UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 1

Prof. Roseli Alves de Moura

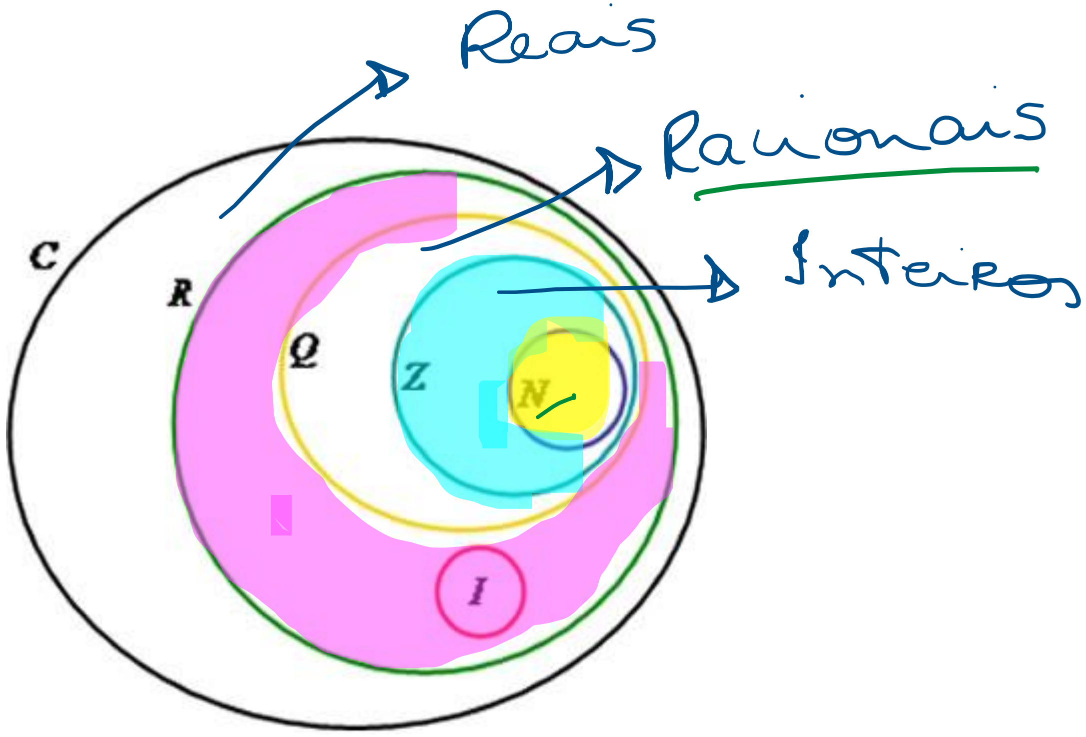
Objetivo da disciplina: Priorizar o raciocínio em lugar do uso irracional de fórmulas prontas mas não excluir a utilização dessas

Conteúdo:

Apresentação do curso;
Números Reais,
Funções: Conceito, Domínio, Imagem e Gráfico.
Funções: Constante, Linear e Quadrática.
Construção de Gráficos com Funções descritas por partes

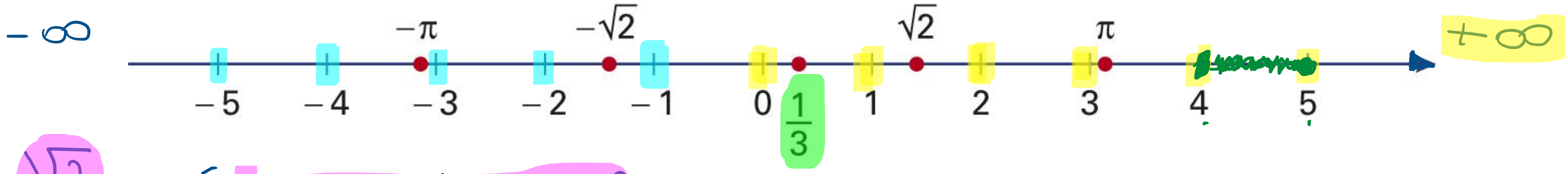
NÚMEROS REAIS E RETA REAL

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} , a \in \mathbb{Z} , b \in \mathbb{Z}^* \right\}$



$I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} + I$

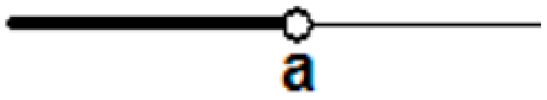


$\frac{\sqrt{2}}{3}$ é irracional

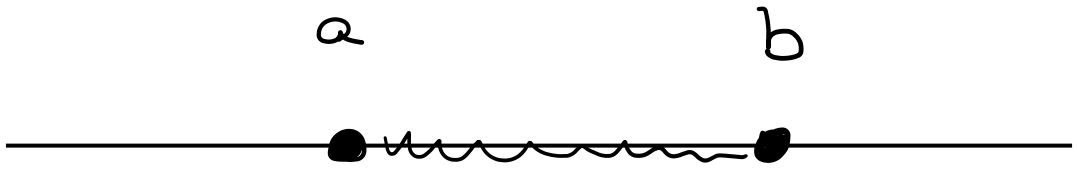
INTERVALOS REAIS “FECHADOS” E “ABERTOS”

$a \in \mathbb{R}$

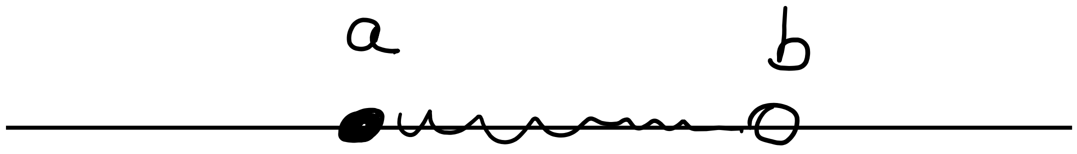
Intervalos “infinitos”:

Representação na reta real	Sentença matemática	Notações simbólicas	
	$\{x \in R \mid x > a\}$	]a, +∞ [	(a, +∞)
	$\{x \in R \mid x \geq a\}$	[a, +∞ [	[a, +∞)
	$\{x \in R \mid x < a\}$	]−∞,a[	(−∞,a)
	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	]−∞,a]	(−∞,a]

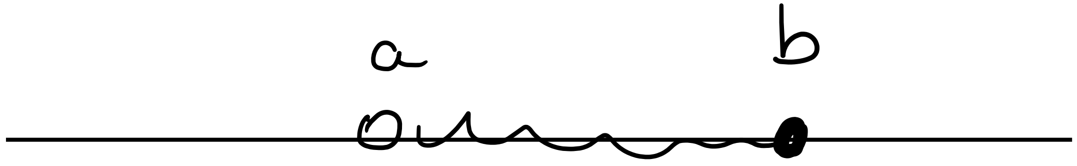
INTERVALOS REAIS – MAIS NOTAÇÕES USUAIS



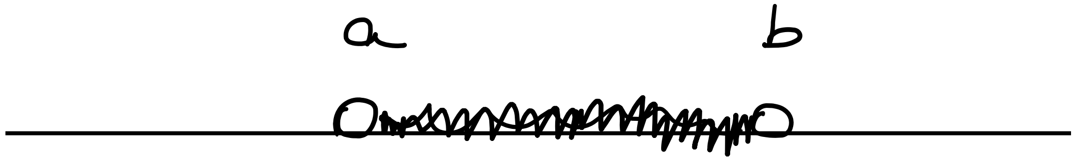
$[a, b]$ ou $a \leq x \leq b$



$[a, b[$ ou $a \leq x < b$



$]a, b]$ ou $a < x \leq b$



$]a, b[$ ou $a < x < b$

ESTUDO DE FUNÇÕES

O "estudo das funções" pode ser contextualizado de vários modos. Preferencialmente, como matemáticos, escolhemos caracterizar inicialmente a função como o "estudo da relação de dependência entre grandezas", para tanto entenderemos o conceito descrevendo um experimento bem simples.

$x \to y$

$A \to B$

Dom

O experimento que segue descreve a relação de dependência entre a temperatura e o número de pessoas em uma reunião.

A princípio, com a sala de aula vazia, foi posicionado um medidor de temperatura (termômetro) no centro da sala . E, na sequência, foram realizadas quatro medições de temperaturas variando o número de alunos presentes. A tabela abaixo descreve os dados obtidos:

Número de pessoas	Temperatura (°C)
1	25,1
2	25,2
10	26
20	27

1. Utilizando a linguagem matemática para o experimento descrito acima.

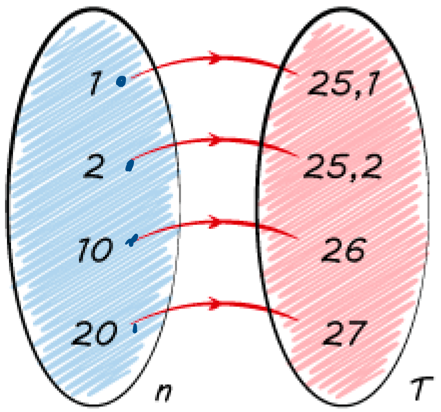
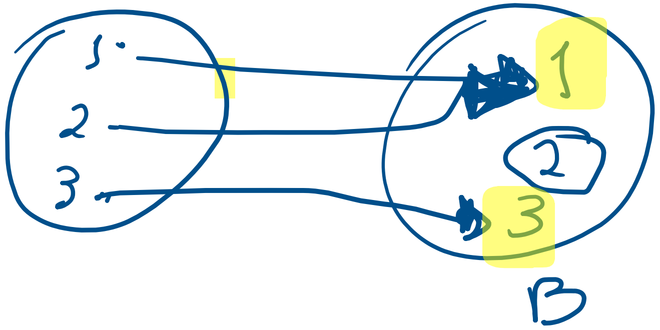


Diagrama de Venn - Euler



2. Utilizando a representação algébrica da função
(A representação da função através de uma expressão matemática)

$f(x) = b + ax$ ou $y = ax + b$

$$T(n) = 25 + 0{,}1 . n^{1}$$

$y = f(x)$

3. Representação gráfica

O nosso objetivo inicial consiste em estudar a função em si (a relação de dependência), sem nos importarmos, a princípio, com as grandezas envolvidas. Utilizaremos, no lugar da palavra grandezas, a palavra variáveis que não associa o termo envolvido a um elemento aplicado (na física, na química , etc...), mas sim a algo que simplesmente varia. Em termos gerais, utilizaremos a simbologia $f(x)$, cujo significado é :" a variável de nome f depende da variável de nome x ".

Consequentemente chamaremos a variável f de variável dependente, e a variável x de variável independente.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES

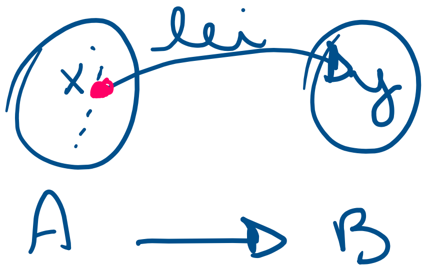
Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é uma "lei" ou "regra" que associa cada elemento de A à um único elemento de B. O conjunto A é chamado Domínio de f e B é chamado Imagem de f.

Entende-se por conjunto Domínio "o conjunto de todos os valores possíveis para a variável independente (na maioria das vezes chamamos de variável x)".

Já o conjunto Imagem é "o conjunto de todos os valores obtidos para a variável dependente (na maioria das vezes chamamos de variável y ou f(x))".

Estes conceitos de Domínio e Imagem são discutidos no estudo do domínio das funções.



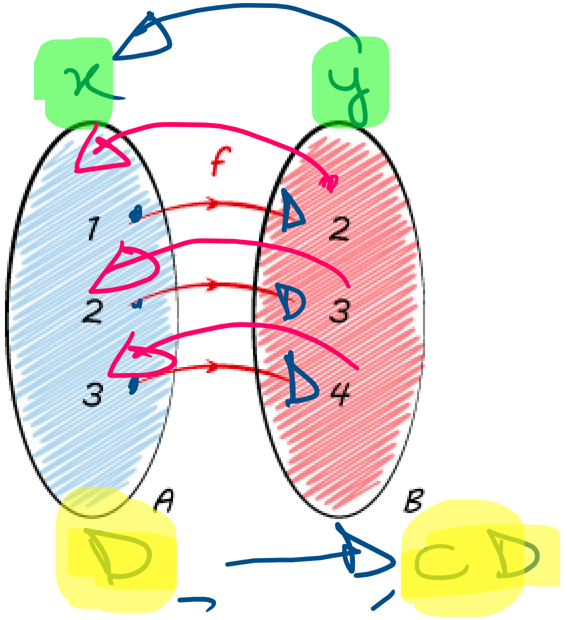
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, y \in \mathbb{R}$

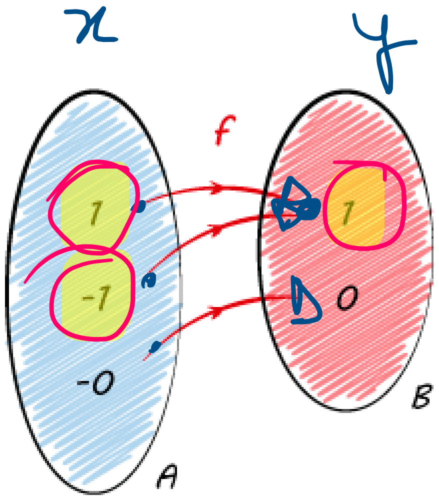
qque x

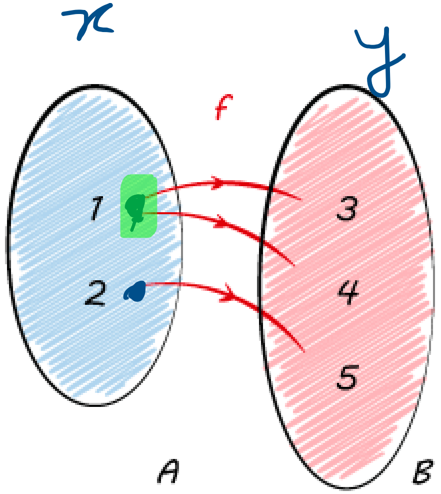
existe

é único

OBSERVE ALGUMAS RELAÇÕES DE DEPENDÊNCIA:







É função e Bijetora e Inversível

É função não injetora (mas é sobrejetora

Não é função

Injetora: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ } Bijetora

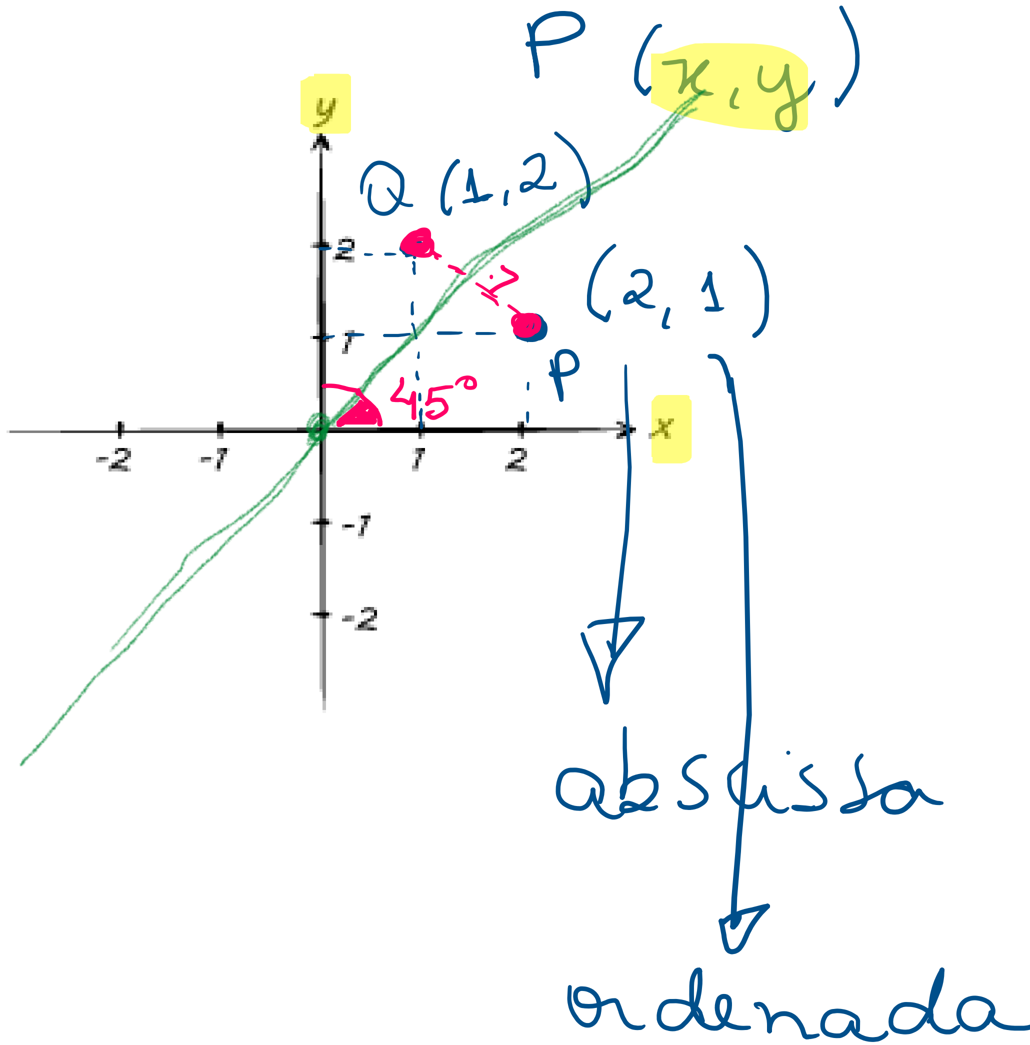
Sobrejetora: $Im(f) = C.D.$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO

Como o próprio nome sugere, é a representação da função, relação de dependência, através de um "desenho" que, nas funções de uma variável, serão representados por curvas no plano.

Definição: O gráfico é o conjunto de todos os pares ordenados (x , f(x)) descritos no plano coordenado (plano cartesiano). Sendo que x deve pertencer ao domínio da função f(x).

O plano cartesiano será a "tela" na qual construiremos as curvas que representam a função estudada, sendo este, composto por um par de eixos perpendiculares e orientados. No encontro dos eixos temos a chamada origem do plano. A montagem do plano cartesiano, pode ser entendida, como a disposição perpendicular de duas "retas reais" .



EXEMPLOS CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÃO

$a = tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{c.o}{c.a}$

Y = f(x) = 2x - 1

$y = ax + b$ $\quad a = 2$

$y = mx + q$ $\quad b = -1$

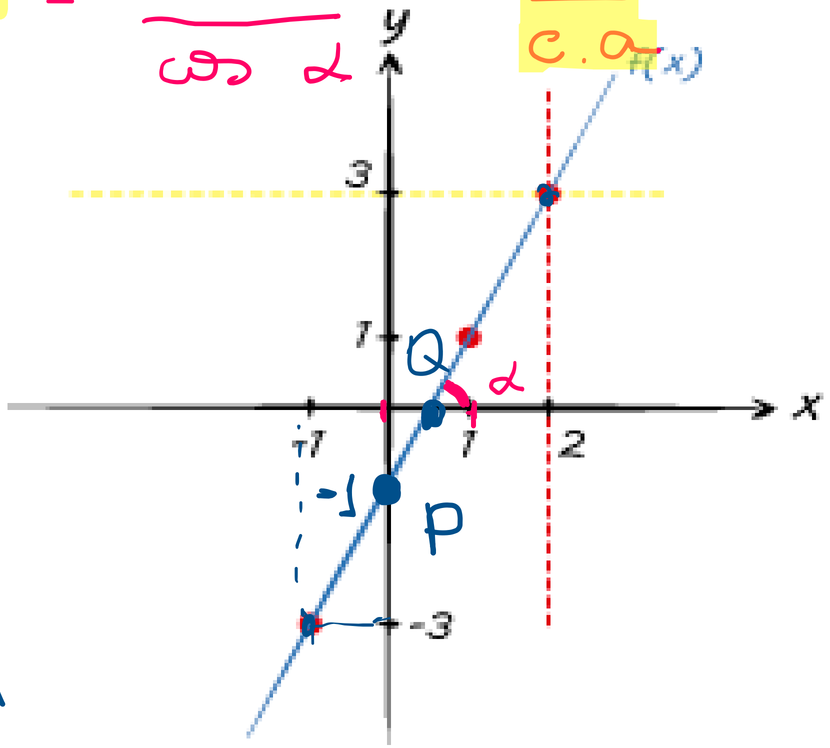
x	y
0	-1
1/2	0

$f(x) = 2x - 1$

$f(0) = 2.0 - 1$

$f(0) = -1$

P (0, -1) $\quad$ Q (1/2, 0)



f. crescente

$a > 0$

Raiz → $y = 0$

$f(x) = 2x - 1$ (x é variável)

$0 = 2x - 1$ (x é incógnitas)

$x = 1/2$

CLASSES PRINCIPAIS DE FUNÇÃO

1) Funções Polinomiais: Função Constante, Função Linear, Função Quadrática

F. AFIM

2) Funções Trigonométricas.

3) Funções Exponenciais/Logarítmicas.

1) FUNÇÕES POLINOMIAIS – FUNÇÃO CONSTANTE

Uma função constante tem o formato geral descrito por:

$y = f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

$y = ax + b$

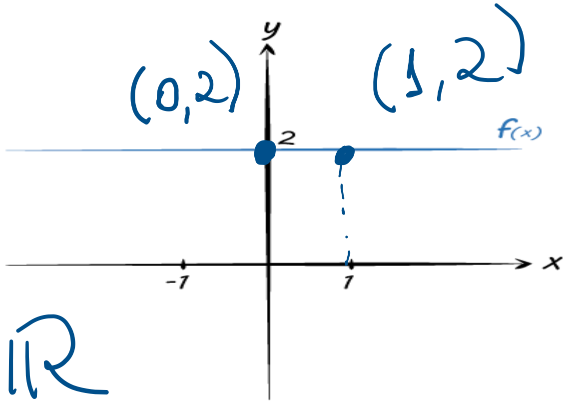
$a = 0$

$y = 0 \cdot x + b$

$y = b, \; b \in \mathbb{R}$

Exemplo:

$Y = f(x) = 2$



$\nexists$ raiz $\in \mathbb{R}$

existe

pertence

1) FUNÇÕES POLINOMIAIS – FUNÇÃO LINEAR

Uma função linear tem o formato geral descrito por:

$a = tg\ \alpha$

coef. ang.

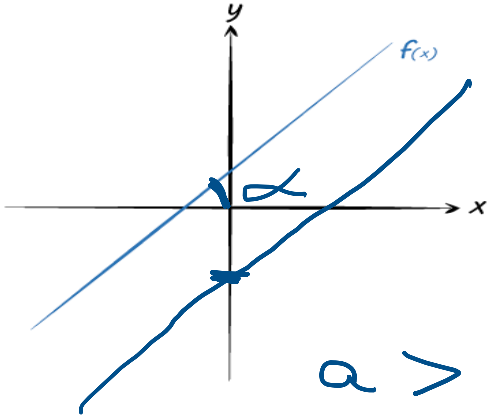
$y = f(x) = ax + b,$ a e $b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$

Exemplos:

$f(x) = 2x - 1$ $a=2$ e $b=-1$.

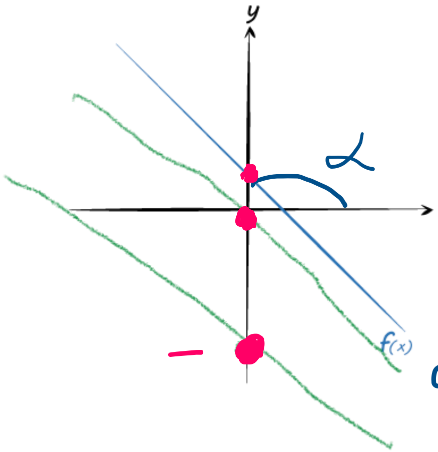
$Y = -3x$ $a=-3$ e $b=0$. $\Rightarrow$ coef. linear

Reta crescente



$a > 0$

Reta decrescente



$a < 0$

Feixe retas //

$y = -3x + 1$

$y = -3x$

$y = -3x - 4$

EXEMPLOS DE GRÁFICOS DE FUNÇÃO LINEAR

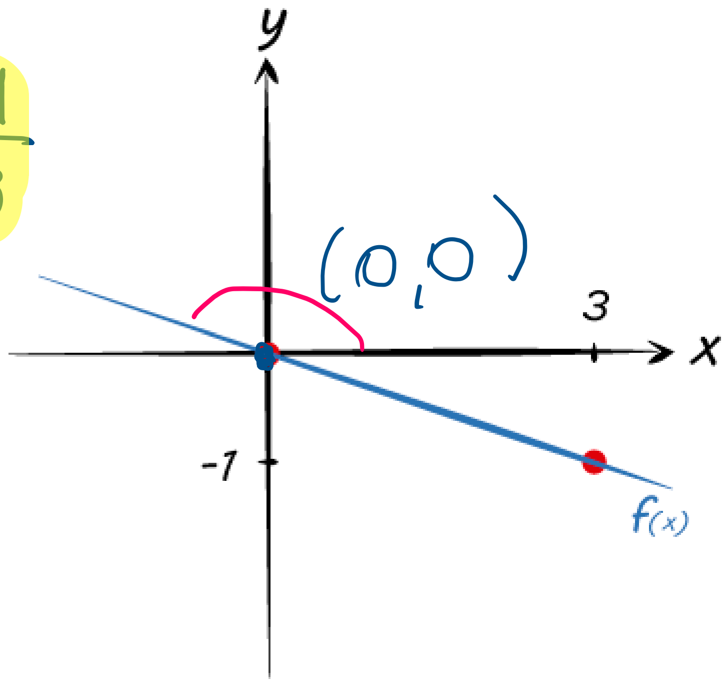
$$y = f(x) = \frac{-x}{3}$$

$a = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{x}{3}$

$y = -\frac{0}{3}$

$y = 0$



1) FUNÇÕES POLINOMIAIS – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função linear tem o formato geral descrito por: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b e c reais.

$(0, c) \to$ coef. linear

Exemplos:

$f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ $a = 5$ $b = 2$ $c = -1$

$y = 2 - x - 3x^2$ $a = -3$ $b = -1$ $c = 2$

$f(x) = \dfrac{-x}{3} + x^2$ $a = 1$ $b = -\dfrac{1}{3}$ $c = 0$

Raízes $\to y = 0$

$0 = -3x^2 - x + 2$

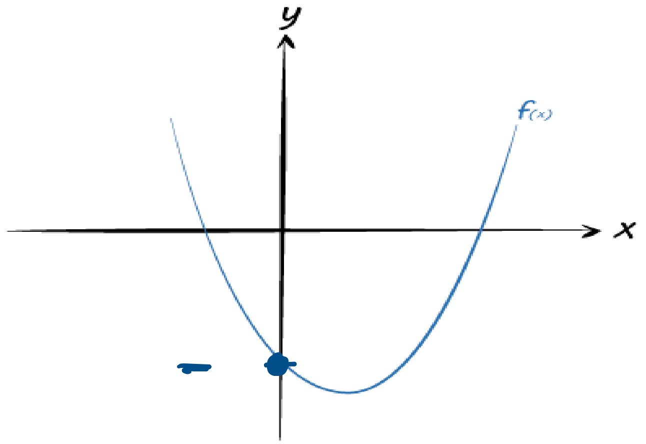
$\Delta = (-1)^2 - 4.(-3).(2)$

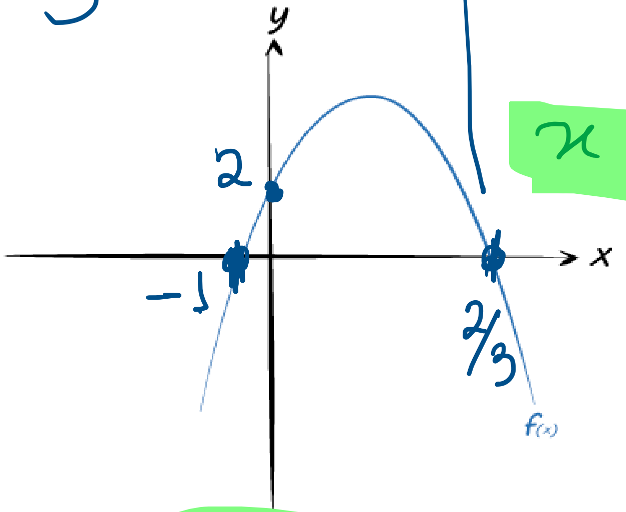
$\Delta = 1 + 24$ $\Delta = 25$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{-6}$

$x_1 = -1$ $x_2 = 2/3$

$\Delta = b^2 - 4ac$





$(x_v, y_v) = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$

Vértice

$(a > 0) \to$ parábola côncava para cima)

$(a < 0) \to$ parábola côncava para baixo)

RAÍZES DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Intersecção com o eixo x

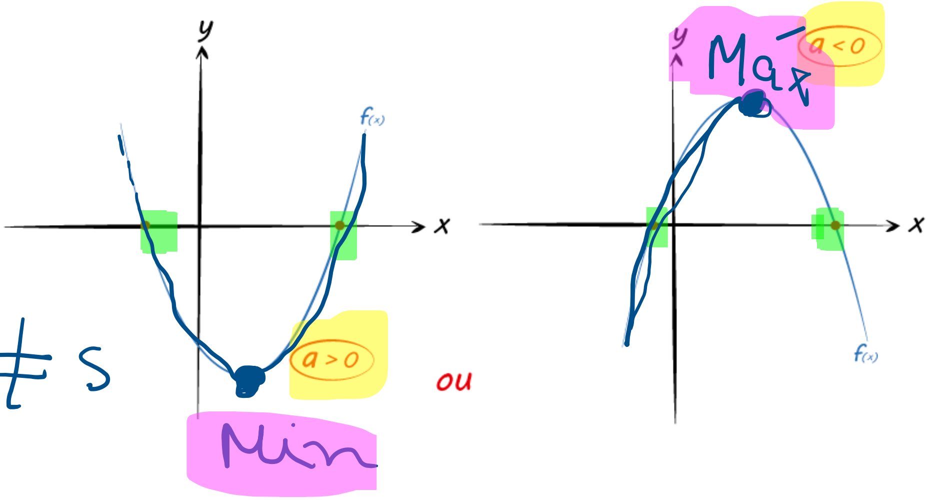
(intercepto no eixo x $\rightarrow$ y = 0)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

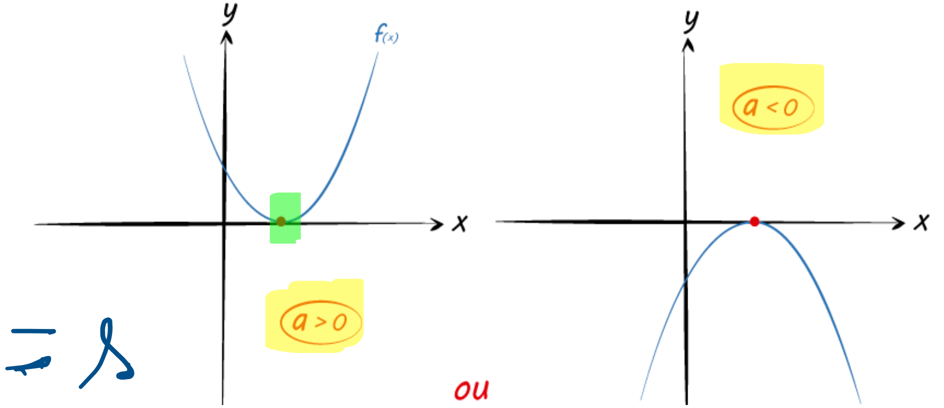
$\Delta > 0$

2 raízes $\neq$s



$\Delta = 0$

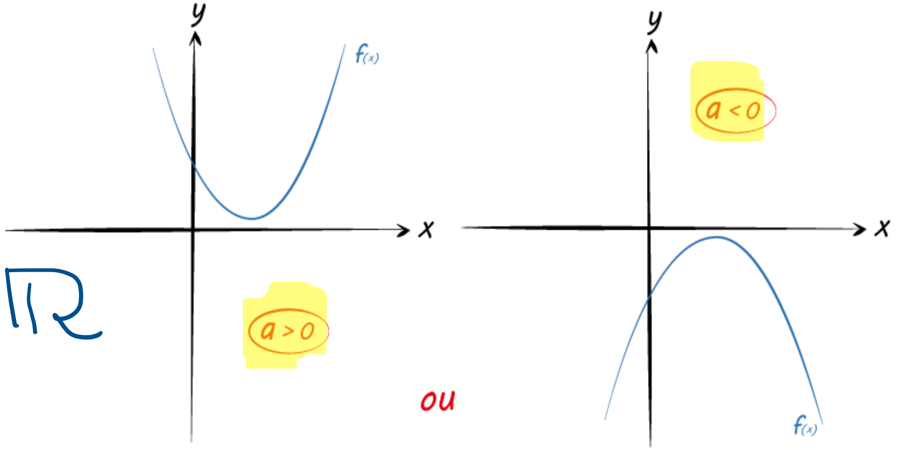
2 raízes =s



$\Delta < 0$

$\nexists$ raízes $\in \mathbb{R}$

$\nexists$ x $\in \mathbb{R}$



I) EXEMPLO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

$y = f(x) = x^2 + x - 2$

$a = 1$ (concavi//

$b = 1$

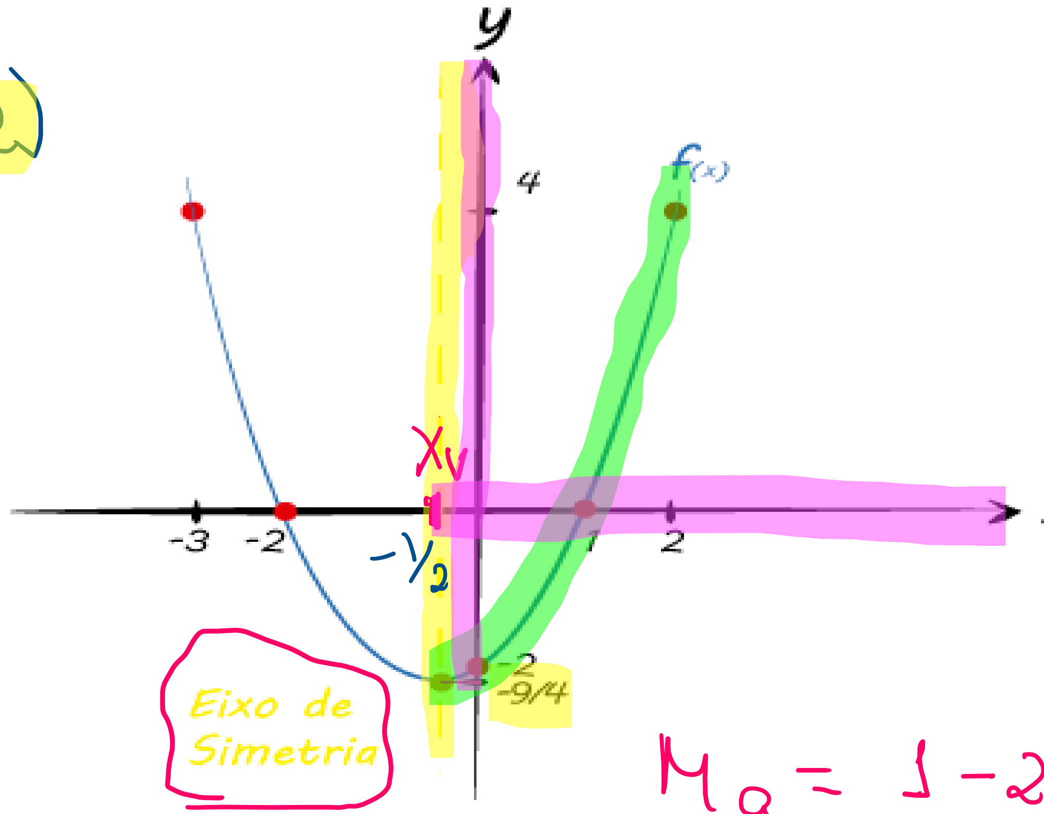
$c = -2$ $\quad (0, -2)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4.(1).(-2) = 1 + 8$

$\Delta = 9$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 & (-2, 0) \\ x_2 = 1 & (1, 0) \end{cases}$$



Vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4}$

$V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

$M_a = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\overset{x}{\mathbb{R}} \to \overset{y}{\mathbb{R}} \;/\; y = f(x) = x^2 + x - 2$$

$$D \to C.D$$

① Injetora: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

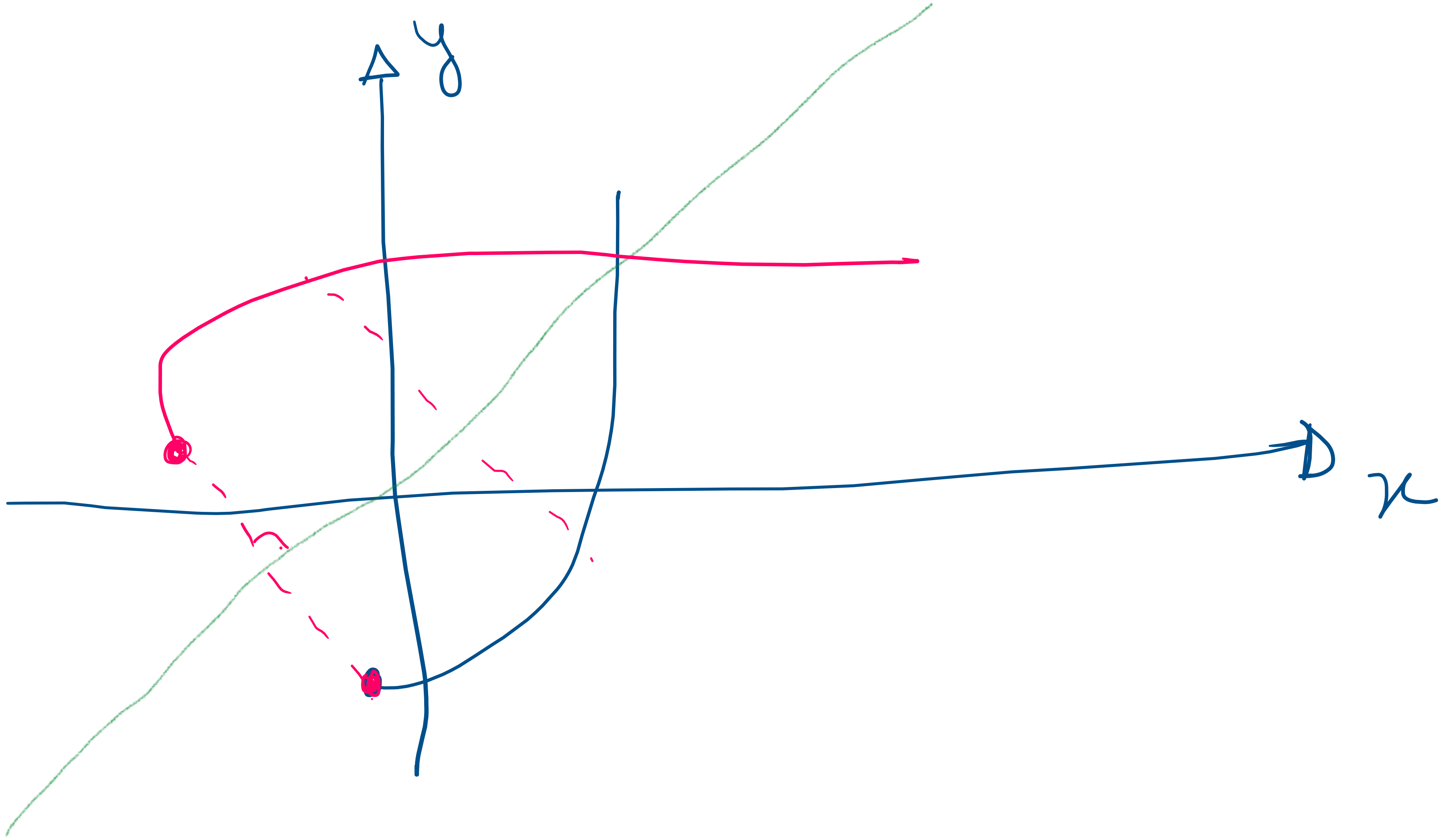
Restrição no domínio

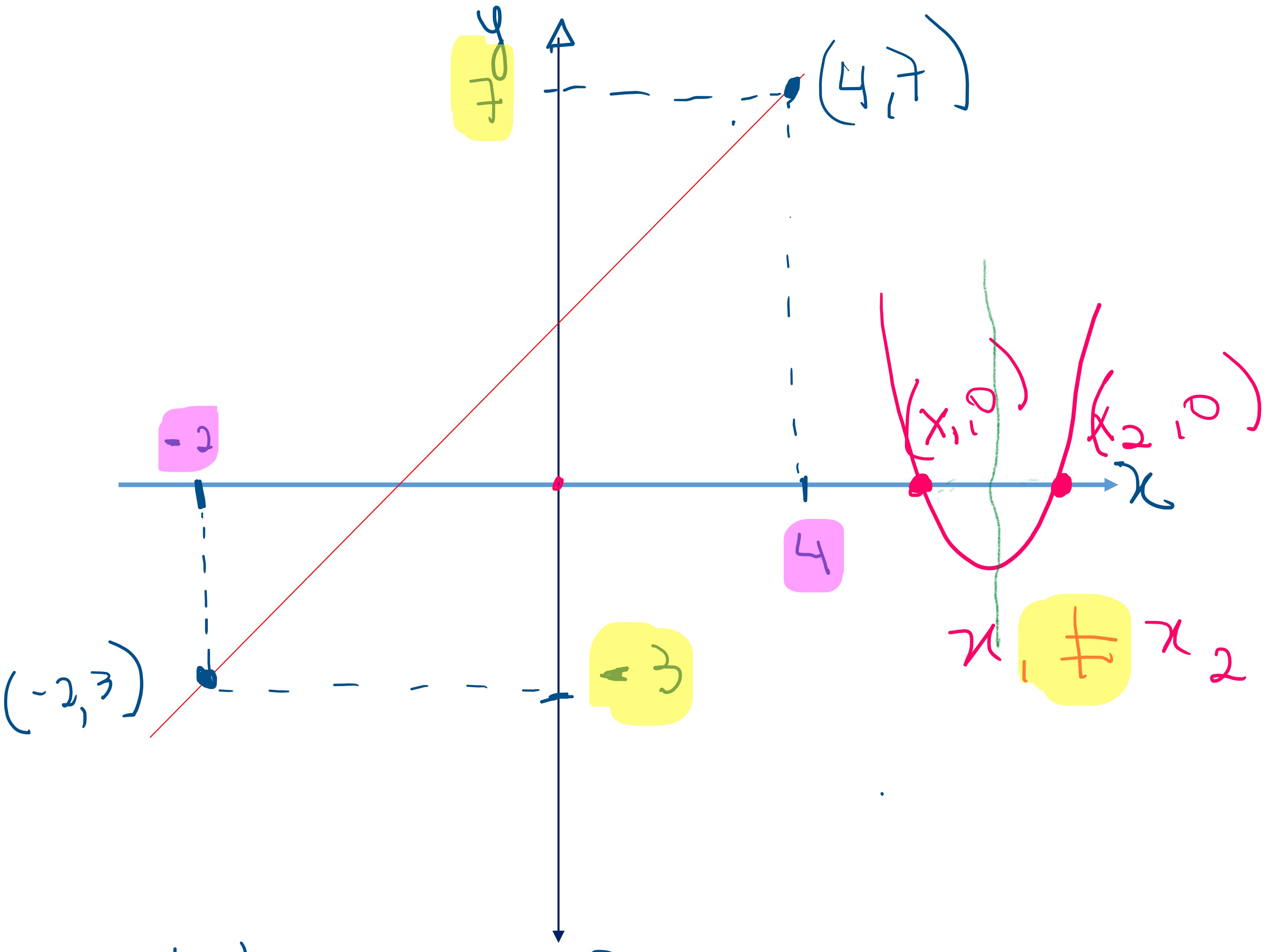
② Sobrejetora: $Im(f) = C.D.$

Restrição no contra-domínio

Bijetora $\Rightarrow$ f admite f^{-1} (inversa)

$$\overset{x}{\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[} \to \overset{y}{\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[} \;/\; y = f(x) = x^2 + x - 2$$


y
x



$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Não é injetora

$-2 \neq 4 \Rightarrow -3 \neq 7$

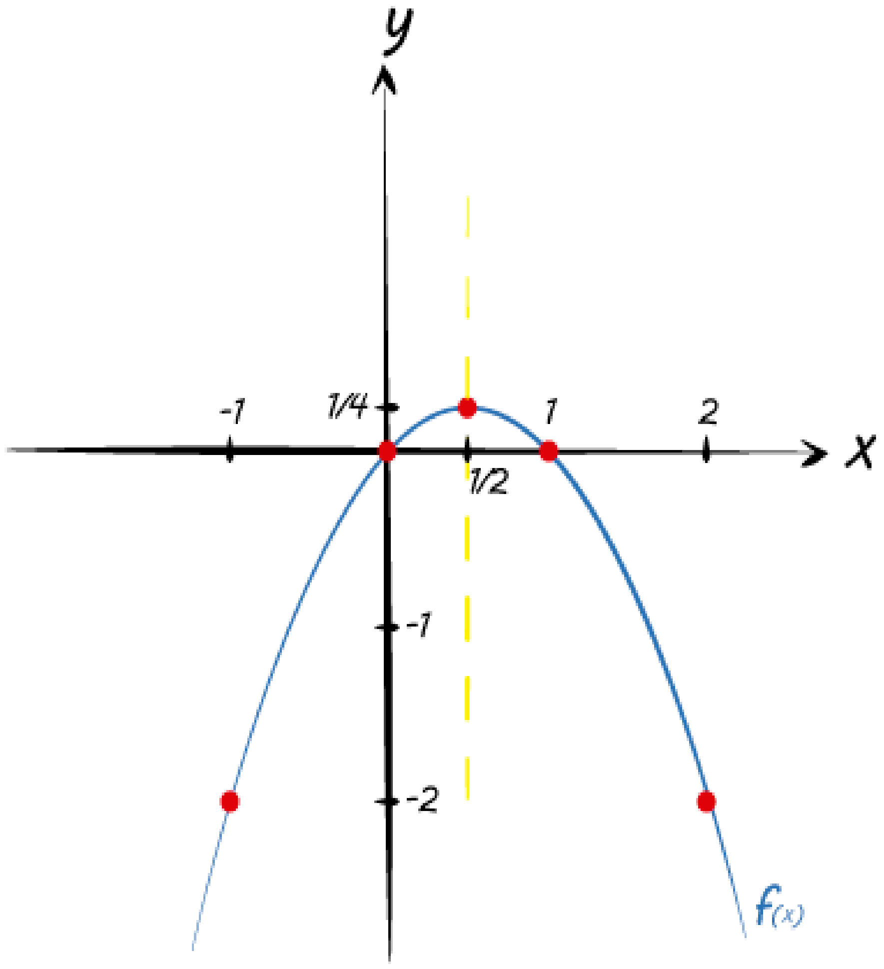
OBSERVAÇAO IMPORTANTE:

Vale notar que a parábola é uma figura simétrica em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice, chamado eixo de simetria. Daí o fato de não ser coincidência quando atribuímos valores à esquerda e à direita espaçados de uma unidade e obtivemos os mesmos valores para y.

Observe a simetria em relação ao eixo.

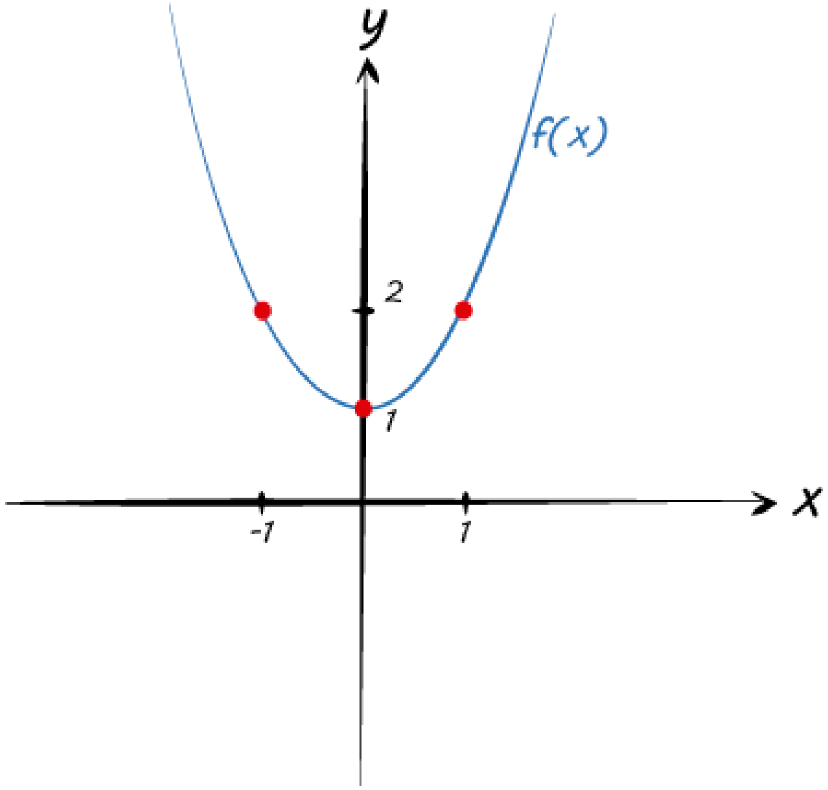
II) EXEMPLO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

$$y = f(x) = x - x^2$$



III) EXEMPLO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

$$y = f(x) = x^2 + 1$$



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PRINCIPAIS:

$$y = f(x) = \text{sen}x$$

$$y = f(x) = \cos x$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}f = [-1,1]$$

x (graus)	x (rad)	senx	cosx
0	0	0	1
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180	π	0	-1
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
360	2π	0	1
-90	$\frac{-\pi}{2}$	-1	0
-180	$-\pi$	0	-1
-270	$\frac{-3\pi}{2}$	1	0
-360	-2π	0	1