UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
Curso de Sistemas de Informação

PROEXT

Curso EaD

Transição para a Matemática Superior em Estudantes de Computação
(Pré-Cálculo)

Prof. Claver Pari Soto

16/06 até 23/07 de 2020

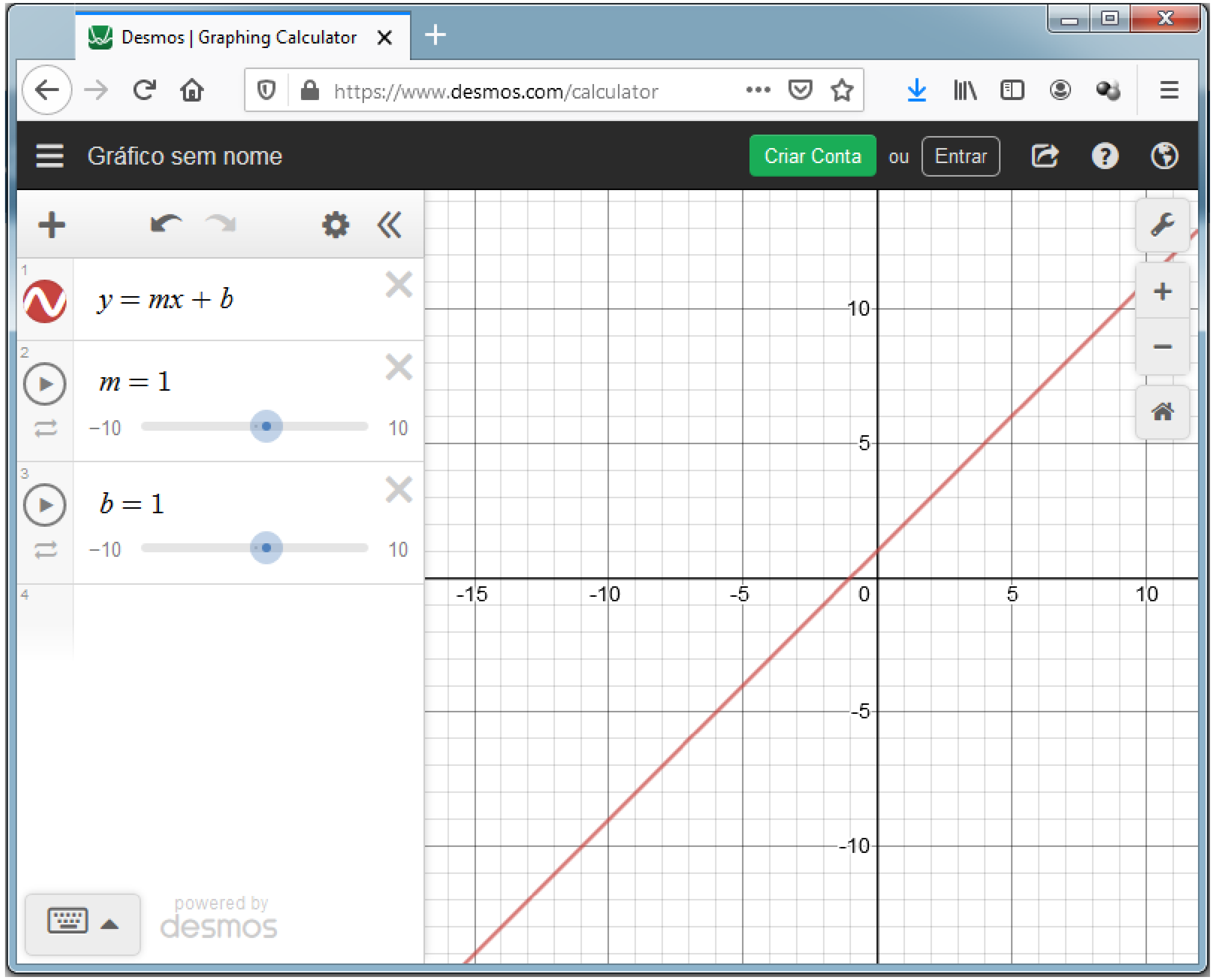
Apresentação

- Apresentação do professor
- Apresentação dos objetivos do curso
- Apresentação dos alunos

Calculadora Gráfica

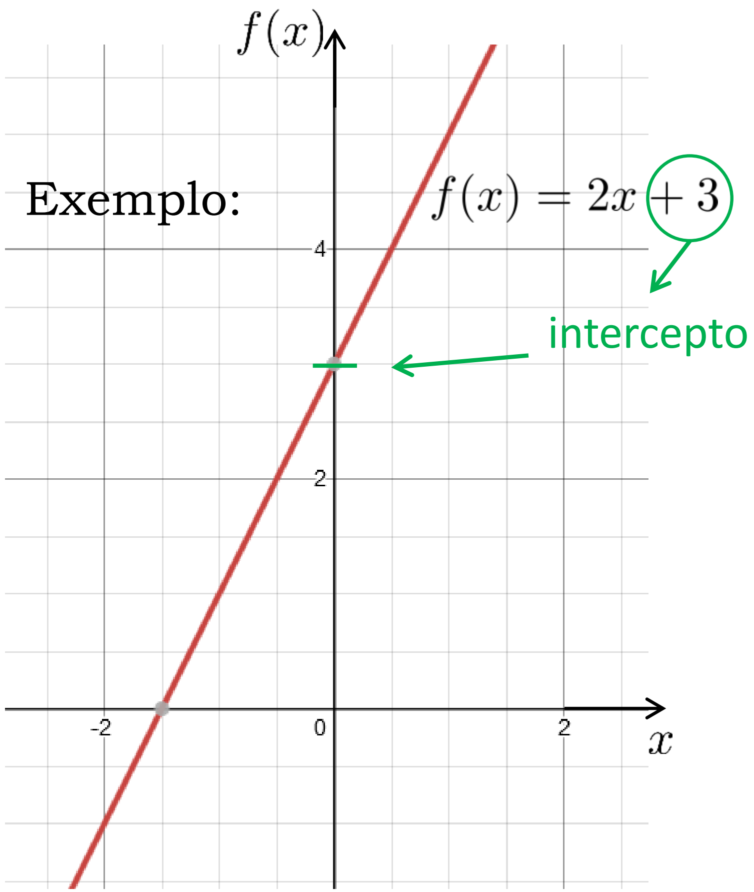
Encontro 01

https://www.desmos.com/calculator



1 Função Linear: $\boxed{f(x) = mx + b}$

Exemplo:



Uma função linear é definida por dois parâmetros:

- **coeficiente angular**
- **intercepto**

- O **coeficiente angular** é o coeficiente principal da função linear e representa a inclinação da reta. Numericamente é a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo das ordenadas

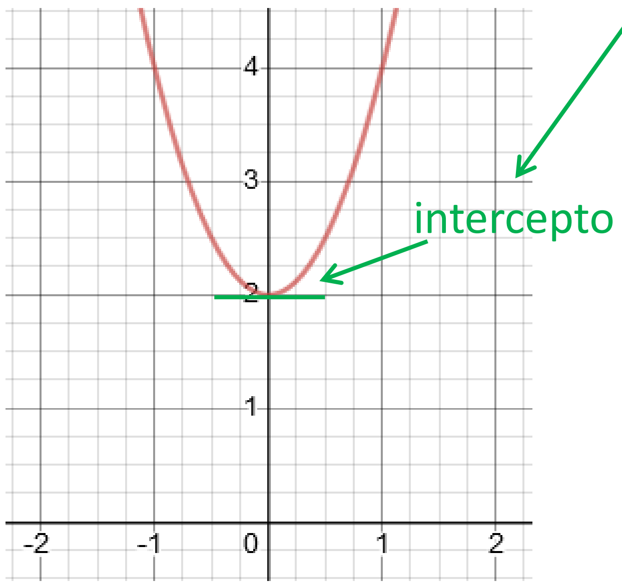
- O **intercepto** é o ponto onde a reta corta o eixo das abscissas. Ou seja, o valor da função quando x vale 0

2 Função Quadrática

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Exemplo: $f(x) = 2x^2 + 2$

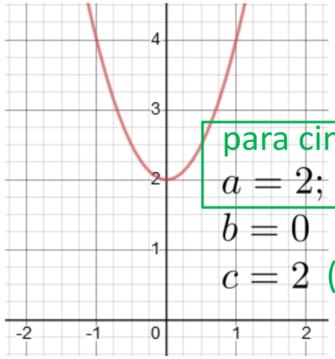
$a = 2$
$b = 0$
$c = 2$

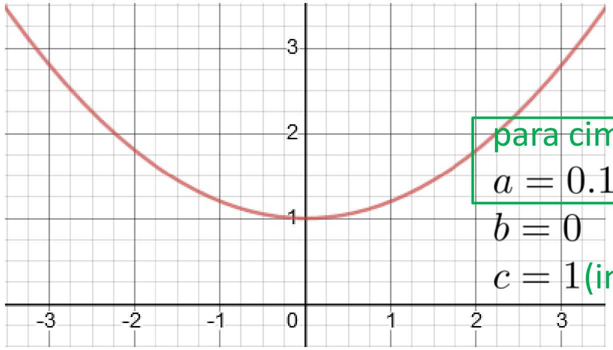


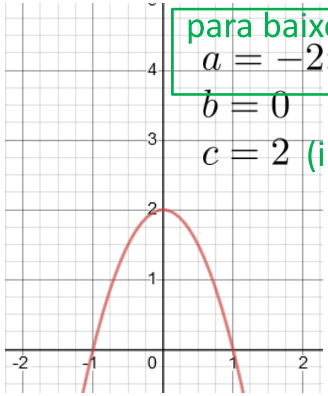
Na função quadrática, os parâmetros a, b, c são constantes, e $a \neq 0$

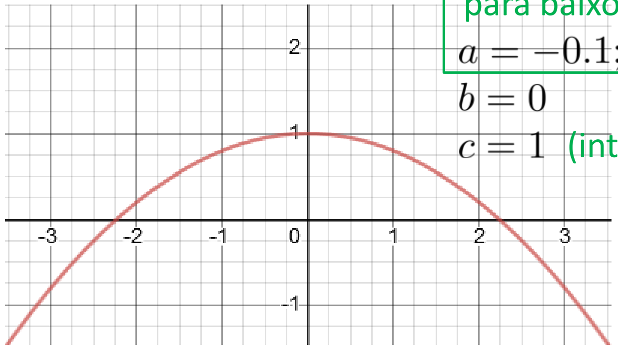
- O termo ax^2 é chamado de **termo quadrático** ou **termo principal**, e seu coeficiente a é o **coeficiente principal**
- O termo bx é chamado de **termo linear**
- O termo c é chamado de **termo constante**, e também é o **intercepto** no eixo y

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (forma geral da função quadrática)





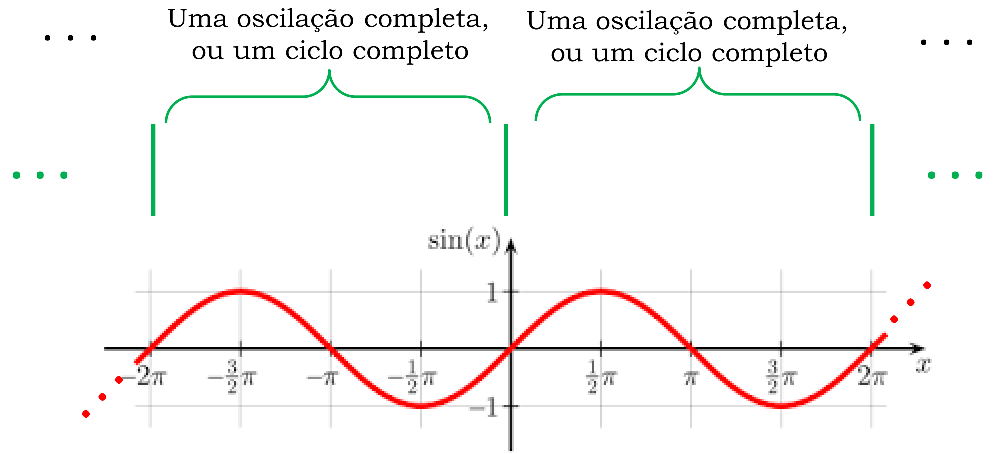




- O parâmetro c é o **intercepto** no eixo y
- O parâmetro a nos diz a respeito da forma da concavidade da parábola:
  - Se a é positivo, a parábola é **côncava para cima**
  - Se a é negativo, a parábola é **côncava para baixo**
- Se o valor absoluto de a é pequeno, a parábola é "bem aberta"
- Se o valor absoluto de a é grande, a parábola é "bem fechada"

3 Função Senoidal

A função senoidal representa a forma de onda seno, que descreve uma oscilação periódica (repetitiva)



A forma geral da função senoidal: $\boxed{f(x) = A\sin(wx + \varphi)}$

A : amplitude
w : frequencia angular
φ : fase, ou deslocamento

Exemplo: $f(x) = \sin(x)$

$A = 1$
$w = 1$
$\varphi = 0$

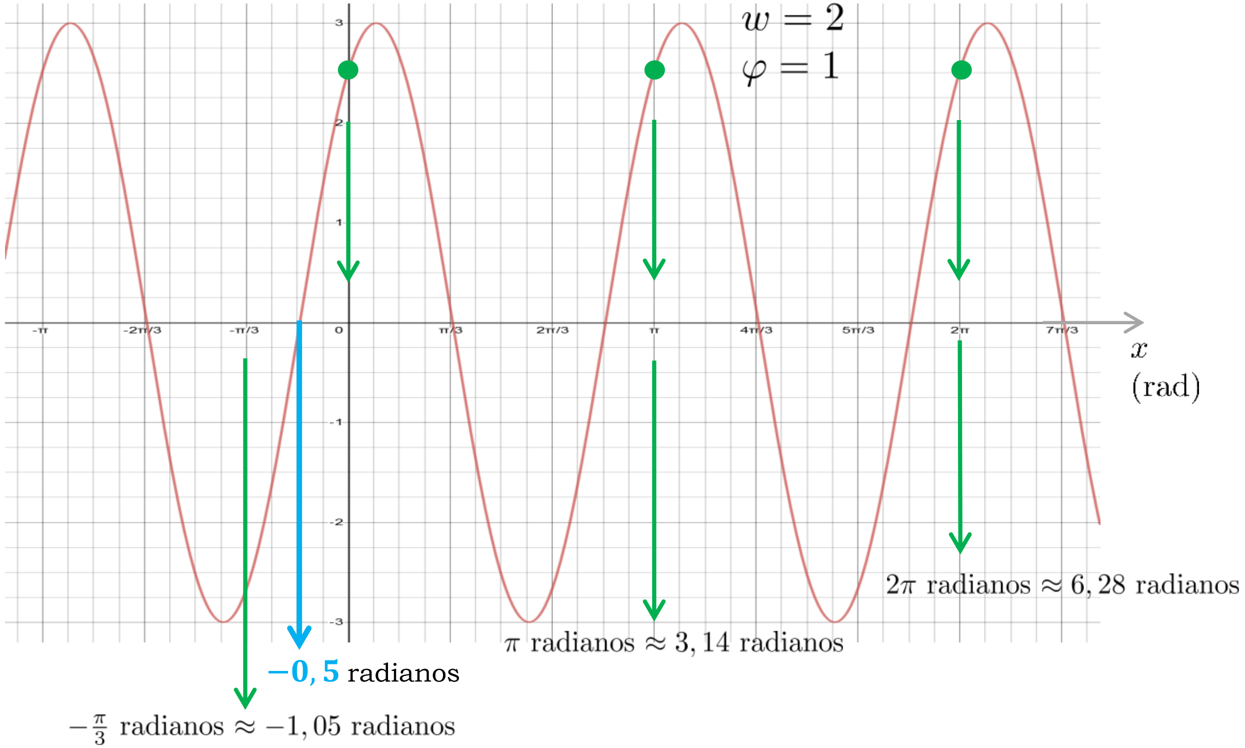
Amplitude	1
Freq. Angular	1
Fase	0

$f(x) = A\sin(wx + \varphi)$

- A **amplitude** nos diz a respeito do pico da forma de onda
- A **frequência angular** nos diz quantos ciclos estão contidos no intervalo de 2π radianos
- A **fase** nos diz o deslocamento, em radianos, da forma da onda com respeito do eixo das abscissas

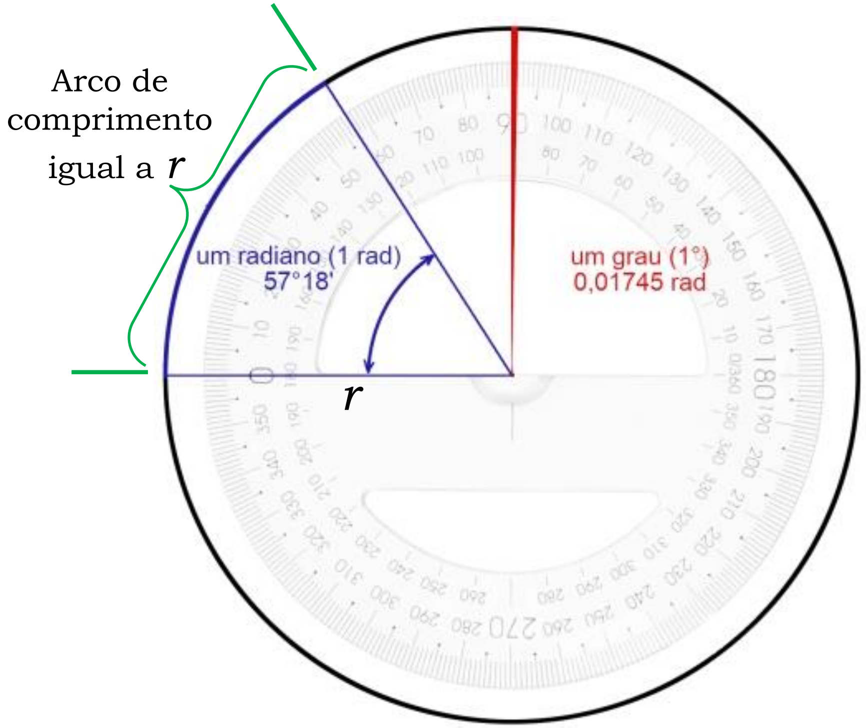
Exemplo: $f(x) = 3\sin(2x + 1)$

$A = 3$
$w = 2$
$\varphi = 1$



- Senoidal de **amplitude** 3: O pico positivo tem altura 3, o pico negativo idem
- A **frequência angular** é 2: Significa que estão contidos 2 ciclos dentro de qualquer intervalo de comprimento 2π radianos
- A **fase** é +1 radiano. Significa que a forma de onda está **adiantada** $\frac{\varphi}{\omega}$ radianos. Neste exemplo, $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{2} =$ **$0,5$** rad. Ou seja, a forma de onda está acontecendo 0,5 radianos antes no eixo das ordenadas, comparado com o caso de fase 0

Radianos

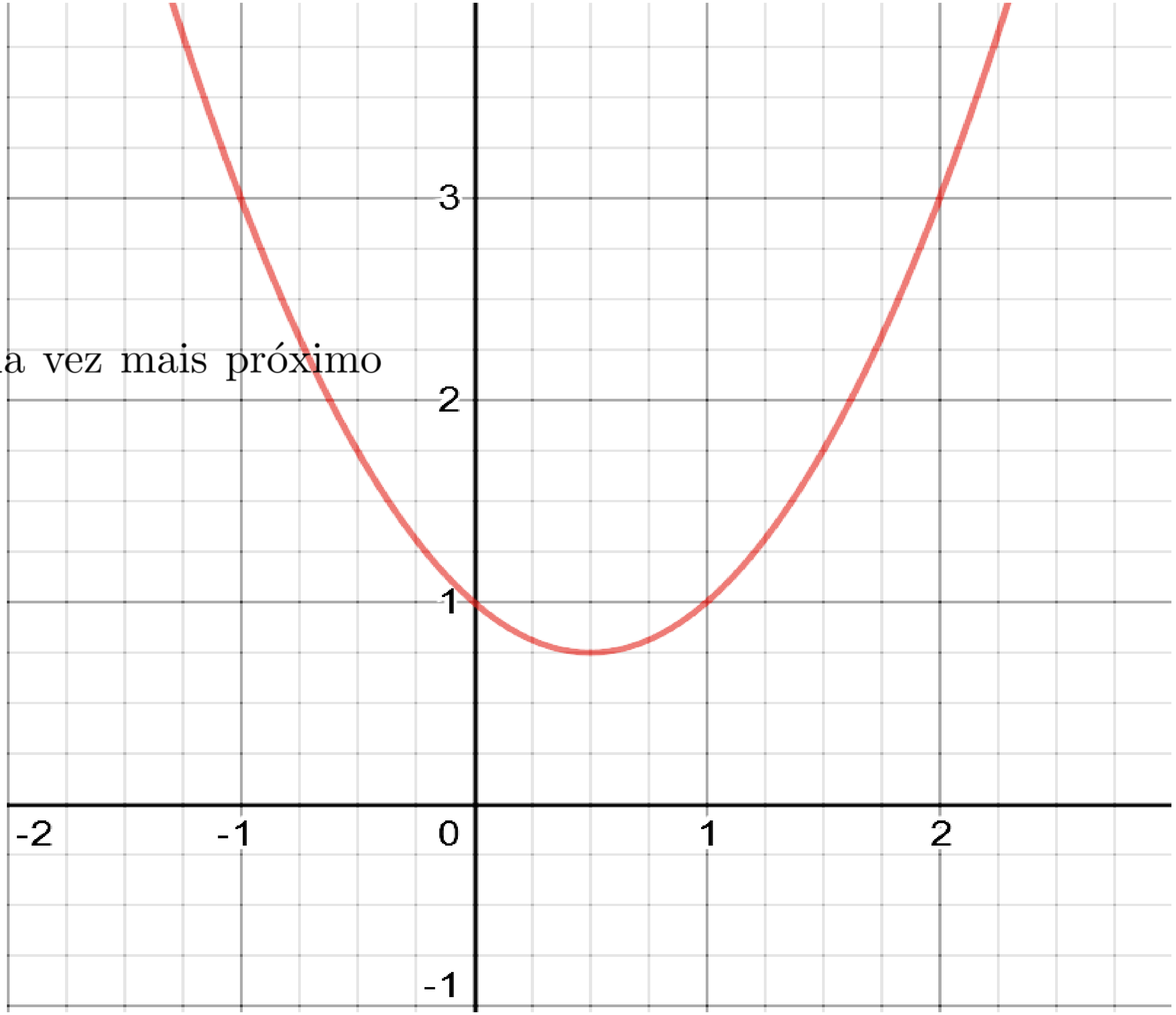


- A unidade do Sistema Internacional (SI) para medir ângulo plano é o radiano
- O radiano (símbolo rad) é definido como o **ângulo central que subtende um arco de círculo de comprimento igual ao do respectivo raio.**
- A medida angular da circunferência completa no sistemas sexagesimal é de 360º
- A medida angular da circunferência completa no SI é de 2π radianos ≈ 6,28 radianos

Seja a função

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

- Como se comporta a função $f(x)$ quando x está cada vez mais próximo do valor 2?
- Para que valor tende $f(x)$ quando x tende a 2?
- Qual o valor do $\lim_{x \to 2} f(x)$?
- $\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = ?$



Use evidência numérica para conjecturar o valor de:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
−1.0	0.84147098
−0.9	0.87036323
−0.8	0.89669511
−0.7	0.92031098
−0.6	0.94107079
−0.5	0.95885108
−0.4	0.97354586
−0.3	0.98506736
−0.2	0.99334665
−0.1	0.99833417
0	undefined
0.1	0.99833417
0.2	0.99334665
0.3	0.98506736
0.4	0.97354586
0.5	0.95885108
0.6	0.94107079
0.7	0.92031098
0.8	0.89669511
0.9	0.87036323
1.0	0.84147098
−0.001	0.99999983
0.001	0.99999983

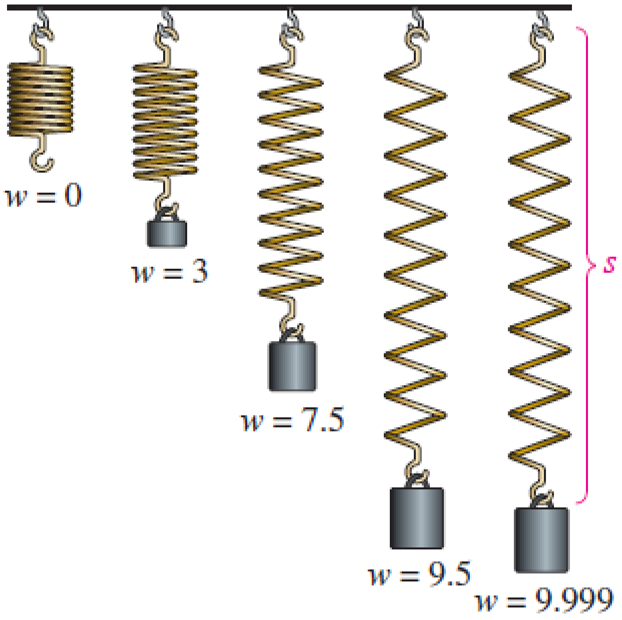
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

A função não está definida em $x = 0$
(pois não existe divisão por zero).

Este fato não tem relação alguma com o limite. Podemos conjecturar, pelos valores amostrais da tabela do gráfico, que quando x se aproxima de 0 por ambos os lados, os valores correspondentes a $f(x)$ parecem se aproximar de 1.

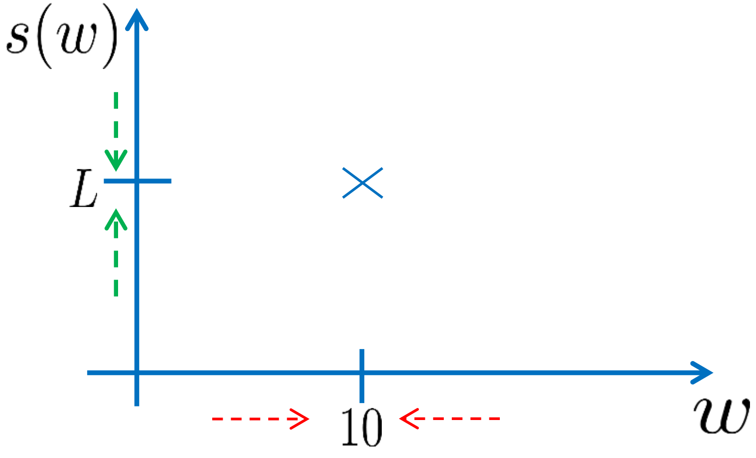
Portanto, podemos assumir que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



"O limite de s, à medida que w tende a 10, é L"

$$\lim_{w \to 10} s(w) = L$$



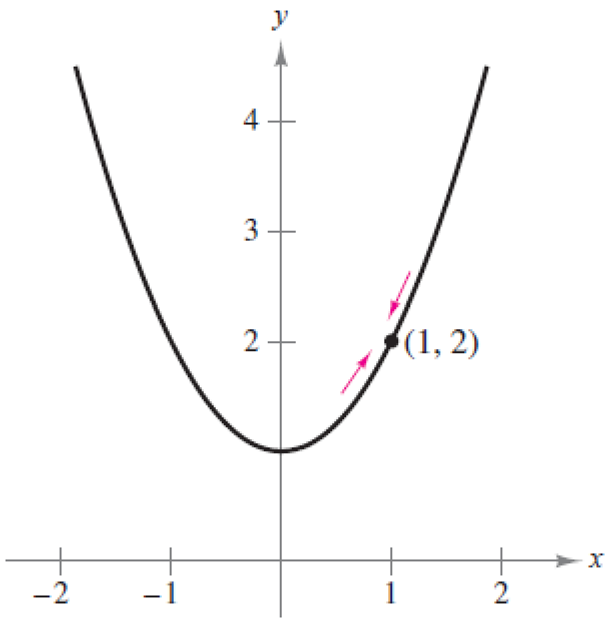
Notação:

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

"O limite da função $f(x)$, quando x tende a c, é L"

Exemplo 1

Determine o limite: $\lim_{x \to 1} (x^2 + 1)$



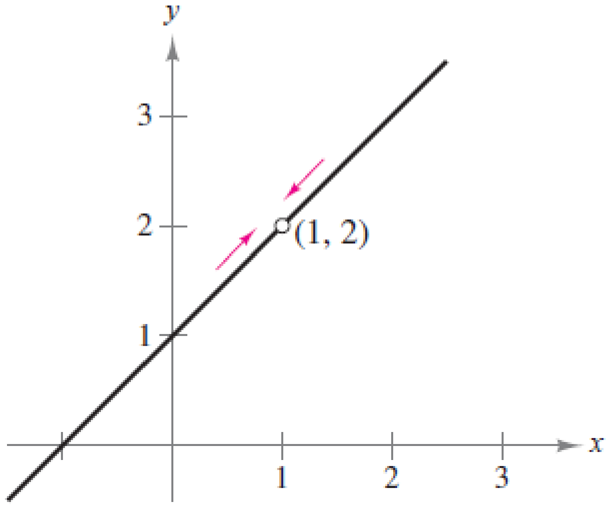
	x se aproxima de 1 →				← x se aproxima de 1		
x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	1.810	1.980	1.998	2.000	2.002	2.020	2.210
	$f(x)$ se aproxima de 2 →				← $f(x)$ se aproxima de 2		

Da inspecção gráfica e da inspecção numérica,

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$$

Exemplo 2 (a)

Determine o limite: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$



x se aproxima de 1 → ← x se aproxima de 1

x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	1.900	1.990	1.999	?	2.001	2.010	2.100

$f(x)$ se aproxima de 2 → ← $f(x)$ se aproxima de 2

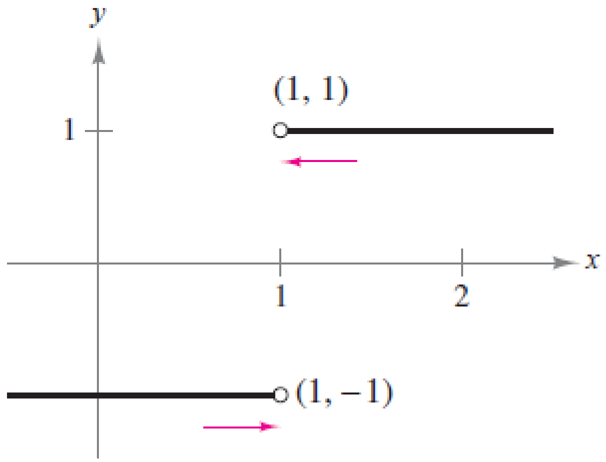
A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não está definida em $x = 1$.
Não existe um valor para $f(x)$ quando $x = 1$.

Mesmo quando não exista $f(1)$,
da inspecção gráfica e da inspecção numérica,
podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Exemplo 2 (b)

Determine o limite: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$



	x se aproxima de 1 →				← x se aproxima de 1		
x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	−1.000	−1.000	−1.000	?	1.000	1.000	1.000

$f(x)$ se aproxima de -1 → ← $f(x)$ se aproxima de 1

A função $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ não está definida em $x = 1$.
Não existe um valor para $f(x)$ quando $x = 1$.

Mas, quando x tende a 1 pela esquerda, $f(x)$ é -1
e quando x tende a 1 pela direita, $f(x)$ é $+1$
Nesse caso se diz que o limite dessa função **não existe**.

Exemplo 2 (c)

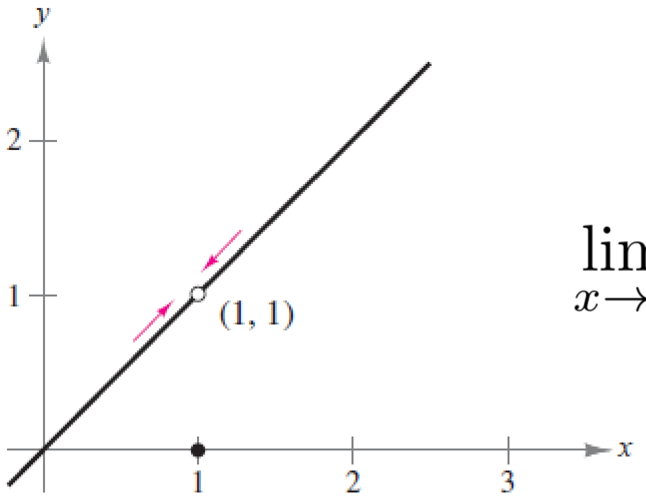
Determine o limite: $\lim_{x \to 1} f(x)$

onde $f(x) = \begin{cases} x, x \neq 1 \\ 0, x = 1 \end{cases}$

x se aproxima de 1 $\rightarrow$ $\leftarrow$ x se aproxima de 1

x	0.900	0.990	0.999	1.000	1.001	1.010	1.100
$f(x)$	0.900	0.990	0.999	0	1.001	1.010	1.100

$f(x)$ se aproxima de 1 $\rightarrow$ $\leftarrow$ $f(x)$ se aproxima de 1



$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Propriedades de Limites

Suponha que b e c sejam números reais e que n seja um número inteiro positivo

1. $\lim_{x \to c} b = b$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} x^n = c^n$
4. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

Na propriedade 4, se n for par, então c deverá ser positivo.

Operações com limites

1. O limite do múltiplo por escalar é o múltiplo do limite
2. O limite da soma ou diferença é a soma ou diferença dos limites
3. O limite do produto é o produto dos limites
4. O limite do quociente é o quociente dos limites, desde que o limite do denominador não seja zero.
5. O limite da potência é a potência do limite
6. O limite da raiz enésima é a raiz enésima do limite

Exemplo 3

Determine o limite: $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 3)$

Se p é uma função polinomial e c é qualquer número real, então:

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

"substituição direta"

Teorema da substituição

Se duas funções coincidirem sempre, exceto em um único ponto c, isso significa que elas têm um comportamento idêntico de limite em $x = c$

Suponha que c seja um número real e que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$. Se o limite de $g(x)$ existe quando $x \to c$, então o limite de $f(x)$ também existe e

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

Da álgebra:

Para toda função polinomial $p(x)$,
$p(c) = 0$ se e somente se $(x - c)$ for um fator de $p(x)$.

Exemplo 4

Determine o limite: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Encontre

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3}$$

Encontre

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$