ICE– Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 8 – TEOREMAS E REGRAS DE L'HOPITAL

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

1. TEOREMAS

A seguir enunciaremos diversos teoremas cujas demonstrações serão omitidas. Esses teoremas abrem caminhos paras as aplicações *práticas* das derivadas.

Seja f uma função definida e contínua em $I=[a,b]$ e derivável em $J=]a,b[$.

Teorema 1 - Então f assume máximo e mínimo absoluto em I.

Teorema 2 (Teorema De Rolle) - Se $f(a)=f(b)=0$, então existe pelo menos um ponto $c\in J$ tal que $f'(c)=0$

Nota: Geometricamente o teorema diz que , nas condições dadas, f admite pelo menos uma reta tangente paralela ao eixo x.

Teorema 3 (Teorema do valor médio) - Então existe pelo menos um ponto $c\in J$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Nota: Esse teorema generaliza o anterior e diz que f admite pelo menos uma reta tangente paralela a reta que passa pelos pontos $(a,\ f(a))\ e\ (b,\ f(b))$

A prova faz uso da função auxiliar $h(x)= f(x)-[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)]$ que satisfaz as condições do teorema 2.

Teorema 4 (Teorema do valor médio generalizado ou de Cauchy) .Sejam $f \ e \ g$ funções contínuas em I e deriváveis em J. Suponha que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in J$.

Então existe pelo menos um $c \in J$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Nota: A prova faz uso da função auxiliar $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$ que satisfaz as condições do teorema 2.

Quando $g(x) = x$ recaímos no teorema 3.

2. REGRAS DE L'HOSPITAL- Trata-se de um método para resolver limites das formas $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$ com auxílio de derivadas.

Regras: Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente num ponto a desse intervalo. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

R1- Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ desde que exista o último limite.

Nota: A prova utiliza o teorema de Cauchy: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ para $a < c < x \ ou \ x < c < a$ pelo cálculo dos limites laterais $(x \to a^+ \ ou \ x \to a^-)$. Se a for infinito, faz $t = \dfrac{1}{x}$.

R2- Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ desde que exista o último limite.

Nota: A prova usa o seguinte artifício $\dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-f(b)}=\dfrac{f(x)(1-\dfrac{f(b)}{f(x)})}{g(x)(1-\dfrac{g(b)}{g(x)})}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\ \left(a<x<c<b\right)\Rightarrow$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\left[\dfrac{1+\dfrac{g(b)}{g(x)}}{1+\dfrac{f(b)}{f(x)}}\right]$ o termo entre colchete tende a 1 para x tendendo a a.

Obs.: as outras formas indeterminadas podem ser reduzidas as formas $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ através transformações algébricas convenientes.

i) $0.\infty \rightarrow f(x).g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$

ii) $\infty-\infty \rightarrow f-g=f.g(\dfrac{1}{g}-\dfrac{1}{f})$

iii) $0^0, \infty^0, 1^\infty \rightarrow 0.\infty$ através de : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=e^{\lim\limits_{x\to a}[\ln(f(x))]}$

Obs.: Às vezes são necessárias várias aplicações da regra da L'Hospital.

Exemplos Calcular os limites

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Resolução :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x-\cos x}{2\operatorname{sen} x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{2\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x}{2\cos x}=1/2$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2x}$

Resolução : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$

Resolução : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen}x)}$

Resolução: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\operatorname{sen}x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\dfrac{1}{\cos x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2x}$

Resolução : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{2}=0$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^2-5x-60}{4+3x-x^2}$

Resolução : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^2-5x-60}{4+3x-x^2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{10x-5}{3-2x}=-7$

Calcular os limites (forma $0.\infty$)

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln(1+\dfrac{2}{x})$

Resolução: $\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln(1+\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}.(-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+\frac{2}{x}}=2$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x.\ln(\operatorname{sen}x)$

Resolução: $\lim_{x\to 0^+} \tan x.\ln(\text{sen}\, x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\text{sen}\, x)}{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}}{\dfrac{-1}{\text{sen}^2\, x}} = \lim_{x\to 0^+} [-\text{sen}\, x \cos x] = 0$

9) $\lim_{x\to\infty} x.\text{sen}(\frac{\pi}{x})$

Resolução: $\lim_{x\to\infty} x.\text{sen}(\frac{\pi}{x}) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}(\frac{\pi}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{x})(-\frac{\pi}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \pi$

Calcular os limites (forma $\infty-\infty$)

10) $\lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1})$

Resolução: $\lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1}) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+x-2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-4x}{2x} = \frac{-3}{2}$

11) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}\, x})$

Resolução:

$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}\, x}) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x - x}{x\,\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\text{sen}\, x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{\cos x + \cos x - x\,\text{sen}\, x} = 0$

12) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x})$

Resolução: $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x} = -\frac{1}{2}$

13) $\lim_{x\to 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$

Resolução: $\lim_{x\to 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = -\frac{1}{2}$

Calcular

14) $\lim_{x\to 0^=} x^x$

Resolução: Forma 0^0

$$\lim_{x\to 0^=} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^=} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^=} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} = e^0 = 1$$

15) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Resolução: Forma ∞^0

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

16) $\lim\limits_{x\to\infty} (3+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$

Resolução Forma ∞^0

$$\lim_{x\to\infty} (3+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(3+x^2)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3+x^2}} = e^2$$

17) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{2x})^x$

Resolução : Forma 1^∞

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{2x})^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2x})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}(-\frac{1}{2x^2})}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

18) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

Resolução: Forma 1^∞

$$\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^1 = e$$

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\operatorname{sen} x}$.

21) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\cos 2x}$.