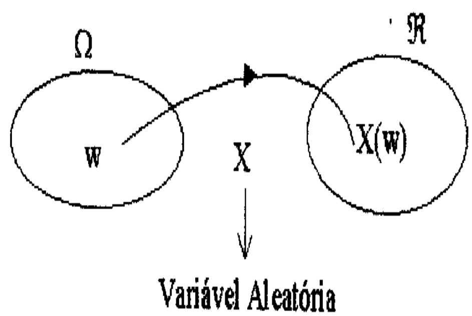
Capítulo 1

Variáveis Aleatórias

Em geral, ao realizarmos um experimento aleatório obtemos resultados não numéricos. Antes de analisarmos tais resultados é conveniente transformá-los em números. Essa transformação é feita através de VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.

DEF.1: Sejam E um experimento e Ω o espaço amostral associado ao experimento. Uma função X, que associe a cada elemento $w \in \Omega$ um número real $X(w)$, é denominada **variável aleatória (v.a.)**. Podemos dizer que a variável aleatória é uma função cujo domínio é Ω e o contra domínio é $\Re$.



Exemplo 1: Sejam E: lançamento de duas moedas e X o número de caras obtidas nas moedas. Então, $\Omega = \{(cc), (ck), (kc), (kk)\}$, c = cara e k = coroa,

$X = 0 \Rightarrow$ corresponde ao evento (kk) e $P(kk) = \frac{1}{4}$

$X = 1 \Rightarrow$ corresponde aos eventos $(ck), (kc)$ e $P((ck)\ ou\ (kc)) = \frac{1}{2}$

$X = 2 \Rightarrow$ corresponde ao evento (cc) e $P(cc) = \frac{1}{4}$

DEF.2: Um conjunto finito de variáveis aleatórias associadas com as respectivas probabilidades formam uma DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
X: & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_i & \dots & x_n \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
P(X): & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_i & \dots & p_n
\end{array}
$$

Apresentamos a seguir as variáveis discretas e continuas, seguido de alguns modelos de distribuições de probabilidade.

1.1 Variáveis Aleatórias Discretas

DEF.3: Uma variável aleatória X é discreta se o número de valores possíveis de X (seu contra-domínio) for finito ou infinito enumerável. Usaremos a notação v.a.d. para variável aleatória discreta.

DEF.4: A função de probabilidade de uma variável aleatória discreta (v.a.d.) X, é uma função que define a probabilidade de ocorrência de cada resultado x_i desta variável, isto é, se X assume os valores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ então

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, 3, ..., n.$$

A função de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1) $p_X(x_i) \geq 0$, para todo x_i;

2) $\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$.

Exemplo 2: Considere o experimento E: lançamento de duas moedas; e o evento X: número de caras obtidas.

Então, a distribuição de probabilidade é dada por:

X	1	2	3
P(X=x)	1/4	1/2	1/4

OBS.: Qualquer função de uma v.a. é também uma v.a., isto é, se X é uma v.a. então $Y = \varphi(X)$ também é uma variável aleatória.

Exemplo 3: Supondo que X seja a v.a. que representa os pontos obtido ao lançar um dado. E $Y = X + X$ é a soma dos pontos obtidos em dois lançamentos do dado. Calcular a distribuição de probabilidade de X e de Y.

Solução: A distribuição de probabilidade de X é dada por:

X	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Para construir a distribuição de probabilidade de Y, convém construir o espaço amostral.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),...,(1,6),(2,1),...,(2,6),(3,1),...,(3,6),\\ &\quad (4,1),...,(4,6),(5,1),...,(5,6),(6,1),...,(6,6)\}\end{aligned}$$

Daí,

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Y=y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

1.1.1 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição ou *função de distribuição acumulada* da variável aleatória discreta X é dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_j p(x_j), \quad x \in \Re,$$

onde o somatório é estendido a todos os índices de j tal que $x_j < x$.

A função de distribuição satisfaz as seguintes propriedades:

1- $0 \leq F(x) \leq 1$.

2- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

3- $\lim_{h \to 0} [F(x+h) - F(X)] = p(x)$

4- Se $b > a \Rightarrow F(b) \geq F(a)$, ou seja, F é não decrescente.

Exemplo: Considerando o exemplo anterior, a função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1/4 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad 3 \leq x \end{cases}$$

1.1.2 Esperança Matemática e Variância de uma v.a.d.

As probabilidades dos valores assumidos pela v.a.d. podem ser interpretadas como frequência relativa. Podemos, então, definir para a distribuição de probabilidade as medidas de posição e dispersão.

DEF.4: Define-se esperança matemática (ou valor esperado) de uma v.a. discreta X como:

$$E(X) = \mu_x = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

DEF.5: Define-se variância da v.a. discreta X por:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sigma_x^2 = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

Algumas propriedades sobre a esperança e a variância são apresentadas a seguir:

Propriedades: Se a e b são constantes e X e Y são variáveis aleatórias e independentes, então:

Esperança	Variância
$E(a) = a$	$Var(a) = 0$
$E(bX) = bE(X)$	$Var(bX) = b^2 Var(X)$
$E(X \pm a) = E(X) \pm a$	$Var(X \pm a) = Var(X)$
$E(bX \pm a) = bE(X) \pm a$	$Var(bX \pm a) = b^2 Var(X)$
$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$	$Var(X \pm Y) = Var(X) \pm Var(Y)$

1.2 Variáveis Aleatórias Contínuas

DEF.6: Uma variável aleatória X é contínua se seu contradomínio é um intervalo ou uma coleção de intervalos. Usaremos a notação v.a.c. para a variável aleatória contínua.

A distribuição de uma variável aleatória contínua (v.a.c.) pode ser encarada como um refinamento de uma distribuição discreta.

DEF.7: Seja a variável aleatória contínua X com uma função $f \geq 0$ então a função distribuição de X é dada por

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \Re.$$

Neste caso, dizemos que f é uma função densidade de probabilidade de X, que deve obedecer as seguintes propriedades:

a) $f(x) \geq 0$.

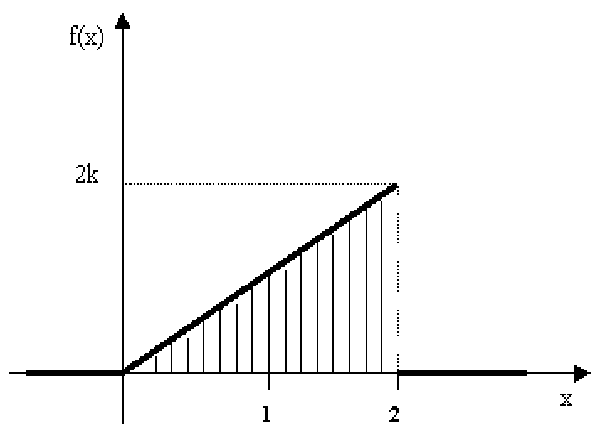
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

c) $\int_a^b f(x)dx = P(a \leq x \leq b), \quad b > a$.

Exemplo: Seja a função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Consideremos o gráfico



Para a propriedade (c) ser satisfeita, a área do triângulo hachurado deve ser 1. Como a área é igual a $2k$, temos que $k = \frac{1}{2}$. Ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$P(X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x}{2}dx = \left(\frac{x^2}{4}\right)|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

1.2.1 Esperança e Variância para v.a. contínua

DEF.8: Seja X uma v.a.c. com função de probabilidade f, definimos a média ou esperança de X por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

A variância é dada por

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

ou, ainda, $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

1.3 Distribuições de Probabilidades Discretas

Nesta seção estudaremos algumas distribuições de probabilidades para variáveis aleatórias discretas, tais como: Bernoulli, Binomial, Geométrica, Pascal (Binomial Negativa), Poisson e Hipergeométrica.

1- Distribuição de Bernoulli

Seja um experimento onde só pode ocorre "sucesso"e "fracasso", e associamos uma v.a. X aos possíveis resultados, de forma que:

$X = 1$ se o resultado for sucesso e $X = 0$ se o resultado for fracasso.

Diremos qua a v.a. assim definida tem distribuição de Bermoulli.

Se considerarmos que $P(\text{sucesso}) = P(X = 1) = p$, teremos que $P(\text{fracasso}) = P(X = 0) = 1 - p = q$ e a função de distribuição de Bernoulli será

$$P(X) = \begin{cases} 1-p & , \quad x = 0 \\ p & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos demonstrar que a média e a variância para esta distribuição são dadas por:

$$E(X) = p \ \text{ e } \ Var(X) = pq.$$

De fato:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x.P(X = x) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = p.$$

Como, $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ e

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2.P(X = x) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = p.$$

Temos, $Var(X) = p - p^2 = p.(1 - p) = pq.$

2- Distribuição Binomial $B(n, p)$

Seja um experimento com as seguintes conclusões:

- São realizadas n provas independentes;
- Cada prova é uma prova de Bernoulli, ou seja, só pode ocorrer sucesso ou fracasso;
- a probabilidade p de sucesso é constante.

Associando uma v.a. X = número de sucessos em n provas, X poderá assumir os valores $0, 1, 2, ..., n$.

Determinemos a distribuição de probabilidade dessa v.a. X, dada através da probabilidade de um número genérico de k sucessos.

Suponhamos que ocorram k sucessos nas primeiras provas e apenas fracassos na $n - k$ provas restantes. Então,

$$\underbrace{SSS...S}_{k-sucessos} \quad \overbrace{FFF...F}^{(n-k)-fracassos}$$

Como as provas são independentes, a probabilidade de ocorrência desse evento será

$$P(SSS...S\ FFF...F) = p^k(1 - p)^{n-k}$$

Porém, o evento k sucessos pode ocorrer em outras ordens distintas, todas com a mesma probabilidade.

Como o número de ordens é o número de combinações de n elementos k a k, a probabilidade de ocorrência de k sucessos em n provas será:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,...,n,$$

e podemos demonstrar que a média e a variância para esta distribuição são dadas por:

$$E(X)=np \quad \text{e} \quad Var(X)=np(1-p).$$

Demonstração: Podemos encarar a v.a. X como sendo a soma de n variáveis independentes de Bernoulli Y, isto é,

$$X=Y_1+Y_2+...+Y_n,$$

lembrando que

$$E(Y_i)=p \quad \text{e} \quad Var(Y_i)=p(1-p).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y_1+Y_2+...+Y_n)=E(Y_1)+E(Y_2)+...+E(Y_n) \\ &= p+p+...+p=np. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(Y_1+Y_2+...+Y_n)=Var(Y_1)+Var(Y_2)+...+Var(Y_n) \\ &= pq+pq+...+pq=npq. \end{aligned}$$

Exemplo 4: Dez lâmpadas são extraídas, ao acaso com reposição, de uma caixa contendo 20 lâmpadas, sendo que 8 lâmpadas estão queimadas. Se X indica o número de lâmpadas queimadas na amostra, qual será $P(X=6)$?

Solução: Temos as seguintes informações : $n=10$, $k=6$, $p=0,4$ e $q=0,6$.

$$\begin{aligned} P(X=6) &= \binom{10}{6}(0,4)^6(0,6)^4 \\ &= 210(0,4)^6(0,6)^4 \cong 0,1115 \end{aligned}$$

Exemplo 5: Uma moeda é lançada 8 vezes seguidas. Calcule

a) Probabilidade de obter 3 caras.

b) Probabilidade de obter no mínimo 6 caras.

c) Probabilidad de obter no máximo 1 cara.

Solução:

a) $n = 8,\ k = 3,\ p = 0,5$ e $\ q = 0,5$.

$$P(X = 6) \ = \ \binom{8}{3}(0,5)^3(0,5)^5 \cong 0,21875$$

b) $n = 8,\ p = 0,5$ e $\ q = 0,5$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= \binom{8}{6}(0,5)^6(0,5)^2 + \binom{8}{7}(0,5)^7(0,5)^1 + \binom{8}{8}(0,5)^8(0,5)^0 \\ &\cong 0,1445 \end{aligned}$$

c) $n = 8,\ p = 0,5$ e $\ q = 0,5$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{8}{0}(0,5)^0(0,5)^8 + \binom{8}{1}(0,5)^1(0,5)^7 \\ &\cong 0,0352 \end{aligned}$$

Exercícios:

1) Se 25% dos empregados de uma empresa são casados, achar a probabilidade de que, numa amostra de 50 empregados, escolhidos ao acaso, tenhamos:

a) nenhum casado; $(0,0000005 \cong 0)$

b) no mínimo um casado; (0.9999995)

c) no máximo dois casados. (0.0000771)

2) Em 1500 famílias com três filhos, quantas famílias podemos esperar, considerando que $P(H) = P(M) = 0,5$:

a) com ao menos um menino (H)? (0,850, 1312 famílias)

b) com exatamente duas meninas (M)? (0,375, 562 famílias)

c) com nenhuma menina ? (0,125, 188 famílias)

3) Num determinado processo de fabricação, 10% das peças são considerads defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades cada uma. Qual a probabilidade de:

a) haver exatamente 3 peças defeituosas numa caixa? (0,0081)

b) haver duas ou mais peças defeituosas numa caixa? (0.0815)

3- Distribuição Geométrica

Seja o experimento que consiste em se repetir uma prova de Bernoulli tantas vezes quantas forem necessárias, até se obter o primeiro sucesso. Se forem provas independentes e de mesma probabilidade de sucesso p, então o número de tentativas necessárias X terá *Distribuição Geométrica*, dada por

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad q = 1 - p, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

A esperança e a variância dessa distribuição são

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = ... = \frac{1}{p}.$$

$$Var(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 P(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{p}\right)^2 pq^{k-1} = ... = \frac{q}{p^2}.$$

Obs.: A distribuição geométrica tem a propriedade de não ter memória, isto é,

$$P(X = s + t | X > s) = P(X = t),$$

a probabilidade de que o número de provas até o primeiro sucesso seja $s+t$, sabendo-se que as s primeiras provas foram fracassos, é igual à probabilidade de o número de provas até o primeiro sucesso ser igual às t provas restantes.

Exemplo: José deve à Mário R\$100,00. Cada viagem de Mário à casa de José custa R\$ 30,00, e a probabilidade de José ser encontrado em casa é 1/3. Se Mário encontrar José conseguirá cobrar a dívida.

a) Qual a probabilidade de Mário ter de ir à casa de José mais de duas vezes para conseguir cobrar a dívida?

b) Se na segunda vez em que Mário foi à casa de José ainda não o encontrou, qual a probabilidade de conseguir cobrar a dívida na terceira vez?

Solução: *a) Vemos que o número de viagens até a casa de José tem uma distribuição geométrica. Então, considerando $p = 1/3$ e $q = 2/3$*

$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + ...$

ou calculamos,

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

b) Aqui temos a probabilidade condicional, ou seja, queremos

$$P(X = 3 | X > 2) = \frac{P(X = 3 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(X = 3)}{P(X > 2)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}}{4/9} = 1/3.$$

Verificamos que bastava calcular $P(X = 1)$, seguindo a propriedade da distribuição geométrica não ter memória.

4- Distribuição Hipergeométrica

Consideremos o seguinte problema: *uma caixa possui 50 bolas, sendo 40 verdes e 10 amarelas. Tirando-se 5 bolas, qual a probabilidade de sairem 2 amarelas?*

* Se as bolas são retiradas *com reposição*, podemos resolver este problema pela distribuição Binomial, ou seja, considerando X o número de bolas amarelas

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} (0,2)^2 (0,8)^3 = 0,2048.$$

* Se as bolas são retiradas *sem reposição*, os eventos "cor das bolas"já não são mais independentes, pois a probabilidade de uma bola ser da cor verde ou amarela depende das cores que tenham saído nas demais bolas. Neste caso, podemos efetuar o cálculo da seguinte forma:

- número de casos possíveis : $C_{50,5} = \binom{50}{5}$, que nos fornece o número de grupos diferentes de 5 bolas entre as 50, grupos esses todos equiprováveis.

- número de casos favoráveis: $C_{10,2} \times C_{40,3} = \binom{10}{2} \times \binom{40}{3}$.

Então, $P(X=2) = \dfrac{\binom{10}{2} \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{5}} = 0,21.$

Assim, generalizando o problema, chamemos de N o total de bolas na caixa e R a quantidade de bolas amarelas. Extraem-se n bolas, e pergunta-se a probabilidade de entre elas haver k bolas amarelas. Considerando X o número de bolas amarelas, temos

$$P(X=k) = \frac{C_{R,k} \times C_{N-R,n-k}}{C_{N,n}} = \frac{\binom{N}{R} \times \binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Esta distribuição é denominada Hipergeométrica.

Notação: $X \sim hip(N, R, n)$.

A média e a variância para esta distribuição são dadas por:

$$E(X) = np \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \frac{np(1-p)(N-n)}{N-1},$$

onde $p = \frac{R}{N}$ é a probabilidade de se obter bolas amarelas.

Exemplo 6: Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe 5 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado, caso contrário todos deverão ser inspecionados. Supondo que existam realmente 3 motores defeituosos no lote, qual a probabilidade de que a inspeção total seja necessária?

Solução: Seja X = número de peças defeituosas.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \times \binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} \cong 0,28 = 28\%.$$

5- Distribuição de Pascal ou Binomial Negativa

Nas condições em que foi definida a distribuição geométrica, se considerarmos X o número de tentativas até se obter o r-ésimo sucesso, teremos uma *Distribuição de Pascal*.

Para que o r-ésimo sucesso ocorra na k-ésima tentativa é necessário que haja um sucesso nesta tentativa e, além disso, haja $r-1$ sucessos nas $k-1$ tentativas anteriores, evento este cuja probabilidade é dada pela distribuição binomial.

$$\underbrace{\overbrace{S\ S\ F\ F ... S\ F}^{(r-1)\text{ sucessos}}}_{(k-1)\text{ tentativas}} \quad \underbrace{\overset{r-\text{ésimo sucesso}}{S}}_{k-\text{ésima tentativa}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= p\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{(k-1)-(r-1)} \\ &= \binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}, \quad k=r,\ r+1,\ r+2, ... \end{aligned}$$

A esperança e variância são dadas por

$$E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=\sum_{k=r}^{\infty} k\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}=...=\frac{r}{p}.$$

$$Var(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2 P(x_i)=\sum_{k=r}^{\infty}\left(k-\frac{r}{p}\right)\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}=...=\frac{rq}{p^2}.$$

Exemplo: Uma indústria ciderúrgica recebeu uma encomenda de fundir 3 peças complicadas. A probabilidade de se conseguir o molde adequado é 0,4, sendo o molde destruido quando se retira a peça. O custo de cada molde é R$ 500,00 e se o molde não for adequado, a peça é refugada, perdendo-se R$ 800,00 de material.

a) Qual a probabilidade de se fundir no máximo 6 peças para atender a encomenda?

b) Qual o preço a ser cobrado pelo serviço para se ter um lucro esperado de R$ 3000,00 na encomenda?

Solução: *a) Queremos a probabilidade do número de provas ser menor ou igual a k=6 até atingir o terceiro sucesso (r=3).*

$$P(X \le 6) = P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{2}{2}(0,4)^3(0,6)^0 + \binom{3}{2}(0,4)^3(0,6)^1 + \binom{4}{2}(0,4)^3(0,6)^2 + \\
&+ \binom{5}{2}(0,4)^3(0,6)^3 = 0,064 + 0,1152 + 0.1382 + 0,1382 \\
&= 0,4556
\end{aligned}
$$

b) O gasto total será $G = 500 \times X + 800(X-3) = 1300X - 2400,$ *onde X é o número de peças fundidas.*

Sabemos que $E(X) = \frac{r}{p}$, *então*

$$E(G) = 1300E(X) - 2400 = 1300 \times \frac{3}{0,4} - 2400 = 7350,00.$$

Logo o preço a ser cobrado para se obter um lucro de R$3000,00 é de R$10350,00.

6- Distribuição de Poisson

Na Distribuição Binomial a variável de interesse é o número de sucessos em um intervalo discreto (n- provas). Mas, em muitos casos, conhece-se o número de sucessos, porém se torna difícil conhecer o número de fracassos ou o número total de provas. Por exemplo:

1. Pessoas que entram em uma loja. *Aqui podemos num determinado intervalo de tempo anotar o número de pessoas que entraram na loja, porém o número de pessoas que deixaram de entrar na loja não poderá ser determinado.*

2. Número de chamadas telefônicas recebidas por um PBX durante um intervalo pequeno de tempo.

3. Número de falhas de um computador em um dia de operação.

4. Número de bactérias contidas em um litro de água.

A distribuição de Poisson é largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de um certo tipo, que ocorreram em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume.

Seja a v.a. X representando o número de sucessos num intervalo t e $\triangle t$ a amplitude do intervalo t. Admitamos algumas hipóteses:

1. $P(X = 1, \triangle t) = \lambda \triangle t$, ou seja, em intervalos muito pequenos, a probabilidade de sucesso é proporcional ao comprimento do intervalo.

2. $P(X > 1, \triangle t) = 0$, ou seja, em intervalos muito pequenos, a probabilidade de mais de um sucesso ocorrer é despresível.

3. $P(X = 0, \triangle t) = 1 - \lambda \triangle t$.

4. As ocorrências de sucessos nos intervalos são independentes.

Imaginemos um intervalo t dividido em n pequenos intervalos de igual comprimento $\frac{t}{n}$, de modo que as suposições 1) e 2) sejam válidas.

Logo,

$$\triangle t = \frac{t}{n}, \text{ ou seja}, P(X = 1, \triangle t) = \frac{\lambda t}{n}$$

A probabilidade de se obter k sucessos no intervalo t será a probabilidade de que em k intervalos ocorra um sucesso, que pode ser obtida pela fórmula binomial

$$P(X = k) \cong \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Por outro lado,a expressão será rigorosamente válida quando o número de intervalos tender ao infinito. Logo,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \frac{(\lambda t)^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n.n...n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\underbrace{1.\left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}}_{1} \right] \frac{(\lambda t)^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Portanto, a Distribuição de Poisson é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad \text{onde} \ \ k = 0, 1, 2, ...$$

e λ é o coeficiente de proporcionalidade.

A esperança (média) e a variância para esta distribuição são:

$$E(X) = \lambda t \quad \text{e} \quad Var(X) = \lambda t.$$

Exemplo 7: Em média ocorrem 3 chamadas por hora num certo telefone. Calcular a probabilidade de se receber no máximo 4 chamadas em uma hora e meia e a probabilidade de nenhuma chamada em 180 minutos.

Solução: Sabemos que $E(X) = \lambda t = Var(X)$.

Logo, $\lambda t = 3$, para $t = 60min \Rightarrow \lambda = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$. Então, para $t = 90min \Rightarrow \lambda t = \frac{1}{20} \times 90 \Rightarrow \lambda t = 4,5$. Portanto,

$$\begin{aligned} P(X \leq 4; 90) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{e^{-4,5}(4,5)^0}{0!} + \frac{e^{-4,5}(4,5)^1}{1!} + \frac{e^{-4,5}(4,5)^2}{2!} + \frac{e^{-4,5}(4,5)^3}{3!} + \frac{e^{-4,5}(4,5)^4}{4!} \end{aligned}$$

Para $t = 180min \Rightarrow \lambda t = 9$. Então,

$$P(X = 0; 180min.) = \frac{e^{-9}(9)^0}{0!} = e^{-9}.$$

Exemplo 8: Em uma fábrica de componentes elétricos, verificou-se que ao testar a resistência dos fios elétricos, havia em média dois cortes a cada 100 metros de fio.

a) Qual a probabilidade de que num teste em 300 metros de fio haja no máximo 3 cortes?

b) Qual a probabilidade de ocorrer um corte em 50 metros de fio?

Solução: Sabe-se que $\lambda t = 2$, em $t = 100m \Rightarrow \lambda = \frac{1}{50}$.

a) Para $t = 300m \Rightarrow \lambda t = \frac{1}{50} \times 300 = 6$.

$$P(X \leq 3; 300m) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-6}(6)^0}{0!} + \frac{e^{-6}(6)^1}{1!} + \frac{e^{-6}(6)^2}{2!} + \frac{e^{-6}(6)^3}{3!} \\ &\cong 0,1512 \end{aligned}$$

b)Para $t = 50m \Rightarrow \lambda t = \frac{1}{50} \times 50 = 1$.

$$P(X = 1; 50m) = P(X = 1) = \frac{e^{-1}(1)^1}{1!} = e^{-1} \cong 0,3679$$

Exercícios:

1) Uma loja atende, em média, 2 clientes por hora. Calcular a probabilidade de em uma hora

a) atender exatamente 2 clientes; (0,2707)

b) atender no mínimo 2 clientes. (0,594)

2)Suponha que ocorrem, em média, 2 suicídios por ano numa população de 50.000 habitantes. Em uma cidadede 100.000 habitantes, encontre a probabilidade de que em um dado ano tenha ocorrido

a) Um suicídio. (0,0732)

b) Dois suicídios. (0,1464)

c) Mais de dois suicídios. (0,7619)

1.4 Função Geratriz de Momentos

Considere a variável aleatória X. Ao calcularmos a $E(X)$ e $Var(X)$ trabalhamos diretamente com a distribuição de probabilidade de X. Queremos agora, introduzir outra função para calcularmos as características $E(X)$ e $Var(X)$ da variável X.

Def.: Seja X uma variável aleatória discreta, com distribuição de probabilidade $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. A função M_X, denominada *função geratriz de momentos (fgm)* de X, é definida por

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} p(x_j) \quad \longrightarrow \text{Série infinita.}$$

Se X for uma v.a. contínua com f. densidade de probabilidade f, teremos

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \quad \longrightarrow \text{Integral imprópria.}$$

Podemos observar que, em qualquer um dos casos, $M_X(t)$ é apenas o valor esperado de e^{tX}. Ou seja,

$$M_X(t) = E(e^{tX}).$$

Obs.: Existe uma função, estreitamente relacionada com a fmg, que é frequentemente usada em seu lugar. Tal função é a *Função Característica*, denotada por C_X e definida por

$$C_X(t) = E(e^{itX}),$$

onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Não nos aprofundaremos nesta função. Porém, por motivos teóricos, existe enorme vantagem em usar $C_X(t)$ ao invés de $M_X(t)$.

1.4.1 Exemplos de Função Geratriz de Momentos

Exemplo 1: Suponha que X seja uma $B(n,p)$. Então,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \binom{n}{0} (pe^t)^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} (pe^t)^1 (1-p)^{n-1} + ... + \binom{n}{n} (pe^t)^n (1-p)^0 \\ &= [pe^t + (1-p)]^n \end{aligned}$$

A última igualdade é uma aplicação direta do Teorema Binomial.

Exemplo 2: Suponha que X tenha uma distribuição Poisson, com parâmetro λ. Então, usando que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y$, onde $y = \lambda e^t$,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk}\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t-1)}. \end{aligned}$$

1.4.2 Calculando a Esperança e Variância com a f.g.m.

Aqui podemos justificar a denominação de M_X como função de geratriz de momentos.

Tomemos o desenvolvimento da função e^x em série de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{convergente para todo} \quad x.$$

Então,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \frac{(tx)^4}{4!} + ... + \frac{(tx)^n}{n!} + ...$$

Agora,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \frac{(tX)^4}{4!} + ... + \frac{(tX)^n}{n!} + ...\right).$$

Vamos admitir que todas a condições sobre uma série infinita sejam satisfeitas. Assim, podemos usar algumas propriedades já apresentadas no texto.

Sabemos que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ e que $E(aX) = aE(X)$ então,

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3(E(X^3)}{3!} + ... + \frac{t^nE(X^n)}{n!} + ...$$

Como M_X é uma função de t, podemos derivar $M_X(t)$ em relação a t, admitindo que todas as derivadas exitam. Portanto,

$$M_X(t) = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2E(X^3)}{2!} + ... + \frac{t^{n-1}E(X^n)}{(n-1)!} + ...$$

Fazendo $t = 0$, $\;M'_x(0) = E(X)$, ou seja, a derivada primeira da fgm, em $t = 0$, fornece o valor esperado (esperança) da v.a. X.

Calculando a derivada segunda de $M_X(t)$ teremos:

$$M_X(t) = E(X^2) + tE(X^3) + ... + \frac{t^{n-2}E(X^n)}{(n-2)!} + ...$$

Tomando $t = 0$, $\;M''_X(0) = E(X^2)$.

Logo, podemos calcular a $Var(X)$ dada por

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2.$$

Continuando dessa maneira, obtemos (admitindo que $M^{(n)}(0)$ exista) o seguinte teorema:

Teorema: *A derivada n-ésima de $M_X(t)$, calculada para $t = 0$, fornece $E(X^n)$. Ou seja, $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$.*

Obs.: Os números $E(X^n)$, $n = 1, 2, ...$, são denominados os momentos de ordem n da variável aleatória X, em relação a zero. Por isso, a partir da função M_X os momentos podem ser gerados. Daí o nome *Função Geratriz de Momentos*.

Exemplo: Suponha que $X = B(n,p)$. Já calculamos que

$$M_X(t) = [pe^t + q]^n, \quad q = 1 - p.$$

Então, $\quad M'_X(t) = n[pe^t + q]^{n-1}pe^t$

$$M''_X(t) = np[e^t(n-1)(pe^t + q)^{n-2}pe^t + (pe^t + q)^{n-1}e^t].$$

Logo, $\quad E(X) = M'(0) = np \quad$ e $\quad E(X^2) = M''(0) = np[(n-1)p + 1]$.

Daí, $\quad Var(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = np(1-p)$.

1.5 Exercícios

1- Uma moeda é jogada 10 vezes. Calcular as seguintes probabilidades:

a. de ocorrer 6 caras;

b. de ocorrer pelo menos 2 caras;

c. de não ocorrer coroa;

d. de ocorrer pelo menos 1 coroa;

e. de não ocorrer 5 caras.

2- Em 320 famílias com 4 crianças cada uma, quantas se esperaria com:

a. nenhuma menina;

b. 3 meninos;

c. 4 meninos.

3- Se 5% da lâmpadas de certa marca são defeituosas, achar a probabilidade de que, numa amostra de 100 lâmpadas, escolhidas ao acaso, tenhamos:

a. nenhuma defeituosa;

b. 3 defeituosas;

c. mais do que 1 boa.

4- Num determinado processo de fabricação 10% das peças são consideradas defeituosas. As peças são colocadas em caixas com 5 unidades cada uma.

a. Qual a probabilidade de haver duas ou mais peças defeituosas na caixa?

b. Se a empresa paga uma multa de R$ 10,00 por caixa em que houver alguma peça defeituosa, qual o valor esperado da multa num total de 1000 caixas?

5- Na pintura de paredes aparecem defeitos em média na proporção de 1 defeito por metro quadrado. Qual a probabilidade de aparecerem 3 defeitos numa parede de 2x2 m ?

6- Numa estrada de pouco movimento passam, em média, 2 carros por minuto. Supondo a média estável, calcular a probabilidade de que em 2 minutos, passem:

a. mais de 4 carros;

b. exatamente 4 carros.

7- Um telefone recebe em média 0,25 chamadas por hora. Qual a probabilidade de em 4 horas:

a. receber no máximo 2 chamadas?

b. receber exatamente 3 chamadas?

c. receber no mínimo 3 chamadas ?

8- Revisadas as provas de um livro, verificou-se que há, em média, 2 erros em cada 5 páginas. Em um livro de 100 páginas, estimar quantas não precisam ser modificadas, por não apresentarem erros.

9- Uma máquina produz tela de arame em rolos de 1m de largura. Cada 10m corridos de tela apresentam, em média, 5 defeitos, situados ao acaso em qualquer ponto da tela. Pensa-se reformar essa máquina para permitir que ela produza tela de 1,20 m de largura. Admitindo-se que essa reforma não modifique a taxa de incidência dos defeitos por área unitária da tela, qual a probabilidade de uma amostra de 7,5m de comprimento da nova produção apresentar:

a. 9 defeitos?

b. 10 ou mais defeitos?

10- A probabilidade de um bem sucedido lançamento de foguete é igual a 0,8. Suponha que tentativas de lançamento sejam feitas até que tenham ocorrido 3 lançamentos bem sucedidos. Qual a probabilidade de que exatamente 6 tentativas sejam necessárias? Qual a probabilidade de que menos de 6 tentativas sejam necessárias?

11- Uma loja tem um lote de 10 fechaduras, das quais 5 tem defeito. Se um pessoa comprar 3 fechaduras, qual a probabilidade de encontrar no máximo 1 defeituosa?

1.6 Distribuições de Probabilidades Contínuas

Nesta seção estudaremos apenas duas distribuições de probabilidades para v.a. contínuas, como: uniforme, exponencial e normal.

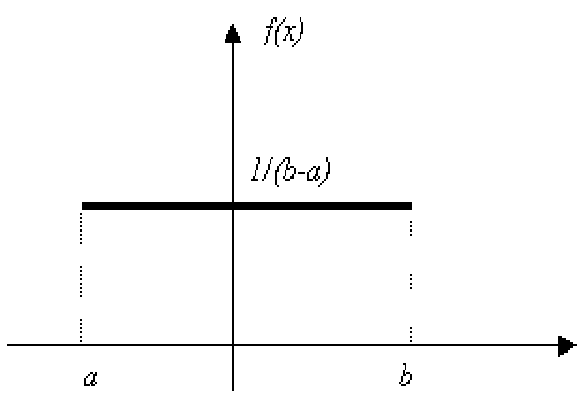
1- Distribuição Uniforme

DEF.1: A v.a.c. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua f.d.p. é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad \text{caso contrário,} \end{cases}$$

NOTAÇÃO: $X \sim U[a, b]$.

O gráfico é dado a seguir



A esperança e variância são dadas por

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

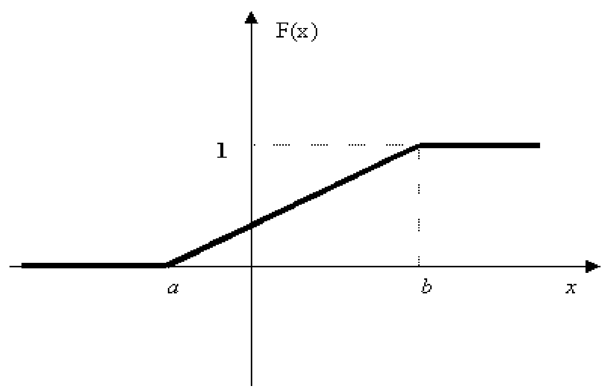
Dem.:

$$E(X) = \int_a^b x f(x)dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

A função de distribuição acumulada é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \\ 1 & , \quad x \geq b, \end{cases}$$

cujo gráfico é dado por



2- Distribuição Exponencial

DEF.9: Uma v.a.c. T tem distribuição exponencial se sua função densidade de probabilidade é da seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & , \quad t \geq 0 \quad e \quad \lambda > 0 \\ 0 & , \quad t < 0, \end{cases}$$

onde λ é o parâmetro da distribuição.

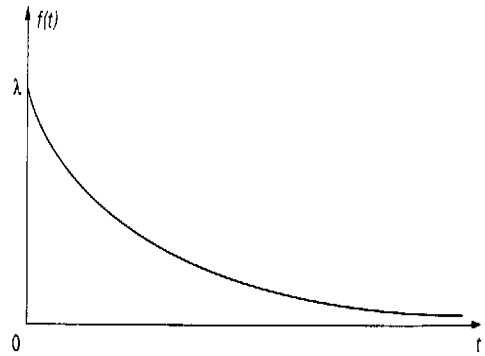
Este é o modelo probabilístico usual para situações tais como tempo de espera numa fila, tempo de vida de um motor, tempo de vida de um material elétrico, etc.

A média e a variância da distribuição exponencial são:

$$E(T) = \mu(t) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad Var(T) = \sigma^2(t) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Pode-se mostrar que, se a v.a.c. T tem distribuição exponencial com parâmetro λ,

$$P(T \geq t) = \exp^{-\lambda t} \qquad \text{e} \qquad P(T < t) = 1 - \exp^{-\lambda t}.$$



Exemplo 10: Os defeitos de uma placa de alumínio seguem uma distribuição Poisson com média de um defeito a cada 400m. Qual a probabilidade de que o intervalo entre dois defeitos consecutivos seja:

a) no mínimo 1000m;

b) entre 800 a 1000m.

Solução: Sabemos que na distribuição Poisson $\mu = \lambda t \Rightarrow 1 = \lambda 400 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{400}$.

a) $P(T \geq 1000) = e^{-\lambda 1000} = e^{-1000/400} = e{-}2,5 = 0.0821$

b) $P(800 \leq T \leq 1000) = P(T \geq 800) - P(T \geq 1000) = e^{-\frac{800}{400}} - e^{-\frac{1000}{400}} = 0.0532.$

Exercício: Se as interrupções de energia elétrica ocorrem segundo uma distribuição de Poisson com média de uma interrupção por mês(4 semanas), qual a probabilidade de que entre duas interrupções consecutivas haja um intervalo de

a) menos de uma semana,

b) entre dez e doze semanas,

3- Distribuição Normal

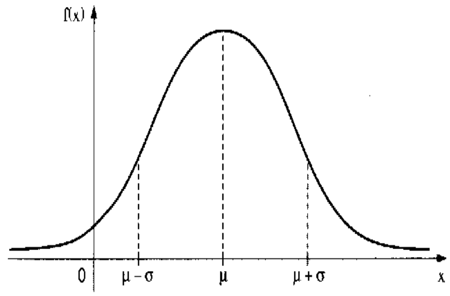
Esta é uma das mais importantes das distribuições de probabilidade. Isto se deve não só aos recursos que ela própria oferece, mas também ao fato de que muitas outras distribuições convergem para ela.

DEF.10: A variável aleatória contínua X terá distribuição normal se sua função densidade de probabilidade for

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

onde μ é a média e σ é o desvio-padrão, sendo que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 \geq 0$.

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Como $f(x)$ depende de dois parâmetros, surge a dificuldade na elaboração de uma tabela de probabilidades uma vez que podemos obter várias combinações de μ e σ^2.

Esse problema pode ser solucionado por meio de uma mudança de variável, obtendo-se a Distribuição Normal Padronizada ou Reduzida. Para isso, é necessário fazer uma mudança de variável.

Seja Z uma variável aletória tal que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

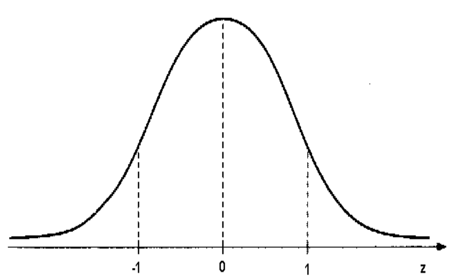
onde X é uma variável com distribuição normal com média μ e variância σ^2.

Assim, a média e a variância da variável Z são:

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0.$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}(Var(X)) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

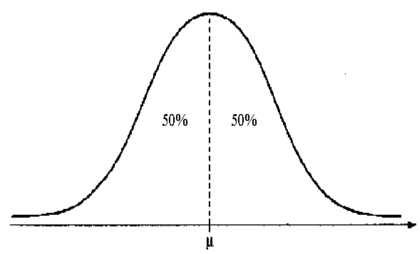
O gráfico é dado por:



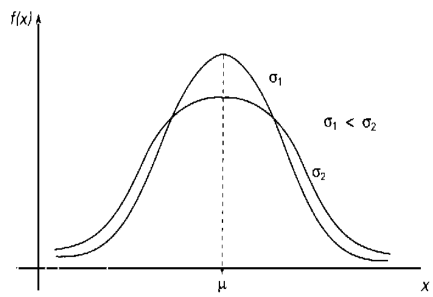
Notação: $Z \sim N(0, 1)$.

Citamos a seguir algumas propriedades da distribuição normal.

Prop.1: A curva é simétrica com relação ao eixo no ponto μ. Ou seja, $P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0,5$.

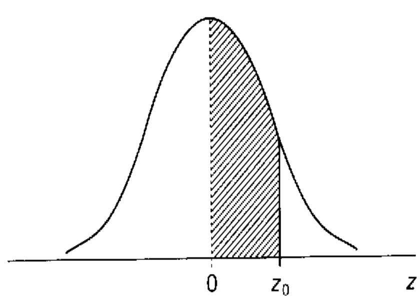


Prop.2: Existem infinitas distribuições normais, basta alterar um dos parâmetros para termos outra distribuição.



O uso da tabela da Distribuição Normal Padronizada

A tabela oferece a área entre 0 e z_0 ou $P(0 \leq z \leq z_0)$.



A simetria em torno de $z = 0$ permite obter a área entre quaisquer valores de z (positios ou negativos).

Exemplo 11: Determinar a área sob a curva normal padronizada à esquerda de 1,72.

Solução: $P(z \leq 1,72) = 0,5 + P(0 \leq z \leq 1,72) = 0,5 + 0,45728 = 0,95728$ ou $95,73\%$

Exemplo 12: Determinar a área sob a curva normal padronizada abaixo de -0,53.

Solução: $P(z \leq -0,53) = P(z \geq 0,53) = 0,5 - P(0 \leq z \leq 0,53) = 0,5 - 0,20194 = 0,29806 \text{ ou } 29,81\%$

Exemplo 13: Determinar a área sob a curva normal padronizada entre 0,70 e 1,35.

Solução: $P(0,7 \leq z \leq 1,35) = P(0 \leq z \leq 1,35) - P(0 \leq z \leq 0,7) = 0,41149 - 0,25804 = 0,15345 \text{ ou } 15,35\%$

Exemplo 14: Determinar a área sob a curva normal padronizada entre -0,6 e 1,3.

Solução: $P(-0,6 \leq z \leq 1,3) = P(0 \leq z \leq 0,6) + P(0 \leq z \leq 1,3) = 0,0,22575 + 0,40320 = 0,62895 \text{ ou } 62,9\%$

Exemplo 15: A duração de um certo componente eletrônico segue uma distribuição normal com média 850 dias e desvio-padrão de 45 dias. Calcular a probabilidade desse componente durar:

a) entre 700 e 1000 dias;

b) mais que 800 dias;

c) menos que 750 dias.

Solução: Temos $X = N(850, (45)^2)$.

$$\begin{aligned} a)P(700 \leq X \leq 1000) &= P\left(\frac{700-850}{45} \leq Z \leq \frac{1000-850}{45}\right) = P(-3,33 \leq Z \leq 3,33) \\ &= 2 \times P(0 \leq Z \leq 3,33) = 2 \times 0,49957 = 0,99914. \end{aligned}$$

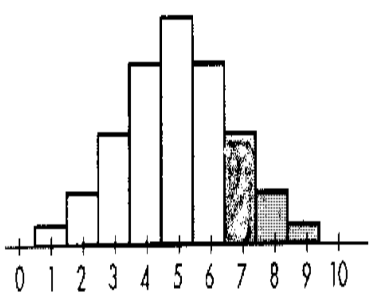
$$\begin{aligned} b)P(X \geq 800) &= P\left(Z \geq \frac{800-850}{45}\right) = P(Z \geq -1,11) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 1,11) \\ &= 0,5 + 0,36650 = 0,86650. \end{aligned}$$

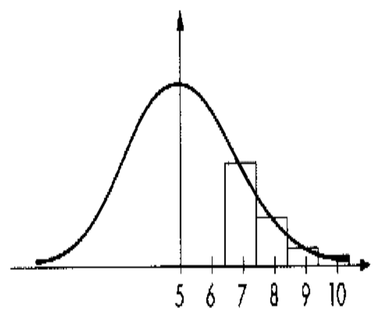
$$\begin{aligned} c)P(X < 750) &= P\left(Z < \frac{750-850}{45}\right) = P(Z < -2,22) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2,22) \\ &= 0,5 - 0,48679 = 0,01321. \end{aligned}$$

1.6.1 Aproximação Normal da Distribuição Binomial

Suponha que a v.a. Y tenha uma distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 0,5$. Queremos calcular $P(Y \geq 7)$. Ou seja,

$$P(Y \geq 7) = P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10).$$





A idéia é aproximar a área hachurada sob a curva normal, à direita de 6,5. Qual curva normal? A curva com média $\mu = np = 10 \times 0,5 = 5$ e variância $\sigma^2 = npq = 10 \times 0,5 \times 0,5 = 2,5$. Assim, temos a v. a. $X \sim N(5; 2,5)$ e

$$P(Y \geq 7) \approx P(X \geq 6,5) = P(Z \geq 0,94) = 0,1736.$$

De maneira geral, as condições para se fazer uma aproximação da distribuição binomial para a normal são:

i) n grande e

ii) p não muito próximo de 0 (zero) ou de 1 (um).

Uma regra prática considera a aprosximação razoável se as duas seguintes inequações são satisfeitas: $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$.

Ao realizarmos uma aproximação de uma variável aleatória discreta, que só assume valores inteiros, para uma variável aleatória contínua, cujos eventos constituem intervalos de números reais, devemos fazer uma correção de continuidade. Consideremos o exemplo seguinte.

Exemplo 16: Considerando o exemplo inicial, consideremos o evento $\{Y = 7\}$. Para expressar este evento em termos de uma v. a. contínua X devemos considerar um intervalo em torno de 7, pois, para variáveis contínuas só faz sentido avaliar probabilidades em intervalos. Assim, o intervalo adequado, neste caso, é contruído pela subtração e soma de meia unidade ao valor 7, ou seja, $\{6,5 < X < 7,5\}$.

Exemplo 17: Joga-se um par de dados 180 vezes. Qual a probabilidade de ocorrência de soma 7:

a) ao menos 25 vezes;

b) entre 33 e 41 vazes;

c) exatamente 30 vezes.

Solução: $n = 180, \quad p = 1/6$ e $q = 5/6 \Rightarrow \mu = 30 \quad$ e $\quad \sigma^2 = 25.$

Y : número de vezes que aparece soma 7.

$X \sim N(30, 25)$

a) $P(Y \geq 25) \approx P(X \geq 24,5) = P(Z \geq -1,1) = P(0 \leq Z \leq 1,1) + 0,5 = 0,86433.$

b) $P(33 \leq Y \leq 41) \approx P(32,5 \leq Y \leq 41,5) = P(0,5 \leq Z \leq 2,3) = P(0 \leq Z \leq 2,3)$
$- P(0 \leq Z \leq 0,5) = 0,488928 - 0,19146 = 0,29782.$

c) $P(Y = 30) \approx P(29,5 \leq X \leq 30,5) = P(-0,1 \leq Z \leq 0,1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 0,1)$
$= 2 \times 0,03983 = 0,07966.$

Exemplo 18: No vestibular de uma universidade calculou-se que o tempo médio de duração da prova é de 70 minutos, com desvio-padrão de 12 minutos. Quanto deve ser a duração da prova de modo a permitir tempo suficiente para que 90% dos vestibulandos terminem a prova?

Solução: X é o tempo de duração da prova. Então,

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= 0,9 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-70}{12}\right) = 0,9 \Rightarrow 0,5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-70}{12}\right) = 0,9 \\ &\Rightarrow P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-70}{12}\right) = 0,4. \end{aligned}$$

Usando a tabela, temos

$$\frac{a-70}{12} = 1,28 \Rightarrow a = 70 + 12 \times 1,28 \Rightarrow a = 85,36.$$

Ou seja, 85 minutos e 36 segundos.

1.7 Exercícios

1- Seja z uma v. a. com distribuição normal prodronizada, encontre:

a.$P(0 < z < 1,44)$ b.$P(-0,85 < z < 0)$

c. $P(-1,48 < z < 2,05)$ d. $P(0,72 < z < 1,89)$

e. $P(z > 1,08)$ f. $P(z > -0,66)$

g. $P(|z| < 0,5)$

2- A duração de um certo componente eletrônico tem média 850 dias e desvio-padrão de 45 dias. Calcular a probabilidade desse componente durar:

a. entre 700 e 1000 dias;

b. mais de 800 dias;

c. menos de 750 dias.

3- Certo produto tem peso médio de 10 g e desvio-padrão 0,5g. É embalado em caixas contendo 120 unidadew que pesam em média 150g e desvio-padrão 8g. Qual a probabilidade de que a caixa cheia pese mais de 1370g ?

4- X é uma v. a. tal que X N(12; 25). Qual a probabilidade de uma observação ao acaso:

a. ser menor do que -3.

b. cair entre -1 e 15.

5- Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuidos com média 65,3 kg e desvio-padrão 5,5 kg. Encontre o n^o de alunos que pesam:

a. entre 60 e 70 kg.

b. mais de 63,2 kg.

6- Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de R$ 10,00 e, se durar menos de 200 horas, existe um custo adicional de R$ 8,00.

a. Qual a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?

b. Qual o custo total do fusível?

Solução: *b) O custo total de cada fusível será:*

$$C_T = \begin{cases} C & se \quad t \geq 200 \\ C + \Delta C \quad , & se \quad t < 200, \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} E(C) &= CP(X \geq 200) + (C + \Delta C)P(X < 200) = \\ &= 10e^{-(1/100)200} + (10 + 8)(1 - e^{-(1/100)200}) = \\ &= 10e^{-1} + 23(1 - e^{-1}) = 1,353 + 15,565 = 16,918. \end{aligned}$$

7- A duração de um certo tipo de pneu, qm quilometros rodados, é uma variável normal com duração média de 60000 km e desvio-padrão de 10000 km.

a. Qual a probabilidade de um pneu escolhido ao acaso durar mais de 75000 km?

b. Qual a probabilidade de um pneu durar entre 63500 e 70000 km?

c. O fabricante deseja fixar uma garantia de quilometragem, de tal forma que, se a duração do pneu for inferior à garantia, o pneu será trocado. De quanto deve ser essa garantia para que somente 1% dos pneus sejam trocados?

Solução:

c) A garantia procurada será o valor x_0*, tal que* $P(x < x_0) = 0,01$.

Com ajuda da tabela da distribuição normal padrão, procuramos o valor de z *que determina a área* $0,5 - 0,01 = 0,49$ *e verificamos que* $z_0 = 2,33$.

Logo,

$$\frac{x_0 - \mu}{\sigma} = -2,33 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -2,33 \times 10000 + 60000 = 36700.$$