ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 9 - INTEGRAIS

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

INTEGRAL INDEFINIDA

Para calcularmos a integral $\int_1^3 x^2\,dx$ por exemplo, devemos determinar a anti-derivada (ou primitiva) da função f(x)=x^2. Uma anti-derivada que nos vem a mente de imediato é a função:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Pois

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}.\cancel{3}x^2 = x^2 = f(x)$$

Porém F(x) não é a única anti-derivada da função f(x)=x^2.
Observe que

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$$

também é uma anti-derivada de f(x)

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}.\cancel{3}x^2 + 0 = x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

Em termos gerais:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

sendo C uma constante $(C \in \mathbb{R})$

É um modo de representar todas as anti-derivadas da função f(x)=x^2.

Simbolicamente temos:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Lê-se: “a integral indefinida (anti-derivada ou primitiva) da função $f(x)=x^2$ é a função

$$\frac{1}{3}x^3 + C$$

Logo:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \ \rightarrow \ F'(x) = x^2 = f(x)$$

Vamos agora determinar as integrais das principais funções através do processo contrário à derivação:

1)

$$\int dx = \int 1\, dx = x + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = x + C \rightarrow F'(x) = 1 + 0 = 1$$

2)

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \text{, sendo } n \in \mathbb{R} \text{ e } n \neq -1$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \rightarrow F'(x) = (\cancel{n+1})\frac{x^{n+1-1}}{\cancel{n+1}} + 0 = x^n$$

3)

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\cancel{\ln a}}a^x.\cancel{\ln a} + 0 = a^x$$

4)

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = e^x + C \to F'(x) = e^x + 0 = e^x$$

5)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = \ln|x| + C \to F'(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

6)

$$\int \operatorname{sen}x \, dx = -\cos x + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = -\cos x + C \to F'(x) = -(-\operatorname{sen}x) + 0 = \operatorname{sen}x$$

7)

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen}x + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = \operatorname{sen}x + C \to F'(x) = \cos x + 0 = \cos x$$

8)

$$\int \sec^2(x) \, dx = \operatorname{tg}x + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = \operatorname{tg}x + C \to F'(x) = \sec^2(x) + 0 = \sec^2(x)$$

9)

$$\int \operatorname{cosec}^2(x) \, dx = -\operatorname{cotg}x + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = -\text{cotgx} + C \rightarrow F'(x) = -(-\text{cosec}^2(x)) + 0 = \text{cosec}^2(x)$$

10)

$$\int secx.tgx\, dx = secx + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = secx + C \rightarrow F'(x) = secx.tgx + 0 = secx.tgx$$

11)

$$\int cosecx.cotgx\, dx = -cosecx + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = -cosecx + C \rightarrow F'(x) = -(cosecx.cotgx) + 0 = cosecx.cotgx$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $-a < x < a$

12)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Lembrando da derivação:

$$F(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} + 0$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$:

13)

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Lembrando da derivação:

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}\right) + 0 = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\cancel{a}}\left(\frac{a^{\cancel{2}}}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}\right) = \frac{1}{a^2+x^2}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $x < -a$ ou $x > a$

14)

$$\int \frac{1}{x.\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}.\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \frac{1}{a}.\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + C \rightarrow F'(x) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{x}{a}.\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}}\cdot\frac{1}{a}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{x}{a}.\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\cancel{a}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{a^2}}}{\frac{x}{\cancel{a}}.\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}\right) = \frac{1}{x.\sqrt{x^2-a^2}}$$

Sendo $x \neq \pm a$

15)

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}\cdot\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} + 0$$

$$= \frac{1}{\cancel{2a}}\cdot\frac{\cancel{x+a}}{x-a}\cdot\frac{\cancel{2a}}{(x+a)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x-a}\cdot\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$

16)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + a^2}}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{x^2 + a^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2 + a^2} + x}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $x < -a$ ou $x > a$

17)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - a^2}}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{x^2 - a^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2 - a^2} + x}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$

18)

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + a^2}}\right) + 0$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+a^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2+a^2}+x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}(x^2+a^2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $x < -a$ ou $x > a$

19)

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2-a^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}} -$$
$$\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-a^2}}\right) + 0 = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$- \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2-a^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2-a^2}+x}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}(x^2 - a^2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $-a < x < a$

20)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}.\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

<u>Lembrando da derivação:</u>

$$F(x) = \frac{x}{2}.\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}.\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2}.\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2}.\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.\frac{1}{a} + 0$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2}}}.\frac{1}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{2}.\frac{\cancel{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.\frac{1}{\cancel{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{x^2 - a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{x^2 - a^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}(x^2 - a^2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$