ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 2

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

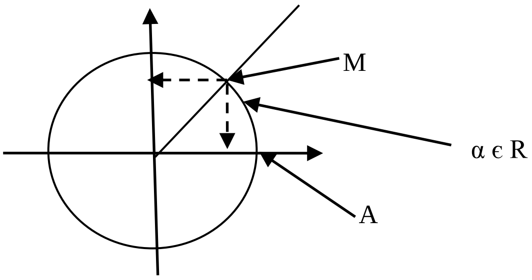
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Resumo teórico e exercícios

1. Ciclo Trigonométrico - Sobre uma circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas e de raio igual a um, tomamos um ângulo (central) com um lado (semi-reta) sobre o eixo X que interceptará a circunferência no ponto A(0,1) e será a origem de todos os arcos. O outro lado intercepta a circunferência num ponto M. Se M se mover no sentido anti-horário, a partir de A, atribuiremos um valor $\alpha > 0$ e, se M mover no sentido horário atribuiremos um valor $\alpha < 0$, que são as medidas dos arcos em cada caso. Se M coincidir com A, atribuiremos $\alpha = 0$.

$X^2+Y^2=1$

A unidade de α é o radiano.
Relação com o grau
$\pi \ rad \leftrightarrow 180^0$



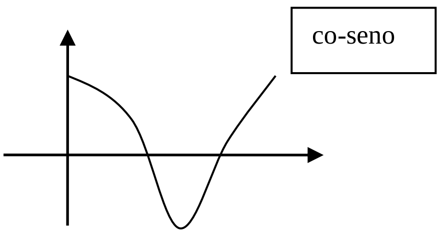
Radiano:
$$\alpha \ rad = \frac{compr.do\,arco}{raio} = \frac{l}{1} = l$$

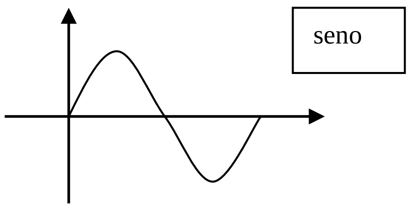
2. Funções co-seno e seno – Para cada $\alpha \in \Re$ existe um único ponto $M = (\cos\alpha, sen\alpha)$ sobre o ciclo. Por definição a abscissa de M é o co-seno de α e a ordenada o seno de α .
Conseqüências imediatas das definições anteriores:
$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1,\quad -1 \le \cos\alpha \le 1,\quad -1 \le sen\alpha \le 1,\quad \cos(a+2k\pi) = \cos\alpha ,\quad sen(\alpha + 2k\pi) = sen\alpha ,$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $sen(-\alpha) = -sen\alpha$, $\forall \alpha \in \Re$ e $\forall k \in Z$.
Obs.: As mesmas definições num triângulo retângulo:

$$\cos\phi = \frac{cat.adjacente}{hipotenusa} = \frac{\cos\alpha}{1} = \cos\alpha$$

$$sen\phi = \frac{cat.oposto}{hipotenusa} = \frac{sen\alpha}{1} = sen\alpha$$

Função co-seno: $f : \Re \to [-1,1] \mid f(\alpha) = \cos\alpha \equiv abscissa\,do\,ponto M$





Função seno: $f:\Re \to [-1,1] \mid f(\alpha) = sen\alpha \equiv ordenada do ponto M$.

Propriedades:

P1) $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$, $sen(k\pi) = 0$, $sen\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k$, $\forall k \in Z$

P2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha.\cos\beta \mp sen\alpha.sen\beta$

$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha.\cos\beta \pm sen\beta.\cos\alpha$

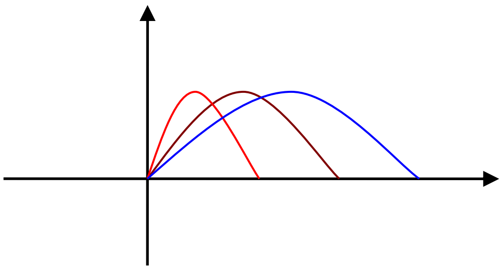
3) Outras funções trigonométricas:

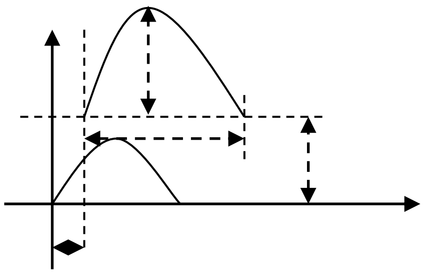
Nas definições abaixo supõe que os denominadores sejam diferentes de zero.

Nome	No triângulo	No ciclo
tangente	$\tan\alpha = \frac{cat.op.}{cat.adj.}$	$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$
cotangente	$\cot\alpha = \frac{cat.adj}{cat.op.}$	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$
Secante	$\sec\alpha = \frac{hipot.}{cat.adj.}$	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
cossecante	$\csc\alpha = \frac{hipot.}{cat.op.}$	$\csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$

Observação:

1) Se na função $f(x)$ substituirmos x por w.x, $f(w.x)$, o gráfico original comprime se w for $0 < w < 1$ou estica se w for $w > 1$.



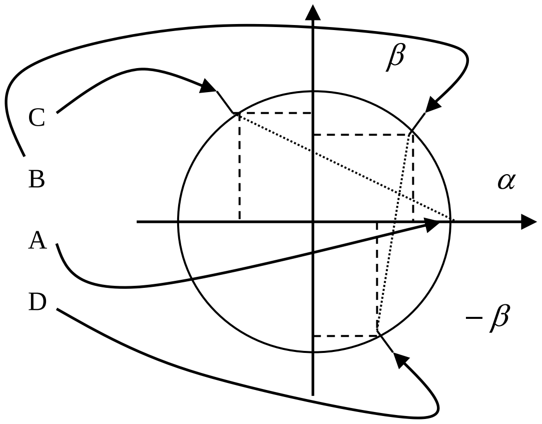


2) Caso geral: $y = A.f[w.(x-d)] + y_0$.

y_0	Desloca a 1ª parcela para cima ($y_o > 0$) ou para baixo ($y_0 < 0$). Deslocamento vertical
d	Desloca o gráfico de $Af(wx)$para direita ($d > 0$) ou para esquerda ($d < 0$). D. horizontal
$\|A\|$	Amplia o gráfico de $f(x)$ se $\|A\| > 1$ou reduz se $0 < \|a\| < 1$verticalmente
$\|w\|$	Comprime o gráfico de $A.f(x)$se $\|w\| > 1$ou estica se $0 < \|w\| < 1$ horizontalmente
$A < 0$	Produz também uma reflexão do gráfico em x.
$w < 0$	Produz também uma reflexão do gráfico em y.

Identidades: Duas funções são iguais em D, escreve-se $f = g$, se as interseções dos domínios dessas funções é D e, ainda, ocorre $f(x) = g(x)$ para todo x em D. Nesses casos dizemos que há uma identidade.

Nota : Prova da propriedade $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta$.



Distância entre os pontos:
A e C:
$$d_1^2 = (\cos(\alpha+\beta)-1)^2 + (sen(\alpha+\beta)-0)^2$$
B e D:
$$d_2^2 = (\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2 + (sen(-\beta)-sen\alpha)^2$$
Como $d_1 = d_2$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $sen(-\alpha) = -sen\alpha$
Vem:
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta$$

Exercícios:

1) Fazendo $\alpha = \beta$ nas propriedades P2 deduza as relações abaixo:
a) $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ b) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$ c) $sen(2\alpha) = 2sen\alpha.\cos\alpha$

2) Usando as relações do ex. 1. a) e 1. b)obtenha as relações:
a) $\cos(2\alpha) = 2.\cos^2\alpha - 1$ b) $\cos(2\alpha) = 1 - 2.sen^2\alpha$

3) Mostre que:
a) $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ b) $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

4) Mostre que: $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha.\tan\beta}$

5) . Comprovar as identidades abaixo:
a) $\dfrac{sen\alpha}{sen\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ b) $\dfrac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} = 2 + \tan^2\alpha$ c) $\cos^6\alpha + sen^6\alpha = 1 - 3.sen^2\alpha.\cos^2\alpha$

6) Dado um triângulo ABC de ângulos $\alpha, \beta\ e\ \gamma$ e lados opostos aos ângulos de medidas $a, b\ e\ c$. Mostre que:
a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$ b) $\dfrac{sen\alpha}{a} = \dfrac{sen\beta}{b} = \dfrac{sen\gamma}{c}$.

Resolução:

1) $a)\ \cos(\alpha-\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha + sen\alpha.sen\alpha \Rightarrow 1 = \cos^2\alpha + sen^2\alpha$
$b)\ \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - sen\alpha.sen\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$
$c)\ sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha.\cos\alpha + sen\alpha.\cos\alpha \Rightarrow sen 2\alpha = 2sen\alpha.\cos\alpha$

2) Do sistema: $\begin{cases} \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \\ \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos 2\alpha \end{cases}$ obtemos :
a) $\cos 2\alpha = 2.\cos^2\alpha - 1$ (somando as linhas)
b) $\cos 2\alpha = 1 - 2.sen^2\alpha$ (subtraindo as linhas)

3) Basta dividir a equação fundamental da trigonometria: $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ respectivamente por $\cos^2\alpha$ e $sen^2\alpha$ para se obter os resultados.

4) $\dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp \tan\alpha.\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}\pm\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}{1\mp\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}.\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}} = \dfrac{sen\alpha.\cos\beta \pm sen\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta\mp sen\beta.sen\alpha} = \dfrac{sen(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \tan(\alpha\pm\beta)$

5) $a)\ \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha + sen\alpha} = \dfrac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

b) Fórmula de fatoração: $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$.

$\dfrac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} = \dfrac{(\sec^2\alpha - 1)(\sec^2\alpha + 1)}{\sec^2\alpha - 1} = \sec^2\alpha + 1 = \tan^2\alpha + 2$.

c) Fórmula: $(A-B)^3 = A^3 - 3.A^2.B + 3.A.B^2 - B^3$

$(1-sen^2\alpha)^3 + sen^6\alpha = 1 - 3sen^2\alpha + 3.sen^4\alpha - sen^6\alpha + sen^6\alpha = 1 - 3sen^2\alpha.(1-sen^2\alpha) = 1 - 3sen^2\alpha.\cos^2\alpha$

7) a) Seja h a medida da altura relativa ao lado de medida b e x a medida do segmento que vai de do ponto A até o pé da altura. Assim por Pitágoras teremos: $\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 \\ a^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases}$.

Daí vem: $a^2 = c^2 + b^2 - 2bx = c^2 + b^2 - 2b.c.\cos\alpha$.

b) Como: $h = a.sen\gamma = c.sen\alpha \Rightarrow \dfrac{sen\alpha}{a} = \dfrac{sen\gamma}{c}$. Usando a altura relativa ao lado c obtemos: $h_1 = b.sen\alpha = a.sen\beta \Rightarrow \dfrac{sen\alpha}{a} = \dfrac{sen\beta}{b}$. Daí segue a igualdade.