Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - A

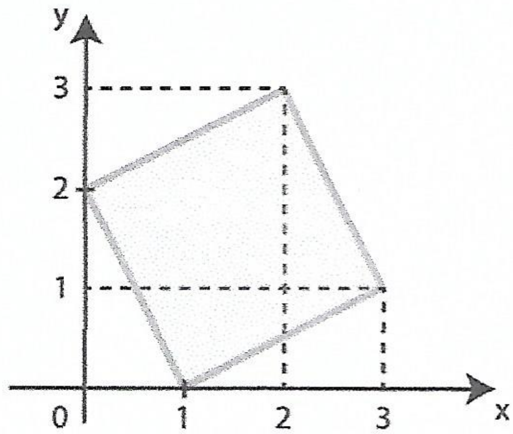
Primeira Prova de Cálculo 2

Nome: ____

____

Q1. (3pts) Calcule o volume do sólido de revolução (basta armar as integrais) obtido ao girarmos a região quadrada destacada na figura em torno de:

a) reta $x = 5$.
b) reta $y = -3$.



____

Q2. (2pts) Faça um esboço (a) da região do primeiro quadrante limitada pelas 5 barreiras abaixo. Basta armar as integrais. Calcule o volume do sólido de revolução obtido ao girarmos a região:

- reta $x = 0$ entre (0,1) e (0,2).
- reta $y = 2$ entre (0,2) e (2,2).
- reta $x = 2$ entre (2,2) e (2,0).
- reta $y = 0$ entre (2,0) e (1,0).
- curva $x^2 + y^2 = 1$ entre (1,0) e (0,1).

em torno de:

b) reta $x = 5$.
c) eixo x.

____

Q3. (3pts) Resolva o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

____

Q4. (2pts) Resolva a equação diferencial abaixo:

$$(xy + x^3y - xy^2 + x^3y^3)dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - yx^2 + \frac{3x^4y^2}{4}\right)dy = 0$$

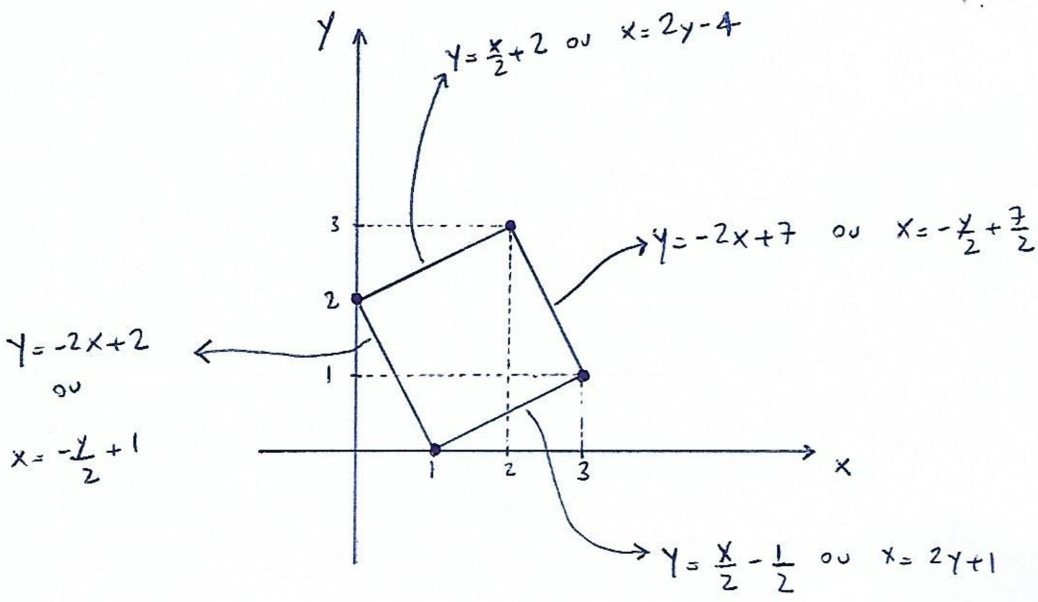
____

Fórmula para F. Integrante: $e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$ ou $e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$

Boa prova!

$\boxed{\text{PROVA 1 - A}}$

Q1 $\boxed{\text{Solução}}$



a)

$$V = \pi \int_0^1 \left(-\frac{y}{2} + 1 - 5\right)^2 dy - \pi \int_0^1 (2y + 1 - 5)^2 dy$$

$$+ \pi \int_1^2 \left(-\frac{y}{2} + 1 - 5\right)^2 dy - \pi \int_1^2 \left(-\frac{y}{2} + \frac{7}{2} - 5\right)^2 dy$$

$$+ \pi \int_2^3 (2y - 4 - 5)^2 dy - \pi \int_2^3 \left(-\frac{y}{2} + \frac{7}{2} - 5\right)^2 dy$$

b)

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + 2 - (-3)\right)^2 dx - \pi \int_0^1 (-2x + 2 - (-3))^2 dx$$

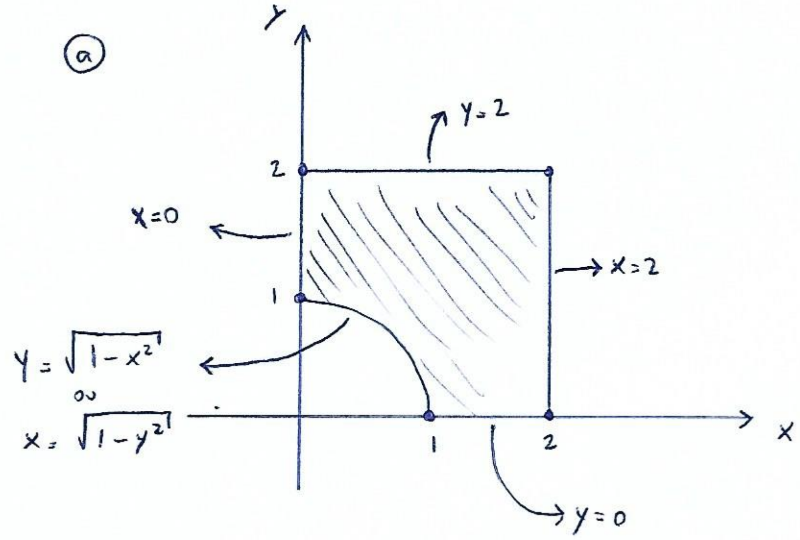
$$+ \pi \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + 2 - (-3)\right)^2 dx - \pi \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - (-3)\right)^2 dx$$

$$+ \pi \int_2^3 (-2x + 7 - (-3))^2 dx - \pi \int_2^3 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - (-3)\right)^2 dx \quad \blacksquare$$

Q2

Solução

ⓐ



ⓑ $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{1-y^2} - 5)^2 dy - \pi \int_0^1 (2-5)^2 dy$

$+ \pi \int_1^2 (0-5)^2 dy - \pi \int_1^2 (2-5)^2 dy$

ⓒ $V = \pi \int_0^1 (2)^2 dx - \pi \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx + \pi \int_1^2 (2)^2 dx$ ■

Q3 $(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

Solução

$y = xt$ e $dy = t\,dx + x\,dt$

$(x^2 + x^2t^2)dx - x^2t\,(t\,dx + x\,dt) = 0$

$x^2dx + \cancel{x^2t^2dx} - \cancel{x^2t^2dx} - x^3t\,dt = 0 \quad (\div x^2)$

$dx = xt\,dt$

$\frac{1}{x}dx = t\,dt \quad \rightarrow \quad \ln x = \frac{t^2}{2} + c$

$$\boxed{\ln x = \frac{y^2}{2x^2} + c}$$

SE $x=1$ E $y=2$, TEMOS:

$$\cancel{\ln 1} = \frac{4}{2.1} + C \rightarrow \boxed{C=-2}$$

0

SOLUÇÃO: $\boxed{\ln x = \frac{y^2}{2x^2} - 2}$ ■

Q4 $(xy + x^3y - xy^2 + x^3y^3)\,dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - yx^2 + \frac{3x^4y^2}{4}\right)dy = 0$

SOLUÇÃO

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + x^3 - 2xy + 3x^3y^2$$

$$U = \int M\,dx$$

$$U = \int (xy + x^3y - xy^2 + x^3y^3)\,dx$$

$$U = \frac{x^2}{2}y + \frac{x^4}{4}y - \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{x^4}{4}y^3 + \phi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - x^2y + \frac{3x^4y^2}{4} + \phi'(y)$$

$$\parallel$$

$$N = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - x^2y + \frac{3x^4y^2}{4} \rightarrow \phi'(y) = 0 \rightarrow \boxed{\phi(y) = k}$$

SOLUÇÃO: $\boxed{\frac{x^2y}{2} + \frac{x^4y}{4} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4y^3}{4} = C}$ ■