ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 2

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

FUNÇÃO COMPOSTA E INVERSA – Teoria e Exercícios

Função composta
Dadas duas funções f e g, a composta de g com f, indicada por gof, é definida por $gof(x) = g[f(x)]$. A função f é a função interna e g a externa na composição.
O domínio de gof é formado pelos pontos $x \in D_f$ tais que $\operatorname{Im} f \subseteq D_g$.
De modo semelhante define-se a composição na outra ordem: $fog(x) = f[g(x)]$.

Exemplos:

1) Dadas $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. A composta g0f é: $g[f(x)] = g[x^2 - 1] = \sqrt{x^2 - 1}$.
Observe que o domínio natural de f é $\Re$, de g é $\{x \mid x \geq 0\}$ e de gof é $\{x \mid x \leq -1 \; ou \; x \geq 1\}$. Como $D_{gof} \subset D_f$ e as imagens desses valores por f estão em D_g, ele é também o domínio da composição.

2) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x^4 - 1}$. A composta gof é: $g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = \sqrt{x^2 - 1}$.
Observe que o domínio natural de f é $\{x \mid x \geq 0\}$ e de g é $\{x \mid x \leq -1 \; ou \; x \geq 1\}$. Qual seria então o domínio da composição visto que a expressão da composta é a mesma do exemplo anterior? A resposta seria: $\{x \mid x \geq 1\}$ pois só para esses valores $\operatorname{Im} f \subset D_g$.

Exercícios:

1) Sejam $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$. Encontre: $gof \; e \; fof$.

2) Dadas as funções: $f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \; se \; x < 0 \; ou \; x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 2x \; se \; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \; se \; x < 0 \; ou \; x > 1 \end{cases}$. Encontre fog.

3) Determinar $g(x)$, nos seguintes casos:
a) $f[g(x)] = x \; e \; f(x) = 2x + 3$ b) $g[f(x)] = 1 - 2x \; e \; f(x) = x + 1$

Resoluções:
I) Funções compostas

1) $g(f(x)) = \sqrt{2x - 3 + 1} = \sqrt{2x - 2}$
$f(f(x)) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$

2) $$f(g(x)) = \begin{cases} 1 \; se \; x < 0 \\ 4x^2 \; se \; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, \; se \; \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1, \; se \, x > 1 \end{cases}$$

3) a) $f(g(x)) = 2.g(x) + 3 = x \Rightarrow g(x) = \dfrac{x-3}{2}$

b) $g(x) = a.x + b \ e \ g\left(f(x)\right) = af(x) + b = a(x+1) + b = -2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a + b = 1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$

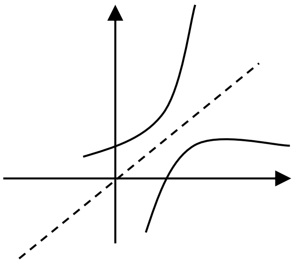
<u>Função Inversa</u>

Seja $f : A \to R$ uma função injetora, isto é, $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Faça $B = \operatorname{Im} f$. A função $g : B \to A$ é a inversa de f e vice-versa se, e somente se, $fog(x) = x, \forall x \in B$ e $gof(x) = x, \forall x \in A$. Indica-se a inversa por f^{-1}.

Propriedades:

P1) f é invertível se, e somente se, toda reta paralela ao eixo x interceptar seu gráfico no máximo em um ponto.

P2) Os gráficos de f e de sua inversa g são simétricos em relação à primeira bissetriz.



Simbolicamente:
$y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.
Nem toda função admite inversa. Porém podemos fazer restrição conveniente no domínio para que a função "restrita" admita inversa.

Exemplo: A função $f(x) = (x-1)^2$ não admite inversa em $\Re$. Mas para $x \geq 1$, tem a seguinte inversa $x = 1 + \sqrt{y},\ y \geq 0$ e para $x \leq 1$, a seguinte inversa $x = 1 - \sqrt{y},\ y \geq 0$. O usual é trocar x e y na fórmula da inversa.

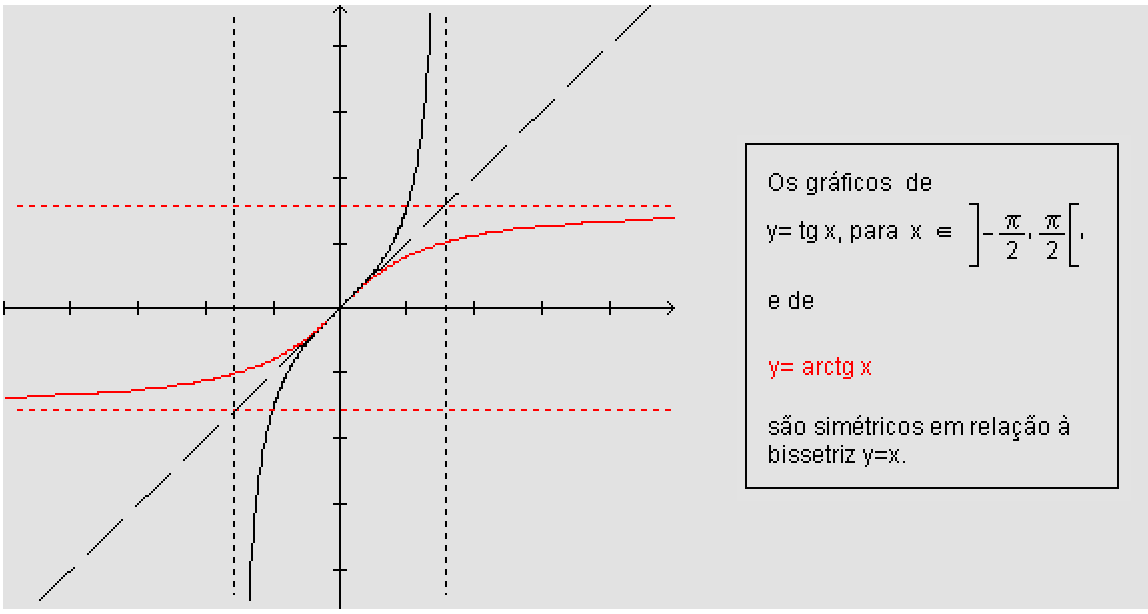
Alguns exemplos de funções definidas por inversão:

1) $y = arcsenx \Leftrightarrow seny = x$; $x \in [-1,1]$ e $y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

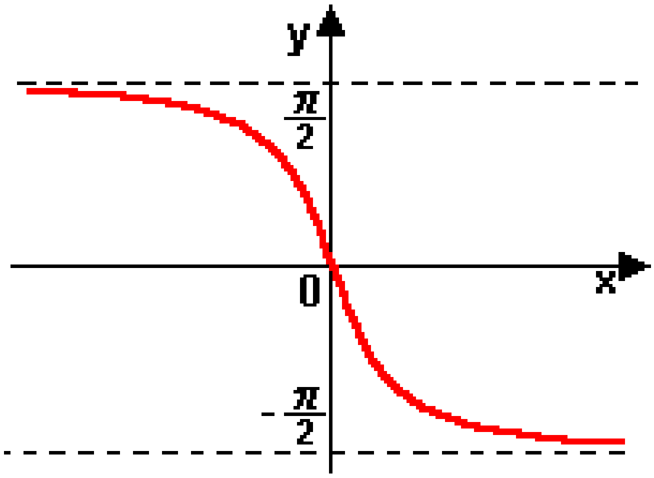
2) $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$; $x \in \Re$ e $y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) $y = arc\cot x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$; $y \in \left]0, \pi\right[$.

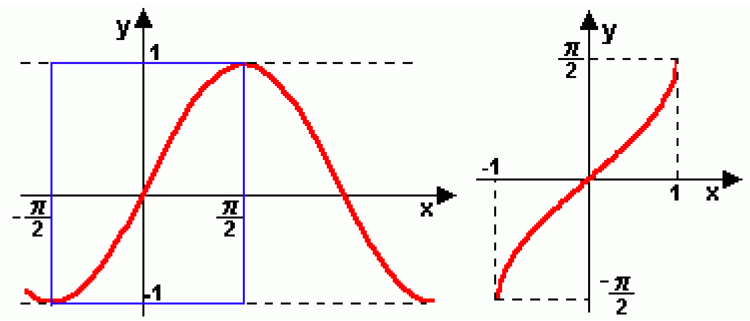
4) $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$; $x \in \left]0, +\infty\right[$ e $y \in \Re$.



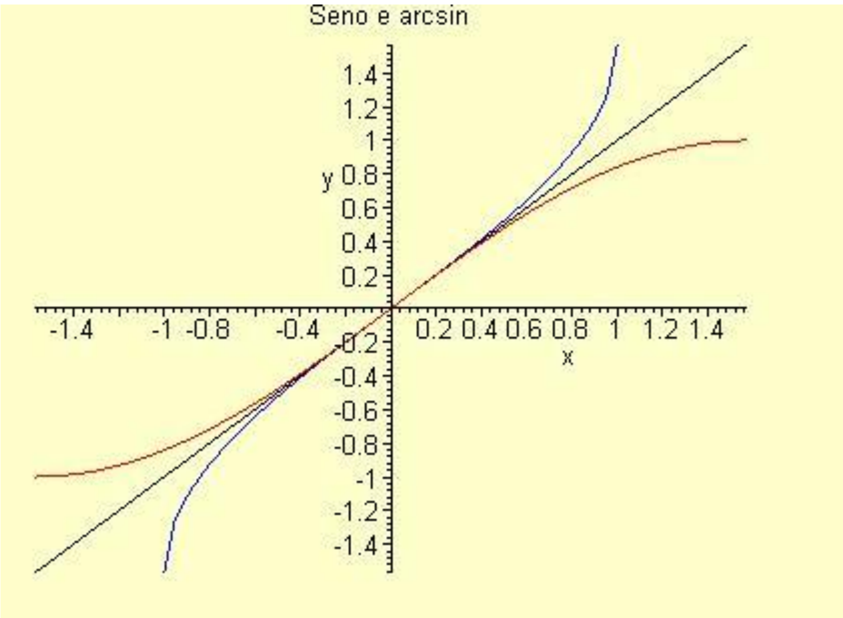
Não confundir !

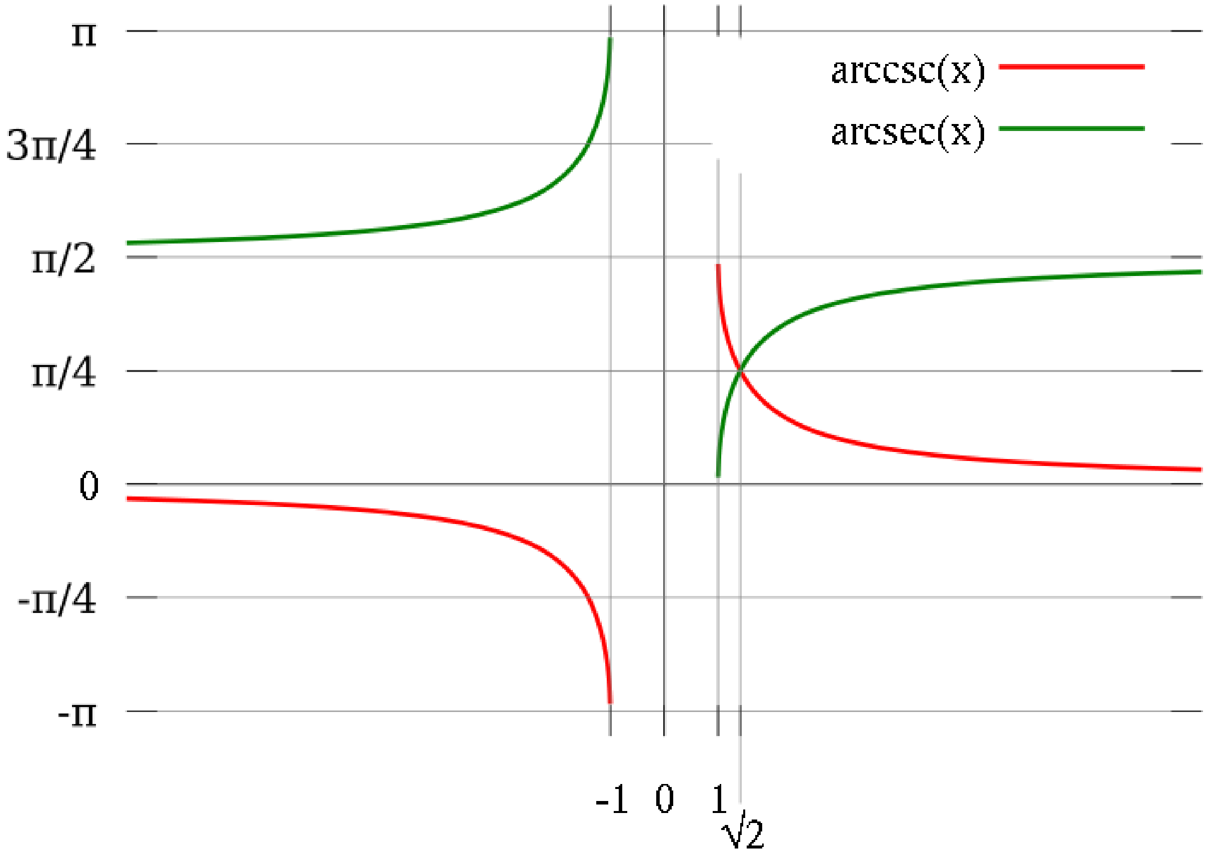


Arc cotg



Seno / Arcsen/Arccos





Exercícios

1) Dê o domínio de

   a) $y = arcsen(\ln x)$ b) $y = arc\sec x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) Seja $f(x) = \arctan x$ .Mostre que: $f\left(\frac{x+y}{1-x.y}\right) = f(x) + f(y)$.

3) Determine um domínio ("mais amplo possível"), no qual $f(x) = x^2 + 2x + 2$ seja invertível e ache essa inversa.

Resoluções:

II) Funções inversas

1) a) $-1 \le \ln x \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{e} \le x \le e \Rightarrow D_f = \left[e^{-1}, e\right]$

b) $x \ne 0,\ -1 \le \dfrac{1}{x} \le 1 \Rightarrow x \ge 1\ ou\ x \le -1 \Rightarrow D_f = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$

2) $\begin{cases} f(x) = \arctan x \Rightarrow x = \tan f(x) \\ f(y) = \arctan y \Rightarrow y = \tan f(y) \end{cases}$

$$\frac{x+y}{1-x.y} = \frac{\tan f(x) + \tan f(y}{1-\tan f(x).\tan f(y)} = \tan[f(x)+f(y)] \Rightarrow f(x)+f(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x.y}\right)$$

3) $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 = y$

O gráfico dessa parábola é simétrico em relação à reta vertical: $x = -1$. Para $x \ge -1$ tem um ramo invertível.

A inversa é: $x = -1 + \sqrt{y-1}$. Logo $g(x) = -1 + \sqrt{x-1}$

Extras:

1) Determinar g(x) nos seguintes casos:
   a) h[g(x)] = 2 – 2x, f(x) = 3x + 1 e f[h(x)] = 2x – 5 Resp. g(x) = -3x + 6
   b) f(x) = 7 – 2x , f(g(x)) = 7x + 5 Resp. g(x) = 1 – 7x/2
   c) f(x) = 7 – 2x , g(f(x)) = 7x + 5 Resp. g(x) = 19 – 2x
   d) f(x) = e^x , f(g(x)) = x^2 + 1 Resp. g(x) = ln (x^2 + 1)
   e) f(x) = ln x, com x >0, g(f(x)) = 5x Resp. g(x) = $5e^x$