Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, logo existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Portanto, olhando a Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Isso implica que, se C é uma curva obtida pela interseção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ. Isso é verdadeiro na direção de todo vetor $\mathbf{u}$; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P. Logo, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local. □

14.7 Exercícios

1. Suponha que $(1, 1)$ seja um ponto crítico de f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 1$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 3$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que $(0, 2)$ seja um ponto crítico de g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

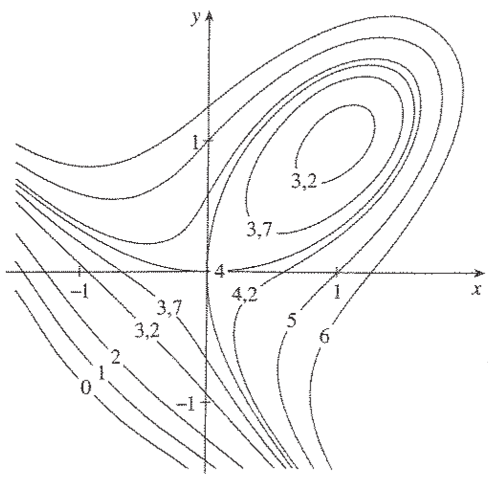
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 2$, $g_{yy}(0, 2) = -8$

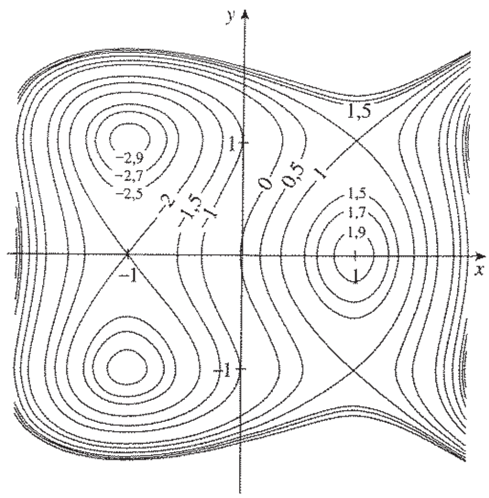
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 □ Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo locais em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 □ Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, utilize-o com a janela de inspeção e o ponto de vista que mostre os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

8. $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

12. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2}$

15. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

16. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

17. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

18. $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$

19–22 □ Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida use o cálculo para achar esses valores precisamente.

19. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

20. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

21. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

22. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

23–26 □ Utilize um dispositivo gráfico como no Exemplo 4 (ou Método de Newton ou um determinador de raízes) para estabelecer os pontos críticos de f com arredondamento na terceira casa decimal. Em seguida classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

23. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

24. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

25. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

26. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

27–34 □ Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

27. $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D é a região triangular fechada com vértices (0, 0), (2, 0), e (0, 3)

28. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D é a região triangular fechada com vértices (1, 0), (5, 0), e (1, 4)

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$

30. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

31. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

32. $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

33. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

34. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são (−2, 3), (2, 3), (2, 2), e (−2, −2).

35. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de tamanho de janela de inspeção e de ponto de vista para ver como isso é possível.

36. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo, local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida utilize um computador com uma escolha conveniente de janela de inspeção e ponto de vista para ver como isso é possível.

37. Determine a distância mais curta entre o ponto (2, 1, −1) e o plano $x + y - z = 1$.

38. Determine o ponto do plano $x - y + z = 4$ que está mais próximo do ponto (1, 2, 3).

39. Determine os pontos da superfície $z^2 = xy + 1$ que estão mais próximos da origem.

40. Determine os pontos da superfície $x^2y^2z = 1$ que estão mais próximos da origem.

41. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

42. Determine três números positivos x, y e z cuja soma é 100 tal que $x^ay^bz^c$ seja máximo.

43. Determine o volume da maior caixa retangular com arestas paralelas aos eixos e que pode ser inscrita no elipsóide

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$$

44. Resolva o problema do Exercício 43 para um elipsóide genérico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

45. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

46. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se sua superfície total é dada como 64 cm².

47. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

48. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.