

**COMPONENTE CURRICULAR:**

IC241 - CÁLCULO I (90H) - TURMA: 02 (2020.1)

IC241 - CÁLCULO I (90H) - TURMA: 07 (2020.1)

PROF. ROSELI ALVES DE MOURA

**MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO**

1ª etapa – Encontrar o modelo matemático (função ou equação) que “melhor” represente o problema.

2ª etapa – Aplicar a teoria de máximo e mínimo estudada.

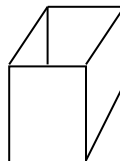
3ª etapa – Fazer uma interpretação da solução obtida para saber se ela tem sentido ou não.

**EXERCÍCIOS**

- 1) Deseja-se construir uma caixa retangular reta de base quadrada sem tampa de volume  $2048 \text{ cm}^3$ . Quais as dimensões da caixa de menor custo?

Resolução: Volume:

$$V = x^2 \cdot y = 2048 \Rightarrow y = \frac{2048}{x^2}$$



O custo depende da área:

$$A = x^2 + 4 \cdot x \cdot y = x^2 + \frac{4 \cdot 2048}{x}$$

$$A' = 2x - \frac{4 \cdot 2048}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 2 \cdot 2048 = 4096 \Rightarrow x = 16$$

$$A'' = 2 + \frac{8 \cdot 2048}{x^3} \Rightarrow A''(16) > 0 \Rightarrow x = 16: \text{mín local}$$

Resp.:  $x=16 \text{ cm}$ ,  $y=8 \text{ cm}$ ,  $A= 768 \text{ cm}^2$

- 2) Um campo retangular vai ser fechado com uma cerca e depois dividido ao meio por outra cerca paralela a um dos lados. Se a cerca que passa pela metade custa R\$ 10,00 por metro e a outra cerca custa R\$ 25,00 por metro, encontre as dimensões da maior área possível que pode ser fechada com um custo de R\$ 4.800,00.

Resolução:

Custo:

$$C = 25 * 2x + 10 * x + 25 * 2y = 4800 \Rightarrow y = 96 - \frac{6}{5}x$$

Área:  $A = x.y = x(96 - \frac{6}{5}x) = 96.x - \frac{6}{5}.x^2$

$$A' = 96 - \frac{12}{5}x = 0 \Rightarrow x = 40 \text{ m}$$

$$A' = -\frac{12}{5} < 0 \Rightarrow (x = 40, 1920) \text{ max. local}$$

Dimensões: 40m, 48 m, 1920 m<sup>2</sup>

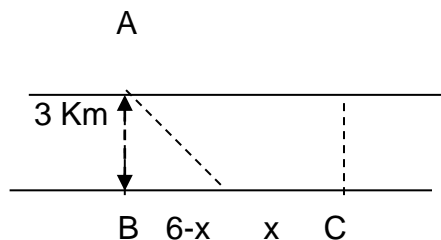
- 3) Os pontos A e B são opostos um ao outro nas margens de um trecho reto do rio Amazonas que mede 3 KM. O ponto C está na mesma margem que B, mas 6 Km, rio abaixo de B. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A a C. Se o custo do cabo é 25% mais caro sob a água do que sob a terra, que linha de cabo seria menos cara para a companhia.

Resolução:

Custo:  $C = 1,25.\sqrt{9 + x^2} + (6 - x)$

$$C' = \frac{1,25.x}{\sqrt{9 + x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$C'' = \frac{11,25}{(9 + x^2)^{3/2}} > 0 \Rightarrow (x = 4; 8,25) \text{ mín local}$$



Resposta: 4Km sob a terra e 5 Km sob a água.

- 4) Uma folha de papelão mede 9x15 polegadas. Dois quadrados iguais são recortados dos vértices de um dos lados de 9 pol. Dois retângulos iguais são recortados dos outros vértices de modo que as abas possam ser dobradas para forma uma caixa retangular com tampa. Determinar as dimensões da caixa de volume máximo.

Resolução:

Largura da caixa:  $2x + L = 9 \Rightarrow L = 9 - 2x$

Comprimento da caixa:

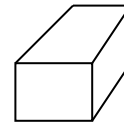
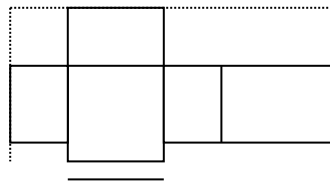
$$2x + 2B = 15 \Rightarrow B = 7,5 - x$$

altura da caixa:  $x$

volume:  $V = x(9 - 2x)(7,5 - x) = 67,5x - 24x^2 + 2x^3$

$$V' = 67,5 - 48x + 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 1,82 \text{ ou } x = 5,68$$

$$V'' = -48 + 12x \Rightarrow V''(1,82) < 0 \Rightarrow (1,82; 55,41) \text{ max.local}$$



- 5) Uma folha de papelão de 18x36 polegadas é dobrada ao meio formando dois retângulos de 18x18 pol. Depois, ainda com a folha dobrada, quatro retângulos congruentes com lados  $x$  são recortados dos vértices. Em seguida a folha é desdobrada e as seis abas são dobradas para cima formando duas caixas que quando fechadas formam uma mala. Determinar as dimensões da mala de volume máximo?

Resolução:

Volume da caixa:  $V = 2x(18 - 2x)^2$

$$V' = 24(9 - x)(3 - x) = \begin{cases} x = 9 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$V'' = 48(x - 6) \Rightarrow \begin{cases} V''(9) > 0 \Rightarrow x = 9 : \text{mín.} \\ V''(3) < 0 \Rightarrow x = 3 : \text{máx} \end{cases}$$

Respostas: dimensões: largura 6 pol., comprimento 12 pol., altura 12 pol.

- 6) Um fio de comprimento  $L$  é cortado em dois pedaços. Com um deles se fará um círculo e com o outro um quadrado. A) Como devemos cortar o fio a fim de que a soma das duas áreas compreendidas pelas figuras seja (a) mínima? B) máxima?

Resolução:

$$\text{Soma das áreas } A = \pi \left( \frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left( \frac{L-x}{4} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{L^2 - 2Lx + x^2}{16} = \frac{4+\pi}{16\pi} x^2 - \frac{L}{8} x + \frac{L^2}{16}$$

$$\text{a) } A' = \frac{4+\pi}{8\pi} x - \frac{L}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi L}{4+\pi} : \text{ ponto crítico}$$

$$A'' = \frac{4+\pi}{8\pi} > 0 \text{ para todo } x, \text{ portanto esse ponto crítico é um mínimo local.}$$

Logo, 1º pedaço terá comprimento  $\frac{\pi L}{4+\pi}$  e o 2º pedaço comprimento  $\frac{4L}{4+\pi}$ .

- b) O comprimento  $L$  determina um intervalo:  $0 \leq x \leq L$ , assim o máximo ocorrerá nos

extremos desse intervalo. Como  $A(L) = \frac{L^2}{4\pi}$  é o maior valor no intervalo,

devemos fazer somente um círculo de raio  $\frac{L}{2\pi}$

- 7) Uma folha de papel retangular de 8,5x11pol é colocada em uma superfície plana. Um dos vértices é colocado no lado maior oposto, como mostra a figura, e deixado lá enquanto se dobra e se marca a folha. O problema é tornar o comprimento  $L$  do vinco o menor possível.

Resolução:

$$L^2 = X^2 + Y^2$$

$$Z = \sqrt{8,5(2X - 8,5)}$$

$$\frac{Y}{8,5} = \frac{X}{Z} \Rightarrow Y = 8,5 \frac{X}{Z}$$

$$\text{Logo: } L^2 = X^2 + (8,5)^2 \cdot \frac{X^2}{8,5(2X - 8,5)} = \frac{2X^3}{2X - 8,5}.$$

$$\text{Derivando: } 2L.L' = \frac{8.X^2 \left( X - \frac{3}{4} \cdot 8,5 \right)}{(2X - 8,5)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = \frac{51}{8} \end{cases}$$

Como  $L' < 0$  para  $x < \frac{51}{8}$  e  $L' > 0$  para  $x > \frac{51}{8}$  vem que  $X = \frac{51}{8}$  é um ponto de mínimo.