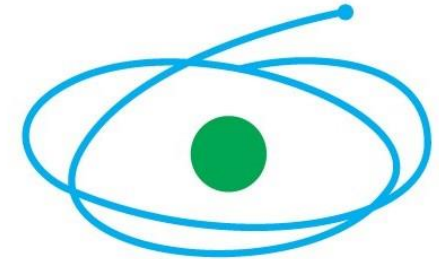




UFRJ



CAPES

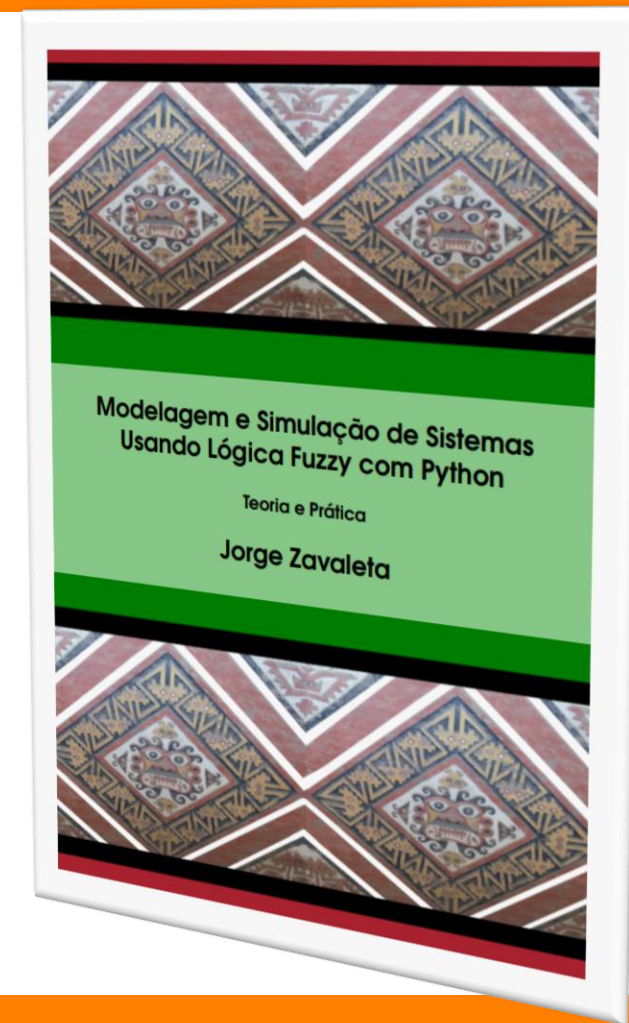
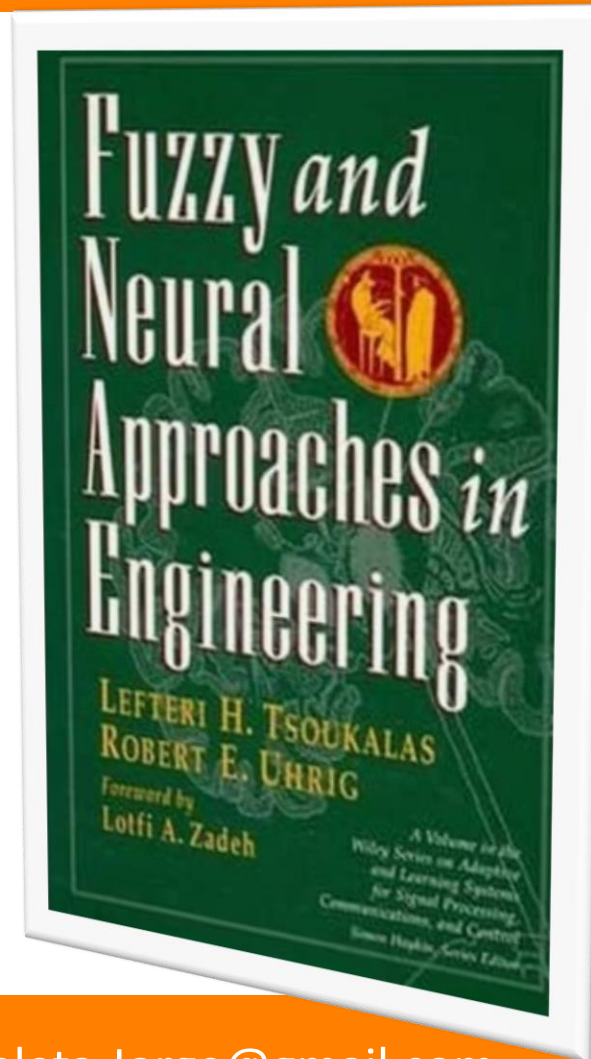
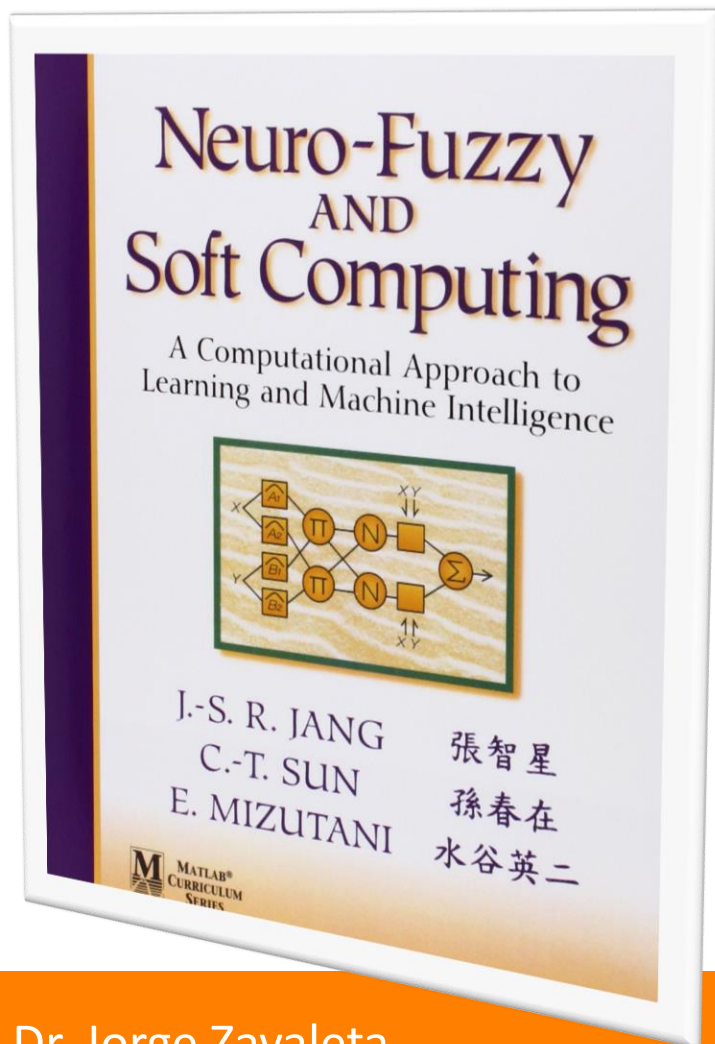
LÓGICA FUZZY

Jorge Zavaleta

zavaleta.jorge@gmail.com

Rio de janeiro, 2020

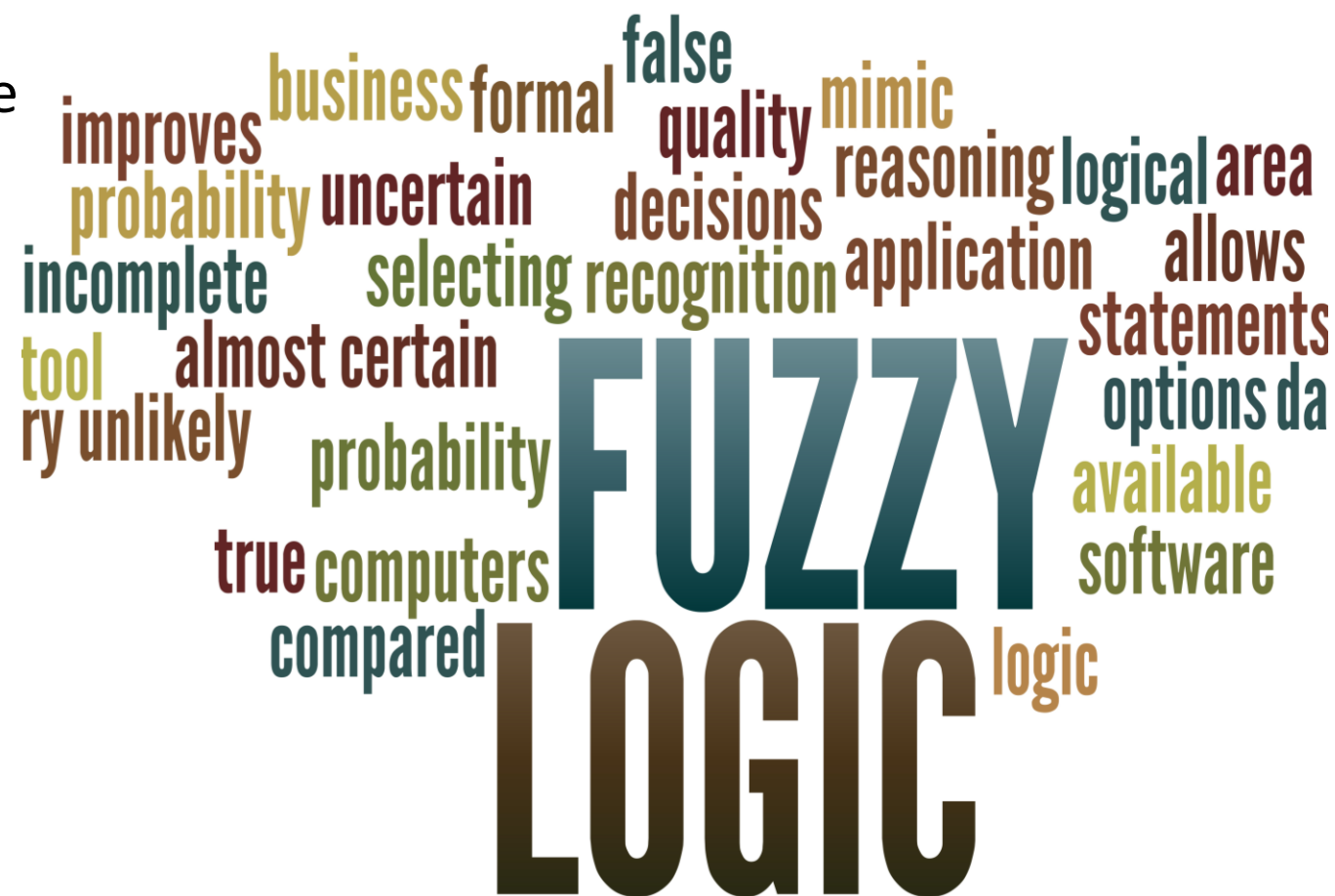
Bibliografia Usada



Lógica Fuzzy

- **Objetivos:**

1. Compreender o conceito de raciocínio aproximado
2. Dominar o uso dos conjuntos nebulosos
3. Modelar um sistema nebuloso
4. Entender algumas das características do domínio Fuzzy
5. Compreender o funcionamento dos operadores lógicos



Lógica Fuzzy (LF) - Introdução

- Lógica *Fuzzy* (ou nebulosa) se preocupa com os princípios do **raciocínio aproximado**.
- O objetivo é **modelar** os modos imprecisos do raciocínio que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões.
- A Lógica fuzzy **possibilita capturar informações imprecisas**, descritas em linguagem natural, convertê-las para um formato numérico e realizar raciocínios e inferências com esses modelos
- O potencial está em fornecer os fundamentos para efetuar um **raciocínio aproximado**, com proposições imprecisas, usando a teoria de conjuntos nebulosos como ferramenta principal.

Lógica Fuzzy (Fuzzy Logic)

- O termo “**fuzzy logic**” foi introduzido em 1965 por Lotfi A. Zadeh (Professor da UC Berkeley) no artigo **Fuzzy set Theory**.
- A lógica nebulosa é uma forma de lógica multivalorada. Trata-se de raciocínios que são mais **aproximados** do que fixos e precisos.
- Nesta lógica os valores lógicos das variáveis podem ser qualquer número real **entre** 0 (falso) e 1 (verdadeiro).



Aplicações comerciais

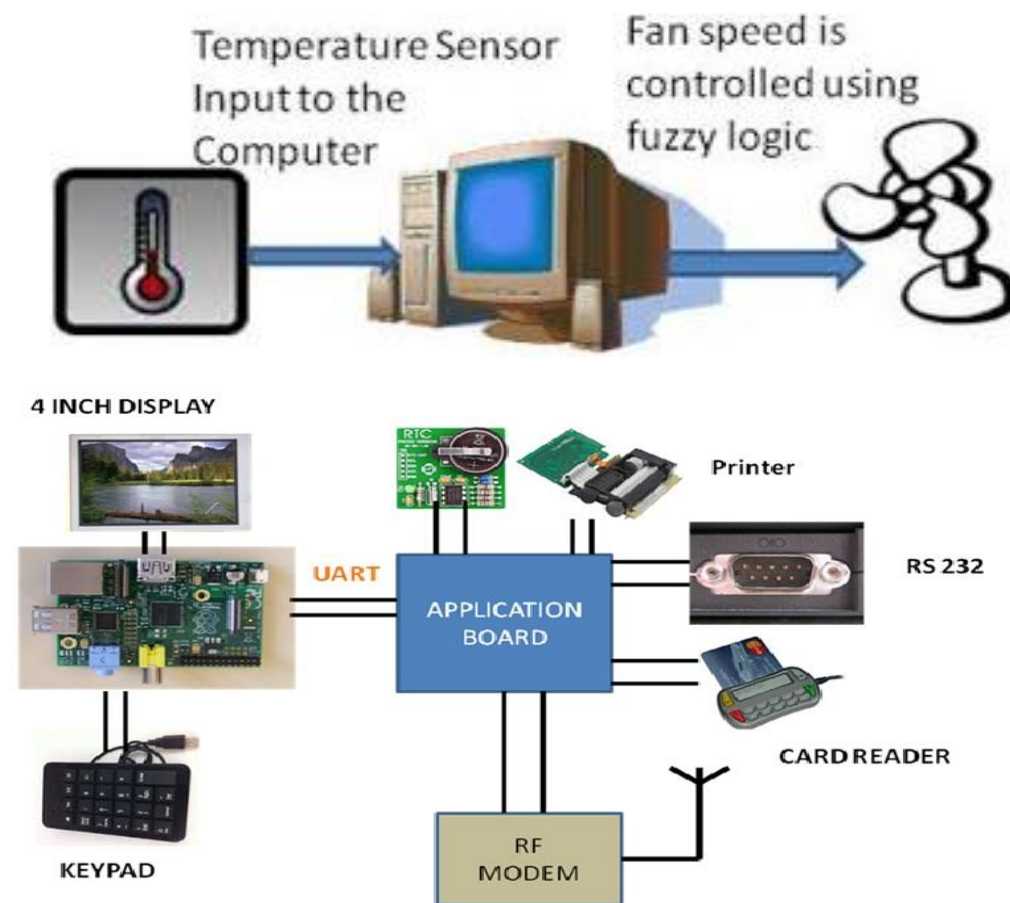
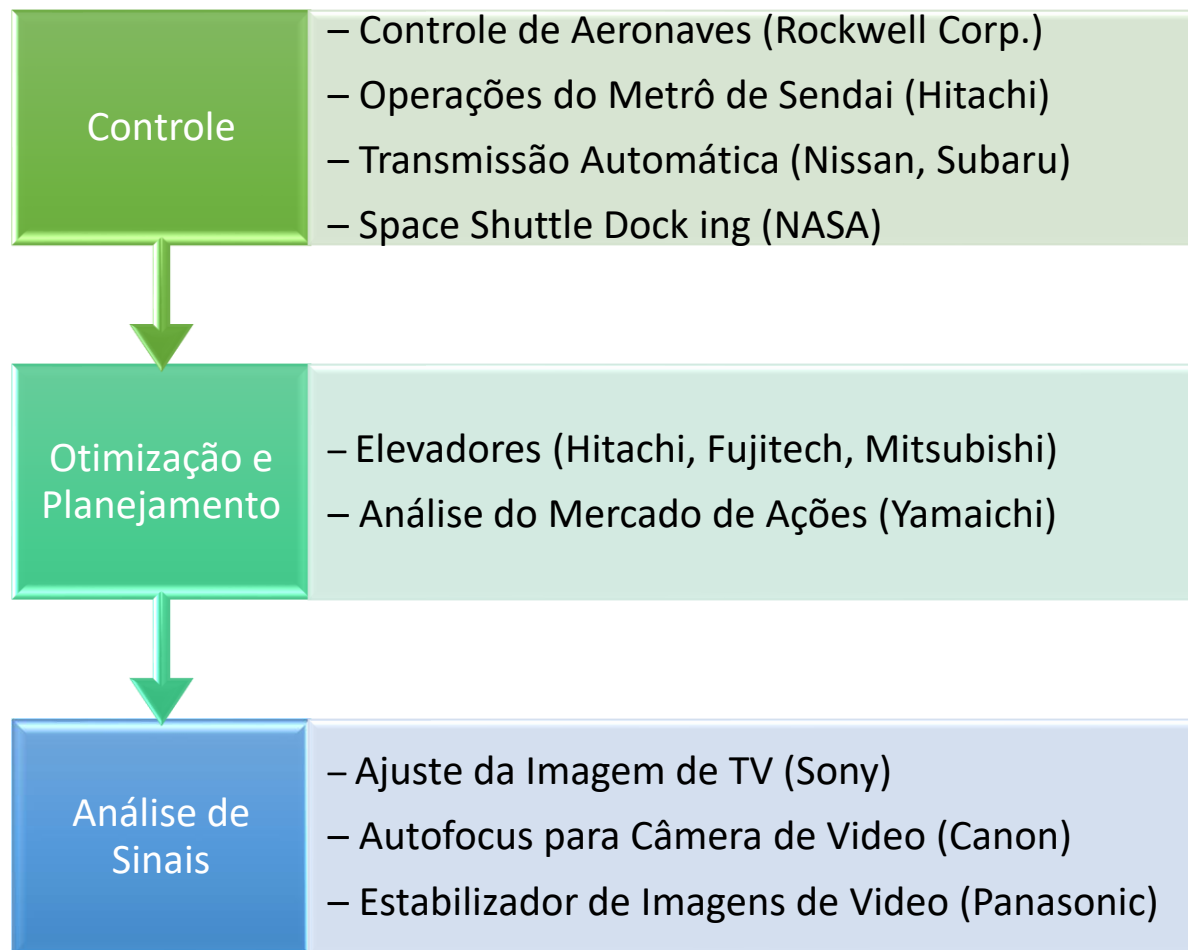


Figure 1 Application Board

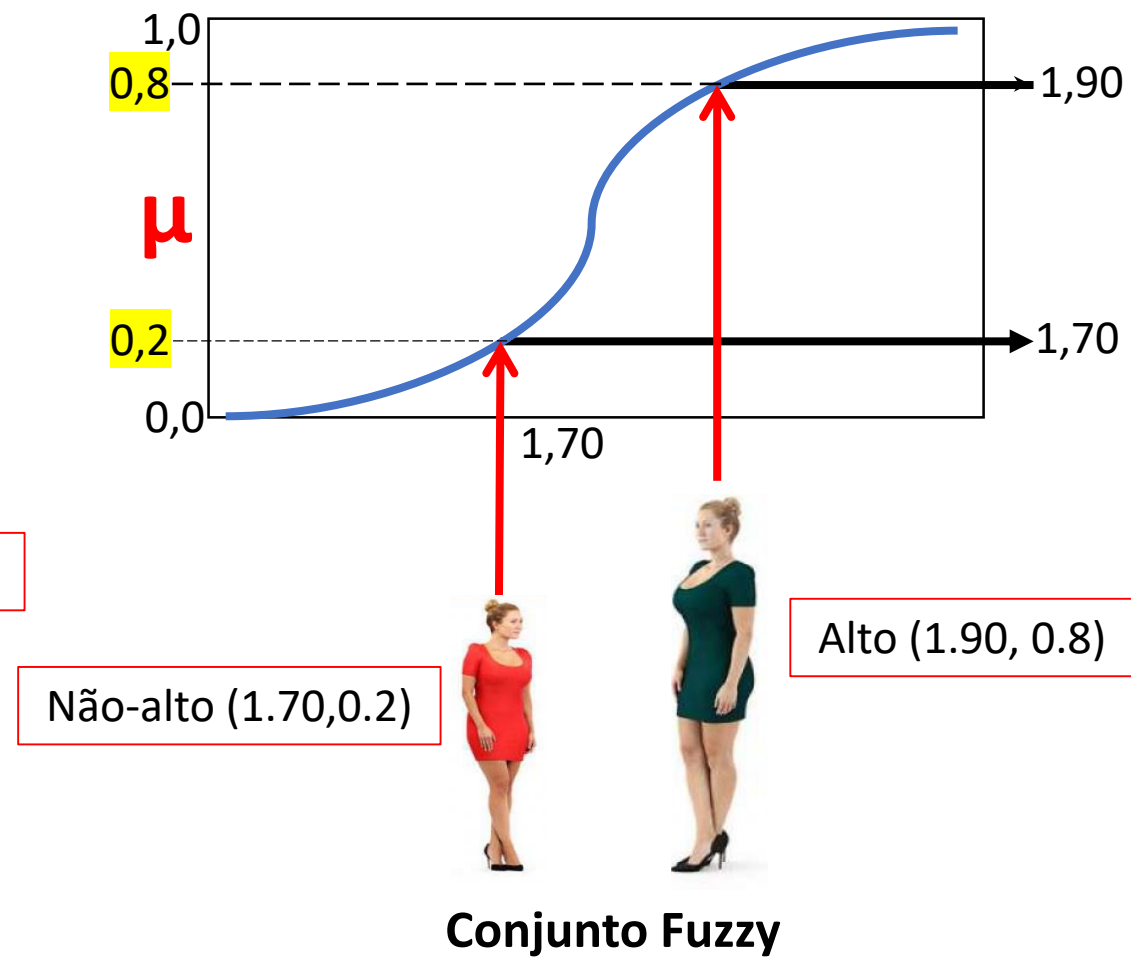
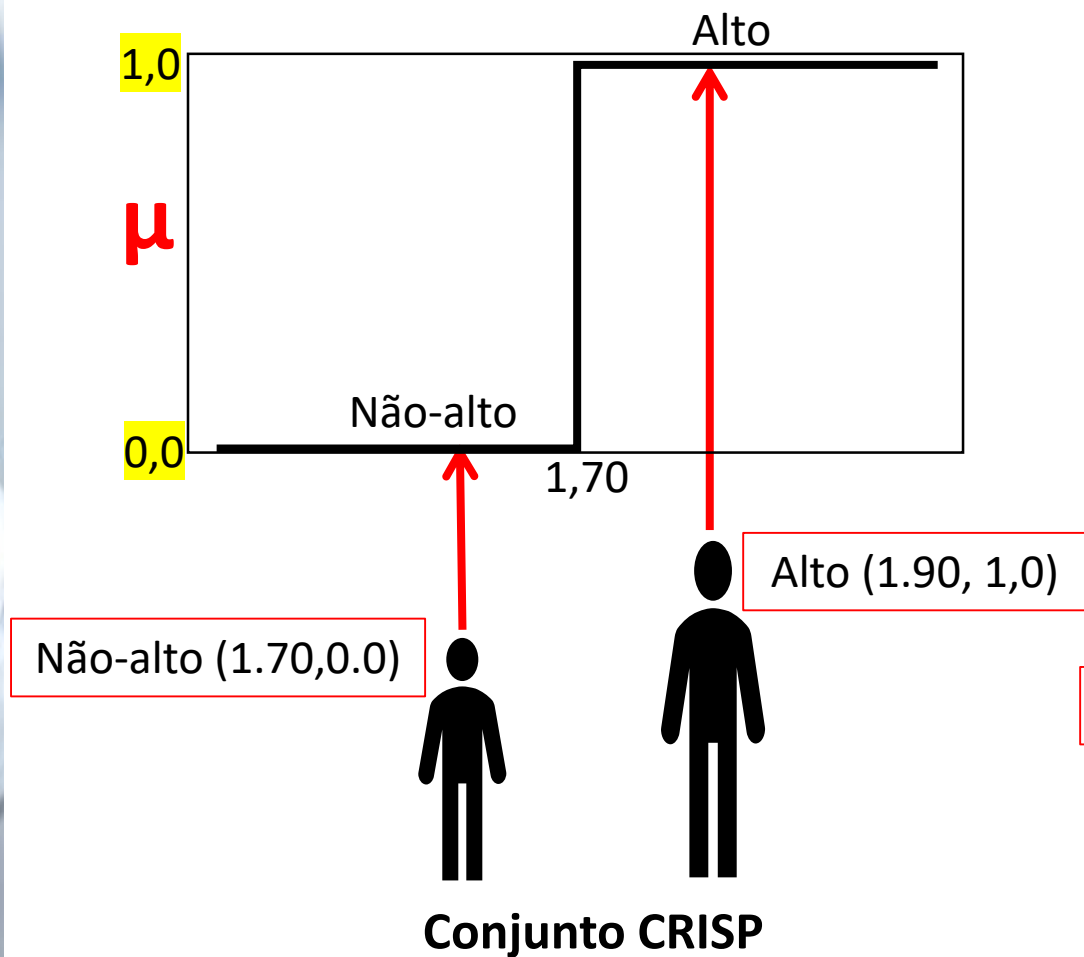
Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy é uma função que permite a entrada de um valor escalar e fornece como saída um número entre zero e um, que representa o **grau de pertinência** (μ) da entrada ao conjunto fuzzy.
- Se U é um universo de discurso e x é um elemento particular de U , então o conjunto nebuloso F definido sobre U pode ser escrito como uma coleção de pares ordenados:

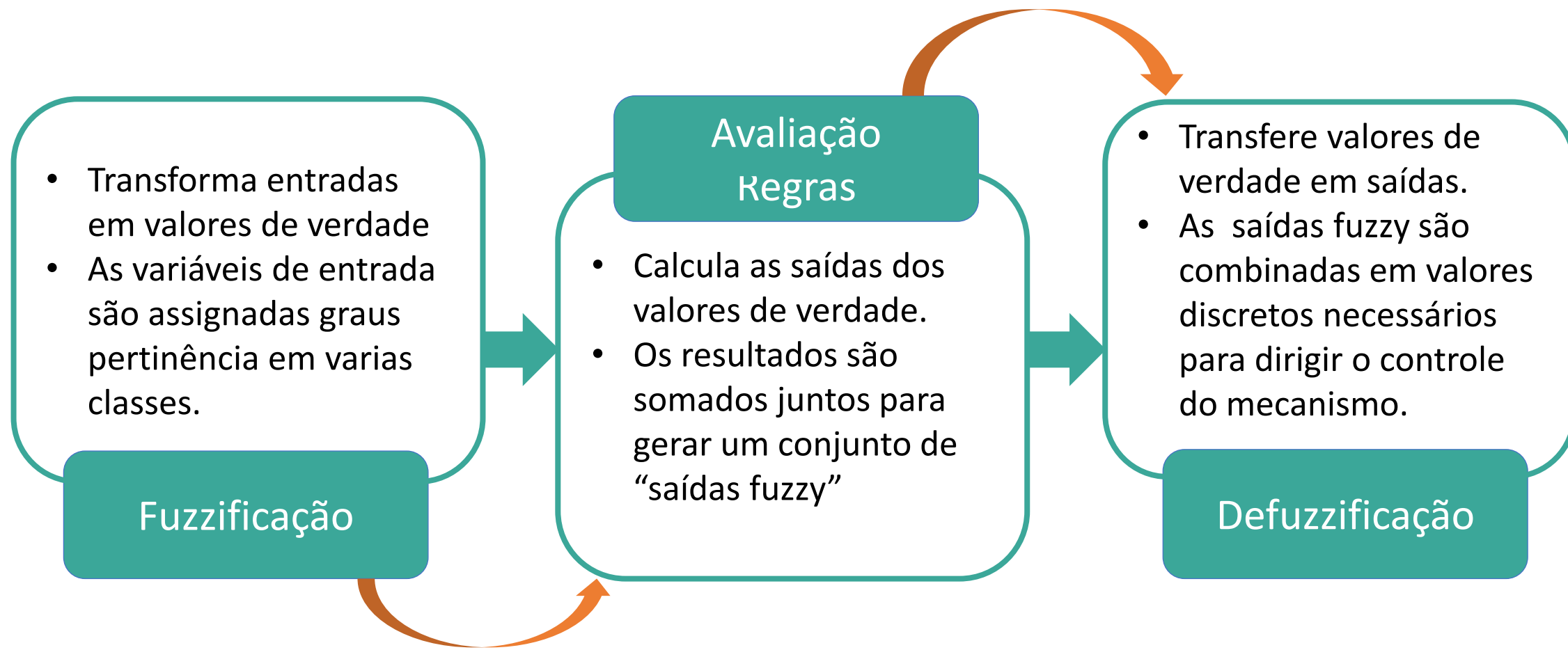
$$F = \{(x, \mu_{F(x)}), x \in U\}$$

- Por exemplo, podemos definir o conjunto de **pessoas altas** com dois diferentes tipos de função.

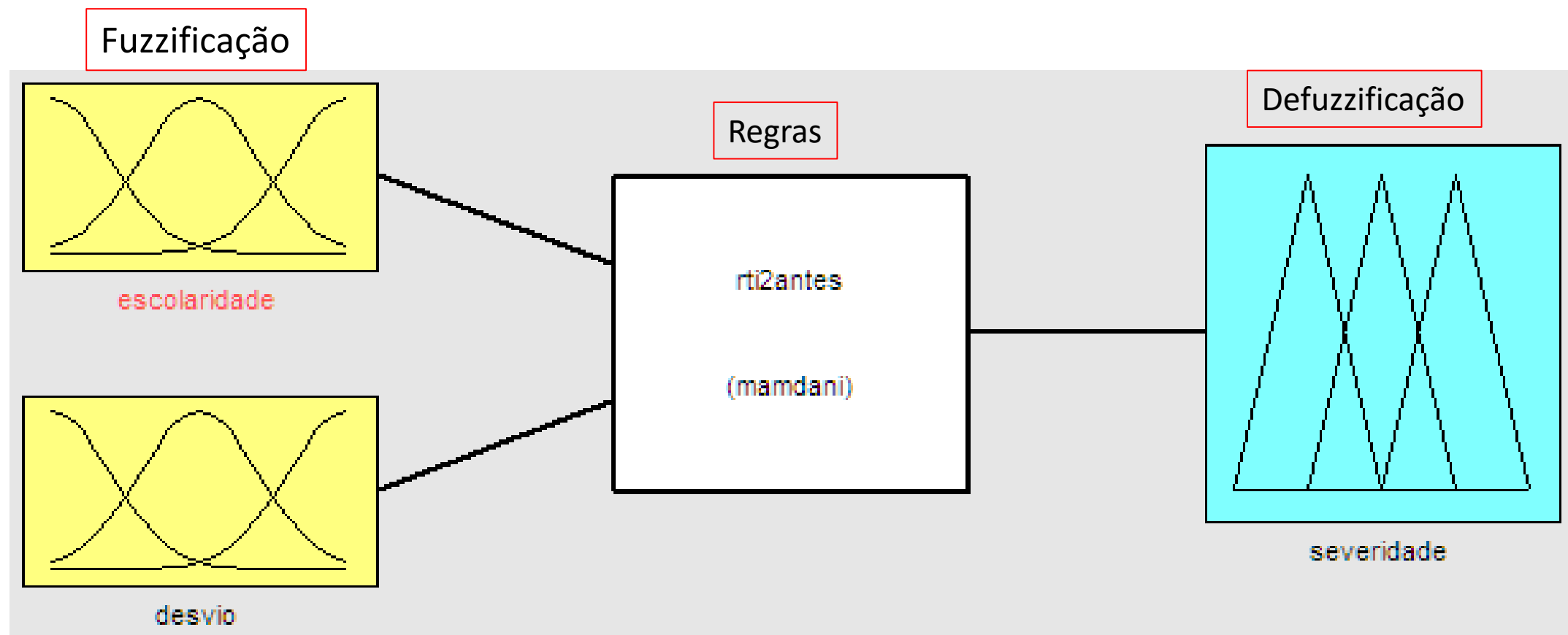
Conjuntos Fuzzy



Sistemas de Lógica Fuzzy



Sistemas de Lógica Fuzzy



Fuzzificação

- A **fuzzificação** é a operação que permite transformar as variáveis nítidas de entrada x em conjuntos fuzzy ou simplesmente para modificar o grau de imprecisão do conjunto fuzzy
- Transformar a entradas x em um ou mais conjuntos fuzzy



Sistemas de Lógica Fuzzy

- As regras combinam **variáveis linguísticas** (quente, alto, barato, velocidade, etc.), **quantificadores** (muito, pouco, extremamente, etc.), **operadores lógicos** (E, OU, NÃO) e de **implicação** (SE, ENTÃO).
- Exemplos:
 - SE temperatura é muito quente E fluxo é baixo ENTÃO gire a torneira muito à direita
 - SE temperatura é morna E fluxo é médio ENTÃO gire a torneira um pouco à esquerda
- A defuzzificação combina os valores produzidos pelas diversas regras que tenham sido acionadas para uma determinada entrada, produzindo, a partir da combinação dos conjuntos fuzzy, uma saída escalar adequada.

Características e Vantagens

- Lida com propriedades que possuem valores contínuos, associando-as a partições desses valores que possuem uma nomenclatura, sendo que as diferentes partições podem se sobrepor.
 - Exemplo: com 35 anos, uma pessoa pode, ao mesmo tempo, pertencer ao conjunto de pessoas de meia idade e ao conjunto de pessoas jovens (com diferentes graus de pertinência a cada um dos conjuntos representados por estas denominações linguísticas)
- Lida com imprecisão e não com ambiguidade.
 - Exemplo: **Se** a comida está quente **então** ... É necessário saber se quente se refere à temperatura ou à quantidade de tempero (a técnica fuzzy não lida com este tipo de ambiguidade do conceito linguístico)



Características e Vantagens

- Permite elaborar regras que manipulam conceitos conflitantes (oriundos de especialistas distintos).
 - Por exemplo: Se vendas estão baixas então abaixe o preço (Marketing). Se vendas estão baixas então aumente o preço (Finanças)
- Pela generalidade permitida na elaboração das regras, são necessárias menos regras para resolver um problema (e regras mais intuitivas), do que com a técnica de Sistemas Especialistas.
- Permite criar regras que manipulam incertezas de forma a gerar diferentes valores de saída para diferentes entradas, ao contrário de Sistemas Especialistas que geram um mesmo valor com graus de confiança diferentes.

Características e Vantagens

- Tratam de forma fácil e intuitiva problemas altamente complexos que dependem de relações não lineares entre as variáveis (o que dificultaria a obtenção de modelos matemáticos)
- Grau de pertinência permite avaliar de uma forma mais clara um valor do que um fator de confiança.
 - Se dizemos que uma pessoa é alta com $\mu = 0,85$, temos uma boa ideia da altura. Se dizemos que é alta com F.C.=0,85 não temos a menor ideia da altura.

Nomenclaturas

- Domínio do conjunto fuzzy é o universo de valores possíveis para um determinado conjunto.
 - Para o conjunto fuzzy de pessoas altas, visto anteriormente o domínio é aberto (de 0 a $+\infty$). Já para o conjunto de pessoas de meia idade o domínio é fechado (20 a 70)
- Suporte do conjunto é o subconjunto do domínio para o qual o grau de pertinência é maior que zero.
 - Para o conjunto de pessoas de meia idade, é o intervalo de 30 a 60.
- Conjunto Singleton é um conjunto fuzzy em que o suporte é um único ponto do domínio.
 - Exemplo: o conjunto de notas ideais em um domínio de 0 a 10, pode ser um conjunto Singleton em que apenas a nota 10 possui $\mu = 1$ e as demais possuem $\mu = 0$.

Nomenclaturas

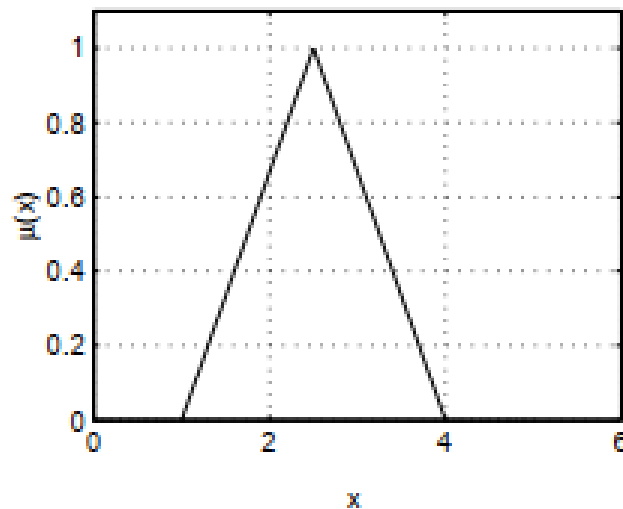
- Universo do discurso é o espaço completo de variação dos valores de pertinência para uma determinada variável.
 - Exemplo: para uma variável temperatura assim modelada: O universo do discurso é de 100 a 360 graus.

$$F = \{(x, \mu_{F(x)}), x \in U\}$$

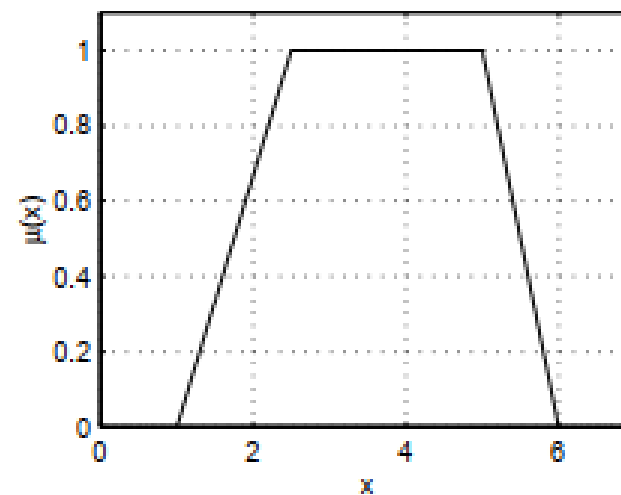
Diagram illustrating the components of the fuzzy set definition:

- F : Conjunto fuzzy
- $\mu_{F(x)}$: Grau de pertinência
- U : Universo de discurso

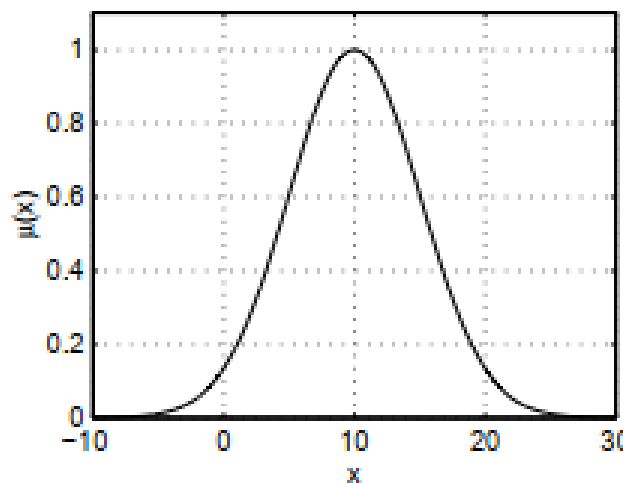
Funções de inclusão



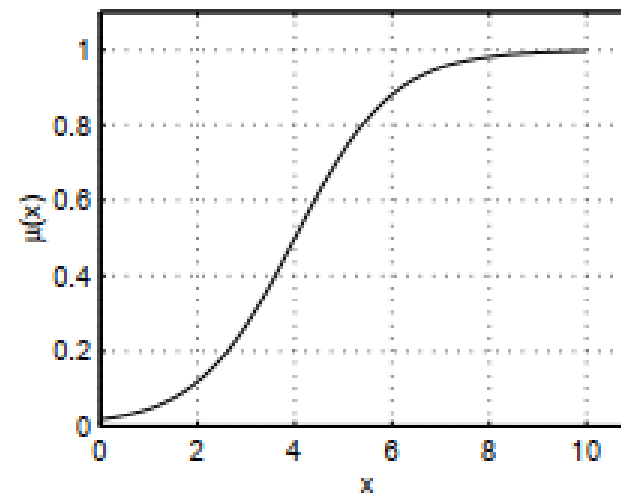
(a) Triangular



(b) Trapezoidal

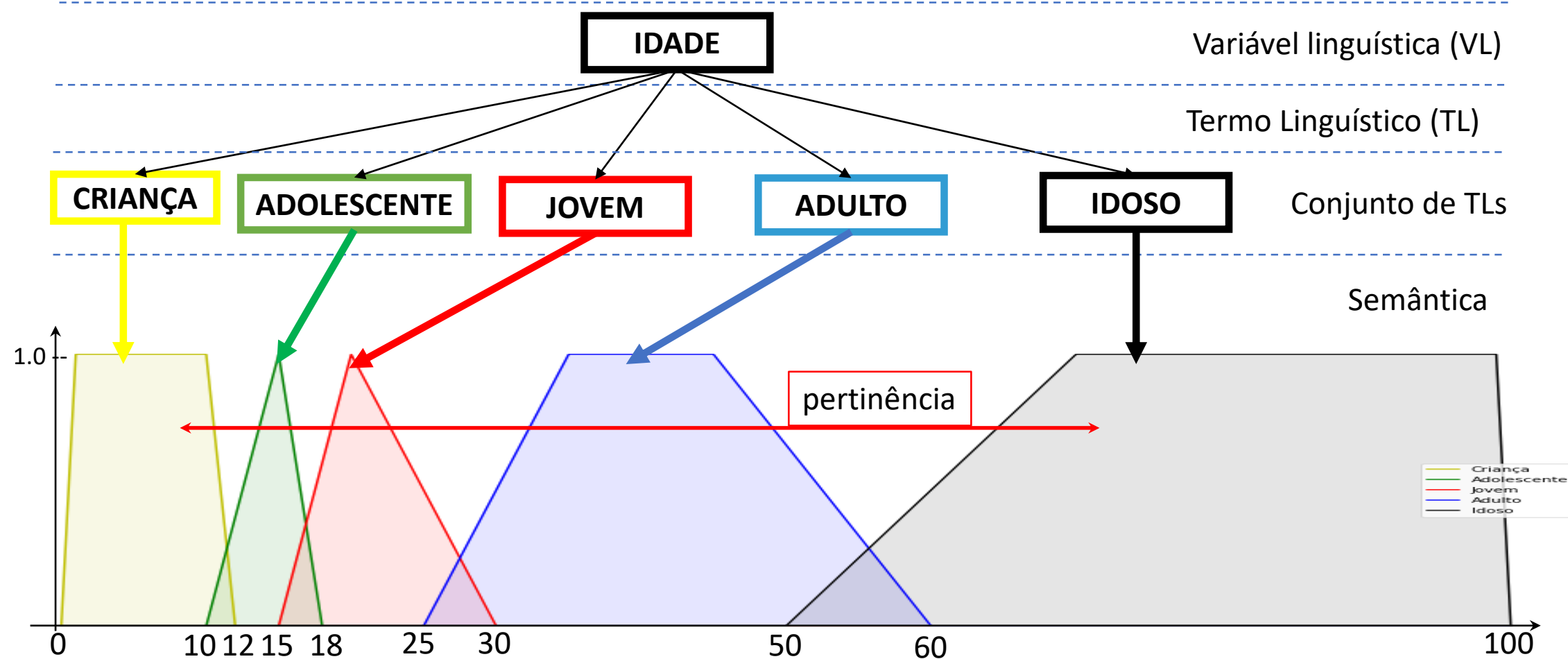


(c) Gaussiana



(d) Sigmoidal

Fuzzificação





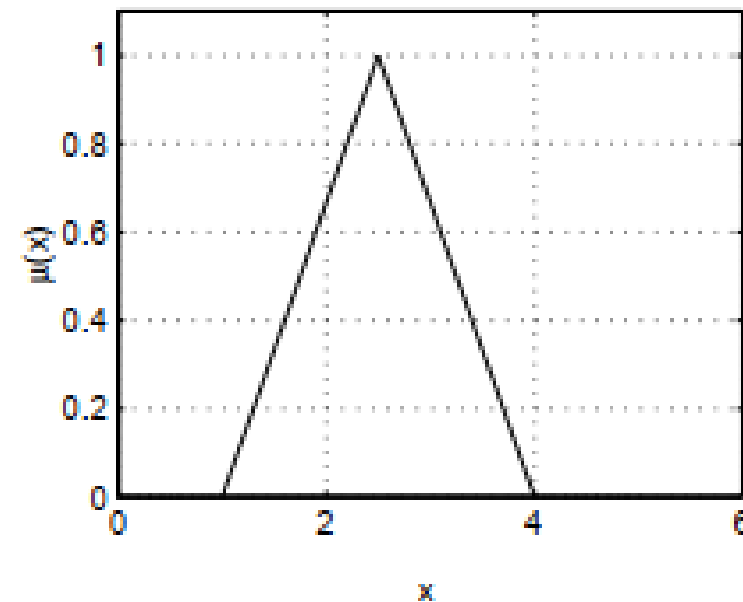
Funções de Pertinência (inclusão)

- As funções de inclusão podem representar uma noção individual de uma classe vaga e são primordialmente subjetivas em natureza e fornecem uma medida do grau de similaridade de um elemento no universo de discurso para o subconjunto nebuloso.
- As formas mais comuns usadas por uma função de inclusão são **triangulares**, **trapezoidais**, **linear por partes** e **gaussianas**.
- As funções de inclusão podem tomar qualquer forma arbitrária, no entanto, quando uma função de inclusão é definida sobre um universo de discurso contínuo pode dificultar a listagem de todos os pares definidos pela função de inclusão.

Função de Pertinência Triangular

$$\text{trimf}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c - x}{c - b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

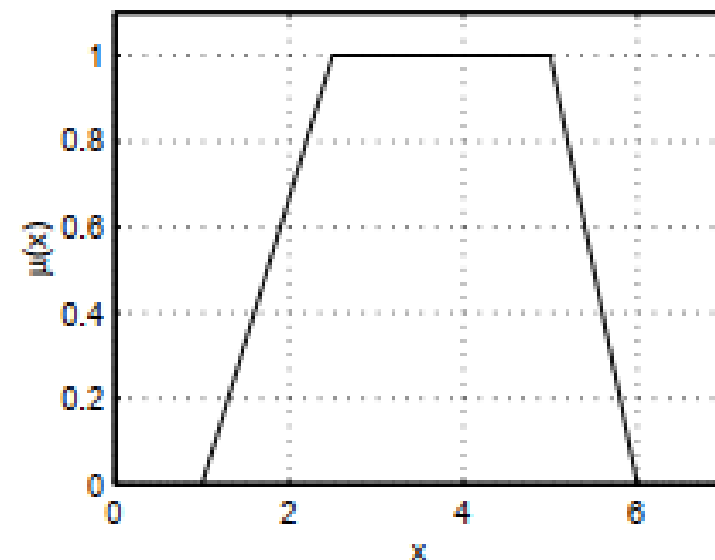
$$\text{trimf}(x, a, b, c) = \max \left(\min \left(\frac{x - a}{b - a}, \frac{c - x}{c - b} \right), 0 \right)$$



(a) Triangular

Função de Pertinência Trapezoidal

$$\text{trapmf}(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$

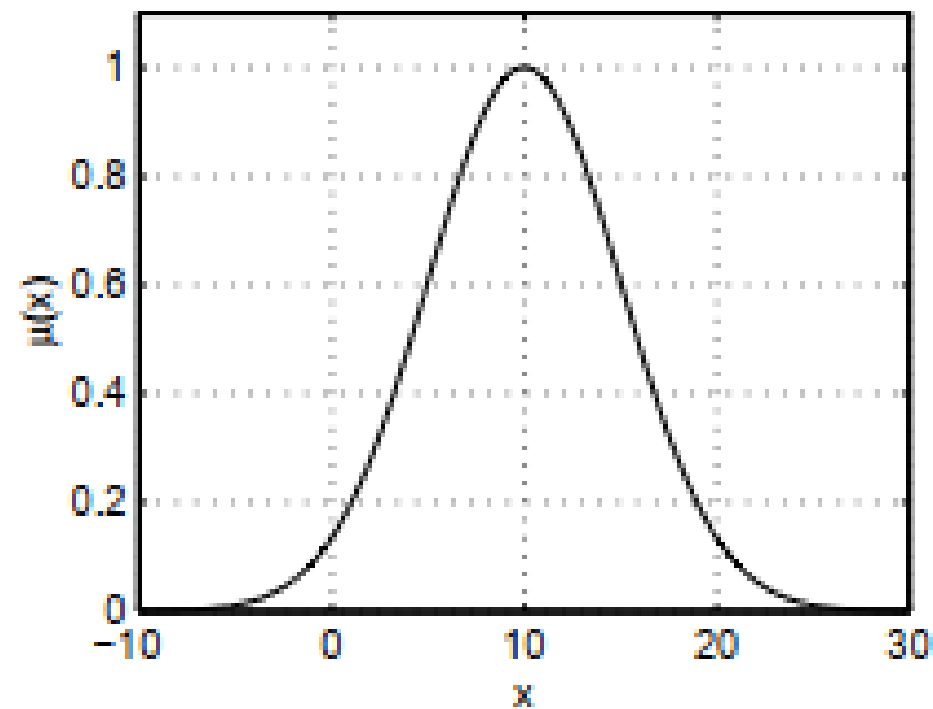


(b) Trapezoidal

$$\text{trapmf}(x, a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x - a}{b - a}, 1, \frac{d - x}{d - c}\right), 0\right)$$

Função de Pertinência Gaussiana

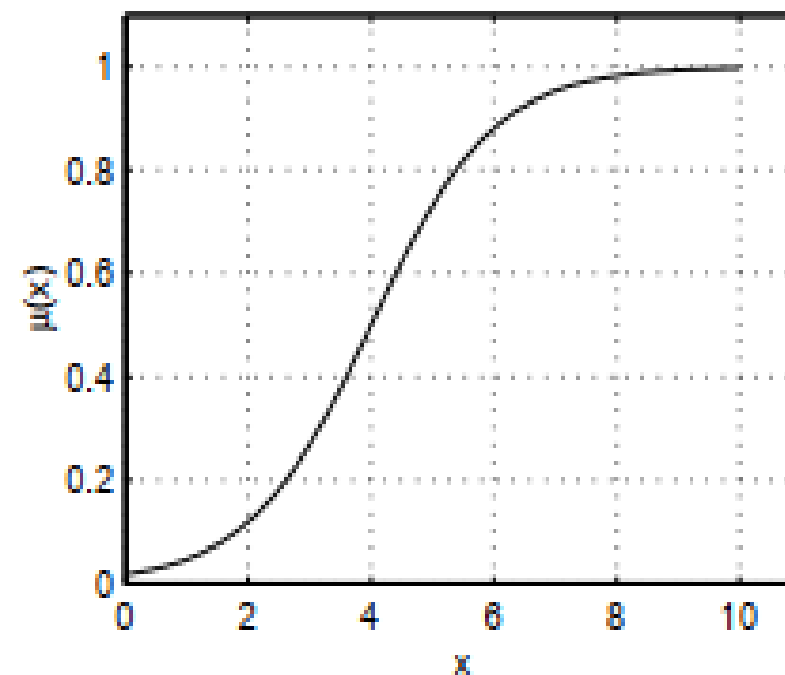
$$\text{gaussmf}(x, c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$



(c) Gaussiana

Função de Pertinência Sigmoidal

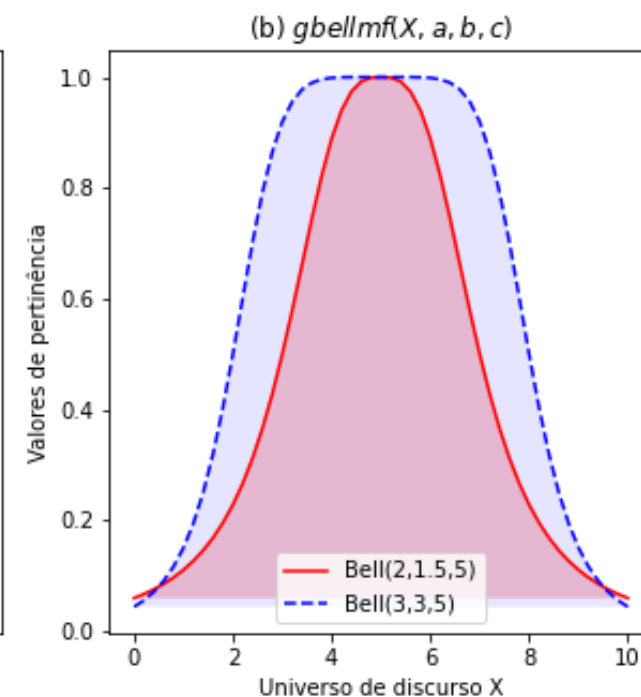
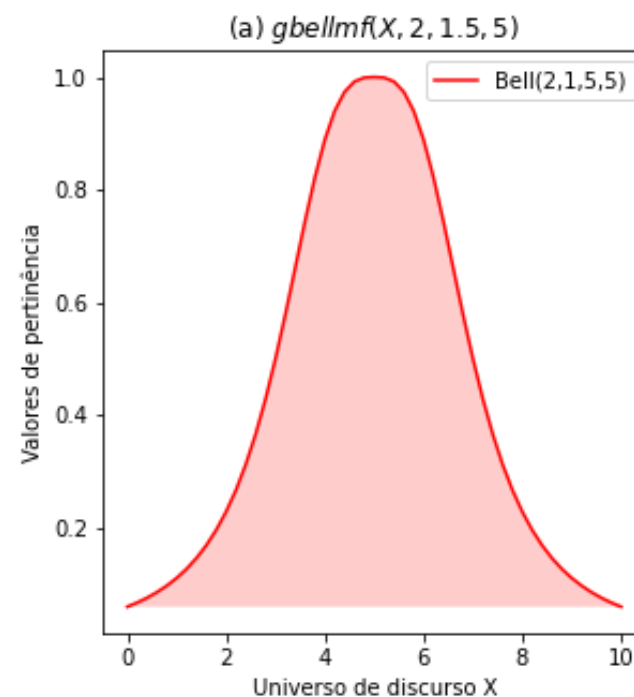
$$\text{sigmf}(x, a, c) = \frac{1}{1 + \exp[-a(x - c)]}$$



(d) Sigmoidal

Função de Pertinência Bell

$$gbellmf(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$



Operações com Conjuntos Fuzzy

- As operações com os conjuntos Fuzzy visam encontrar o grau de veracidade das afirmativas que fazem parte dos antecedentes das regras.
- Essas operações básicas (União, Interseção, Complemento) são realizadas com o grau de pertinência (μ) de um valor ao conjunto.
- Para saber se um valor pertence ao conjunto Fuzzy, devemos saber se o valor pertence ao Domínio do conjunto, ao seu Suporte e se está acima do limite α -cut.
- As operações podem ser aplicáveis a uma mesma variável ou variáveis distintas.

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Exemplos para uma variável:
 - SE idade é criança OU idade é velho ENTÃO risco de gripe é alto
 - SE idade NÃO é meia-idade ENTÃO risco de infarto é baixo
- Exemplo para duas variáveis:
 - SE temperatura é alta E pressão é baixa ENTÃO vazão é alta
- Para a operação de complemento (Ex: SE x NÃO é A ENTÃO...), a forma de cálculo do antecedente, geralmente é: $1 - \mu_A(x)$
- Para a União e a interseção, existem diferentes formas, propostas por diferentes autores, para realizar as operações:

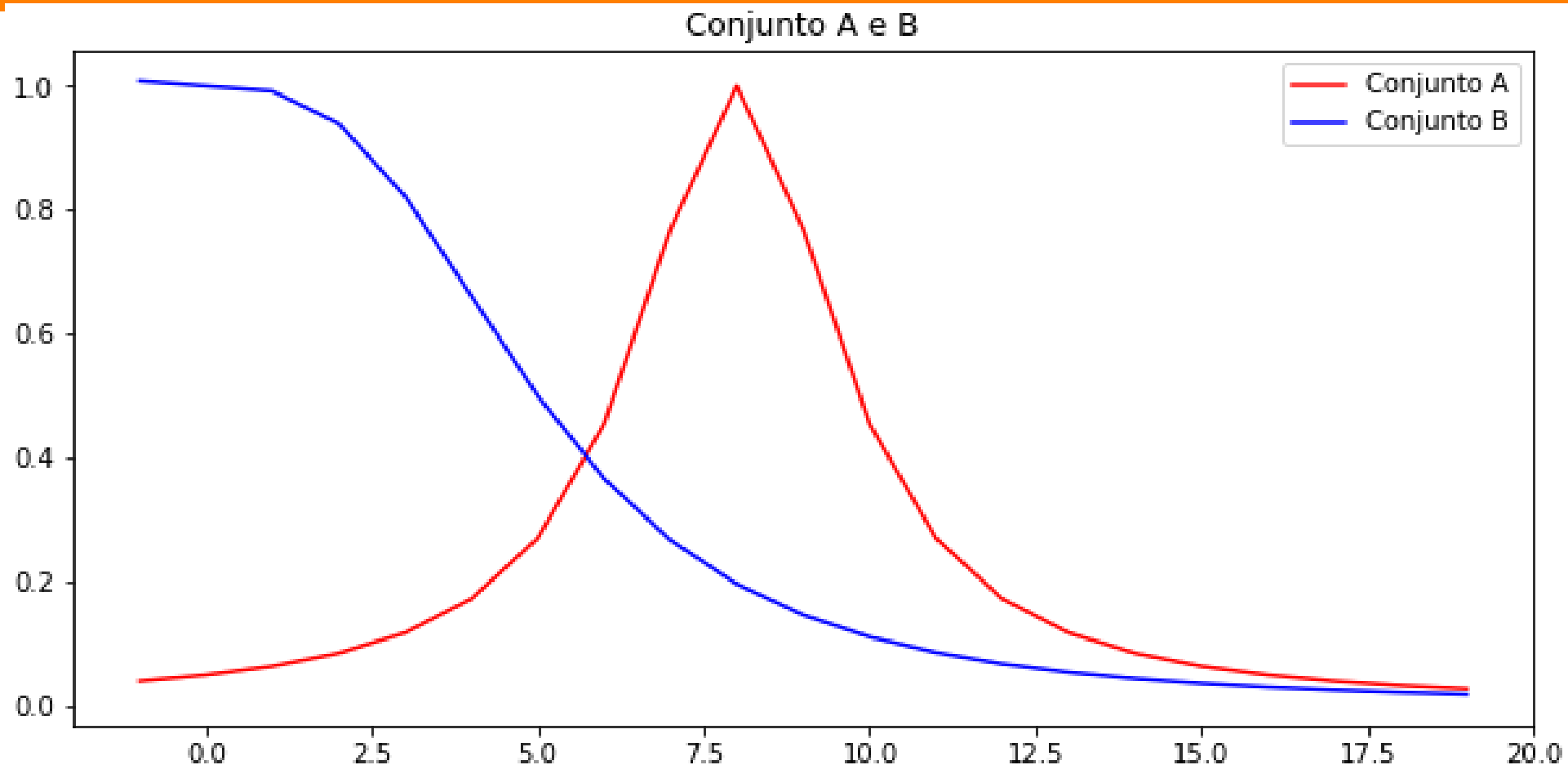
Operações com Conjuntos Fuzzy

OPERADOR	INTERSEÇÃO	UNIÃO
De Zadeh	$\min(\mu_A(x), \mu_B(y))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(y))$
Produto	$\mu_A(x) * \mu_B(y)$	$[\mu_A(x) + \mu_B(y)] - [\mu_A(x) * \mu_B(y)]$
Média	$(\mu_A(x), \mu_B(y)) / 2$	$[2 * \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) + 4 * \max(\mu_A(x), \mu_B(y))] / 6$
Soma e diferença limitadas	$\max(0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)$	$\min(1, \mu_A(x) + \mu_B(y))$

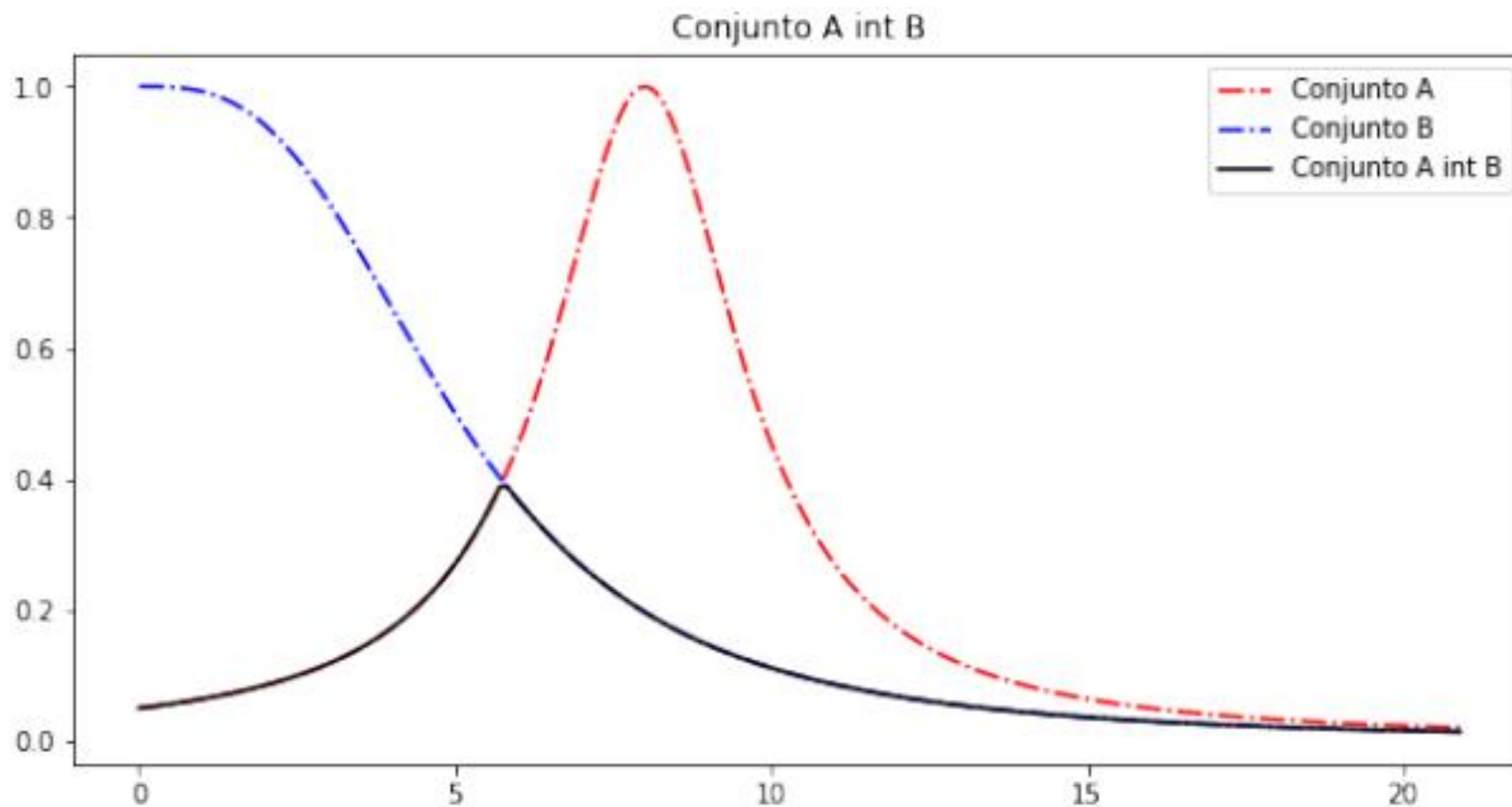
Conjuntos fuzzy – Operações - Exemplo

- Conjunto fuzzy A definido como:
- $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$, onde $\mu_A(x) = \frac{1}{1+0.3(x-8)^2}$
- $A = \{(-1, 0.03), (0, 0.04), (1, 0.06), (2, 0.08), (3, 0.11), (4, 0.17)\}$
- Conjunto fuzzy B, definido como:
- $B = \{(x, \mu_B(x)) | x \in X\}$, onde $\mu_B(x) = \frac{1}{1+(\frac{x}{5})^3}$
- $B = \{(-1, 1.00), (0, 1.0), (1, 0.99), (2, 0.93), (3, 0.82), (4, 0.66)\}$

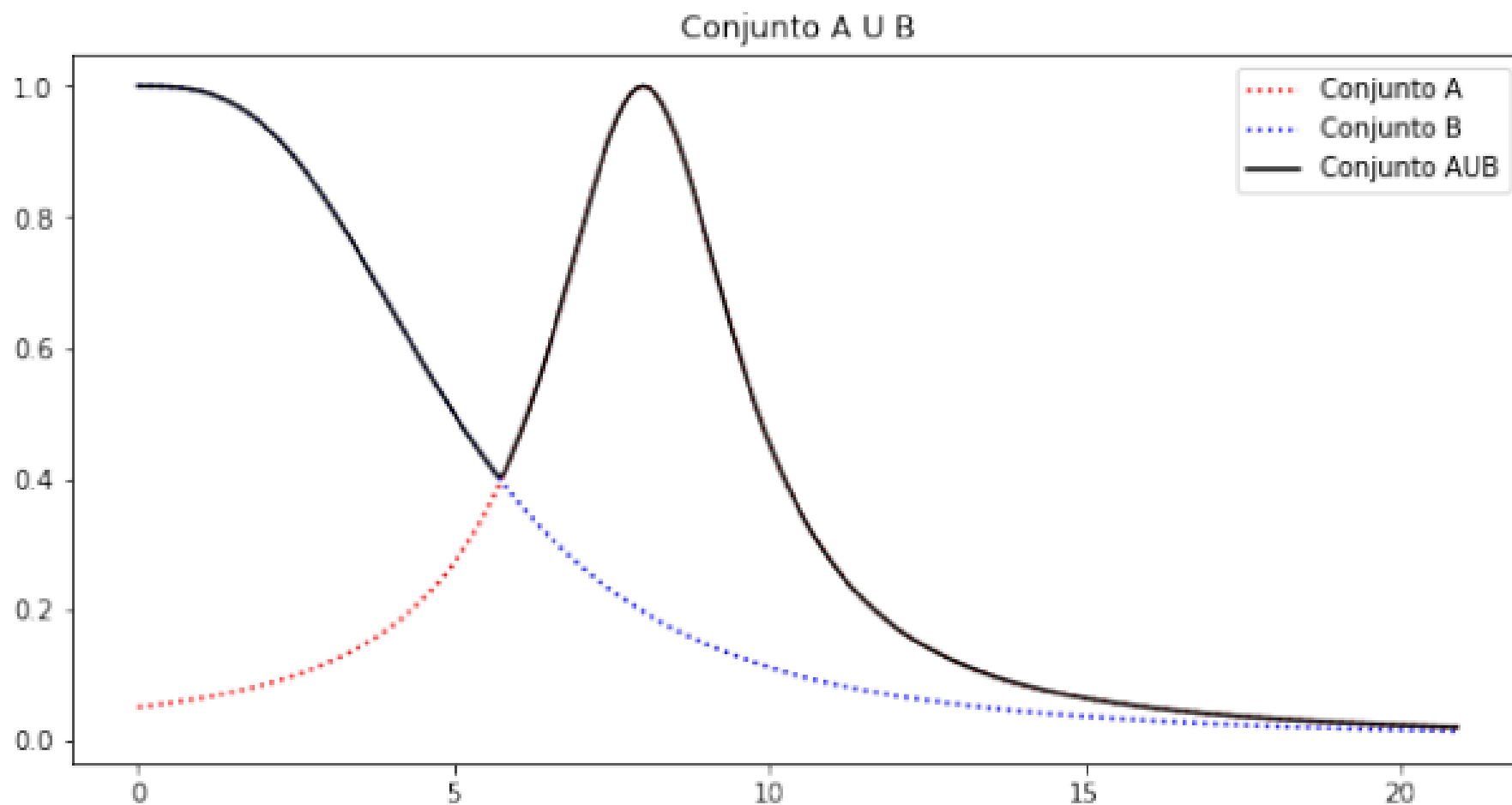
Conjuntos fuzzy – Operações - Exemplo



Operações com Conjuntos Fuzzy - Interseção



Operações com Conjuntos Fuzzy - União



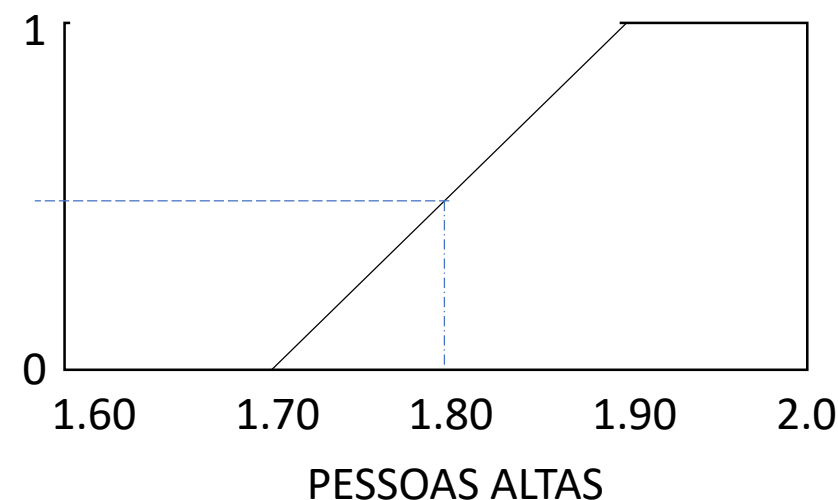
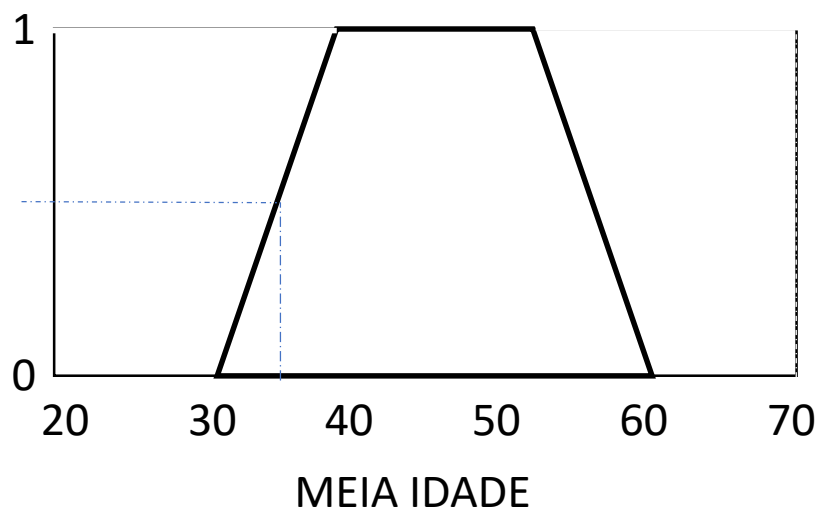
Operações com Conjuntos Fuzzy - Complemento

- E o gráfico de B^c ?



FL - Exercício

- Dados os conjuntos “meia idade” e “pessoas altas” e a tabela a seguir, determine o grau de pertinência de cada operação, de acordo com as formas de cálculo sugeridas (Zadeh e Produto):



Exercício

ID	IDADE		ALTURA		ALTO E DE MEIA IDADE		NÃO ALTO OU MEIA IDADE		
		$\mu(x)$		$\mu(x)$	ZADEH	PRODUTO	$1 - \mu(x)$	ZADEH	PRODUTO
A	35	0.5	1.70	0					
B	38		1.85						
C	54		1.66						

Inferência Fuzzy

- Objetivos:

1. Compreender o conceito de inferência fuzzy
2. Aprender a combinar o resultado de regras distintas acionadas
3. Entender o processo de defuzzificação para obter os valores de saída
4. Utilizar regras fuzzy em uma aplicação de controle

Inferência Fuzzy

- A inferência Fuzzy é uma relação lógica que obedece à mesma tabela verdade da **Implicação Modus Ponens** da lógica proposicional tradicional (lógica crisp).
- A diferença é que na **lógica crisp**, a regra é acionada somente se a premissa for verdadeira e na lógica fuzzy a regra é acionada quando a premissa possui um grau de pertinência diferente de zero.
- A **regra é uma composição de relações Fuzzy** onde a primeira relação é um conjunto fuzzy (possivelmente resultante de uma operação Fuzzy) e a segunda relação é de implicação.

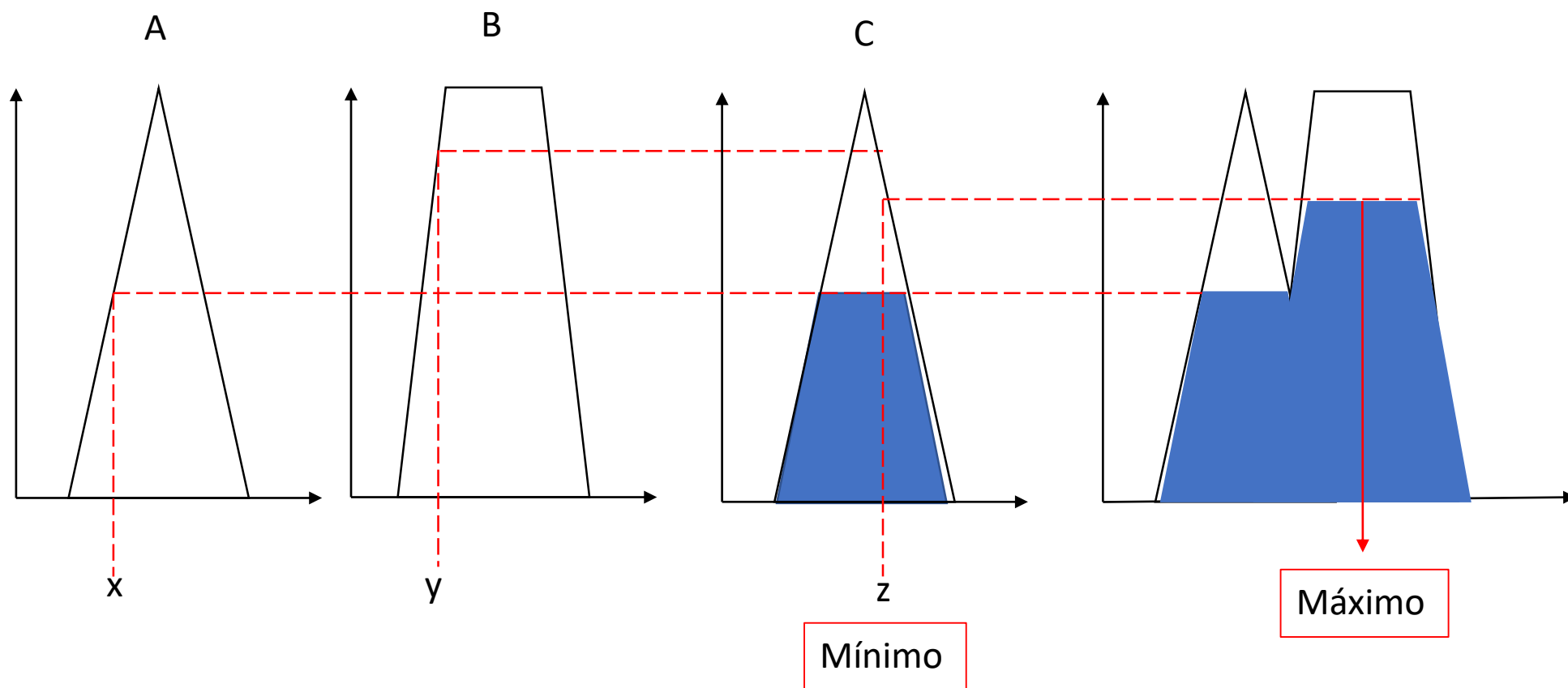
Inferência Fuzzy - Exemplo

- Se Homem é novo **então** Homem é mau motorista
- Se peso é gordo **E** idade é meia idade **então** risco é alto
- Para calcular a relação de implicação, a forma mais usada é a sugerida por **Mandani**, apesar de existirem outras, propostas por Zadeh, Takagi-Sugeno, Tsukamoto e outros.
- **Mandani** propõem utilizar o **mínimo** ou o **produto** dos graus de pertinência.

Combinando as regras acionadas

- Caso haja um conjunto de regras e duas ou mais sejam acionadas, pode-se calcular o conjunto resultante da aplicação das diferentes regras, utilizando-se o método do máximo ou o método da soma dos conjuntos Fuzzy do consequente de cada regra, além de outras opções de combinação menos usadas.
- Exemplo:
 - Utilizando-se o mínimo para a implicação e o máximo para a composição de duas regras do tipo: Se x é A E y é B então z é C, temos o conjunto Fuzzy resultante ilustrado na figura do próximo slide.

Combinando as regras acionadas



Forma das Regras de Inferência

1. If (escolaridade is ES2) and (desvio is DZE) then (severidade is SZE) (1)
2. If (escolaridade is ES2) and (desvio is DP0) then (severidade is SZE) (1)
3. If (escolaridade is ES2) and (desvio is DN0) then (severidade is SML) (1)
4. If (escolaridade is ES2) and (desvio is DP2) then (severidade is SN1) (1)
5. If (escolaridade is ES2) and (desvio is DN2) then (severidade is SLE) (1)
- ...

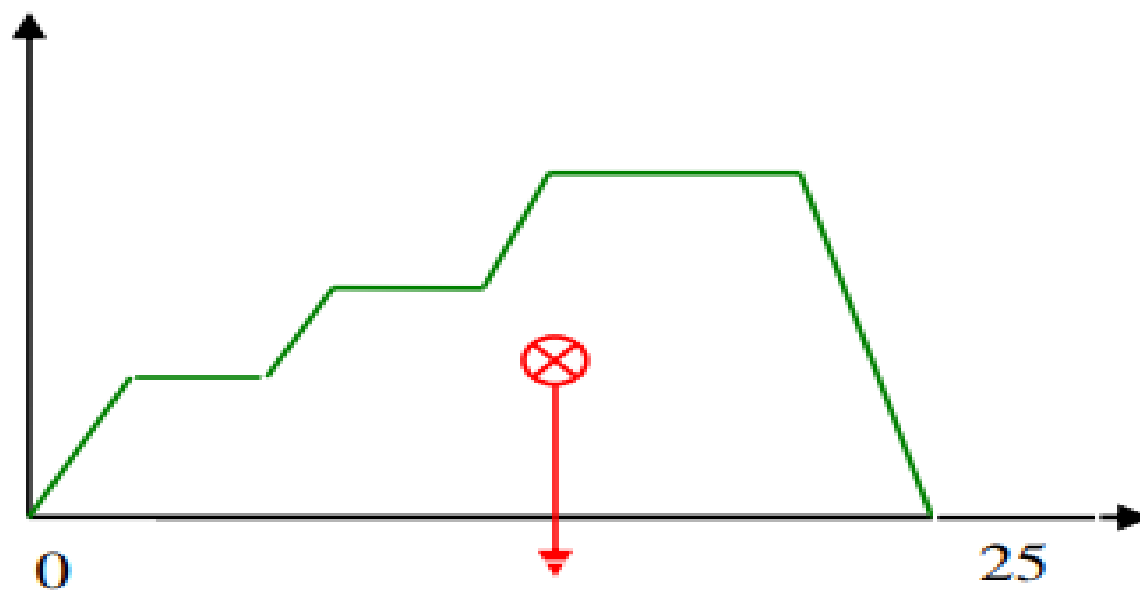
©Jorge Zavaleta, 2017

Defuzzificação

- Um sistema Fuzzy possui entrada(s) escalar(es) e deve ser capaz de produzir uma saída também escalar.
- Após serem realizadas as inferências com as regras e após se haver determinado o conjunto Fuzzy resultante (conjunto Fuzzy de saída), deve-se encontrar um valor numérico (escalar) para a saída.
- Este processo chama-se Defuzzificação do conjunto de saída.
- Existem métodos propostos por diversos autores.
- Dois dos mais usados são:

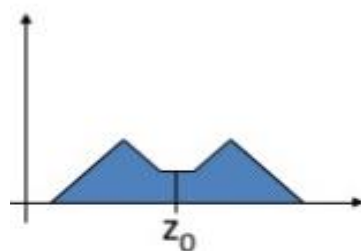
Defuzzificação

- Centro de área: calcula o centro de gravidade da área do conjunto e usa o valor deste ponto. Um problema é que o centro da figura é difícil de calcular se o universo do discurso não for discreto ou se as funções fuzzy forem complexas.

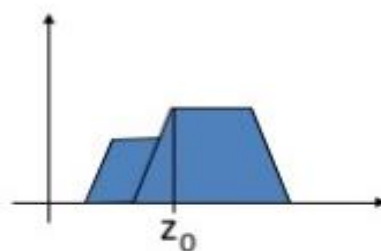
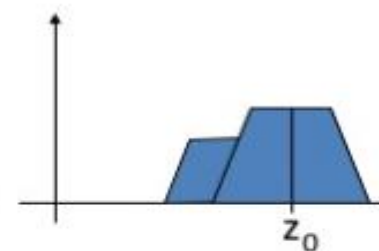


Defuzzificação

- Média dos máximos: observa o conjunto Fuzzy de saída C e determina os valores x de saída para os quais $\mu_C(x)$ é máximo, ou seja, pega os valores de máximo de cada conjunto que contribuiu para formar o conjunto C de saída. Em seguida, calcula a média destes valores de máximo ponderados pelos graus de pertinência dos respectivos conjuntos e usa este valor de média como a saída desejada.



Centróide

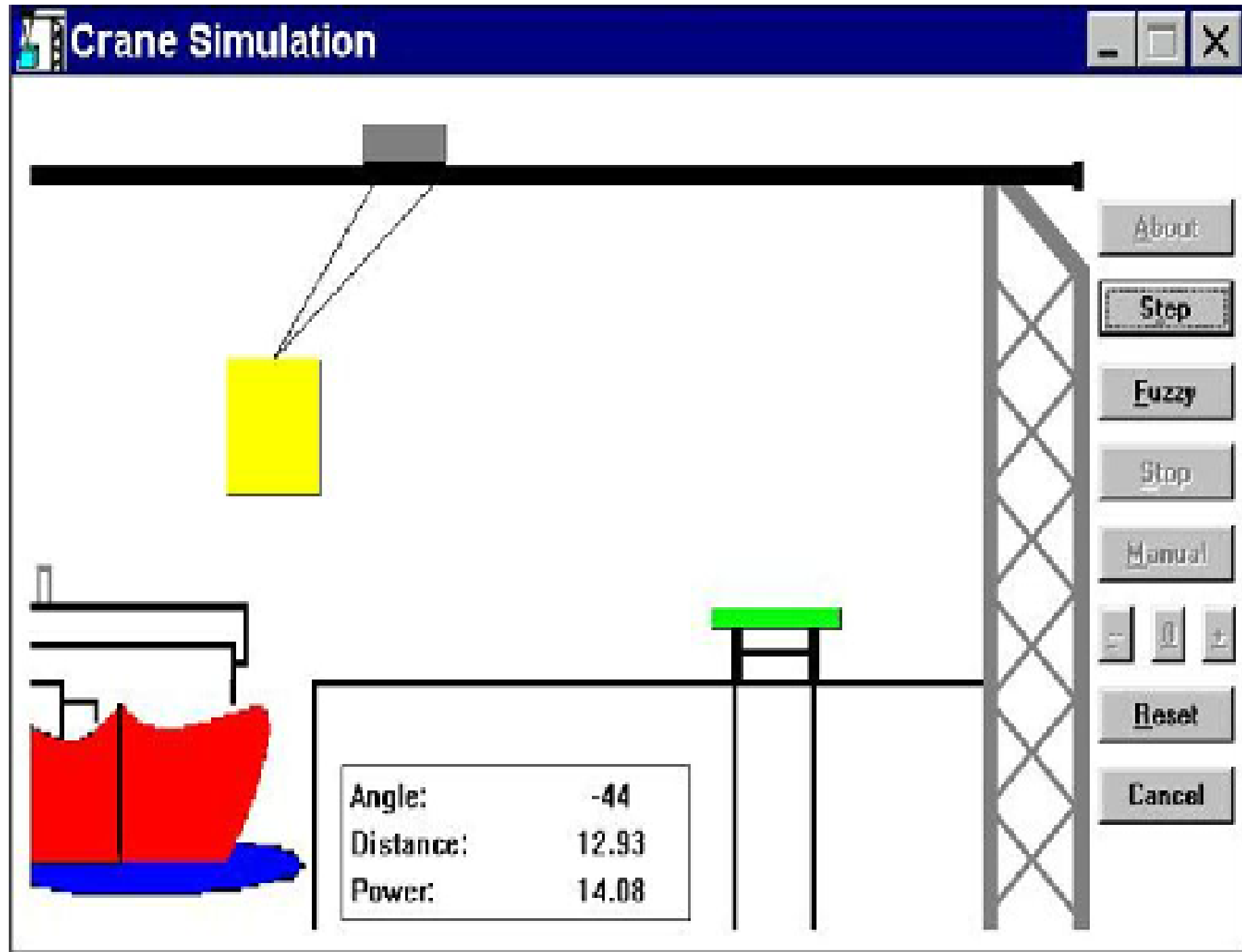
Primeiro dos
máximosMédia dos
Máximos

Aplicação

- FuzzyTech. Controlar um guindaste que se movimenta em uma dimensão linear e deve posicionar uma determinada carga em uma plataforma.
- O controle fuzzy envolve o cálculo da potência a ser aplicada ao motor (positiva ou negativa para movimentar o guindaste nos dois sentidos de direção), a partir das informações de ângulo (em graus) que a carga faz com o eixo vertical e distância (em jardas) que a mesma se encontra da plataforma.



Exemplo de aplicação



Exemplo de Aplicação

1. IF Distance = far AND Angle = zero THEN Power = pos_medium
- 2a. IF Distance = far AND Angle = neg_small THEN Power = pos_big
- 2b. IF Distance = far AND Angle = neg_big THEN Power = pos_medium
3. IF Distance = medium AND Angle = neg_small THEN Power = neg_medium
4. IF Distance = close AND Angle = pos_small THEN Power = pos_medium
5. IF Distance = zero AND Angle = zero THEN Power = zero

Exemplo de Aplicação

