ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 9 - INTEGRAIS

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

4 Regra da Substituição Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Importante considerar que a Regra da Substituição para a integração pode ser demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação.

Além disso, observe também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, uma forma de se recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du como diferenciais.
Na Regra de Substituição vale-se da permissão **de operar com *dx* e *du* após sinais de integração como se fossem diferenciais.**

Exemplos:

1) Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$.

RESOLUÇÃO: Fazemos a substituição

$u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\,dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ e a Regra da Substituição, temos

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx = \int \cos u \bullet du\ \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \int \cos u\,du$$

$$= \text{sen}\, u + C$$

$$= \text{sen}(x^4 + 2) + C.$$

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x.

2) $\int (x^2 + 3x)^9 \cdot (2x + 3)dx$

RESOLUÇÃO: A primeira constatação neste caso é que a integral não é uma integral imediata, pois a obtenção da antiderivada desta função não é trivial. Fazendo a comparação da integral com o formato típico apresentado acima e fazendo a mudança de variável:

$$u = f(x) = x^2 + 3x$$

$$du = f(x).\,dx = (2x + 3)dx$$

Substituindo na integral $\int (x^2 + 3x)^9 \cdot (2x + 3)dx = \int u\,du$

O que nos leva a uma integral imediata em termos da variável u:

$$I = \int u^9.\,du = \frac{u^{10}}{10} + C$$

Voltamos à variável original x.

$$I = \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(x^2 + 3x)^{10}}{10} + C$$

Portanto:

$$I = \int (x^2 + 3x)^9.\,(2x + 3)\,dx = \frac{(x^2 + 3x)^{10}}{10} + C$$

3) $\int \text{sen}(3x)dx$

RESOLUÇÃO: Fazendo a mudança de variável $u = f(x) = 3x$, Então du = 3dx. Na integral:

$$I = \int \text{sen}(3x)\,dx = \int \text{sen}u\,\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \text{sen}u\,du$$

$$I = \frac{1}{3}\int \text{sen}(u)\,du = \frac{1}{3}(-\cos(u)) + C$$

Lembrando que u = 3x, voltamos à variável original x.

$$I = \frac{-\cos(u)}{3} + C = \frac{-\cos(3x)}{3} + C$$

Portanto:

$$I = \int \text{sen}(3x)\,dx = \frac{-\cos(3x)}{3} + C$$

Importante: Observe que, em termos gerais,
$\int \text{sen}(ax)\,dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$, sendo $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Esta característica pode ser utilizada para várias outras funções:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\text{sen}(ax)}{a} + C$$

$$\int \sec^2(ax)\,dx = \frac{\text{tg}(ax)}{a} + C$$

$$\int \text{cosec}^2(ax)\,dx = \frac{-\text{cotg}(ax)}{a} + C$$

$$\int \sec(ax).\,\text{tg}(ax)\,dx = \frac{\sec(ax)}{a} + C$$

$$\int \text{cosec}(ax).\,\text{cotg}(ax)\,dx = \frac{-\text{cosec}(ax)}{a} + C$$

4) $\int \frac{1}{(7x-10)^4} dx$

<u>RESOLUÇÃO:</u> Fazendo a mudança de variável u = 7x – 10 e du = 7 dx

Na integral I:

$$I = \int \frac{1}{(7x-10)^4} dx = \int \frac{1}{u^4} \frac{1}{7} du = \frac{1}{7} \int \frac{1}{u^4} du$$

Usando a propriedade:

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

:

$$I = \frac{1}{7} \int \frac{1}{u^4} du = \frac{1}{7} \int u^{-4} du$$

O que nos leva a uma integral imediata em termos da variável u:

$$I = \frac{1}{7} \int u^{-4} du = \frac{1}{7} \frac{u^{-4+1}}{(-4+1)} + C = \frac{1}{7} \frac{u^{-3}}{(-3)} + C$$

Usando a mesma propriedade das potências:

$$I = -\frac{1}{21u^3} + C$$

Voltamos à variável original x.

$$I = -\frac{1}{21u^3} + C = -\frac{1}{21(7x-10)^3} + C$$

Portanto:

$$I = \int \frac{1}{(7x-10)^4}dx = -\frac{1}{21(7x-10)^3} + C$$

5) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

RESOLUÇÃO: Fazendo a mudança de variável **u = x – 1** e du = dx, temos que:

$x = u + 1$ e $x^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$

Na integral:

$$I = \int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int (u^2 + 2u + 1)\sqrt{u}\,du$$

Usando a propriedade:

$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$:

$$I = \int (u^2 + 2u + 1)\sqrt{u}\,du = \int (u^2 + 2u + 1).u^{\frac{1}{2}}\,du$$

Fazendo a multiplicação com a propriedade:

$x^m.x^n = x^{m+n}$:

$$I = \int \left(u^{2+\frac{1}{2}} + 2u^{1+\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$I = \int u^{\frac{5}{2}}\,du + 2\int u^{\frac{3}{2}}\,du + \int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

O que nos leva a uma integral imediata em termos da *variável u:*

$$I = \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\left(\frac{5}{2}+1\right)} + 2\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\left(\frac{3}{2}+1\right)} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} + C$$

$$I = \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\left(\frac{7}{2}\right)} + 2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C$$

Fazendo a divisão das frações:

$$I = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + 2\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Voltamos à variável original x.

$$I = \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Que pode ser escrito utilizando as raízes:

$$I = \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} + \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$$

Portanto:

$$I = \int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} + \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$$

6) $\int \boldsymbol{x^3\sqrt{x^2-1}}\mathbf{dx}$

RESOLUÇÃO: Fazendo a mudança de variável:

$$u = x^2 - 1$$

$$du = 2x.dx \quad \text{ou} \quad x.dx = \frac{1}{2}du$$

Temos que:

$$u = x^2 - 1 \rightarrow x^2 = u + 1$$

Na integral I:

$$I = \int x^3 \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int x^2 \sqrt{x^2 - 1}\; x.dx = \int (u + 1) . \sqrt{u}\; \frac{1}{2} du$$

Usando a propriedade:

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$:

$$I = \frac{1}{2} \int (u + 1) . u^{\frac{1}{2}}\; du$$

Fazendo a multiplicação com a propriedade:

$$x^m . x^n = x^{m+n}$$:

$$I = \frac{1}{2} \int \left(u^{1+\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

O que nos leva a uma integral imediata em termos da variável u:

$$I = \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}}\; du + \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}}\; du$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\left(\frac{3}{2} + 1\right)} + \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)} + C$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C$$

Fazendo a divisão das frações:

$$I = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Voltamos à variável original x.

$$I = \frac{1}{5}(x^2 - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Que pode ser escrito utilizando as raízes:

$$I = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2 - 1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$

Portanto:

$$I = \int x^3\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2 - 1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$