ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 10 - INTEGRAIS

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

INTEGRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Integrais que envolvem potências de funções trigonométricas.

Caso I: $\int \text{sen}^n x \, dx$

- Se n=1, temos:

$$I = \int \text{sen}x \, dx$$

$$I = \int \text{sen}x \, dx = -\cos x + C$$

- Se n=2, temos:

$$I = \int \text{sen}^2 x \, dx$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$I = \int \text{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C$$

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \; dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C$$

- Se n>2, temos:

$$I = \int \operatorname{sen}^n x \; dx$$

Reescrevendo $\operatorname{sen}^n x$ como $\operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, \operatorname{sen} x$, ficamos com:

$$I = \int \operatorname{sen}^n x \; dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, \operatorname{sen} x \, dx$$

Integrando por partes:

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x \;\rightarrow\; du = (n-1).\operatorname{sen}^{n-2} x \,.\, \cos x \; dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x$$

$$I = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, (-\cos x) - \int (-\cos x) \,.\; (n-1).\operatorname{sen}^{n-2} x \,.\, \cos x \; dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, \cos x + \int \cos^2 x. \; (n-1).\operatorname{sen}^{n-2} x \; dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, \cos x + (n-1). \int \cos^2 x. \; \operatorname{sen}^{n-2} x \; dx$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$I = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \,.\, \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int (1-\mathrm{sen}^2 x).\ \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx$$

$$= -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ - \mathrm{sen}^{n}x\ dx$$

$$= -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx\ - (n-1).\int \mathrm{sen}^{n}x\ dx$$

$$I = \int \mathrm{sen}^{n}x\ dx$$

$$I = -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx\ - (n-1).\int \mathrm{sen}^{n}x\ dx$$

$$I = -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx\ - (n-1).I$$

Reescrevendo no lado esquerdo:

$$I + (n-1).I = -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx$$

$$I(1+n-1) = -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx$$

$$I.n = -\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx$$

$$I = \frac{1}{n}.\left(-\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx\right) + C$$

$$I = \int \mathrm{sen}^{n}x\ dx = \frac{1}{n}.\left(-\mathrm{sen}^{n-1}x\,.\cos x + (n-1).\int \mathrm{sen}^{n-2}x\ dx\right) + C$$

Note que se n>2 a integral depende da integral $\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$ e assim sucessivamente. Observe no exemplo abaixo:

Calcule a integral:

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \, dx$$

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{1}{4} \cdot \left(-\operatorname{sen}^{4-1} x \, . \cos x + (4-1) . \int \operatorname{sen}^{4-2} x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\operatorname{sen}^3 x \, . \cos x + 3 . \int \operatorname{sen}^2 x \, dx \right)$$

Utilizando:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C$$

$$I = \frac{1}{4} \cdot \left(-\operatorname{sen}^3 x \, . \cos x + 3 . \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} \right) \right) + C$$

$$I = \frac{1}{4} \cdot (-\operatorname{sen}^3 x \, . \cos x) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} \right) + C$$

$$I = \frac{1}{4} \cdot (-\operatorname{sen}^3 x \, . \cos x) + \frac{3x}{8} - \frac{3 . \operatorname{sen}(2x)}{8} + C$$

$$I = \int \mathrm{sen}^4 x \; dx$$

$$= \frac{1}{4}.(-\mathrm{sen}^3 x \,.\, \cos x) + \frac{3x}{8} - \frac{3.\,\mathrm{sen}(2x)}{8} + C$$

Caso II: $\int \cos^n x \, dx$

- Se n=1, temos:

$$I = \int \cos x \, dx$$

$$I = \int \cos x \, dx = \mathrm{sen} x + C$$

- Se n=2, temos:

$$I = \int \cos^2 x \; dx$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$I = \int \cos^2 x \; dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2x)}{4} + C$$

$$I = \int \cos^2 x \; dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2x)}{4} + C$$

- Se n>2, temos:

$$I = \int \cos^n x \ dx$$

Reescrevendo $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \, . \cos x$, ficamos com:

$$I = \int \cos^n x \ dx = \int \cos^{n-1} x \, . \cos x \, dx$$

Integrando por partes:

$$u = \cos^{n-1} x \ \rightarrow \ du = (n-1). \cos^{n-2} x \, . (-\operatorname{sen} x) \ dx$$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x$$

$$I = \int \cos^{n-1} x \, . \cos x \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \, . \operatorname{sen} x$$
$$- \int \operatorname{sen} x \, . \ (n-1). \cos^{n-2} x \, . (-\operatorname{sen} x) \ dx$$

$$= \cos^{n-1} x \, . \operatorname{sen} x \ + (n-1) \int \operatorname{sen}^2 x \, . \cos^{n-2} x \ \ dx$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$I = \cos^{n-1} x \, . \operatorname{sen} x \ + (n-1) \int (1 - \cos^2 x). \cos^{n-2} x \ \ dx$$

$$= \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x$$
$$+(n-1). \int \cos^{n-2}x \;\; - (\cos^{n-2}x \,.\, \cos^2 x)\, dx$$

$$= \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x \;+ (n-1). \int \cos^{n-2}x \;\; - \cos^n x\, dx$$

$$= \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x \; + (n-1).$$
$$\int \cos^{n-2}x \;\, dx \; - \; (n-1). \int \; \cos^n x\, dx$$

Note que a integral inicial surge novamente na montagem:

$$I = \int \cos^n x \;\, dx$$

$$I = \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x \; + (n-1).$$
$$\int \cos^{n-2}x \;\, dx \; - \; (n-1). \int \; \cos^n x\, dx$$

$$I = \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x \;\; + (n-1). \int \cos^{n-2}x \;\, dx \; - \; (n-1).\, I$$

Reescrevendo no lado esquerdo:

$$I + (n-1).\, I = \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x \; + (n-1). \int \cos^{n-2}x \;\, dx$$

$$I(1 + n - 1) = \cos^{n-1}x \,.\, \operatorname{sen}x \; + (n-1). \int \cos^{n-2}x \;\, dx$$

$$I.\,n = \cos^{n-1}x\,.\,\text{senx} + (n-1).\int \cos^{n-2}x\;dx$$

$$I = \frac{1}{n}.\left(\cos^{n-1}x\,.\,\text{senx} + (n-1).\int \cos^{n-2}x\;dx\right) + C$$

$$I = \int \cos^{n}x\;dx = \frac{1}{n}.$$
$$\left(\cos^{n-1}x\,.\,\text{senx} + (n-1).\int \cos^{n-2}x\;dx\right) + C$$

Note que se n>2 a integral depende da integral $\int \cos^{n-2}x\;dx$ e assim sucessivamente. Observe no exemplo abaixo:

Calcule a integral:

$$I = \int \cos^{5}x\;dx$$

Utilizando o resultado obtido anteriormente com n=5:

$$I = \int \cos^{5}x\;dx = \frac{1}{5}.$$
$$\left(\cos^{5-1}x\,.\,\text{senx} + (5-1).\int \cos^{5-2}x\;dx\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}.\left(\cos^{4}x\,.\,\text{senx} + 4.\int \cos^{3}x\;dx\right) + C$$

Primeiramente calcularmos a integral:

$$\int \cos^3 x \ dx$$

Utilizando o resultado acima com n=3:

$$\int \cos^3 x \ dx = \frac{1}{3}.$$
$$\left(\cos^{3-1} x \,.\, \operatorname{sen} x \ + (3-1). \int \cos^{3-2} x \ dx\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}.\left(\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 2. \int \cos x \ dx\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}.(\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 2. \operatorname{sen} x) + C$$

$$\int \cos^3 x \ dx = \frac{1}{3}.(\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 2. \operatorname{sen} x) + C$$

Voltando este resultado para a integral:

$$I = \int \cos^5 x \ dx = \frac{1}{5}.\left(\cos^4 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 4. \int \cos^3 x \ dx\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}.\left(\cos^4 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 4.\left(\frac{1}{3}.(\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 2. \operatorname{sen} x)\right)\right)$$
$$+C$$

$$= \frac{1}{5}.\left(\cos^4 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + \frac{4}{3}.(\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} x \ + 2. \operatorname{sen} x)\right)_{+C}$$

$$= \frac{1}{5} . \left(\cos^4 x \, . \, \text{sen}x \; + \frac{4}{3} . \cos^2 x \, . \, \text{sen}x \; + \frac{8}{3} . \, \text{sen}x \right) + C$$

$$= \frac{1}{5} . \cos^4 x \, . \, \text{sen}x \; + \frac{4}{15} . \cos^2 x \, . \, \text{sen}x \; + \frac{8}{15} . \, \text{sen}x \; + C$$

$$I = \int \cos^5 x \; dx = \frac{1}{5} . \cos^4 x \, . \, \text{sen}x$$

$$+ \frac{4}{15} . \cos^2 x \, . \, \text{sen}x \; + \frac{8}{15} . \, \text{sen}x \; + C$$

Caso III: $\int \text{tg}^n x \, dx$

- Se n=1, temos:

$$I = \int \text{tg}x \, dx$$

Reescrevendo tgx , e fazendo a mudança de variável:

$$I = \int \text{tg}x \, dx = \int \frac{\text{sen}x}{\cos x} dx$$

$$u = \cos x$$

$$du = -\text{sen}x . \, dx \quad \text{ou} \quad \text{sen}x . \, dx = -du$$

$$I = \int \frac{\text{sen}x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{u} (-du) = - \int \frac{1}{u} du$$

$$I = - \int \frac{1}{u} du = - \ln|u| + C$$

$$I = -\ln|\cos x| + C$$

$$I = \int tgx\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

Propriedade dos logaritmos $a. \log x = \log x^{a}$:

$$I = \int tgx\, dx = \ln|(\cos x)^{-1}| + C = \ln|\sec x| + C$$

- Se n=2, temos:

$$I = \int tg^{2}x \; dx$$

Utilizando a identidade trigonométrica: $tg^{2}x = \sec^{2}x - 1$

$$I = \int tg^{2}x \quad dx = \int \sec^{2}x - 1\, dx = \int \sec^{2}x\, dx - \int dx$$

$$= tgx \; - x \; + C$$

$$I = \int tg^{2}x \quad dx = tgx \; - x \; + C$$

- Se n>2, temos: $I = \int tg^{n}x \; dx$

Reescrevendo $tg^{n}x$ como $tg^{n-2}x \,.\, tg^{2}x$, ficamos com:

$$I = \int tg^{n}x \; dx = \int tg^{n-2}x \,.\, tg^{2}x\, dx$$

$$\mathrm{tg}^2x = \sec^2x - 1$$

$$I = \int \mathrm{tg}^n x \ dx = \int \mathrm{tg}^{n-2}x \,.\, (\sec^2x - 1)\, dx$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2}x \,.\ \sec^2x\, dx - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\, dx$$

Fazendo uma mudança de variável na integral em vermelho:

$$\int \mathrm{tg}^{n-2}x \,.\ \sec^2x\, dx$$

$$u = \mathrm{tg}x \quad e \quad du = \sec^2x\, dx$$

$$\int \mathrm{tg}^{n-2}x \,.\ \sec^2x\, dx = \int u^{n-2}\ du = \frac{u^{(n-2)+1}}{(n-2)+1} + C$$

$$= \frac{u^{n-1}}{n-1} + C$$

$$\int \mathrm{tg}^{n-2}x \,.\ \sec^2x\, dx = \frac{u^{n-1}}{n-1} + C = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} + C$$

$$I = \int \mathrm{tg}^n x \ dx = \int \mathrm{tg}^{n-2}x \,.\ \sec^2x\, dx - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\, dx$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\, dx \ + C$$

$$I = \int \mathrm{tg}^n x \ dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\, dx \ + C$$

Note que se n>2 a integral depende da integral $\int tg^{n-2}x \ dx$ e assim sucessivamente. Observe no exemplo abaixo:

Calcule a integral:

$$I = \int tg^3x \ dx$$

Utilizando o resultado obtido anteriormente com n=3:

$$I = \int tg^3x \ dx = \frac{tg^{3-1}x}{3-1} - \int tg^{3-2}x \, dx + C$$

$$= \frac{tg^2x}{2} - \int tgx \, dx + C = \frac{tg^2x}{2} - \int tgx \, dx + C$$

$$\int tgx \, dx = \ln|secx| + C$$

Temos:

$$I = \int tg^3x \ dx = \frac{tg^2x}{2} - \ln|secx| + C$$

Caso IV: $\int sec^n x \, dx$

- Se n=1, temos:

$$I = \int secx \, dx$$

Neste caso multiplicaremos e dividiremos a função integrando por secx + tgx:

$$I = \int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x.(\sec x + tg x)}{\sec x + tg x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x.\, tg x}{\sec x + tg x} dx$$

E fazendo a mudança de variável:

$$u = \sec x + tg x$$

$$du = (\sec x.\, tg x + \sec^2 x) dx$$

$$I = \int \frac{\sec^2 x + \sec x.\, tg x}{\sec x + tg x} dx = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} du$$

$$I = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

$$I = \ln|\sec x + tg x| + C$$

$$I = \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + tg x| + C$$

- Se n=2, temos:

$$\int \sec^2 x\, dx = tg x \; + C$$

$$I = \int \sec^2 x\, dx$$

$$I = \int \sec^2 x \, dx = tgx + C$$

- Se n>2, temos: $I = \int \sec^n x \ dx$

Reescrevendo $\sec^n x$ como $\sec^{n-2} x . \sec^2 x$, ficamos com:

$$I = \int \sec^n x \ dx = \int \sec^{n-2} x . \sec^2 x \ \ dx$$

Fazendo uma integração por partes:

$$u = \sec^{n-2} x \ \rightarrow \ du = (n-2). \sec^{n-3} x . \sec x . tgx \, dx$$

$$u = \sec^{n-2} x \ \rightarrow \ du = (n-2). \sec^{n-2} x . tgx \, dx$$

$$dv = \sec^2 x \ dx \rightarrow \ v = \ tgx$$

Substituindo na integral:

$$I = \int \sec^{n-2} x . \sec^2 x \ \ dx = \sec^{n-2} x . tgx$$

$$- \int tgx . \ (n-2). \sec^{n-2} x . tgx \, dx$$

$$= \sec^{n-2} x . tgx - (n-2). \int tg^2 x . \sec^{n-2} x \, dx$$

Usando que $tg^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$I = \sec^{n-2} x . tgx - (n-2). \int tg^2 x . \sec^{n-2} x \, dx$$

$$= \sec^{n-2}x\,.\,tgx - (n-2).\int (\sec^2 x - 1)\,.\,\sec^{n-2}x\,dx$$

$$= \sec^{n-2}x\,.\,tgx - (n-2).$$

$$\int \sec^2 x.\sec^{n-2}x - \sec^{n-2}x\ dx$$

$$= \sec^{n-2}x\,.\,tgx - (n-2).\int \sec^n x - \sec^{n-2}x\ dx$$

$$= \sec^{n-2}x\,.\,tgx - (n-2).\int \sec^n x\ dx$$

$$+(n-2).\int \sec^{n-2}x\,dx$$

E a integral original surge do lado direito da equação:

$$I = \int \sec^n x\ dx$$

$$\int \sec^n x\ dx = \sec^{n-2}x\,.\,tgx - (n-2).\int \sec^n x\ dx$$

$$+(n-2).\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$I = \sec^{n-2}x\,.\,tgx - (n-2).\,I + (n-2).\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$I + (n-2).\,I = \sec^{n-2}x\,.\,tgx + (n-2).\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$(n-2+1).\,I = \sec^{n-2}x\,.\,tgx + (n-2).\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$(n-1).I = \sec^{n-2}x \,.\, tgx + (n-2).\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$I = \frac{1}{(n-1)}\sec^{n-2}x \,.\, tgx + \frac{(n-2)}{(n-1)}.\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$$\int \sec^{n}x\ dx = \frac{1}{(n-1)}\sec^{n-2}x \,.\, tgx$$
$$+\frac{(n-2)}{(n-1)}.\int \sec^{n-2}x\,dx$$

Note que se n>2 a integral depende da integral $\int \sec^{n-2}x\ dx$ e assim sucessivamente. Observe no exemplo abaixo:

Calcule a integral:

$$I = \int \sec^{3}x\ dx$$

Utilizando o resultado obtido anteriormente com n=3:

$$I = \int \sec^{3}x\ dx = \frac{1}{(3-1)}\sec^{3-2}x \,.\, tgx$$
$$+\frac{(3-2)}{(3-1)}.\int \sec^{3-2}x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\sec x \,.\, tgx + \frac{1}{2}.\int \sec x\,dx$$

Utilizando o resultado acima para

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Temos:

$$I = \int \sec^3 x \; dx = \frac{1}{2} \sec x \,.\, \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Na sequência calcularemos as integrais de cotgx e cosecx :

$$I = \int \operatorname{cotg} x \, dx$$

Reescrevendo cotgx:

$$I = \int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$$

E fazendo a mudança de variável:

$$u = \operatorname{sen} x$$

$$du = \cos x . \, dx$$

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$I = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

$$I = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$I = \int \text{cotgx}\, dx = \ln|\text{senx}| + C$$

$$I = \int \text{cosecx}\, dx$$

Neste caso multiplicaremos e dividiremos a função integrando por cosecx-cotgx:

$$I = \int \text{cosecx}\, dx = \int \frac{\text{cosecx}.\,(\text{cosecx} - \text{cotgx})}{\text{cosecx} - \text{cotgx}} dx$$

$$= \int \frac{\text{cosec}^2 x - \text{cosecx}.\,\text{cotgx}}{\text{cosecx} - \text{cotgx}} dx$$

Fazendo a mudança de variável:

$$u = \text{cosecx} - \text{cotgx}$$

$$du = \left(-\text{cosecx}.\,\text{cotgx} - (-\text{cosec}^2 x)\right) dx$$

$$du = \text{cosec}^2 x - \text{cosecx}.\,\text{cotgx} \;\; dx$$

$$I = \int \frac{\text{cosec}^2 x - \text{cosecx}.\,\text{cotgx}}{\text{cosecx} - \text{cotgx}} dx = \int \frac{du}{u}$$

$$I = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

$$I = \ln|\text{cosecx} - \text{cotgx}| + C$$

$$I = \int \text{cosecx}\, dx = \ln|\text{cosecx} - \text{cotgx}| + C$$