Primeira Prova de Álgebra Linear II - (2º/2021) - T02 - Profa Rosane

24 de março de 2022

GABARITO COMENTADO

Questão 1: **(2.5 pontos)** Considere as retas em $\mathbf{R}^2$

$$r_1: \left\{ \begin{array}{l} x(t)=3t+2 \\ y(t)=-4t+8 \end{array}, \quad t\in\mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad r_2: \ 3x-4y=24$$

1.1) Encontre o ponto de interseção das retas. Encontre o ângulo entre elas.

Nesta questão a reta r_1 é dada por equações paramétricas e da equação temos que o vetor $v_{r1}=(3,-4)$ é paralelo a ela.

***Para achar o ponto de interseção** entre as retas podemos agir de duas formas:*

- *ou substituímos os valores de x e y de r_1 na equação de r_2, achando o valor de t que gerará o ponto:*
  ***Solução 1:** 3.(3t+2)-4(-4t+8)=24 => 25t = 50 => t=2 e o ponto P=(x(2),y(2))=(8,0)*
- *ou encontramos equação cartesiana para r_1 e resolvemos um sistema:*
  ***Solução 2:** Eliminamos o parâmetro na equação de r_1 encontrando t = (x-2)/3 = (y-8)/(-4). Multiplicamos em cruz*

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-8}{-4} \quad \Rightarrow 4x + 3y = 32 \ (\text{eq. cartesiana de } r_1)$$

Daí resolvemos o sistema : $\begin{array}{l} 4x+3y=32 \\ 3x-4y=24 \end{array}$ *e achamos P=(8,0)*

***Para encontrar o ângulo entre as retas,** precisamos encontrar o ângulo entre vetores paralelos a r_1 e a r_2 e depois estabelecemos um ângulo entre 0 e π/2:*

***Solução:** Estabelecemos dois pontos de r_2 um pode ser P=(8,0) o outro pode ser Q=(0,-6) e daí*

v_{r2} =PQ=Q-P=(-8,-6) é paralelo a r_2.

O ângulo entre *$v_{r1}=(3,-4)$ e $v_{r2}=(-8,-6)$ tem cosseno dado por*

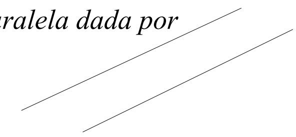
$$\cos\theta=\frac{\langle v_{r1}, v_{r2}\rangle}{\|v_{r1}\|\|v_{r2}\|} \quad ,$$

mas $< v_{r1}, v_{r2} >$=3.(-8)+(-4).(-6)=0 e, portanto, o ângulo entre os vetores e as retas é π/2.

1.2) Encontre as equações paramétricas de uma **reta parela a *3x-4y=24*** e calcule a distância entre elas.

***Solução:** **Uma reta r_3 paralela a r_2** deve ser paralela também ao vetor v_{r2} =(-8,-6) e não deve ter ponto em comum. Como a origem (0,0) não está em r_2, podemos considerar a reta paralela dada por*

$$r_3: \left\{ \begin{array}{l} x(t)=-8t \\ y(t)=-6t \end{array} \right\}$$



***A distância entre duas retas paralelas** é a distância entre um ponto de uma delas até a outra. Assim vamos calcular a distância entre a origem (0,0), que está em r_3, até a reta r_2 : 3x-4y=24. Do formulário disponibilizado na prova, sabemos*

Formulário baseado no ponto $P=(x_0, y_0)$ e na reta r : *ax+by=c*

$$d((x_0, y_0), r)=\frac{|c-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d((0,0), r_2)=\frac{|24-3.0-(-4).0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{24}{5}$$

Questão 2: **(2.0 pontos)** Considere as retas em $\mathbb{R}^3$

$$r_1=\begin{Bmatrix} x(t)=t+3 \\ y(t)=2t-1 \\ z=3t+2 \end{Bmatrix}, t\in\mathbb{R}, \quad e \quad r_2=\begin{Bmatrix} x(s)=s-1 \\ y(s)=3s-12 \\ z(s)=-s+2 \end{Bmatrix}, s\in\mathbb{R}.$$

2.1) As retas são paralelas ou reversas ou se interceptam? Por que?

Solução: ***Vamos verificar se as retas têm ponto em comum***. *Para tal precisamos encontrar valores de t e de s tais que*

$$\begin{gathered} t+3=s-1 \\ 2t-1=3s-12 \\ 3t+2=-s+2 \end{gathered}$$

resolvendo este sistema encontramos t = -1 e s=3 e o ponto de interseção P=(2,-3,-1). Portanto, as retas se interceptam neste ponto.

2.2) Existe um plano Π com as duas retas. Encontre as equações cartesiana e as paramétricas deste plano.

Solução: *Como o ponto P=(2,-3,-1) está nas duas retas, consideramos o ponto A=(3,-1,2) de r_1 e B=(-1,-12,2) de r_2 . Montamos as **equações paramétricas de Π** utilizando os vetores do AP=(-1,-2,-3) e BP=(3,9,-3), que estão no plano e não são paralelos:*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x(\mu,\lambda)=2-\mu+3\lambda} \\ \boldsymbol{y(\mu,\lambda)=-3-2\mu+9\lambda} \\ \boldsymbol{z(\mu,\lambda)=-1-3\mu-3\lambda} \end{gathered} .$$

Para a equação cartesiana de Π *calculamos o produto vetorial AP* x *BP = (33,-12,-3), que é múltiplo do vetor que consideraremos normal a Π:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (6+27,-(3+9),-9+6)$$

$$\eta_{\Pi} = (11,-4,-1)$$

Assim a equação cartesiana de Π tem a forma 11x-4y-z=d e substituindo o ponto P=(2,-3,-1) encontramos o valor de d dado por

$$d=11.(2)-4.(-3)-(-1)=22+12+1=35$$

Π : 11x-4y-z=35

2.3) Encontre a área de um paralelogramo cujas arestas sejam vetores paralelos às retas r_1 e r_2 .

Solução: *Se encolhermos por arestas os vetores AP e BP cujo produto vetorial é AP* x *BP =(33,-12,-3), então a área deste paralelogramo será || AP* x *BP||=* $\sqrt{(33)^2+(-12)^2+(-3)^2}=\sqrt{1242}$

Questão 3: **(2.5 pontos)** Utilize a eliminação de Gauss no sistema abaixo e determine o que devemos exigir dos valores de ***a,k e d*** para que :

$$\begin{Bmatrix} 2x-y-z=-2 \\ -x \quad + \ z \ =1 \\ x+y-2z=-1 \\ \boldsymbol{a}x+\boldsymbol{k}y-\boldsymbol{k}z=\boldsymbol{d} \end{Bmatrix}$$

1. Não exista solução;
2. Para que a solução seja um ponto;
3. Para que a solução seja uma reta.
4. No sistema escalonado, faça ***k=1, a=0 e d=0*** e encontre o conjunto solução

Solução: *Na resolução do sistema por eliminação de Gauss consideramos a matriz ampliada*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & \vdots & -2 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ a & k & -k & \vdots & d \end{bmatrix} \quad \textbf{L1} \leftrightarrow \textbf{L2} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ a & k & -k & \vdots & d \end{bmatrix} \quad \textbf{L2} \leftarrow \textbf{L2+2L1 ; L3} \leftarrow \textbf{L3+L1 e L4} \leftarrow \textbf{L4 +aL1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & k & a-k & \vdots & a+d \end{bmatrix} \quad \textbf{L3} \leftarrow \textbf{L3+L2 e L4} \leftarrow \textbf{L4+kL2} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \vdots & a+d \end{bmatrix} \quad \textbf{L4} \leftrightarrow \textbf{L3}$$

<u>O processo acaba com uma matriz de coeficientes na forma escalonada:</u>

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \vdots & a+d \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

- **3.1 *O sistema não terá solução se a=0 e d≠0;***
- **3.2 *O sistema terá solução única, que será um ponto , se a≠0;***
- **3.3 *O sistema terá infinitas soluções se a=0 e d=0. Como haverá apenas uma variável livre o conjunto será uma reta.***
- **3.4 *Façamos no sistema escalonado k=1, a=0 e d=0 :***

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$ **e vamos resolver o sistema** $\begin{matrix} -x+z=1 \\ -y+z=0 \end{matrix}$ **. Consideramos z a variável livre e teremos y=z e x=z-1 .**

Conjunto solução: $S=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \forall t \in R \right\}$ **uma reta!!!!**

<u>Questão 4:</u> (3 pontos)

4.1) Resolva **simultaneamente** os sistemas, **por eliminação de Gauss, até** chegar a **forma escada reduzida por linha** da matriz A de coeficientes:

$$(1) \left\{ \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \qquad (2) \left\{ \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 \end{matrix} \right\}$$

<u>Solução:</u> *Para a resolução simultânea consideramos a seguinte matriz aumentada*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & \vdots 0 \\ 3 & 4 & \vdots & 0 & \vdots 1 \end{bmatrix} \quad L2 \leftarrow L2\text{-}3L1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & \vdots 0 \\ 0 & -2 & \vdots & -3 & \vdots 1 \end{bmatrix} \quad L1 \leftarrow L1+L2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -2 & \vdots 1 \\ 0 & -2 & \vdots & -3 & \vdots 1 \end{bmatrix}$$

e para concluir com a forma escada reduxida por linha da matriz de coeficientes façamos L2← (-1/2)L2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & -2 & \vdots 1 \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{3}{2} & \vdots -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4.2) A matriz de coeficientes A dos sistema (1) e (2) tem inversa? Por que? Caso exista A^{-1}, que matriz ela é ?

<u>Solução:</u> *Sim, A tem inversa, pois conseguimos chegar até a matriz identidade com a sua forma escada reduzida por linha. Pelos cálculos realizados a inversa é*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} .$$