda observe que ao chegarmos ao ângulo de 90°, chegaremos ao eixo que se Torna paralelo ao eixo das Tangentes, o eixo de sen(x). Sabemos que vale na Trigonometria a seguinte relação:

$Tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$. Observe agora que se o ângulo a ser tratado for o de 90°,

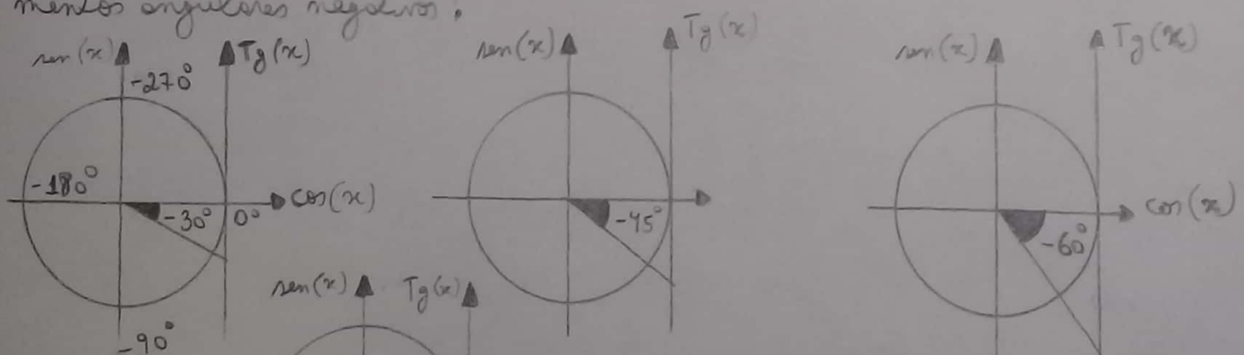
Teremos $Tg(90°) = \frac{sen(90°)}{cos(90°)} = \frac{1}{0} = +\infty$, ou seja, não existe um valor real para a Tangente do ângulo de 90°. Observe a Tendência de crescimento no sentido anti-horário das tangentes correspondentes aos devidos ângulos já escolhidos.

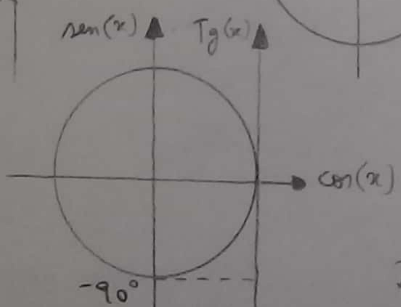




, com isso, podemos afirmar que $arctg(+\infty) = 90° = \frac{\pi}{2}$

Para estudar o caso de $arctg(-\infty)$, vamos adotar o 4º como referência. No sentido horário de nosso círculo Trigonométrico, consideraremos os deslocamentos angulares negativos.





Analisando de maneira análoga, as correspondências entre os ângulos e cada uma de suas Tangentes, decrescem mais e mais, assim tem-se $arctg(-\infty) = 90° = -\frac{\pi}{2}$

Pela relação $Tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, poderíamos também achar tal resultado, pois:

$$Tg(-90°) = \frac{sen(-90°)}{cos(-90°)}$$. Lembre que:

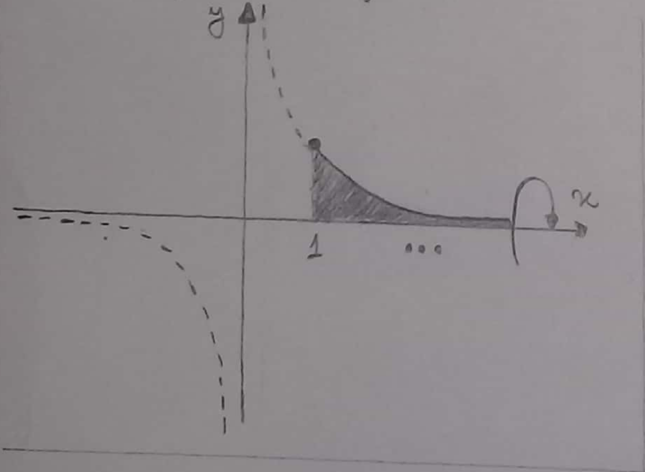
$$\begin{cases} \rightarrow sen(x) \text{ é uma função ímpar, logo, } sen(-x) = sen(x) \\ \rightarrow cos(x) \text{ é uma função par, logo, } cos(-x) = cos(x) \end{cases}$$, assim

$$Tg(-90°) = \frac{sen(-90°)}{cos(-90°)} = \frac{-sen(90°)}{cos(90°)} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Com isso, $-arctg(-\infty) + arctg(+\infty) = -\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$

Questão 5 -

A região na qual representa a função $y = \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$ é vista abaixo:



• Calculando a área dessa região, temos:

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = ln(x)\Big|_1^{\infty} = ln\infty - ln1$$

$= \infty$, ou seja, uma área infinita.

• Calculando seu volume ao rotacionar tal região sobre o eixo x, teremos:

$$V = \pi \cdot \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \pi \cdot \left[-\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = \pi \cdot [0 + 1]$$

$= \pi$, ou seja, um volume finito!

Realmente é algo bem estranho, pois temos um volume finito para uma área infinita! Caso queira pesquisar sobre, procure pelo o que chamamos na matemática de "O paradoxo da Corneta de Gabriel".

COMENTÁRIOS E INDICAÇÕES PARA AS LISTAS SOBRE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

• Observe que resolvemos inúmeras integrais, limites e demonstramos alguns conceitos utilizando definição de derivada para funções de uma variável real e utilizamos bastante conceitos trigonométricos. Indicarei alguns livros que usei para aprimoramento e aprofundamento nesses conceitos de Cálculo 1.

↳ Se você prefere livros com bastantes demonstrações algébricas e questões com mais aprofundamento, recomendo:

- Cálculo com Geometria Analítica, Louis Leithold, Volume 1;
- Cálculo com Geometria Analítica, George Simmons, Volume 1;
- Um curso de Cálculo, Guidorizzi, Volumes 1 e 2.

↳ Se você prefere livros com muitos gráficos e bastantes visualizações geométricas com exercícios bastante aplicados, recomendo:

- Cálculo, James Stewart, Volume 1;
- Cálculo, George B. Thomas, Volume 1.