ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 1

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

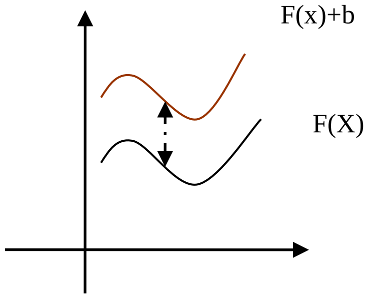
Funções: Alguns modelos básicos: Resumo teórico e exercícios

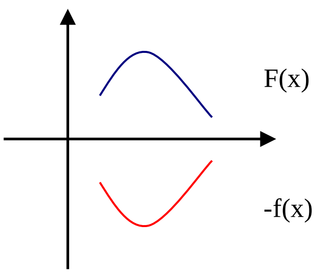
1) Função constante:Formato $f:\Re \to \Re \mid f(x)=k \ (constante)$. O gráfico é uma reta paralela ao eixo x (horizontal) passando pelo ponto (0,k).

2) Função polinômio do primeiro grau ou afim: Formato $f:\Re \to \Re \mid f(x)=a.x+b,\ a\neq 0$. O gráfico é uma reta inclinada em relação aos eixos passando pelos pontos $(0,b)\ e\ (\frac{-b}{a},0)$ que são, respectivamente, as interseções com o eixo y e x. Os parâmetros a e b chamam-se, respectivamente, o coeficiente angular e linear da reta. Conhecendo-se a expressão da função podemos determinar as coordenadas de dois pontos (distintos) e assim traçar o seu gráfico com uma régua. Tendo dois pontos distintos podemos achar a expressão da reta pela determinação dos coeficientes a e b.

Translação vertical: Seja f(x) uma função "básica" e b um número. A função soma: $f(x)+b$ é uma translação para cima de f(x) se b for positivo e translação para baixo se b for negativo.

Reflexão em x: A função oposta: $-f(x)$ é a simétrica de $f(x)$ em relação ao eixo x.

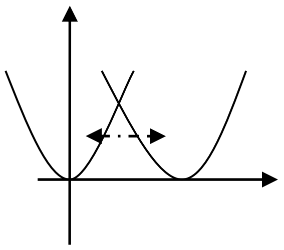


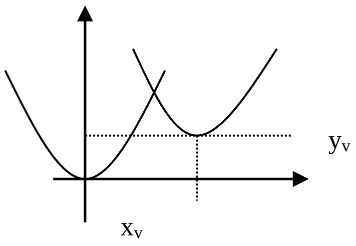


3) Função polinômio do segundo grau ou quadrática: Formato $f:\Re \to \Re \mid f(x)=a.x^2+b.x+c,\ a\neq 0$. O gráfico é uma parábola passando pelos pontos $(0,c),\ (\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})\ e\ (\frac{-b}{a},c)$, sendo $\Delta=b^2-4ac$, com simetria em relação ao ponto meio. Se parâmetro a for negativo a parábola tem concavidade voltada para baixo e se a for positivo concavidade para cima.

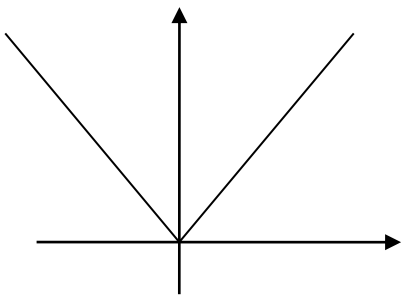
Translação horizontal: A função $f(x-b)$ é um deslocamento horizontal da função $f(x)$ para a direita se b for positivo e para a esquerda se b for negativo.

Na forma canônica da parábola: $f(x) = a.x^2 + b.x + c = a(x - x_v)^2 + y_v$, o termo: $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ é o deslocamento horizontal e a parcela: $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, o deslocamento vertical da parábola $f(x) = a.x^2$. O ponto (x_v, y_v) denomina-se vértice da parábola.





4) **<u>Função valor absoluto ou modular</u>**: Formato $f : \Re \to \Re \mid f(x) = |x| = \begin{cases} x, \; se \; x \geq 0 \\ -x, \; se \; x < 0 \end{cases}$. O gráfico é formado pelas semi-retas: $y = x, \; se \; x \geq 0$, $y = -x, \; se \; x < 0$.



Propriedades:

P1) Se $a > 0$, então $\begin{cases} |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ |a| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \;\; ou \;\; x \geq a \\ |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a \end{cases}$

P2) $|x.y| = |x|.|y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

<u>Observação</u>:
Dadas duas funções f e g com domínios $D_f \; e \; D_g$ é possível gerar novas funções na interseção dos domínios $D = D_f \cap D_g$ com as operações de:

a) Adição: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Exemplo: $y = x + |x|$.
b) Multiplicação: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$. Exemplo: $y = x.|x|$.
c) Divisão: $(f / g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$. Exemplo: $y = \dfrac{|x|}{x}, \;\; x \neq 0$

Exercícios

1) Esboce o gráfico, indicando o domínio, as interseções com os eixos, o conjunto imagem, os coeficientes angular e linear, o intervalo onde a função é positiva, onde é negativa e se é crescente ou decrescente no domínio encontrado:

a) $y = 4 + 2x$ b) $y = 4 - 2x$ c) $y = -6 + \dfrac{3}{2}.x$

2) A locadora A aluga um carro popular ao preço de R$ 30,00 a diária mais R$ 0,20 por quilometro rodado. Já a locadora B o faz por R$ 40,00 a diária mais R$ 0,10 por quilometro rodado. Qual a locadora que você escolheria se pretendesse alugar um carro por um dia e pagar o menos possível?

Resp. até 100 km a locadora A, acima de 100 km a locadora B.

3) Numa câmara frigorífica há dois termômetros, um na escala Celsius (^0C) e outro na escala fahrenheit (^0F).

a) Estabelecer uma relação entre as escalas sabendo que a água congela a $0^0C \; e \; 32^0F$ e ferve a $100^0C \; e \; 212^0F$. Resp. $y^0F = 1{,}8x^0C + 32$.

b) Existe alguma temperatura que tem o mesmo valor numérico em $^0C \; e \; ^0F$? Resp. -40.

4) Esboce o gráfico, indicando o domínio, as interseções com os eixos (se existirem), o conjunto imagem, o eixo de simetria, o vértice da parábola, a concavidade, o intervalo onde é crescente, onde é decrescente, onde é positiva e onde é negativa. Escreva também a expressão da parábola na forma canônica.

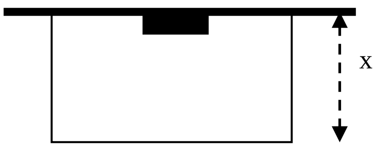
a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -x^2 + x + 2$ c) $y = x^2 - x + 4$

5) Um avião com 120 lugares é fretado para uma excursão. A companhia exige de cada passageiro R$ 900,00 mais uma taxa de R$ 10,00 para cada lugar vago.

a) Estabelecer uma relação entre a receita y do fretamento e o número x de passageiro. Resp. $y = 2.100x - 10.x^2$.

b) Qual o número de passageiro que torna máxima a receita da companhia? Resp. 105 passageiros.

6) Com uma tela de 25 metros deseja-se cercar três lados de um jardim retangular, sendo o quarto lado uma parede existente. Nesta parede há uma porta que dá acesso ao jardim através de uma escada de área 2 m^2. Determinar a maior área que se pode cercar com tal tela. Resp.: área 76,125m^2.



7) Esboce o gráfico, indicando o domínio, as interseções com os eixos (se existirem), o conjunto imagem, o intervalo onde a função é positiva, onde é negativa, onde é crescente, onde decrescente e a expressão da função sem o sinal de valor absoluto.

a) $y = |x-1| + 1$ b) $y = 2 - |x|$

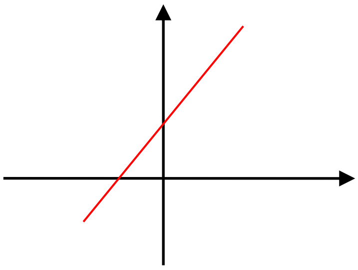
8) Suponha que x dê a distancia do piso de um elevador ao chão do andar térreo de um prédio, com andares superiores (indicado por valores positivos) e andares inferiores (subsolos-indicados por valores negativos). Admita também que seus pés estejam a 9 metros do chão do térreo (isto é, você está no 2^0 andar). Nesse instante a posição do elevador satisfaz a condição: $|x-9| \leq 6$ em relação a você. Dê o intervalo das possíveis posições do elevador. Resp.: $3 \leq x \leq 15$

9) Resolva a equação: $|2x-1| = 3x - 1$.

10) Resolva a inequação: $\left|\frac{5}{2}x - 4\right| \leq 2x - 1$.

Resolução:

1)a)



$D_f = \Re$

$\operatorname{Im} f = \Re$

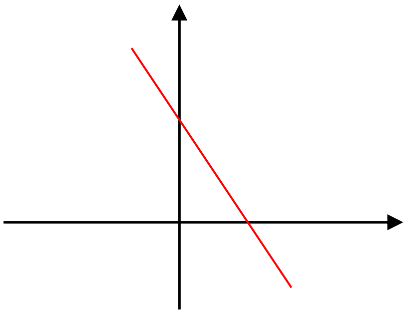
Interseções: $(-2,0);(0,4)$

Coef. Angular $a = 2$ coef. Linear $b = 4$

Sempre crescente

Positiva para $x > -2$, negativa para $x < -2$.

1b)



$D_f = \operatorname{Im} f = \Re$

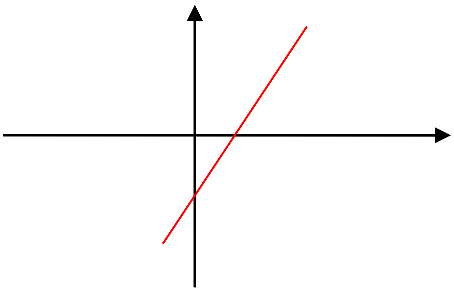
Interseções: $(0,4);(2,0)$

$a = -2;\ b = 4$

Sempre decrescente

Positiva em $x < 2$, negativa em $x > 2$.

1c)



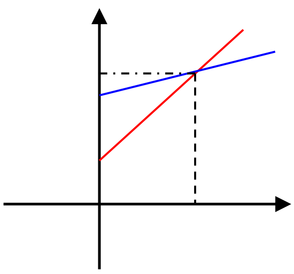
$D_f = \operatorname{Im} f = \Re$

Pontos: $(0,-6);(4,0)$

$a = \dfrac{3}{2}; b = -6$

Crescente, positiva em x>4, negativa em x<4

2)



Custo de A: $y = 30 + 0{,}20.x$ reta com maior inclinação

Custo de B: $y = 40 + 0{,}10.x$ reta com menor inclinação

Resolvendo o sistema formado acima obtemos: $x = 100$.

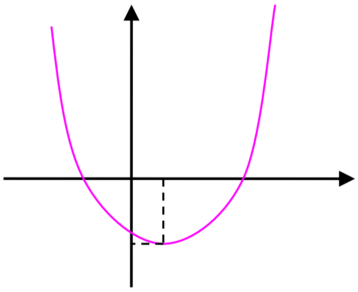
Resp. Até 100 km locadora A: acima de 100 km locadora B.

3)Supondo uma relação polinômio do 1^0 grau entre as temperaturas: $y = a.x + b$. Foram fornecidos dois pontos dessa relação: $(0,32)$ e $(100,\ 212)$. Por substituição na relação suposta vem: $\begin{cases} 32 = a.0 + b \Rightarrow b = 32 \\ 212 = a.100 + b \Rightarrow a = \dfrac{212 - b}{100} = \dfrac{180}{100} = 1{,}8 \end{cases}$ resp. y=1,8.x+32.

b) Pondo x=y em a) vem: $x = 1.8.x + 32 \Rightarrow x = \dfrac{-32}{0.8} = -40$

4) a) $D_f = \Re$

$$y = x^2 - x - 2 \begin{cases} a = 1 > 0 \Rightarrow conc.voltada\, p/cima \\ b = -1 \;\; e \;\; c = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4a.c = 9 > 0 \Rightarrow raizes$$



$$vértice \begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \;(eixo\ de\ simetria) \\ y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = -2{,}25 \;(o\ mínimo\, de\ \ f\,) \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\, f = [-2{,}25, +\infty[$$

$$raizes: x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Cresce no intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ e decresce fora dele.

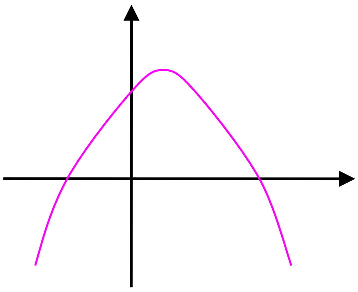
É negativa dentro do intervalo $[-1, 2]$ e positiva fora dele

Inters. Com Y: (0, -2)

$$\boxed{y = (x+1)(x-2) = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4}}$$

b) $D_f = \Re$

$$y = x^2 - x - 2 \begin{cases} a = -1 < 0 \Rightarrow conc.voltada\, p/baixo \\ b = 1 \;\; e \;\; c = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4a.c = 9 > 0 \Rightarrow raizes$$



$$vértice \begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2} \;(eixo\ de\ simetria) \\ y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = 2{,}25 \;(o\ máximo\, de\ \ f\,) \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\, f =]-\infty, 2{,}25]$$

$$raizes: x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

(é uma reflexão em x do anterior)

decresce no intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ e cresce fora dele.

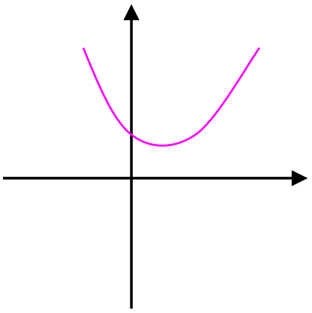
É positiva dentro do intervalo $[-1, 2]$ e negativa fora dele

Inters. Com y: (0,2)

$$\boxed{y = -(x+1)(x-2) = -(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{9}{4}}$$

c) $D_f = \Re$

$$y = x^2 - x + 4 \left\{ \begin{matrix} a = 1 > \Rightarrow cpc \\ b = -1 \; e \; c = 4 \end{matrix} \right\} \Delta = 1 - 16 = -15 < 0 : sem \; raízes$$



$$vértice \left\{ \begin{matrix} x_v = \frac{1}{2} \; (eixo de \; simetria) \\ y_v = \frac{15}{4} \; (valor \; mínimo) \end{matrix} \right.$$

$$\operatorname{Im} f = \left[\frac{15}{4}, +\infty \right[$$

Sempre positiva, decresce em $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$ e cresce fora desse intervalo, intercepta y em (0,4).

$$\boxed{y = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4}}$$

5) Seja x o número de passageiros

$$preço \; por \; passageiro \left\{ \begin{matrix} custo \;\; fixo : R\$ \; 900,0 \\ custo \; variável : R\$ \; 10.(120 - x) \end{matrix} \right.$$

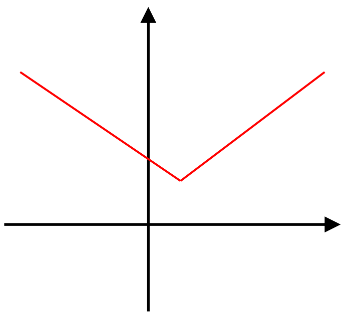
$$receita \; y = [900 + 10(120 - x)].x = 2100.x - 10x^2 = -10(x - 105)^2 + 110250$$

Como a concavidade da parábola é para baixo, o vértice é um ponto de máximo, ou seja, em $x_v = 105 \; passageiros \; e \; y_v = 110250,00 \; reais$ temos um ponto de receita máxima.

6) $$\left. \begin{matrix} 2x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - 2x \\ A = xy - 2 = x.(25 - 2x) - 2 \end{matrix} \right\} A = -2x^2 + 25.x - 2 = -2(x - \frac{25}{4})^2 + \frac{609}{8}$$

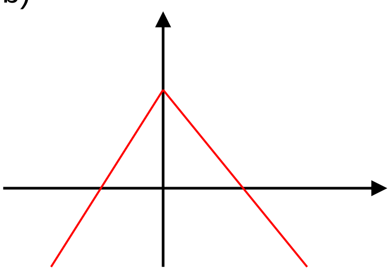
Dimensões do jardim: 6,25m x 12,5m, área livre máxima: 76,125m^2.

7) a)



$y = |x - 1| + 1 = \left\{ \begin{matrix} x, \; se \; x \geq 1 \\ -x + 2, \; se \; x < 1 \end{matrix} \right.$ É positiva em $\Re$, decrescente para x<1 e positiva fora desse intervalo, intercepta o eixo y em (0,2), $\operatorname{Im} f = [1, +\infty[$

b)



$$y = 2 - |x| = \left\{ \begin{matrix} 2 - x, \; se \; x \geq 2 \\ 2 + x, \; se \; x < 0 \end{matrix} \right.$$

$D_f = \Re$, $\operatorname{Im} f =]-\infty, 2]$, $\cap \, eixos : (-2,0), (0,2)(2,0)$

$positiva em \;]-2,2[, negativa fora \;\; desse \; intervalo$

$cresce em \;]-\infty.0[, \; descrece \; fora \;\; desse \; intervalo$

8) $Para \begin{cases} x-9 \geq 0 \Rightarrow x-9 \leq 6 \Rightarrow x \leq 15 \\ x-9 < 0 \Rightarrow -(x-9) \leq 6 \Rightarrow x-9 \geq -6 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$.

9)CONDIÇÕES: $\begin{cases} |2x-1| = 3x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{3} \\ 2x-1 = 3x-1 \Rightarrow x = 0 \\ -(2x-1) = 3x-1 \Rightarrow x = \dfrac{2}{5} \end{cases}$ resp. $x = \dfrac{2}{5}$

10)condições: $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2} \\ -(2x-1) \leq \dfrac{5}{2}x - 2 \leq 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2}x - 2 \leq 2x-1 \Rightarrow x \leq 2 \\ \dfrac{5}{2}x - 2 \geq -2x+1 \Rightarrow x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$ resp. $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

Extras:

Determine um domínio, o mais amplo possível, no qual f(x) seja invertível, determine f(x) e $f^{-1}(x)$ e esboce os gráficos de , no mesmo plano cartesiano, indicando domínio e imagem.

a) f (x) = 2x – 3
b) f(x) = 5 – 3x
c) f(x) = x^2 – 1
c) f(x) = - x^2 + 5x – 6
d) f(x) = x^2 + 2x - 3