Álgebra Linear II

(Aula 1)

Tópico 1: A Geometria do R^n

Geometria Euclidiana (R^2 e R^3):

Os conceitos primitivos da geometria Euclidiana são o ponto de partida do que aqui será construído e não admitem definição. São eles: ponto, reta e plano.

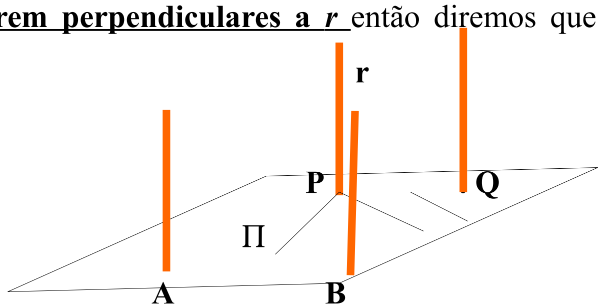
Os pontos são representados por letras maiúsculas, as retas por minúsculas e os planos por letras gregas maiúsculas.

As relações entre esses conceitos são estabelecidas através de axiomas (ou postulados), isto é, afirmações que não são provadas e que são a base de teorias. Lembrando alguns dos axiomas da geometria Euclidiana:

- Por dois pontos distintos passa uma única reta;
- Três pontos quaisquer, que não estejam situados em uma mesma reta, determinam um único plano;
- Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano então essa reta está no plano;
- Se dois planos têm um ponto em comum, então eles têm, pelo menos, uma reta em comum passando por esse ponto;

Definições relacionadas aos conceitos primitivos

- Duas retas **situadas no mesmo plano** são ditas paralelas quando não se interceptam. A relação "ser paralela a" é transitiva, isto é, se r é paralela a s e s é paralela a u então r é paralela a u.
- Se **uma reta r não tem ponto em comum com um plano** Π então diremos que r é paralela ao plano. Caso contrário, ou a reta está totalmente contida em Π ou intercepta o plano Π em um único ponto.
- Se a ***reta r interceptar*** Π **em um único ponto P** e além disso **todas as retas de** Π **que passam por P forem perpendiculares a r** então diremos que **r é perpendicular a** Π **.**



OBS: Prova-se que se P é um ponto do plano Π então existe uma única reta perpendicular a Π passando por P.

Como se relacionam os conceitos primitivos da Geometria com conjuntos de números?

O conjunto dos números reais R é utilizado em geral para expressar certas medidas: temperatura, tempo, comprimentos, ganhos e perdas.

A representação geométrica dos números reais é uma reta e, uma vez que a reta é considerada um conjunto de pontos, nesta reta é marcado um ponto qualquer denominado de origem O. Pensando que você está olhando fixamente para a origem O, do lado direito dela estão os números reais positivos e do lado esquerdo os negativos. Assim a origem determina na reta real duas semi-retas uma para os números positivos e a outra para os negativos.

Cada número real será posicionado na reta considerando que o seu valor absoluto é uma distância a ser considerada a partir da origem. Neste momento falaremos de ponto ou número real sem distinção. Assim, a distância de um ponto x da reta à origem é o número positivo $|x|$. Além disso a distância entre dois pontos x_1 e x_2 da reta real, como visto no Cálculo 1, é $|x_2 - x_1|$.

Exemplos:

Vetores no Espaço R^2

O conjunto dos números reais não é suficiente para exprimir todas as medidas da Física nem representar planos. No âmbito da física, quando necessitamos de uma medida que represente a velocidade de uma partícula em movimento ou uma força exercida em um determinado ponto de um sólido ou mesmo a posição de uma partícula no plano precisamos de algo além de um número real.

O Espaço R^2

O espaço R^2 é o produto cartesiano RxR, ou seja, o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} \quad ,$$

em que duas operações podem ser consideradas **adição** e **multiplicação por escalar.**

Adição: Considere dois pares *(x , y)* e *(a , b)* , adição associa a esses pares o par

$$\mathbf{(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b);}$$

Multiplicação por Escalar: Considere um número real λ *e o par (x , y) ,* a *multiplicação de (x , y) pelo escalar k* gera o par

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad .$$

Exemplos:

A combinação dessas duas operações gera o que chamamos de uma **combinação linear entre pares ordenados.** Especificando, sejam dois pares ordenados *(x , y)* e *(a , b), e* números reais λ e α ; montamos uma combinação linear entre os pares fazendo

$$\lambda(x, y) + \alpha(a, b) = (\lambda x + \alpha a, \lambda y + \alpha b)$$

Exemplos:

Representação Geométrica do R^2

Uma vez que o R^2 é constituído por pares ordenados $(x, y) \in RxR$ então a representação de R^2 é a mesma do produto cartesiano RxR do Cálculo 1.

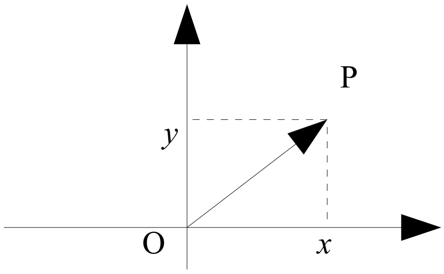
(Lembrando do Cálculo 1: Consideram-se duas retas perpendiculares, em geral, uma horizontal e outra vertical que são chamadas de eixos cartesianos. Na interseção dos eixos tem-se a origem de cada um deles e tal ponto representa o par (0,0).

No eixo horizontal marca-se o número real *x,* a primeira coordenada do par (*x,y),* e no eixo vertical marca-se o número real *y, a segunda coordenada do par (x,y).* O eixo horizontal é chamado de eixo das abcissas (ou primeira coordenada) e o vertical de eixo das ordenadas (ou segunda coordenada).

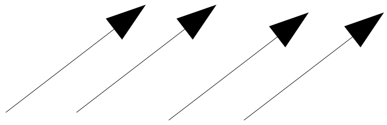
Para cada par *(x,y)* existe um único ponto do plano cartesiano RxR (ou R^2 ou plano xy) que o representa e vice-versa. Tal ponto é encontrado passando pela posição de *x* uma reta paralela ao eixo das ordenadas (ou eixo y) e passando pela posição de *y* uma reta paralela ao eixo das abcissas (ou eixo x). No encontro dessas duas retas está o ponto P que representa geometricamente o par *(x,y).*

Outra forma de representar o R^2

Ao invés de olharmos o par *(x,y)* como o ponto P podemos considerá-lo como um segmento orientado $\vec{OP}$ ou flecha, que tem sua extremidade inicial na origem O e extremidade final no ponto P:



Há um ganho bastante importante quando consideramos *(x,y)* como $\vec{OP}$, a saber, um segmento orientado tem comprimento, indica uma direção e um sentido, o que é importante para representação de grandezas da Física! Entretanto, observe os seguintes segmentos orientados desenhados em distintas retas e paralelos a $\vec{OP}$



todos eles têm o mesmo comprimento, direção e sentido!

Vetores em R^2

Definição: O conjunto de todos os segmentos orientados do R^2 que tem o mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado $\vec{OP}$ é chamado de ***vetor determinado por*** $\vec{OP}$ *ou ,simplesmente, o vetor de coordenadas (x,y), que chamamos, por exemplo, de* $\vec{v}$.

Notação: P=(x,y) ou $\vec{OP}$ *= (x,y) ou* $\vec{v}$ *= (x,y).*

Exemplos: Represente geometricamente o vetor (-1,1) .

Igualdade entre Vetores

Diremos que os vetores $\vec{v}=(v_{1,}v_2)$ e $\vec{u}=(u_{1,}u_2)$ são iguais se $v_1=u_1$ e $v_2=u_2$.

Comprimento ou Norma de um Vetor *v=(x,y)*

A distância do Ponto *P=(x,y)* à origem *O* é calculada utilizando o Teorema de Pitágoras da seguinte forma:

Considera-se o triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento OP e os catetos têm comprimentos $|x|$ *e* $|y|$*. Assim, à distância de P a O é o comprimento de OP, a saber,* $\sqrt{x^2+y^2}$.

Notação: d(O,P)= $\sqrt{x^2+y^2}$ *ou* $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Esta última notação é lida "a norma ou módulo ou comprimento do vetor v=(x,y)".

Assim, da discussão feita anteriormente, $d(O,P)=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemplo: São chamados de vetores unitários aqueles que têm comprimento 1 .
Dado v=(a,b) queremos um vetor unitário com a mesma direção de v. São eles os vetores obtidos fazendo $\frac{\pm 1}{\|v\|}.v$ *:*

$$\frac{1}{\|v\|}.v=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.(a,b)=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

Exercício: Obter dois vetores unitários na direção de (1,1).

Interpretação Geométrica da Adição de Vetores

(x , y) + (a , b)= (x+a , y + b)

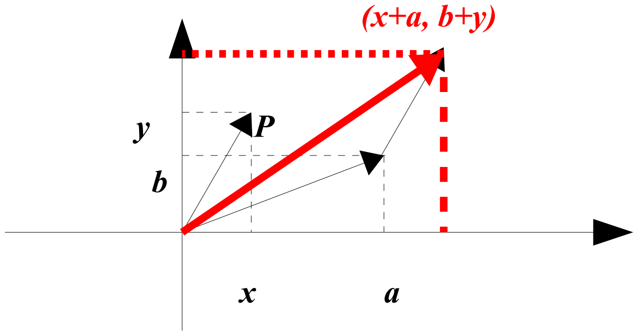
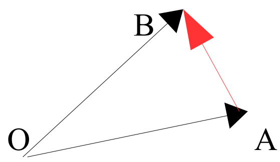


Figura: Regra do Paralelogramo

O vetor adição é representado pelo segmento orientado que tem extremidade inicial na origem e extremidade final na diagonal do paralelogramo cujos vértices são os pontos (0,0), *(x,y), (a,b) e o ponto obtido quando se desloca o segmento orientado* $\vec{OP}$ *iniciando no ponto (a,b).*

Distância Entre Dois Pontos A e B do R^2

Dados dois pontos $A=(x_1,y_1)$ *e* $B=(x_2,y_2)$ do R^2 , considere o segmento orientado com início em *A* e fim em *B*. Pela Regra do paralelogramo obtemos $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$. Ou seja, $\vec{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.



A distância entre A e B é o comprimento ou norma de $\vec{AB}$.

Notação: $d(A, B)=\|\vec{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Exemplos:

1) Uma circunferência de centro em C=(a,b) e raio r é o conjunto formado por todos os pontos P=(x,y) que distam de C um valor r:

$$d(C, P)=\|\vec{CP}\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

Daí elevando tudo ao quadrado obtemos a conhecida equação de uma circunferência de raio r e centro (a,b)

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Interpretação Geométrica da Multiplicação por Escalar

Lembrar: Equação da reta (Cálculo 1)

Uma equação do tipo $y=ax+b$ representa uma reta cujo coeficiente angular é $a=tg(\alpha)$. O ângulo α é chamado de inclinação da reta em relação ao semieixo positivo OX e retas com a mesma inclinação são paralelas. Reveremos isto com mais detalhes mais adiante.

Afirmação:

Os vetores $\vec{OP}=(x, y)$ *e* $\vec{v}=k(x, y)=(kx, ky)$ *estão em uma mesma reta que passa pela origem e cujo coeficiente angular é dado por* $a=tg(\alpha)=\frac{y-0}{x-0}=\frac{y}{x}=\frac{kx}{ky}$ *, supondo k um número real não nulo.*

Assim os vetores (x, y) e (kx, ky) têm a mesma direção. Além disso, se *k >0* terão o mesmo sentido e se *k<0* terão sentidos contrários. Sobre o comprimento vale:

$$\|(kx, ky)\|=|k|\|(x, y)\| \quad .$$

Vetores Paralelos

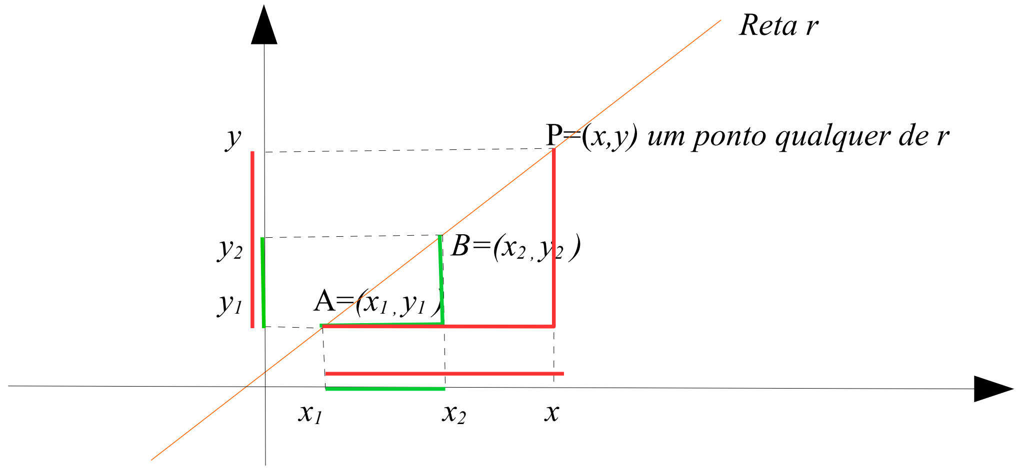
Diremos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se $\vec{v}=k\vec{u}$, para algum número real . E, portanto, podem ser desenhados numa mesma reta ou em retas paralelas.

OBS: Por outro lado, se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão na mesma reta *r* poderemos encontrar um número real *k* tal que $\vec{v}=k\vec{u}$. *Como?*

Equações da Reta

Equação Cartesiana e Equações Paramétricas

Considere dois pontos $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$ distintos e a reta *r* que passa por A e B.



Observem as razões

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \ sendo \ \ x_2 \neq x_1, \quad \text{e} \quad \frac{y-y_1}{x-x_1}, \ sendo \ \ x \neq x_1, \quad .$$

Através da figura anterior, percebemos que a semelhança de triângulos garante que essas duas razões são iguais, isto é,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a \quad .$$

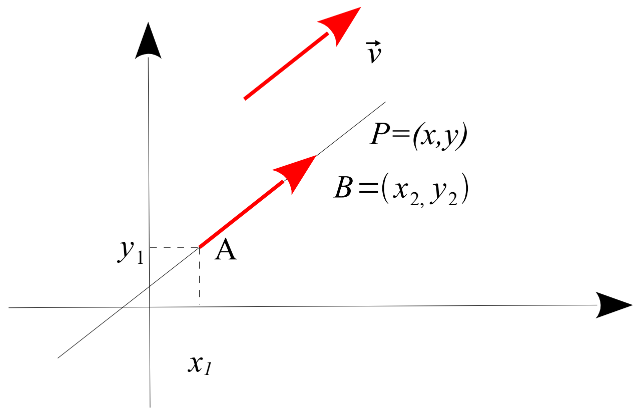
Daí obtemos que todos os pontos *P=(x,y)* que pertencem a reta r, contendo os pontos A e B, satisfazem uma equação do tipo *y=ax+b*, chamada de equação cartesiana da reta *r*. Nesta, forma o número *a é chamado de coeficiente angular da reta e é a tangente do ângulo entre o semieixo positivo OX e a reta.*

OBS: Em geral, a equação cartesiana aparece na forma *αx+βy=χ*.

Um outro tipo de equação que os pontos da reta r devem satisfazer são as chamadas equações paramétricas. Para entende las consideramos o vetor $\vec{AB}=B-A=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Observe que ele tem a mesma direção de *r* e pode ser desenhado sobre ela. Assim se considerarmos qualquer ponto *P=(x,y)* em *r* o vetor $\vec{AP}$ e $\vec{AB}$ terão a mesma direção, ou seja, existe $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{AP}=t\,\vec{AB} \quad , \quad (*)$$

de fato, $|t|=\dfrac{\|\vec{AP}\|}{\|\vec{AB}\|}$.



Da equação (*) $\vec{AP}=t\,\vec{AB}$ obtemos

$$P-A=t\,\vec{AB} \quad ,$$

ou ainda,

$$P=A+t\,\vec{AB} \quad , (**)$$

$$(x-x_{1,}\, y-y_1)=t\,(x_2-x_{1,}\, y_2-y_1) \quad .$$

Daí obtemos as chamadas equações paramétricas da reta r que passa por $A=(x_{1,}\, y_1)$ e $B=(x_{2,}\, y_2)$:

$$x=x_1+t\,(x_2-x_1),$$

$$y=y_1+t\,(y_2-y_1) \quad ,$$

$t\in\mathbb{R}$ e é chamado de parâmetro.

Assim as equações paramétricas de *r* são obtidas quando temos o conhecimento de dois pontos A e B. Entretanto, a equação (**) mostra que se for conhecido um ponto $A=(x_{1,}\, y_1)$ e um vetor $\vec{v}=(v_{1,}\, v_2)$ paralelo a *r* também podemos obter equações paramétricas:

$$x=x_1+t.v_1 \quad ,$$

$$y=y_1+t.v_2 \quad .$$

Exemplo: Como obter uma equação do tipo *y=ax+b* para uma reta *r ,* que é conhecida através das suas equações paramétricas?

O procedimento para isto é isolar o parâmetro *t* nas equações paramétricas

$$t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{e} \quad t=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad .$$

Como *t* é o mesmo nas duas equações então $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Portanto,

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1) \quad ,$$

ou ainda,

$$(x_2-x_1)\,y+x\,(y_2-y_1)=y_1(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1) \quad .$$

Até aqui obtemos uma equação para a reta *r* do tipo

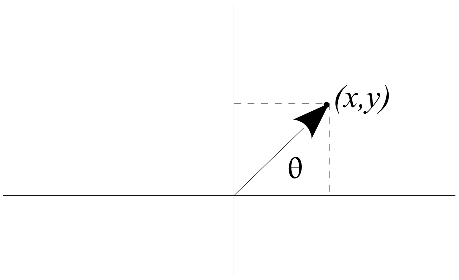
$$\alpha\, y+\beta\, x=c \quad ,$$

sendo $\alpha=x_2-x_1$, $\beta=y_2-y_1$ e $c=y_1(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)$. Este tipo de equação, como já a foi dito, é chamada de equação cartesiana da reta *r* .

Exemplos: Veja no livro texto.

Ângulos no R^2

Considere o vetor $\vec{v}=(x,y)=\vec{OP}$. O ângulo θ entre $\vec{OP}$ e eixo OX é medido no sentido antihorário, partindo do semi-eixo positivo de OX e terminando em $\vec{OP}$. Portanto, vale que $0\leq\theta<2\pi$.



Lançando mão dos conceitos da trigonometria temos

$$\cos(\theta)=\frac{x}{\|(x,y)\|} \quad \text{e} \quad sen(\theta)=\frac{y}{\|(x,y)\|} \quad .$$

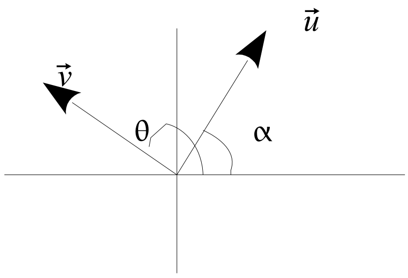
Produto Interno entre dois Vetores

Considere os vetores $\vec{v}=(v_{1,}v_2)$ e $\vec{u}=(u_{1,}u_2)$ definimos o produto interno de $\vec{v}$ por $\vec{u}$ como sendo o número real representado por $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ e dado por

$$\langle u,v\rangle=u_1.v_1+u_2.v_2$$

Relação entre $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ e o Ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Dados vetores $\vec{v}=(v_{1,}v_2)$ e $\vec{u}=(u_{1,}u_2)$ considere os ângulos θ e α , medidos como descrito anteriormente, entre os vetores e o semi-eixo positivo OX, respectivamente. Considere $\beta=\theta-\alpha$ o ângulo entre $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.



Observe que

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=u_1.v_1+u_2.v_2=\cos(\alpha)\|\vec{u}\|\cos(\theta)\|\vec{v}\|+sen(\alpha)\|\vec{u}\|sen(\theta)\|\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\theta-\alpha) \quad ,$$

ou seja, encontramos a seguinte relação entre β e $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$:

$$\cos(\beta)=\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \text{ , ou ainda, } \langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\beta) \; .$$

Para que não ocorra confusão na determinação do ângulo β , a partir do cálculo de $\cos(\beta)$, fixemos que $0\leq\beta\leq\pi$. Ou seja, o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ ***é o menor ângulo formado entre*** $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ ***.***

Vetores Ortogonais

Assim diremos que dois vetores $\vec{u}$ ***e*** $\vec{v}$ **são ortogonais se** $\beta=\frac{\pi}{2}$ **ou, equivalentemente, se** $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$.

Exemplo: Dado um vetor $\vec{u}=(u_1,u_2)$ *podemos obter um vetor ortogonal a* $\vec{u}$ *dado por* $(-u_2,u_1)$.

Exercício: Encontre dois vetores unitários e ortogonais a (1,1).

Propriedades do Produto Interno

1. $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\langle\vec{v},\vec{u}\rangle$;
2. $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$;
3. $\langle k\vec{u},\vec{v}\rangle=k\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$;
4. $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=\|u\|^2\geq 0$,
5. $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=0$ apenas quando $\vec{u}=0$.

Exercício: Mostre que as diagonais de um losango de vértices A, B, C e D são ortogonais.
(Definição: Um losango é um paralelogramo com quatro lados iguais)

Vetor Normal a uma Reta

Vimos que as equações paramétricas de uma reta *r* podem ser encontradas quando são conhecidos um ponto $A=(x_1,y_1)$ e um vetor $\vec{v}=(v_1,v_2)$ paralelo a *r*:

$$x=x_1+tv_1;$$

$$y=y_1+tv_2.$$

Isolando o parâmetro *t* obtemos

$$\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2} \quad ,$$

se $v_1\neq 0$ e $v_2\neq 0$. E ajeitando as contas obtemos

$$v_2x-v_1y=v_2x_1-v_1y_1 \quad .$$

Lembrando que uma **equação cartesiana é do tipo *ax+by=c*** então percebemos que $a=v_2$, $b=-v_1$ e $c=v_2x_1-v_2x_1-v_1y_1$. Portanto, o vetor $(-b,a)=\vec{v}$ é um vetor paralelo a reta *r e* o vetor *(a,b)* é ortogonal a $\vec{v}=(-b\,,a)$.

Assim diremos que o vetor $(a\,,b)$ é um vetor cuja direção é perpendicular ou ***normal*** a reta de equação $ax+by=c$.

Exemplo: Dada a equação *2x+3y=5* o vetor *(-3,2)* é paralelo à reta. E o vetor (2,3) é ortogonal a reta. O vetor unitário com a mesma direção e sentido de $(2{,}3)$ é $\frac{1}{\|(2{,}3)\|}(2{,}3)$.

Exercício: Encontre a equação cartesiana da reta *r* que passa pelo ponto (2,-1) e é paralela ao vetor (1,1).

Lembre: Dado um vetor qualquer $\vec{v}$ não nulo então o vetor unitário na mesma direção e sentido de $\vec{v}$ é o vetor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e no sentido contrário $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Ângulo entre Retas

Duas retas quaisquer do espaço ou são paralelas ou se interceptam em um ponto. Duas retas serão paralelas se, além de não se interceptarem, suas direções forem paralelas.

Se duas retas *r* e *s* se interceptam em um ponto então o ângulo entre elas é o menor ângulo positivo entre elas, isto é, um ângulo 0< θ ≤ π/2.

Observe que o cosseno de um ângulo agudo é sempre positivo. Portanto, para encontrarmos o ângulo entre as duas retas basta considerarmos o cálculo do módulo do cosseno entre duas direções paralelas elas.

Exemplo: Encontre o ângulo entre as retas cujas equações paramétricas são

$$x=-t+1\,;$$
$$y=-\sqrt{(3)}t-1\quad;$$

e

$$x=\sqrt{3}\,s+2\quad;$$
$$y=s+3\quad.$$

Das equações paramétricas temos a primeira reta paralela ao vetor $(-1,-\sqrt{3})$ e a segunda paralela a $(\sqrt{3},1)$.

Do cálculo do cosseno do ângulo entre esses vetores encontramos $\cos(\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto para esses vetores o ângulo seria $\beta=\frac{5\pi}{6}$, um ângulo obtuso. Logo o ângulo agudo θ entre as retas terá tal que $\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e será $\theta=\pi-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

Exemplo: Encontre o ângulo entre a reta *r* dada por *x-y=1* e a reta *s* dada por

x=t+1;

y=-t-3.

Resolução: Vetor paralelo a r: (1,1); vetor paralelo a *s*: (1,-1). Assim as retas são ortogonais.

Exemplo: Encontre o ângulo entre as retas dadas pelas equações cartesianas

x+y=1;

x+y=2.

As duas retas são paralelas ao vetor (-1,1) e, portanto, ou são paralelas ou são coincidentes. Se forem coincidentes terão algum ponto em comum, mas isto não ocorre ! Por que?

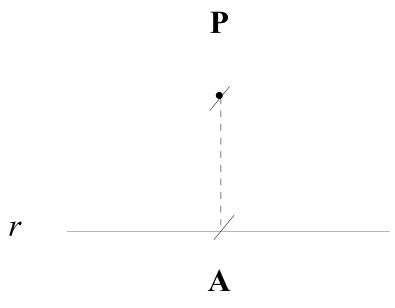
Distâncias em $\boldsymbol{R}^2$ (Continuação)

Já vimos que a distância entre dois pontos $A=(x_{1,}y_1)\,e\,B=(x_{2,}y_2)$ é dada por

d(A,B)= $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\|\vec{AB}\|=\|B-A\|$;

Agora veremos a distância entre Ponto e Reta:

A geometria do que queremos:



A distância entre P e *r* é o comprimento do segmento $\vec{PA}$, sendo o ponto *A* a interseção da reta *r* com a reta que passa por *P* e é perpendicular a *r.*

Portanto, nosso trabalho é encontrar as coordenadas de A e uma vez encontradas teremos:

$$d(P,r)=\|\vec{PA}\|=\|A-P\|$$

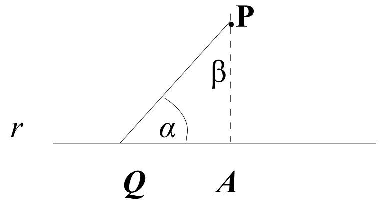
Uma forma de fazer é seguindo os seguintes procedimentos:

1. Encontramos um vetor ***u*** ortogonal à direção de r,
2. Construímos a equação da reta *s* que passa por P e é paralela a ***u;***

3. Encontramos A, o ponto de interseção entre *r* e *s*.
4. Calculamos a distância entre P e A.

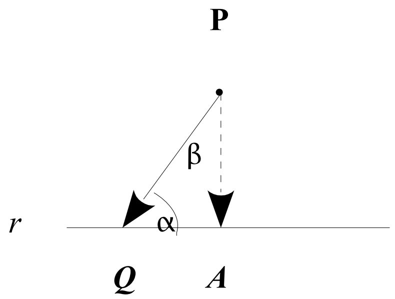
   Outra forma de fazer, seguindo outros procedimentos:

- Considerar um ponto *Q* qualquer na reta *r* e o triângulo retângulo QAP



Assim pela trigonometria temos $sen(\alpha)=\frac{\|\vec{PA}\|}{\|\vec{PQ}\|}$

- No triângulo anterior considere o ângulo β que satisfaz $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Ou seja, β é o ângulo entre os vetores $\vec{PA}$ e $\vec{PQ}$:



Assim $sen(\alpha)=\cos(\beta)=\frac{\langle\vec{PQ},\vec{PA}\rangle}{\|\vec{PQ}\|.\|\vec{PA}\|}$ e, portanto,

$$d(P,r)=\|\vec{PQ}\|sen(\alpha)=\|\vec{PQ}\|\cos(\beta)=\|\vec{PQ}\|.\frac{\langle\vec{PQ},\vec{PA}\rangle}{\|\vec{PQ}\|.\|\vec{PA}\|}=\langle\vec{PQ},\frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}\rangle .$$

Mas ainda não conhecemos A. Vamos driblar esta necessidade.

- Observe que o vetor $\frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}$ é um vetor unitário na direção e sentido de $\vec{PA}$ e ortogonal a reta *r*. Por outro lado, se a reta *r* tem equação cartesiana *ax+by =c* então o vetor *(a,b) é ortogonal a r e o* vetor $\vec{\eta}=\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$ é também um vetor unitário e ortogonal a *r*. Daí

$$\vec{\eta}=\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}=\pm\frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} .$$

- E finalmente podemos escrever $d(P,r)=\left|\langle\vec{PQ},\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}\rangle\right|=\frac{|\langle\vec{PQ},(a,b)\rangle|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

  Podemos ainda melhorar o aspecto desta fórmula. Supondo que $P=(x_0,y_0)$ e

$Q=(x,y)$ é um ponto qualquer de *r* temos

$$\langle \vec{PQ},(a,b)\rangle=\langle (x-x_0,y-y_0),(a,b)\rangle=ax-ax_0+by-by_0=c-ax_0-by_0 \quad .$$

E daí a fórmula mais simples para o cálculo da distância entre $P=(x_0,y_0)$ e a reta *r* de equação cartesiana *ax+by=c* é: $d(P,r)=\dfrac{|c-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemplo: Encontre a distância entre o ponto *P=(3,-2)* e a reta *x-y=3*. *Resposta:* $\sqrt{2}$.

Exemplo: Encontre a distância entre o ponto *P=(3,-2)* e a reta *r* que passa pelo ponto (2,-1) e é paralela ao vetor (1,1).

Distância entre duas Retas em R^2

Se duas retas *r* e *s* possuem algum ponto em comum então diremos que a distância entre elas é nula. Notação: *d(r,s)=0*.

Entretanto se *r* e *s* são paralelas então a distância entre elas é calculada da seguinte forma

d(r,s) = d(P,s),

sendo *P* um ponto qualquer de *r*. *Lembre: já sabemos calcular a distância entre ponto e reta!!!*

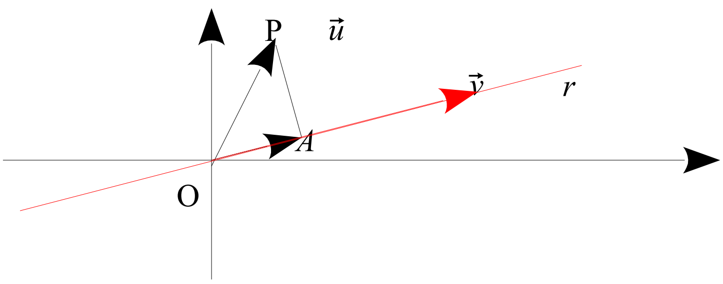
Exemplo: Calcule a distância entre as retas *r* dada por *3x-4y = 8* e a reta *s* dada por*3x-4y=3*. Seja *P=(0,-2)* um ponto de *r* então

$$d(P,s)=\frac{|c-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3-3.0-(-4).(-2)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{25}}=1$$

Exercício: Verifique que se as retas paralelas *r* e *s* tem equações $ax+by=c_1$ e $ax+by=c_2$ então vale

$$d(P,s)=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad .$$

<u>Projeção Ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$</u>



Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, queremos encontrar o vetor $\vec{w}$ paralelo a $\vec{v}$ obtido da seguinte forma:

- *Consideramos os vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ partindo da origem.
- *Consideramos a reta r paralela a* $\vec{v}$ *e passando pela origem O,*

- *Pela extremidade final de* $\vec{\boldsymbol{u}}$ *, o ponto P, traçamos uma reta perpendicular a r,*
- *Marcamos o ponto A, interseção entre as retas r e s,*
- *O vetor* $\vec{w}$ *será o vetor* $\vec{OA}$ *que está em r.*

  Portanto, a projeção ortogonal de $\vec{\boldsymbol{u}}$ sobre $\vec{\boldsymbol{v}}$ é um vetor $\vec{w}=k\vec{v}$. Vamos provar que

  $k=\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$ *, ou seja,*

$$\vec{w}=\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\vec{v}=\langle \vec{u}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\rangle\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} .$$

  De fato, pela forma como foi obtido o ponto A obtemos

$$\langle \vec{AP}, \vec{v}\rangle=0 \Leftrightarrow \langle P-A, \vec{v}\rangle=0 \Leftrightarrow \langle \vec{u}-\vec{w}, \vec{v}\rangle=0$$

  e, portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle=\langle \vec{w}, \vec{v}\rangle=\langle k\vec{v}, \vec{v}\rangle=k.\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle .$$

  Donde segue que, $k=\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$, como queríamos demonstrar.

OBS:

1. O ponto A também é chamado de projeção ortogonal do ponto P sobre a reta *r,* que passa pela origem e é paralela a $\vec{v}$ e A tem as coordenadas do vetor $\vec{w}$!
2. Vetor subtração $\vec{u}-\vec{w}=P-A=\vec{AP}$ = diagonal do paralelogramo de lados OP e OA.

Exemplo: Encontre a projeção ortogonal de (2,4) em (1,1).

Exemplo: Encontre o ponto Q que é simétrico a P=(5,10) em relação a reta que passa pela origem e é paralela a (3,-4).