ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 1

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

Funções: Resumo teórico e exercícios

1. **Definição** – Sejam A e B subconjuntos dos reais, não vazios. Chama-se função de A em B, indica-se por $f: A \to B$, a toda lei ou correspondência f que associa cada elemento x de A um único valor y de B.

Define-se ainda:

2. **Domínio** $A = D_f$: quando não aparecer indicado supõe-se que seja o mais amplo do subconjunto dos reais onde f(x) tenha sentido ou existência. Como $D_f \subseteq \Re$, diz-se f é uma função de uma variável real, sendo x a variável independente.
3. **Contradomínio** $B = CD_f$: quando não indicado será, por convenção, sempre igual $\Re$. Como $CD_f \subseteq \Re$, diz-se f é uma função real, sendo y a variável dependente.

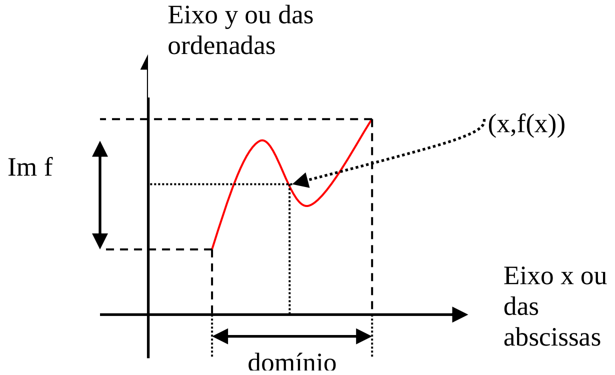
Exemplos: No nosso dia a dia encontramos muitos exemplos de funções

I) A área y de quadrado é função da medida x de seus lados: $y = f(x) = x^2$.

II) A área y de uma circunferência é função da medida x de seu raio: $y = f(x) = \pi.x^2$.

III) O volume y de um cubo é função da medida x de suas arestas: $y = f(x) = x^3$.

4. **Conjunto-Imagem**: É o conjunto dos valores y que estão associados a algum elemento x do domínio da função. $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re \mid y = f(x),\ para\ x \in D_f\}$.
5. **Gráfico de uma função**: É o seguinte conjunto: $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ para\ x \in D_f\}$. Um modo útil de utilizá-lo é representando-o no plano cartesiano.



Observações:

i) Uma curva no plano é o gráfico de uma função de x se, e somente se, toda reta paralela ao eixo y o intercepta em no máximo um ponto.

ii) O conjunto imagem de f é a projeção de seu gráfico no eixo y, enquanto que o domínio de f é a projeção do mesmo gráfico no eixo x.

iii) No momento não dispomos de técnica eficaz para traçar um gráfico. Usaremos a técnica rudimentar de marcar uma seqüência de pontos. As interseções com os eixos coordenados, quando existirem, estarão eles.

iv) Simetria - Descobrir se uma função possui algum tipo de simetria ajuda muito na hora traçar o gráfico. Diz-se que f tem **simetria par** quando $f(-x) = f(x)$,isto é, é simétrica em relação ao eixo y; tem **simetria ímpar** quando $f(-x) = -f(x)$, isto é, é simétrica em relação à origem do sistema de coordenadas. Quando definida em toda a reta.

Exercícios:

1) Dê o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x.(x-2)}$ Resp.: $\left[-\tfrac{1}{2},0\right[\cup \left]0,2\right[\cup \left[2,+\infty\right[$

b) $f(x) = \sqrt{2 - \dfrac{4}{x}}$ Resp. : $\left]-\infty,0\right[\cup \left[2,+\infty\right[$

2) O conjunto imagem de $f : \Re \to \Re \mid y = x^2$ é .... Resp.: $\operatorname{Im} f = [0,+\infty[$.

3) Esboce o gráfico das funções $f : \Re \to \Re \mid y = f(x)$ sendo

a) $f(x) = x$ (função identidade ou a primeira bissetriz)

b) $f(x) = x^2$ (parábola simétrica em relação ao eixo y)

c) $f(x) = \begin{cases} x \ se \ x \geq 1 \\ x^2 \ se \ x < 1 \end{cases}$

4) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

a) Mostre que $f(-x) = f(x)$

b) Calcule $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Resp.: $\dfrac{2x+h}{\left[(x+h)^2+1\right](x^2+1)}$

5) Deseja-se construir uma caixa reta de base quadrada de lado x e altura y (x e y em dm) com um volume fixado em 12 dm^3. A base da caixa custa R\$ 2,00 por dm^2 para se construída, a tampa e as demais faces custam R\$ 1,00 por dm^2, cada uma.

a) escreva o custo total C para a confecção da caixa em função do lado x da base. Resp. $C = 3x^2 + \dfrac{48}{x}$

b) quanto custaria uma caixa cuja base tivesse o lado da base igual a 2 dm? Resp. R\$ 36,00.

Resolução:

1) a) $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x.(x-2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{cases}$

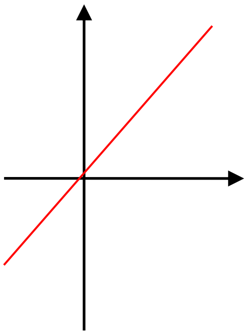
b) $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x-4}{x} \geq 0 \end{cases}$.

O quociente acima será nulo quando $x = 2$ e positivo quando o numerador e denominador apresentarem o mesmo sinal: ($\frac{+}{+};\frac{-}{-}$). Isto vai ocorrer para $x > 2$ (ambos positivos) ou para $x < 0$ (ambos negativos).

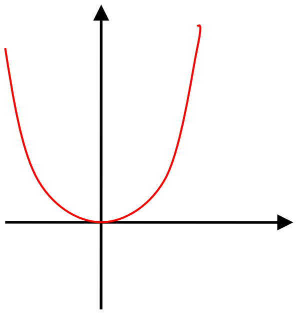
2) $y = x^2 = x.x \Rightarrow \begin{cases} se\ x \geq 0,\ então\ y = x^2 \geq 0 \\ se\ x < 0,\ então\ y = x^2 > 0 \end{cases}$. Portanto sempre $y \geq 0$.

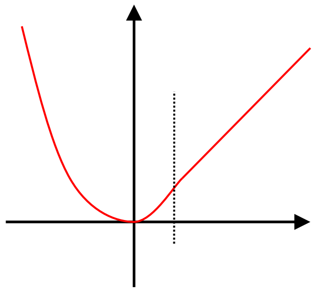
3)

(x,y=x)
(1,1)
(0,0)
(-1,-1)



(x,y=x^2)
(-2,4)
(-1,1)
(0,0)
(1,1)
(2,4)



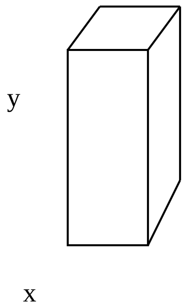


4) a) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$

b)) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{(x+h)^2}{(x+h)^2 + 1} - \frac{x^2}{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{(x+h)^2(x^2+1) - x^2[(x+h)^2 + 1]}{[(x+h)^2 + 1](x^2+1)}\right) =$.

$= \frac{2x + h}{[(x+h)^2 + 1](x^2 + 1)}$

5) a)



Custo da base: $2.x^2$
Custo da tampa: $1.x^2$
Custo das laterais: $1.x.y4 = 4x.y$
Volume: $12 = x^2.y \Rightarrow y = \frac{12}{x^2}$
Custo total $C = 3x^2 + \frac{48}{x}$
b) $C(2) = 3.4 + {}^{48}\!/_{2} = 36$

5)