ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 5

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

FUNÇÕES DERIVADAS

Conforme vimos, a função derivada equivale a função coeficiente angular da reta tangente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Apresentaremos agora alguns resultados sobre função derivada, que será de grande importância para continuidade do nosso estudo.

I) **Função constante**:

$y = f(x) = a$, sendo $a \in \mathbb{R}$.

Qual é a função derivada da função y = f(x) = a?

Usando a definição de função derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Neste caso, temos:

$$f(x) = a$$

$$f(x + \Delta x) = a$$

, portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a - a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Observem que neste caso não temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, pois temos um quociente do número zero dividido por um número próximo de zero, que resulta no número zero.

Sob o ponto de vista geométrico, o resultado encontrado para a derivada da função constante já era esperado, pois a função constante tem como gráfico uma reta paralela ao eixo x e a reta tangente a este gráfico seria a própria reta paralela ao eixo x cujo coeficiente angular é zero.

Concluímos que:

$$f(x) = a \to f'(x) = 0.$$

II) Função linear:

$$y = f(x) = x$$

Qual é a função derivada da função y = f(x) = x?

Usando a definição de função derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Neste caso, temos:

$$f(x) = x$$

$$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$$

Portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Observe que este resultado independe de Δx.

Concluímos que:

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$.

III) Função quadrática:

$$y = f(x) = x^2$$

Qual é a função derivada da função $y = f(x) = x^2$?

Usando a definição de função derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Neste caso, temos:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

, usando a adição ao quadrado:

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2.x.\Delta x + \Delta x^2$$

, portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2.x.\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

Notem que temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{2x.0 + 0^2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}.(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

Concluímos que:

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$.

Observando os exemplos II) e III) podemos generalizar:

IV) Função polinomial de ordem n:

$$y = f(x) = x^n$$, sendo $a \in \mathbb{N}$.

Qual é a função derivada da função $y = f(x) = x^n$?

Neste caso, usaremos a definição de função derivada a partir da montagem original para o coeficiente angular da função f(x) na abscissa $x_0 = x$.

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Neste caso, temos:

$$f(x) = x^n$$

$$f(x_1) = {x_1}^n$$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{{x_1}^n - x^n}{x_1 - x}$$

Notem que temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{{x_1}^n - x^n}{x_1 - x} = \frac{x^n - x^n}{x - x} = \frac{0}{0}$$

a expressão ${x_1}^n - x^n$ pode ser escrita como:

$${x_1}^n - x^n = (x_1 - x).({x_1}^{n-1} + {x_1}^{n-2}.x + \cdots + x_1.x^{n-2} + x^{n-1})$$

Esta expressão pode ser verificada fazendo o produto do lado direito da igualdade.

Portanto:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{(x_1 - x).({x_1}^{n-1} + {x_1}^{n-2}.x + \cdots + x_1.x^{n-2} + x^{n-1})}{(x_1 - x)}$$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{(\cancel{x_1 - x}).({x_1}^{n-1} + {x_1}^{n-2}.x + \cdots + x_1.x^{n-2} + x^{n-1})}{(\cancel{x_1 - x})}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} (x_1^{n-1} + x_1^{n-2}.x + \cdots + x_1.x^{n-2} + x^{n-1})$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}.x + \cdots + x.x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2+1} + \cdots + x^{n-2+1} + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1} = n.x^{n-1}$$

Concluímos que:

$$f(x) = x^n \to f'(x) = n.x^{n-1}.$$

Exemplos:

a) $f(x) = x^5 \to f'(x) = 5.x^{5-1} = 5.x^4$

b) $f(x) = x^{-3} \to f'(x) = -3.x^{-3-1} = -3.x^{-4}$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \to f'(x) = \frac{1}{3}.x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}} \to f'(x) = -\frac{1}{4}.x^{-\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{3}.x^{-\frac{5}{4}}$

e) $f(x) = x^{\pi} \to f'(x) = \pi.x^{\pi-1}$

Exercícios resolvidos: Determine y'(x) nos seguintes casos:

a) $y(x) = (\text{sen}x)^3$

Da tabela, temos: $y(x) = f(x)^n \to y'(x) = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$

No caso: $y'(x) = 3.(\text{sen}x)^2.\cos x$

b) $y(x) = 2^{\text{sen}x}$

Da tabela, temos: $y(x) = a^{f(x)}, a > 0 \text{ e } a \neq 1$

$$\to y'(x) = a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$$

No caso: $y'(x) = 2^{senx}.\ln 2 . \cos x$

c) $y(x) = e^{x^3}$

Da tabela, temos: $y(x) = e^{f(x)} \rightarrow y'(x) = e^{f(x)}.f'(x)$

No caso: $y'(x) = e^{x^3}.3x^2$

d) $y(x) = \log_2 senx$

Da tabela, temos: $y(x) = \log_b f(x)\,, b > 0 \text{ e } b \neq 1$

$$\rightarrow y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.\log_b e$$

No caso: $$y'(x) = \frac{\cos x}{senx}.\log_2 e$$

e) $y(x) = \ln \cos x$

Da tabela, temos: $y(x) = \ln f(x) \rightarrow y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

No caso: $$y'(x) = \frac{-senx}{\cos x}$$

f) $y(x) = senx^3$

Da tabela, temos: $y(x) = senf(x) \rightarrow y'(x) = \cos f(x).f'(x)$

No caso: $y'(x) = \cos x^3 . (3x^2)$