PAULO PARGA

ÁLGEBRA LINEAR BÁSICA

COM GEOMETRIA ANALÍTICA

4ª EDIÇÃO

Edur
UFRRJ

ÁLGEBRA LINEAR BÁSICA

COM GEOMETRIA ANALÍTICA

4ª EDIÇÃO

EDUR
Editora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Br 465, Km. 7, Seropédica – RJ - CEP: 23.890-000
Telefone: (021) 2681-4711
Site: www.editora.ufrrj.br
E-mail: edur@ufrrj.br

ÁLGEBRA LINEAR BÁSICA
COM GEOMETRIA ANALÍTICA

4ª EDIÇÃO

PAULO PARGA

Edur
UFRRJ

Rio de Janeiro
2014

Título Original:
Álgebra Linear Básica: com geometria analítica

Editora chefe:
Tania Mikaela Garcia Roberto

Coordenação Administrativa:
Mariangela de Campos Dias

Vice-coordenação administrativa:
Teresinha de Jesus Pereira Abbade

Diagramação:
Paulo Parga

Capa:
Gabriel Paz

Ficha Catalográfica

512.5
P229a
4.ed.

Parga, 1948- Álgebra linear básica / Paulo Parga. Seropédica, RJ: Ed. da UFRRJ, 2013.

236 f.: il.

Bibliografia: p. 235-236.

1. Álgebra linear. I. Título.

ISBN 978-85-8067-061-5

Depósito Legal na Biblioteca Nacional

Editora Filiada à ABEU
Associação Brasileira de Editoras Universitárias

Associação Brasileira
das Editoras Universitári

PREFÁCIO DA 4ª EDIÇÃO

A disciplina Álgebra Linear da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) serviu de base para esse livro. Inicialmente, foram escritas notas de aula que, após a interação com as diversas turmas, fez surgir a primeira edição desse livro. Essa disciplina é cursada pelos alunos de graduação dos cursos de Matemática, Física, Química, Ciência da Informação e das diversas engenharias da UFRRJ. A disciplina é oferecida para alunos do primeiro período, para alguns cursos, e do segundo período para outros. Recentemente, foi criada a disciplina Geometria Analítica que também pode usar esse texto. O pré-requisito para o livro é o ensino fundamental, e para alguns exemplos, o ensino médio. Do ensino médio, apenas conhecimentos sobre trigonometria e resolução de sistemas lineares de ordem 2 ou 3 são necessários para compreensão desses exemplos que, no caso da trigonometria, podem ser desconsiderados caso o leitor ou o professor assim o desejarem. O livro também pode ser utilizado para alunos de cursos de Ciências Econômicas.

Atualmente, na Universidade Rural, a disciplina Álgebra Linear foi desmembrada em duas: Geometria Analítica e Álgebra Linear. Dessa forma, a primeira disciplina está contemplada pelo primeiro capítulo do livro, e a disciplina subsequente com os demais capítulos. O conteúdo do livro pode ser lecionado em uma ou mais disciplinas, dependendo do enfoque, de 60 a 120 horas.

A idéia do livro é conduzir o leitor, sempre tendo à mão os conceitos geométricos no R^2 e no R^3, aos conceitos mais abstratos de espaço vetorial e de autovalores e autovetores. São feitos muitos exemplos para suavizar essa passagem do concreto ao abstrato. Os capítulos estão interligados e cada um usa os capítulos anteriores, mostrando sempre a ligação da geometria analítica com os sistemas lineares, esses com os espaços vetoriais e finalmente, das transformações lineares com todos esses tópicos.

O livro está dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo trabalha com a geometria analítica sob o ponto de vista vetorial, primeiro no plano e depois no espaço onde a vizualização é mais difícil. Assim, é feita lentamente uma introdução ao espaço vetorial R^n, levando o leitor devagar ao conceito abstrato de espaço vetorial real. Nesse capítulo, são estudadas as equações de retas e de planos, bem como são medidos distâncias e ângulos entre esses conjuntos. Também são definidas as cônicas (elipses, parábolas e hipérboles) e obtidas as equações de esferas, sem se alongar muito nesse assunto. É feito também o cálculo de volumes de tetraedros e prismas usando-se o produto misto. No segundo capítulo, estudam-se as matrizes e os sistemas lineares usando-se escalonamento. Além disso, calculam-se determinantes sob o ponto de vista prático e estuda-se, de forma tradicional, a obtenção da matriz inversa. Também, é feito o relacionamento dos sistemas lineares desse capítulo, com a geometria feita no primeiro capítulo. Na terceira edição foi adicionado um apêndice sobre regra de Cramer. No terceiro capítulo, estudam-se os espaços vetoriais reais. Todo esse capítulo é desenvolvido observando-se a semelhança entre os conceitos de espaço vetorial com a resolução de sistemas lineares. No quarto e último capítulo são estudadas as transformações lineares, sempre que possível, de uma forma geométrica. É feita uma equivalência entre o conjunto das matrizes e o das transformações lineares em R^n, por meio de suas matrizes canônicas. O teorema do Núcleo e da Imagem também é contemplado. No final desse capítulo, estudam-se os autovalores e autovetores. O apêndice do capítulo quatro, que também foi incluído na terceira edição, faz uma aplicação das transformações lineares com a computação gráfica, mostrando como é possível desenhar na tela de computadores gráficos de funções reais e curvas no R^3.

Nessa edição foi feita uma revisão procurando eliminar possíveis erros da edição anterior.

As matrizes em outras bases, diferentes das canônicas, e os conceitos de produto interno e ortogonalidade (exceto no R^n) não são estudados nesse livro. Essa parte da álgebra linear, na UFRRJ é estudada em outra disciplina, que é obrigatória para alguns cursos e opcional para outros. Essa parte pode ser vista nos livros [1] , [2] , [3] , [4] , [5] e [6] da bibliografia.

ÍNDICE

CAPÍTULO I – A Geometria do R^n

CAPÍTULO II – Matrizes e Sistemas Lineares

CAPÍTULO III – Espaço Vetorial Real

CAPÍTULO IV – Transformações Lineares

I - A GEOMETRIA DO R^n

I.1 - Introdução

Nesse capítulo é feita uma introdução ao conceito de espaço vetorial real através dos espaços R, R^2, R^3 e, generalizando esses espaços, do R^n. Os conceitos geométricos, de retas, planos, circunferências e etc., são introduzidos de uma forma intuitiva. Primeiramente a geometria analítica é feita no plano para depois da manipulação dos conceitos nesse espaço passar para o espaço R^3. A compreensão e os cálculos de ângulos e distâncias entre retas e planos ficam mais fáceis de serem entendidos ao se desenvolver a teoria, inicialmente no plano, onde se tem uma visão geométrica melhor, para depois passar para o espaço. E observando-se as propriedades dos espaços R^2 e R^3, fica mais suave a abstração do conceito de R^n, e, posteriormente no terceiro capítulo, de espaço vetorial.

I.2 - Uma Representação Geométrica para os Reais

Quando se fala em medir, fala-se nos números reais. A temperatura, o comprimento da diagonal de um quadrado ou o perímetro de uma circunferência, ou até mesmo a quantidade de dinheiro que se tem em uma conta corrente em um banco, que pode ser positiva ou negativa (dívida), e tudo que se relaciona com medidas são exemplos do uso dos números reais. A localização de alguma coisa também pode ser expressa usando-se números. Por exemplo, quando se localiza um sítio em uma estrada, menciona-se o quilometro da estrada em que fica o sítio, que também pode ser entendido como uma medida da distância do início da estrada ao sítio.

Aqui nesse texto, supõe-se que sejam conhecidos os números reais junto com as operações de adição e multiplicação e suas propriedades. No entanto, é interessante lembrar a representação geométrica desse conjunto. Para representar geometricamente os números reais desenha-se uma reta, onde é escolhido um ponto qualquer, que é denominado **origem** e denotado por O.

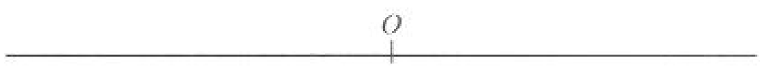

Figura I.1 – A origem na representação geométrica dos números reais.

Cada número real é representado pelo ponto da reta cuja distância à origem é dada por esse número, considerando-se uma unidade qualquer. Porém, da origem existem dois números cuja distância é, por exemplo, 7. Um à direita e outro à esquerda da origem. Assim, escolhe-se uma direção, que é indicada por uma seta, como na figura abaixo, e coloca-se na direção escolhida após a origem os reais positivos e na direção oposta os reais negativos. Dessa forma, os números reais 7 e -7 são representados pelos pontos da reta cuja distância é 7. Porém, o real 7 fica do lado da direção positiva e o -7 do lado negativo.

Figura I.2 – Representação geométrica dos números reais.

A origem, que representa o real zero, divide a reta em duas semi-retas, uma para os reais positivos, do lado indicado pela seta, e a outra para os reais negativos. Dessa maneira, cada um dos pontos da reta representa, geometricamente, um número real e cada número real tem uma única representação geométrica na reta.

É importante ressaltar que 7 e -7, têm a mesma distância da origem. Essa distância é denotada por $|7| = |-7| = 7$. A notação de um número real x entre duas barras, $|x|$, representa a distância de x à origem e é denominada **valor absoluto, módulo ou norma** do número real x. Logo se escreve:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

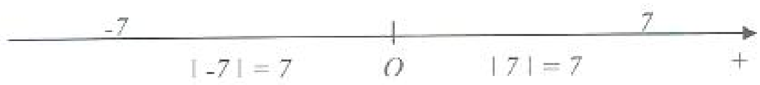

Figura I.3 – A representação geométrica do valor absoluto de um número.

O valor absoluto de x também pode ser escrito como $|x| = \sqrt{x^2}$. Cabe lembrar que a raiz de um número real é sempre positiva. Assim, o valor absoluto de -7 é $|-7| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$. Na próxima seção, veremos que essa forma de escrever o valor absoluto pode ser generalizada para o R^2 e, mais adiante, também pode ser generalizada para o R^n.

Dados dois pontos dos reais, a e b, a **distância entre a e b** é igual a $|\, b - a \,|$, independentemente do valor desses números reais. Como exercício verifique isso, considerando ambos com o mesmo sinal, primeiro positivos, depois negativos, com b maior que a e vice-versa. E depois considere que os dois números têm sinais distintos. Observe que sempre a distância será $|\, b - a \,|$.

I.3 – O Espaço R^2

Algumas vezes o conjunto dos números reais não é suficiente para exprimir medidas e/ou locais. Por exemplo, quando se quer fornecer uma posição na superfície da terra é preciso dar a latitude e a longitude, ao medir a pressão sanguínea de uma pessoa usa-se a máxima e a mínima ou uma pessoa que tenha em um banco, uma conta corrente e uma poupança precisa de duas informações de saldo e muitos outros exemplos podem ser dados nesse sentido.

Para exemplos desses tipos usa-se o espaço R^2, que é o conjunto $\{(x, y) \mid x, y \in R\}$, isto é, o produto cartesiano $R \times R$, ou seja, é o conjunto de pares de números reais considerando as duas operações:

Adição: $R^2 \times R^2 \to R^2$; que associa dois pares de números reais (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ao par $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Multiplicação por escalar: $R \times R^2 \to R^2$; que associa um número real a e um par de números reais (x, y) ao par (ax, ay).

EXEMPLO I.1

Nesse exemplo são feitas operações de adição e multiplicação por escalar:

$(1, -7) + (3, 5) = (4, -2)$ $\qquad$ $-2(-4, 0) = (8, 0)$

$3(1, -2) = (3, -6)$ $\qquad$ $0(\pi, -\sqrt{2}) = (0, 0)$

□

Essas duas operações podem ser feitas conjuntamente, e nesse caso, a operação recebe o nome de **combinação linear**. A combinação linear entre dois pares do espaço R^2, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é uma operação em que é feita uma mistura da adição com a multiplicação por escalar. Assim, dados os números reais a e b, a operação a seguir é uma combinação linear:

$$a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$$

EXEMPLO I.2
Calculando a combinação linear:
$2\,(-1\,,5)-3\,(-2\,,1) = 2\,(-1\,,5)+(-3)\,(-2\,,1) = (-2\,,10)+(6\,,-3) = (4\,,7)$.
□

A combinação linear pode ser feita com n pares do R^2. Dados os números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ e n pares de números reais, $(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, n$ a operação abaixo também é denominada uma combinação linear desses pares:

$$a_1(x_1, y_1) + a_2(x_2, y_2) + \dots + a_n(x_n + y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i) =$$
$$= (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \ ,\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n) =$$
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\,,\ \sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right)$$

I.3.1 – Uma Representação Geométrica para o R^2

A representação geométrica do espaço R^2 é feita usando-se duas retas, cada uma delas representando geometricamente um dos conjuntos R do produto cartesiano $R \times R$. Essas retas são denominadas **eixos cartesianos**.

Esses eixos são desenhados perpendicularmente tendo como interseção a origem de cada um deles. Esse ponto de interseção também é denominado **origem** e representa o par $(0\,,0)$.

Em geral, esses eixos são desenhados, um horizontalmente apontando para a direita e o outro apontando para cima. A escolha de qual deles representará o primeiro elemento do par $(x\,,y)$ é feita de forma que, o 1^o eixo deve ser girado de $\pi/2$ no sentido anti-horário para encontrar o segundo eixo. Assim, o eixo que representará a 1^a coordenada do par $(x\,,y)$, na figura abaixo, será o horizontal, denominado eixo X ou das **eixo das abscissas** e o eixo vertical representará a 2^a coordenada e é denominado eixo Y ou **eixo das ordenadas**.

Assim, o par $A = (x\,,y) \in R \times R = R^2$ é representado no par de eixos da seguinte forma: passando pelo ponto x do eixo X desenha-se uma reta paralela ao eixo Y (vertical) e pelo ponto y do eixo Y traça-se uma reta paralela ao eixo X (horizontal). Na interseção dessas duas retas fica o ponto $A = (x\,,y)$ que geometricamente é o par $(x\,,y)$ do R^2.

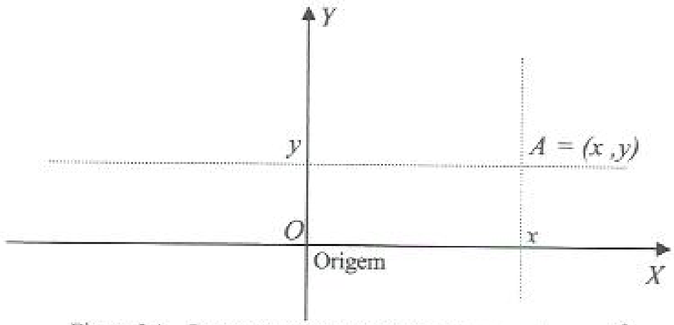

Figura I.4 – Representação geométrica de um ponto no R^2.

Assim, em cada ponto do plano determinado pelos eixos X e Y está representado um único par do R^2 e cada par do R^2 tem uma única representação nesse plano. Esse é denominado **plano XY** ou **plano cartesiano.**

O plano XY fica dividido pelos eixos cartesianos em quatro pedaços, denominados **quadrantes**. O **primeiro quadrante** é aquele dos pontos (x , y) em que $x > 0$ e $y > 0$. No 2º quadrante $x < 0$ e $y > 0$. No 3º $x < 0$ e $y < 0$. E finalmente, seguindo o sentido trigonométrico, o 4º quadrante é aquele em que $x > 0$ e $y < 0$.

Algumas vezes confunde-se a representação geométrica do plano cartesiano XY com o próprio R^2. Dessa forma, encontra-se a denominação dos reais R como reta e do R^2 como plano, confundindo-se esses conjuntos com suas representações geométricas.

Outra forma, além da forma de ver os elementos do R^2 como pontos, é representar os pares $(x , y) \in R^2$ geometricamente, como **flechas** (ou setas ou segmentos de retas orientados). Essas flechas têm a extremidade inicial na origem e final no ponto (x , y) do plano XY.

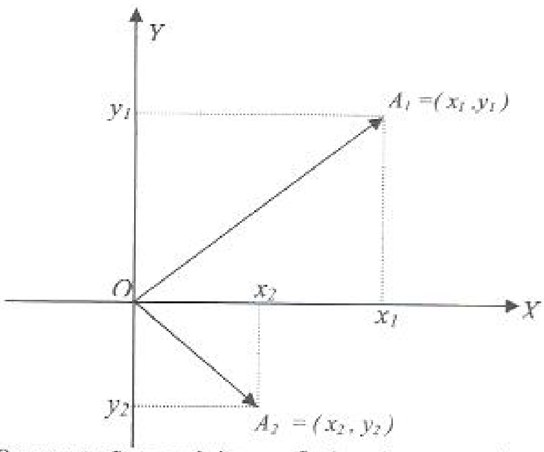

Figura I.5 – Representação geométrica, por flechas, dos pontos A_1 e A_2 no R^2.

Essa forma geométrica de ver os elementos do R^2 como flechas, ajuda no cálculo da distância de ponto $A = (x, y)$ até a origem. Essa distância pode ser calculada usando-se o teorema de Pitágoras. Para isso, veja na figura abaixo, deve ser considerado o triângulo retângulo de vértices: $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ e $P = (x, 0)$.

Nesse triângulo, os catetos medem $|x|$ e $|y|$ e a hipotenusa, que é a distância pretendida, mede $\sqrt{x^2 + y^2}$. O tamanho dessa hipotenusa é a distância de $A = (x, y)$ até a origem $O = (0, 0)$. Essa distância é denotada por (x, y) entre duas barras: $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e é denominada **norma** (ou módulo) **de** (x, y).

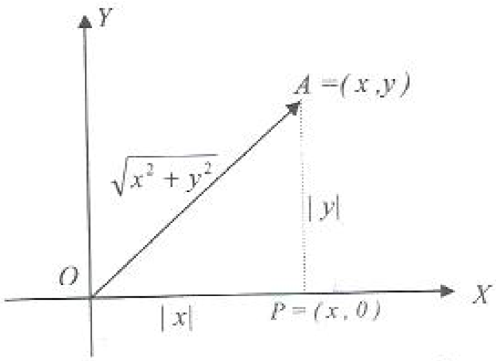

Figura I.6 – A norma de um ponto no R^2.

Se $\|(x, y)\| = 1$ diz-se que o par (x, y) é **unitário**.

Observe que o valor absoluto em R, pode ser considerado um caso particular dessa norma em R^2, quando $y = 0$, ou seja:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 0} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

EXEMPLO I.3

Duas perguntas podem ser feitas sobre distância de um ponto qualquer até a origem. Qual é a distância entre o ponto $A = (-4, 3)$ e a origem? Quais são os pontos do R^2 que distam esse mesmo valor da origem?

Pelo que vimos acima, a resposta para a primeira pergunta é:

$\|A\| = \|(-4, 3)\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^3} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

Para a segunda pergunta: os pontos do R^2, cuja distância até a origem é 5, formam uma circunferência de centro na origem e raio 5.

□

I.3.2 – A Circunferência de Centro na Origem

Uma **circunferência** é o conjunto de pontos do R^2 cuja distância (**raio**) a um ponto fixo (**centro**) é constante. Pode-se então obter a equação de dessa circunferência de centro na origem e raio a . Se (x, y) pertence a essa circunferência, então $\| (x, y) \| = a$, ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = a$. Essa equação pode ser simplificada elevando-se ambos os lados da igualdade ao quadrado, ficando:

> **A circunferência de raio a e centro O é o conjunto**
> $\{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = a^2 \}$.

EXEMPLO I.4
A equação da circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio 5 é $x^2 + y^2 = 25$. Observe que as coordenadas do ponto $A = (-4, 3)$ do exemplo anterior satisfazem a essa equação.

□

I.3.3 – A Geometria da Adição no R^2

Quando se representa geometricamente o R^2 através de flechas, pode-se liberar a condição de todas as flechas terem como extremidade inicial a origem e final no ponto (x, y).

O que significa uma flecha "solta", como as da figura abaixo?

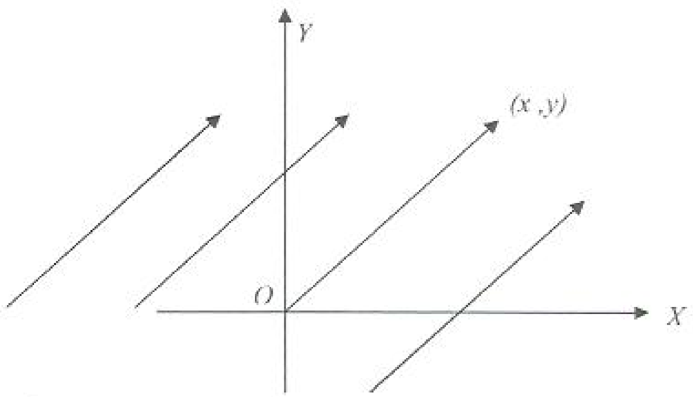

Figura I.7 – Representação de um mesmo ponto do R^2 por diversas flechas.

Se duas ou mais flechas são paralelas, têm a mesma direção, tamanho e sentido, elas representam o mesmo par $(x, y) \in R^2$. Essas flechas são cópias da flecha que inicia na origem e termina em (x, y). Assim, na figura acima, todas as flechas são figuras que ilustram o mesmo par (x, y).

Essa forma de flecha "solta" permite visualizar geometricamente a operação de adição. Para que se tenha uma melhor visão da operação adição do par (x_1, y_1) com o par (x_2, y_2), primeiramente (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são colocados em desenhos separados, respectivamente, nas figuras I.8 *(a)* e *(b)*. Depois no desenho da figura I.8 *(c)*, colocou-se esses pares juntos, porém com (x_2, y_2) iniciando no ponto (x_1, y_1) e não na origem.

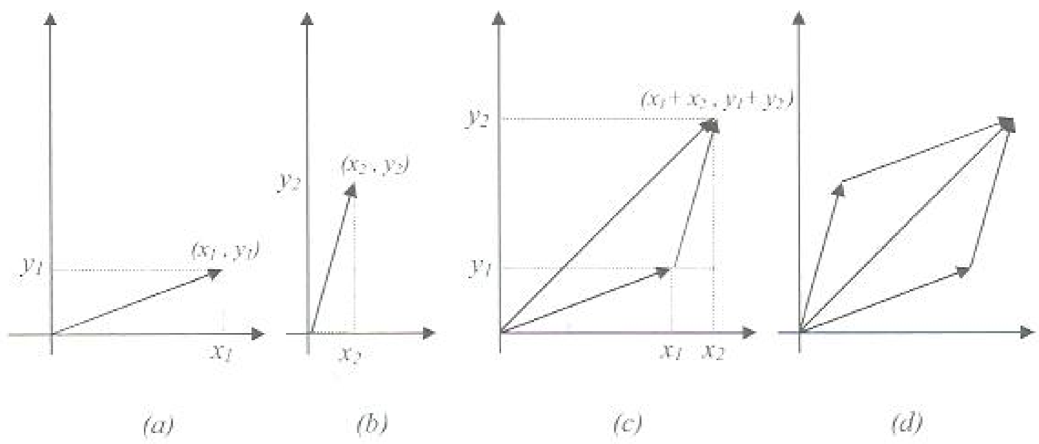

Figura I.8 – Representação geométrica da adição no R^2.

Observe que a soma (ou **resultante**) é a flecha que inicia na origem (onde toda flecha deveria iniciar) e termina na extremidade final da flecha que é o ponto (x_2, y_2). Essa extremidade final, já que a flecha da resultante inicia na origem, é o ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Os valores para essas coordenadas podem ser obtidos, veja figura I.8 *(c)*, somando-se os comprimentos dos segmentos de retas horizontais e verticais.

Como essa operação é comutativa, ou seja, pode ser trocada a ordem da adição, a ilustração dessa operação pode ser feita das duas formas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \quad \text{ou} \quad (x_2, y_2) + (x_1, y_1),$$

concluindo-se que o resultado da operação de adição (figura I.8 *(d)*) é a diagonal do paralelogramo que tem vértices: $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) e

$(x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2)$. Por esta razão, denomina-se a essa soma geométrica **regra do paralelogramo**.

I.3.4 – A Distância entre dois pontos no R^2

Dados dois pontos A e B do plano, para calcular a distância entre eles considere a flecha iniciando em A e terminando em B, denotando-a por $\overline{AB}$. Somando-se a flecha A com $\overline{AB}$, pela regra do paralelogramo, obtém-se a flecha B, ou seja, $A + \overline{AB} = B$, logo $\overline{AB} = B - A$. Assim, a distância de A até B é o tamanho da flecha $\overline{AB}$ que é $\|\overline{AB}\| = \|B - A\|$.

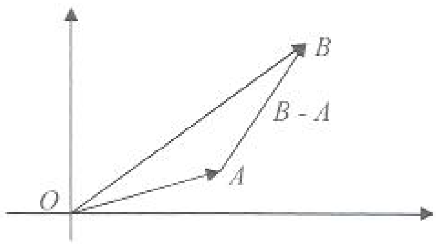

Figura I.9 – Distância entre dois pontos.

E assim, escreve-se:

A distância entre os pontos A e B é igual a $\|B - A\|$.

EXEMPLO I.5 ———————

Se $A = (7\,,\,-2)$ e $B = (3\,,\,1)$ tem-se que $B - A = (-4\,,\,3)$ e logo a distância de A até B é $\|B - A\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

$\square$

Conhecendo-se a distância entre dois pontos é possível obter a equação de uma circunferência com centro em um ponto qualquer $C = (a\,,\,b)$ e raio r. Para um ponto $X = (x\,,\,y)$ pertencer à circunferência a distância de X até C deve ser r. Logo $\|X - C\| = r$ e para evitar a raiz quadrada eleva-se ambos os lados dessa igualdade ao quadrado obtendo-se $\| X - C \|^2 = r^2$, ou seja, podemos escrever que:

$$\| X - C \|^2 = \| (x-a, y-b) \|^2 = \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Resumindo:

> **A circunferência de centro (a, b) e raio r é o conjunto**
>
> $$\{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

EXEMPLO I.6

A circunferência de centro $(3, 4)$ e raio 5 tem equação $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, ou seja, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

□

EXEMPLO I.7

Considere agora que é dada a equação $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 11 = 0$.
Se essa é a equação de uma circunferência, como descobrir seu centro e seu raio?
Para isso, escreva a equação da seguinte forma:
$4x^2 - 8x + 4y^2 + 16y + 11 = 0$, juntando os termos em x e em y, ou ainda,
$4(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) + 11 = 0$, que completando o quadrado fica:
$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) + 11 = 0$, ou então,
$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 + 11 = 0 \therefore$
$4(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 9$. e dividindo-se toda a equação por 4 chega-se à equação $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9/4$ que é a equação de uma circunferência de raio $3/2$ e centro no ponto $(1, -2)$.

□

I.3.5 – A Multiplicação por Escalar e as Equações da Reta

Para visualizar geometricamente a operação de multiplicação por escalar, $a(x, y) = (ax, ay)$, deve-se verificar como fica essa operação para alguns valores de a. Por exemplo:

se $a = 1$ nada acontece na multiplicação : $1(x, y) = (x, y)$, se $a = 0$ qualquer que seja o par (x, y) é levado na origem $(0, 0)$,

se $a = 2$ o par (x, y) é levado no par $(2x, 2y)$, que com a representação por flechas e usando semelhança de triângulos, pode ser visto que essa é uma flecha com a mesma direção e sentido que a flecha (x, y) porém com o dobro de tamanho.

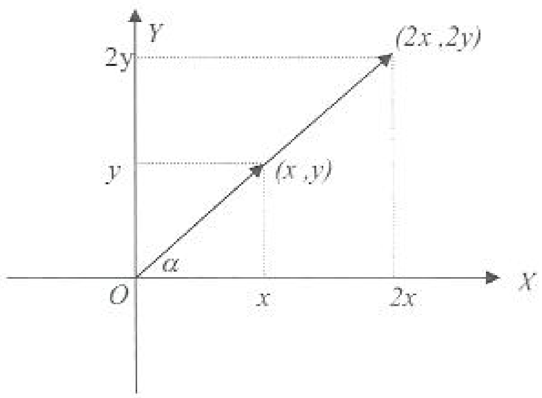

Figura I.10 – Multiplicando uma flecha por dois.

Da mesma forma que na multiplicação por 2, qualquer que seja $a > 0$ o par (ax, ay) tem a mesma direção e sentido que (x, y), porém tem seu tamanho multiplicado por a.

Fazendo-se as contas algebricamente:

Se α é o ângulo entre o eixo X e a flecha (x, y) e β o ângulo entre o eixo X e a flecha (ax, ay), com $a \neq 0$, então, para $x \neq 0$, $tg\ \alpha = \frac{y}{x}$ e $tg\ \beta = \frac{ay}{ax} = \frac{y}{x} = tg\ \alpha$. Assim, os ângulos são iguais, $\alpha = \beta$, que mostra que a direção das flechas (x, y) e (ax, ay) é a mesma.

Ainda mais,

$$\|(ax, ay)\| = \sqrt{(ax)^2 + (ay)^2} = \sqrt{a^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2}\sqrt{x^2 + y^2} = a\,\|(x, y)\|,\ a > 0$$

Se $a = -1$, a flecha $(-1)(x, y) = (-x, -y)$. Essa flecha, obtida com a multiplicação por -1, tem a mesma direção e tamanho que a flecha (x, y) porém tem sentido oposto. Veja na figura abaixo:

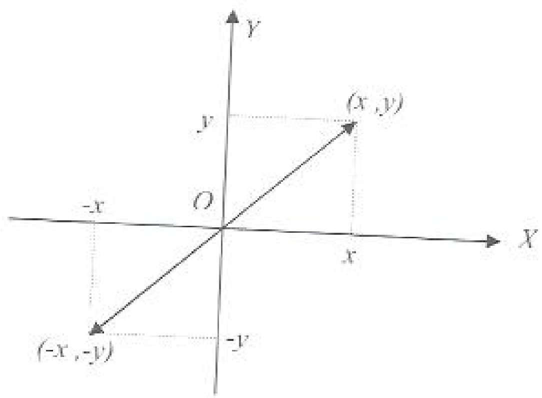

Figura I.11 - Multiplicando uma flecha por -1.

Para todo $a < 0$ a flecha (ax, ay) tem a mesma direção, sentido oposto e o seu tamanho é multiplicado por $|a|$, como é mostrado nas contas a seguir:

$$||(ax, ay)|| = \sqrt{(ax)^2 + (ay)^2} = \sqrt{a^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2}\sqrt{x^2 + y^2} = |a|\,||(x, y)||,\ a < 0.$$

Resumindo, qualquer que seja o valor de $a \in R$, $a \neq 0$, a flecha multiplicada por a, (ax, ay) tem a mesma direção que a flecha (x, y), o mesmo sentido se $a > 0$ e sentido oposto se $a < 0$ e tem o tamanho igual ao de (x, y) multiplicado por $|a|$.

Como todas as flechas, obtidas pela multiplicação de um número real por um dado vetor não nulo, têm sempre a mesma direção da flecha dada, pode-se então chegar à equação de uma reta que contém a origem.

Seja $d = (x_1, y_1)$ um dado vetor não nulo, que será denominado **direção da reta**, ou simplesmente direção. **A reta que passa pela origem e tem a direção de d** é descrita como o seguinte conjunto de pontos X do R^2:

$$\boldsymbol{X = (x, y) = t\,d = t\,(x_1, y_1)\ \text{com}\ t \in R,}$$

ou seja,

$$(x, y) = (t\,x_1, t\,y_1),\ t \in R$$

ou ainda,

$$\begin{cases} x = t\,x_1 \\ y = t\,y_1 \end{cases}, t \in R$$

Essas equações são denominadas **equações paramétricas** da reta que tem a direção de d e contém a origem. O número real t é denominado **parâmetro** das equações.

EXEMPLO I.8

As equações paramétricas da reta que tem a direção de $d = (1, 1)$ e contém a origem é $(x, y) = t(1, 1) = (t, t)$, ou ainda, $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in R$

Se a reta não contém a origem e é conhecida sua direção $d = (x_1, y_1)$ e um ponto qualquer da reta $A = (x_2, y_2)$, para obter a equação dessa reta, basta usar a regra do paralelogramo. Dizer que d é a direção da reta é o mesmo que dizer que a flecha d é paralela à reta.

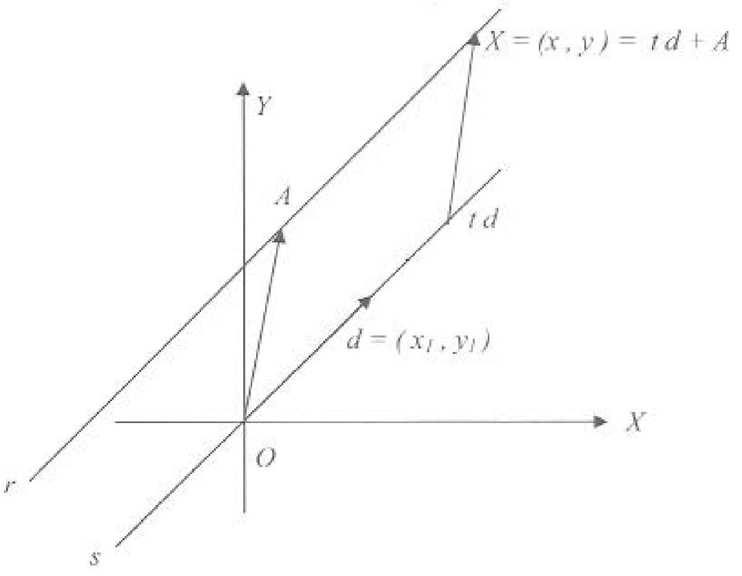

Figura I.12 – Reta paralela à direção d contendo o ponto A.

Considere a reta s, que tem a direção d e passa pela origem. Soma-se a qualquer ponto da reta s, paralela à reta pretendida r, o ponto A. Para X pertencer à reta r, $X = t\,d + A$, $t \in R$. Como o quadrilátero de vértices $O, A, t\,d$ e $t\,d + A$ é um paralelogramo, variando-se o valor de t descreve-se a reta r paralela a s e que contém o ponto A (fazendo $t = 0$ na equação $X = t\,d + A$).

Assim, as equações paramétricas dessa reta são escritas na forma:

$X = t\,d + A$, $t \in R$, ou seja,

$$(x, y) = t(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (t x_1 + x_2,\ t y_1 + y_2),$$

ou ainda:

Equações paramétricas da reta que contém o ponto (x_2, y_2) e tem a direção de $d = (x_1, y_1)$:

$$\begin{cases} x = t x_1 + x_2 \\ y = t y_1 + y_2 \end{cases},\ t \in R$$

EXEMPLO I.9

A equação da reta r paralela (ou que tem a mesma direção) de $d = (3, 2)$ e contém o ponto $A = (1, -1)$ é $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases},\ t \in R$

Para cada valor de t obtém-se um ponto da reta r. Assim, são pontos da reta: $t = 0$, $A = (1, -1)$; $t = 1$, $X = (4, 1)$; $t = -1$, $X = (-2, -3)$; etc.

Por outro lado, para saber se os pontos $X_1 = (10, 5)$ e $X_2 = (7, 1)$ pertencem à reta r, deve-se substituir esses pontos no lugar de $X = (x, y)$ e resolver o sistema em t.

Substituindo X_1 no lugar de X fica: $\begin{cases} 10 = 3t + 1 \\ 5 = 2t - 1 \end{cases},\ t \in R$ obtendo $t = 3$ nas duas equações, concluindo-se que $X_1 \in r$.

Substituindo agora X_2 no lugar de X fica: $\begin{cases} 7 = 3t + 1 \\ 1 = 2t - 1 \end{cases},\ t \in R$ obtendo $t = 2$ na primeira equação e $t = 1$ na segunda, concluindo-se que $X_2 \notin r$.

□

Dado um par (x, y) qualquer do R^2, não nulo, se esse par não é unitário, isto é, a norma $\|(x, y)\| \neq 1$, multiplicando-se (x, y) por $\dfrac{1}{\|(x,y)\|}$ obtém-se um par unitário. Ou seja, se $(x, y) \neq (0, 0)$, o par $\dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$ é unitário e tem a mesma direção e sentido que (x, y), pois $\|(x, y)\| > 0$ e dividindo-se um par por um número positivo a direção e o sentido não são alterados.

No entanto, se o par $(x, y) \neq (0, 0)$ for multiplicado por $\dfrac{-1}{\| (x,y) \|}$, o par obtido, $\dfrac{-(x,y)}{\| (x,y) \|}$ também é unitário, tem a mesma direção, mas tem sentido oposto ao de (x, y).

EXEMPLO I.10

A norma do par $(x, y) = (-3, 4)$ é $\| (-3, 4) \| = 5$ e assim, esse par não é unitário. Mas multiplicando-se esse par por $1/5$ obtém-se um par que é unitário: $1/5\,(-3, 4) = (-3/5, 4/5)$.
Da mesma forma, o par $-1/5\,(-3, 4) = (3/5, -4/5)$ é unitário, tem a mesma direção, porém tem sentido oposto ao par $(-3, 4)$.

$\square$

Outro tipo de equação de reta é a equação cartesiana. Ela é obtida eliminando-se o parâmetro t das equações paramétricas. Considere as equações paramétricas da reta: $\begin{cases} x = t\,x_1 + x_2 \\ y = t\,y_1 + y_2 \end{cases}$, $t \in R$, em que $d = (x_1, y_1)$ é a direção da reta e (x_2, y_2) é um ponto particular da reta. Resolvendo o sistema, supondo que $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, tem-se que:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_2}{x_1} \\ t = \dfrac{y - y_2}{y_1} \end{cases} \quad \therefore \quad t = \frac{x - x_2}{x_1} = \frac{y - y_2}{y_1}$$, ou seja, $y_1 x - y_1 x_2 = x_1 y - x_1 y_2$, ou

ainda, $y_1 x - x_1 y = y_1 x_2 - x_1 y_2$, que substituindo por constantes a, b e c, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{a\,x + b\,y = c}\ \text{; } \textbf{equação cartesiana de reta em } \boldsymbol{R^2}.}$$

No caso de $\boldsymbol{x_1 = 0}$ e $\boldsymbol{y_1 \neq 0}$ a equação cartesiana da reta fica $\boldsymbol{x = x_2}$. E no caso de $\boldsymbol{x_1 \neq 0}$ e $\boldsymbol{y_1 = 0}$ a equação cartesiana fica $\boldsymbol{y = y_2}$.

Observe que, em qualquer caso: $a = y_1$, $b = -x_1$ e $c = y_1 x_2 - x_1 y_2$.

EXEMPLO I.11 ———————————

A equação cartesiana da reta, $ax + by = c$, que contém os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (3, -2)$ é obtida substituindo-se os pontos A e B no lugar de (x, y). Fazendo-se a substituição obtém-se o sistema com duas equações, uma para o ponto A e outra equação para B, cujas incógnitas são a, b e c, $\begin{cases} a + 2b = c \\ 3a - 2b = c \end{cases}$ que resolvendo-se obtém-se $a = c/2$ e $b = c/4$. Atribuindo-se um valor para c, por exemplo o valor 4, tem-se que $a = 2$ e $b = 1$, e logo $2x + y = 4$ é uma equação cartesiana para a reta. Observe que atribuir outro valor para c é o mesmo que multiplicar a equação obtida, $2x + y = 4$, por um número, representando o mesmo conjunto de pontos, desde que se atribua a c um número diferente de zero.

Esse mesmo problema pode ser resolvido usando-se as equações paramétricas no lugar da equação cartesiana. Se a reta contém os pontos A e B então ela tem a direção de $d = B - A = (2, -4)$. Conhecida uma direção $d = (2, -4)$ e um ponto da reta $A = (1, 2)$, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -4t + 2 \end{cases}, t \in R.$$

Se for preciso obter a equação cartesiana basta resolver o sistema em t chegando-se a: $t = (x - 1) / 2 = (2 - y) / 4$, ou ainda, $2x + y = 4$ que é a mesma equação encontrada acima.

——————————— □

EXEMPLO I.12 ———————————

Dada a equação cartesiana de uma reta, por exemplo, $2x - 4y = 1$, pode-se obter equações paramétricas para essa reta da seguinte forma: isola-se x em um dos lados da igualdade, $x = 2y + ½$, acrescenta-se a equação $y = y$, obtendo o sistema: $\begin{cases} x = 2y + 1/2 \\ y = y \end{cases}, y \in R$.

Fazendo-se $y = t$ do lado direito das igualdades fica $\begin{cases} x = 2t + 1/2 \\ y = t \end{cases}, t \in R$ que são as equações paramétricas da reta que tem direção $(2, 1)$ e um ponto particular $(1/2, 0)$.

——————————— □

I.3.6 – Ângulos no R^2

Agora considere o par (x, y), representado na figura abaixo por uma flecha. Seja α o ângulo formado entre a flecha em questão e o eixo X. Algumas relações trigonométricas podem ser obtidas a partir do triângulo retângulo que tem os vértices O, (x, y) e $(x, 0)$:

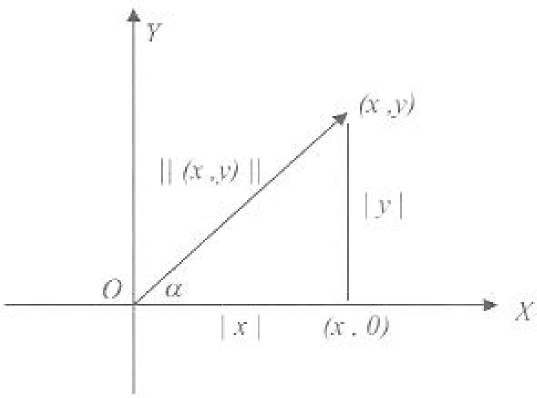

Figura I.13 – O triângulo formado pela flecha (x , y).

$$\textbf{sen}\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{|\,y\,|}{\|(x,y)\|} = \frac{|\,y\,|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{|\,x\,|}{\|(x,y)\|} = \frac{|\,x\,|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Considerando-se qualquer sinal: positivo, negativo ou nulo de x e y, escreve-se que: $\textbf{sen}\ \alpha = \dfrac{y}{\|(x,y)\|}$ e $\textbf{cos}\ \alpha = \dfrac{x}{\|(x,y)\|}$, ou ainda que:

$$\boxed{y = \|(x,y)\|\ \textbf{sen}\ \alpha \quad \text{e que} \quad x = \|(x,y)\|\ \textbf{cos}\ \alpha,\quad 0 \le \alpha < 2\pi}$$

Também é possível escrever o par (x, y) na forma:

$$\boxed{(x,y) = \|(x,y)\|\,(\cos\alpha, \text{sen}\ \alpha),\quad 0 \le \alpha < 2\pi}$$

Dadas duas flechas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que formam ângulos α_1 e α_2, respectivamente, entre cada uma delas e o eixo X, seja β o ângulo entre as duas flechas. Logo, pela figura abaixo, tem-se que $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta$.

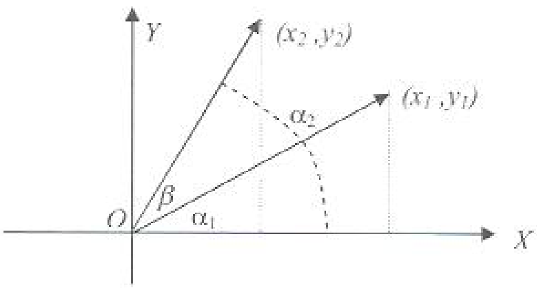

Figura I.14 – O Ângulo formado por duas flechas.

Para analisar o ângulo β entre essas duas flechas, cria-se uma nova operação entre os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que transforma esses pares no número real $x_1 y_1 + x_2 y_2$. Essa operação é denominada **produto interno usual do $\mathbf{R}^2$** (ou mais simplesmente produto interno). Esse produto interno é denotado da seguinte forma:

$$\boxed{(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 .}$$

Para interpretar geometricamente essa nova operação, são usadas as relações trigonométricas feitas acima:

$$(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 =$$

$$= \| (x_1, y_1) \| \cos \alpha_1 \| (x_2, y_2) \| \cos \alpha_2 + \| (x_1, y_1) \| \operatorname{sen} \alpha_1 \| (x_2, y_2) \| \operatorname{sen} \alpha_2$$

$$= \| (x_1, y_1) \| \; \| (x_2, y_2) \| \, (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2)$$

$$= \| (x_1, y_1) \| \; \| (x_2, y_2) \| \, [\cos (\alpha_2 - \alpha_1)] = \| (x_1, y_1) \| \; \| (x_2, y_2) \| \; \cos \beta.$$

Para simplificar, denominando-se as flechas por $A = (x_1, y_1)$ e por $B = (x_2, y_2)$ o produto interno entre A e B pode ser escrito como:

> $A \cdot B = \| A \| \; \| B \| \; \cos \beta$ **, em que** β **é o ângulo entre** A **e** B**.**
>
> Ou ainda: $\dfrac{A}{\| A \|} \cdot \dfrac{B}{\| B \|} = \cos \beta$.

Assim, para descobrir o ângulo β formado entre duas flechas dadas, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, não nulas, basta tomar as flechas unitárias de mesma direção e sentido, que são $A / \| A \|$ e $B / \| B \|$, e fazer o produto interno:

$$\cos \beta = \left(\frac{A}{\| A \|} \right) \cdot \left(\frac{B}{\| B \|} \right) = \frac{A \cdot B}{\| A \| \| B \|}.$$

EXEMPLO I.13 ———————————

Para encontrar o ângulo β formado pelas flechas $A = (1, 1)$ e $B = (0, 1)$ encontra-se primeiramente os unitários na direção e sentido de A e B, que são: $\dfrac{A}{\| A \|} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $\dfrac{B}{\| B \|} = \dfrac{(0,1)}{1} = (0, 1) = B$ e depois fazendo-se o produto interno desses unitários tem-se $\cos \beta = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\,(0, 1) = \sqrt{2}/2$ e assim, $\beta = arc\ cos\ \sqrt{2}/2 = \pi/4$.

Considere agora outros dois pares $(1, 2)$ e $(-2, 1)$. O ângulo entre eles é obtido calculando-se $\cos \beta = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{(-2,1)}{\sqrt{5}} = 0$, logo, $\beta = arc\ cos\ 0 = \pi/2$.

Concluindo-se que as flechas $(1, 2)$ e $(-2, 1)$ são perpendiculares.

——————————— □

I.3.7 – O Ângulo Reto

Duas flechas são **perpendiculares** se e somente se o produto interno entre elas é nulo. Veja o exemplo I.13. Como o produto interno dos unitários nessa direções é o cosseno do ângulo, e portanto nulo, esse ângulo mede $\pi/2$.

Quando foi obtida a equação cartesiana de uma reta, $ax + by = c$, a partir das equações paramétricas $\begin{cases} x = t x_1 + x_2 \\ y = t y_1 + y_2 \end{cases}, t \in R$, com $d = (x_1, y_1)$ sendo a direção da reta e (x_2, y_2) um ponto particular da reta, chegou-se na seção

I.3.5 à seguinte relação entre esses dois tipos de equação: $a = y_1$ e $b = -x_1$. Como $d = (x_1, y_1)$ é a direção da reta, logo paralelo à reta, e o produto interno entre a flecha (a , b) e a direção d é $(a, b).(x_1, y_1) = (y_1, -x_1).(x_1, y_1) = 0$,
segue que:

(a, b) é uma direção perpendicular à reta de equação cartesiana $ax + by = c$, denominada direção normal à reta.

EXEMPLO I.14

A flecha $(1, 1)$ é perpendicular à reta $x + y = 1$. Observe que $(1, 1)$ não satisfaz a equação da reta, logo não pertence à reta.
Para se obter uma flecha (x_0, y_0) que tenha a mesma direção que a flecha encontrada (a, b), que é perpendicular à reta de equação $ax + by = c$, mas que pertença à reta, deve-se procurar um múltiplo dessa flecha (a, b). A flecha pretendida tem a forma: $(x_0, y_0) = t(a, b) = t(1, 1) = (t, t)$, para algum $t \in R$, mas deve satisfazer à equação da reta dada (veja na figura abaixo). Substituindo-se esse múltiplo, $(x_0, y_0) = (t, t)$, na equação da reta desse exemplo, $x + y = 1$, obtém-se $t + t = 1 \therefore t = ½$. Assim, a flecha pretendida é $(x_0, y_0) = (½, ½)$.

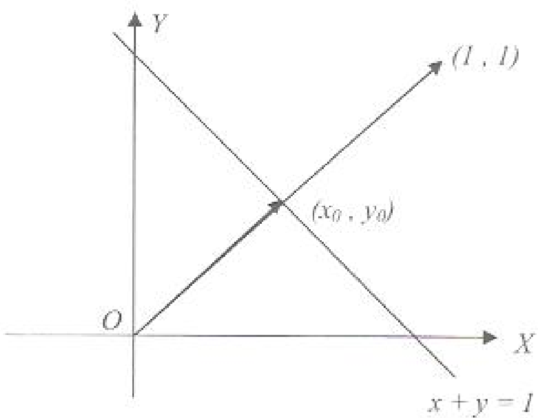

Figura I.15 Flecha perpendicular à reta.

I.3.8 – Distâncias e Ângulos entre Retas no R^2

Considere o segmento de reta AB perpendicular à reta r contendo B. Esse segmento tem extremidades: o ponto dado A e o ponto B que está na reta r. A distância de A até a reta r é o comprimento desse segmento. Para ver isto, seja X outro ponto qualquer da reta r. O triângulo de vértices A, B e X é retângulo em B. O segmento AB é um cateto e AX a hipotenusa. Como a hipotenusa, em um triângulo retângulo, é maior que os catetos e a distância do ponto A à reta r deve ser a menor distância possível, essa distância é igual ao comprimento do segmento de reta AB.

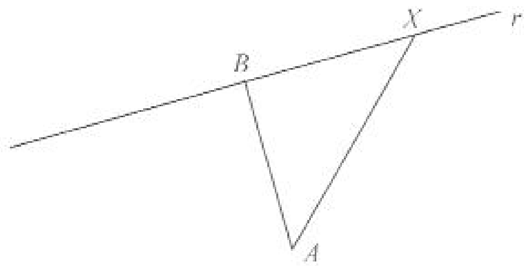

Figura I.16 – Distância do ponto A à reta r.

Assim, considerando o exemplo I.14, a distância da reta $x + y = 1$ até a origem é exatamente o tamanho do par (x_0, y_0), que é a sua norma, dada por $\|(½, ½)\| = \sqrt{2}/2$.

De uma forma geral, considere a reta de equação $ax + by = c$. Para calcular a distância dessa reta à origem, procura-se um múltiplo de (a, b) que pertença à reta. Seja $(x_0, y_0) = t(a, b) = (ta, tb)$ esse múltiplo. Substituindo-se (x_0, y_0) na equação da reta obtém-se $t\,a^2 + t\,b^2 = c \quad \therefore \quad t = \dfrac{c}{a^2 + b^2}$ concluindo-se que: $(x_0, y_0) = t(a, b) = \dfrac{c}{a^2+b^2}(a, b) = c\,\dfrac{(a, b)}{\|(a, b)\|^2}$ é perpendicular à reta e pertence a ela. Assim, a distância da reta até a origem é a norma $\|(x_0, y_0)\| = |c|\,\dfrac{\|(a, b)\|}{\|(a, b)\|^2} = \dfrac{|c|}{\|(a, b)\|}$.

Resumindo:

A distância da reta $ax + by = c$ à origem é: $\dfrac{|c|}{\|(a, b)\|}$.

EXEMPLO I.15

A distância da reta $3x - 4y + 5 = 0$ à origem é $\dfrac{|-5|}{\|(3,-4)\|} = \dfrac{5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{25}} = 1$.

Nesse exemplo, $c = -5$ é negativo, por isto $t = \dfrac{c}{a^2+b^2} = -1/5$ também é negativo, ou seja, a flecha (a, b) aponta para o lado contrário em relação à origem do que está a reta, isto é, (a, b) e (x_0, y_0) têm a mesma direção mas sentidos opostos.

□

Para a reta de equação $ax + by = c$, como $t = \dfrac{c}{a^2+b^2}$, observe que t e c têm o mesmo sinal. Assim, se $c > 0$ a flecha (a, b) perpendicular à reta, aponta na direção da reta, se $c < 0$ aponta na direção contrária e se $c = 0$ a reta contém a origem.

Para que duas retas sejam paralelas elas têm que ter as mesmas perpendiculares. Assim, dadas as equações cartesianas de duas retas paralelas, elas têm que ser da forma, $ax + by = c_1$ e $ax + by = c_2$, ou múltiplos não nulos dessas equações.

No caso de serem dadas as equações das retas por suas equações paramétricas, as duas têm que ter a mesma direção. Isto é, a direção de uma tem que ser um múltiplo, não nulo, da direção da outra.

Qual é a distância entre duas retas cujas equações cartesianas são: $ax + by = c_1$ e $ax + by = c_2$?

Considere primeiro que c_1 e c_2 são positivos. Então, como foi visto no exemplo I.15, a flecha (a, b), perpendicular a ambas as retas, aponta para o quadrante onde estão as retas. Assim, a distância entre as duas retas é a diferença entre as distâncias das duas retas à origem.

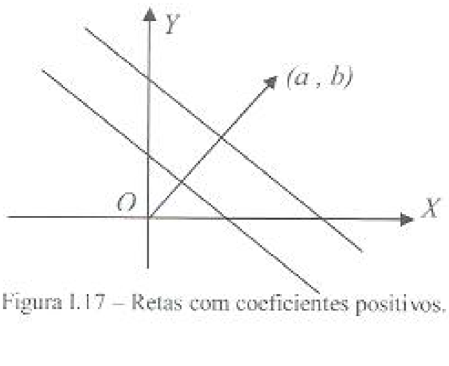

Figura I.17 – Retas com coeficientes positivos.

Como $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$, as fórmulas das distâncias das retas à origem ficam $\frac{c_1}{\|(a,b)\|}$ e $\frac{c_2}{\|(a,b)\|}$, respectivamente. Como não se sabe qual o maior valor entre c_1 e c_2 toma-se o valor absoluto da diferença para obter a distância entre as retas: $\frac{|c_2 - c_1|}{\|(a,b)\|}$.

Considerando agora que c_1 e c_2 são ambos negativos. Nesse caso, a flecha (a, b) aponta no sentido contrário ao quadrante em que estão as retas. As fórmulas das distâncias das retas à origem ficam, respectivamente, $\frac{|c_1|}{\|(a,b)\|} = \frac{-c_1}{\|(a,b)\|}$ e $\frac{|c_2|}{\|(a,b)\|} = \frac{-c_2}{\|(a,b)\|}$. Como a origem não está entre as retas, esse é um caso semelhante ao anterior. Novamente, a distância entre as retas é a diferença entre as distâncias das retas à origem: $\frac{-c_1}{\|(a,b)\|}$ e $\frac{-c_2}{\|(a,b)\|}$.

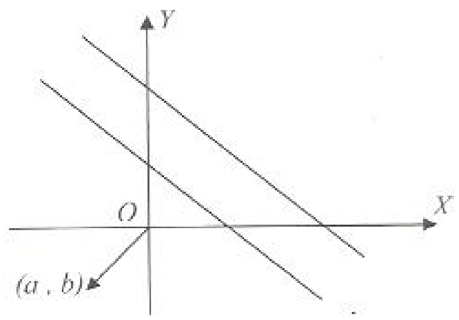

Figura I.18 – Retas com coeficientes negativos.

Também nesse caso, como não se sabe qual é o maior valor entre c_1 e c_2 toma-se o valor absoluto, obtendo-se a mesma fórmula anterior: $\frac{|c_2 - c_1|}{\|(a,b)\|}$.

Finalmente, se c_1 e c_2 têm sinais diferentes, as retas estão em lados opostos em relação à origem, devendo-se somar as distâncias delas à origem.

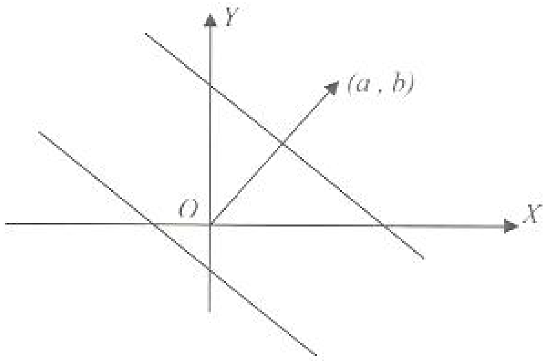

Figura I.19 – Retas com coeficientes de sinais diferentes.

Se $c_2 > 0$ as fórmulas das distâncias à origem ficam , $\frac{-c_1}{\|(a,b)\|}$ e $\frac{c_2}{\|(a,b)\|}$, cuja soma é $\frac{c_2 - c_1}{\|(a,b)\|} = \frac{|c_2 - c_1|}{\|(a,b)\|}$. Porém se $c_2 < 0$ então $c_1 > 0$ e as fórmulas das distâncias à origem ficam , $\frac{c_1}{\|(a,b)\|}$ e $\frac{-c_2}{\|(a,b)\|}$, que tem soma $\frac{c_1 - c_2}{\|(a,b)\|}$ que pode ser escrita da seguinte forma: $\frac{c_1 - c_2}{\|(a,b)\|} = \frac{-(c_2 - c_1)}{\|(a,b)\|} = \frac{|c_2 - c_1|}{\|(a,b)\|}$.

Observe que em todos os casos, independentemente das posições das retas em relação à origem:

> **A distância entre as retas $ax + by = c_1$ e $ax + by = c_2$ é** $\frac{|c_2 - c_1|}{\|(a,b)\|}$.

EXEMPLO I.16

A distância entre as retas $3x - 4y = 8$ e $3x - 4y - 3 = 0$ é $\frac{|8-3|}{\|(3,-4)\|} = \frac{5}{5} = 1$.
Como os números 8 e 3 têm o mesmo sinal, ambos positivos, a origem não fica entre as retas e o par $(3, -4)$, perpendicular às retas, aponta na direção das retas.
$\square$

A distância de um ponto $A = (x_0, y_0)$ a uma reta r cuja equação cartesiana é $ax + by = c$, pode ser medida traçando-se uma reta s paralela à reta r e contendo o ponto A. A distância de A a r é a distância entre as retas r e s. A reta s para ser paralela à reta r deve ter equação $ax + by = d$ e para conter o ponto A, o valor de $d = ax_0 + by_0$. A equação dessa nova reta s é $ax + by = ax_0 + by_0$ e a distância entre estas retas é $\dfrac{|c - ax_0 - by_0|}{\|(a,b)\|}$.

Resumindo:

A distância do ponto $A = (x_0, y_0)$ à reta de equação $ax + by = c$ é

$$\frac{|c - ax_0 - by_0|}{\|(a,b)\|}$$

EXEMPLO I.17

Para calcular a distância do ponto $A = (3, -2)$ à reta $x - y = 3$, deve-se encontrar a reta paralela contendo A, que é $x - y = 5$. A distância procurada é a distância entre as retas que é $\dfrac{|3-5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

EXEMPLO I.18

Qual é o ângulo entre as retas $y = 1$ e $3x - \sqrt{3}y = 7$?

Como $(0, 1)$ é perpendicular à primeira reta e $(3, -\sqrt{3})$ é perpendicular à segunda é suficiente medir o ângulo entre esses dois pares para se ter o ângulo entre as retas.

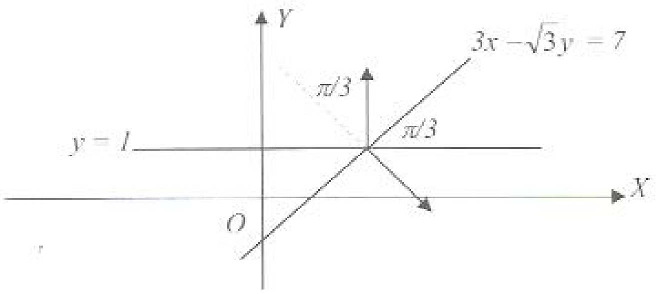

Figura I.20 – O ângulo entre duas retas.

Logo, $cos\,\beta = (0, 1).\dfrac{(3, -\sqrt{3})}{\sqrt{12}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$.

Considerando-se o menor ângulo $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, tem-se que $\beta = \dfrac{\pi}{3}$.

Consequentemente, o maior ângulo é $\pi - \dfrac{\pi}{3} = 2\dfrac{\pi}{3}$.

□

Se o cosseno do ângulo entre duas direções é negativo, significa que esse ângulo está entre $\pi/2$ e π. Porém, quando a pretensão é medir o ângulo entre duas retas com essas direções, o ângulo deve ser o menor entre os dois ângulos existentes, e assim, deve estar entre 0 e $\pi/2$. Tomando o modulo do produto interno das direções unitárias das retas, se esse cosseno for negativo, seu módulo leva ao suplementar, que é o menor ângulo entre as retas. O exempo a seguir ilustra esse fato:

EXEMPLO I.19

Se as retas são fornecidas pelas suas equações paramétricas, por exemplo, $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -\sqrt{3}t - 1 \end{cases}, t \in R$ e $\begin{cases} x = \sqrt{3}s + 2 \\ y = s + 3 \end{cases}, s \in R$, $(-1, -\sqrt{3})$ é a direção da primeira reta e $(\sqrt{3}, 1)$ a direção da segunda.

O ângulo entre as duas retas é o mesmo ângulo entre as direções ou seu suplementar, logo

$$cos\,\beta = \left|\frac{(-1, -\sqrt{3})}{2}.\frac{(\sqrt{3}, 1)}{2}\right| = \left|\frac{-2\sqrt{3}}{4}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ e assim } \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Já que, $\alpha = arccos\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$.

□

EXEMPLO I.20

Se uma das retas é dada pela equação cartesiana, $r: x - y = 1$ e a outra pelas equações paramétricas $s: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 3 \end{cases}, t \in R$, o ângulo entre elas é o complementar do ângulo formado pelo par $(1, -1)$ perpendicular à reta r e pela direção $(1, -1)$ da reta s.

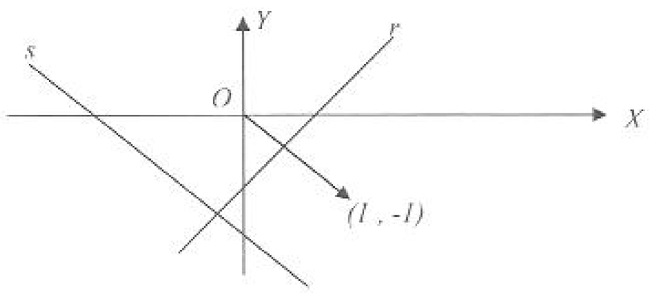

Figura I.21 – Ângulo entre as retas r e s.

Como o par $(1, -1)$ perpendicular à reta r e a direção da reta s é o mesmo par $(1, -1)$, o ângulo entre eles é zero e seu complementar é $\pi/2$, ou seja, as retas são perpendiculares.

I.3.9 – Cônicas

Nessa seção serão discutidos três tipos de cônicas: parábolas, elipses e hipérboles. Aqui, apenas as definições e exemplos simples serão comentados.

I.3.9.1 – Parábolas

Uma **parábola** é o conjunto dos pontos do R^2 que são equidistantes de uma reta, denominada **diretriz**, e de um ponto não pertencente à reta, denominado **foco**.

EXEMPLO I.21

Considere que o foco está no eixo Y e tem coordenadas $F = (0, c)$, $c > 0$ e a diretriz é paralela ao eixo X e tem equação $y = -c$.

Deseja-se encontrar o conjunto de pontos $X = (x, y)$ do R^2 equidistantes do foco e da diretriz. A distância de X à diretriz é $y + c$ e de X ao foco é $\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$.

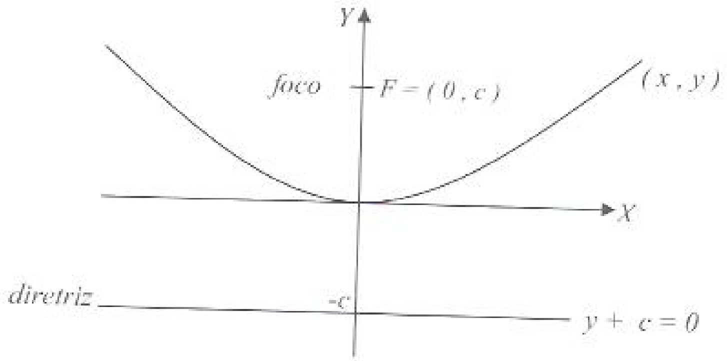

Figura I.22 – Parábola.

Essas distâncias devem ser iguais, satisfazendo $\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = y + c$. Elevando-se ambos os membros ao quadrado fica:
$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2 \;\therefore\; x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2 \;\therefore\; x^2 = 4cy \;\therefore$
$\boxed{y = \dfrac{1}{4c}x^2}$. Essa é a equação da parábola com esse foco e esta diretriz. Por exemplo, se $c = \frac{1}{4}$, obtém-se a parábola de equação $y = x^2$.

—————————— ||

O ponto $(0, 0)$, nesse exemplo, é denominado **vértice da parábola**.

I.3.9.2 – Elipses

Uma **elipse** é o lugar geométrico dos pontos do R^2 cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, denominados **focos da elipse**, é constante igual a $d > 0$.

Se $X = (x, y)$ é um ponto qualquer da elipse, a soma das distâncias de X aos focos F_1 e F_2 é: $distância(X, F_1) + distância(X, F_2) = d$. Ou seja, a equação da elipse pode ser escrita como:

$$\| X - F_1 \| + \| X - F_2 \| = d.$$

Uma forma simples para se desenhar uma elipse é: fixe os extremos de um barbante de comprimento total d em dois pontos (nos focos), e com uma caneta ou um giz estica-se o barbante para fazer o desenho da elipse. Ao girar o giz, com o barbante esticado, a elipse vai sendo desenhada. Essa forma de desenhar a elipse pode ser vista no desenho abaixo:

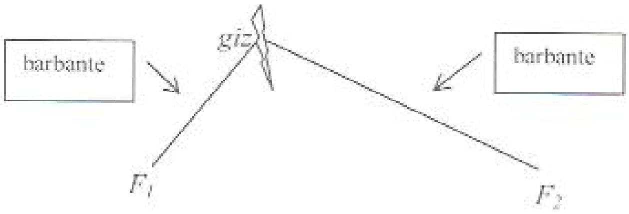

Figura I.23 – Desenhando uma elipse de focos F_1 e F_2.

EXEMPLO I.22

Considere a elipse que tem os focos, $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$, com $f > 0$. Os focos pertencem ao eixo das abscissas e são equidistantes da origem. Assim, a equação da elipse acima fica:

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = d. \quad (*)$$

As interseções da elipse com o eixo das abscissas, $y = 0$, são obtidas observando-se que: se um desses pontos é $(a, 0)$, $a > 0$, tem-se que $a > f$. A soma das distâncias desse ponto $(a, 0)$ aos focos $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ é $(a+f) + (a-f) = d$, logo, $\boxed{2a = d}$ e esse ponto é $(a, 0) = (d/2, 0)$. O outro ponto dessa interseção, por simetria, é $(-a, 0) = (-d/2, 0)$.

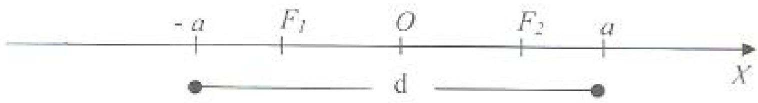

Figura I.24 – Interseção da elipse com o eixo X.

A interseção da elipse com o eixo das ordenadas, $x = 0$, é obtida substituindo-se na equação (*) $x = 0$. Obtém-se assim, $2\sqrt{f^2 + y^2} = d$, que elevando-se ao quadrado, chega-se a $y^2 = d^2/4 - f^2 = \dfrac{d^2 - 4f^2}{4}$. Se $\boxed{b = \sqrt{\dfrac{d^2 - 4f^2}{4}}}$, as interseções da elipse com o eixo Y acontecem nos pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$.

Voltando à equação (*) e elevando-a ao quadrado obtém-se:

$$[(x+f)^2+y^2]+[(x-f)^2+y^2]+2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2}=d^2 \quad \therefore$$

$$x^2+2xf+f^2+y^2+x^2-2xf+f^2+y^2+2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2}=d^2$$

$$\therefore \quad 2x^2+2f^2+2y^2+2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2}=d^2 \quad \therefore$$

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2}\sqrt{(x-f)^2+y^2}=d^2/2-x^2-f^2-y^2,$$

elevando-se ao quadrado:

$$[(x-f)^2+y^2][(x+f)^2+y^2]=(d^2/2-x^2-f^2-y^2)^2 \quad \therefore$$

$$(x^2-2xf+f^2+y^2)(x^2+2xf+f^2+y^2)=$$
$$=d^4/4+x^4+f^4+y^4-x^2d^2-f^2d^2-y^2d^2+2x^2f^2+2x^2y^2+2y^2f^2 \quad \therefore$$

$$x^4-4x^2f^2+f^4+y^4+2x^2f^2+2x^2y^2+2y^2f^2=$$
$$=d^4/4+x^4+f^4+y^4-x^2d^2-f^2d^2-y^2d^2+2x^2f^2+2x^2y^2+2y^2f^2$$

que simplificando fica:

$$-2x^2f^2=d^4/4-x^2d^2-f^2d^2-y^2d^2+2x^2f^2 \quad \therefore$$

$$x^2d^2-4x^2f^2+y^2d^2=d^4/4-f^2d^2 \quad \therefore$$

$$x^2(d^2-4f^2)+y^2d^2=d^2/4\,(d^2-4f^2) \quad \therefore \quad \frac{x^2}{d^2/4}+\frac{y^2}{(d^2-4f^2)/4}=1.$$

E finalmente, $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ sendo $\boxed{a=\frac{d}{2}}$ e $\boxed{b=\sqrt{\frac{d^2-4f^2}{4}}}$.

Observe que, nesse caso, $a>b$ pois, como ambos são positivos, $a^2>b^2$ dado que, substituindo-se a e b por suas respectivas fórmulas fica, $d^2/4>\frac{d^2-4f^2}{4}$, ou seja, $d^2>d^2-4f^2$ já que $f^2>0$. Veja ainda que, elevando-se ao quadrado $b=\sqrt{\frac{d^2-4f^2}{4}}$, e substituindo-se $a=\frac{d}{2}$, obtém-se a expressão $\boxed{b^2+f^2=a^2}$

||

Para esse exemplo, os pontos $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$ e $(0,-b)$ são denominados **vértices da elipse**.

EXEMPLO I.23

Considere a elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Como $a^2 = 9$ tem-se que $a = 3$ e assim $d = 6$, pois $a = d/2$. Sabendo-se que $b = \sqrt{\frac{d^2-4f^2}{4}}$, ou seja, $4f^2 = d^2 - 4b^2$ e que $b^2 = 4$ tem-se que $4f^2 = 36 - 16 = 20$ e assim, seus focos, que nesse caso estão no eixo X, são $F_1 = (-\sqrt{5}\ ,\ 0)$ e $F_2 = (\sqrt{5}\ ,\ 0)$.

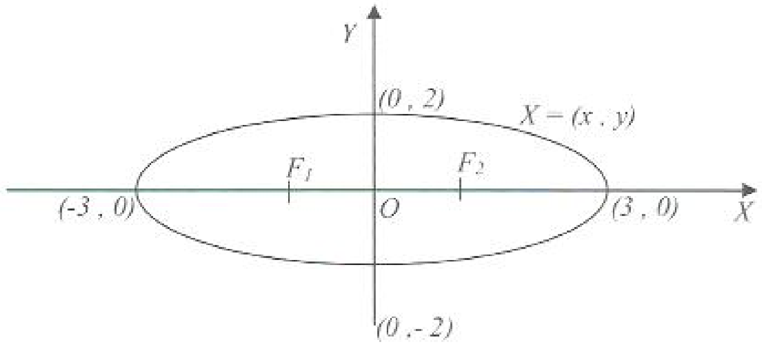

Figura I.25 – Desenho da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Se a equação da elipse fosse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, teríamos $a = 2 < 3 = b$. E o desenho da elipse, nesse caso, poderia ser obtido girando-se o desenho acima de 90 graus.

I.3.9.3 – Hipérboles

Considere dois pontos fixos F_1 e F_2 , que serão denominados **focos da hipérbole**. A distância entre esses dois pontos é denominada **distância focal**. Uma **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos do R^2 cuja diferença das distâncias aos focos é constante igual a $|\ d\ |$, $d \neq 0$, sendo $|\ d\ |$ menor que a distância focal. Pode-se retirar o módulo de $|\ d\ |$, pois são consideradas as distâncias aos focos, independentemente de qual é o mais distante.

Se $X = (\ x\ ,\ y\ )$ é um ponto qualquer da hipérbole, a equação da hipérbole pode ser obtida pela diferença das distâncias, isto é:

$$distância(\ X\ ,\ F_1) \ -\ distância\ (\ X\ ,\ F_2) \ =\ d$$

ou então,

$$distância\,(X, F_2) - distância\,(X, F_1) = d.$$

Com isso, podemos considerar que $d > 0$ na equação da hipérbole. Ou simplesmente, multiplicar a equação por -1 para que isso aconteça.

EXEMPLO I.24 ——————————

Considere a hipérbole que tem os seguintes focos, $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$, com $f > 0$. Nesse exemplo, os focos pertencem ao eixo das abscissas e são equidistantes da origem. Assim, a equação acima fica:

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2} - \sqrt{(x-f)^2+y^2} = d,\ d > 0.\ (*)$$

A interseção da hipérbole com o eixo das abscissas, $y = 0$, é obtida observando-se que: se um desses pontos é $(a, 0)$, $a > 0$, substituindo-se na equação (*) fica: $\sqrt{(a+f)^2} - \sqrt{(a-f)^2} = d$, ou ainda, $|a + f| - |a - f| = d$. Para retirar os módulos, dois casos devem ser considerados: 1º) $a > f$ e 2º) $a < f$.

No primeiro caso fica: $a + f - a + f = d$, ou ainda, $2f = d$. E assim, qualquer que seja o valor de $a > f$, satisfaz à equação (*). Dessa maneira, não devemos considerar esse primeiro caso, que, como leva a $2f = d$ contraria a definição de hipérbole, que exige que $d < 2f$.

No segundo caso fica: $a + f + a - f = d$, ou ainda, $2a = d$. E a interseção da hipérbole com o eixo X é $(a, 0) = (d/2, 0)$, para $a > 0$. O outro ponto por simetria é $(-a, 0) = (-d/2, 0)$.

Como $f > a$, tem-se que $f - a > 0$ e $f^2 - a^2 > 0 \therefore f^2 - (d/2)^2 > 0$ $\therefore f^2 - (d^2/4) > 0$. Seja $b = \sqrt{\dfrac{4f^2 - d^2}{4}}$, ou ainda, $b^2 = \dfrac{4f^2 - d^2}{4}$.

A interseção da hipérbole com o eixo das ordenadas, $x = 0$, é obtida substituindo-se na equação (*) $x = 0$. Obtendo-se assim, que $0 = d$, como $d \neq 0$ não existe interseção com esse eixo.

Voltando à equação (*) e elevando-a ao quadrado obtém-se:

$$[(x+f)^2 + y^2] + [(x-f)^2 + y^2] - 2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\ \sqrt{(x-f)^2+y^2} = d^2 \ \therefore$$

$$x^2 + 2xf + f^2 + y^2 + x^2 - 2xf + f^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\ \sqrt{(x-f)^2+y^2} = d^2$$

$$\therefore\ 2x^2 + 2f^2 + 2y^2 - 2\sqrt{(x+f)^2+y^2}\ \sqrt{(x-f)^2+y^2} = d^2 \ \therefore$$

$\sqrt{(x+f)^2+y^2}\ \sqrt{(x-f)^2+y^2} = x^2 + f^2 + y^2 - d^2/2$, que elevando-se ao quadrado fica: $[(x+f)^2+y^2]\,[(x-f)^2+y^2] = (x^2 + f^2 + y^2 - d^2/2)^2 \ \therefore$

$$(x^2+2xf+f^2+y^2)(x^2-2xf+f^2+y^2) = \\ = d^4/4 + x^4 + f^4 + y^4 - x^2d^2 - f^2d^2 - y^2d^2 + 2x^2f^2 + 2x^2y^2 + 2y^2f^2 \quad \therefore$$

$$x^4 - 4x^2f^2 + f^4 + y^4 + 2x^2f^2 + 2x^2y^2 + 2y^2f^2 = \\ = d^4/4 + x^4 + f^4 + y^4 - x^2d^2 - f^2d^2 - y^2d^2 + 2x^2f^2 + 2x^2y^2 + 2y^2f^2$$

que simplificando fica:

$$-2x^2f^2 = d^4/4 - x^2d^2 - f^2d^2 - y^2d^2 + 2x^2f^2 \quad \therefore$$

$$x^2d^2 - 4x^2f^2 + y^2d^2 = d^4/4 - f^2d^2 \quad \therefore$$

$$x^2(d^2 - 4f^2) + y^2d^2 = d^2/4\,(d^2 - 4f^2) \quad \therefore$$

$$-x^2\frac{4f^2-d^2}{4} + y^2\frac{d^2}{4} = -\frac{d^2}{4}\,\frac{4f^2-d^2}{4} \quad \therefore$$

Como $\boxed{a = \dfrac{d}{2}}$, e assim, $a^2 = \dfrac{d^2}{4}$ e $\boxed{b = \sqrt{\dfrac{4f^2-d^2}{4}}}$, logo, $b^2 = \dfrac{4f^2-d^2}{4}$, podemos escrever que $x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$, ao ainda que, $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.

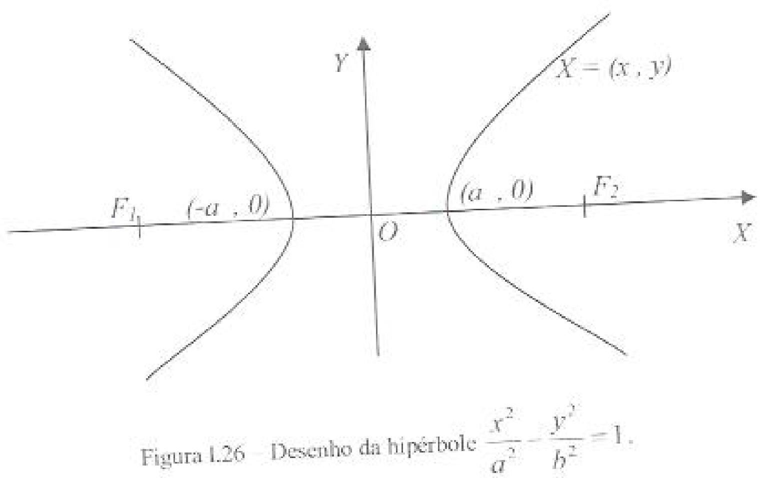

Figura I.26 Desenho da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Uma hipérbole que tem equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ com $a = b$ é denominada **hipérbole equilátera**. No exemplo, os pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ são denominados **vértices da hipérbole**. Observe que: a, b e f (que é a metade da distância focal) são números que são, respectivamente, os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, pois $a^2 + b^2 = \dfrac{d^2}{4} + \dfrac{4f^2 - d^2}{4} = f^2$, ou seja, $a^2 + b^2 = f^2$. O quociente $\dfrac{f}{a}$ é denominado **excentricidade da hipérbole**.

Outra forma de definir a hipérbole é: a hipérbole é constituida pelos pontos para os quais a razão das distâncias a um foco e a uma reta (diretriz) é uma constante maior ou igual a 1.

EXEMPLO I.25

Considere a hipérbole equilátera $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Como $a^2 = b^2 = 9$ tem-se que $a = b = 3$. E assim $d = 6$, pois $a = d/2$ e sabendo-se que $b = \sqrt{\dfrac{4f^2 - d^2}{4}}$, ou seja, $4f^2 = d^2 + 4b^2$ tem-se que $4f^2 = 36 + 36 = 72 \therefore f^2 = 18$ e assim, seus focos estão nos pontos $F_1 = (-3\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (3\sqrt{2}, 0)$.

□

I.3.10 – Projeção Ortogonal e Simetria

Considere uma reta que contém a origem e tem direção $D = (d_1, d_2)$ e seja $X = (a, b)$ um ponto qualquer do R^2. Qual é a projeção ortogonal P de X sobre a reta?

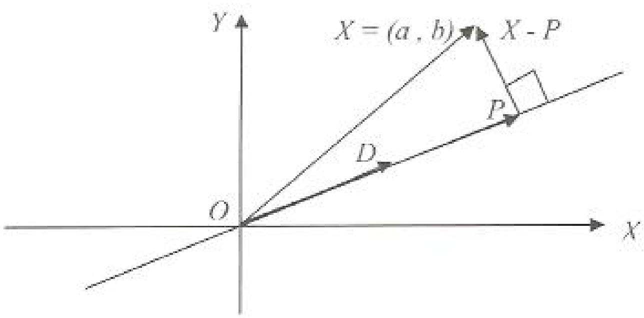

Figura I.27 – Projeção ortogonal P, do ponto X, sobre uma reta.

Usando o triângulo retângulo de vértices O, X e P, vê-se que a flecha $X - P$ é um cateto desse triângulo e logo perpendicular a D. Assim, o produto interno desses pares deve ser zero, $(X - P) . D = 0 \therefore X . D - P . D = 0$ $\therefore X . D = P . D$.

Mas P é um múltiplo de D podendo se escrever $P = tD$, para algum $t \in R$.

Juntando as duas equações, $P . D = (t\,D) . D = t\,(D . D) = X . D$ $\therefore t = \dfrac{X.D}{D.D}$, e assim, $P = t\,D = \dfrac{X.D}{D.D} D = \dfrac{X.D}{\| D \|^2} D = \dfrac{X.D}{\| D \|} \dfrac{D}{\| D \|}$, concluindo-se que, $P = (X . \dfrac{D}{\| D \|}) \dfrac{D}{\| D \|}$.

Dessa forma, seja u o unitário na direção e sentido de D, isto é, $u = \dfrac{D}{\| D \|}$. Logo

$P = (X . u)\, u$ é a projeção ortogonal de X na direção de D, sendo u um unitário na direção D.

EXEMPLO I.26

Qual é a projeção ortogonal de $X = (2 , 4)$ na direção de $D = (1 , 1)$?

O unitário na direção e sentido de D é $u = \dfrac{D}{\| D \|} = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$. Logo a projeção ortogonal é $P = (X . u)\, u = 3\sqrt{2}\, (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = (3 , 3)$. Nesse caso, D tem que ser multiplicado por 3 para se obter a projeção P.

□

EXEMPLO I.27

Encontre o ponto Y que é o simétrico do ponto $X = (5 , 10)$ em relação à reta que contém a origem e tem como direção $D = (3 , -4)$.

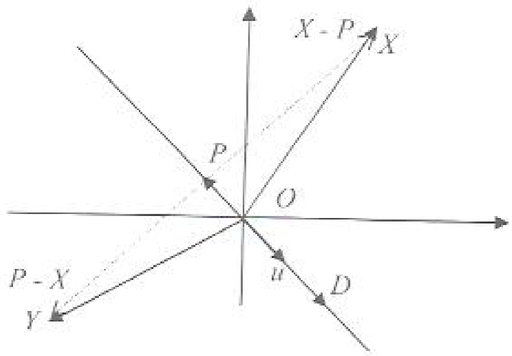

Figura I.28 – O ponto Y simétrico do ponto X em relação a uma reta.

Uma vez obtida a projeção ortogonal P tem-se que $P + (X - P) = X$. Pelo desenho pode-se ver que $Y = P - (X - P) = P + (P - X) = 2P - X$.

O unitário na direção e sentido de D é $u = \dfrac{D}{\| D \|} = (\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5})$, e consequentemente, a projeção ortogonal de X na direção de d, que é a mesma projeção na direção de u é $P = (X.u)u = -5\,(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}) = (-3, 4)$.

Nesse caso, $P = -D$, ou seja, P tem a direção de D mas sentido oposto. Logo, $Y = 2P - X = (-6, 8) - (5, 10) = (-11, -2)$ é o simétrico de X em relação à direção dada D.

EXERCÍCIO

Mostre que a soma de X com Y está na direção de D e que a projeção ortogonal de Y na direção de D também é P.

I.4 – O Espaço R^3

Quando se deseja dar a localização de um avião, não são suficientes a latitude e a longitude, é preciso fornecer também a altitude. Para se conhecer o tamanho de uma caixa, em forma de um paralelepípedo, é preciso a largura, a profundidade e a altura. Esses são alguns exemplos de que o R^2 não é suficiente para dar a localização e/ou as medidas de um objeto. É necessário criar um espaço que possua três informações, ou seja, tenha três números reais independentes.

Por isso, é necessário um espaço "maior" que o R^2, o espaço R^3 que é o conjunto $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$. Isto é, o R^3 é o produto cartesiano do R^2 por R: $(R \times R) \times R$.

Assim, o R^3 é o conjunto dos **ternos** (ou **triplas**) de números reais que tem duas operações básicas descritas a seguir:

Adição: $R^3 \times R^3 \to R^3$; que associa duas triplas de números reais (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) à tripla $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Multiplicação por escalar: $R \times R^3 \to R^3$; que associa um número real a e um terno (x, y, z) ao terno (ax, ay, az).

Observe que os reais e o R^2 são espaços semelhantes ao R^3. Esses três conjuntos têm duas operações do mesmo tipo.

EXEMPLO I.28
A seguir estão operações de adição e multiplicação por escalar:
$(1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (4, 4, 4)$; $3(1, 0, -1) = (3, 0, -3)$.

□

Da mesma forma que no R^2, essas duas operações podem ser feitas conjuntamente, recebendo também o nome de **combinação linear**.

EXEMPLO I.29
A combinação linear abaixo é calculada como:
$3(1, 0, 1) - 2(1, 1, -1) + (-1, 2, 0) =$
$(3, 0, 3) + (-2, -2, 2) + (-1, 2, 0) = (0, 0, 5)$.

□

A **combinação linear** pode ser feita com n triplas de R^3, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n) e n números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ da seguinte forma:

$$a_1(x_1, y_1, z_1) + a_2(x_2, y_2, z_2) + ... + a_n(x_n, y_n, z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i, z_i) =$$

$$= (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n, a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_ny_n, a_1z_1 + a_2z_2 + ... + a_nz_n)$$

$$= (\sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \sum_{k=1}^{n} a_k y_k, \sum_{l=1}^{n} a_l z_l).$$

I.4.1 – Uma Representação Geométrica para o R^3

Como são necessárias três informações para o conjunto R^3, ou seja, três cópias dos reais. Para a representação geométrica do espaço R^3 são precisos três eixos: o eixo X, o eixo Y e o eixo Z. Cada um desses eixos, geometricamente, é para uma coordenada dos ternos do conjunto R^3. Esses eixos também são denominados **eixos coordenados**.

Usualmente, os eixos são dispostos perpendicularmente, tendo como interseção a origem de cada um deles. Esse ponto de interseção também é denominado **origem** e representa o terno $(0, 0, 0)$, denotado por O.

Para orientar quanto à posição relativa dos eixos usa-se a **regra da mão direita**, procedendo da seguinte forma:

1) Abra totalmente a sua mão direita;
2) O eixo X tem direção e sentido do dedo indicador;
3) Feche os dedos parcialmente, sem dobrá-los, girando-os de 90 graus (exceto o polegar que deve permanecer aberto);
4) O eixo Y tem direção e sentido do dedo indicador, em sua nova posição;
5) O eixo Z tem direção e sentido do dedo polegar.

Dessa forma dispõem-se os eixos X, Y e Z, que usualmente ficam como os da figura abaixo. Observe que se for usada a mão esquerda, com o mesmo procedimento, a disposição dos eixos será diferente.

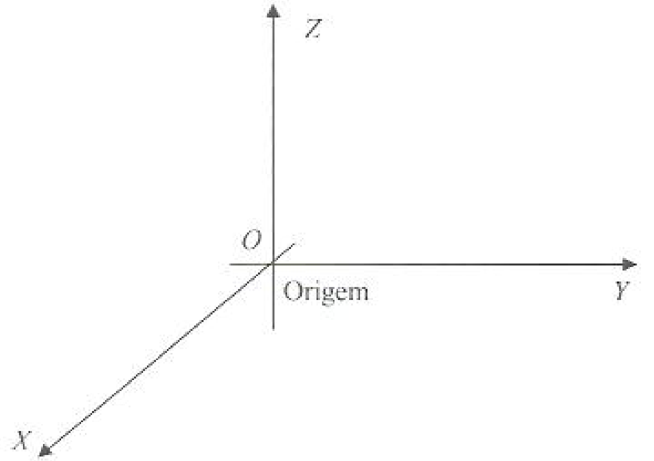

Figura I.29 – A posição dos eixos X, Y e Z com a regra da mão direita.

Cada ponto A do espaço determinado pelos eixos X, Y e Z está associado a um único terno do R^3 e a cada terno do R^3 está associado um único ponto. Essa associação é feita desenhando-se um paralelepípedo com vértices no ponto $A = (x, y, z)$ e na origem O e tendo arestas nos eixos coordenados ou paralelas a eles, como na figura abaixo:

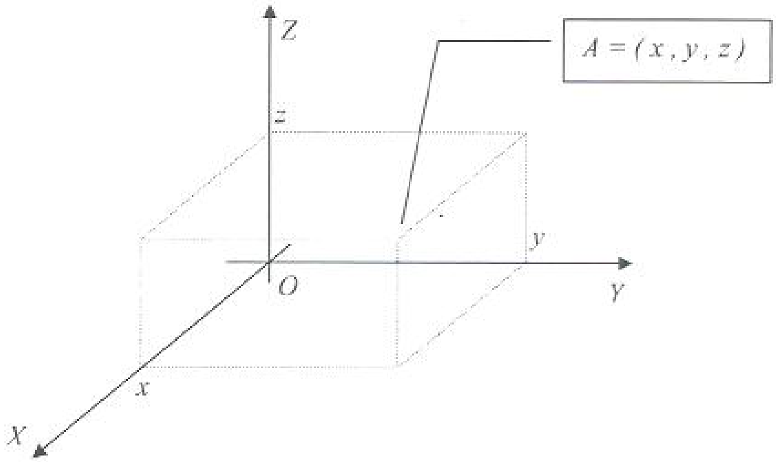

Figura I.30 – O ponto $A = (x, y, z)$ e os eixos coordenados.

Dado o ponto $A = (x, y, z)$ o comprimento das arestas que ficam nos eixos coordenados são, respectivamente, x, y e z, respeitando-se o sinal dos eixos.

O plano definido pelos eixos X e Y (onde fica uma das faces do paralelepípedo) é denominado **plano** XY, o definido pelos eixos X e Z **plano** XZ e o definido por Y e Z **plano** YZ. Esses três planos são denominados **planos coordenados**, e servem como faces do paralelepípedo da figura acima.

Como os reais são conhecidos como reta, o R^2 como plano, o R^3 é conhecido simplesmente por **espaço**.

A mesma idéia de **flechas** (ou **setas** ou **segmentos de retas orientados**) que é usada no R^2 também é usada no R^3. As flechas têm a extremidade inicial na origem e final no ponto $A = (x, y, z)$. Elas podem ser liberadas de iniciar na origem e terminar no ponto A, porém representando o mesmo ponto A do R^3, dependendo somente de seu tamanho, direção e sentido. A regra do paralelogramo que se aplicou na operação de adição no R^2 também se aplica no R^3 (tente imaginar como fica essa regra no espaço). Ainda, da mesma forma que no R^2, a multiplicação por escalar leva a uma reta contendo a origem.

I.4.2 – Distâncias no R^3

A distância de um ponto $A = (x, y, z)$ até a origem é o tamanho da diagonal do paralelepípedo que liga os vértices O e A (veja figura I.30) que, usando-se duas vezes o teorema de Pitágoras, mede $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Essa distância é denominada **norma** (ou módulo) de (x, y, z) e é denotada por:

$$\boxed{\,\| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.}$$

Se $\| A \| = 1$ diz-se que A é **unitário**.

Observe que a norma em R^2, é um caso particular dessa norma quando $z = 0$, ou seja:

$$\| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 0} = \sqrt{x^2 + y^2} = \| (x, y) \|$$

Uma esfera é o conjunto de pontos do R^3 cuja distância (**raio**) a um ponto fixo (**centro**) é constante. A equação de uma esfera de centro na origem e raio a é: se (x, y, z) pertence a essa esfera então $\| (x, y, z) \| = a$, ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$.

Simplificando essa equação tem-se:

Esfera de raio a e centro $O = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$.

A distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ do R^3, pode ser calculada usando-se a regra do paralelogramo. Assim, a flecha solta $B - A$, que inicia em A e tem extremidade final em B, tem seu tamanho igual à distância de A até B. Isto é, a distância de A até B é a norma de $B - A$. A figura I.9, usada no R^2, também pode ser interpretada como a soma de ternos do R^3. Logo:

A distância de A até B é igual a

$$\| B - A \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EXEMPLO I.30

A distância entre os pontos $A = (1, -1, \sqrt{7})$ e $B = (-1, 1, -\sqrt{7})$ é obtida calculando-se primeiro $B - A = (-2, 2, -2\sqrt{7})$ e depois a sua norma que é igual a $\| B - A \| = \sqrt{4 + 4 + 28} = \sqrt{36} = 6$.

□

Uma esfera de centro no ponto $C = (a, b, c)$ e raio r é o conjunto de pontos $X = (x, y, z)$ pertencente ao R^3, cuja distância de X até C deve ser constante igual a r. Logo $\| X - C \| = r$, que pode ser escrita como:

Esfera de centro (a, b, c) e raio r:

$$\{(x, y, z) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\}$$

EXEMPLO I.31

A esfera de centro $(1, 2, 3)$ e raio 4 é o conjunto
$\{(x, y, z) \in R^3 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16\}$ =
$= \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 2\}$.

□

I.4.3 – Retas no R^3

Da mesma forma que no R^2, quando se faz a operação de multiplicação por escalar no R^3 : $a(x, y, z) = (ax, ay, az)$, verifica-se que qualquer que seja o valor de $a \in R$, $a \neq 0$. a flecha (ax, ay, az) tem a mesma direção que (x, y, z). O sentido é o mesmo se $a > 0$ e o oposto se $a < 0$. O tamanho da flecha (ax, ay, az) é igual ao de (x, y, z) multiplicado por $|a|$.

Como todas as flechas obtidas pela multiplicação de um número real por um dado vetor, não nulo, têm a mesma direção desse vetor dado, pode-se então chegar à equação de uma reta que contém a origem.

Seja $d = (x_1, y_1, z_1)$ um dado vetor não nulo, que será denominado **direção da reta**, ou simplesmente direção. A reta que passa pela origem e tem a direção de d é descrita como o conjunto de pontos do R^3:

$$X = (x, y, z) = t\,d = t(x_1, y_1, z_1) \quad \text{com} \quad t \in R,$$

ou seja,
$$(x, y, z) = (t x_1, t y_1, t z_1), \; t \in R$$

ou ainda,
$$\begin{cases} x = t\,x_1 \\ y = t\,y_1, \quad t \in R \\ z = t\,z_1 \end{cases}$$

Essas são denominadas **equações paramétricas** da reta no R^3 que tem a direção de d e contém a origem. O número real t é denominado **parâmetro** das equações. Abreviadamente, é possível escrever as equações paramétricas de uma **forma vetorial** como: $X = t\,d$, $t \in R$.

EXEMPLO I.32

As equações paramétricas da reta que tem a direção de $d = (1, 2, 3)$ e contém a origem é $(x, y, z) = t(1, 2, 3)$, ou ainda,

□

Para se obter as equações de uma reta, que não contém a origem e é conhecida sua direção $d = (x_1, y_1, z_1)$ e um ponto qualquer $A = (x_2, y_2, z_2)$ da reta, basta usar a regra do paralelogramo, da mesma maneira que foi feito no R^2. Dessa forma, a equação paramétrica dessa reta é, escrita de uma forma abreviada:

Forma Vetorial da equação da reta: $X = t\,d + A \;;\; t \in R,$

ou pode ser escrita ainda como:

$(x, y, z) = t(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (t\,x_1 + x_2, t\,y_1 + y_2, t\,z_1 + z_2)$.

Assim:

Equações paramétricas da reta no R^3 que contém o ponto $A = (x_2, y_2, z_2)$ e tem direção $d = (x_1, y_1, z_1)$:

$$\begin{cases} x = t\,x_1 + x_2 \\ y = t\,y_1 + y_2 \,, t \in R \\ z = t\,z_1 + z_2 \end{cases}$$

EXEMPLO I.33

As equações da reta r paralela (ou que tem a mesma direção) de $d = (1, 0, -1)$ e contém o ponto $A = (3, 2, 1)$ são

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2 \qquad , t \in R. \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

□

Duas **retas** são **paralelas** se têm a mesma direção.

EXEMPLO I.34

A reta que tem a direção $d = (1, 0, -1)$ e contém o ponto $B = (2, -1, 4)$ é paralela à reta do exemplo anterior.

Essa reta tem equações paramétricas: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -1 \\ z = -t + 4 \end{cases}, t \in R.$

□

Qualquer ponto de uma reta que contém a origem e tem direção d, é denominado **múltiplo** da direção d. E qualquer terno, não nulo, dessa reta é uma direção dela. Assim, para se descrever uma reta que contém a origem basta conhecer um ponto não nulo dessa reta, que será a sua direção.

Uma reta no R^3 não possui uma equação cartesiana única. Esses tipos de equações cartesianas para uma reta são obtidas através das equações cartesianas de dois planos no R^3, fazendo-se a interseção desses planos. Equações de planos serão vistas adiante.

I.4.4 – Equações Paramétricas de um Plano

Retomando um pouco para o R^2, suponha dados dois pares não nulos, de forma que nenhum dos dois seja múltiplo do outro. O que descreve a combinação linear desses dois pares? Para ver isto considere os seguintes exemplos:

EXEMPLO I.35

Dados os pares $(1, 0)$ e $(0, 1)$ do R^2, observe que qualquer ponto (x, y) do R^2 pode ser escrito como combinação linear dos dois pares dados:
$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.
Assim a combinação linear dos dois pares dados descreve todo o R^2

□

EXEMPLO I.36

Dados outros dois pares quaisquer do R^2, por exemplo $(1, 2)$ e $(2, -1)$, pode-se ver que qualquer ponto $(x, y) \in R^2$ também pode ser escrito como combinação linear desses dois pares. Para isso, deve ser resolvida a equação $(x, y) = a(1, 2) + b(2, -1)$, em que as incógnitas são a e b. Assim, fazendo-se as operações necessárias, chega-se a: $(x, y) = (a + 2b, 2a - b)$ levando ao sistema: $\begin{cases} x = a + 2b \\ y = 2a - b \end{cases}$ sendo x e y constantes quaisquer e a e b as incógnitas.

Resolvendo-se o sistema chega-se a: $\begin{cases} a = \dfrac{x+2y}{5} \\ b = \dfrac{2x-y}{5} \end{cases}$, ou seja, para escrever (x, y) como combinação linear dos pares dados faz-se:

$(x, y) = \dfrac{x+2y}{5}(1, 2) + \dfrac{2x-y}{5}(2, -1)$. Dessa forma, a combinação linear desses dois pares também descreve todo o R^2.

Por exemplo, dado o par $(x, y) = (10, -15)$, é possível escrevê-lo como combinação linear dos dois pares usando a equação acima, que fica:

$(10, -15) = -4(1, 2) + 7(2, -1)$.

Isso só é possível porque os dois pares dados não são múltiplos um do outro.

——————————— ||

Geometricamente, pode-se observar que quaisquer que sejam os dois pares dados, se eles não forem nem nulos nem múltiplos um do outro, a combinação linear deles irá descrever todo o plano R^2.

Da mesma maneira, dados dois ternos no R^3, não nulos e de forma que um não seja múltiplo do outro, considerando todas as combinações lineares deles também irão descrever um plano. Considere dois ternos $d_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $d_2 = (x_2, y_2, z_2)$ com essas condições. A combinação linear deles:

$$X = (x, y, z) = t(x_1, y_1, z_1) + s(x_2, y_2, z_2) = (t x_1 + s x_2, t y_1 + s y_2, t z_1 + s z_2)$$

com $t, s \in R$, descreve um plano no R^3. Fazendo $t = s = 0$ obtém-se a origem $O = (0, 0, 0)$, logo essa combinação linear descreve um plano no R^3 contendo a origem.

Resumindo:

Equações paramétricas de um plano contendo a origem e que tem direções de $d_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $d_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} x = t x_1 + s x_2 \\ y = t y_1 + s y_2 \\ z = t z_1 + s z_2 \end{cases}, \quad t, s \in R$$

Essas equações também podem ser escritas, de uma forma condensada:

Forma Vetorial da equação de um plano que contém a origem:

$$X = t\,d_1 + s\,d_2 \;\; ; \;\; t\,,\, s \in R$$

Os números reais t e s são denominados **parâmetros** da equação. Observe que para descrever uma reta basta um parâmetro, mas para descrever um plano é preciso usar dois parâmetros.

Veja que, no caso do plano que contém a origem, esse plano sempre conterá os pontos d_1 e d_2. Para ver isso, basta fazer, respectivamente, $s = 0$ e $t = 1$ ou $t = 0$ e $s = 1$.

EXEMPLO I.37

As equações paramétricas de um plano contendo a origem e tem direção dos ternos $d_1 = (1\,,\,1\,,\,1)$ e $d_2 = (3\,,\,-2\,,\,1)$ são $\begin{cases} x = t + 3s \\ y = t - 2s \\ z = t + s \end{cases}$ com $t\,,\,s \in R$.

Dando valores a t e s, obtém-se pontos da reta, por exemplo:
Se $s = 0$ e $t = 1$ obtém-se o ponto da reta $(x\,,\,y\,,\,z) = d_1 = (1\,,\,1\,,\,1)$,
se $s = 1$ e $t = 0$ obtém-se o ponto da reta $(x\,,\,y\,,\,z) = d_2 = (3\,,\,-2\,,\,1)$,
se $s = 3$ e $t = -2$ obtém-se o ponto da reta $(x\,,\,y\,,\,z) = (7\,,\,-8\,,\,1)$.

□

Considere uma flecha $A = (a\,,\,b\,,\,c)$ que não pertença a um plano π que tem equações paramétricas $X = t\,d_1 + s\,d_2\,,\; t\,,\,s \in R$. Quando se faz a soma $A + X$, em que X é um ponto arbitrário do plano π, usando-se a regra do paralelogramo, a resultante dessa soma descreve um plano paralelo ao plano π mas que contém o ponto A (quando $X = O$). A flecha ligando A a $A + X$ é paralela a X e ao plano que está sendo descrito quando X varia em π.

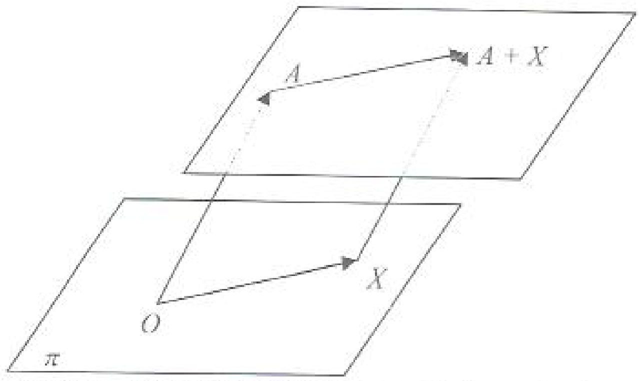

Figura I.31 – Plano paralelo ao plano π contendo o ponto A.

Logo, a equação paramétrica desse plano paralelo a π e que contém o ponto A é:

Forma Vetorial da equação de um plano que contém o ponto A:

$$X = t\,d_1 + s\,d_2 + A \quad ; \quad t, s \in R$$

Observe que, como as direções d_1 e d_2 pertencem a π, elas são paralelas ao novo plano. Explicitando as equações desse novo plano, a flecha que liga os pontos A e $A + X$ é uma flecha "solta", representante do ponto X pertencente ao plano π.

Equações paramétricas de um plano contendo o ponto $A = (a, b, c)$ e que é paralelo às direções $d_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $d_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} x = t\,x_1 + s\,x_2 + a \\ y = t\,y_1 + s\,y_2 + b \quad , \quad t, s \in R \\ z = t\,z_1 + s\,z_2 + c \end{cases}$$

EXEMPLO I.38

As equações paramétricas de um plano contendo o ponto $A = (1, 2, 3)$ e que é paralelo às direções $d_1 = (1, 0, -1)$ e $d_2 = (4, -1, 0)$ são:

$$\begin{cases} x = t + 4s + 1 \\ y = -s + 2 \qquad \text{com } t, s \in R. \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

□

EXEMPLO I.39

Para obter as equações paramétricas de um plano que contém os pontos: $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 2, 1)$ e $C = (1, -1, 0)$ basta obter duas direções paralelas ao plano. Essas direções podem ser: $d_1 = B - A = (2, 1, 0)$ e $d_2 = B - C = (2, 3, 1)$, ou quaisquer duas diferenças de pontos do plano, de modo que as direções não fiquem colineares.

Adicionando-se o ponto A , as equações paramétricas do plano ficam:

$$\begin{cases} x = 2t + 2s + 1 \\ y = t + 3s + 1 \qquad \text{com } t, s \in R. \\ z = \qquad s + 1 \end{cases}$$

□

I.4.5 – Ângulos no R^3

Da mesma forma que no R^2, define-se o **produto interno no R^3** (ou produto interno usual do R^3). Dados os ternos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), o produto interno no R^3 é definido como:

$$\boxed{(x_1, y_1, z_1) \,.\, (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .}$$

A interpretação geométrica do produto interno no R^3 é mais complicada de ser visualizada do que no R^2, mas produz resultado semelhante. Considerando-se as flechas $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ tem –se que:

$$\boxed{A \,.\, B = \| A \| \; \| B \| \; \cos\beta \;\; \text{, sendo } \beta \text{ o ângulo entre } A \text{ e } B.}$$

EXEMPLO I.40 ——————————

Para ilustrar essa interpretação geométrica, tome alguns exemplos de maneira que os ângulos entre os ternos sejam fáceis de determinar e teste a fórmula.
Qualquer flecha no plano coordenado XY deve ser perpendicular a qualquer direção do eixo Z. Realmente, um ponto qualquer do plano XY tem a forma $A = (x, y, 0)$ e uma direção do eixo Z a forma $B = (0, 0, z)$. O produto interno $A.B = 0$ e como $\| A \|$ e $\| B \|$ não são obrigatoriamente nulos obtém-se que $\cos\beta = 0$ e logo A e B são perpendiculares.
Tomando agora o produto interno de $A = (x, y, z)$ por ele mesmo, e levando-se em conta que a norma de um terno pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{\| A \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{A.A}}$$

tem-se que $\| A \|^2 = A.A$, e assim usando a fórmula leva a $\cos\beta = 1$, ou seja, $\beta = 0$, como era de se esperar, pois foi feito o produto interno de A por A.
Fazendo-se o produto interno por dois pares que estejam em um mesmo plano coordenado, pode-se usar a mesma interpretação geométrica que foi feita no R^2, pois se $A = (x, y, z)$ pertence a um plano coordenado anula a respectiva coordenada e as contas são feitas como se A estivesse em R^2.

—————————— □

Usando a fórmula acima, duas flechas são **perpendiculares** se e só se o produto interno entre eles é nulo.

A equação cartesiana de um plano que contém a origem, pode ser obtida descrevendo-se êsse plano como o conjunto de pontos $X = (x, y, z)$ do R^3 que são perpendiculares a uma dada direção $n = (a, b, c)$. Assim, esse plano é:

$$\{ X \in R^3 \mid X.n = 0 \}, \text{ ou ainda, } \{ X = (x, y, z) \in R^3 \mid ax + by + cz = 0 \}.$$

A equação cartesiana do plano, que é perpendicular a $n = (a, b, c)$, e contém a origem é:

$$ax + by + cz = 0.$$

A flecha n é perpendicular ao plano e também é conhecida por **normal ao plano**.

EXEMPLO I.41

$x + 2y - z = 0$ é a equação do plano que contém a origem e é perpendicular à direção $n = (1, 2, -1)$. Observe que qualquer múltiplo, não nulo, de n também é normal ao plano. Assim, $2x + 4y - 2z = 0$ também é uma equação cartesiana para o mesmo plano.
Por outro lado, uma equação cartesiana para o plano que contém a origem e é perpendicular a $n = (1, 0, -1)$ é $x - z = 0$ ou $x = z$.

□

Para obter a equação cartesiana de um plano perpendicular a uma direção $n = (a, b, c)$ e que contém um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$, não necessariamente igual à origem, basta observar que se $X = (x, y, z)$ pertence a esse plano, a flecha que liga A até X deve ser paralela ao plano. Essa flecha é $X - A$ e como é paralela ao plano deve ser perpendicular à direção n. Logo, o produto interno $n.(X - A)$ deve ser nulo. Isto é,

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \therefore$$

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \therefore$$

A equação do plano que contém o ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular à direção $n = (a, b, c)$ é:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

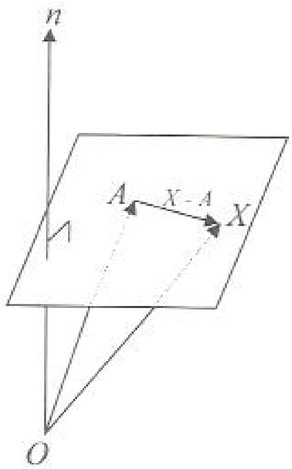

Figura I.32 – Direção paralela a um plano que contém o ponto A.

Observe que para um plano de equação $ax + by + cz = d$ conter a origem é necessário e suficiente que $d = 0$.

EXEMPLO I.42 ———
A equação do plano perpendicular à direção $n = (1, 1, 1)$ e que contém o ponto $A = (2, -3, 1)$ é $x + y + z = 0$. Observe que A é não nulo mas o plano contém a origem.

——— □

EXEMPLO I.43 ———
O teorema de Pitágoras pode ser demonstrado a partir do produto interno. Para isso, considere o triângulo de vértices A, B e C, retângulo em A. Os lados desse triângulo podem ser as flechas $B - A$, $C - A$ e $B - C$, sem a preocupação com o sentido. Como o ângulo do vértice A é reto, as flechas $B - A$ e $C - A$ são perpendiculares, e assim: $(B - A).(C - A) = 0$. Desenvolvendo esse produto temos que: $(B - A).(C - A) = B.C - A.C - A.B + A.A = 0$. Podendo tirar a relação: $B.C = A.B + A.C - A.A$ (*).
Para concluir o teorema de Pitágoras, é preciso mostrar que:
$\| B - A \|^2 + \| C - A \|^2 = \| B - C \|^2$, ou seja, que:

$(B-A).(B-A) + (C-A).(C-A) = (B-C).(B-C)$, que é o mesmo que: $B.B + A.A - 2A.B + C.C + A.A - 2A.C = B.B + C.C - 2B.C$. Substituindo a equação (*) em $B.C$ leva a essa relação.

□

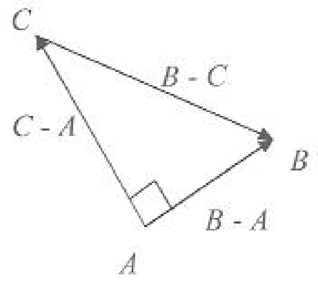

Figura I.33 – Triângulo retângulo de vértices A, B e C.

I.4.6 – Produto Vetorial

Outra operação que se faz no R^3 é o **produto vetorial**: $R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$ que associa dois ternos $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ ao terno:

$$\boxed{u \times v = (y_1 z_2 - y_2 z_1 \;,\; x_2 z_1 - z_2 x_1 \;,\; x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Para memorizar o produto vetorial considere os três ternos abaixo:

$$i = (1, 0, 0) \;,\; j = (0, 1, 0) \;\text{ e }\; k = (0, 0, 1).$$

Recordação do ensino médio:

O determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é igual a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Pode ser escrito como $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Assim, o determinante da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = 4 - 6 = -2$.

Para uma matriz $3x3$, o determinante pode ser calculado de diversas formas. Para facilitar o cálculo do produto vetorial, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ será calculado da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & c \\ d & j \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = (bf - ce)\,i - (aj - cd)\,j + (ae - bd)\,k.$$

O determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 3.2 + 4.1 = 0.$

No próximo capítulo o determinante será estudado com mais detalhes.

O produto vetorial de $u = (x_1, y_1, z_1)$ por $v = (x_2, y_2, z_2)$ é obtido calculando-se o seguinte determinante:

$$\boldsymbol{u \times v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{(y_1 z_2 - y_2 z_1)\,i - (z_2 x_1 - x_2 z_1)\,j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,k}$$

Esse determinante pode ser calculado usando-se Laplace na primeira linha, ou qualquer outro método de cálculo de determinante usado no ensino médio. Observe que o determinante produz o mesmo resultado, apenas está escrito como a combinação linear de i, j e k.

– Essas propriedades servem de **caracterização do produto vetorial**:

1) $u \times v$ é perpendicular a u e a v. (direção)
2) O sentido de $u \times v$ segue a regra da mão direita. (sentido)
3) $\| u \times v \| = \| u \| \; \| v \| \; | sen\ \alpha |$, sendo α o ângulo entre u e v (tamanho).
4) $u \times v = - v \times u$.
5) $u \times u = (0, 0, 0)$.
6) $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$.
7) $a(u \times v) = (au) \times v = u \times (av)$.
8) $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$ e $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

As demonstrações das propriedades acima foram feitas no apêndice. Para demonstrá-las deve-se usar produto interno, as propriedades do determinante ou simplesmente calcular o produto vetorial.

EXEMPLO I.44

Considere o plano dado pelas suas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = t + 3s + 4 \\ y = 2t - s + 5 \\ z = -3t + 2s + 6 \end{cases} \quad \text{com} \quad t, s \in R..$$

Uma maneira de encontrar a equação cartesiana do plano é eliminando-se t e s do sistema.

Uma forma mais fácil é lembrar que as direções $u = (1, 2, -3)$ e $v = (3, -1, 2)$ são paralelas ao plano e que $A = (4, 5, 6)$ é um ponto do plano. A direção normal ao plano é perpendicular a u e a v e pode ser obtida pelo produto vetorial:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - 11j - 7k = (1, -11, -7).$$

Logo, usando-se A e n, a equação cartesiana do plano é $x - 11y - 7z = -93$.

□

EXEMPLO I.45

Dada a equação cartesiana de um plano $x - y + 2z = 3$, para se obter equações paramétricas para o plano, procede-se da seguinte maneira: isola-se uma das variáveis de um dos lados da equação, por exemplo x. Obtendo-se a equação na seguinte forma: $x = y - 2z + 3$ e acrescenta-se as equações $y = y$ e $z = z$ (para as variáveis que não foram isoladas) formando um sistema:

$$\begin{cases} x = y - 2z + 3 \\ y = y \\ z = z \end{cases}.$$

Fazendo-se $y = t$ e $z = s$ vê-se que essas já são as equações paramétricas do plano, que é paralelo às direções $(1, 1, 0)$ e $(-2, 0, 1)$ e contém o ponto $(3, 0, 0)$.

□

Considere o paralelogramo definido pela soma $u + v$. A área desse paralelogramo é o produto da base pela altura.

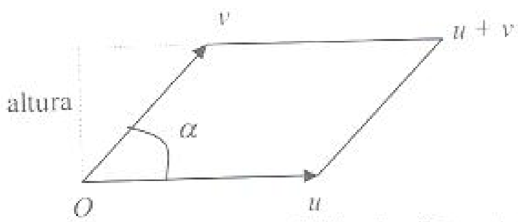

Figura I.34 Paralelogramo definido pela adição $u + v$.

A base do paralelogramo é a norma $\| u \|$ e a altura é igual a $\| v \| \, sen\ \alpha$. Então sua área é $\| u \| \, \| v \| \, sen\ \alpha$ que, pela propriedade 3 do produto vetorial, é igual à norma $\| u \ x \ v \|$. Assim, a **área do paralelogramo** pode ser calculada usando-se o produto vetorial.

EXEMPLO I.46

Observe que os pontos:
$A = (1, 2, 2)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (2, 3, 0)$ e $D = (3, 2, 0)$ estão no mesmo plano $x + y + z = 5$, veremos que são os vértices de um quadrilátero.
Transladando todos esses pontos, de forma que o vértice A fique na origem, isto é, diminuindo A de todos eles, fica: $A - A = O = (0, 0, 0)$,
$B - A = (1, -1, 0)$, $C - A = (1, 1, -2)$ e $D - A = (2, 0, -2)$.
Denominando-se $B - A = u$, $C - A = v$, verifica-se que $D - A = u + v$, e como não foi alterada a forma nem a área do quadrilátero esse é um paralelogramo. Sua área pode ser calculada pelo produto vetorial:

$$u \ x \ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 2, 2).$$

A área do paralelogramo é igual a $\| (2, 2, 2) \| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ unidades de área.

□

O produto interno de $u \ x \ v$ por w é denominado **produto misto**. Esse produto, $u \ x \ v \, . \, w$[1], pode ser calculado por:

$$u \ x \ v \, . \, w = \| u \ x \ v \| \, \| w \| \cos \beta, \text{ sendo } \beta \text{ o ângulo entre } u \ x \ v \text{ e } w.$$

Considere o prisma definido pela soma de três ternos u, v e w.

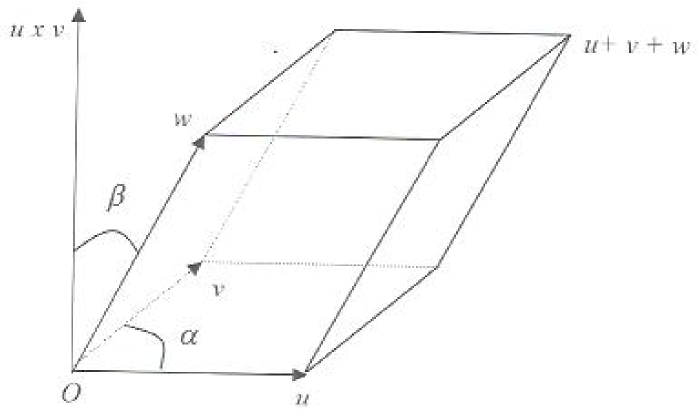

Figura I.35 Prisma definido pela adição $u + v + w$.

[1] Observe que não há necessidade de parênteses no produto misto, pois só faz sentido fazer primeiro o produto vetorial e depois o produto interno.

A altura do prisma é o módulo de $\| w \|\ \cos\beta$ e como $\| u \times v \|$ é a área da base, o módulo desse produto misto $| u \times v \,.\, w |$ é o **volume do prisma**.

O volume de um tetraedro (figura abaixo) que tem vértices O , u , v e w é igual a $1/6$ do volume do prisma definido acima, ou igual a $1/3$ da altura pela área da base. Como a área da base do tetraedro é a metade da área da base do prisma, o **volume do tetraedro** é $1/6$ do módulo do produto misto.

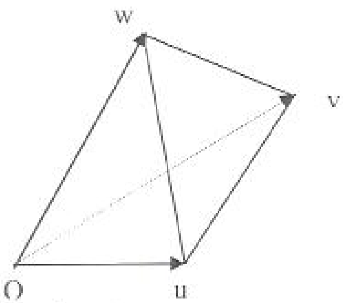

Figura I.36 – Tetraedro de vértices O , u , v e w.

EXEMPLO I.47

O volume do tetraedro cujos vértices são: $O = (0, 0, 0)$, $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 1)$ e $w = (1, -3, 2)$ é calculado primeiramente obtendo o produto vetorial $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4)$. Depois é feito o cálculo do produto interno $u \times v \,.\, w = (-4, 8, -4) \,.\, (1, -3, 2) = -36$.

O volume do tetraedro é um sexto do módulo desse valor, ou seja, 6 unidades de volume.

□

Para calcular o produto misto mais facilmente, suponha que o produto vetorial de $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ seja $u \times v = (a, b, c)$ que pode ser escrito como $u \times v = a\,i + b\,j + c\,k$. O produto interno de $u \times v$ por $w = (w_1, w_2, w_3)$ é $u \times v.\, w = (a\,i + b\,j + c\,k).\, w = a\, i.w + b\, j.w + c\, k.w = a\,w_1 + b\,w_2 + c\,w_3 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, w_1 - (v_3 u_1 - u_3 v_2)\, w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, w_3$. Esse é o desenvolvimento de Laplace, pela primeira linha, no cálculo do determinante $\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$. Assim, o produto misto pode ser calculado usando o determinante, colocando-se as linhas na ordem em que o produto aparece:

$$u \times v . w = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

EXEMPLO I.48 ——————————

O produto misto entre $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 1)$ e $w = (1, -3, 2)$, do exemplo anterior, é $u \times v . w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -36$.

$\square$

I.4.7 – Distâncias e Ângulos no R^3

A distância de um plano de equação $ax + by + cz = d$ à origem, pode ser encontrada procurando-se um múltiplo de $n = (a, b, c)$ que pertença ao plano. Seja $t(a, b, c) = (ta, tb, tc)$ esse múltiplo. Substituindo-se o múltiplo na equação do plano obtém-se:

$$t a^2 + t b^2 + t c^2 = d \ \therefore\ t(a^2 + b^2 + c^2) = d \ \therefore\ t = \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2},$$

concluindo-se que: $(x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c) = \dfrac{d}{a^2 + b^2 + c^2}(a,b,c) = d\,\dfrac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|^2}$ é perpendicular e pertence ao plano.

A distância é a norma de (x_0, y_0, z_0), que é:

> **A distância do plano $ax + by + cz = d$ à origem é**
>
> $$|d|\frac{\|(a, b, c)\|}{\|(a, b, c)\|^2} = \frac{|d|}{\|(a, b, c)\|}.$$

EXEMPLO I.49 ——————————

A distância do plano $x + y + z = 3$ à origem é $\dfrac{|3|}{\|(1, 1, 1)\|} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\square$

EXEMPLO I.50

O ângulo entre dois planos é o mesmo ângulo entre as normais a esses planos. Assim, o ângulo entre os planos $x + y + z = 1$ e $x - z = 7$ é o mesmo que o ângulo entre $(1, 1, 1)$, que é normal ao primeiro plano, e $(1, 0, -1)$, que é normal ao segundo. Como o produto interno entre os normais é nulo, esses planos são perpendiculares.

Para que dois planos sejam paralelos, eles devem ter seus normais com a mesma direção. As equações de dois **planos paralelos** devem ser da forma

$$ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad ax + by + cz = d'.$$

Observe que $n = (a, b, c)$ é normal aos dois planos acima. No entanto, não há necessidade de ser o mesmo normal aos dois planos. Para eles serem paralelos basta que um normal seja múltiplo do outro.

EXEMPLO I.51

Os planos $x + 2y + 3x = 7$ e $2x + 4y + 6z = 9$ são paralelos. Seus normais são: $(1, ,2, 3)$ e $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$.

A distância entre dois planos é calculada da mesma forma que o cálculo da distância entre duas retas no R^2. Para fazer isso é preciso ver a posição relativa dos planos em relação à origem e seu normal. Considere dois planos paralelos cujas equações cartesianas são: $ax + by + cz = d_1$ e $ax + by + cz = d_2$.

Se a origem não está entre os planos, d_1 e d_2 têm o mesmo sinal, e, nesse caso, a distância entre os planos é a diferença entre as distâncias dos planos à origem. Como não se sabe o sinal de d_1 e de d_2 e também não é conhecido qual deles tem maior valor toma-se o módulo da diferença: $\frac{|d_2 - d_1|}{\|(a,b,c)\|}$.

Se a origem está entre os planos devem-se somar as distâncias dos planos à origem. Mas nesse caso, d_1 e d_2 não tem o mesmo sinal e não é conhecido qual deles tem sinal negativo. Toma-se assim, o módulo da diferença obtendo-se a mesma fórmula acima: $\frac{|d_2 - d_1|}{\|(a,b,c)\|}$.

Em qualquer caso a fórmula é a mesma:

A distância entre os planos $ax + by + cz = d_1$ **e** $ax + by + cz = d_2$ **é**

$$\frac{|d_2 - d_1|}{\|(a,b,c)\|}.$$

EXEMPLO I.52

A distância entre os planos $x - 2y + 2z = 12$ e $x - 2y + 2z - 3 = 0$ é $\dfrac{|3-12|}{\|(1,-2,2)\|} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Para calcular a distância de um ponto qualquer $A = (x_0, y_0, z_0)$ até um plano de equação $ax + by + cz = d$, basta obter a equação de um plano paralelo ao plano dado e que contenha o ponto A. A **distância entre o ponto e o plano** é igual a distância entre os dois planos.

EXEMPLO I.53

Considere o plano $x - y + 2z = 3$ e o ponto $A = (3, 1, -1)$. Um plano para ser paralelo ao plano $x - y + 2z = 3$ tem equação $x - y + 2z = d$ e para conter A, esse deve satisfazer à equação do plano. Logo substituindo-se A na equação é obtido $d = 0$. E a equação do plano paralelo ao plano dado que contém A é $x - y + 2z = 0$.

A distância procurada é a mesma distância entre os dois planos, que é $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Sejam agora o ponto $B = (5, -4, -3)$ e o mesmo plano $x - y + 2z = 3$. Calculando-se o valor de d para esse ponto B obtém-se $d = 3$, ou seja, chega-se à mesma equação de plano dado, logo B pertence ao plano $x - y + 2z = 3$ e a distância é zero.

Existem três possibilidades para a **posição relativa entre um plano e uma reta**: eles podem ser **concorrentes**, ou seja, ter um único ponto em comum, ou a reta estar contida no plano ou ainda não ter pontos em comum, isto é, serem **paralelos**.

EXEMPLO I.54

Considere o plano $x + y + z + 3 = 0$ e as retas

$$r_1 := \begin{cases} x = s - 1 \\ y = -2s + 2 \\ z = -s \end{cases} , s \in R , \qquad r_2 := \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = t - 4 \end{cases} , t \in R \quad \text{e}$$

$$r_3 := \begin{cases} x = l - 1 \\ y = -l + 2 \\ z = -3 \end{cases} , l \in R .$$

Para a reta ser paralela ou pertencer ao plano, sua direção tem que ser perpendicular ao normal do plano, que nesse exemplo é $n = (1, 1, 1)$.
A direção da reta r_1 é $d_1 = (1, -2, -1)$, que não é perpendicular a n, logo r_1 é concorrente ao plano. Para encontrar a interseção basta substituir na equação do plano as equações da reta, obtendo $(s - 1) + (-2s + 2) + (-s) + 3 = 0 \;\therefore$ $-2s + 4 = 0 \;\therefore\; s = 2$, levando ao ponto de interseção $(1, -2, -2)$.

A direção da reta r_2 é $d_2 = (1, -2, 1)$ que é perpendicular a n, pois o produto interno $n.d_1 = 0$, assim r_2 é paralela ou pertence ao plano. Para saber em qual dos dois casos se encontra r_2, basta testar um único ponto da reta para saber se está contido no plano. Se esse ponto estiver no plano todos os outros pontos da reta também estão no plano, caso contrário, a reta é paralela ao plano e não têm pontos em comum. O ponto da reta que já aparece explicito nas equações de r_2 é o ponto $(-1, 2, -4)$, fazendo $t = 0$. Substituindo-se esse ponto na equação do plano verifica-se que ele pertence ao plano e assim a reta está contida no plano.

A última reta r_3 tem direção $d_3 = (1, -1, 0)$ que é perpendicular a n, e ao substituir o ponto da reta $(-1, 2, -3)$ na equação do plano verifica-se que, como ele não satisfaz a equação, logo a reta e o plano são paralelos. Para calcular a distância da reta ao plano procede-se da mesma maneira que para calcular a distância de um ponto a um plano. Escolhe-se um ponto qualquer da reta e calcula-se a distância, por exemplo, o mesmo ponto acima $(-1, 2, -3)$. O plano paralelo ao dado que contém esse ponto é $x + y + z + 2 = 0$, cuja distância ao plano dado é $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

□

As possíveis **posições relativas entre duas retas no** R^3 são: **concorrentes**, isto é, têm um único ponto em comum, **paralelas**, se têm a mesma direção ou **reversas**, quando não estiverem em nenhum dos dois casos anteriores.

EXEMPLO I.55

Considere as retas:

$$r_1 := \begin{cases} x = s-1 \\ y = s+2 \\ z = s+1 \end{cases} ,\, s \in R, \quad r_2 := \begin{cases} x = t-2 \\ y = -t+5 \\ z = t \end{cases} ,\, t \in R \quad \text{e} \quad r_3 := \begin{cases} x = l-1 \\ y = -l+2 \\ z = l+3 \end{cases} ,\, l \in R.$$

As retas r_1 e r_2 não são paralelas, pois não têm a mesma direção, assim, ou são concorrentes ou reversas. Isso depende se têm, respectivamente, um ou nenhum ponto em comum. Para saber isso, é preciso igualar as equações das retas nas respectivas coordenadas, obtendo o sistema $\begin{cases} t-2 = s-1 \\ -t+5 = s+2 \\ t = s+1 \end{cases}$ que tem solução $s = 1$ e $t = 2$, ou seja, substituindo um desses valores em uma das equações, obtém-se o ponto $(0, 3, 2)$ como interseção. Concluindo-se que as retas r_1 e r_2 são concorrentes.

As retas r_1 e r_3 estão no mesmo caso anterior, não são paralelas, e produzem o seguinte sistema: $\begin{cases} t-1 = s-1 \\ -t+2 = s+2 \\ t+3 = s+1 \end{cases}$ que diminuindo-se a terceira equação da primeira conduz à $4 = 2$. Isso mostra que esse sistema é impossível, ou seja, que as retas não têm ponto em comum, são reversas. Para calcular a distância entre essas duas retas procura-se dois planos paralelos, cada um contendo uma das retas. Para um plano conter uma reta, a direção da reta tem que ser perpendicular ao normal do plano. Então, esse normal do plano tem que ser perpendicular às duas direções das retas e pode ser obtido pelo produto vetorial:

$$n = (1, -1, 1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2).$$ Os planos devem conter, respectivamente, r_1 e r_3. Para isso, deve-se substituir um ponto de cada reta na equação dos planos, que tem a forma $-2x + 2z = d$, para obter os valores de d As equações dos planos são: $-2x + 2z = 4$ contendo r_1 e $-2x + 2z = 8$ contendo r_3, cuja distância é $\frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$.

Finalmente, as retas r_2 e r_3 são paralelas, pois têm a mesma direção. O cálculo da distância entre elas é diferente do método de cálculo da distância entre duas retas reversas. Para isso, deve-se procurar um plano perpendicular às duas, obter

as interseções dessas duas retas com o plano e calcular a distância entre esses pontos, que é a distância entre as retas.
O plano procurado pode ser qualquer plano perpendicular à direção das retas, por exemplo, o que contém a origem $x - y + z = 0$. A interseção da reta r_2 com o plano é obtida substituindo-se as equações paramétricas da reta na equação do plano $(t-2) - (-t+5) + t = 0 \therefore t = 7/3$ que leva ao ponto $(1/3, 8/3, 7/3)$. A interseção de r_3 com o plano é calculada, da mesma forma, levando ao cálculo $(t-1) - (-t+2) + (t+3) = 0 \therefore t = 0$, obtendo-se o ponto de interseção $(-1, 2, 3)$. A distância entre as duas retas é a distância entre esses dois pontos, $(1/3, 8/3, 7/3)$ e $(-1, 2, 3)$ que é $\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

□

A **distância entre um ponto e uma reta no R^3** é calculada usando-se um processo parecido com o da distância entre duas retas paralelas. Esse cálculo foi feito no exemplo anterior. Para isso procura-se um plano perpendicular à reta e que contém o ponto dado.

EXEMPLO I.56

Sejam $A = (0, 2, -1)$ e a reta de equações $r := \begin{cases} x = s-1 \\ y = s+2 \\ z = s+1 \end{cases} \quad s \in R$. O plano procurado é $x + y + z = 1$, pois é perpendicular à direção $(1, 1, 1)$ da reta r e contém o ponto A. A interseção da reta r com o plano é calculada substituindo as equações da reta na equação do plano, $s - 1 + s + 2 + s + 1 = 1 \therefore 3s = -1 \therefore s = -1/3$. Logo, o ponto da interseção é $(-4/3, 5/3, 2/3)$. A distância procurada é a distância entre esses dois pontos $A = (0, 2, -1)$ e o da interseção $(-4/3, 5/3, 2/3)$, que é igual a $\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$.

□

O **ângulo entre duas retas** concorrentes no R^3 pode ser medido usando-se suas direções. Através da fórmula $u.v = \|u\| \, \|v\| \cos\alpha$, calcula-se o ângulo α entre u e v.

EXEMPLO I.57

O ângulo entre as retas r_1 e r_2 do exemplo I.53, que são concorrentes, pode ser medido por suas direções $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 1)$.

Assim, $cos\ \alpha = (1\ ,1\ ,1)\ .\ (1\ ,-1\ ,1)\ /\ 3\ = 1/3$, logo $\alpha = arc\ cos\ 1/3$ que é aproximadamente $70,52$ graus.

O **ângulo entre um plano e uma reta** é um pouco mais complicado de ser medido, pois esse é o menor ângulo entre os dois. A forma mais simples é calcular o complementar do ângulo, formado pela direção da reta com a direção normal do plano. O ângulo pedido é o formado pela reta e sua projeção no plano, como pode ser visto na figura abaixo. Observe também que, a projeção, a reta e a normal ao plano pertencem a um mesmo plano, que é perpendicular ao plano dado.

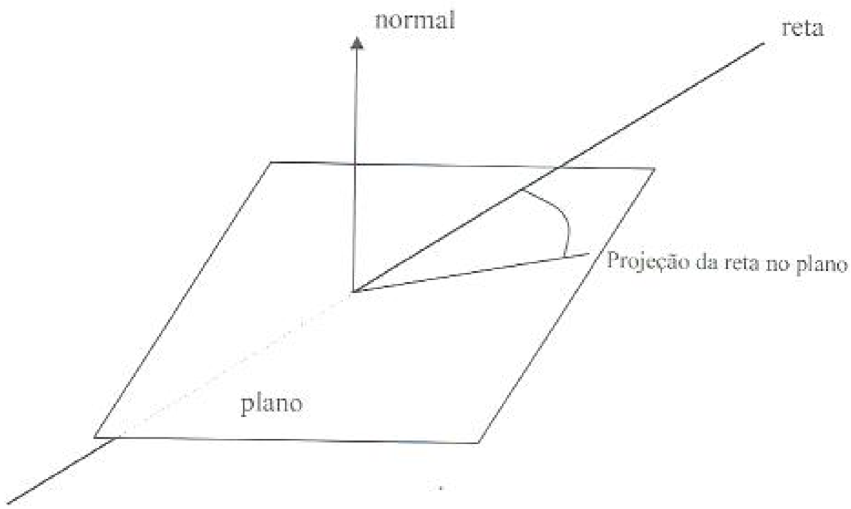

Figura I.37 – O ângulo entre uma reta e um plano.

EXEMPLO I.58

Dados o plano $x + y + z = 7$ e a reta $r := \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 3 \\ z = \sqrt{6}\ t - 4 \end{cases} \quad t \in R$.

O normal ao plano é $(\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ )$ e a direção da reta é $(\ 1\ ,\ -1\ ,\ \sqrt{6}\ )$, cujo ângulo β entre eles é calculado por $cos\ \beta = \dfrac{(1\ ,1\ ,1)}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{(1\ ,-1\ ,\sqrt{6})}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2}$. Logo, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ e seu complementar, que é o ângulo entre a reta e o plano é $\dfrac{\pi}{6}$.

I.5 – O Espaço R^n

Um banco para controlar as contas correntes de seus clientes necessita de pelo menos uma informação para cada conta. Dessa forma, é preciso manipular milhares de informações para controlar as contas correntes. Duas informações como no R^2, ou três como no espaço R^3 não são suficientes para casos semelhantes a esses. É necessário criar um espaço que possua tantas informações quantas sejam necessárias, ou seja, tenha um número real para cada informação. Suponha que sejam necessárias n informações, sendo n um número inteiro positivo.

Assim, cria-se o espaço R^n que é:

$$\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R,\ i = 1, \dots, n \}.$$

Isto é, o produto cartesiano $R \times R \times \dots \times R$ (n vezes). Quando $n = 2$ esse é o conjunto dos pares (ou duplas), se $n = 3$ é o conjunto dos ternos (ou triplas), se $n = 4$ é o conjunto dos quádruplos e para um n qualquer é denominado conjunto das ***n*-uplas** de números reais. Da mesma forma que os espaços mencionados anteriormente, esse conjunto conta com duas operações:

Adição: $R^n \times R^n \to R^n$; que associa duas n-uplas de números reais: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ à n-upla $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Multiplicação por escalar: $R \times R^n \to R^n$; que associa um número real a e uma n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n-upla $(a x_1, a x_2, \dots, a x_n)$.

Também no R^n essas duas operações podem ser feitas conjuntamente, recebendo o nome de **combinação linear**.

EXEMPLO I.59

A combinação linear pode ser feita com m n-uplas de R^n, $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, $(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$, ..., $(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ e m números reais $a_1, a_2, \dots, a_m$, da seguinte forma:

$$a_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) + a_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) + \dots + a_m(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_{j1}, \sum_{k=1}^{m} a_k x_{k2}, \dots, \sum_{l=1}^{m} a_l x_{ln} \right).$$

$\square$

O conjunto R^n, para $n > 3$, não tem uma representação geométrica como nos espaços R, R^2 e R^3. Porém, parte do que foi feito nesses espaços será transferido para o R^n, fazendo com que se possa realizar as contas em R^n e pensar geometricamente no R^2 ou no R^3, quando isso for possível. A seguir estão alguns dos conceitos que são comuns ao R^n para todo n.

O **produto interno do R^n** (ou produto interno usual do R^n) é definido da mesma maneira que no R^2 e no R^3: dados dois elementos do conjunto R^n, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ o produto interno dessas duas n-uplas é definido como $X.Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

A **norma** de uma n-upla $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ do R^n é definida por:

$$\| X \| = \sqrt{X.X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ .$$

Se a **norma** de $X \in R^n$ é igual a **um**, diz-se que X é **unitário**.

Mais adiante, e de uma forma mais geral, será mostrada a **desigualdade de Schwarz** que diz que $| X.Y | \leq \| X \|\ \| Y \|$. Ou seja, que $\dfrac{| X.Y |}{\| X \|\ \| Y \|} = \left| \dfrac{X.Y}{\| X \|\ \| Y \|} \right| \leq 1$. Como o módulo do quociente do produto interno de X e de Y por suas normas é menor ou igual a 1, e o cosseno de um número também é menor ou igual a 1, esse quociente pode ser considerado como o cosseno de um ângulo α, isto é, $\dfrac{X.Y}{\| X \|\ \| Y \|} = \cos\alpha$ para algum $\alpha \in R$. Mesmo o R^n $(n > 3)$ não possuindo geometria, **define-se esse ângulo α como o ângulo entre X e Y**. A mesma fórmula que foi vista no R^2 e no R^3 vale para o R^n, para todo n: $\boldsymbol{X.Y = \| X \|\ \| Y \| \cos\alpha}$.

EXEMPLO I.60

A fórmula $X.Y = \| X \|\ \| Y \| \cos\alpha$ pode ser verificada quando Y é um múltiplo de X, isto é, $Y = aX$. Nesse caso, a fórmula fica:

$$X.Y = X.(aX) = a\,(X.X) = a \| X \|^2 = a \| X \| \| X \| = \| X \| \| aX \| = \| X \| \| Y \|$$

E assim, $\cos\alpha = 1$ e $\alpha = 0$.

□

Como não existe a geometria em R^n para $n > 3$, quando $\alpha = \pi/2$ diz-se que X e Y são **ortogonais** no lugar de perpendiculares. Assim, X e Y são ortogonais se o produto interno entre eles é nulo, $X.Y = 0$. Da mesma forma, generaliza-se o conceito de "tamanho" dizendo-se que $\|X\|$ **é a distância de** X **até a origem**, e que $\|X-Y\|$ **é a distância de** X **até** Y.

O conjunto $\{(x, y) \in R^2 \mid ax + by = c\}$ representa uma reta em R^2, o conjunto $\{(x, y, z) \in R^3 \mid ax + by + cz = d\}$ representa um plano em R^3, assim o conjunto $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b\}$ recebe o nome de **hiperplano do** R^n.

I.6 – Exercícios

1) Quais são os pontos cuja distância à origem é 3 ?
a) Nos reais. b) No R^2.

2) Escreva o par $(3, 2)$ como combinação linear dos pares $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

3) a) Desenhe os eixos que representam geometricamente o R^2.
b) Represente graficamente, nesses eixos, os seguintes pontos:
$A = (1, 5)$, $B = (4, 1)$, $C = (-1, 3)$, $D = (3, -1)$, $E = (-1, -1)$, $F = (0, -3)$, $G = (-1, 0)$ e $O = (0, 0)$.

4) Use a representação por flechas e a regra do paralelogramo para calcular:
a) A soma $(1, 2) + (2, 3)$
b) A diferença $(2, 3) - (1, 1)$
c) A combinação linear $2(1, 2) + 3(-1, -1)$.

5) Faça um esboço do conjunto de todos os pares unitários do R^2. Que conjunto é esse?

6) Encontre todos os pares unitários que têm a mesma direção de $(3, -4)$.

7) Determine a equação das seguintes circunferências:
a) De centro na origem e raio 2.
b) De centro no ponto $(1, 3)$ e raio 2.
c) De centro no ponto $(0, -1)$ e raio 1.

8) Desenhe duas flechas diferentes em R^2, que representam o mesmo ponto dado $A = (2, 1)$.

9) Considere o ponto $A = (-1, 2)$ do R^2.
a) Determine uma equação para o conjunto dos múltiplos de A.
b) Translade esse conjunto para o ponto $B = (3, 3)$ e obtenha uma equação para esse conjunto.
c) Que conjuntos são esses ?

10) Dê exemplos de:
a) Um elemento do R^2.
b) Uma equação cartesiana de uma reta em R^2.
c) Equações paramétricas de uma reta em R^2.

11) Determine as equações:

a) Cartesiana e paramétricas de uma reta em R^2 que contenha os pontos $(1, 1)$ e $(3, -1)$.

b) Paramétrica e cartesiana da reta em R^2 que contém o ponto $(4, 2)$ e tem a direção do par $u = (1, 2)$.

c) Da reta paralela à reta $2x + 3y = 1$ e que contenha o ponto $(1, 1)$.

d) Da reta perpendicular à reta $2x + 3y = 5$ contendo a origem.

12) Qual é:

a) A relação (geométrica) entre o par (a, b) e a reta $ax + by = c$? Justifique.

b) A distância entre os pontos $(1, -1)$ e $(4, 3)$?

c) A distância entre o ponto $(1, 1)$ e a reta $x + y = 1$?

d) A interseção e o ângulo entre as retas $x + y = 0$ e $2x - y = 1$?

e) A distância e o ângulo entre as retas $x + y = 0$ e $x + y = 2$?

f) A equação da reta paralela à reta $2x - y = 7$ que contenha o ponto $(3, -3)$.

g) A distância entre as retas do item anterior?

h) O ângulo e a interseção das retas $3x - 4y = 24$ e $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -4t + 8 \end{cases}, t \in R$?

i) O ângulo e a interseção das retas $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \end{cases}, t \in R$ e

$\begin{cases} x = 2s + 2 \\ y = 2s - 4 \end{cases}, s \in R$?

13) Determine a equação da parábola dado que:

a) O foco é o ponto $F = (2, 0)$ e a diretriz é o eixo Y.

b) O foco é o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta $x + p = 0$, com $p > 0$.

c) O foco é o ponto $F = (p, b)$ e a diretriz a reta $x + p = 0$, considerando-se $p > 0$.

14) Qual é:

a) A projeção ortogonal de $X = (7, 1)$ na direção de $d = (1, -1)$?

b) A projeção ortogonal de $X = (1, -2)$ na reta $x + y = 0$?

c) O simétrico de $X = (7, 1)$ em relação à reta que contém a origem e tem a direção de $d = (1, -1)$?

d) O simétrico de $X = (1, -2)$ em relação à reta $x + y = 0$?

15) É correto dizer que:

a) $(x, y, 0) \in R^2$? Justifique.

b) $R^2 \subset R^3$? Justifique.

16) Pegue três lápis e use a regra da mão direita para colocar os lápis na direção e sentido de cada um dos eixos coordenados X, Y e Z do R^3.

17) Considerando o R^3:
   a) Qual é o tipo do conjunto de todos os ternos unitários ?
   b) Determine todos os unitários que têm a direção de $u = (1, -2, 2)$.

18) Qual é:
   a) A relação (geométrica) entre o terno (a, b, c) e o plano de equação $ax + by + cz = d$? Justifique
   b) O produto vetorial dos ternos $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 3)$?
   c) O produto vetorial dos ternos $(1, 1, 1)$ e $(2, 2, 2)$?
   d) A interpretação geométrica do produto vetorial ?

19) Determine as equações de:
   a) Uma reta que contém o ponto $(1, 1, 1)$ e tem a direção $d = (1, 2, 3)$.
   b) Uma reta que contém os pontos $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 3)$.
   c) Um plano contendo a origem e perpendicular a $n = (1, -1, 1)$.
   d) Um plano paralelo ao do item anterior e contendo o ponto $A = (1, 1, 1)$.
   e) Um plano contendo os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (3, 2, 1)$.
   f) Um plano contendo os pontos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (3, 2, 1)$.
   g) Um plano perpendicular aos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 1$ contendo a origem.
   h) Um plano que contém o ponto $A = (1, 1, 1)$ e a reta de equações paramétricas $x = t + 1$, $y = t - 1$, $z = t$, $t \in R$.

20) Dados o terno $n = (a, b, c)$ e o plano π de equação $ax + by + cz = d$:
   a) Ache o valor de $\alpha \in R$ para que o terno αn pertença ao plano π.
   b) Qual é a equação do plano paralelo a π contendo a origem.
   c) Qual é a distância do plano π até a origem?
   d) Qual é a distância do plano π ao plano do item b ?
   e) Qual é a distância do plano π ao plano de equação $ax + by + cz = d'$?
   f) Qual é a distância do plano $ax + by + cz = 0$ à reta de equação paramétrica $(x, y, z) = (c, 0, -a)t + (1, 1, 1)$, t real?
   g) Mostre que a reta e o plano do item anterior são paralelos.

21) Ache a interseção das retas $x + y = 1$ e $x + 2y = 3$. Essas retas estão no R^2 ou no R^3 ? Justifique.

22) Ache as equações dos planos que são perpendiculares ao vetor $(2, 2, 2)$ e que distam $\sqrt{3}$ do ponto $(1, 1, 1)$.

23) Qual é o ângulo entre:

a) Os ternos $(\sqrt{3}, 3, 0)$ e $(-1, \sqrt{3}, 0)$?

b) Os ternos $(1, 1, \sqrt{7})$ e $(\sqrt{7}, 0, -7)$?

c) As retas $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-1 \end{cases}$, $t \in R$ e $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1 \end{cases}$, $t \in R$?

d) As retas $\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t+2 \\ z = -t+1 \end{cases}$, $t \in R$ e $\begin{cases} x = s+3 \\ y = -s+8 \\ z = -s+1 \end{cases}$, $s \in R$?

e) Os planos $x + y + \sqrt{7}z = 3$ e $-x + \sqrt{7}z = 1$?

f) Qual é a diferença entre as retas dos itens c e d ?

24) Dadas as retas $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-1 \\ z = t+2 \end{cases}$ $t \in R$ e $\begin{cases} x = s \\ y = 2s-4 \\ z = 3s-3 \end{cases}$ $s \in R$:

a) Mostre que as retas não são paralelas.

b) Determine a interseção das retas.

25) Dadas as retas $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-1 \\ z = t+2 \end{cases}$ $t \in R$ e $\begin{cases} x = s+1 \\ y = s-1 \\ z = s-2 \end{cases}$ $s \in R$:

a) Mostre que as retas são paralelas. Isto é, têm a mesma direção e não têm pontos em comum.

b) Ache um plano contendo a origem, perpendicular às retas.

c) Ache a interseção do plano com as retas.

d) Qual é a distância entre as retas?

26) A reta r contém os pontos $A = (3, -1, 1)$ e $B = (1, -3, 1)$. Encontre:

a) Equações para a reta r.

b) A distância da reta r até a origem.

c) Equações da reta, concorrente a r, que contém a origem e é perpendicular a r.

27) Considere a reta r_1 do R^3 de equações $\begin{cases} x = t+1 \\ y = \sqrt{2}\,t-1 \\ z = t+1 \end{cases}$, $t \in R$ e a reta r_2 que é a interseção dos planos $x + y - z = -1$ e $2x + y - 2z = -1$:

a) Ache equações paramétricas para r_2.

b) Obtenha, se houver, a interseção das retas r_1 e r_2.

c) Qual é o ângulo entre as retas r_1 e r_2?

28) Dadas as retas $r_1 := \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = -t+2 \end{cases}$ $t \in R$ e $r_2 := \begin{cases} x = s \\ y = s-1 \\ z = s-2 \end{cases}$ $s \in R$:

a) Mostre que as retas não são paralelas e não têm pontos em comum. Isto é, são reversas.

b) Determine a equação paramétrica de um plano paralelo às duas retas que contém a origem.

c) Ache a equação cartesiana de um plano contendo r_1 e a de outro plano contendo r_2, paralelos ao plano do item anterior.

d) Qual é a distância entre os planos do item anterior?

e) Qual é a distância entre as retas?

29) Considere os planos π_1, π_2 e π_3, com as seguintes características:

π_1 cuja equação cartesiana é $x + y - z = 5$,

π_2 tem como vetor normal $n = (0, 1, 1)$ e contém o ponto $P = (2, -1, 1)$

e π_3 contém os pontos $A = (2, 0, -2)$, $B = (-2, 1, 0)$ e $C = (0, 1, -2)$.

a) Determine as equações cartesianas de π_2 e de π_3.

b) Encontre equações paramétricas para π_1.

30) Dadas as três retas r_1, r_2 e r_3 de equações:

$r_1 := \begin{cases} x = t+1 \\ y = t-1 \\ z = 2t \end{cases}$ $t \in R$, $r_2 := \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 2s-3 \end{cases}$ $s \in R$ e $r_3 := \begin{cases} x = k-1 \\ y = 1 \\ z = -k+1 \end{cases}$ $k \in R$,

Nos itens a, b e c, diga justificando, qual é a posição relativa e a distância entre as retas. E, se for o caso, qual a sua interseção. Nos cálculos, use somente a fórmula da distância entre os planos $ax + by + cz = d$ e $ax + by + cz = d'$ que é $|d - d'| / ||(a,b,c)||$. As demais fórmulas devem ser justificadas como foram encontradas:

a) r_1 e r_2.

b) r_1 e r_3.

c) r_2 e r_3.

d) Mostre que o plano $x + y - z = 1$ e a reta r_1 são paralelos.

e) Calcule a distância entre o plano e a reta do item anterior.

31) a) Encontre a equação da esfera de centro $(1, 2, 3)$ e raio 4.

b) Determine o centro e o raio da esfera que tem equação
$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x - 2y)$.

32) O que descreve o conjunto de todas as combinações lineares dos ternos:

a) $(1, 2, 0)$ e $(2, 0, 1)$?

b) $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(1, 2, 3)$?

c) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(2, 2, 1)$?

33) Encontre as equações:

a) Paramétricas para o plano de equação cartesiana $x + y + z = 1$.

b) Cartesiana para o plano de equações paramétricas $\begin{cases} x = t - s + 1 \\ y = t + s - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ $t, s \in R$.

34) Verifique se os pontos A, B, C e D pertencem ao mesmo plano. Se isso acontecer, determine a equação cartesiana do plano:

a) $A = (1, 1, 1)$, $B = (5, -2, 3)$, $C = (0, 2, 1)$ e $D = (7, -3, -1)$.

b) $A = (1, 1, 1)$, $B = (5, -2, 3)$, $C = (0, 2, 1)$ e $D = (1, 2, 3)$.

c) $A = (1, 1, 1)$, $B = (5, -2, 3)$, $C = (1, -1/2, 5/2)$ e $D = (1, 2, 3)$.

35) Calcule a área dos paralelogramos, cujos vértices são dados abaixo:

a) $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(3, 1, 0)$ e $(4, 3, 0)$.

b) $(0, 0, 0)$, $(3, -1, 2)$, $(4, 1, 1)$ e $(7, 0, 3)$.

c) $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(-1, 1, 3)$ e $(0, 3, 6)$.

d) Mostre que os pontos dos itens anteriores formam paralelogramos.

36) Dados os pontos do R^3: $F = (1, -1, 1)$, $Q = (2, 0, 2)$, $P = (2, 1, 4)$ e $T = (3, 2, 5)$

a) Mostre que os pontos F, Q, P e T pertencem a um único plano, determinando suas equações paramétricas.

b) Obtenha uma equação cartesiana para o plano do item anterior.

c) Mostre que esses pontos são vértices de um paralelogramo.

d) Calcule a área do paralelogramo.

e) Quais são os tamanhos das duas diagonais do paralelogramo?

f) Ache o ponto de interseção das diagonais e verifique que as diagonais se interceptam em seus pontos médios.

37) Considere o prisma definido pela soma dos três ternos $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Calcule o volume do prisma.

38) Calcule o volume dos tetraedros, dados pelos vértices abaixo:

a) $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$.

b) $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$, $(1, 2, 5)$ e $(1, 1, 5)$.

39) Qual é a distância do ponto $A = (2, 0, -3)$ à reta $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$, $t \in R$?

40) Qual é o ângulo entre o plano $x + 2y - z = 1$ e a reta $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 \\ z = t - 7 \end{cases}$, $t \in R$?

41) Dados os pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 4, 5)$:

a) Obtenha o ponto M, médio do segmento de reta AB.
b) Qual é a equação do plano, que contém M, e as distâncias até A e B são iguais ?
c) Qual é a distância mencionada no item anterior ?
d) Existe outro plano, diferente do plano do item b, cuja distância até A e B são iguais ? Se existir, de uma descrição geométrica de um desses planos.

42) Os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (1, 2, 0)$ e $D = (2, 2, 2)$ são vértices de um tetraedro:
a) Determine a equação cartesiana do plano da face ABC.
b) Qual é a área da face ABC ?
c) Quanto mede a altura do tetraedro que é perpendicular à face ABC ?
d) Usando a área e a altura encontradas nos itens anteriores, calcule o volume do tetraedro.
e) Confirme o item anterior usando o produto misto.

43) Dadas as flechas A e B, não colineares:
a) Ache a equação do plano que contém a origem, A e B.
b) Mostre que $A + B$ pertence a esse plano.
c) Mostre que, se as flechas A e B têm o mesmo tamanho, então a flecha $A + B$ está na bissetriz do ângulo forma pelas flechas A e B.
d) Ache uma flecha pertencente a bissetriz do ângulo formado pelas flechas $A = (3, 0, 4)$ e $B = (0, -4, 3)$.
e) Ache uma flecha pertencente à bissetriz do ângulo formado pelas flechas $A = (1, 2, -2)$ e $B = (18, 18, 9)$.

44) Dados os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (6, 1, -1)$ e $C = (3, 2, 1)$:
a) Encontre um ponto D, de modo que, A, B, C e D formem um paralelogramo.
b) Qual é a equação cartesiana do plano que contém esse paralelogramo?

45) Dadas as retas $r_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R \right.$ e $r_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in R \right.$
a) Mostre que r_1 e r_2 são reversas.
b) Ache a equação de dois planos paralelos, cada um deles contendo uma das retas.
c) Se n é uma direção normal aos planos do item anterior, ache a equação cartesiana do plano paralelo a n contendo r_1.
d) Qual é a interseção do plano do item anterior com a reta r_2 ?
e) Encontre uma reta que tenha a direção de n e seja concorrente com as retas r_1 e r_2.
f) Qual é a interseção da reta do item anterior com r_1 ?

46) Mostre as seguintes propriedades do produto interno:

51) O tetraedro de vértices $A = (3, 4, 5)$, B, $C = (4, -3, 7)$ e D tem a face oposta ao vértice A no plano de equação $x + 2y + 2z = 12$. A aresta AB é perpendicular ao plano e a aresta CD está na reta de equações paramétricas $(x, y, z) = (4, t + 2, 2 - t)$, $t \in R$. Sabendo-se que a face BCD pertence ao plano e que as arestas BC e BD são perpendiculares:
  a) Ache as coordenadas do vértice B.
  b) Encontre a equação para a reta que contém a aresta BD.
  c) Ache as coordenadas do vértice D.
  d) Qual é o volume do tetraedro?
  e) Qual é a equação do plano que contém a face ACD?
  f) Ache equações paramétricas que descrevam a aresta BC.
     Sugestão: Faça um desenho do tetraedro.

52) Considerando o R^4:
  a) Determine quádruplos, de forma que, a combinação linear desses quádruplos descreva todo o R^4.
  b) Mostre que $u = (1, 2, -1, -2)$ e $v = (3, 1, 1, 2)$ são ortogonais.

53) Dados os pontos do R^3: $A = (2, 0, 0)$, $B = (2, 2, -2)$, $C = (0, 3, -1)$, $D = (0, 1, 1)$ e $E = (3, 1, 1)$:
  a) Mostre que A, B, C e D estão em um mesmo plano e determine a equação cartesiana desse plano.
  b) Mostre que A, B, C e D formam um retângulo.
  c) Se A, B, C, D, E, F, G e H são vértices de um paralelepípedo reto, como mostra a figura abaixo, encontre as coordenadas dos pontos F, G e H.
  d) Calcule o volume do paralelepípedo.

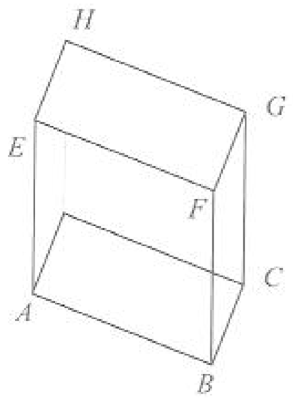

Figura I.38 Paralelepípedo.

I.7 – Apêndice do Capítulo I

Propriedades do Produto Vetorial

Nesse apêndice serão demonstradas as seguintes propriedades do produto vetorial:

1) $u \times v$ é perpendicular a u e a v. (direção)
2) O sentido de $u \times v$ segue a regra da mão direita. (sentido)
3) $\| u \times v \| = \| u \| \; \| v \| \; | sen\ \alpha |$, sendo α o ângulo entre u e v (tamanho).
4) $u \times v = - v \times u$.
5) $u \times u = (0, 0, 0)$.
6) $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$.
7) $a(u \times v) = (au) \times v = u \times (av)$.
8) $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$ e $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Sejam $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$, então:

1) A primeira propriedade pode ser demonstrada fazendo-se os seguintes produtos internos:

$$(u \times v) \,.\, u = (y_1 z_2 - y_2 z_1 , x_2 z_1 - z_2 x_1 , x_1 y_2 - x_2 y_1) . (x_1 , x_2 , x_3) = 0 ,$$

concluindo-se que, como esse produto interno é nulo, $u \times v$ é perpendicular a u e, da mesma forma, pode ser mostrado que é perpendicular a v.

$\square$

2) Para ver que u, v e $u \times v$ estão dispostos segundo a regra da mão direita, serão considerados os três ternos i , j e k , que como foi montada a disposição dos eixos do R^3 seguem a referida regra. Suponha que, após ter sido feito o produto vetorial, as posições de u , v e $u \times v$ foram congeladas como se fossem três arames soldados. Coloque u na direção e sentido de i, dessa forma as novas coordenadas de u nessa nova posição são $(x_1 , 0 , 0)$ com $x_1 > 0$. Sem alterar a posição de u, coloque v no plano definido por i e j, de forma que as novas coordenadas de v sejam $(x_2 , y_2 , 0)$, com $y_2 > 0$. Finalmente, para mostrar que u , v e $u \times v$ obedecem à regra da mão direita,

deverá ser mostrado que $u \, x \, v$ tem a mesma direção e sentido que k, já que é perpendicular a u e a v, e consequentemente a i e a j. Calculando-se o produto vetorial, chega-se a: $u \, x \, v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \, y_2 \, k$, que como $x_1 > 0$ e $y_2 > 0$, conclui-se que $u \, x \, v$ tem a mesma direção e sentido do que k.

□

3) A propriedade 7 será demonstrada antes da propriedade 3 .

7) Essa propriedade decorre imediatamente da seguinte propriedade de determinante: multiplicando-se uma linha por um número o determinante fica multiplicado por esse número. Para o leitor que não está familiarizado com as propriedades dos determinantes pode simplesmente calcular os produtos vetoriais e verificar que coincidem.

□

3) Usando-se a propriedade 7 para facilitar as contas dessa propriedade, observe que, mostrar que:

$$|| \, u \, x \, v \, || = || \, u \, || \; || \, v \, || \; | \, sen \, \alpha \, | \quad (*)$$

é o mesmo que mostrar que: $| \, sen \, \alpha \, | = \dfrac{1}{|| u ||} \dfrac{1}{|| v ||} || \, u \, x \, v \, || = \left\| \dfrac{u}{|| u ||} x \dfrac{v}{|| v ||} \right\|$
ou seja, basta mostrar essa propriedade considerando-se u e v unitários.

Elevando-se ao quadrado os dois lados da igualdade (*) e levando-se em conta que $|| \, u \, || = \sqrt{u.u} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 1$ e também que $|| \, v \, || = \sqrt{v.v} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 1$, basta mostrar que: $|| \, u \, x \, v \, ||^2 = sen^2 \, \alpha$.

Como $u \, x \, v = (y_1 z_2 - y_2 z_1 \, , \, x_2 z_1 - z_2 x_1 \, , \, x_1 y_2 - x_2 y_1)$, segue que

$$\begin{aligned} || \, u \, x \, v \, ||^2 &= (y_1 x_2)^2 + (z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2)^2 + (y_1 z_2)^2 - \\ &- 2 (y_1 z_2 y_2 z_1 + x_2 z_1 z_2 x_1 + x_1 y_2 x_2 y_1) = (x_1 x_2)^2 + (y_1 x_2)^2 + (z_1 x_2)^2 + \\ &+ (x_1 y_2)^2 + (y_1 y_2)^2 + (z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2)^2 + (y_1 z_2)^2 + (z_1 z_2)^2 - \\ &- (x_1 x_2)^2 - (y_1 y_2)^2 - (z_1 z_2)^2 - 2 (y_1 z_2 y_2 z_1 + x_2 z_1 z_2 x_1 + x_1 y_2 x_2 y_1) = \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) x_2^2 + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) y_2^2 + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) z_2^2 - \\ &- (x_1 x_2)^2 - (y_1 y_2)^2 - (z_1 z_2)^2 - 2 (y_1 z_2 y_2 z_1 + x_2 z_1 z_2 x_1 + x_1 y_2 x_2 y_1) = \\ &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \end{aligned}$$

$$- [(x_1 x_2)^2 + (y_1 y_2)^2 + (z_1 z_2)^2 + 2y_1 y_2 z_1 z_2 + 2x_1 x_2 z_1 z_2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2] =$$
$$= 1 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = 1 - (u.v)^2.$$

Por outro lado, lembrando que o produto interno $u.v = || u || \; || v || \; cos \; \alpha$ e que $|| u || = 1$ e $|| v || = 1$, segue que $u.v = cos \; \alpha$.
Assim, $|| u \, x \, v ||^2 = 1 - (u.v)^2 = 1 - cos^2 \alpha = sen^2 \alpha$.

$\square$

4) Para calcular $v \; x \; u$ basta trocar duas linhas do determinante ocasionando a troca de sinal.

$\square$

5) Duas linhas iguais no determinante o anulam.

$\square$

6) Basta calcular cada um dos produtos vetoriais. Faça isso como exercício.

$\square$

7) Já foi demonstrada acima.

8) Será feito apenas o cálculo da primeira parte da propriedade, a segunda parte fica como exercício para o leitor.

$$(u + w) \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 + x_3 & y_1 + y_3 & z_1 + z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$
$$= [(y_1 + y_3) z_2 - y_2 (z_1 + z_3)] i + [x_2 (z_1 + z_3) - z_2 (x_1 + x_3)] j +$$
$$+ [(x_1 + x_3) y_2 - x_2 (y_1 + y_3)] k =$$
$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1) i - (z_2 x_1 - x_2 z_1) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k +$$
$$+ (y_3 z_2 - y_2 z_3) i - (z_2 x_3 - x_2 z_3) j + (x_3 y_2 - x_2 y_3) k = u \times v + w \times v.$$

$\square$

II - MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

II.1 – Introdução

Nesse capítulo, são estudadas as matrizes com suas operações, os sistemas de equações lineares, as ligações desses sistemas com as matrizes e os determinantes sob o ponto de vista de seu cálculo. Assim, o determinante é definido a partir de suas propriedades e é usado para calculá-lo, um misto de escalonamento e do método de Laplace.

II.2 – Matrizes

As matrizes aparecem para facilitar a compreensão da escrita, a fim de se organizar dados e colocá-los de forma que seja possível compreendê-los melhor, comparar e operar esses dados mais simplesmente. As matrizes podem ser numéricas ou não. Nesse texto serão estudadas somente as matrizes numéricas.

Ao se ler um jornal ou uma revista aparecem várias matrizes, como a do exemplo abaixo, seja para mostrar a tabela de um campeonato de futebol, para ilustrar a produção econômica de uma determinada região, para agrupar momentos históricos de um país, e, em muitos outros casos. Aqueles que usam editores de texto ou planilhas eletrônicas em computadores, têm como exemplo, as tabelas dos editores de texto e as próprias planilhas eletrônicas que são matrizes.

EXEMPLO II.1 ————————————

O quadro abaixo foi obtido na revista "Tecnologia Moderna para a Agricultura" [15] e mostra a produção nacional de rações dos anos 1965 a 1976. Essa é uma tabela que organiza esses dados para serem melhores visualizados.

PRODUÇÃO NACIONAL DE RAÇÕES: QUANTIDADES PRODUZIDAS — 1965/76

(Em toneladas)

Anos	Indústria	Cooperativas e Produtores[a]	Total Geral
1965	1.400.000	280.000	1.680.000
1966	1.600.000	320.000	1.920.000
1967	1.700.000	340.000	2.040.000
1968	1.900.000	380.000	2.280.000
1969	2.300.000	460.000	2.760.000
1970	2.500.000	500.000	3.000.000
1971	2.771.507	554.301	3.325.808
1972	3.214.384	642.876	3.857.260
1973	4.017.580	803.516	4.821.096
1974	5.223.374	1.044.675	6.268.049
1975	5.735.739	1.147.148	6.882.887
1976	6.634.096	1.326.800	7.960.896

Fonte: SIRBESP.

Figura II.1 – Quadro com a produção de rações de 1965 a 1976.

Os dados numéricos dessa tabela são divididos em *12* **linhas**, que representam os anos de produção e *4* **colunas**, que representam o ano da produção, a produção das indústrias, das cooperativas e produtores e uma quarta coluna que dá a totalidade da produção no ano. A parte numérica dessa tabela pode ser dividida em: anos de produção (primeira coluna) e produção anual (as últimas três colunas). Tabelas desse tipo são denominadas **matrizes**. A primeira matriz (que ilustra os anos de produção) tem *12* linhas e *1* coluna. A segunda matriz (que ilustra a produção) tem *12* linhas e *3* colunas. O tamanho da matriz é denominado **ordem**, e nesse caso, a primeira matriz tem ordem 12×1 e a segunda matriz ordem 12×3. A matriz de produção P, pode ser escrita sem suas legendas da seguinte forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1.400.000 & 280.000 & 1.680.000 \\ 1.600.000 & 320.000 & 1.920.000 \\ 1.700.000 & 340.000 & 2.040.000 \\ 1.900.000 & 380.000 & 2.280.000 \\ 2.300.000 & 460.000 & 2.760.000 \\ 2.500.000 & 500.000 & 3.000.000 \\ 2.771.507 & 554.301 & 3.325.808 \\ 3.214.384 & 642.876 & 3.857.260 \\ 4.017.580 & 803.516 & 4.821.096 \\ 5.223.374 & 1.044.675 & 6.882.887 \\ 5.735.739 & 1.147.148 & 6.268.049 \\ 6.634.096 & 1.326.800 & 7.960.896 \end{pmatrix}$$

Cada um dos números dessa matriz de produção P é denominado **elemento** da matriz.

Uma matriz numérica é quadro formado por números, dispostos em **linhas** e **colunas**. Os números da matriz são denominados **elementos**.

Em uma matriz que tem m linhas e n colunas, existem $m\ x\ n$ informações numéricas (elementos). Em princípio, essas informações poderiam ser representadas pelo R^{mxn}, mas, nesse caso, deseja-se agrupar essas informações por tipos distintos. Esses tipos são agrupados nas linhas e nas colunas da matriz, organizados por tipo de dado.

O **conjunto das matrizes de ordem** $\boldsymbol{mxn}$ (m linhas e n colunas) com elementos reais será denotado por $\boldsymbol{M_{mxn}(R)}$, ou mais simplesmente $\boldsymbol{M_{mxn}}$ quando ficar claro que todos os elementos da matriz são números reais. Em alguns livros também é usado $\boldsymbol{R^{mxn}}$. Nesse livro, serão usadas apenas matrizes reais. As matrizes são, em geral, denotadas por letras maiúsculas A e seus elementos, da linha i e coluna j, por $\boldsymbol{a_{ij}}$. Quando se quer enfatizar os elementos de uma matriz A, denota-se a matriz A usando-se seus elementos $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$. Para não haver confusão, sempre é citada a **ordem** (tamanho) de uma matriz, $m\ x\ n$, primeiro vem o número de linhas, m, e depois o de colunas, n.

Se a produção de ração dos anos *1985* a *1996*, aproximadamente, dobrou em relação a produção dos anos 1965/1976, dada no exemplo II.1, para obter a matriz que representa a produção de 1985/1996 deve-se multiplicar cada elemento da matriz P, do exemplo, por 2. Isso mostra que é preciso criar uma operação que multiplica um número real por uma matriz, obtendo-se outra matriz. Se é dada a matriz $A = (a_{ij})$ e essa é multiplicada pelo número real c, obtém-se a matriz $c\,A = (c\ a_{ij})$. Isto é, multiplica-se cada elemento da matriz A pelo número real c.

Se for considerada a produção da Argentina no mesmo período da brasileira, representada por outra matriz P_A, além da produção brasileira (1965/1975), representada acima pela matriz acima, que para diferenciar denotaremos por P_B, para se obter a produção conjunta desses dois países deve-se somar os elementos correspondentes das matrizes P_B e P_A obtendo-se uma nova matriz, denotada por $P_B + P_A$. Assim, é necessário criar uma outra operação, que associa duas matrizes a uma terceira matriz, somando-se os respectivos elementos das duas matrizes. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem, sua soma é a matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Observe que essas duas operações no conjunto das matrizes M_{mxn} são semelhantes às operações de soma e multiplicação por escalar do R^n. Resumindo, essas operações são:

Adição: $M_{mxn} \times M_{mxn} \to M_{mxn}$; que associa duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem, à matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Multiplicação por escalar: $R \times M_{mxn} \to M_{mxn}$; que associa um número real c e uma matriz $A = (a_{ij})$, à matriz $cA = (c\,a_{ij})$.

EXEMPLO II.2

A seguir estão operações de adição e multiplicação por escalar, das matrizes A e B e do número real $c = 2$:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{então } A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad cB = 2B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

□

Da mesma maneira que no R^n, essas duas operações podem ser feitas conjuntamente, e nesse caso, também recebe o nome de **combinação linear**:

EXEMPLO II.3

A combinação linerar de duas matrizes:

$$2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 8 & 8 & 0 \\ 7 & 15 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Essa combinação linear também pode ser feita com k matrizes e k números reais: $c_1 A_1 + c_2 A_2 + ... + c_k A_k$.

Algumas matrizes recebem nomes especiais e devido à frequência que essas aparecem, a nomenclatura especial deve ser citada. A especialidade das matrizes é devido à sua ordem ou aos tipos de elementos e as disposições desses:

- Quando uma matriz tem o mesmo número de linhas e colunas é denominada **matriz quadrada**.
- Uma **matriz linha** é uma matriz que só possui uma linha, ou seja, é de ordem $1xn$.
- *Uma **matriz coluna*** é uma matriz que só possui uma coluna, ou seja, é de ordem $mx1$.
- Os elementos de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, da forma a_{ii}, isto é, que têm o mesmo número de linha e de coluna, é denominada **diagonal principal**.
- Os elementos de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem n, que têm a forma $a_{i(n-i+1)}$, isto é, se o elemento está na linha i sua coluna deve ser a $n - i + 1$, para $i = 1 , ..., n$, é denominada **diagonal secundária**.
- Uma matriz em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos, é denominada **matriz diagonal**.
- Uma matriz diagonal, que tem todos os elementos da diagonal iguais a 1 é denominada **matriz identidade**. E é denotada por I_n , para chamar a atenção de sua ordem n ou simplesmente por I.
- Se todos os elementos de uma matriz quadrada abaixo da diagonal principal são nulos, $a_{ij} = 0$ se $i > j$, essa matriz recebe o nome de **matriz triangular superior**. Observe que toda matriz identidade é triangular superior.
- Se todos os elementos de uma matriz quadrada acima da diagonal principal são nulos, $a_{ij} = 0$ se $i < j$, essa matriz recebe o nome de **matriz triangular inferior**. Observe que toda matriz identidade também é triangular inferior.
- As matrizes quadradas que são simétricas em relação à diagonal principal, isto é, todos os elementos $a_{ij} = a_{ji}$, recebem o nome de **matrizes simétricas**.
- As matrizes quadradas tais que $a_{ij} = - a_{ji}$, são denominadas **matrizes anti-simétricas**.
- Uma matriz com todos os elementos iguais a zero, é denominada **matriz nula**.

A **transposta** de uma matriz A, denotada por A^t, é a matriz obtida trocando-se as linhas pelas colunas e vice-versa. Assim, se $A = (a_{ij})$ então $A^t = (a_{ji})$.

EXEMPLO II.4

A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ é a matriz $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

□

Algumas observações podem ser feitas sobre a matriz transposta:

- A transposta da transposta é a própria matriz, isto é, $(A^t)^t = A$.
- A diagonal principal de uma matriz quadrada é igual à de sua transposta.
- Se A é de ordem $m \times n$, A^t é de ordem $n \times m$. Isto é, se a matriz $A \in M_{mxn}$ então $A^t \in M_{nxm}$.
- A transposta da soma é a soma das transpostas. Isto quer dizer que $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- A transposta do produto escalar é o escalar vezes a transposta da matriz, assim, $(a A)^t = a A^t, \ \forall a \in R$.
- Pode-se definir matriz simétrica como: a matriz que é igual à sua transposta. Assim, A é simétrica se e só se $A = A^t$.
- Se A é triangular superior, A^t é triangular inferior e vice-versa.

As demonstrações das propriedades acima são deixadas para o leitor.

Uma outra operação que é feita com matrizes é ilustrada pelo seguinte exemplo:

EXEMPLO II.5

Uma empresa fez uma pesquisa de mercado para comprar veículos para trabalhar. Um empregado após consultar os preços de automóveis, camionetes e caminhões, de certa marca, em três revendedores, montou a seguinte tabela de preços:

PREÇOS (em Reais)	Automóvel	Camionete	Caminhão
Revendedor A	30.800	36.400	92.400
Revendedor B	32.400	35.800	95.000
Revendedor C	30.300	38.000	96.000

Se a empresa planeja comprar *3* automóveis, *1* camionete e *2* caminhões, tudo em um único revendedor para conseguir financiamento, qual é o revendedor que oferece melhor negócio? Comprando no revendedor mais barato, quanto a empresa vai gastar com a compra dos veículos?

Primeiramente, considere a matriz de preços: $P = \begin{pmatrix} 30.800 & 36.400 & 92.400 \\ 32.400 & 35.800 & 95.000 \\ 30.300 & 38.000 & 96.000 \end{pmatrix}$ e a matriz quantidade de veículos: $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Para se obter o gasto da empresa, deve-se multiplicar o primeiro elemento da primeira coluna de P pelo primeiro elemento, ou primeira linha, de Q e depois somar. Isso fornecerá o preço total comprando-se no revendedor A. Fazendo-se o mesmo para a segunda linha de P e depois para a terceira linha, obtém-se respectivamente, o preço total comprando-se no revendedor B e C. Dessa forma, necessita-se para as matrizes de uma nova operação, denominada **produto matricial**, que nesse exemplo dá:

$$G = P\,Q = \begin{pmatrix} 30.800 & 36.400 & 92.400 \\ 32.400 & 35.800 & 95.000 \\ 30.300 & 38.000 & 96.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.800x3 + 36.400x1 + 92.400x2 \\ 32.400x3 + 35.800x1 + 95.000x2 \\ 30.300x3 + 38.000x1 + 96.000x2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 92.400 + 36.400 + 184.800 \\ 97.200 + 35.800 + 190.000 \\ 90.900 + 38.000 + 192.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 313.600 \\ 323.000 \\ 320.900 \end{pmatrix}.$$

A matriz $G = \begin{pmatrix} 313.600 \\ 323.000 \\ 320.900 \end{pmatrix}$ obtida a partir desse produto, diz que: se a empresa comprar todos os veículos no revendedor A vai gastar $R\$313.600,00$, no revendedor B, $R\$323.000,00$ e no C, $R\$320.900,00$. Assim, o melhor negócio é comprar no revendedor A a um preço de $R\$313.600,00$.

$\square$

Considerando as matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $m\,x\,n$ e $B = (b_{jk})$ de ordem $n\,x\,p$ o **produto matricial** produz uma matriz $A\,B = C = (c_{ik})$ de ordem $m\,x\,p$ cujos elementos da matriz C são:

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{ip} b_{pk}}$$

Como a matriz A é de ordem $m \times n$, a linha i dessa matriz, que será denominada por A_i, com índice inferior, e a coluna j da matriz B que tem ordem $n \times p$, que será denominada por B^j, com índice superior, são elementos do espaço R^n. Pode-se considerar assim, que o elemento c_{ij} do produto das matrizes A e B é o produto interno desses vetores, isto é, $c_{ij} = A_i . B^j$. Logo

$$A\,B = \begin{pmatrix} \cdots\cdots & A_1 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & A_2 & \cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots & A_m & \cdots\cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ B^1 & B^2 & \cdots & B^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1.B^1 & A_1.B^2 & \cdots & A_1.B^p \\ A_2.B^1 & A_2.B^2 & \cdots & A_2.B^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m.B^1 & A_m.B^2 & \cdots & A_m.B^p \end{pmatrix}$$

EXEMPLO II.6

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Então, calculando-se os produtos

matriciais $A\,B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B\,A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ e $A\,A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

Observe que:

1- O produto matricial não é comutativo, isto é, nesse exemplo $A\,B \neq B\,A$.
2- Se $A\,B = O$ não implica em que, nem A nem B seja nula.
3- O produto $A\,B$ pode ser <u>nulo</u>, mas $B\,A$ pode ser <u>não nulo</u>.
4- Considerando que $A^2 = AA$, veja que A^2 pode ter elementos negativos.

||

Sejam A, B e C matrizes e a um número real. Seguem algumas propriedades das operações com matrizes:

- $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$.
- $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$.
- $(a\,A)\,B = A\,(a\,B) = a\,(A\,B)$, $\forall a \in R$.
- $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$.
- A transposta do produto é igual ao produto das transpostas na <u>ordem inversa</u>, isto é, $(A\,B)^t = B^t A^t$.
- $A\,I = I\,A = A$, sendo I a matiz identidade.
- $A\,O = O\,A = O$, sendo O a matriz nula.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercícios.

II.3 – Sistemas de Equações Lineares (Introdução)

Um sistema de equações lineares é o sistema obtido ao procurar a interseção de m hiperplanos do R^n. A equação de um hiperplano do R^n é da forma $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \dots + a_n\,x_n = b$. Tratando-se de m hiperplanos, a interseção deles leva ao sistema abaixo, que é denominado **sistema de equações lineares**, com m **equações** e n **incógnitas**, que são $x_1, x_2, \dots, x_n$, que também são conhecidas por **variáveis**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Os números a_{ij}, com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, são números reais dados, denominados **coeficientes** do sistema.

Esse sistema pode ser escrito matricialmente, como produto de matrizes da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O sistema fica reduzido a uma forma denominada **forma matricial do sistema**, $A\,X = b$, sendo A uma matriz $m \times n$, X é $n \times 1$ e b é $m \times 1$, ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

A matriz A recebe o nome **matriz dos coeficientes**, X **matriz das incógnitas** (ou simplesmente de incógnita) e b **matriz do lado direito**.

Resolver esse sistema é determinar todas as matrizes incógnitas X, de forma que os produtos $A\,X$ forneçam a matriz b. Assim, uma **solução** para o sistema são números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ que ao serem substituídos nas equações do sistema satisfazem à essas.

EXEMPLO II.7

Faz algum tempo que três alunos compraram numa mesma loja certa quantidade de lápis, canetas e cadernos. Os alunos lembram da quantidade de material comprado e de quanto gastaram, mas querem lembrar também, quais foram os preços de cada um dos objetos. Para isto, montou-se as seguintes matrizes: quantidades compradas Q e gasto total de cada aluno G, em reais:

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \textit{lápis} & \textit{canetas} & \textit{cadernos} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Aluno A} \\ \textit{Aluno B} \\ \textit{Aluno C} \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 10 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad G = \begin{array}{c} \textit{Aluno A} \\ \textit{Aluno B} \\ \textit{Aluno C} \end{array} \begin{pmatrix} 24 \\ 35 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Denominando por x, y e z, respectivamente, os preços dos lápis, canetas e cadernos, pode-se montar a seguinte matriz X dos preços unitários desse materiais em reais: $X = \begin{array}{c} \textit{Lápis} \\ \textit{Canetas} \\ \textit{Cadernos} \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Para se resolver esse problema deve-se multiplicar a quantidade pelo preço unitário e igualar ao gasto total: $Q\,X = G$, chegando-se ao seguinte sistema, na forma matricial: $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 10 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 35 \\ 22 \end{pmatrix}$.

Fazendo-se a multiplicação das matrizes, vê-se que essa forma matricial de representar o sistema é equivalente a esse sistema escrito na forma de equações algébricas: $\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 24 \\ 6x + 12y + 10z = 35 \\ 8x + 8y + 5z = 22 \end{cases}$. Observe ainda que $x = R\$\ 0{,}50$, $y = R\$\ 1{,}00$ e $z = R\$\ 2{,}00$ compõem uma solução do sistema. Para ver isto, basta substituir esses valores no sistema no lugar de x de y e de z. Essa solução também pode ser escrita numa forma matricial como $X = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 1{,}00 \\ 2{,}00 \end{pmatrix}$ e pode ser verificado que X é uma solução do sistema, substituindo-se X no sistema $Q\,X = G$ em sua forma matricial.

□

Mais uma vez, resolver um sistema significa determinar as matrizes das incógnitas X, ou simplesmente, chegar à conclusão de que não é possível encontrar nenhuma matriz X. Uma **solução** para o sistema é uma matriz X que satisfaz ao sistema, isto é, uma matriz X que, ao ser multiplicada por A, na ordem $A\,X$, produz a matriz b. Assim, resolver o sistema é encontrar o conjunto das soluções do sistema. Existem três possibilidades para o conjunto das soluções de um sistema:

1. Esse conjunto é **vazio**. Nesse caso diz-se que o **sistema** é **impossível**, ou seja, não tem nenhuma solução;

2. O conjunto é **unitário**, isto é, tem apenas uma solução. E nesse caso, em que a solução é única, diz-se que o **sistema** é **possível e determinado**, e

3. O conjunto das soluções tem uma **infinidade de soluções**. Diz-se que o **sistema** é **possível e indeterminado**.

Observe que se o sistema possui duas soluções distintas X_1 e X_2, isto quer dizer que $AX_1 = b$ e $AX_2 = b$. Mostra-se que, qualquer matriz que tenha a seguinte forma: $X = a\,X_1 + (1-a)\,X_2$, para algum $a \in R$, é uma solução do sistema. Como $X_1 \neq X_2$, a solução X assume uma infinidade de valores diferentes, uma para cada valor de a. Isso quer dizer que, um sistema não pode ter um número finito de soluções diferentes, a não ser uma ou nenhuma solução.

Para mostrar que $X = a\,X_1 + (1-a)\,X_2$ é uma solução do sistema basta substituir no sistema, ou seja, multiplicar por A por X, obtendo-se:
$A\,X = A\,[a\,X_1 + (1-a)\,X_2] = a\,A\,X_1 + (1-a)A\,X_2 = a\,b + (1-a)\,b = (a + 1 - a)\,b = b.$
Como $AX = b$ conclui-se que X é solução do sistema e que como para cada valor do número real a obtém-se uma matriz X diferente, o sistema $AX = b$ tem uma infinidade de soluções. Isto quer dizer que, ou o sistema não possui solução, ou possui solução única ou uma infinidade de soluções, não permitindo ao sistema possuir um número finito de soluções diferente de 1.

Um sistema $AX = b$ com $b = 0$ é denominado **sistema homogêneo**. Observe que, se X é uma solução do sistema homogêneo $AX = 0$ e Y é uma solução particular do sistema não homogêneo $AX = b$, então $X + Y$ é solução do sistema $AX = b$. Para ver isso, basta substituir $X + Y$ no sistema $AX = b$. Assim como, $A\,(X + Y) = AX + AY = 0 + b = b$, vê-se que $X + Y$ é solução de $AX = b$.

Existem várias formas de resolver um sistema, nessas notas, será usado um método, que será estudado na próxima seção, denominado **método de Gauss** ou do **escalonamento**.

II.4 – Operações Elementares nas Equações de Um Sistema

Nessa seção, serão colocados três tipos de operação que são feitas nas equações de um sistema de equações lineares, de forma que essas operações não modifiquem as soluções do sistema e que levem a outro sistema de modo que as soluções sejam encontradas mais facilmente. Essas operações são denominadas **operações elementares**.

EXEMPLO II.8

Considere um sistema de equações lineares: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 & E_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 & E_2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 10 & E_3 \end{cases}$

Nesse sistema as equações foram denominadas E_1, E_2 e E_3.
Nos próximos exemplos estão três tipos de operações, que ao serem aplicadas nas equações desse exemplo, ou em qualquer outro sistema de equações lineares, o conjunto de soluções não é modificado.

□

A **primeira operação elementar** é:

I) Trocar duas equações de posição. ($E_i \longleftrightarrow E_j$)

EXEMPLO II.9

Se, no sistema do exemplo II.8, a 1ª equação é trocada com a 3ª equação a solução não é alterada. O sistema fica da seguinte forma: ($E_1 \longleftrightarrow E_3$)

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 10 & E_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 & E_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 & E_1 \end{cases}$$

□

A **segunda operação elementar** é:

II) Multiplicar uma equação por um número não nulo. ($c\,E_i \rightarrow E_i$, $c \neq 0$)

EXEMPLO II.10

Se, no sistema do exemplo II.8, a 2ª equação é multiplicada por 2 a solução não é alterada. O sistema fica da seguinte forma: ($2\,E_2 \rightarrow E_2$)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 & E_1 \\ 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 14 & 2E_2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 10 & E_3 \end{cases}$$

□

A **terceira operação elementar** é:

III) Substituir uma equação por ela mais uma constante d multiplicada à outra equação. ($E_i + d\,E_j \rightarrow E_i$)

Esse procedimento é equivalente ao de expressar em uma das equações, uma das variáveis em função das restantes e depois substituí-la em outra equação.

EXEMPLO II.11

Se, no sistema do exemplo II.8, a 2ª equação é substituída por ela mais -2 vezes a 1ª equação a solução não é alterada. O sistema fica da seguinte forma:

$$(E_2 + (-2)\,E_1 \rightarrow E_2): \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 & E_1 \\ 2x_1 + x_2 = -1 & E_2 - 2E_1 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 10 & E_3 \end{cases}$$

Observe que aplicando essa operação foi possível eliminar x_3 da segunda equação.

□

Essas três operações, I, II e III, são denominadas **operações elementares nas equações** de um sistema linear. Como já foi dito, essas são operações nas equações de um sistema linear que não modificam o conjunto das soluções desse sistema. Mais adiante será visto como essas operações podem ser usadas para resolver um sistema.

II.5 – Operações Elementares nas Linhas de uma Matriz

Tomando como referência as operações da seção anterior, definem-se as operações elementares nas linhas de uma matriz. Essas operações são consequências da forma matricial do sistema e das operações elementares nas equações do sistema.

EXEMPLO II.12 ——————————

Considere o sistema de equações lineares do exemplo II.8:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 & E_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 & E_2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 10 & E_3 \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial, $AX = b$, da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad ;$$

considerando-se as matrizes, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Juntando-se as matrizes A e b em uma única matriz, obtém-se a seguinte **matriz aumentada**, de modo que as três primeiras colunas são formadas pela matriz A e a última pela matriz b:

$$A|b = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

As possíveis operações que podem ser feitas nas linhas dessa matriz, de modo que a solução do sistema acima não seja modificada, são as mesmas que foram definidas nas equações do sistema na seção anterior.

——————————— □

A **primeira operação elementar nas linhas de uma matriz** é decorrência imediata da primeira operação elementar nas equações de um sistema:

I) Trocar duas linhas de posição. ($L_i \longleftrightarrow L_j$)

EXEMPLO II.13

Se na matriz aumentada $A|b$, a 1ª linha é trocada com a 3ª linha (essa é uma operação proveniente das operações nas equações do sistema, exemplo II.9) também nesse caso, a solução do sistema não é alterada. E a matriz obtida é a forma matricial do sistema obtido no exemplo II.9, sofrendo a seguinte alteração:

$$(L_1 \longleftrightarrow L_3) \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{array} \end{array}$$

A **segunda operação elementar nas linhas de uma matriz** é proveniente da segunda operação elementar nas equações do sistema:

II) Multiplicar uma linha por um número não nulo. ($c\, L_i \rightarrow L_i$, $c \neq 0$)

EXEMPLO II.14

Se, na matriz do exemplo II.12, a 2ª linha é multiplicada por 2 a solução do sistema também não é alterada. A matriz $A|b$ é modificada para: ($2\, L_2 \rightarrow L_2$)

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ 2L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

□

A **terceira operação elementar nas linhas de uma matriz** é proveniente da terceira operação elementar nas equações do sistema:

III) Substituir uma linha por ela mais uma constante d multiplicada à outra linha. ($L_i + d\,L_j \rightarrow L_i$)

EXEMPLO II.15

Se, na matriz do exemplo II.12, a 2ª linha é substituída por ela mais -2 vezes a 1ª linha a solução do sistema não é alterada. O matriz aumentada $A|b$ fica da seguinte forma:

$$(L_2 + (-2)\,L_1 \rightarrow L_2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 \end{array}$$

□

As três operações, I, II e III acima, são denominadas **operações elementares nas linhas de uma matriz**. Tais operações, como foi visto, não alteram o conjunto de soluções do sistema $AX = b$.

II.6 – Resolução de Sistemas com Operações Elementares

Como as operações elementares, definidas na seção anterior, não alteram a solução de um sistema, essas operações são usadas para simplificar o sistema $AX = b$ afim de que sua solução seja obtida mais facilmente. Assim, usando-se as operações elementares nas linhas da matriz A, transforma-se o sistema $AX = b$ em um sistema $RX = d$ de modo que as soluções procuradas, sejam mais fáceis de serem encontradas a partir do sistema $RX = d$. Como foram aplicadas somente operações elementares simultaneamente em A e em b, as soluções dos sistemas $AX = b$ e $RX = d$ são as mesmas. O método mais "básico" transforma a matriz A em uma matriz R triangular superior ou diagonal, se isso for possível, ou pelo menos tenta transformar A numa matriz de um desses tipos, obtendo uma matriz denominada **reduzida por linha à forma escada**. Esse método é denominado **Método de Eliminação de Gauss**. Nesse caso, também se diz que, a matriz A está sendo **escalonada**.

EXEMPLO II.16

Para resolver o sistema $AX = O$, com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

aplica-se nas linhas da matriz A as seguintes operações elementares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 1/2\, L_2 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que nesse caso, não é preciso aplicar operações na matriz O, pois essa não se altera, porque só tem elementos nulos.
Os sistemas $AX = O$ e $RX = O$ têm as mesmas soluções, e escrevendo o sistema $RX = O$ em sua forma matricial para a forma usual fica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

obtendo-se a solução $X = O$. Pode-se continuar com as operações elementares para obter uma matriz diagonal no lugar de uma matriz triangular superior:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2L_3 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Levando ao sistema $RX = O$, $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, que tem a mesma solução obtida anteriormente.

□

EXEMPLO II.17

Considere o sistema, na sua forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para resolver esse sistema cria-se a matriz aumentada:

$$A|b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e aplica-se a essa matriz as operações elementares necessárias para obter a solução do sistema mais facilmente:

$$A|b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 5 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow -L_3}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

retornando-se ao sistema, a partir dessa última matriz fica $RX = d$, com:

$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ que escrito na forma usual de sistema fica:

$\begin{cases} x_1 + 17x_4 = -12 \\ x_2 - 13x_4 = 10 \\ x_3 + 8x_4 = -5 \end{cases}$ ou ainda, $\begin{cases} x_1 = -17x_4 - 12 \\ x_2 = 13x_4 + 10 \\ x_3 = -8x_4 - 5 \end{cases}$, que acrescentando-se a equação $x_4 = x_4$, que não altera a solução do sistema, fica:

$$\begin{cases} x_1 = -17x_4 - 12 \\ x_2 = 13x_4 + 10 \\ x_3 = -8x_4 - 5 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \quad \text{e finalmente } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ com } x_4 \in R.$$

Esse sistema é possível e indeterminado. O sistema tem infinitas soluções, uma para cada valor do número real x_4.

□

Uma matriz R como as obtidas nos exemplos anteriores, é denominada **matriz reduzida por linha à forma escada**. Essa matriz é caracterizada pelas seguintes propriedades:

- O primeiro elemento de uma linha não nula é *1*. Esses elementos são denominados **pivôs**.
- Todos os outros elementos em uma coluna que tem algum dos pivôs são nulos.
- Os pivôs se encontram ordenados como uma escada. Isto é, se na matriz $R = (r_{ij})$ os elementos r_{ij} e r_{pk} são pivôs tais que $i > p$ então $j > k$ e vice-versa, se $i < p$ então $j < k$.
- Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas.

EXEMPLO II.18

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ não estão reduzidas por linha à forma escada, por não

satisfazerem, cada uma delas, a uma das propriedades acima. E as matrizes

$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ estão reduzidas por linha à forma escada.

$\square$

Procedimento para a resolução de um sistema $AX = b$, com A matriz mxn:

1) Crie a matriz aumentada $(A|b)$.
2) Obtenha a matriz reduzida por linhas à forma escada R, da matriz A. Aplique as mesmas operações elementares usadas no processo de redução por linhas de A em b, obtendo a matriz d. Para facilitar aplique as operações na matriz aumentada $(A|b)$, obtendo $(R|d)$.
3) Volte à forma usual do sistema $RX = d$. Esse sistema tem as mesmas soluções que o sistema $AX = b$ e pode fornecer essas soluções mais facilmente.
4) Se R tem n linhas não nulas, o sistema é **possível e determinado** e sua solução é formada pelas primeiras n linhas de d.
5) Se R tem alguma linha nula, e essa linha de d não é nula, o sistema é **impossível**.
6) Caso contrário, o sistema é **possível e indeterminado**. Para obter sua solução, passe para o outro lado de cada igualdade, não nula, as variáveis cujo coeficiente em R não serviram de pivô no processo de redução por linhas. Essas variáveis (não pivôs) são conhecidas como **variáveis livres ou independentes**. Para cada variável livre x_i adicione uma igualdade da forma $x_i = x_i$. Dessa forma a solução é obtida como combinação linear de vetores do R^n.

EXEMPLO II.19

Considere o sistema na sua forma matricial:

$$AX = b: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver esse sistema escalona-se a sua matriz aumentada:

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$ obtendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ sendo que as quatro primeiras colunas compõem a matriz

R reduzida por linhas à forma escada de A. Voltando ao sistema na sua forma

matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

e na forma normal: $\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad -2x_4 = 2 \\ \quad x_2 \quad +2x_3 \quad +3x_4 = -1 \\ \qquad\qquad 0 = -1 \end{cases}$.

A terceira equação $0 = -1$ mostra que o sistema não tem solução, ou seja, é impossível.

□

Sabe-se que um sistema é **impossível** quando a matriz R reduzida por linhas à forma escada de A tem linha nula, mas na forma aumentada dessa reduzida, essa linha não é nula. Isso leva a uma equação com um lado igual a zero e com o outro diferente de zero, como no exemplo acima.

Se a reduzida por linhas à forma escada de A é a matriz identidade, e nesse caso, A tem que ser obviamente quadrada, então o sistema $A\,X = b$ é **possível e determinado** para qualquer matriz b.

EXEMPLO II.20

Considere o sistema, com a mesma matriz A do exemplo anterior, mas com a

matriz b diferente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Escalonando-se a sua matriz aumentada:

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{obtém-se:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voltando ao sistema na sua forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e na forma normal: $\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3 \quad -2x_4 = 2 \\ \quad x_2 \quad +2x_3 \quad +3x_4 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}.$

Agora, a terceira equação $0 = 0$ não afeta a solução do sistema. Passando as variáveis livres x_3 e x_4 para o outro lado das igualdades o sistema fica:

$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 1 \end{cases}$ que acrescentando-se as equações $x_3 = x_3$ e $x_4 = x_4$

leva a: $\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ ou seja,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_3 \text{ e } x_4 \in R.$$

A solução desse sistema é obtida como a combinação linear de duas quadras do R^4 mais uma quadra constante. E como para cada valor real de x_3 e de x_4 obtém-se uma solução diferente, o sistema é possível e indeterminado.

□

EXEMPLO II.21

Para se ter uma visão geométrica do que está ocorrendo, quando são aplicas as operações elementares nas equações de um sistema a fim de resolvê-lo, considere o sistema abaixo, em que cada equação representa uma reta em R^2. Nesse sistema, são aplicadas as mesmas operações elementares nas equações que se aplica às linhas da matriz aumentada para resolver o sistema:

$$\begin{cases} x-2y=-2 \\ 2x-y=2 \end{cases} \underset{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1}{\Rightarrow} \begin{cases} x-2y=-2 \\ 3y=6 \end{cases} \underset{E_2 \leftarrow \frac{1}{3}E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x-2y=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\underset{E_1 \leftarrow E_1 + 2E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$ que é a solução do sistema. As retas que representam,

o $1^{\underline{o}}$, o $2^{\underline{o}}$ e o último sistemas são:

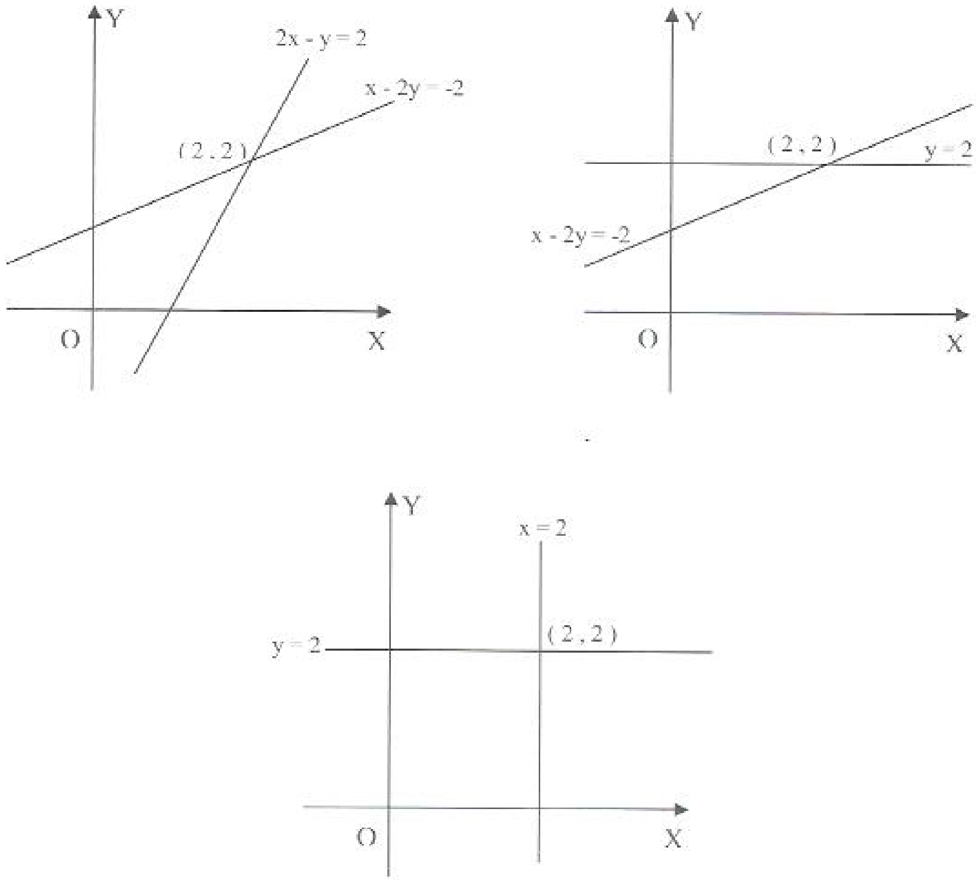

Figura II.2 – Visualização geométrica da resolução de um sistema.

Observe que, nos três desenhos acima, as retas são giradas mantendo-se o ponto, que é a solução $(2, 2)$ fixo, até que as retas fiquem paralelas aos eixos coordenados.
O mesmo tipo de problema poderia ser feito com um sistema que tem três incógnitas e três equações. Nesse caso, estaria buscando a interseção de planos no R^3 e, se o sistema for possível e determinado, quando a matriz A estiver escalonada, as equações obtidas representariam planos paralelos aos planos coordenados XY, XZ e YZ.

□

II.7 – A Inversa de Uma Matriz

Considere o sistema, na sua forma matricial, $A\ X = b$, ou explicitamente: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$. Suponha que "magicamente" descobriu-se uma matriz $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ que ao ser multiplicada a ambos os lados do sistema $A\,X = b$, pela esquerda, obtém-se $C\,A\,X = C\,b$, ou seja, fazendo-se o produto $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$ produz a seguinte equação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, que fica, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Assim, $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$ é a solução do sistema.

A "mágica" para a resolução do sistema, consiste em encontrar uma matriz C que multiplicada à matriz A produz a matriz identidade I. Assim, no sistema $A\,X = b$, multiplicando-se ambos os lados por C chega-se a $C\,A\,X = C\,b$, ou ainda ao sistema, $I\,X = C\,b$ levando à solução do sistema $X = C\,b$.

Uma matriz desse tipo, ou seja, tal que multiplicada por ambos os lados da matriz quadrada A produz a matriz identidade I é denominada **inversa** de A e é denotada por A^{-1}. Se A tem inversa, diz-se que ela é **invertível**.

Resumindo:

A inversa da matriz A é uma matriz A^{-1} tal que $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA:

Sejam A e B duas matrizes quadradas invertíveis, de mesma ordem, então:

1) A inversa é única.
2) $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
3) $(A^{-1})^{-1} = A$.
4) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demonstração ——————————

Para mostrar a primeira propriedade, suponha que A possui duas matrizes inversas C e D. Como C é inversa de A tem-se que $A C = I$ e multiplicando-se ambos os lados da igualdade por D chega-se a $D(A C) = D I$ $\therefore$ $(D A) C = D$ $\therefore$ $I C = D$, e assim conclui-se que $C = D$.

—————————— $\square$

A segunda propriedade diz qual é a inversa do produto $A B$. Para mostrar que realmente a inversa dessa matriz é $B^{-1} A^{-1}$, basta fazer o produto dessas matrizes pelos dois lados. Assim:
$(A B)(B^{-1} A^{-1}) = A(B B^{-1}) A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I$ e pelo outro lado,
$(B^{-1} A^{-1})(A B) = B(A A^{-1}) B^{-1} = B I B^{-1} = B B^{-1} = I$.

—————————— $\square$

Considerando que $A^{-1} A = A A^{-1} = I$, a terceira propriedade é somente uma questão de interpretação. Essa expressão diz que a inversa de A^{-1} é exatamente A. Como a inversa é única, a inversa da inversa é a própria matriz A.

—————————— $\square$

Finalmente, tomando-se o produto $A^t (A^{-1})^t$, e computando sua transposta obtém-se $A^{-1} A$ que é I. Como a transposta da matriz identidade I é ela própria tem-se que $A^t (A^{-1})^t = I$ e assim, como o produto calculado na ordem inversa, $(A^{-1})^t A^t$ também dá a identidade pela mesma razão, segue que a inversa de A^t é $(A^{-1})^t$, concluindo-se a demonstração.

—————————— $\square$

Falta mostrar a "mágica" que aparece no início dessa seção, ou seja, como calcular a inversa. Antes de desenvolver a forma de calcular a inversa, deve-se mostrar um teorema em que considera-se que a inversa fica dividida em inversa à esquerda e inversa à direita. Ou seja, C é **inversa à esquerda** de A se o produto $C\,A = I$. E D é **inversa à direita** de A se o produto $A\,D = I$. Os fatos a seguir ajudarão no cálculo da inversa.

LEMA II.1 ———————————
Se uma matriz A tem inversa à esquerda C e à direita D elas são iguais, ou seja, $C = D$.

Demonstração ———————————
Como D é inversa à direita de A, $A\,D = I$. Multiplicando-se a igualdade à esquerda por C em ambos os lados, obtém-se $C\,(A\,D) = C\,I \;\therefore\; (C\,A)\,D = C \;\therefore\; I\,D = C \;\therefore\; D = C$.

——————————— □

COROLÁRIO II.1 ———————————
Se A tem inversa à esquerda e a direita então A é quadrada.

Demonstração ———————————
Só para confirmar as ordens das matrizes: Se A é de ordem mxn então a inversa à esquerda C tem que ser de ordem nxm. Isso, para poder fazer o produto $C\,A$ e obter a identidade I, que é quadrada e só pode ser de ordem nxn. Pelo mesmo motivo acima, a inversa à direita D, tem que ser de ordem nxm.
Assim, $C_{nxm}\,A_{mxn} = I_n$ e $A_{mxn}\,D_{nxm} = I_m$, em que I_n e I_m são as matrizes identidade de ordens nxn e mxm, respectivamente.
Pelo lema II.1 tem-se $C = D$.
Qualquer que seja b, o sistema $A\,X = b$ tem como solução $X = D\,b = C\,b$, pois, substituindo-se X no sistema $A\,X = b$ fica-se com: $A\,C\,b = I\,b = b$. Para que o sistema seja possível para todo b, a matriz reduzida por linhas à forma escada de A não pode ter linhas nulas. Como A tem ordem mxn, segue que o número de linhas não pode ser superior ao de colunas, $m \leq n$.
Resumindo, mostrou-se que: se A tem inversa à direita então $m \leq n$.
Por outro lado, como C também é a inversa à esquerda de A, a matriz A é a inversa à direita de C. Da mesma forma que foi mostrado acima, o número de colunas de C, m, não pode ser menor que o número de linhas, n, isto é, $n \leq m$.
Conclui-se assim, que $m = n$, ou seja, A e C são quadradas.

——————————— □

O teorema a seguir produz, em sua demonstração quando o item b implica no item c, um método para o cálculo da matriz inversa.

TEOREMA II.1 ———————————
Seja A uma matriz quadrada nxn, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A matriz A tem inversa à esquerda C.
b) Para todo $b \in M_{nx1}$, o sistema $A X = b$ tem solução única.
c) A matriz A tem inversa à direita D.

Demonstração

a $\Rightarrow$ b Será mostrado inicialmente que: se o sistema $A X = b$ tem solução, esse será possível e determinado. Considere que X_1 e X_2 são duas soluções do sistema, isto é, substituindo-se essas duas soluções no sistema tem-se que $A X_1 = b = A X_2$. Multiplicando-se essa expressão por C à esquerda fica $C A X_1 = C b = C A X_2$, e como C é a inversa à esquerda de A obtém-se $I X_1 = C b = I X_2$, mostrando que a solução desse sistema é única $X_1 = C b = X_2$.
Agora, para ver que o sistema é possível, e consequentemente, determinado para todo b, suponha inicialmente que $b = 0$. Como $X = 0$ é solução do sistema $A X = 0$, e pelo que foi mostrado acima, essa é a única solução. Como por hipótese A é quadrada, segue que a matriz reduzida por linhas à forma escada de A é a matriz identidade. Logo, o sistema $A X = b$ é possível e determinado para todo b.

b $\Rightarrow$ c Sejam $E^1, E^2, \ldots, E^n$ as colunas da matriz identidade nxn. Por hipótese, o sistema $A X = E^j$ tem uma única solução X^j, para $j = 1, \ldots, n$. Considere a matriz D cujas colunas são $D^j = X^j$. Fazendo-se o produto $A D$ obtém-se I, logo D é a inversa à direita de A.

c $\Rightarrow$ a Como por hipótese $A D = I$, a matriz A é a inversa á esquerda de D. Já foi mostrado acima que se uma matriz tem inversa à esquerda, ela também tem inversa à direita, pois demonstrou-se que $a \Rightarrow$ b $\Rightarrow$ c e assim, D tem inversa à direita. Pelo corolário II.1, se uma matriz tem inversa à direita e a esquerda, elas são iguais, logo A também é a inversa à direita de D, e assim, $D A = I$. Concluindo-se que A tem inversa à esquerda, que é a própria matriz D.

□

EXEMPLO II.22

Se uma matriz não é quadrada ela pode ter inversa de um dos lados, como as matrizes A e B abaixo, mas, pelo corolário II.1, não pode ter inversa do outro lado:

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz A tem inversa à direita B, mas não pode ter inversa à esquerda, pois senão teria que ser quadrada. A matriz B tem inversa à esquerda mas, pelo mesmo motivo, não pode ter inversa à direita.

□

II.8 – Método para a Obtenção da Inversa

O teorema II.1 diz como deve ser calculada a inversa de uma matriz quadrada A. Se for calculada a inversa à direita, usando o método do teorema, isto é, resolvendo-se n sistemas $A\,X = E^j$, pelo teorema essa também será a inversa à esquerda e logicamente a inversa de A.

Para isso, suponha que todos os n sistemas $A\,X = E^j$ têm solução X^j. Formando-se uma matriz D que tem como colunas, respectivamente, cada uma das soluções obtidas na resolução dos sistemas. Observe que o produto matricial $A\,D$ leva a uma matriz que tem como colunas E^j, ou seja, a identidade. Assim, D é a inversa à direita de A, e consequentemente, D é a própria inversa A^{-1}. Veja que se essa inversa existe, o que é o mesmo que dizer que, todos esses sistemas têm solução, os sistemas são possíveis e determinados. Para mostrar isso, se X_1 e X_2 são soluções de um dos sistemas $A\,X = E^j$, então $A\,X_1 = E^j$ e $A\,X_2 = E^j$, ou seja, $A\,X_1 = A\,X_2$ que ao se multiplicar essa equação em ambos os lados por A^{-1} leva a $A^{-1}A\,X_1 = A^{-1}A\,X_2 \;\therefore\; I\,X_1 = I\,X_2 \;\therefore\; X_1 = X_2$, comprovando, mais uma vez, que a solução é única. O teorema II.1 já havia garantido isso. Por outro lado, se algum desses sistemas não tem solução, então a matriz reduzida por linhas à forma escada de A não é a identidade e, novamente pelo teorema, A não tem inversa.

Para resolver cada um dos sistemas $A\,X = E^j$, deve-se criar a matriz aumentada $(A \mid E^j)$ e depois reduzi-la por linhas à forma escada. Se A tem inversa a solução é única e a reduzida dessa matriz aumentada deve ser $(I \mid X^j)$. A solução desse sistema, X^j, é a coluna j da inversa à direita.

Porém, para resolver os n sistemas a matriz A deverá ser escalonada n vezes. Para evitar isso, cria-se uma matriz super-aumentada, $(A \mid E^1E^2...E^n)$, ou seja, $(A \mid I)$, e escalona-se essa matriz.

Se ao escalonar, obtém-se I no lugar de A, no lugar de I é obtida a inversa A^{-1}. Se não for obtida a matriz I no lugar de A, significa que os sistemas não têm todos solução única e assim A não é invertível.

EXEMPLO II.23 ———————————

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Para calcular sua inversa deve-se criar a matriz super-aumentada $A|I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e escaloná-la:

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \Rightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \\ \Rightarrow \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Logo a inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, obtida das quatro últimas colunas da reduzida por linhas da matriz super-aumentada.

□

EXEMPLO II.24

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ cuja matriz super-aumentada é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ que escalonando obtém-se $$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz escalonada de A, as três primeiras colunas, tem uma linha nula, significa que A não é invertível, isto é, não admite inversa.

□

II.9 – Determinante

A maioria dos estudantes, que concluiu o ensino médio, sabe como calcular o determinante de matrizes de ordem $2x2$ e $3x3$.

O determinante de uma matriz, $2x2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é $det\, A = ad - bc$ e de uma matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ é $det\, B = bfg + aei + dhc - (bdi + ceg + fha)$.

Porém, nessa seção, deseja-se calcular o determinante de matrizes quadradas de qualquer ordem. Em geral, usa-se o desenvolvimento de Laplace para definir e calcular esses determinantes. No entanto, para facilitar o cálculo do determinante, que pode ser muito extenso quando é usado o desenvolvimento de Laplace, esse será definido por suas propriedades. Isto é, os determinantes serão calculados usando, inicialmente, as operações elementares nas linhas da matriz. E, no final dessa seção, será usado um método híbrido, de escalonamento com o desenvolvimento de Laplace.

DEFINIÇÃO DE **DETERMINANTE**:

O **determinante** de uma matriz quadrada A é um número real, denotado por $det\, A$, que tem as seguintes propriedades:

- Se A é a matriz identidade I, então $\det I = 1$.
- Se A tem uma linha nula, $det\, A = 0$.
- Trocando-se duas linhas de A o determinante troca de sinal.
- Multiplicando-se uma linha de A por um número, o determinante de A fica multiplicado por esse número.
- Aplicando-se a terceira operação elementar nas linhas de A, o determinante de A não se altera.
- $det\, A^t = det\, A$.
- Dada B, matriz de mesma ordem que A, $det\, AB = det\, A\; det\, B$.

Com isso, para calcular o determinante de uma matriz basta escaloná-la, usando as operações elementares. Se a reduzida por linhas à forma escada possuir uma linha nula, o determinante será nulo, caso contrário, essa reduzida será a matriz identidade I e o valor do determinante aparece naturalmente durante o processo de escalonamento.

Observe também que, como o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta, tudo que é feito nas linhas da matriz pode ser feito em suas colunas, produzindo o mesmo efeito. Por isso, denomina-se por **fila** uma linha ou uma coluna da matriz. Quando é feita uma operação, que pode ser feita em uma linha ou em uma coluna, essa operação é dita ser feita em uma fila.

EXEMPLO II.25

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Aplicando operações elementares

nas linhas dessa matriz: $(L_1 \longleftrightarrow L_2)$ segue que

$$det\,A = -\,det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando agora as operações elementares $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_1 \end{cases}$ essas operações não alteram o determinante, logo $det\ A = -\ det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & 12 & 7 \end{pmatrix}$;

multiplicando-se a segunda linha por $\frac{1}{4}$, $(L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2)$, o determinante deve ser multiplicado por 4 e para não ser alterado, fica:

$$det\,A = -4\,det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aplicando-se as seguintes operações elementares do terceiro tipo, que não alteram o determinante, $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 6L_2 \end{cases}$, obtém-se que:

$$det\,A = -4\,det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando-se a terceira linha por 1/3 $(L_3 \leftarrow 1/3L_3)$, o determinante fica:

$$det\,A = -12\,det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{logo}\quad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \quad\Rightarrow \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3L_3 \end{cases}$$

$det\ A = -12\ det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; multiplicando-se a quarta linha por menos um, $(L_4 \leftarrow -L_4)$, tem-se $det\ A = 12\ det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; aplicando-se as operações $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4 \end{cases}$ obtém-se que $det\ A = 12\ det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 13/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; multiplicando a quinta linha por $½$, $(L_5 \leftarrow ½L_5)$ obtém-se que:

$det\ A = 24\ det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 13/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e finalmente, fazendo $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 13/3\,L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 14/3\,L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1/3\,L_5 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_5 \end{cases}$;

leva a: $det\ A = 24\ det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E assim, $det\ A = 24\ det\ I = 24$.

□

EXEMPLO II.26

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; aplicando as operações $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$ obtém-se $det\ A = det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$; como a terceira linha é o dobro da segunda, o determinante é nulo, ou seja, aplicando a operação $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$ chega-se a uma matriz com uma linha nula, $det\,A = det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

□

EXEMPLO II.27

Para confirmar o calculo de um determinante $2x2$, usando esse método, considere uma matriz genérica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Supondo inicialmente que $a \neq 0$ e aplicando-se $(L_1 \leftarrow 1/a\, L_1)$ chega-se a $det\,A = a\,det\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \therefore$

$(L_2 \leftarrow L_2 - cL_1) \therefore det\,A = a\,det\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix} = a\,det\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}.$

Se $ad - bc = 0$ uma linha é nula e $det\,A = 0$. Caso contrário, faça a operação:

$$(L_1 \leftarrow \frac{a}{ad-bc} L_1) \therefore det\,A = (ad - bc)\,det\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (L_1 \leftarrow L_1 - b/a\, L_2) \therefore$$

$$det\,A = (ad - bc)\,det\,I = ad - bc.$$

O caso em que $a = 0$ é deixado para o leitor.

□

A definição de determinante na literatura, em geral, é feita usando-se o **Desenvolvimento de Laplace**. Nesse texto, foi usado o método de escalonamento para calcular o determinante, cuja definição foi feita por suas propriedades. No entanto, um método híbrido desses dois métodos será usado. Não será mostrada aqui a equivalência entre o método acima e o desenvolvimento de Laplace, descrito a seguir:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Para fazer o desenvolvimento de Laplace, escolha uma fila, em geral, aquela que possui o maior número de zeros. Seja A_{ij} **a submatriz de** A, de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtida retirando-se de A a linha i e a coluna j. Denomina-se **cofator do elemento** a_{ij} da matriz A o número $\boxed{c_{ij} = (-1)^{i+j}\, det\, A_{ij}}$. Assim, o determinante de A é calculado fazendo-se o determinante de n matrizes de ordem $(n-1) \times (n-1)$ da seguinte forma: suponha que foi **escolhida a linha** i de A, então o determinante de A é:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij}}$$

Da mesma forma, se for **escolhida a coluna** j, o determinante fica:

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij}}$$

Aplicando-se o desenvolvimento de Laplace em uma matriz de ordem n, diminui-se o tamanho do determinante para $n-1$. Porém, é preciso calcular o determinante de n matrizes de ordem $n-1$. E assim, sucessivamente, diminui-se a ordem da matriz que será calculado o determinante até obter uma matriz de ordem 2 ou, se preferir ordem 1, cujo cálculo é simples.

EXEMPLO II.28

Considere a matriz triangular superior $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Aplicando-se o desenvolvimento de Laplace na primeira coluna, como somente um elemento é não nulo, $a_{11} = 2$, aparece no desenvolvimento apenas um determinante $4x4$.

$$\det A = (-1)^{1+1}\, 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aplicando-se novamente o desenvolvimento na primeira coluna dessa nova matriz, chega-se a $\det A = 2\,(-1)^{1+1}\, 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \det \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Aplicando-se mais uma vez o desenvolvimento de Laplace na primeira coluna, leva ao seguinte resultado:

$$det\,A = 6\,(-1)^{1+1}\,4\,det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 24 \times 30 = 720.$$

□

O exemplo acima mostra que **o determinante de uma matriz triangular inferior ou superior é o produto dos elementos da diagonal principal**. Basta desenvolver sempre pela primeira linha ou primeira coluna, respectivamente, para se chegar à essa conclusão. Dessa forma, se uma matriz tem poucos zeros, ou nenhum, pode-se usar o método de escalonamento para obter os zeros e depois o desenvolvimento de Laplace.

EXEMPLO II.29

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ então aplicando $\begin{cases} \Rightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$

$det\,A = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ que é igual, por Laplace na 1ª coluna, a

$(-1)^{1+1}\,1\,det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. Aplicando-se as operações $\begin{cases} \Rightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

$det\,A = det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ que é igual, por Laplace, na 1ª coluna, a

$$det\,A = (-1)^{1+1}\,1\,det\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -16 + 40 = 24.$$

□

TEOREMA II.2

Considere uma matriz quadrada A. As seguintes condições são equivalentes:

a) $det\,A \neq 0$
b) A reduzida por linhas à forma escada de A é I
c) A é invertível

Demonstração

a $\Rightarrow$ b: Ao aplicar o método de escalonamento, se a reduzida por linhas à forma escada de A não é I, a reduzida tem uma linha nula e logo $det\ A = 0$, contrariando a hipótese.

b $\Rightarrow$ c: Pelo método do calculo da inversa, se a reduzida por linhas à forma escada de A é I, A é invertível.

c $\Rightarrow$ a: Como A é invertível, pelo método do cálculo da inversa, a reduzida por linhas à forma escada de A é I, logo $det\ A \neq 0$.

$\square$

TEOREMA II.3

$det\ A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Demonstração

Como $I = A\ A^{-1}$ segue que $1 = det\ I = det\,(A\ A^{-1}) = det\ A\ det\ A^{-1}$ e assim, $det\ A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

$\square$

Uma aplicação do determinante é a resolução de sistemas pela regra de Cramer. No apêndice desse capítulo, é feita uma discussão e a demonstração dessa forma de resolver sistemas.

II.10 - Exercícios

1) Procure em uma revista ou jornal impresso um quadro explicativo que, retiradas as legendas, obtém-se uma matriz numérica. É possível, para essa matriz, relacionar de alguma forma as operações matriciais de adição, transposição e multiplicação por escalar? Como?

Considere, para os exercícios 2 a 5, as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

2) Faça as seguintes operações, com as matrizes acima:
   a) $A + B$ b) $B + A$ c) AB d) BA e) AC f) AD g) BC
   h) $(A + B)C$ i) A^t j) B^t k) $(AB)^t$ l) B^tA^t m) A^tB^t
   n) $det\, A$ o) $det\, B$ p) $det\, AB$ q) $det\, BA$ r) $det\, A^t$ s) $det\, A^{-1}$.

3) Calcule, de existir, A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(AA)^{-1}$ e $det\, B^{-1}$.

4) Classifique os sistemas abaixo e obtenha as soluções, se for o caso:
   a) $AX = D$ b) $AX = E$ c) $BX = D$ d) $BX = E$ e) $CX = D$
   f) Resolva os sistemas $AX = D$ e $AX = E$ sem usar escalonamento, usando apenas a matriz inversa.

5) Mostre que:
   a) F é uma inversa à esquerda de C.
   b) F não tem inversa à esquerda.

6) Invente um exemplo real em que pode ser usada a multiplicação matricial.

7) Dê exemplo de uma matriz que seja:
   a) Triangular superior. b) Diagonal. c) Simétrica. d) Nula.

8) Quais, dentre as matrizes abaixo, não estão reduzidas por linhas à forma escada? Justifique.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Resolva simultaneamente os itens a e b e depois use a matriz inversa para resolver o item c.

a) Encontre, se existir, a inversa da matriz A.
b) Calcule $det\,A$.
c) Resolva o sistema $AX = b$, com $b^t = (1, -1, -2, 11)$.

10) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Resolva o sistema $AX = b$, usando escalonamento.
b) Calcule a inversa de A.
c) Resolva o sistema $AX = b$, usando a inversa.
d) Calcule $det\,A$.

11) Considere o sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Resolva o sistema acima usando as operações elementares.
b) Classifique o sistema quanto ao número de soluções.
c) Existe alguma solução do sistema tal que $x_1 = 3$ e $x_5 = 0$? Se existir, qual é essa solução ?

12) Dado o sistema $\begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$:

a) Resolva o sistema acima indicando as operações usadas e escreva a solução matricialmente. Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

b) Obtenha uma solução $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, de forma que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

13) Resolva os sistemas abaixo usando as operações elementares e classifique-os quanto ao número de soluções:

a) $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

14) Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15) Calcule os determinantes das seguintes matrizes, usando somente o desenvolvimento de Laplace:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 2 & 7 & 51 \\ 0 & 31 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 23 & 17 & 7 & 10 & 32 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16) Dadas as matrizes $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e A de ordem $4x5$, tal que a reduzida por linhas à forma escada de A não tem linha nula:

a) Resolva o sistema homogêneo $AX = 0$, sabendo-se que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é uma solução desse sistema.

b) Se $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ é solução do sistema $AX = b$, encontre as demais soluções.

17) Para cada uma das matrizes abaixo, considere o sistema homogêneo $AX = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Classifique os sistemas quanto ao número de variáveis livres.

b) Veja que, em todos os sistemas acima, o número de linhas não nulas da matriz reduzida por linhas à forma escada de A mais o número de variáveis livres é igual ao número de colunas.

c) Observe atentamente a matriz reduzida por linhas à forma escada de A e veja que o item b sempre ocorre.

18) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ se for aplicada a operação elementar abaixo, obtendo a matriz R, calcule os determinantes de A e R e verifique a relação entre esses determinantes devido à aplicação da operação:

a) Operação elementar: $L_1 \longleftrightarrow L_2$ e $R = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

b) Operação elementar: $L_2 \leftarrow k L_2$ e $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

c) Operação elementar: $L_2 \leftarrow L_2 + k\,L_1$ e $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+ka & e+kb & f+kc \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

19) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$:

a) Mostre que a equação matricial $AX = \lambda X$ tem solução X, qualquer que seja o número real λ.

b) Por que o sistema $AX = b$ é possível e determinado qualquer que seja a matriz b?

c) Encontre os números reais λ que fazem com que, a equação $AX = \lambda X$, para esses valores de λ, seja um sistema possível e indeterminado.

20) Considere as matrizes $A \in M_{mxn}$ e $Y \in M_{mx1}$:

a) Mostre que as matrizes $A\,A^t$ e $A^t A$ são quadradas.

b) Mostre que as matrizes $A\,A^t$ e $A^t A$ são simétricas.

c) Mostre que: $Y^t\,Y = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.

d) Mostre que se o sistema $A\,X = 0$ é possível e determinado então a matriz $A^t A$ é invertível.

e) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $A^t A$ e conclua que $A^t A$ é invertível, usando o item anterior.

21) Se as matrizes A, B, C e X são quadradas de mesma ordem e invertíveis, encontre a matriz X nas expressões:

a) $C\,X\,B = A$.

b) $A\,(X\,B)^{-1}\,C = A\,B^{-1}$.

c) $(C^t)^{-1}\,X^t\,(A^{-1})^t = B$.

22) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/_2 & a \\ b & \sqrt{2}/_2 \end{pmatrix}$, determine as condições entre a e b para que:

a) A matriz A tenha inversa.

b) A inversa de A seja sua transposta.

23) Encontre os valores de k, para que o sistema $\begin{cases} x+2y+3z=k \\ x+3y+kz=0 \\ x+ky+3z=2 \end{cases}$, seja:

a) Possível e determinado.

b) Possível e indeterminado.

c) Impossível.

II.11 – Apêndice do Capítulo II - Regra de Cramer

Uma aplicação do determinante é a **Regra de Cramer**. Essa regra é usada para resolver sistemas de equações lineares $AX = b$, em que A é uma matriz quadrada de ordem n. Esse método de resolução, em geral, não é utilizado em problemas grandes, pois é preciso calcular $n + 1$ determinantes de ordem n. No entanto, a regra de Cramer é utilizada em algumas demonstrações e faz parte do programa do ensino médio.

Para o sistema $AX = b$ considere que, a matriz $(Ab)_j$ para $j = 1, \dots, n$, é a matriz obtida pela substituição da coluna j da matriz A por b.

EXEMPLO II.30

Dado o sistema $AX = b$, com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, então

$(Ab)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $(Ab)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $(Ab)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ e

$(Ab)_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

□

Um sistema de equações lineares $AX = b$, ou escrito matricialmente na forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, ainda pode ser escrito como $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Isso pode ser visto porque na multiplicação

das matrizes A e X, que tem o primeiro elemento igual a x_1, só é multiplicado pela 1^a coluna de A, x_2 pela 2^a coluna, e assim por diante. Se as colunas da matriz A forem denotadas por A^j para $j = 1, \dots, n$, essa última forma de se escrever o sistema $Ax = b$ fica simplificado para:

$A^1x_1 + A^2x_2 + \dots + A^nx_n = b$, ou ainda, $\sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b$. Essa forma vai servir para demonstrar a regra de Cramer, dada no teorema abaixo.

TEOREMA II.4 (**Regra de Cramer**)

Se $\det A \neq 0$, a solução do sistema $AX = b$ é $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det(Ab)_1 \\ \det(Ab)_2 \\ \vdots \\ \det(Ab)_n \end{pmatrix}$.

Demonstração

Para mostrar que $x_k = \dfrac{\det(Ab)_k}{\det A}$, para $k = 1, \dots, n$, aplique em A as seguintes operações elementares em suas colunas, transformando A em $(Ab)_k$: primeiro, multiplique a coluna k por x_k ($C_k \leftarrow x_k C_k$), depois aplique as seguintes operações elementares nas colunas dessa nova matriz: $C_k \leftarrow C_k + x_j C_j$, para $j = 1, \dots, n$, $j \neq k$. Ou seja, na coluna k coloque ela adicionada à coluna j multiplicada por x_j, para todos os $j \neq k$. A primeira operação multiplica o determinante de A por x_k e as últimas operações não alteram o determinante.
A matriz obtida aplicando-se essas operações elementares em

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^1 & \cdots & A^k & \cdots & A^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \text{ é a matriz}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^1 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} A^j x_j & \cdots & A^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^1 & \cdots & b & \cdots & A^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \text{ que é a matriz } (Ab)_k.$$

Assim, $\det (Ab)_k = x_k \det A$. Ou seja, $x_k = \dfrac{\det(Ab)_k}{\det A}$, para $k = 1, \dots, n$.

□

EXEMPLO II.31

Considere o sistema $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior.

Calcule, como exercício, os determinantes:

$$det\, A = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 80, \quad det\,(Ab)_1 = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 0,$$

$$det\,(Ab)_2 = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 80, \quad det\,(Ab)_3 = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e}$$

$$det\,(Ab)_4 = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 80.$$

Assim, a solução do sistema é:

$$x_1 = \frac{0}{80} = 0\,,\ x_2 = \frac{80}{80} = 1\,,\ x_3 = \frac{0}{80} = 0 \quad \text{e} \quad x_4 = \frac{80}{80} = 1.$$

□

Se $det\, A \neq 0$ o sistema $AX = b$ tem uma única solução, ou seja, é possível e determinado. Mas o corolário e o exemplo abaixo mostram o que pode acontecer se o determinante de A for nulo.

COROLÁRIO II.1

Se $det\, A = 0$ e $det\,(Ab)_k \neq 0$, para algum $k = 1, \ldots, n$, então o sistema $AX = b$ não tem solução.

Demonstração

A expressão $det\,(Ab)_k = x_k\, det\, A$, obtida na demonstração do teorema II.4, não depende do determinante de A. Mas se $det\, A = 0$ e $det\,(Ab)_k \neq 0$, isso leva a um número não nulo igual a zero. Logo, o sistema não tem solução.

□

No exemplo a seguir, verifica-se que se $det\ A = 0$ e também, para todo $k = 1, \ldots, n,\ det\ (Ab)_k = 0$, nada é possível concluir. Esse fato gera uma certa confusão. Vê-se que, tanto o sistema, com essas condições, pode ser impossível quanto indeterminado.

EXEMPLO II.32

O sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ é obviamente impossível. Esse sistema pode ser escrito matricialmente como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Veja que $det\ A = 0$ e $det\ (Ab)_1 = det\ (Ab)_2 = det\ (Ab)_3 = 0$, mas mesmo assim o sistema é impossível. Ou seja, não é preciso que algum $(Ab)_k$ seja diferente de zero para a impossibilidade do sistema.

Por outro lado, considere o sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ que tem a mesma matriz A anterior e teve a matriz b modificada. Observe que o mesmo ocorre nesse caso, isto é, $det\ A = det\ (Ab)_1 = det\ (Ab)_2 = det\ (Ab)_3 = 0$, mas agora o sistema é possível e indeterminado, pois $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ são ambas soluções do sistema, garantindo que o sistema tem uma infinidade de soluções.

$\square$

III - ESPAÇO VETORIAL REAL

III.1 – Introdução

No primeiro capítulo foi estudado o espaço R^n. Esse espaço tem duas operações importantes, que são: a adição e a multiplicação por escalar (**escalar**, nesse livro, é um número real). No segundo capítulo foi visto que o conjunto das matrizes M_{mxn} , também tem duas operações do mesmo tipo. Essas operações podem ser caracterizadas por oito propriedades, que serão listadas adiante. A generalização de conjuntos desse tipo, isto é, conjuntos que possuem duas operações semelhantes às do R^n e de M_{mxn}, mas que podem ser ou não parecidos geometricamente com o R^n, é necessária devido à ocorrência de problemas mais elaborados. Um conjunto desse tipo é denominado **Espaço Vetorial Real**, e será definido na próxima seção. Essa suposta aparência do R^n com conjuntos desses tipo é abstrata, mas ajuda na resolução de alguns problemas nesses conjuntos, transportando os problemas para o R^n, resolvendo-os e depois retornando ao conjunto de origem.

III.2 – O Espaço Vetorial Real

Considere um conjunto V, não vazio, no qual é possível definir duas operações:

- **Adição:** $+ : V \times V \to V$
- **Multiplicação por escalar:** $\cdot : R \times V \to V$

De modo que, essas operações tenham as seguintes propriedades:

1) $u + v = v + u$, $\forall\ u, v \in V$.
2) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall\ u, v$ e $w \in V$.
3) Existe um elemento nulo em V, isto é, $\exists\ \overline{0} \in V$ tal que, para todo $u \in V$ tem-se que $\overline{0} + u = u$.
4) Todos os elementos de V têm um inverso, isto é, $\forall u \in V$ existe um elemento de V, denominado $-u$, tal que $u + (-u) = \overline{0}$.
5) $a(u + v) = au + av$, $\forall\ u, v \in V$ e $\forall\ a \in R$.
6) $(a + b)u = au + bu$, $\forall\ u \in V$ e $\forall\ a, b \in R$.
7) $(ab)u = a(bu)$, $\forall\ u \in V$ e $\forall\ a, b \in R$.
8) $1u = u$, $\forall\ u \in V$.

Um conjunto V, com duas operações que possuam as oito propriedades acima é denominado **Espaço Vetorial Real**. Ou mais simplesmente, como nesse capítulo serão usados apenas números reais, abrevia-se o nome para **Espaço Vetorial**.

Um elemento de um espaço vetorial é denominado **vetor** e os números reais da operação multiplicação por escalar são **escalares**.

OBSERVAÇÕES III.1

1) O elemento $\bar{0}$, da propriedade *iii* da definição acima, é único.
Pois, se existisse outro elemento $\bar{0}'$ com a mesma característica, isto é, tal que $u + \bar{0}' = u$, $\forall u$, segue que, fazendo-se $u = \bar{0}$ na equação $u + \bar{0}' = u$, e depois, na equação $\bar{0} + u = u$ fazendo-se $u = \bar{0}'$, juntando tudo, tem-se que $\bar{0} = \bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$.

2) Se para algum par u e v tem-se que $u + v = u$, então $v = \bar{0}$. Pois, adicionando-se o inverso de u dos dois lados da igualdade,
$(-u) + (u + v) = (-u) + u = \bar{0}$ $\therefore$
$[(-u) + u] + v = \bar{0} + v = v$, e assim, conclui-se que $v = \bar{0}$.

3) Considerando-se o número real 0 e um vetor qualquer $v \in V$, vetor $0\,v$ é o elemento zero de V. Pelo que foi visto no item 2, basta verificar que: $0\,v + v = v$, concluindo-se que $0\,v = \bar{0}$. Assim:
$0\,v + v = 0\,v + 1v = (0 + 1)\,v = 1v = v$.

4) Dado $v \in S$, o inverso desse vetor é $-1\,v$. Pois, $-1\,v + v = -1\,v + 1v = (-1 + 1)\,v = 0\,v = \bar{0}$, concluindo-se que $-1\,v$ é o vetor inverso de v.

□

EXEMPLO III.1

O R^n é um exemplo de espaço vetorial. Um vetor para $n = 2$ ou $n = 3$, isto é, um par ou uma tripla, considerando-se a noção geométrica, é interpretado por uma flecha, que tem tamanho, direção e sentido.
Mas para valores de n maiores do que 3 perde-se a noção geométrica e não faz mais sentido identificar vetores com flechas. Um vetor do R^5 é uma quíntupla de números reais, por exemplo o vetor $u = (8, 3, -3, 2, 0)$.
Por esta razão evitou-se, até agora, chamar de vetores os elementos de R^2 e de R^3, que também são vetores, mas não devem ser interpretados como as únicas possibilidades de vetores. Os vetores são os elementos dos espaços vetoriais e não devem ser confundidos com flechinhas.

□

EXEMPLO III.2

Considere o conjunto M_{mxn} = { **matrizes de ordem** mxn }, com as seguintes operações:

Adição: somando-se duas matrizes elemento a elemento, como no capítulo anterior.

Por exemplo, no conjunto M_{2x3} dados dois vetores A e B, ou seja, duas matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, a soma desses dois vetores é

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 3+3 & 5+2 \\ 2-1 & 4 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Multiplicação por escalar: multiplicando-se um número real por todos os elementos da matriz.

Por exemplo, no espaço vetorial M_{2x3} dado um vetor A e um escalar k, ou seja, uma matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ e um número real $k = 2$ a multiplicação por escalar

$$k\,A = 2\,A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Assim, para cada m e n o conjunto M_{mxn} com as duas operações definidas acima, que pode-se mostrar que satisfazem às oito propriedades da definição de espaço vetorial, é um espaço vetorial e cada matriz do espaço é um vetor.

Por exemplo, o vetor nulo do espaço M_{2x3} é a matriz nula $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e o inverso do vetor $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ é o vetor $-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

□

EXEMPLO III.3

Considere F = { ***funções reais*** }, isto é, o conjunto de todas as funções de R em R, com as operações: adição e multiplicação por escalar feitas como nos cursos de cálculo, quando se soma duas funções e se multiplica uma função por um número real. São exemplos de vetores desse espaço, $u = sen(x)$, $v = e^x$ e $w = 2x^5 - 3x^2 + 10$, dentre outras. Foram dados exemplos de vetores que são funções contínuas, mas os vetores desse espaço podem ser funções de qualquer tipo, bastando que o domínio e o contradomínio sejam iguais a R. O vetor nulo do espaço é a função constante igual a zero. O leitor deve prestar atenção quanto ao vetor nulo de F, pois ele muitas vezes é confundido com o número real zero, quando se faz contas nesse espaço.

□

As duas operações, de adição e multiplicação por escalar de um espaço vetorial, podem ser feitas conjuntamente, e nesse caso, recebe o nome de **combinação linear**, da mesma forma que foi feito no R^n e em M_{mxn}.

Sejam V um espaço vetorial, u, v, $w \in V$ e a, $b \in R$. Diz-se que o vetor **w é uma combinação linear de u e de v** se é possível escrever w da seguinte maneira:

$$w = a\,u + b\,v.$$

A combinação linear pode ser feita com n vetores $v_i \in V$ e n números reais $a_i \in R$, com $i = 1, \dots, n$, da seguinte maneira:

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

III.3 – Subespaço Vetorial

Um subconjunto é um conjunto contido em um conjunto. Da mesma forma, um subespaço vetorial é um espaço vetorial contido dentro de um espaço vetorial. Assim, um subespaço vetorial de um espaço vetorial V é um subconjunto S de V, não vazio, que tem as mesmas operações de adição e multiplicação por escalar que V e de tal forma que essas operações satisfaçam às oito propriedades da definição de espaço vetorial e, logicamente, estejam bem definidas.

Para que as operações estejam bem definidas em S, é necessário observar que, quando a operação de adição é realizada no espaço V toma-se dois vetores de V e ao somar obtém-se um vetor de V. Da mesma maneira, quando a operação é feita em S, deve-se tomar dois elementos do conjunto S e ao somar o resultado deve ser um elemento de S. Essa propriedade é denominada **fechamento em relação à operação de adição.**

Pelo mesmo motivo, a operação de multiplicação por escalar também deve ter a propriedade de fechamento. Isto é, ao multiplicar um vetor de S por um escalar, essa operação deve resultar em um vetor de S. Essa propriedade é denominada **fechamento em relação à operação de multiplicação por escalar**.

As duas propriedades de fechamento e o fato de S não ser vazio é suficiente para garantir que, as duas operações em S, herdadas de V, satisfazem às oito propriedades da definição de espaço vetorial. Resumindo, define-se subespaço vetorial, ou mais simplesmente, subespaço de V da seguinte forma:

> Um **subespaço vetorial** S de um espaço vetorial V é um subconjunto, não vazio, $S \subseteq V$, com as seguintes propriedades:
>
> i) Se $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$.
> ii) Se $v \in S$ e $a \in R \Rightarrow a v \in S$.

Observe que as propriedades $1, 2, 5, 6, 7$ e 8 da definição de espaço vetorial são satisfeitas porque S é um subconjunto de V e as operações dos dois conjuntos são as mesmas.

A propriedade 3, é satisfeita pois, a propriedade ii da definição de subespaço, vale para qualquer número real a. Como a pode ser igual a zero, tomando-se um elemento qualquer v de S, tem-se que $0\, v \in S$, e pela observação III.1, esse é o vetor nulo de S.

A última propriedade da definição de espaço vetorial a ser verificada é a 4. Considerando $a = -1$, na propriedade ii da definição de subespaço, tem-se, pelas observações III.1, que S contém o inverso de qualquer vetor de S.

Logo, essas duas propriedades da definição de subespaço vetorial, fechamento em relação à adição e à multiplicação por escalar e considerando que S não é vazio, são suficientes para garantir que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço, ou seja, qualquer subespaço vetorial também é um espaço vetorial.

EXEMPLO III.4

Considere o espaço vetorial R^2 e o subconjunto
$S = \{ (x, y) \in R^2 \mid x + 2y = 0 \}$.
Primeiramente, $S \neq \varnothing$ pois o vetor nulo $(0, 0) \in S$.
Um vetor genérico de S é da forma $(-2y, y)$, já que $x = -2y$ é a equação de S. Assim, para verificar se um vetor está em S, basta ver se a 1ª coordenada é igual a -2 vezes a 2ª coordenada.
Considere dois vetores genéricos de S, $(-2y_1, y_1)$ e $(-2y_2, y_2)$ que somados fornece:
$(-2y_1, y_1) + (-2y_2, y_2) = (-2y_1 - 2y_2, y_1 + y_2) = (-2[y_1 + y_2], y_1 + y_2)$.
Como $(-2[y_1 + y_2], y_1 + y_2)$ também é um vetor genérico de S, segue que a operação de adição é fechada.
Finalmente, multiplicando-se um vetor genérico de S, $(-2y, y)$ por um escalar k obtém-se: $k(-2y, y) = (-2ky, ky)$ que é um vetor de S. Conclui-se assim

que a operação de multiplicação por escalar também é fechada, e logo, S é um subespaço vetorial do R^2.
Observe que S é uma reta contendo a origem do R^2. Mais ainda, qualquer reta do R^2 que contém a origem, tem equação cartesiana da forma $a\,x + b\,y = 0$, e pode-se mostrar da mesma maneira acima que, essa reta é um subespaço do R^2.

□

EXEMPLO III.5

O subconjunto $C = \{(x, y) \in R^2 \mid 3x - 2y = 6\}$ do R^2 é uma reta que não contém a origem. O vetor $u = (2, 0)$ pertence à essa reta, mas o vetor $2u = (4, 0)$ não pertence à reta. Logo a operação de multiplicação por escalar não é fechada em C e assim esse conjunto não é um subespaço do R^2.

□

EXEMPLO III.6

Considere o subconjunto $S = \{X \in R^n \mid A X = 0$, para uma matriz dada A de ordem $m x n\}$, que é o conjunto das soluções de um sistema homogêneo com m equações e n incógnitas, sendo X um vetor coluna.
Esse conjunto é um subespaço do R^n.
Primeiro, S não é vazio, pois 0 é solução do sistema, e assim pertence a S.
Para ver que S é fechado em relação à adição, sejam X_1 e X_2 dois elementos de S, isto é, dois vetores do R^n que satisfazem ao sistema, e assim, $A X_1 = 0$ e $A X_2 = 0$. Para mostrar que $X_1 + X_2$ também está em S, basta mostrar que esse vetor, $X_1 + X_2$, também é solução do sistema. Substituindo $X_1 + X_2$ no sistema $A X = 0$ fica:

$$A(X_1 + X_2) = A X_1 + A X_2 = 0 + 0 = 0.$$

O fechamento em relação à adição segue de: se X é uma solução do sistema, o vetor $a X$ também é uma solução do sistema pois:

$$A(a X) = (a A) X = a (A X) = a\,0 = 0.$$

Concluindo que, S é um subespaço do R^n.

□

EXEMPLO III.7

Um plano contendo a origem em R^3 tem equação cartesiana $a\,x + b\,y + c\,z = 0$, que é um sistema homogêneo com uma equação e três incógnitas. Pelo exemplo anterior, esse sistema tem como conjunto solução um subespaço do R^3. Assim, qualquer plano do R^3 que contém a origem é um subespaço do R^3.
Uma reta do R^3 que contém a origem é a interseção de dois planos do R^3 que contêm a origem. Logo é o conjunto das soluções de um sistema homogêneo com três incógnitas e duas equações, uma para cada plano, e assim qualquer reta do R^3 que contém a origem também é um subespaço do R^3.

□

Observe que, em todos os exemplos acima, o subespaço contém o vetor nulo. E isto vale para todo subespaço vetorial, pois todo subespaço vetorial é um espaço vetorial e assim, pela propriedade 3 da definição de espaço vetorial, tem que conter o vetor nulo. Dessa forma, fica mais fácil, quando é preciso mostrar que um conjunto não é vazio, testar se o vetor nulo está ou não no conjunto. Porém, não é o bastante mostrar que o vetor nulo está no conjunto para verificar se ele é um subespaço, como mostra o exemplo a seguir:

EXEMPLO III.8

O conjunto $A = \{ (x, x^2) \in R^2 \}$ não é um subespaço do R^2, pois $v = (1, 1)$ é um elemento de A mas $2v = (2, 2)$ não pertence a A. Observe que o vetor nulo $(0, 0)$ pertence a A, porém A não é um subespaço. Dessa forma, quando se testa se o vetor nulo pertence ao conjunto duas coisas podem acontecer: se o vetor nulo não pertence ao conjunto, esse não é um subespaço, mas se ele pertence, nada é possível afirmar.

EXEMPLO III.9

Se $B = \{ X \in R^n \mid AX = b$, sendo A uma matriz mxn e $b \neq 0$ uma matriz $nx1 \}$ é um subconjunto do R^n, que é o conjunto das soluções do sistema não homogêneo com m equações e n incógnitas. Pode-se verificar que $X = 0$ não é solução do sistema $AX = b$, pois $b \neq 0$, logo B não é subespaço do R^n.

EXEMPLO III.10

O subconjunto $U = \{$ *matrizes triangulares superiores* $nxn \}$ é um subespaço vetorial de M_{nxn}. A matriz nula é triangular superior e somando-se duas matrizes triangulares superiores ou multiplicando-se uma matriz desse tipo por um escalar, ainda se obtém uma matriz triangular superior.

EXEMPLO III.11

O subconjunto $C = \{ f: R \to R \mid f$ é uma função contínua $\}$ é um subespaço do espaço vetorial das funções F (exemplo III.3). Do cálculo sabe-se que somando-se duas funções contínuas ou multiplicando-se uma função contínua por um número real, obtém-se uma função contínua, logo C é um subespaço de F. Dessa forma, C é, ele próprio, um espaço vetorial.

EXEMPLO III.12

O subconjunto $D = \{ f: R \to R \mid f$ é uma função derivável em todo domínio$\}$ é um subespaço do espaço vetorial C do exemplo anterior. Do cálculo sabe-se que

$D \subset C$ e, somando-se duas funções deriváveis ou multiplicando-se uma função derivável por um número real, obtém-se uma função derivável, logo D é um subespaço de C que é um subespaço de F. Assim, D também é um espaço vetorial.

□

EXEMPLO III.13

O subconjunto P_n = { *polinômios de grau menor ou igual a n* } de D é um subespaço desse conjunto. Pois a função constante nula é um polinômio de grau 0, a soma de dois polinômios de grau menor ou igual a n é um polinômio de grau menor ou igual a n e se multiplicarmos um polinômio desse tipo por um número real obtemos um polinômio de P_n.

□

EXEMPLO III.14

Quais são os subespaços de R^2?

Para responder à essa pergunta tome o "menor" subespaço que qualquer espaço vetorial pode conter, o subespaço que é formado pelo conjunto unitário $\{\,\bar{0}\,\}$, isto é, o subespaço formado apenas pelo vetor nulo.

Considere agora o subconjunto A do R^2 contendo dois pontos diferentes. Para que A seja um subespaço um desses pontos tem que ser o vetor nulo e o outro não nulo, $A = \{\,\bar{0}\,,\,v\,\}$ com $v \neq \bar{0}$. Observe que A não pode ser um subespaço, pois $2\,v \neq v$ e $2\,v$ tem que pertencer a A. Assim, para que um subconjunto do R^2 contenha os dois pontos, $\bar{0}$ e v, deve conter também todos os múltiplos de v. Ou seja, o "menor" subespaço do R^2 que contém esses dois pontos distintos é uma reta que contém a origem.

Finalmente, considere um subespaço S do R^2 que além de conter uma reta passando pela origem contém também um ponto u do R^2 que não está na reta. Para que S seja um subespaço, como S contém u, ele deve conter também toda a reta passando pela origem e por u. Logo, S tem que conter duas retas passando pela origem, a reta dada e a reta que contém u. Mas tomando-se dois vetores não nulos, um em cada reta e fazendo a adição, sua soma deve estar em S mas não está em nenhuma das duas retas. Ainda mais, qualquer vetor do R^2 se escreve como combinação linear desses dois vetores escolhidos nas retas. Assim sendo, para que S seja um subespaço deve conter todos os pontos do R^2, isto é, $S = R^2$.

Concluindo, os possíveis subespaços do R^2 são: o conjunto unitário nulo $\{\,\bar{0}\,\}$, uma reta contendo a origem ou o próprio R^2.

□

EXEMPLO III.15

Da mesma forma que foi feito no exemplo anterior, pode-se examinar quais são os subespaços do R^3:

Inicialmente, como em qualquer subespaço, tome o "menor" subconjunto do R^3 que pode ser subespaço, o conjunto constituído somente do vetor nulo.
Se o subconjunto do R^3 contém um vetor não nulo, deve conter toda a reta que passa pela origem e por esse vetor. Assim, as retas passando pela origem são os "próximos" subespaços do R^3.
Tome agora dois vetores não nulos, que não estejam na mesma reta que passa pela origem. Use a multiplicação por escalar e veja que esse subespaço deve conter a reta que passa pela origem e pelo primeiro ponto e também a reta que passa pela origem e pelo segundo ponto. Use agora a adição, e conclua que esse subespaço tem que conter o plano que contém essas duas retas. Ou seja, os "menores" subespaços que contêm dois vetores dessa forma são os planos que passam pela origem.
Se o conjunto contém, além de um plano que passa pela origem, um ponto fora desse plano, para que esse conjunto seja um subespaço, usando-se combinação linear desse ponto com elementos do plano, conclui-se que esse subespaço deve ser o próprio R^3.
Assim, os possíveis subespaços do R^3 são: o conjunto unitário nulo, as retas contendo a origem, os planos contendo a origem ou o próprio R^3.

$\square$

Se U e S são dois subespaços de V, a **interseção** deles também é um subespaço de V. Pois:
o vetor nulo pertence a U e a S e logo pertence a $U \cap S$.
Se $u, v \in U \cap S$ e $a \in R$ então $u + v \in U$ e $a\,u \in U$ e também, $u + v \in S$ e $a\,u \in S$ logo $u + v \in U \cap S$ e $a\,u \in U \cap S$. E assim, $U \cap S$ é um subespaço de V.

EXEMPLO III.16

A interseção de dois planos diferentes no R^3 que contêm a origem é uma reta que contém a origem, que também é um subespaço do R^3.
Considere, como exemplo, dois planos que têm por equações $x - y + 2z = 0$ e $2x - 3y + 5z = 0$. Para que um vetor pertença à interseção desses dois planos, tem que satisfazer às equações dos dois planos, dessa forma, tem que ser solução do sistema homogêneo $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$ cuja matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

levando à solução $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z$ que é a equação paramétrica de uma reta do R^3.

$\square$

A **união de dois subespaços**, nem sempre é um subespaço. Como por exemplo, a união de duas retas diferentes, mesmo que ambas contenham a origem, não é subespaço do R^3, como foi visto nos exemplos III.14 e III.15.

EXEMPLO III.17

Sejam V um espaço vetorial e $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$ um subconjunto de V. Considere o conjunto $S = \{ v \in V \mid v$ é combinação linear de $v_1 , v_2 , \ldots$ e $v_n \}$. Esse subconjunto S é um subespaço de V, pois $\bar{0} \in S$, já que $\bar{0}$ é combinação linear de quaisquer vetores, bastando fazer todos os coeficientes da combinação linear iguais a zero. Se u e v pertencem a S,
$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$ e $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$, logo
$u + v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$ $\therefore$
$u + v = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \ldots + (a_n + b_n) v_n$, concluindo-se que $u + v \in S$.
A multiplicação por escalar, $k u = k (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n)$ $\therefore$
$k u = k a_1 v_1 + k a_2 v_2 + \ldots + k a_n v_n$ $\therefore$ $k u \in S$, mostrando que S é fechado em relação às operações e assim S é um subespaço vetorial de V.

O subespaço do exemplo anterior recebe o nome de **subespaço gerado por** $v_1 , v_2 , \ldots$ **e** v_n e é denotado por $S = [v_1 , v_2 , \ldots , v_n]$.

Se $S = [v_1 , v_2 , \ldots , v_n]$ diz-se também que os vetores $v_1 , v_2 , \ldots$ e v_n **geram** S ou que o conjunto $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$ **gera** S.

EXEMPLO III.18

Dados $u = (1 , 1 , 1)$ e $v = (1 , 2 , 3)$ dois vetores do R^3, pergunta-se: os vetores u e v geram o R^3?
Para responder à essa pergunta é preciso tomar um vetor genérico do R^3 e escrevê-lo como combinação linear de u e de v. O vetor $X = (x , y , z)$ é um vetor genérico do R^3. Assim, deve ser resolvida a equação $X = a u + b v$, ou seja, $(x , y , z) = a (1 , 1 , 1) + b (1 , 2 , 3)$, ou ainda,

$(x , y , z) = (a + b , a + 2b , a+3b)$, que leva ao seguinte sistema: $\begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \\ a + 3b = z \end{cases}$.

Para resolver esse sistema escalona-se a matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right)$, obtendo-se a matriz $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x-y \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{array}\right)$. O sistema só tem solução se a última linha da matriz aumentada escalonada for toda nula, isto é, $x - 2y + z = 0$. Os vetores que não satisfazem à essa equação, como por exemplo $w = (1, 0, 0)$, não são combinação linear de u e de v. O que mostra que existem vetores do R^3 que não estão no espaço gerado por u e por v, logo $[u, v] \neq R^3$.

Para que um vetor esteja no espaço gerado $[u, v]$ é necessário que satisfaça à equação obtida no sistema, $x - 2y + z = 0$.

Essa é a equação de um plano contendo a origem, assim, $[u, v]$ é o plano $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

Observe que no R^3, dois vetores não podem gerar esse espaço, pois chega-se a um sistema com 3 equações e 2 incógnitas e consequentemente é obtida uma matriz escalonada com uma linha nula, existindo assim vetores do R^3 que tornam o sistema impossível.

—————— []

EXEMPLO III.19 ——————

Dados os vetores $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$ e $w = (3, 1)$ do R^2, pergunta-se: esses vetores geram o R^2?

Considere o vetor genérico (x, y) do R^2, e escrevendo-se a combinação linear $(x, y) = a(1, 1) + b(1, -1) + c(3, 1) = (a + b + 3c, a - b + c)$, chega-se ao sistema $\begin{cases} a+b+3c = x \\ a-b+c = y \end{cases}$ que resolvendo-se obtém-se

$$\begin{cases} a \quad +2c = \dfrac{x+y}{2} \\ \quad b \quad +c = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}.$$

Esse sistema é possível e indeterminado para todo (x, y), pois para cada valor de c tem-se uma solução. Logo $[u, v, w] = R^2$. Observe que qualquer vetor do R^2 pode ser escrito de diversas formas como combinação linear de u, v e w. Para cada valor diferente atribuído a c obtém-se uma combinação linear diferente. Por exemplo, tome $(x, y) = (0, 0)$ e atribua a c o valor 1, implicando nos valores $a = -2$ e $b = -1$. Isto dá uma combinação linear da forma $(0, 0) = -2u - v + w = -2(1, 1) - (1, -1) + (3, 1)$.

Essa equação vetorial ainda pode ser escrita como $w = 2u + v$.

Veja que, no caso desse sistema ter infinitas soluções, é possível escrever um dos geradores como combinação linear dos outros. Isso torna w dispensável para gerar o R^2. Isto é, como é possível escrever qualquer vetor $X = (x, y) \in R^2$ como combinação linear de u, v e de w, $X = au + bv + cw$ e como w é combinação linear de u e de v, $w = 2u + v$, substituindo-se uma equação na

outra, obtém-se $X = a\,u + b\,v + c\,(2\,u + v) = (a + 2c)\,u + (b + c)\,v$, observa-se que u e v são suficientes para gerar o R^2. Dessa forma, é possível escrever que esses espaços gerados são iguais: $R^2 = [u, v, w] = [u, v]$.
No sistema acima, ao dispensar w elimina-se a terceira coluna da matriz do sistema, a coluna do c e nesse caso, o sistema passa a ser possível e determinado. Isso quer dizer que, qualquer vetor X do R^2 pode ser escrito, de uma única maneira, como combinação linear de u e de v.
Por exemplo, o vetor $X = (2, 4)$ só pode ser escrito como combinação linear de u e de v da seguinte forma: $(2, 4) = 3\,u - v$.
A única forma de escrever o vetor $X = (0, 0)$ como combinação linear de u e de v é fazendo todos os coeficientes da combinação linear nulos, $a = b = 0$.

——————————— ||

Dados dois subespaços U e S de um espaço vetorial V, a **soma dos subespaços U e S** é definida da seguinte forma:

$$U + S = \{ v \in V \mid v = u + w \text{ com } u \in U \text{ e } w \in S \}.$$

A soma dos subespaços U e S é um subespaço de V. Pois, dados v_1 e v_2 em $U + S$, significa que: $v_1 = u_1 + w_1$ com $u_1 \in U$ e $w_1 \in S$ e ainda $v_2 = u_2 + w_2$ com $u_2 \in U$ e $w_2 \in S$. Como U e S são subespaços de V, as somas de u_1, $u_2 \in U$ e w_1, $w_2 \in S$, são tais que, $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in S$, e assim, $u_1 + u_2 + w_1 + w_2 \in U + S$, mas, $u_1 + u_2 + w_1 + w_2 = u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = v_1 + v_2$, e então $v_1 + v_2 \in U + S$. Mostrar o fechamento em relação à multiplicação por escalar fica como exercício para o leitor.

EXEMPLO III.20 ———————————

Dadas as retas geradas em R^3: $r_1 = [(1, 2, 3)]$ e $r_2 = [(1, 0, -1)]$ a soma desses dois subespaços, é o plano gerado pelos geradores de r_1 e de r_2, assim, $r_1 + r_2 = [(1, 2, 3), (1, 0, -1)]$.

——————————— ||

III.4 – Base de um Espaço Vetorial

Quando se tenta escrever um vetor como combinação linear de outros vetores, três coisas podem ocorrer: é impossível escrever, existe uma forma única de escrever essa combinação linear ou o vetor pode ser escrito como combinação linear de infinitas maneiras distintas. Isso tem a ver com as formas de solução de um sistema de equações lineares, ser impossível, possível e determinado ou indeterminado, respectivamente.

EXEMPLO III.21

Considere os seguintes vetores do R^3:
$v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-2, -2, 0)$, $v_3 = (1, 2, 3)$ e $v_4 = (1, 0, -3)$, e ainda, $u = (1, 0, 0)$ e $w = (1, -1, -6)$.

Deseja-se escrever os vetores u e w como combinação linear de v_1, v_2, v_3 e de v_4. Para que as contas sejam feitas apenas uma vez, será usado um vetor genérico do R^3, $X = (x, y, z)$, no lugar de u e de w, e depois será substituído em X as coordenadas desses dois vetores. Assim, a combinação linear fica:

$X = (x, y, z) = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 + d\,v_4 = (a - 2b + c + d,\ a - 2b + 2c,\ 3c - 3d)$

Que leva ao sistema $\begin{cases} a - 2b + c + d = x \\ a - 2b + 2c = y \\ 3c - 3d = z \end{cases}$ cuja matriz aumentada é

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & 2 & 0 & y \\ 0 & 0 & 3 & -3 & z \end{array}\right)$ que escalonando produz $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 3 & -3 & z \end{array}\right)$

e finalmente a matriz reduzida: $\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 2x - y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3x - 3y + z \end{array}\right)$.

Para esse sistema ser possível a terceira linha tem que ser toda nula. Ou seja, para que o vetor $X = (x, y, z)$ possa ser escrito como combinação linear de v_1, v_2, v_3 e de v_4 é preciso que $3x - 3y + z = 0$.

Substituindo $u = (1, 0, 0)$ nessa equação obtém-se $3 = 0$, concluindo-se que u não pode ser escrito como combinação linear de v_1, v_2, v_3 e de v_4.

Logo, v_1, v_2, v_3 e v_4 não geram o R^3.

Fazendo o mesmo para $w = (1, -1, -6)$ verifica-se que satisfaz à equação obtida, $3x - 3y + z = 0$. Assim, é possível escrever w como combinação linear desses vetores.

Voltando à última matriz encontrada e substituindo as cooredenadas de w tem-se $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ que leva à solução $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d$.

Para cada valor de b e de d obtém-se uma solução diferente, logo existem infinitas maneiras de escrever essa combinação linear.

Quando se escreve o vetor $(0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2, v_3 e v_4 chega-se à solução $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d$. Atribuindo-se valores a b e a d, por exemplo, $b = 2$ e $d = 1$ obtêm-se $a = 2$ e $c = 1$, e a seguinte combinação linear $\bar{0} = 2\,v_1 + 2\,v_2 + v_3 + v_4$. Isto mostra que v_4, por exemplo, é uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3 da seguinte maneira:
$v_4 = -2\,v_1 - 2\,v_2 - v_3$.
Se v_4 é dispensado da combinação linear $X = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 + d\,v_4$, restando apenas $X = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3$, chega-se a um sistema semelhante ao anterior retirando-se apenas a quarta coluna referente ao d.
Esse sistema ainda é possível e indeterminado.
Escrevendo-se novamente o vetor nulo, agora como combinação linear somente de v_1, v_2 e v_3, chega-se à solução $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b$, que é o mesmo que fazer na solução acima $d = 0$. Logo, atribuindo-se a b o valor 1, obtém-se $a = 2$ e $c = 0$, levando-se à combinação linear $\bar{0} = 2\,v_1 + v_2 + 0\,v_3$, ou seja, $v_2 = -2\,v_1$.
O vetor v_2 pode ser retirado da combinação linear, que é o mesmo que retirar do sistema a segunda coluna.
Nesse caso, para os vetores (x, y, z) que satisfazem à equação $3x - 3y + z = 0$, o sistema é possível e determinado, considerando-se apenas v_1 e v_3. Isso quer dizer que, o mesmo subespaço que é gerado pelos vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 é gerado também por v_1 e v_3 e além disto, qualquer vetor desse subespaço gerado, se escreve de maneira única como combinação linear de v_1 e de v_3.
Observe que $[v_1, v_3] = \{(x, y, z) \mid 3x - 3y + z = 0\}$ é um plano em R^3 contendo a origem. Ou seja, v_1 e v_3 geram de maneira única o plano de equação $3x - 3y + z = 0$.

□

Baseando-se no exemplo anterior, dá-se nome ao menor conjunto de vetores que gera um espaço. Nesse conjunto, nenhum dos vetores deve ser combinação linear dos restantes, pois esse corre o risco de ser eliminado, obtendo-se um conjunto menor ainda gerando o mesmo subespaço. De uma forma mais simples, o sistema obtido quando se escreve, por exemplo, o vetor nulo como combinação linear deles deve ser possível e determinado. Um conjunto desse tipo recebe um nome especial:

O subconjunto $\{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ de um espaço vetorial V é **linearmente independente** (**LI**) se e só se a equação vetorial abaixo tem solução única.

$$\overline{0} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

Se a equação acima tem mais de uma solução diz-se que $\{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ é **linearmente dependente** (**LD**).

Observe que a equação $\overline{0} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ tem sempre solução, basta fazer $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Assim, só existem dois tipos de solução para essa equação: ela tem solução única ou tem infinitas soluções.

EXEMPLO III.22

Os vetores do R^3: $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-2, -2, 0)$, $v_3 = (1, 2, 3)$ e $v_4 = (1, 0, -3)$, do exemplo anterior, são linearmente dependentes, pois a equação vetorial $\overline{0} = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3 + d\, v_4$ tem infinitas soluções.
Mas o conjunto $\{ v_1 , v_3 \}$ é LI , pois a equação $\overline{0} = x\, v_1 + y\, v_3$ só tem a solução única $x = y = 0$.

□

EXEMPLO III.23

Para saber se os vetores de M_{2x2}: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ são ou não linearmente independentes, devem ser analisadas as soluções da equação vetorial $\overline{0} = x\, v_1 + y\, v_2 + z\, v_3$.

Ou seja, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ que leva a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 3y \\ 2y & 4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+3y-z \\ x+2y+z & x+4y+2z \end{pmatrix}.$$

Para a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ser igual à matriz $\begin{pmatrix} x+y & x+3y-z \\ x+2y+z & x+4y+2z \end{pmatrix}$, x, y e z devem satisfazer às equações do sistema $\begin{cases} x+y = 0 \\ x+2y+z = 0 \\ x+3y-z = 0 \\ x+4y+2z = 0 \end{cases}$.

Resolvendo-se esse sistema, escalona-se a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ obtendo-se $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tem como única solução $x = y = z = 0$ e isso mostra que os vetores v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes.

□

OBSERVAÇÕES III.2

1) O conjunto $\{ v_1, v_2, \dots, v_n, \bar{0} \}$ é LD, quaisquer que sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$, pois a equação vetorial $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + a_{n+1} \bar{0} = \bar{0}$ é satisfeita para qualquer valor de a_{n+1} real.

2) Se v_n é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, então $\{ v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \}$ é LD. Isso é verdade, pois como v_n é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, esse vetor pode ser escrito como $v_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$, ou ainda, pode-se escrever uma combinação linear do vetor nulo da seguinte maneira: $\bar{0} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} - v_n$, mostrando que o vetor nulo pode ser escrito como combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ e v_n com o coeficiente de v_n igual a -1, logo não nulo.

3) Se $\{ v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \}$ é LD, então um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos restantes. Para verificar isto, usa-se a definição de dependência linear, ou seja, a equação vetorial $\bar{0} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ tem mais de uma solução, logo tem uma solução não nula. Suponha que $a_1 \neq 0$, sem perda de generalidade. É possível escrever, dessa forma, a combinação linear $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_n$, pois $a_1 \neq 0$. Se outro coeficiente fosse diferente de zero, o respectivo vetor desse coeficiente, poderia ser escrito como combinação linear dos restantes.

4) Das duas observações anteriores conclui-se que, é possível definir LD da seguinte forma: **O conjunto $\{ v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n \}$ é linearmente dependente, se e só se um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.**

5) O conjunto unitário $\{ v \}$ é LI ou é LD ?
Para responder a essa pergunta deve-se escrever o vetor nulo como combinação linear de v, ou seja, $\overline{0} = a\,v$ e resolver essa equação. Dois casos devem ser considerados, $v \neq \overline{0}$ ou $v = \overline{0}$.
Se $v \neq \overline{0}$ obrigatoriamente $a = 0$ e o conjunto $\{ v \}$ é LI.
Se $v = \overline{0}$ qualquer valor real de a satisfaz à equação, e nesse caso, $\{ v \}$ é LD. Resumindo, um conjunto unitário **$\{ v \}$ é LI se e só se $v \neq \overline{0}$.**

6) Para testar se um conjunto $\{ v_1 , v_2 \}$, com dois elementos não nulos, é linearmente independente, usando a observação 4, basta verificar se v_2 é **múltiplo** (combinação linear) de v_1. Pois, $v_1 = a\,v_2$ se e só se $v_2 = \frac{1}{a}\, v_1$, já que ambos vetores são por hipótese não nulos. Ou seja, se um vetor é múltiplo do outro, esse outro também é múltiplo do primeiro. Assim, basta verificar se qualquer um deles é múltiplo do outro.

□

EXEMPLO III.24

Considere o conjunto $C = \{ t^2 + t + 1 ,\ t^2 + 2t - 1 ,\ t + 4 \} \subset P_2$, em que P_2 é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Para verificar se o conjunto C é LI escreve-se o vetor nulo, que nesse caso é a função constante zero, como combinação linear dos três vetores, $t^2 + t + 1$, $t^2 + 2t - 1$ e $t + 4$.

$\overline{0} = 0\,t^2 + 0\,t + 0 \equiv a(t^2 + t + 1) + b(t^2 + 2t - 1) + c(t + 4) \equiv$
$\equiv (a + b)\,t^2 + (a + 2b + c)\,t + (a - b + 4c)$

O sinal $\equiv$ (identicamente igual) é usado para chamar a atenção do leitor que o vetor nulo é a função constante zero e não o número zero, logo a igualdade entre esses vetores deve valer para todos os valores reais t. Isto é, para que dois polinômios sejam iguais é necessário que seus coeficientes sejam iguais. Com isto, igualando os coeficientes do polinômio nulo com os da combinação linear, chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b+c=0 \\ a-b+4c=0 \end{cases}, \quad \text{que resolvendo,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \tfrac{1}{6} L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtém-se a solução única $a = b = c = 0$. Concluindo-se assim que C é LI.

□

EXEMPLO III.25

O conjunto $C = \{ t^2 + t + 1 \ , \ t^2 + 2t - 1 \ , \ t + 4 \}$, do exemplo anterior, gera P_2? Para responder a essa pergunta deve-se tomar um vetor genérico de P_2, por exemplo, $a\,t^2 + b\,t + c$ e tentar escrevê-lo como combinação linear dos elementos do conjunto C. Fazendo essa combinação linear obtém-se:

$$a\,t^2 + b\,t + c \equiv x\,(t^2 + t + 1) + y\,(t^2 + 2t - 1) + z\,(t + 4) \equiv$$
$$\equiv (x + y)\,t^2 + (x + 2y + z)\,t + (x - y + 4z).$$

Se esses vetores são iguais, ou se esses polinômios são identicamente iguais, seus coeficientes devem ser iguais, levando ao sistema:

$\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y + z = b \\ x - y + 4z = c \end{cases}$, que para resolver, usa-se a matriz aumentada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & -1 & 4 & c \end{pmatrix}$.

Escalonando essa matriz, pelo exemplo anterior, chega-se à matriz identidade nas três primeiras colunas, concluindo-se que esse sistema é sempre possível. Dessa forma, mostrou-se que esse conjunto C gera P_2 e, pelo exemplo anterior, que C é linearmente independente.

□

Conjuntos do tipo do exemplo anterior recebem um nome especial:

> Uma **base** de um espaço vetorial V é um subconjunto
>
> $$\beta = \{v_1 \, , v_2 \, , \ldots \, , v_n\} \subset V$$
>
> que é <u>linearmente independente</u> e <u>gera</u> V.

EXEMPLO III.26

O conjunto $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \} \subset R^3$ é uma base do R^3, pois qualquer vetor do R^3 pode ser escrito como combinação linear dos vetores desse conjunto, da seguinte forma: $(x, y, z) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)$, logo gera o R^3. E a única forma de se escrever o vetor nulo, $(0, 0, 0)$, como combinação linear dos vetores do conjunto é fazendo-se os coeficientes da combinação linear $x = y = z = 0$, mostrando que o conjunto é linearmente independente.

□

A base do exemplo anterior, por sua simplicidade, recebe um nome especial, **base canônica do R^3**.

Da mesma forma a base do R^n, $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\} \subset R^n$, recebe o nome de **base canônica do R^n**.

EXEMPLO III.27

Considere o conjunto $\alpha = \{(1, 1), (1, -1)\} \subset R^2$. Esse conjunto α é LI, pois tem somente dois elementos e nenhum deles é múltiplo do outro. Para mostrar que gera o R^2, deve-se tomar um vetor genérico $(x, y) \in R^2$ e mostrar que pode ser escrito como combinação linear de $(1, 1)$ e de $(1, -1)$. Fazendo a combinação linear $(x, y) = a(1, 1) + b(1, -1)$ chega-se ao sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuja matriz aumentada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{pmatrix}$ que escalonando-se obtém-se $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$, concluindo-se que a única solução do sistema é $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$, ou seja, a combinação linear para qualquer x e y é da forma: $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1)$, logo gera. Observe que, como a solução desse sistema é única para todo (x, y), pode-se concluir também dessa maneira que o conjunto é LI. Como α gera o R^2 e é LI, conclui-se que α é outra base do R^2, diferente da base canônica.

||

EXEMPLO III.28

O conjunto S das soluções de um sistema homogêneo $AX = 0$, com A sendo uma matriz de ordem mxn, é um subespaço do R^n. Para encontrar uma base para S, resolve-se esse sistema.

Tome como exemplo, o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando-se a matriz A obtém-se $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que leva ao sistema

$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 \quad -x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 \quad + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. Passando-se as variáveis livres x_3 e x_5 para o outro lado das igualdades e acrescentando-se as equações $x_3 = x_3$ e $x_5 = x_5$ o

sistema fica $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_5 \\ x_2 = -2x_3 - x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$.

Esse sistema final pode ser escrito na forma matricial, obtendo-se a solução:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$, mostrando que os vetores $(1, -2, 1, 0, 0)$ e

$(1, -1, 0, -1, 1)$ geram S. Pois o vetor genérico X pode ser escrito como combinação linear deles.

Esses vetores são LI , pois em suas $3^{\underline{as}}$ coordenadas aparece 1 no primeiro vetor e 0 no segundo, e nas $5^{\underline{as}}$ coordenadas aparece 0 no primeiro e 1 no segundo vetor. Assim, resolvendo-se o sistema dessa forma, obtém-se por construção, uma base para S.

Nesse exemplo, $\{(1, -2, 1, 0, 0), (1, -1, 0, -1, 1)\}$ é uma base de S.

□

EXEMPLO III.29

Considere o plano $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$. Para encontrar uma base para esse plano basta resolver o sistema $\{x - 2y + 3z = 0$, usando o mesmo processo do exercício anterior. Nesse caso, a matriz do sistema já está escalonada. As variáveis livres são y e z, que passando-as para o outro lado da igualdade obtém-se a equação na forma $x = 2y - 3z$.

Acrescentando-se ao sistema as duas equações com as variáveis livres, $y = y$ e $z = z$, chega-se ao seguinte sistema $\begin{cases} x = 2y - 3z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ que dá a seguinte solução: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$, obtendo-se, por construção, uma base para o plano: $\{ (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \}$.

$\square$

EXEMPLO III.30

Dado o subconjunto $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{2x2}$, para mostrar que φ é uma base, deve-se tomar um vetor genérico de M_{2x2}, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e tentar escrevê-lo como combinação linear de φ. Assim, a combinação linear é: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z+t & x-y-t \\ x+y-t & x-z+t \end{pmatrix}$, que igualando-se os coeficientes dessas matrizes chega-se ao sistema $\begin{cases} x+z+t=a \\ x-y-t=b \\ x+y-t=c \\ x-z+t=d \end{cases}$ cuja matriz aumentada é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 0 & -1 & c \\ 1 & 0 & -1 & 1 & d \end{pmatrix}$.

Escalonando-se chega-se a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{a+b+c+d}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{c-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a-d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a-b-c+d}{4} \end{pmatrix}$ fornecendo a solução $x = (a + b + c + d) / 4$, $y = (c - b) / 2$, $z = (a - d) / 2$ e $t = (a - b - c + d) / 4$. Como esse sistema é possível para toda matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, φ gera M_{2x2} e como o sistema é determinado, isto é, a solução é única qualquer que seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, φ é LI, concluindo-se que φ é uma base de M_{2x2}.

$\square$

EXEMPLO III.31

O subconjunto $C = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ do R^2 é uma base desse espaço?

Como nos exemplos anteriores toma-se um vetor genérico (a, b) e tenta-se escrevê-lo como combinação linear dos elementos de C. Obtém-se assim o sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, cuja matriz aumentada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \end{pmatrix}$ que tem como matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a-b \\ 0 & 1 & 2 & b-a \end{pmatrix}$. Para todo (a, b) esse sistema é possível e consequentemente C gera o R^2, mas o sistema é indeterminado, logo se (a, b) é o vetor nulo, existem infinitas soluções para a equação vetorial $x(1,1) + y(1,2) + z(1,3) = (0,0)$, concluindo-se que C não é base, pois é LD.

A solução do sistema é $x = z$ e $y = -2z$. Fazendo $z = 1$ chega-se a um exemplo de uma dessas combinações lineares:

$(1,1) - 2(1,2) + (1,3) = (0,0)$, ou ainda, escrevendo de outra forma: $(1,3) = 2(1,2) - (1,1)$. Isto mostra que o vetor $(1,3)$ é combinação linear dos outros e pode-se retirá-lo do conjunto C, sem alterar o subespaço gerado por ele, isto é, o conjunto $C' = \{(1,1), (1,2)\}$ continua gerando o R^2.

Observe que as contas ao retirar o vetor $(1,3)$ de C são as mesmas anteriores retirando-se das matrizes acima a terceira coluna e a variável z. Nesse caso, a matriz escalonada da matriz aumentada a ser obtida é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a-b \\ 0 & 1 & b-a \end{pmatrix}$, fazendo com que o sistema seja possível e determinado, concluindo-se que C' é uma base do R^2.

□

TEOREMA III.1

Se $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente mas gera o espaço vetorial V, não nulo, então pode-se excluir vetores de C até obter uma base de V.

Demonstração

"⇒" Como C é LD, um dos vetores é combinação linear dos restantes. Suponha, sem perder a generalidade, que esse vetor seja v_n, ou seja,

$$v_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{n-1} v_{n-1} \qquad (*)$$

Se um vetor u está em V, ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos de C. Dessa forma, tem-se a combinação linear:

$$u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$$

substituindo a equação (*) no lugar de v_n obtém-se:

$$u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-1} v_{n-1})\text{, ou ainda,}$$

$$u = (b_1 + b_n a_1) v_1 + (b_2 + b_n a_2) v_2 + \dots + (b_{n-1} + b_n a_{n-1}) v_{n-1} .$$

Isso mostra que, se for retirado o vetor que é combinação linear dos restantes, o conjunto sem esse vetor continua gerando V.
Se após retirar o vetor o conjunto tornar-se LI, obteve-se uma base. Senão, aplica-se o mesmo processo, ou seja, retira-se o vetor que é combinação linear dos restantes.
Como em C existem inicialmente apenas n vetores, esse processo terá que parar antes que todos sejam retirados. Pois, se for retirado vetores de C, até ficar com um único vetor e mesmo assim continuar gerando V, esse vetor será não nulo porque, por hipótese, o espaço vetorial V é não nulo.
Dessa forma, obtém-se um subconjunto de C, diferente do vazio, que gera V e é LI, ou seja, é uma base de V.

$\square$

TEOREMA III.2

Se $V = [v_1 , v_2 , \dots , v_n]$ e $m > n$ então $\{ u_1 , u_2 , \dots , u_m \}$ é LD.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Como v_1, v_2, ... e v_n geram V, existem p vetores dentre esses que formam uma base de V. Suponha que essa base seja $\beta = \{v_1 , v_2 , \dots , v_p\}$.
Para ver que $\{ u_1 , u_2 , \dots , u_m \}$ é LD, tome a seguinte combinação linear:

$$0 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_m u_m = \sum_{k=1}^{m} x_k u_k \qquad (*)$$

Os vetores u_k, $k = 1, \dots , m$, podem ser escritos como combinação linear da base β, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1p}v_p = \sum_{j=1}^{p} a_{1j}v_j \\ u_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2p}v_p = \sum_{j=1}^{p} a_{2j}v_j \\ \vdots \\ u_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mp}v_p = \sum_{j=1}^{p} a_{mj}v_j \end{cases}$$

. Substituindo-se u_k na equação (*) obtém-se:

$$0 = \sum_{k=1}^{m}\left(x_k \sum_{j=1}^{p} a_{kj} v_j\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}(x_k a_{kj} v_j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}(a_{kj} x_k v_j) = \sum_{j=1}^{p}\left[\sum_{k=1}^{m}(a_{kj} x_k)\right] v_j,$$

ou seja,

$$0 = \sum_{j=1}^{p}\left[\sum_{k=1}^{m}(a_{kj} x_k)\right] v_j = \sum_{k=1}^{m}(a_{k1} x_k) v_1 + \sum_{k=1}^{m}(a_{k2} x_k) v_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(a_{kp} x_k) v_p.$$

Como β é base, o conjunto $\{ v_1 , v_2 , \ldots , v_p \}$ é LI, e assim, a única maneira de escrever o vetor nulo como combinação linear dos elementos de β é com todos os coeficientes iguais a zero.

Assim, $\sum_{k=1}^{m}(a_{k1} x_k) = \sum_{k=1}^{m}(a_{k2} x_k) = \ldots = \sum_{k=1}^{m}(a_{kp} x_k) = 0.$

Isso leva ao sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1p}x_1 + a_{2p}x_2 + \cdots + a_{mp}x_m = 0 \end{cases}$ que tem p equações e m incógnitas. Como $m > n > p$, isto é, o sistema tem mais incógnitas do que equações, ele é possível e indeterminado, admitindo solução não nula. Logo, a equação (*) admite infinitas soluções, e assim, $\{ u_1 , u_2 , \ldots , u_m \}$ é LD.

$\square$

EXEMPLO III.32

Considerando o R^3 e sua base canônica, que por ser base gera o R^3, pode-se concluir, usando o teorema anterior, que o conjunto $A = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 \}$ é LD, quaisquer que sejam os vetores de A.

Porque A tem 4 vetores e a base canônica tem apenas 3 vetores.

Por outro lado, a base canônica do R^3 é LI, logo o conjunto $B = \{ v_1 , v_2 \}$ não pode gerar o R^3.

Porque B só tem 2 vetores e isso iria contradizer o teorema anterior e o fato da base canônica ser LI.

$\square$

TEOREMA III.3

Se uma base de um espaço vetorial V tem n vetores então qualquer outra base de V também tem n vetores.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Dadas duas bases de V, $\beta = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ e $\alpha = \{ u_1, u_2, \dots, u_m \}$ tem-se que:

Como β é LI e α gera V, pelo teorema anterior, $n \leq m$.

Por outro lado, Como α é LI e β gera V, $m \leq n$.

Concluindo-se que $m = n$.

□

O número de elementos de uma base de um espaço vetorial V é denominado **dimensão** de V e é denotado por $\boldsymbol{dim\ V}$.

EXEMPLO III.33

Como a base canônica do R^n tem n vetores, toda base do R^n também tem n vetores e assim a dimensão do R^n é n. Escreve-se $\boldsymbol{dim\ R^n = n}$.

□

EXEMPLO III.34

O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de M_{2x2}, logo $dim\ M_{2x2} = 4$.

Da mesma forma, pode-se construir uma base de M_{mxn} de forma que, cada vetor dessa base tem 1 em apenas um elemento e 0 nos demais elementos da matriz. Isso mostra que $\boldsymbol{dim\ M_{mxn} = mn}$, pois toda matriz de M_{mxn} tem mn elementos. Assim, $dim\ M_{5x3} = 15$.

□

EXEMPLO III.35

Em P_2 = *{polinômios de grau menor ou igual a 2}* pode-se considerar o conjunto $\beta = \{ t^2, t, 1 \}$.

Como um polinômio genérico de P_2 é da forma $u = x t^2 + y t + z$, e esse vetor genérico u está escrito como combinação linear de β, segue que β gera P_2.

Para ver que β é LI escreva o vetor nulo, que é a função constante igual a zero, como combinação linear dos vetores de β, $\bar{0} \equiv x t^2 + y t + z$.

Como esses dois polinômios têm que ser iguais, deve-se igualar seus coeficientes, e dessa forma, $x = y = z = 0$, concluindo-se que β é LI.

Como β é LI e gera P_2, β é base de P_2, logo, $dim\ P_2 = 3$.

Da mesma maneira, mostra-se que $\{t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1\}$ é uma base de P_n, e assim, $\boldsymbol{dim\ P_n = n+1}$.

□

EXEMPLO III.36

O conjunto $\{t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1\}$ é LI para qualquer valor do número inteiro n e é um subconjunto de $C = \{f: R \to R \mid f \text{ é uma função contínua}\}$ ou até do conjunto D das funções deriváveis. Se $dim\ C = m$, tomando $n > m$, vê-se que há uma contradição, pois qualquer base de C gera, mas existe um conjunto LI com mais elementos que essa base. Como esse espaço possui subconjunto LI com qualquer número de elementos, diz-se que C **tem dimensão infinita**. Da mesma forma, D e $F = \{f: R \to R\}$ também têm dimensão infinita.

□

EXEMPLO III.37

O espaço vetorial $O = \{\bar{0}\}$, formado somente pelo vetor nulo não tem base. O único vetor do espaço O é o $\bar{0}$, mas esse é LD e não pode ser base. Diz-se então que a **dimensão de O é zero**, e escreve-se $\boldsymbol{dim\ O = 0}$.

□

TEOREMA III.4

Se $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente e u não pode ser escrito como combinação linear dos vetores de C então $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u\}$ também é linearmente independente.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Considere a combinação linear

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + b\,u = 0.$$

Se $b \neq 0$, então $u = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \dots - \frac{a_n}{b} v_n$ contrariando a hipótese. Logo, $b = 0$, e então $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ e como C é linearmente independente implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

□

COROLÁRIO III.1

Se $C = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subset V$ é linearmente independente e $dim\ V = n$, com $n > p$, então podem ser acrescentados $n - p$ vetores a C para obter uma base.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Se $v_1, v_2, \dots$ e v_p gerassem V teríamos uma base com menos do que n vetores. Assim, existe um vetor de V que não é combinação linear dos vetores de C. Acrescentando esse vetor a C o conjunto continua LI. Esse processo pode ser repetido até que o conjunto fique com n vetores. E para isso, é necessário acrescentar $n - p$ vetores a C para obter uma base.

□

EXEMPLO III.38

O conjunto $C = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é LI, mas não gera o R^3. Isso pode ser visto ao tentar escrever o vetor genérico (a,b,c) como combinação linear dos vetores de C:

$(a,b,c) = x(1,1,0) + y(0,0,1) = (x,x,y)$.

Obtendo o sistema: $\begin{cases} x = a \\ x = b \\ y = c \end{cases}$, que escalonando chega ao sistema $\begin{cases} x = a \\ y = c \\ 0 = b - a \end{cases}$.

Assim, só gera se o vetor (a,b,c) tiver $a = b$.

Logo, por exemplo, o vetor $(1,-1,0)$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores de C.

Então, pelo teorema, $\{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$ é LI e, pelo corolário, é uma base do R^3.

□

TEOREMA III.5

Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base do espaço vetorial V e $u \in V$ então u pode ser escrito como combinação linear de β e essa combinação linear é única.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Qualquer vetor u pode ser escrito como combinação linear de β porque β gera V. Suponha que u pode ser escrito como combinação linear de β das seguintes maneiras: $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ e também $u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$.

Subtraindo-se as duas expressões fica:

$u - u = (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) - (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n)$

$\therefore\ 0 = (a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n$.

Como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LI, todos os coeficientes dessa combinação linear são nulos, e tem-se que,

$a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ..., $a_n - b_n = 0$, ou seja, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, e assim por diante, $a_n = b_n$. Mostrando que a combinação linear é única.

□

Se $u \in V$ é escrito como combinação linear de uma base β da forma $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, denomina-se os coeficientes dessa combinação linear $a_1, a_2, \dots, a_n$ por **coordenadas de u em relação à base β** e denota-se por $u|_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

EXEMPLO III.39

A única maneira de se escrever o vetor $u = (-3, 7)$ como combinação linear da base $\beta = \{(1, -1), (1, 1)\}$ é $u = -5(1, -1) + 2(1, 1)$.

Assim, se escreve que $u|_\beta = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

III.5 – Obtenção de Base a Partir de Geradores no R^n

Quando é fornecido um conjunto de geradores para um subespaço do R^n, para se obter uma base é preciso eliminar os vetores que são combinações lineares dos restantes. Mas como saber qual dos vetores deve ser eliminado? O processo descrito nessa seção permite obter uma base para o subespaço gerado, em geral uma base mais simples, usando escalonamento de matrizes.

Se $S = [v_1, v_2, \dots, v_m] \subseteq R^n$ é um subespaço gerado por m vetores, que não se sabe se são LI ou LD, e deseja-se obter uma base para S, deve-se proceder da seguinte maneira:

Coloque os vetores como linhas de uma matriz A. O que acontece quando é aplicado operações elementares nas linhas de A?

- Trocar duas linhas de posição, $L_i \leftrightarrow L_k$, é o mesmo que trocar a ordem dos geradores do espaço, gerando o mesmo espaço, $S = [v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_m] = [v_1, \dots, v_k, \dots, v_i, \dots, v_m]$
- Multiplicar uma linha da matriz A, por um número $c \neq 0$, $L_i \leftarrow c\,L_i$, é o mesmo que multiplicar o gerador v_i de S por c, gerando também o mesmo espaço S, $S = [v_1, \dots, c\,v_i, \dots, v_m]$
- Aplicando-se em A a última operação elementar: substituindo-se uma linha por ela mais uma constante c vezes outra linha, $L_i \leftarrow L_i + c\,L_k$, provoca nos geradores de S uma operação semelhante, que não altera o subespaço gerado, $S = [v_1, \dots, v_i + c\,v_k, \dots, v_k, \dots, v_m]$.

  O leitor pode mostrar como exercício que:

$$S = [v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_m] = [v_1, \dots, v_i + c\,v_k, \dots, v_k, \dots, v_m].$$

Assim, aplicando-se operações elementares nas linhas da matriz A, o subespaço gerado pelas linhas de A fica inalterado. Quando se obtém a matriz reduzida por linhas à forma escada, por construção, as linhas dessa matriz escalonada geram o mesmo espaço que as linhas de A e considerando-se somente as linhas não nulas, essas são LI e portanto formam uma base para o subespaço original.

Como, em algumas coordenadas desses novos geradores, aparece o número 1 e nos demais geradores 0, esses vetores ficam mais simples para fazer futuras contas envolvendo a base obtida.

EXEMPLO III.40

Para obter uma base para o subespaço do R^5:
$S = [\,(1,1,0,1,0)\,,\,(1,2,1,2,1)\,,\,(-1,0,1,0,1)\,,\,(0,1,2,3,4)\,,\,(1,3,3,5,5)\,,\,(0,0,0,0,1)\,]$
deve-se colocar esses vetores como linhas de uma matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{que escalonando-se é obtida} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As linhas da matriz R geram o mesmo espaço S, e facilmente identificam-se as linhas que devem ser eliminadas, as linhas nulas, pois as linhas não nulas são visivelmente LI. Concluindo-se assim que o subespaço
$S = [\,(1,0,0,2,0)\,,\,(0,1,0,-1,0)\,,\,(0,0,1,2,0)\,,\,(0,0,0,0,1)\,]$
e como esses vetores são LI,
$\beta = \{\,(1,0,0,2,0)\,,\,(0,1,0,-1,0)\,,\,(0,0,1,2,0)\,,\,(0,0,0,0,1)\,\}$
é uma base de S, e assim, $dim\ S = 4$.

□

ATENÇÃO: Muitos leitores confundem esse processo de obtenção de base com resolução de sistemas. No caso desse processo, o que está sendo feito é usar um método que simplifica os geradores do espaço sem alterar o subespaço gerado. Não se deve confundir esse processo com o método usado nas seções anteriores. Anteriormente estava tentando escrever um dos vetores como combinação linear dos restantes, levando-se a um sistema homogêneo, e a partir daí eliminando vetores. Aqui, nessa seção, os vetores são colocados combinação linear a_1, a_2, ..., a_n por **coordenadas de u em relação à base β** e denota-se por $u|_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

EXEMPLO III.39 ——————————

A única maneira de se escrever o vetor $u = (-3, 7)$ como combinação linear da base $\beta = \{(1, -1), (1, 1)\}$ é $u = -5(1, -1) + 2(1, 1)$.

Assim, se escreve que $u|_\beta = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

—————————— □

III.5 – Obtenção de Base a Partir de Geradores no R^n

Quando é fornecido um conjunto de geradores para um subespaço do R^n, para se obter uma base é preciso eliminar os vetores que são combinações lineares dos restantes. Mas como saber qual dos vetores deve ser eliminado? O processo descrito nessa seção permite obter uma base para o subespaço gerado, em geral uma base mais simples, usando escalonamento de matrizes.

Se $S = [v_1, v_2, \dots, v_m] \subseteq R^n$ é um subespaço gerado por m vetores, que não se sabe se são LI ou LD, e deseja-se obter uma base para S, deve-se proceder da seguinte maneira:

Coloque os vetores como linhas de uma matriz A. O que acontece quando é aplicado operações elementares nas linhas de A?

- Trocar duas linhas de posição, $L_i \leftrightarrow L_k$, é o mesmo que trocar a ordem dos geradores do espaço, gerando o mesmo espaço,
  $S = [v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_m] = [v_1, \dots, v_k, \dots, v_i, \dots, v_m]$

- Multiplicar uma linha da matriz A, por um número $c \neq 0$, $L_i \leftarrow c L_i$, é o mesmo que multiplicar o gerador v_i de S por c, gerando também o mesmo espaço S, $S = [v_1, \dots, c v_i, \dots, v_m]$

- Aplicando-se em A a última operação elementar: substituindo-se uma linha por ela mais uma constante c vezes outra linha, $L_i \leftarrow L_i + c L_k$, provoca nos geradores de S uma operação semelhante, que não altera o subespaço gerado, $S = [v_1, \dots, v_i + c v_k, \dots, v_k, \dots, v_m]$.
  O leitor pode mostrar como exercício que:

$$S = [\, v_1 , \dots , v_i , \dots , v_k , \dots , v_m \,] = [\, v_1 , \dots , v_i + c\, v_k , \dots , v_k , \dots , v_m \,].$$

Assim, aplicando-se operações elementares nas linhas da matriz A, o subespaço gerado pelas linhas de A fica inalterado. Quando se obtém a matriz reduzida por linhas à forma escada, por construção, as linhas dessa matriz escalonada geram o mesmo espaço que as linhas de A e considerando-se somente as linhas não nulas, essas são LI e portanto formam uma base para o subespaço original.

Como, em algumas coordenadas desses novos geradores, aparece o número 1 e nos demais geradores 0, esses vetores ficam mais simples para fazer futuras contas envolvendo a base obtida.

EXEMPLO III.40

Para obter uma base para o subespaço do R^5:

$S = [\,(1,1,0,1,0)\,,\,(1,2,1,2,1)\,,\,(-1,0,1,0,1)\,,\,(0,1,2,3,4)\,,\,(1,3,3,5,5)\,,\,(0,0,0,0,1)\,]$

deve-se colocar esses vetores como linhas de uma matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{que escalonando-se é obtida} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As linhas da matriz R geram o mesmo espaço S, e facilmente identificam-se as linhas que devem ser eliminadas, as linhas nulas, pois as linhas não nulas são visivelmente LI. Concluindo-se assim que o subespaço

$S = [\,(1,0,0,2,0)\,,\,(0,1,0,-1,0)\,,\,(0,0,1,2,0)\,,\,(0,0,0,0,1)\,]$

e como esses vetores são LI,

$\beta = \{\,(1,0,0,2,0)\,,\,(0,1,0,-1,0)\,,\,(0,0,1,2,0)\,,\,(0,0,0,0,1)\,\}$

é uma base de S, e assim, $dim\, S = 4$.

□

ATENÇÃO: Muitos leitores confundem esse processo de obtenção de base com resolução de sistemas. No caso desse processo, o que está sendo feito é usar um método que simplifica os geradores do espaço sem alterar o subespaço gerado. Não se deve confundir esse processo com o método usado nas seções anteriores. Anteriormente estava tentando escrever um dos vetores como combinação linear dos restantes, levando-se a um sistema homogêneo, e a partir daí eliminando vetores. Aqui, nessa seção, os vetores são colocados como linhas de uma matriz e no outro eles aparecem como colunas da matriz de um sistema.

□

EXEMPLO III.41

Para se obter equações para o subespaço S do exemplo anterior, usa-se a base $\beta = \{(1,0,0,2,0),(0,1,0,-1,0),(0,0,1,2,0),(0,0,0,0,1)\}$ que foi obtida no processo.

Deseja-se saber, quais são as condições entre as coordenadas do vetor genérico $X = (x,y,z,t,s) \in R^5$ para que ele pertença a S.

Se X pertence a S, ele pode ser escrito como combinação linear da base β. Assim, $X = (x,y,z,t,s) = a(1,0,0,2,0) + b(0,1,0,-1,0) + c(0,0,1,2,0) + d(0,0,0,0,1)$ levando ao sistema, cuja forma matricial é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix}$ e que tem como matriz aumentada

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 2 & -1 & 2 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix}$. A sua matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2x+y-2z \end{pmatrix}$.

Para que esse sistema seja possível, como a matriz do sistema tem uma linha nula, deve-se ter $t - 2x + y - 2z = 0$.

Logo, a equação de S é $S = \{(x,y,z,t,s) \in R^5 \mid t - 2x + y - 2z = 0\}$.

Observe que, considerando-se que a equação de S vale, o sistema é possível e determinado, isto é, tem solução única para todo $X \in S$, mostrando que β é realmente uma base de S.

E as coordenadas de um vetor genérico X na base β é $X|_\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix}$.

Ainda mais, $\dim S = 4$, pois β tem 4 vetores do R^5.

Para saber se um vetor do R^5 pertence a S e para escrevê-lo como combinação linear da base β é muito simples.

O vetor $v = (1, 1, 1, 3, 1)$ pertence a S, pois as coordenadas de v satisfazem à equação de S e também $v|_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

EXEMPLO III.42

Outra forma de se obter equações para o subespaço S dos exemplo anteriores, que também pode usar a base
$\beta = \{(1, 0, 0, 2, 0), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$
é a seguinte:
Deseja-se que o vetor genérico $X = (x, y, z, t, s) \in R^5$ seja combinação linear dos vetores da base β de S. Se na matriz R do exemplo III.40 for adicionada uma linha com esse vetor genérico, ao se escalonar novamente essa matriz, a linha adicionada deve ser nula, obtendo-se a equação ou equações.

A matriz do exemplo III.40 é $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Retrando-se as linhas nulas

e adicionando $X = (x, y, z, t, s)$ obtém-se a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t & s \end{pmatrix}$.

Que escalonando-se chega-se a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-2x+y-2z-s & 0 \end{pmatrix}$. A última linha deve ser nula, logo, $t - 2x + y - 2z = 0$.

E a equação de S é a mesma que foi obtida anteriormente:
$S = \{(x, y, z, t, s) \in R^5 \mid t - 2x + y - 2z = 0\}$.

□

III.6 – Exercícios

1) Dê exemplos de:
   a) Um subespaço vetorial de $F = \{ \textit{funções de R em R} \}$ e de um vetor desse espaço.
   b) Um subespaço vetorial de R^5 e de um vetor desse espaço.
   c) Um subespaço vetorial do $\{ \textit{matrizes diagonais nxn} \}$ e de um vetor desse espaço.

2) Dê exemplos de um subespaço vetorial do R^3:
   a) Que tenha dimensão 1, dando uma base e equações para esse subespaço.
   b) Que tenha dimensão 2, dando uma base e uma equação para esse subespaço.
   c) Que tenha dimensão 3, dando uma base para esse subespaço.

3) Dê exemplo de um subconjunto do R^3 que não é um subespaço vetorial.

4) Dê exemplos de dois subespaços do R^2:
   a) Cuja união não é um subespaço do R^2.
   b) Cuja união é um subespaço do R^2.

5) Escreva, se possível, o vetor u como combinação linear do conjunto C:
   a) $u = (3, 0, 2, 2, 2)$ e
   $C = \{ (1,1,1,1,1), (1,0,1,0,1), (1,-1,0,0,0), (0,0,0,1,0) \} \subset R^5$
   b) $u = (3, 1, -1, -3)$ e $C = \{ (1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1) \} \subseteq R^4$
   c) $u = (1, 1, 0, -1)$ sendo C o mesmo conjunto do item anterior.
   d) $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_{2x2}$.
   e) $u = 1 - t^2$ e $C = \{ 1 + t + t^2, \ 1 - t, \ 1 + 2t^2 \} \subseteq P^2$.

6) Determine a equação dos subespaços:
   a) $[(1,1,1,1,1), (1,0,1,0,1), (1,-1,0,0,0), (0,0,0,1,0)] \subseteq R^5$
   b) $[(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)] \subseteq R^4$
   c) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \subseteq M_{2x2}$.
   d) $[1 + t + t^2, 1 - t, 1 + 2t^2] \subseteq P_2$.

7) Determine uma base para o espaço vetorial abaixo e diga qual é a sua dimensão:
   a) $S = [(0,1,2,-1), (1,1,4.0), (1,2,2,-5), (0,0,1,1), (1,0,1,0)] \subseteq R^4$.
   b) $U = \{ (x, y, z, t, q) \in R^5 \mid x + y + z = 0, \ x - t - 2q = 0 \ e \ z + t - 2q = 0 \}$.
   c) $W = [1 + t, \ 2 - t^2, \ t + t^2] \subseteq P_2$.

d) $V = \{ (x , y , x , t) \in R^4 \mid x + y + z + t = 0 \}$.

e) $X = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \mid a - 2b + 3c - d = 0 \ , \ a - 2b + 3c + d = 0$ e $2a - 5b + 6c = 0 \}$.

8) Mostre que os conjuntos U , W , V e X , do exercício anterior, são espaços vetoriais.

9) Dê exemplo de uma base do R^3, de modo que, seus vetores sejam dois a dois perpendiculares e que um desses vetores seja perpendicular ao plano de equação $x + y + z = 0$.

10) Qual é a dimensão do seguinte subespaço:
$\{ (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \in R^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}$?

11) Dado $\{ (1 , 1 , 1 , 0) , (1 , 2 , 3 , 0) , (0 , 1 , 2 , 0) , (0 , 1 , 1 , 1) \} \subset R^4$:
a) Verifique se o conjunto é LI.
b) Encontre, dentre esses vetores, uma base para o subespaço gerado pelos vetores do conjunto dado.
c) Qual é a dimensão desse subespaço gerado?

12) Se S é um subespaço vetorial de P_2 = *{polinômios de grau menor ou igual a 2}*, gerado pelos vetores $t^2 - t + 1$, $t^2 - 2t + 2$ e $2t^2 - t + 1$:
a) Escolha, dentre os geradores dados de S, uma base para S.
b) Pode-se dizer que $S = P_2$? Justifique sua resposta.

13) Mostre que:
a) Se k_1 e $k_2 \in R$ e $\{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ é LI então $\{ k_2 v_2 , v_1 , v_3 + k_1 v_1 \}$ é LI.
b) $[v_1 , v_2 , v_3] = [v_1 , v_2 , v_3 + k v_1] \ \forall k \in R$.
c) Se v é um vetor não nulo, então $\{ v \}$ é LI.
d) Se A é um conjunto LD e $A \subseteq B$, então B é LD.
e) Se A é um conjunto LI e $B \subseteq A$, então B é LI.
f) Se $A = \{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$ é LI e $B = \{ v_1 , v_2 , ... , v_n , w \}$ é LD, então w é uma combinação linear de $v_1 , v_2 , ... , v_n$.
g) Qualquer conjunto que contém o vetor nulo é LD.

14) a) Mostre $\beta = \{ (1 , 2 , 3) , (0 , 1 , 2) , (0 , 0 , 1) \}$ é uma base do R^3.
b) Determine as coordenadas do vetor $v = (5 , 4 , 2)$ em relação a base β.
c) Determine o vetor w do R^3 cujo vetor coordenada em relação a base β é $w|_\beta = (2 \quad -3 \quad 4)^t$.
d) Determine as coordenadas dos vetores $v_1 = (3 , 2 , 1)$, $v_2 = (1 , 1 , 1)$ e $v_3 = (1 , 3 , 4)$ em relação a base β.

15) Considere os subespaços do R^4,

$W = [(1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, 1, 3, 1)]$ e

$U = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x + y + z + t = 0 \ \ e \ \ x - y + z - t = 0\}$.

a) Determine uma base β para U e diga qual é a dimensão de U.
b) Determine uma base δ para W e diga qual é a dimensão de W.
c) Encontre equações para W.
d) Determine uma base λ para $U \cap W$ e diga qual é a dimensão de $U \cap W$.
e) Determine uma base α para $U + W$ e diga qual é a dimensão de $U + W$.

16) Considere os subespaços do R^6,

$W = [(0,1,1,1,1,1), (1,1,2,0,0,0), (0,0,1,2,4,3), (3,5,7,2,2,2), (0,0,0,1,1,1)]$

e $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in R^6 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0 \ , \ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \ ,$
$x_1 - x_4 + 2x_5 = 0 \ \ e \ \ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 + x_6 = 0\}$.

a) Determine uma base β para U e diga qual é a dimensão de U.
b) Determine uma base δ para W e diga qual é a dimensão de W.
c) Encontre equações para W.
d) Determine uma base λ para $U \cap W$ e diga qual é a dimensão de $U \cap W$.
e) Determine uma base α para $U + W$ e diga qual é a dimensão de $U + W$.

17) Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e o subconjunto do R^4, $\alpha = \{A^1, A^2, A^3, A^4\}$, em que A^i é a coluna i da matriz A, com $i = 1, 2, 3, 4$.

a) Determine A^{-1} e calcule <u>simultaneamente</u> o determinante de A.
b) Resolva o sistema $AX = b$ usando a inversa de A.
c) Use as contas dos itens anteriores para saber se α é base do R^4. Justifique.
d) Escreva o vetor $b \in R^4$ como combinação linear de α.

18) Dados $v = 1 - 2t$, $w|_\varphi = (1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1)^t$ e

$\varphi = \{t^3 + t^2 + t + 1, \ t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \ t^2 + 2t + 4, \ t^3 + 2t^2 + 4t + 4\} \subset P_3$

a) Mostre que φ é uma base de P_3.
b) Determine $v|_\varphi$.
c) Ache w.

19) Dados $\varphi = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2x2}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $w|_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

a) Mostre que φ não é uma base de M_{2x2}.

b) Complete φ para obter uma base β de M_{2x2}. (A base β deve conter φ).
c) Determine $v|_{\beta}$.
d) Ache w.

20) Se $\beta = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ é uma base do espaço vetorial V e sabendo-se que

$$u|_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e } w|_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

a) Mostre que $(u + w)|_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Mostre que $(2u - 3w)|_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

21) a) Mostre que se $\{ u , v \}$ é linearmente independente, então $\{ u + v , u - v \}$ também é linearmente independente.
b) Encontre uma base para o R^3 de forma que, os vetores $v_1 = (1 , 2 , 3)$ e $v_2 = (3 , 2 , 1)$ façam parte dessa base.

22) Sejam V um espaço vetorial real e $A = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \} \subset V$:
a) Defina: S é um subespaço de V.
b) Defina: A é linearmente independente.
c) Defina: dimensão de V.
d) Mostre que: se o conjunto $\{ u , v \}$ é linearmente independente então $\{ 3u + v , 2u - v \}$ também é linearmente independente.
e) Mostre que: se o conjunto $\{ u , v \}$ é linearmente independente e os números reais a , b , c e d são tais que $ad - bc \neq 0$, então o conjunto $\{ au + cv , bu - dv \}$ também é linearmente independente.

23) Seja S o subespaço do R^4 que é gerado pelas colunas da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

a) Escalonando A obtenha uma base para S.
b) Qual é a relação entre a dimensão de S e o número de linhas não nulas da reduzida por linhas à forma escada de A ?
c) Escalonando A^t obtenha uma base para S.
d) Qual é a relação entre a dimensão de S e o número de linhas não nulas da reduzida por linhas à forma escada de A^t ?

24) Dado $S = \{ A \in M_{2x2} \mid A \text{ é simétrica} \}$:

a) Mostre que S é um subespaço de M_{2x2}.

b) Encontre uma base para S.

c) Qual é a dimensão de S ?

d) Mostre que $dim \{ A \in M_{nxn} \mid A \text{ é simétrica} \} = \dfrac{n^2 + n}{2}$.

25) Considere os subconjuntos dos respectivos espaços dados abaixo. Descubra qual deles é base. Se não for base diga o motivo. Qual é a dimensão dos subespaços gerados pelos vetores desses subconjuntos?

a) $\{ (1, 0, 1), (2, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 1, 1) \} \in R^3$.

b) $\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \} \in M_{2x2}$.

c) $\{ t^2 + t + 1, 2t - 1 \} \in P_2$.

d) $\{ (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \} \in R^4$.

26) Sejam S_1 e S_2 dois subespaços do espaço vetorial V, tais que, $S_1 \cap S_2$ é a origem e $S_1 + S_2 = V$. Se $\beta_1 = \{ v_1, \ldots, v_p \}$ é base de S_1 e $\beta_2 = \{ w_1, \ldots, w_q \}$ é base de S_2, mostre que:

a) Se $w \in S_2$, então w só é combinação linear de β_1 se $w = 0$.

b) Se $w \in S_2$ e $w \neq 0$, então $\{ v_1, \ldots, v_p, w \}$ é LI.

c) $\beta_1 \cup \beta_2$ é LI.

d) $\beta_1 \cup \beta_2$ é uma base de V.

e) $dim\ V = dim\ S_1 + dim\ S_2$.

27) Mostre que substituindo o gerador v_i de S por $v_i + c\, v_k$, para $c \in R$, o subespaço não é alterado, isto é,

$S = [v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots, v_m] = [v_1, \ldots, v_i + c\, v_k, \ldots, v_k, \ldots, v_m]$.

28) Mostre que:

a) Se $dim\ V = n$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI então β é base de V.

b) Se $dim\ V = n$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gera V então β é base de V.

c) Se $dim\ V = n$ e $u \in V$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores LI $v_1, \ldots$ e v_{n-1} então $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, u\}$ é uma base de V.

IV - TRANSFORMAÇÕES LINEARES

IV.1 – Introdução

Uma transformação linear T é uma função entre dois espaços vetoriais reais, de modo que, T deve levar um espaço vetorial (o domínio) em um subespaço do contra domínio.

Quando se estuda o cálculo diferencial, ao se derivar uma função, o que se está fazendo é aproximar essa função por uma transformação linear. Dessa forma, as transformações lineares servem como auxilio na resolução de problemas do cálculo diferencial e integral.

Além disto, se o domínio da transformação linear é o espaço R^n e o contradomínio o R^m, o conjunto dessas transformações lineares está intimamente ligado ao conjunto das matrizes mxn. Assim, as propriedades das matrizes podem ser explicadas usando-se as transformações lineares e vice-versa.

IV.2 – Conceituação das Transformações Lineares

Sejam V e W dois espaços vetoriais reais. Para que uma função $T: V \to W$ tenha a propriedade de levar V em um subespaço de W, é preciso que T tenha as seguintes propriedades:

A função $T: V \to W$ é uma **transformação linear** se e somente se

i) $Tu + Tv = T(u + v)\ \forall\ u, v \in V$.

ii) $T(av) = aTv,\ \forall\ a \in R$ e $v \in V$.

A **imagem de uma função** $T: V \to W$ é o subconjunto de W

$$Im\ T = \{ w \in W \mid \exists v \in V \ com \ T v = w \}.$$

Veja que, como na primeira propriedade da definição, na notação de transformações lineares, algumas vezes não são usados parênteses, como comumente se faz na notação de funções. Usa-se $T v$ no lugar de $T(v)$. Isso é feito para evitar o excesso de parênteses na notação.

Deseja-se mostrar que uma função como a que foi definida acima, isto é, uma transformação linear, faz com que a imagem $Im\ T$ seja um subespaço do contradomínio W.

Observe primeiramente que, com as propriedades da definição de transformação linear, tem-se que $T(O) = O'$, ou seja, T leva o vetor nulo $O \in V$ no vetor nulo $O' \in W$. Pois, se o é o número *zero* dos reais, como $o\, O = O$, segue pela parte *ii* da definição de transformação linear que $T(O) = T(o\, O) = o\, T(O) = O'$. Observe novamente que, aqui aparecem três zeros diferentes: o número real zero, o, o vetor nulo de V, O, e o vetor de nulo de W, O'. O que se mostrou nessa observação é que, numa transformação linear, **o vetor nulo de V sempre é levado por T, no vetor nulo de W.**

EXERCÍCIO ———————————

Mostre que o vetor nulo de V é levado por T no vetor nulo de W, usando apenas a parte i da definição de transformação linear.

TEOREMA IV.1 ———————————

$Im\ T$ é subespaço de W.

Demonstração ———————————

"$\Rightarrow$" Para mostrar que um subconjunto $Im\ T$ é um subespaço do espaço vetorial W, deve-se mostrar que: $Im\ T$ não é vazio e tem as propriedades de fechamento em relação às duas operações: adição e multiplicação por escalar.

i) $Im\ T$ não é vazio, pois como, $T\, O = O'$ segue que $O' \in Im\ T$, o que torna $Im\ T \neq \varnothing$.

ii) Se w_1 e $w_2 \in Im\ T$, isto significa que existem vetores v_1 e v_2 de V tais que, $T\, v_1 = w_1$ e $T\, v_2 = w_2$. Assim, $T\,(v_1 + v_2) = T\, v_1 + T\, v_2 = w_1 + w_2$, o que é o mesmo que dizer que, $w_1 + w_2 \in Im\ T$.

iii) Se $w \in Im\,T$ e $a \in R$, existe um vetor $v \in V$ tal que $T\,v = w$, e dessa forma, $T(a\,v) = a\,T\,v = a\,w$, e consequentemente, $a\,w \in Im\,T$.

□

EXEMPLO IV.1

Considere a função $T{:}R \to R$ tal que $T(x) = 7\,x$. Essa função é uma transformação linear, pois $T(x + y) = 7(x + y) = 7\,x + 7\,y = T(x) + T(y)$ e também, $T(a\,x) = 7(a\,x) = a\,(7\,x) = a\,T(x)$.

□

EXEMPLO IV.2

A função $F{:}R \to R$ tal que $F(x) = x + 1$ não é transformação linear. Isso pode ser visto de diversas maneiras, como por exemplo, $F(0) = 1 \neq 0$, mostrando que F não é transformação linear.
Uma outra forma de ver isto, é calculando-se, por exemplo, $F(1 + 3) = F(4) = 5$ e $F(1) + F(3) = 2 + 4 = 6 \neq 5$. Isso contraria a propriedade i da definição.
Observe que a função $G{:}R \to R$ tal que $G(x) = x^2$ também não é uma transformação linear, pois $G(1 + 3) = G(4) = 16$ e $G(1) + G(3) = 1 + 9 = 10 \neq 16$. Mas não pode ser usada, para mostrar isso, a primeira maneira que foi empregada para mostrar que F não é transformação linear, pois para a função G, $G(0) = 0$.
Logo, ao mostrar que em alguma função $F(0) \neq 0$, isso diz que F não é transformação linear, mas se $F(0) = 0$, nada pode ser afirmado sobre F ser ou não transformação linear.

□

EXEMPLO IV.3

No exemplo IV.1, poderia ser usado no lugar do número 7 qualquer outro número $k \in R$. Assim, qualquer que seja a função $T{:}R \to R$ que tenha a forma $T(x) = k\,x$ seria mostrado, da mesma maneira que naquele exemplo, que é transformação linear.

□

EXEMPLO IV.4

Considere a função $T{:}R^2 \to R^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 3x)$.
Essa função é uma transformação linear, pois, dados dois vetores quaisquer, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do R^2 e um número real a:
$T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 3(x_1 + x_2))$
$= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, 3\,x_1 + 3\,x_2) = (x_1 + y_1, 3\,x_1) + (x_2 + y_2, 3\,x_2) =$
$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$.
E também,
$T[a\,(x, y)] = T(a\,x, a\,y) = (a\,x + a\,y, 3\,a\,x) = a\,(x + y, 3x) = a\,T(x, y)$.

□

EXEMPLO IV.5

Sejam $P_n = \{$ *polinômios de grau menor ou igual a* $n \}$ e $D{:}P_n \rightarrow P_{n-1}$ que leva um polinômio $f(t)$ em sua derivada $D(f) = f'(t)$.
Essa função D é uma transformação linear, pois, do cálculo, sabe-se que a derivada de uma soma é a soma das derivadas e que a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.
Ou seja, se f e g são dois polinômios quaisquer de P_n, então,
$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$.
E também, se $a \in R$, segue que $D(af) = (af)' = af' = a\,D(f)$.

□

EXEMPLO IV.6

Se $C = \{f{:}R \rightarrow R \mid f$ *é uma função contínua* $\}$ e $\Im = \{f{:}R \rightarrow R\}$, sejam $a \in R$ e $T{:}C \rightarrow \Im$ uma função tal que $T(f) = \int_a^x f(t)\,dt$ (como no teorema Fundamental do Cálculo). T é uma transformação linear, pois, a integral da soma é a soma das integrais e a integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral. Ou seja:

$T(f+g) = \int_a^x f(t) + g(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt = T(f) + T(g)$ e

$T(af) = \int_a^x a\,f(t)\,dt = a\int_a^x f(t)\,dt = a\,T(f)$.

□

EXEMPLO IV.7

Considere uma matriz A de ordem mxn e uma função $T{:}R^n \rightarrow R^m$, tais que: $T(X) = A\,X$. Aqui está sendo suposto que cada um dos vetores X do R^n é uma matrizes coluna $nx1$ e $A\,X$ como o produto da matriz A pela matriz X. Essa função é transformação linear, pois:
$T(X+Y) = A\,(X+Y) = A\,X + A\,Y = T(X) + T(Y)$.
E também, se a é um número real $T(aX) = A\,(aX) = a\,A\,X = a\,T(x)$.

□

O exemplo IV.7 mostra que: qualquer função do R^n no R^m que puder ser colocada na forma $T(X) = A\,X$, em que A é uma matriz mxn, é uma transformação linear.

EXEMPLO IV.8

Considere a função $T{:}R^3 \rightarrow R^4$, tal que:
$T(x, y, z) = (x+y+z\ ,\ 3x-y+3z\ ,\ y+5z\ ,\ 2x+2y-z)$.
Para ver que T é transformação linear, escreva os vetores como colunas da seguinte forma:

$$T(X) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x-y+3z \\ y+5z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ 5z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} z =$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\,X$. Como foi possível escrever $T(X)$ como o produto matricial $A\,X$, conclui-se que T é uma transformação linear

□

Por outro lado, qualquer transformação linear do R^n no R^m pode ser colocada na forma $T(X) = A\,X$, sendo A uma matriz mxn. Para ver isto, considere a base canônica do R^n, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Suponha que todos os vetores do R^n são colocados em coluna, isto é, como matrizes colunas $nx1$ e que os vetores do R^m também são colunas, e nesse caso, matrizes $mx1$. Dado um vetor qualquer $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$, ele pode ser escrito, de maneira única, como combinação linear da base canônica do R^n da seguinte forma:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Assim,

$T(X) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_n T(e_n)$.

Cada vetor $T(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, é uma matriz coluna $mx1$, então:

$$T(X) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_n T(e_n) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

sendo $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$ a matriz A mxn.

Essa matriz tem como colunas os vetores $T(e_i)$, respectivamente. Essa é a matriz A pretendida. Denomina-se assim, **forma matricial da transformação linear** T e A a **matriz canônica** de T, ou mais simplesmente, **matriz de** T.

EXEMPLO IV.9 ———————————

As colunas da matriz canônica A de uma transformação linear T são os vetores $T(e_i)$. Mas o leitor deve ter atenção ao tentar obter essa matriz diretamente da fórmula da transformação linear. Deve-se ter certeza de que a função em questão é realmente uma transformação linear.

Dada $T: R^3 \to R^4$ tal que

$T(x, y, z) = (x - 3y + 4z\ ,\ 3x - 10y + 13z\ ,\ x + z\ ,\ y - z)$ e calculando-se

$T(1, 0, 0) = (1, 3, 1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (-3, -10, 0, 1)$ e

$T(0, 0, 1) = (4, 13, 1, -1)$ chega-se à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Confirmando, isto é, fazendo o produto matricial:

$$A\,X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(X)$$

mostra-se que realmente essa é a forma da transformação linear T.

Considere agora a função $F: R^4 \to R^3$ definida por

$F(x, y, z, t) = (x + y + 1\ ,\ 2x\ ,\ 3t)$ que calculando-se

$F(1, 0, 0, 0) = (2, 2, 0)$, $F(0, 1, 0, 0) = (2, 0, 0)$,

$F(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0)$ e $F(0, 0, 0, 1) = (1, 0, 3)$,

obtém-se à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Mas fazendo-se o produto matricial, $A\,X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + z + t \\ 2x \\ 3t \end{pmatrix}$

chega-se a uma expressão diferente para $F(X) = \begin{pmatrix} x + y + 1 \\ 2x \\ 3t \end{pmatrix}$.

Isso acontece porque F não é uma transformação linear, e isto pode ser visto de uma outra maneira, calculando-se $F(0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.

——————————— □

Calcular $T(e_i)$ e colocar como colunas de uma matriz, não é suficiente para se obter matrizes de transformações lineares, é preciso ter certeza que T é uma transformação linear, ou então, obter a matriz e fazer o produto matricial para verificar se realmente, chega-se a $T(X) = A\,X$.

EXEMPLO IV.10

Considere a função do R^2 no R^2 que leva um vetor (x, y) em seu simétrico em relação ao eixo X.

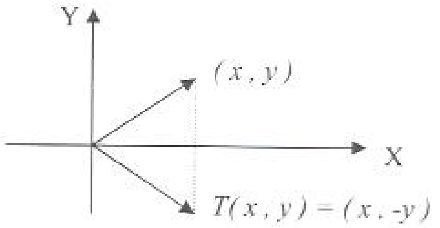

Figura IV.1 – A transformação que leva um vetor no simétrico ao eixo X.

Pelo desenho vê-se que $T(x, y) = (x, -y)$.
Como $(1, 0)$ fica fixo, pois está no eixo de simetria, isto é, $T(1, 0) = (1, 0)$ e como $(0, 1)$ é levado em seu simétrico em relação à origem, ou seja, $T(0, 1) = (0, -1)$, a matriz de T é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

O produto matricial é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ confirmando-se que T é uma transformação linear.

EXEMPLO IV.11

Considere a função T do R^2 no R^2 que gira um vetor (x, y) de um ângulo θ, no sentido trigonométrico, como mostra a figura a abaixo:

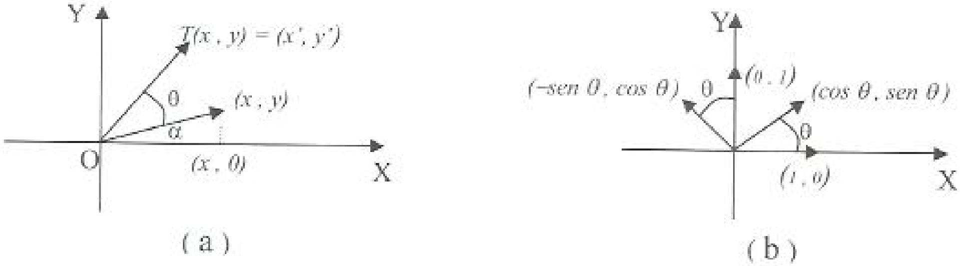

Figura IV.2 – A transformação rotação de um ângulo θ.

Observando o desenho b acima, vê-se que $T(1, 0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e que $T(0, 1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ e assim, a matriz A fica $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Usando-se o triângulo retângulo, da figura a, de vértices O, (x, y) e $(x, 0)$, vê-se que se a hipotenusa é r (o tamanho de (x, y)), o cateto adjacente ao ângulo α é $x = r\cos\alpha$ e o cateto oposto é $y = r\operatorname{sen}\alpha$.
O mesmo procedimento pode ser usado no triângulo de vértices: O, $T(x, y) = (x', y')$ e $(x', 0)$, obtendo-se da mesma forma que $x' = r\cos(\alpha+\theta)$ e $y' = r\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$, já que (x, y) e $T(x, y)$ têm o mesmo tamanho r.

Assim, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,[\cos(\alpha)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta)] \\ r\,[\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta)] \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) \\ r\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) + r\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\operatorname{sen}(\theta) \\ x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\,X = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Logo, usando a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e fazendo a multiplicação $A\,X$, chega-se a conclusão que T é uma transformação linear.

□

EXEMPLO IV.12

Suponha que um fotógrafo deseja ampliar uma fotografia, digamos que ele deseje dobrar o tamanho. Se ele pretende usar uma transformação linear, que leva a fotografia antiga na ampliada, qual deve ser essa transformação?

Considere que a fotografia é um quadrado, com os lados medindo $1cm$, paralelos aos planos coordenados e que seus vértices têm coordenadas:
(x, y), $(x+1, y)$, $(x, y+1)$ e $(x+1, y+1)$.

Os lados devem dobrar de tamanho, como mostra a figura abaixo:

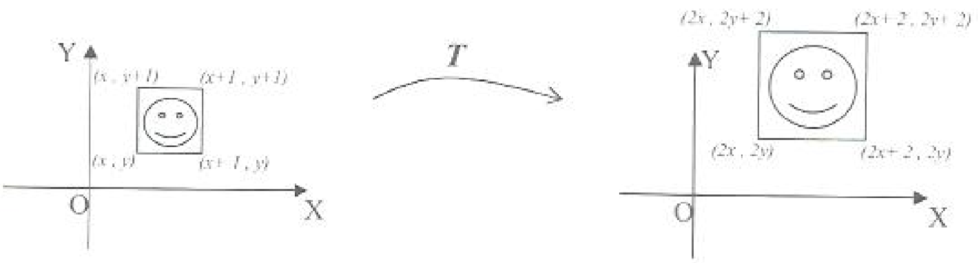

Figura IV.3 – A transformação linear ampliação.

O vetor $(1, 0)$ deve dobrar de tamanho, sem mudar a direção e o sentido. Ou seja, deve ir para o ponto $(2, 0)$. O mesmo acontece com $(0, 1)$, que deve ir para $(0, 2)$. Assim, a matriz da transformação linear T é $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e podemos escrever que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Isto é, o vértice (x, y) do quadrado vai para o ponto $(2x, 2y)$ e o vértice oposto $(x+1, y+1)$, ao aplicar T, vai para o ponto $(2x+2, 2y+2)$. Os demais vértices são tais que:
$T(x+1, y) = (2x+2, 2y)$ e $T(x, y+1) = (2x, 2y+2)$, levando ao quadrado, da direita, de lado 2, da figura acima.

———— ||

EXEMPLO IV.13 ————

Considerando-se a transformação linear do exemplo IV.9, $T: R^3 \to R^4$ tal que $T(x, y, z) = (x - 3y + 4z,\ 3x - 10y + 13z,\ x + z,\ y - z)$, pede-se:

i) Obtenha uma base para $Im\ T$ e diga sua dimensão.
ii) Verifique se o vetor $w = (3, 5, 15, 4)$ está na imagem de T.
iii) Se a resposta for afirmativa, obtenha os vetores u do domínio de T, tais que $T(u) = w$.
iv) Verifique se o vetor $w = (1, 0, 0, 0)$ está na imagem de T.
v) Determine equações para $Im\ T$.

Resolução ————

i) Do exemplo IV.9, T escrita matricialmente fica: $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

A imagem de T é o subconjunto do R^4 dos vetores Y tais que, existe um $X \in R^3$ que satisfaz a $T(X) = Y$. Ou seja, é o conjunto dos vetores Y que torna o sistema $T(X) = AX = Y$ possível. O produto matricial AX pode ser escrito da seguinte forma:

$$T(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = Y.$$

Isto diz que Y é combinação linear das colunas de A. Isto é, o vetor Y está na imagem de T se puder ser escrito como combinação linear das colunas de A. Ou ainda, **as colunas de A geram *Im T*.**

Dados geradores de um subespaço do R^n, para se obter uma base deve-se usar o método descrito no capítulo anterior: coloca-se os vetores como linhas de uma matriz, escalona-se e a base é constituída pelas linhas não nulas da matriz escalonada. Mas isto é tomar a transposta de A e aplicar o método.

Assim, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -10 & 0 & 1 \\ 4 & 13 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ que tem como matriz reduzida por linhas à forma escada $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Logo, uma base para a imagem de T é $\alpha = \{(1,0,10,3),\ (0,1,-3,-1)\}$ e $\dim Im\, T = 2$.

ii) Uma maneira de verificar se o vetor $w = (3, 5, 15, 4)$ está na imagem de T é retirando-se a linha nula da matriz R acima, substituindo-a por w e depois escalonando-se novamente. Se a última linha se anular novamente, w é combinação linear da base α, logo pertence à imagem, caso contrário, os vetores de α e w são LI e w não pertence à imagem. Assim, R é alterada para

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 15 & 4 \end{pmatrix}$ que aplicando-se as devidas operações elementares obtém-se novamente a matriz R como reduzida por linhas. Logo, $w \in Im\, T$.

iii) Para saber quais são os vetores solicitados deve-se resolver o sistema $T(u) = A\,u = w$, que, pelo item anterior sabe-se que é possível. O sistema fica: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ cuja matriz aumentada é $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & 13 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Reduzindo por linhas essa matriz obtém-se $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que retornando à forma de sistema chega-se a $\begin{cases} x + z = 15 \\ y - z = 4 \end{cases}$. Passando a variável livre z para o outro lado da igualdade e acrescentando-se a equação $z = z$ fica: $\begin{cases} x = -z + 15 \\ y = z + 4 \\ z = z \end{cases}$

ou ainda, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Com isto, vê-se que qualquer vetor da reta descrita parametricamente pela equação vetorial $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ é

levado em $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$ por T.

iv) O vetor $w = (1, 0, 0, 0)$ não está na imagem de T, pois usando-se o mesmo processo do item ii, deve-se escalonar a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

levando-se a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{pmatrix}$ que não tem a última linha nula.

v) De uma forma geral, para saber se o vetor $w = (x, y, z, t)$ pertence à imagem de T, pode-se proceder da mesma maneira usando-se o processo descrito nos itens ii e iv. Substituindo-se w na matriz, obtém-se

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ que, aplicando-se operações elementares para tornar a

última linha nula chega-se a $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & z-10x+3y & t-3x+y \end{pmatrix}$.

Logo w só pertence à imagem de T se a terceira linha for toda nula.
Assim, $Im\,T = \{ w = (x, y, z, t) \in R^4 \mid z - 10x + 3y = 0 \text{ e } t - 3x + y = 0 \}$.

□

Dada uma base $\beta = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ de um espaço vetorial V e considerando-se que $T v_1$, $T v_2$, ... e $T v_n$ também são dados, isto é, $T v_1 = w_1$, $T v_2 = w_2$, ... e $T v_n = w_n$, com w_1, w_2, ... e w_n pertencentes a outro espaço vetorial W, pergunta-se: existe alguma transformação linear $T: V \to W$ com essa característica? Se a resposta for positiva, quantas dessas transformações lineares existem?

TEOREMA IV.2

Se $\beta = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ é uma base de V e $\{ w_1, w_2, \ldots \text{ e } w_n \} \subset W$, então existe uma única transformação linear $T: V \to W$ de forma que
$T v_1 = w_1$, $T v_2 = w_2$, ... e $T v_n = w_n$.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Como β é base, qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de β de uma única maneira, assim:

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$.

Defina $T: V \rightarrow W$ da seguinte forma:

$T v = a_1 T v_1 + a_2 T v_2 + \ldots + a_n T v_n = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n$.

Observe que T assim definida satisfaz à hipótese, isto é,

$T v_i = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Ainda mais, a transformação definida dessa forma é uma transformação linear. Pois, se $u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$, segue que

$T u = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n$ e como $u + v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = (b_1 + a_1) v_1 + (b_2 + a_2) v_2 + \ldots + (b_n + a_n) v_n$

e $T(u + v) = T((b_1 + a_1) v_1 + (b_2 + a_2) v_2 + \ldots + (b_n + a_n) v_n) =$
$(b_1 + a_1) T v_1 + (b_2 + a_2) T v_2 + \ldots + (b_n + a_n) T v_n =$
$(b_1 + a_1) w_1 + (b_2 + a_2) w_2 + \ldots + (b_n + a_n) w_n =$
$b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n = T(u) + T(v)$.

Para ver que T é transformação linear falta mostrar que

$T(k v) = T(k a_1 v_1 + k a_2 v_2 + \ldots + k a_n v_n) = k a_1 w_1 + k a_2 w_2 + \ldots + k a_n w_n = k(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_n w_n) = k T v$.

||

EXEMPLO IV.14

Qual é a transformação linear $T: R^3 \rightarrow R^4$ que satisfaz a:

$T(1, 1, 0) = (1, 2, 3, 4)$, $T(1, -1, 0) = (4, 3, 2, 1)$ e
$T(0, 0, 1) = (1, 1, 1, 1)$?

Para ver que o conjunto $\beta = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base do R^3 é suficiente verificar se gera o R^3 ou se é linearmente independente, já que β possui três vetores e $\dim R^3 = 3$.

Assim, dado um vetor genérico $(x, y, z) \in R^3$ pode-se escrevê-lo como combinação linear de β da seguinte forma:

$(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(1, -1, 0) + c(0, 0, 1) = (a + b, a - b, c)$

obtendo o sistema $\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \\ c = z \end{cases}$ cuja solução é $a = \dfrac{x + y}{2}$, $b = \dfrac{x - y}{2}$ e $c = z$.

Como o sistema tem solução para todos os valores de x, y e z, conclui-se que β gera o R^3 e dessa forma é uma base.

Logo: $T(x, y, z) = T(a(1, 1, 0) + b(1, -1, 0) + c(0, 0, 1)) =$

$T\left(\dfrac{x + y}{2}(1, 1, 0) + \dfrac{x - y}{2}(1, -1, 0) + z(0, 0, 1)\right) =$

$\dfrac{x + y}{2} T(1, 1, 0) + \dfrac{x - y}{2} T(1, -1, 0) + z T(0, 0, 1) =$

$\dfrac{x + y}{2}(1, 2, 3, 4) + \dfrac{x - y}{2}(4, 3, 2, 1) + z(1, 1, 1, 1) =$

$(\frac{5x-3y+2z}{2} , \frac{5x-y+2z}{2} , \frac{5x+y+2z}{2} , \frac{5x+3y+2z}{2}).$

Essa é a única transformação linear que satisfaz os requisitos solicitados.

□

EXEMPLO IV.15

Foi mostrado que em qualquer transformação linear $T: V \rightarrow W$ o vetor nulo do domínio V é levado no vetor nulo do contradomínio W. Será que somente o vetor nulo de V é levado no vetor nulo de W, ou existem outros vetores de V que têm essa característica ?

Tome como exemplo a transformação linear $T: R^3 \rightarrow M_{2x2}$ tal que

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x-y & x+y-2z \\ 2x-y-z & y-z \end{pmatrix}.$$

Para saber quais vetores de V são levados no zero de M_{2x2}, deve-se resolver a equação $T(x, y, z) = O$, ou seja,

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x-y & x+y-2z \\ 2x-y-z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que leva ao sistema $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$.

Esse sistema admite outras soluções além do $(0, 0, 0) \in R^3$.

Resolva o sistema como exercício.

A solução do sistema é o subespaço gerado do R^3, $[(1, 1, 1)]$. Uma reta.

□

Além da imagem de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, que foi mostrado que é um subespaço de W, existe outro subespaço importante ligado a T. Esse, que é um subespaço de V, é o subconjunto dos vetores de V que são levados no vetor nulo por T, denominado núcleo de T, e denotado por $ker\ T$, como foi descrito no exemplo anterior. Em alguns textos esse subconjunto é denominado **nulidade de** $\boldsymbol{T}$ e é denotado por $\boldsymbol{Nu(T)}$:

O **núcleo de** $\boldsymbol{T : V \rightarrow W}$ é o subconjunto de V: $\boldsymbol{ker\ T = \{ v \in V \mid Tv = O \}}$.

TEOREMA IV.3

$ker\ T$ é subespaço de V.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Para ver que $ker\ T$ é um subespaço de V, tem-se inicialmente que $ker\ T \neq \varnothing$, pois como $T(O) = O'$ segue que $O \in ker\ T$.
Se u e v pertencem a $ker\ T$, $Tu = Tv = O'$ e logo $T(u + v) = Tu + Tv = O' + O' = O'$, mostrando que $u + v \in ker\ T$.
Da mesma maneira, se $v \in ker\ T$ e $k \in R$, $T(kv) = k\,Tv = k\,O' = O'$, concluindo-se que $kv \in ker\ T$ e logo $ker\ T$ é subespaço de V.

□

EXEMPLO IV.16

No exemplo IV.14, $ker\ T = [(1, 1, 1)]$, isto é, o núcleo de T é o subespaço gerado pelo vetor $(1, 1, 1)$. Assim, todos os pontos dessa reta, contendo a origem, são levados por T no vetor nulo $O' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

IV.3 – O Núcleo e a Imagem

Na seção anterior foi visto que o núcleo e a imagem de uma transformação linear $T: V \to W$ são subespaços, sendo $ker\ T$ um subespaço de V e $Im\ T$ subespaço de W. Nessa seção, será estudada a relação entre esses dois subespaços.

EXEMPLO IV.17

Dada qualquer transformação linear $T: R^n \to R^m$, para encontrar o núcleo de T, ou mais especificamente, uma base para $ker\ T$, acha-se primeiramente a matriz canônica A de T. Assim, $T(X) = AX$ e para encontrar o núcleo deve ser resolvida a equação $T(X) = 0$, ou seja, resolvido o sistema $AX = 0$.
Considere a transformação linear do exemplo IV.13:

$$TX = AX = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Para obter o núcleo de T deve ser resolvido o sistema $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -10 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

cuja solução é encontrada pelo sistema com a matriz reduzida por linhas de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema é $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z \, , \, z \in R.$

Assim, $ker\ T$ é a reta gerada pelo vetor $(-1, 1, 1)$ e $dim\ ker\ T = 1$.

□

EXEMPLO IV.18

Dada a transformação linear $T: R^3 \to R^2$ tal que:

$T(x, y, z) = (x + y + z \, , \, x - y + z)$ a matriz de T é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A matriz escalonada de A é $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, a solução do sistema $AX = O$ é $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \, , \, z \in R.$

O núcleo de T é a reta gerada por $(-1, 0, 1)$.

□

Uma **função é sobrejetora** se sua imagem é igual ao seu contradomínio. No caso da transformação linear $T: V \to W$, se $Im\ T = W$.

Uma **função é injetora** se dois elementos do domínio são levados pela função em elementos diferentes do contradomínio. Para uma transformação linear $T: V \to W$, essa definição pode ser alterada para:

***T* é injetora** se e só se $\boldsymbol{ker\ T = \{O\}}$.

Nesse caso, diz-se que $\boldsymbol{dim\ ker\ T = 0}$.

Para ver que essas definições de função injetora são equivalentes, para transformações lineares, considere primeiro que T é uma função injetora.

Se $v \in ker\, T$ então $T(v) = O$. Mas $T(O)$ também é O e como T é injetora, segue que $v = O$, mostrando que o único vetor que está no núcleo de T é o vetor nulo.

Agora suponha que $ker\, T = \{ O \}$. Para mostrar que T é injetora tome dois vetores de V, v e u, de forma que $T\,u = T\,v$, então $T\,u - T\,v = O$. Como T é uma transformação linear $T\,u - T\,v = T(u - v) = O$, e assim, o vetor $(u - v) \in ker\, T$. Por hipótese, o único vetor que está no núcleo de T é o vetor nulo, logo $u - v = O$. Então $u = v$, mostrando que T é injetora.

No caso de uma transformação linear $T{:}V \to W$, para verificar se T **é sobrejetora, basta verificar se** $\boldsymbol{dim\, Im\, T = dim\, W}$, já que $Im\, T$ é um subespaço de W.

EXEMPLO IV.19

Considere a transformação linear do exemplo IV.18. Como o núcleo de T não é constituído somente pelo vetor nulo, T não é injetora.
Para obter a imagem de T, deve-se resolver a equação $T(X) = Y$ para se saber quais são as condições sobre as coordenadas do vetor Y para que ele pertença à imagem de T. Ou melhor, resolver o sistema $A\,X = Y$ para saber sob que condições de Y esse sistema é possível. A matriz daquele exemplo leva ao sistema, $A\,X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Y$. Como a matriz reduzida por linhas de A, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ não tem linhas nulas, o sistema é sempre possível independentemente de Y, logo T é sobrejetora, ou seja, $Im\, T = R^2$.

□

EXEMPLO IV.20

Seja $T{:}R^2 \to R^3$ satisfazendo a $T(x, y) = (x + y, x + 2y, 2x + 3y)$.

Para ver se essa função é injetora e/ou sobrejetora, tome sua matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Para saber se a transformação T é injetora, deve-se resolver o sistema $A\,X = O$, com $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se o sistema for possível e determinado é injetora, isto é, a única solução é $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e só se T é injetora.

E, para saber se a transformação T é sobrejetora, deve ser resolvido o sistema $A\,X = Y$, com $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e verificar se para qualquer Y o sistema é possível.

Dessa forma, resolvendo o sistema $A\,X = Y$, conclui-se que T é sobrejetora se o sistema é possível para qualquer Y e T é injetora se o sistema $A\,X = O$ é possível e determinado.
Logo, resolve-se o sistema $A\,X = Y$ para testar se T é sobrejetora e depois faz-se $Y = O$, para saber se T é injetora, usando-se as mesmas contas.

Considere a matriz aumentada, $A|Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$, escalonando-se essa matriz,

obtém-se $R|Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a-b \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c-a-b \end{pmatrix}$, que tem solução somente se $c - a - b = 0$,

mostrando que T <u>não é sobrejetora</u>.

Para que $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ esteja na imagem de T, Y tem que satisfazer à condição $c - a - b = 0$.

Assim, pode-se dizer que $Im\,T = \{(a,b,c) \mid c - a - b = 0\} \neq R^3$.
E assim, $Im\,T$ é um plano em R^3 e então $dim\,Im\,T = 2$.
Para saber se T é injetora, basta fazer $Y = O$, obtendo-se a matriz

$R|Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tem solução única $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, concluindo-se que T <u>é injetora</u>, e assim, $dim\,ker\,T = 0$.

□

EXEMPLO IV.21

Considere a transformação linear $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que
$T(x, y, z) = (x + y + z\ ,\ x + 2y - z\ ,\ 2x + 3y)$.

A matriz canônica de T é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolvendo-se o sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, chega-se à matriz aumentada

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2a-b \\ 0 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{pmatrix}$. Se $c-b-a \neq 0$ o vetor $(a\,,b\,,c) \notin Im\,T$.

Considerando agora $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, vê-se que o vetor $(-3\,,\,2\,,\,1) \in ker\ T$, concluindo-se que T não é sobrejetora e também não é injetora.
Nesse exemplo, $dim\ Im\ T = 2$ e $dim\ ker\ T = 1$.

□

EXEMPLO IV.22

Para mostrar que a transformação linear $T: R^4 \to M_{2x2}$ tal que
$T(x\,,y\,,z\,,t) = \begin{pmatrix} y+z+2t & x+y-z \\ x+2y+t & y+2z+3t \end{pmatrix}$ é injetora e sobrejetora, tem-se que resolver a equação vetorial $T(x\,,y\,,z\,,t) = \begin{pmatrix} y+z+2t & x+y-z \\ x+2y+t & y+2z+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

que leva ao sistema $\begin{cases} y+z+2t = a \\ x+y-z = b \\ x+2y+t = c \\ y+2z+3t = d \end{cases}$ que tem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b+2d-11a+4c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2a-d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d-3a+2c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2a-c \end{pmatrix}$

como matriz reduzida de sua matriz aumentada.
Como esse sistema tem solução única, é possível e determinado, para todo vetor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, conclui-se que T é injetora e sobrejetora.
Dessa forma, $dim\ Im\ T = dim\ M_{2x2} = 4$ e $dim\ ker\ T = 0$.

□

Quando uma transformação linear é injetora e sobrejetora, como no exemplo anterior, ela é denominada **isomorfismo**. Se existe um isomorfismo de V em W, diz-se que esses dois espaços são **isomorfos**. A palavra "isomorfo", (*iso = mesma* e *morfo = forma*) quer dizer que os espaços V e W têm a mesma forma.

O exemplo anterior mostra que os espaços R^4 e M_{2x2} têm a mesma forma. A transformação linear $T(x\,,y\,,z\,,t) = \begin{pmatrix} y+z+2t & x+y-z \\ x+2y+t & y+2z+3t \end{pmatrix}$ é um isomorfismo entre esses dois espaços vetoriais.

Assim, problemas em M_{2x2} podem ser transportados para o R^4, resolvidos nesse espaço e depois transportados de volta para o M_{2x2}.

EXEMPLO IV.23

Os espaços R^3 e $P_2 = \{$ *polinômios de grau menor ou igual a 2* $\}$ são isomorfos. Para ver isso, considere a transformação linear $T: R^3 \to P_2$ definida por: $T(x, y, z) = x t^2 + y t + z$. O vetor nulo de P_2 é o polinômio $0 t^2 + 0 t + 0$. Assim, $T(x, y, z)$ é o polinômio nulo de P_2 se e somente se $x = y = z = 0$. Dessa forma, o núcleo de T só tem o vetor nulo, mostrando que T é injetora. Um polinômio qualquer $a t^2 + b t + c$ é a imagem de $T(a, b, c)$, mostrando que T é sobrejetora e consequentemente um isomorfismo.

□

TEOREMA IV.4 (**Do Núcleo e da Imagem**)

Dada a transformação linear $T: V \to W$, com V e W espaços vetoriais de dimensão finita, então $\dim V = \dim Im\, T + \dim \ker T$.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Considere que $\{ v_1, v_2, \dots, v_p \}$ é uma base de $\ker T$ e que $\dim V = n$. Deve ser mostrado que $\dim Im\, T = n - p$, já que $\dim \ker T = p$. Completando a base de $\ker T$ para obter uma base de V, essa ficará da seguinte forma: $\{ v_1, v_2, \dots, v_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+n-p} \}$. Para concluir a demonstração, será mostrado que $\beta = \{ T(u_{p+1}), T(u_{p+2}), \dots, T(u_n) \}$ é uma base de $Im\, T$ e como β possui $n-p$ vetores, $\dim Im\, T = n - p$.

β é LI, pois, se $a_1 T(u_{p+1}) + a_2 T(u_{p+2}) + \dots + a_{n-p} T(u_n) = \vec{O}$ segue que $T(a_1 u_{p+1} + a_2 u_{p+2} + \dots + a_{n-p} u_n) = \vec{O}$ mostrando que o vetor $(a_1 u_{p+1} + a_2 u_{p+2} + \dots + a_{n-p} u_n) \in \ker T$.

Escrevendo-se esse vetor como combinação linear da base de $\ker T$, fica:

$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_p v_p = a_1 u_{p+1} + a_2 u_{p+2} + \dots + a_{n-p} u_n$, ou ainda,

$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_p v_p - a_1 u_{p+1} - a_2 u_{p+2} - \dots - a_{n-p} u_n = \vec{O}$.

Como $\{ v_1, v_2, \dots, v_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n \}$ é uma base, e logo LI, tem-se que $b_1 = b_2 = \dots = b_p = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-p} = 0$, concluindo-se que β é linearmente independente.

Para mostrar que β gera $Im\, T \subset W$, considere um vetor $w \in Im\, T$.

Como $w \in Im\, T$, existe $v \in V$ tal que $T v = w$.

Escrevendo v como combinação linear da base de V, fica:

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + a_{p+2} u_{p+2} + \dots + a_n u_n$.

Aplicando-se T na expressão acima, obtém-se:

$w = T v = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + a_{p+2} u_{p+2} + \dots + a_n u_n)$

$= a_1 T v_1 + a_2 T v_2 + \dots + a_p T v_p + a_{p+1} T u_{p+1} + a_{p+2} T u_{p+2} + \dots + a_n T u_n$, Assim, problemas em M_{2x2} podem ser transportados para o R^4, resolvidos nesse espaço e depois transportados de volta para o M_{2x2}.

EXEMPLO IV.23

Os espaços R^3 e $P_2 = \{$ *polinômios de grau menor ou igual a 2* $\}$ são isomorfos. Para ver isso, considere a transformação linear $T: R^3 \to P_2$ definida por: $T(x, y, z) = x t^2 + y t + z$. O vetor nulo de P_2 é o polinômio $0 t^2 + 0 t + 0$. Assim, $T(x, y, z)$ é o polinômio nulo de P_2 se e somente se $x = y = z = 0$. Dessa forma, o núcleo de T só tem o vetor nulo, mostrando que T é injetora. Um polinômio qualquer $a t^2 + b t + c$ é a imagem de $T(a, b, c)$, mostrando que T é sobrejetora e consequentemente um isomorfismo.

□

TEOREMA IV.4 (**Do Núcleo e da Imagem**)

Dada a transformação linear $T: V \to W$, com V e W espaços vetoriais de dimensão finita, então $\dim V = \dim Im\, T + \dim \ker T$.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Considere que $\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \}$ é uma base de $\ker T$ e que $\dim V = n$. Deve ser mostrado que $\dim Im\, T = n - p$, já que $\dim \ker T = p$. Completando a base de $\ker T$ para obter uma base de V, essa ficará da seguinte forma: $\{ v_1, v_2, \ldots, v_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+n-p} \}$. Para concluir a demonstração, será mostrado que $\beta = \{ T(u_{p+1}), T(u_{p+2}), \ldots, T(u_n) \}$ é uma base de $Im\, T$ e como β possui $n - p$ vetores, $\dim Im\, T = n - p$.

β é LI, pois, se $a_1 T(u_{p+1}) + a_2 T(u_{p+2}) + \ldots + a_{n-p} T(u_n) = \vec{O}$ segue que $T(a_1 u_{p+1} + a_2 u_{p+2} + \ldots + a_{n-p} u_n) = \vec{O}$ mostrando que o vetor $(a_1 u_{p+1} + a_2 u_{p+2} + \ldots + a_{n-p} u_n) \in \ker T$.

Escrevendo-se esse vetor como combinação linear da base de $\ker T$, fica:
$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_p v_p = a_1 u_{p+1} + a_2 u_{p+2} + \ldots + a_{n-p} u_n$, ou ainda,
$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_p v_p - a_1 u_{p+1} - a_2 u_{p+2} - \ldots - a_{n-p} u_n = \vec{O}$.

Como $\{ v_1, v_2, \ldots, v_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_n \}$ é uma base, e logo LI, tem-se que $b_1 = b_2 = \ldots = b_p = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-p} = 0$, concluindo-se que β é linearmente independente.

Para mostrar que β gera $Im\, T \subset W$, considere um vetor $w \in Im\, T$.

Como $w \in Im\, T$, existe $v \in V$ tal que $T v = w$.

Escrevendo v como combinação linear da base de V, fica:

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + a_{p+2} u_{p+2} + \ldots + a_n u_n$.

Aplicando-se T na expressão acima, obtém-se:

$w = T v = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_p v_p + a_{p+1} u_{p+1} + a_{p+2} u_{p+2} + \ldots + a_n u_n)$
$= a_1 T v_1 + a_2 T v_2 + \ldots + a_p T v_p + a_{p+1} T u_{p+1} + a_{p+2} T u_{p+2} + \ldots + a_n T u_n$,

e como $T v_k = O$, pois $v_k \in ker\ T$, $k = 1, \ldots, p$, conclui-se que w pode ser escrito como combinação linear de β da seguinte forma:
$w = a_{p+1} T u_{p+1} + a_{p+2} T u_{p+2} + \ldots + a_n T u_n$, mostrando que β gera $Im\ T$.

□

EXEMPLO IV.24

Usando alguns exemplos anteriores, pode-se verificar para esses exemplos, o teorema do Núcleo e da Imagem (algumas verificações ficam como exercício):

Exemplo	***dim ker T***	***dim Im T***	**Dimensão do domínio de *T***
IV.5	1	n	$n+1$
IV.10	0	2	2
IV.11	0	2	2
IV.13	1	2	3
IV.14	1	2	3
IV.15	1	2	3
IV.18	1	2	3
IV.20	0	2	2
IV.21	1	2	3
IV.22	0	4	4
IV.22	0	3	3

□

COROLÁRIO IV.1

Dada uma transformação linear $T: V \to W$, então:

i) Se $dim\ V > dim\ W \Rightarrow T$ não pode ser injetora.
ii) Se $dim\ V < dim\ W \Rightarrow T$ não pode ser sobrejetora.
iii) Se T é um isomorfismo $\Rightarrow dim\ V = dim\ W$.
iv) Se $dim\ V = dim\ W$ então, T é injetora $\Leftrightarrow$ T é sobrejetora.

Demonstração

"$\Rightarrow$" i) Se T fosse injetora $dim\ ker\ T = 0$ e então
$dim\ Im\ T = dim\ V - dim\ ker\ T = dim\ V > dim\ W$.
Mas isto é incoerente pois, $Im\ T$ é um subespaço de W e não é possível ter $dim\ Im\ T > dim\ W$. Logo, T não pode ser injetora.

ii) Se T fosse sobrejetora $dim\ Im\ T = dim\ W$, e então
$dim\ ker\ T = dim\ V - dim\ Im\ T = dim\ V - dim\ W < 0$.
Isso não é possível pois, a dimensão não pode ser negativa.
Logo T não pode ser sobrejetora.

iii) Como T é um isomorfismo, T é injetora e pelo item i $dim\ V \leq dim\ W$.
Também, T é sobrejetora e pelo item ii $dim\ V \geq dim\ W$.
Logo, $dim\ V = dim\ W$.

iv) T é injetora $\Leftrightarrow$ $dim\ ker\ T = 0$ $\Leftrightarrow$
$dim\ Im\ T = dim\ V - dim\ ker\ T = dim\ V = dim\ W$ $\Leftrightarrow$ T é sobrejetora.

$\square$

COROLÁRIO IV.2

Se a transformação linear $T: V \to W$ é um isomorfismo, então T leva uma base em uma base.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Se $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ é uma base de V então, pelo corolário anterior, $dim\ V = dim\ W = n$. Para mostrar que $\{ T v_1, T v_2, \dots, T v_n \}$ é uma base de W, é suficiente mostrar que é LI.
Assim, escrevendo o vetor nulo como combinação linear desses vetores obtém-se: $a_1\ T\ v_1 + a_2\ T\ v_2 + \dots + a_n\ T\ v_n = O$. Como T é uma transformação linear, $T(a_1\ v_1 + a_2\ v_2 + \dots + a_n\ v_n) = O$, e assim, $a_1\ v_1 + a_2\ v_2 + \dots + a_n\ v_n \in ker\ T$.
Mas T é injetora, e assim o único vetor que está no núcleo é o vetor nulo, logo $a_1\ v_1 + a_2\ v_2 + \dots + a_n\ v_n = O$.
Como os vetores $v_1, v_2, \dots$ e v_n estão em uma base, e então são LI., segue que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, mostrando que $\{ T v_1, T v_2, \dots, T v_n \}$ é LI, e então é uma base de W.

$\square$

COROLÁRIO IV.3

Sejam V e W dois espaços vetoriais reais.
Se $dim\ V = dim\ W = n$, então V e W são isomorfos.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Para mostrar que V e W são isomorfos, basta construir um isomorfismo $T: V \to W$. Sejam $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ e $\{ w_1, w_2, \dots, w_n \}$ bases de V e W, respectivamente. Então, pelo teorema IV.2 existe uma única transformação linear tal que $T\ v_i = w_i$, $i = 1, \dots, n$.
Resta mostrar que T é um isomorfismo. Como $\{ w_1, w_2, \dots, w_n \}$ gera W, pois é uma base e pertencem à $Im\ T$, segue que $Im\ T = W$, e assim, T é sobrejetora. Pelo corolário IV.3, T é um isomorfismo.

$\square$

O corolário IV.3 mostra que todos os espaços vetoriais reais de dimensão n são isomorfos, ou seja, têm a mesma forma. Logo, ao se estudar o

R^n estuda-se todos os espaços vetoriais V com $dim\ V = n$. Problemas em V podem ser solucionados transportando-os para o R^n, resolvidos lá, e depois a solução levadas de volta para o espaço V.

O **posto linha** de uma matriz $A \in M_{mxn}$ é definido como o número de linhas linearmente independentes de A. O posto linha de A, $pl(A)$, também pode ser definido como o número de linhas não nulas da matriz R reduzida por linhas à forma escada de A. Considerando que A é a matriz da transformação linear $T:R^n \rightarrow R^m$, a $dim\ ker\ T$ é igual ao número de variáveis livres do sistema $A\,X = O$. Esse número também é igual ao das variáveis livres do sistema $R\,X = O$. Como a dimensão do domínio de T é n, segue pelo teorema de Núcleo e da Imagem, que $dim\ ker\ T$ é igual ao número de colunas de A menos o posto linha de A. Pode-se escrever $\boxed{dim\ ker\ T = n - pl(A)}$.

O **posto coluna** de uma matriz $A \in M_{mxn}$, $pc(A)$, é definido como o posto linha da matriz transposta de A. Ou seja, $pc(A) = pl(A^t)$. Assim, o posto coluna de A é o número de colunas linearmente independentes de A. Como as colunas de A geram $Im\ T$, pode-se afirmar que o posto coluna de A é igual à $dim\ Im\ T$, ou seja, $\boxed{dim\ Im\ T = pc(A)}$.

TEOREMA IV.5 ——————————

O posto linha de uma matriz $A \in M_{mxn}$ é igual ao seu posto coluna.

Demonstração ——————————

"$\Rightarrow$" Usando o teorema do Núcleo e da Imagem, segue que

$$dim\ R^n = n = dim\ ker\ T + dim\ Im\ T, \text{ ou ainda,}$$

$$n = n - pl(A) + pc(A) \ \therefore\ pc(A) = pl(A).$$

$\square$

Com o resultado do teorema IV.5, os nomes posto linha e posto coluna podem ser substituídos por **posto de A**. Assim, **o posto de A é definido como o número de linhas ou de colunas LI de A**, que pelo teorema anterior é o mesmo. Dessa forma, escalonando-se A ou A^t obtém-se o mesmo número de linhas não nulas.

EXEMPLO IV.25

A reduzida por linhas à forma escada da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ é

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. O posto de A é 2. A reduzida por linhas à forma escada da

matriz A^t é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, comprovando que o posto é 2.

□

IV.4 – As Matrizes da Composta e da Inversa

Para fazer a **composta de duas transformações lineares** $T: R^n \to R^m$ e $S: R^m \to R^p$, considere suas matrizes canônicas A e B, respectivamente. A composta $S \circ T: R^n \to R^p$ é definida como $S \circ T(X) = S(T(X))$.

Usando as matrizes, $S \circ T(X) = S(T(X)) = S(AX) = BAX$. Logo, a matriz da composta $S \circ T$ é o produto de matrizes BA, nessa ordem.

Observe que, para se fazer a composta $S \circ T$, o contradomínio de T deve ser igual ao domínio de S que é o R^m. Da mesma forma, para fazer o produto da matriz $B \in M_{pxm}$ pela matriz $A \in M_{mxn}$, o número de colunas de B deve ser igual ao número de linhas de A que é m.

EXEMPLO IV.26

Sejam $T: R^3 \to R^4$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - z, y + z, x)$

cuja matriz canônica é $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $S: R^4 \to R^3$ definida por

$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 - x_3, \ 2x_1 + 2x_2 + x_4, \ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4)$

cuja matriz é $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. A matriz da composta $S \circ T: R^3 \to R^3$ é obtida pelo produto matricial $BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

logo $S \, o \, T(x, y, z) = (4x + y - z \;,\; 5x + 4y + 4z \;,\; 5x - y + z)$.
No caso desse exemplo, é possível calcular também a composta $T \, o \, S: R^4 \to R^4$, cuja matriz é obtida pelo produto matricial

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & -22 & 5 \\ -2 & 2 & 6 & -1 \\ 5 & 3 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$T \, o \, S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

□

A função $g: C \to C$ é a **inversa da função** $f: C \to C$ se e só se as compostas $fog = gof = id$, em que $id: C \to C$ é a função identidade. Isto é, as duas compostas fog e gof são iguais à função identidade definida por $id(x) = x, \; \forall x \in C$.

Para que uma função tenha inversa é preciso que ela seja bijetora, isto é, injetora e sobrejetora.

No caso de uma transformação linear, $T: R^n \to R^n$, para que ela tenha inversa, é preciso que T seja um isomorfismo. Nesse caso, a função identidade $id: R^n \to R^n$ é a transformação linear que tem como matriz a identidade I.

Se T é um isomorfismo, a matriz A de T deve ser quadrada, nxn, e tem que ter **posto completo**, isto é, **A deve ter o posto máximo n**, já que as colunas de A geram $Im\,T$ e, nesse caso, $Im\,T = R^n$. Como as colunas geram a imagem de T e $dim\,Im\,T = n$, segue que as colunas formam uma base para o R^n e logo são LI. Isto quer dizer que T tem inversa se e só se A tem inversa.

Se a transformação linear $G: R^n \to R^n$ que tem como matriz A^{-1}, a matriz inversa de A, segue que $G \, o \, T = T \, o \, G = id$, pois, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
A transformação linear que é a inversa de uma transformação linear $T: R^n \to R^n$, é denotada por $T^{-1}: R^n \to R^n$ e é denominada **transformação linear inversa**.

Assim, para se obter a transformação linear inversa de $T: R^n \to R^n$, basta encontrar a matriz A da transformação linear T, calcular a matriz inversa A^{-1} e então $T^{-1}: R^n \to R^n$ é a transformação linear que tem A^{-1} como matriz.

Observe que, T^{-1} **existe se e somente se** A^{-1} **existe.**

EXEMPLO IV.27 ——————————
Seja $T: R^3 \to R^3$ definida por:
$T(x, y, z) = (x + y + z\ ,\ x + 2y - z\ ,\ 2x + 4y - z)$

que tem matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculando-se a inversa de A (calcule a inversa como exercício) obtém-se que

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Logo, a transformação linear inversa de T é $T^{-1}: R^3 \to R^3$ definida por:
$T^{-1}(x, y, z) = (2x + 5y - 3z\ ,\ -x - 3y + 2z\ ,\ -2y + z)$.

—————————— //

IV.5 – Sistemas e Transformações Lineares

Por tudo que foi visto anteriormente, há uma relação muito grande entre sistemas de equações lineares e transformações lineares. Considere uma transformação linear $T: R^n \to R^n$, e sua matriz canônica A, que nesse caso tem ordem nxn. O teorema a seguir ilustra esta relação:

TEOREMA IV.6 ——————————
As seguintes condições são equivalentes:

a) O sistema $AX = O$ só tem **solução trivial**, isto é, a única solução é $X = O$.
b) A transformação linear T é injetora.
c) O sistema $AX = b$ é possível e determinado $\forall b$.
d) A transformação linear T é sobrejetora.
e) A matriz A tem inversa.
f) A transformação linear T tem inversa.
g) As colunas de A são linearmente independentes.
h) As colunas de A formam uma base para a imagem de T.
i) As linhas de A são linearmente independentes.
j) $det A \neq 0$.

Demonstração

a) $\Leftrightarrow$ b): T é injetora $\Leftrightarrow$ $ker\, T = \{ O \}$ $\Leftrightarrow$ $A\,X = O$ só tem a solução $X = O$.

a) $\Rightarrow$ c): A matriz reduzida por linhas à forma escada de A é a matriz identidade, logo o sistema $A\,X = b$ é possível e determinado.

c) $\Leftrightarrow$ d): O sistema $A\,X = b$ é possível e determinado $\forall b \in R^n$, se e somente se T é sobrejetora.

c) $\Rightarrow$ e): Essa demonstração foi feita no método de obtenção da inversa.

e) $\Leftrightarrow$ f): Como foi visto a matriz de T^{-1} é A^{-1}. Logo, T tem inversa se e só se A tem inversa.

e) $\Rightarrow$ g): A tem inversa então o posto de A é n. Logo as colunas de A são LI.

g) $\Leftrightarrow$ h): As colunas de A geram a imagem de T, como a dimensão do R^n é n, elas formam uma base para a imagem de T. Por outro lado, se as colunas formam uma base, elas são LI.

g) $\Rightarrow$ i): Como o posto linha é igual ao posto coluna, as linhas de A também são LI.

i) $\Rightarrow$ j): Pelo método do cálculo do determinante, $det\, A \neq 0$.

j) $\Rightarrow$ a): A matriz reduzida por linhas à forma escada de A é a matriz identidade, mostrando que a única solução de $A\,X = O$ é a solução trivial.

□

IV.6 – Autovalores e Autovetores

Nessa seção, serão considerados somente **operadores lineares**, que são transformações lineares cujo domínio e contradomínio são iguais. Toda transformação citada nessa seção, é da forma $T: V \rightarrow V$, a não ser que seja feita alguma observação contrária.

Retomando o exemplo IV.10, em que é considerada a transformação linear do R^2 no R^2 que leva um vetor $(x\,,\, y)$ em seu simétrico em relação ao eixo X, que satisfaz $T(x\,,\, y) = (x\,,\, -y)$, observe que os vetores do eixo X

ficam inalterados por essa transformação. Ou seja, se o vetor v está no eixo X, então $T\,v = v$. Esses vetores são denominados **vetores fixos** de T. Os vetores do eixo Y não são fixos, pois se u pertence ao eixo Y, u é levado em seu simétrico em relação à origem, isto é, $T\,u = -u$.

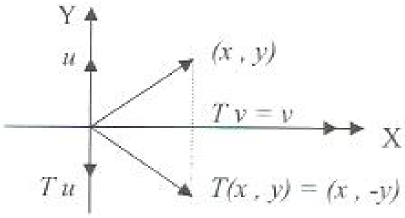

Figura IV.4 – A transformação linear simetria em relação ao eixo X.

Os dois vetores, v e u, têm uma característica comum, ambos são levados em um múltiplo. O vetor fixo v é levado nele mesmo multiplicado por 1 e u é levado nele multiplicado por -1. Vetores que têm essa característica, isto é, que são levados em seus respectivos múltiplos, são importantes para o estudo das transformações lineares. Esses vetores são denominados **autovetores** e os múltiplos **autovalores**. Como o vetor nulo multiplicado por qualquer número dá o vetor nulo e a transformação aplicada no vetor nulo leva ao vetor nulo, descartam-se da definição de autovetores os vetores nulos.

Assim:

> Seja $v \in V$, um vetor **não nulo**, que satisfaz $\boldsymbol{T\,v = \lambda\,v}$,
>
> sendo λ um número real e $T\colon V \to V$ um operador linear.
>
> $\boldsymbol{v}$ é denominado **autovetor** e $\boldsymbol{\lambda}$ **autovalor de $\boldsymbol{T}$ associado a $\boldsymbol{v}$.**

Em alguns textos, os autovalores e autovetores podem receber nomes diferentes, respectivamente como: **valores próprios e vetores próprios** ou **valores característicos e vetores característicos.**

EXEMPLO IV.28

Considere a transformação linear do exemplo IV.10, $T\colon R^2 \to R^2$ que leva um vetor (x, y) em seu simétrico em relação ao eixo X.

Considerando agora o segundo caso, $y = 0$, e substituindo-se na 1^a equação obtém-se $(1 - \lambda)\ x = 0$. Como o vetor nulo não pode ser autovetor, obrigatoriamente tem-se $x \neq 0$, e para anular a 1^a equação deve-se ter $\lambda = 1$.

Dessa maneira, os únicos valores possíveis para λ são $\lambda = \pm 1$, e os autovetores associados ao $\lambda = 1$ são da forma $b\,(1\,,\,0)$ com $b \neq 0$.

□

Observando os exemplos acima, vê-se que para problemas maiores é preciso encontrar uma maneira mais eficiente para se obter os autovalores e autovetores. No próximo exemplo, já é introduzida essa forma mais eficiente, que é descrita na próxima seção.

Nem toda transformação linear tem autovalores e autovetores, como pode ser visto no exemplo a seguir:

EXEMPLO IV.30

Considere a transformação linear do exemplo IV.11, $T: R^2 \to R^2$ que gira um vetor $(x\,,\,y)$ de um ângulo θ, no sentido trigonométrico.

Por exemplo, tome $\theta = \pi/4$.

Assim, $T(1\,,\,0) = (\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)$ e $T(0\,,\ 1) = (-\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)$

e a matriz canônica de T é $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Para encontrar os autovalores e autovetores de T é preciso resolver a seguinte equação: $T(x\,,\,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Que colocando na forma de sistema fica $\begin{cases} \sqrt{2}/2\, x - \sqrt{2}/2\, y = \lambda\ x \\ \sqrt{2}/2\, x + \sqrt{2}/2\, y = \lambda\ y \end{cases}$, ou ainda, $\begin{cases} \left(\sqrt{2}/2 - \lambda\right)x - \sqrt{2}/2\, y = 0 \\ \sqrt{2}/2\, x + \left(\sqrt{2}/2 - \lambda\right) y = 0 \end{cases}$.

Deseja-se encontrar para esse sistema uma solução não nula, e dessa forma, o sistema tem que ser possível e indeterminado. Esse sistema escrito na forma matricial fica $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \lambda & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e para que tenha mais que uma solução, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo.

Logo, $det \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \lambda & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2} = 0.$

Mas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2}$ é a soma de dois quadrados, com a segunda parcela positiva igual a $\frac{1}{2}$, mostrando que essa equação não tem raízes reais.

Para qualquer valor de λ, a única solução do sistema é o vetor $(x, y) = (0, 0)$, que não pode ser autovetor de T.

Por outro lado, pode ser sido visto geometricamente, que nenhum vetor pode ser levado em um múltiplo, já que todos os vetores não nulos, são girados no sentido trigonométrico de um ângulo igual a $\pi/4$.

□

IV.7 – Polinômio Característico

Pretende-se nessa seção, obter um método para obter os autovalores e autovetores de operadores lineares do R^n. Para os demais espaços de dimensão n, deve-se transportar o problema para o R^n, resolvê-lo e depois retornar ao espaço original. Porém, esse método de transporte não faz parte desse texto, devendo ser visto em textos mais avançados, como por exemplo, em [??] da bibliografia.

Para encontrar os autovalores e autovetores deve ser resolvida a equação vetorial $T X = \lambda X$. Considerando a matriz canônica do operador linear $T: R^n \to R^n$, $A \in M_{nxn}$, a equação $T X = \lambda X$ pode ser transformada no sistema $A X = \lambda X$, ou ainda, $A X - \lambda X = 0$. Não é possível colocar X em evidência nessa equação, pois A é uma matriz nxn e λ um número real, e não se pode fazer a subtração $A - \lambda$. Para contornar esse problema, faz-se a seguinte substituição na segunda parcela da equação $X = I X$, sendo I a matriz identidade nxn, , ficando $A X - \lambda I X = 0$. Com isso, colocando X em evidência, é obtido o sistema $\boldsymbol{(A - \lambda I) X = 0}$.

Esse sistema deve ter solução não trivial, já que um autovetor não pode ser o vetor nulo. Assim, o sistema é possível e indeterminado, e nesse caso, o determinante de sua matriz dos coeficientes é nulo. Chega-se então à seguinte equação $det\,(A-\lambda I)=0$.

Observe que o determinante, $det\,(A-\lambda I)$ é um polinômio de grau n. E para calcular os autovalores deve-se encontrar as raízes desse polinômio. O polinômio recebe o nome de **polinômio característico** ou **polinômio próprio**. Após terem sido encontradas as raízes λ do polinômio característico, os autovalores, se existirem, substitui-se no sistema $(A-\lambda I)X=0$ e resolvendo-se o sistema encontram-se os autovetores associados aos autovalores.

Método de Obtenção de Autovalores e Autovetores de $T:R^n \to R^n$

i) Ache a matriz canônica de T.

ii) Ache as raízes de $det\,(A-\lambda I)=0$; se houver, são os autovalores de T.

iii) Substitua as raízes λ , encontradas no item anterior, no sistema $(A-\lambda I)X=0$, uma por uma, e resolva os sistemas, obtendo os autovetores X , associados aos respectivos autovalores λ .

Ao se procurar os autovalores e autovetores trabalha-se com a matriz canônica A de T, diz-se que esses são também **os autovalores e autovetores da matriz** A.

EXEMPLO IV.31

Considere o exemplo IV.28, cuja matriz de T é $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Para obter os autovalores deve-se resolver primeiramente a equação característica $det\,(A-\lambda I)=0$, ou seja, $det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0\ \therefore$

$det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=0\ \therefore\ (1-\lambda)\,(-1-\lambda)=0$ cujas raízes são $\lambda=\pm 1$.

Logo esses são os autovalores de T.

Para encontrar os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$, substitui-se esse valor no sistema $(A - \lambda I)X = 0$, obtendo-se $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cujas soluções são os vetores da forma $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x$.

Como o vetor nulo não pode ser autovetor, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são da forma: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x$, $x \neq 0$.

Agora, para encontrar os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$, procede-se da mesma forma, substitui-se em $(A - \lambda I)X = 0$, obtendo-se

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que produz os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y$, $y \neq 0$.

Esses são os únicos autovalores, pois o grau do polinômio característico é 2 produzindo no máximo duas raízes.

□

EXEMPLO IV.32

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ que é a matriz canônica da transformação linear $T: R^3 \to R^3$. Para encontrar os autovalores de T ou de A, que é a mesma coisa, deve-se resolver a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja,

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \therefore (-1-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) = 0 \therefore$$

$$[(-1-\lambda)^2 - 1](4-\lambda) = 0 \therefore (\lambda^2 + 2\lambda)(4-\lambda) = 0 \therefore$$

$\lambda(\lambda + 2)(4-\lambda) = 0$ cujas raízes são $\lambda = 0$, $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$.

Para $\lambda = 0$: resolve-se o sistema $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuja matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, levando aos autovetores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$, $t \neq 0$.

Esse conjunto de autovetores mais o vetor nulo formam o núcleo da transformação linear T, pois todos esses vetores são levados por T no vetor nulo.

Para $\lambda = -2$: o sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tem as mesmas soluções que o sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que leva aos autovetores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0.$

Para $\lambda = 4$: o sistema $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ leva aos autovetores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0.$

Como $\ker T \neq \{\vec{0}\}$ essa transformação não é injetora.
Mais ainda, como $\dim \ker T = 1$, a dimensão da imagem é 2.

□

TEOREMA IV.7

Um operador linear é um isomorfismo se e somente se não tem autovalor nulo.

Demonstração

"$\Leftrightarrow$" Um operador linear T é um isomorfismo $\Leftrightarrow$ T é sobrejetora $\Leftrightarrow$ T é injetora $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{\vec{0}\}$ $\Leftrightarrow$ T não tem autovalor nulo.

□

IV.8 – Autoespaço

O polinômio característico de grau n não tem necessariamente n raízes reais. Algumas vezes ele não tem raízes, como é o caso do exemplo IV.29, ou pode ter raízes repetidas como será visto nos próximos exemplos. Nesse caso, se uma raiz se repete k vezes, como raiz do polinômio característico, diz-se que essa raiz é um autovalor de **multiplicidade algébrica** k.

EXEMPLO IV.33

Para determinar os autovalores e autovetores de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, resolve-se a equação $det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$

Observe que esse determinante é o produto da diagonal principal, pois a matriz A é uma matriz triangular. Os autovalores são $\lambda = 3$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 2$. Assim, $\lambda = 3$ tem multiplicidade algébrica 2.

Para $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ produz autovetores da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0.$$

Para $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ produz autovetores da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0.$$

□

EXEMPLO IV.34

Para determinar os autovalores e autovetores de $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determina-se as raízes da equação $det(B - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$

Observe que esse determinante, como no exemplo anterior, também é o produto da diagonal principal. Os autovalores são os mesmos do exemplo IV.33, $\lambda = 3$, $\lambda = 3$ e $\lambda = 2$. A multiplicidade algébrica de $\lambda = 3$ continua sendo 2.

O autovalor $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ produz autovetores da forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t, \ t \neq 0.$$

E o autovalor $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ leva ao sistema,

na forma escalonada, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que tem solução

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \text{ com } t \neq 0 \text{ ou } s \neq 0.$$

Observe que esse exemplo e o anterior têm os mesmos autovalores, porém, associados ao autovalor 3 são bastante diferentes. Se for incluído o vetor nulo ao conjunto de autovalores, no exemplo IV.33 obtém-se uma reta e no exemplo IV.34 um plano.

Ou seja, no primeiro caso a reta gerada pelo vetor (0 , 0 , 1) , o eixo cartesiano Z , é "esticado de 3". Todos os vetores dessa reta são multiplicados pelo autovalor 3.

No segundo caso, os vetores do plano gerado por $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ é que são "esticados de 3". Todos os vetores desse plano cartesiano, que tem equação $y = 0$, permanecem nesse plano e são multiplicados pelo autovalor 3.

□

Dado um autovalor λ de um operador $T: V \to V$, o conjunto formado pelos autovetores de T associados a λ união com o vetor nulo, é denominado **autoespaço associado ao autovalor λ**. Assim, um autoespaço associado a um autovalor, é o conjunto dos autovetores associados a ele em que é incluído o vetor nulo. Um autoespaço é denotado por $V_\lambda = \{ v \in V \mid Tv = \lambda v \}$.

EXEMPLO IV.35

No exemplo IV.33 o autoespaço V_3 é uma reta, logo, $dim\ V_3 = 1$, e no exemplo IV.34 o autoespaço V_3 é um plano, assim, $dim\ V_3 = 2$.

□

EXEMPLO IV.36

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculando-se os autovalores de A obtém-se o polinômio característico:

$$det\,(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2 = 0.$$

Assim, os autovalores são: $\lambda = 1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 2$.
O autovalor $\lambda = 1$, que tem multiplicidade algébrica 2, produz autovetores da

forma: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, levando a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0.$

O autoespaço V_1 é o subespaço gerado pelo vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, logo $dim\, V_1 = 1$.

O autovalor $\lambda = 2$, que também tem multiplicidade algébrica 2, produz

autovetores da forma: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

levando a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k$, t ou $k \neq 0$. Nesse caso, $dim\, V_2 = 2$.

$\square$

Observe que em todos os exemplos dessa seção, os autoespaços são subespaços de V. Isso sempre ocorre, como pode ser visto no teorema a seguir:

TEOREMA IV.8 ——————————

Um autoespaço V_λ de um operador linear $T: V \to V$ é um subespaço de V.

Demonstração ——————————

"$\Rightarrow$" Por definição, qualquer autoespaço inclui o vetor nulo, logo é diferente do vazio. Se $u, v \in V_\lambda$, $Tu = \lambda u$ e $Tv = \lambda v$, logo,
$T(u+v) = Tu + Tv = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$, e assim, $u + v \in V_\lambda$.
Se $u \in V_\lambda$ e $a \in R$, $T(au) = aTu = a(\lambda u) = \lambda(au) \therefore au \in V_\lambda$.
Mostrou-se que o autoespaço V_λ é um subespaço de V.

—————————— □

TEOREMA IV.9 ——————————

Dados dois autovalores diferentes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de um operador linear $T:V \to V$ então, os autovetores v_1 e v_2 associados, respectivamente, aos autovalores λ_1 e λ_2 são LI.

Demonstração ——————————

"$\Rightarrow$" Para mostrar que $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, é preciso mostrar que a equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$, tem somente a solução $a_1 = a_2 = 0$.
Para isso, aplique T nos dois lados da equação, obtendo
$T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T v_1 + a_2 T v_2 = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = T0 = 0.$
Como $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ tem-se que $a_1 v_1 = -a_2 v_2$, que substituído na equação $a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$, obtida acima, fica:
$-\lambda_1 a_2 v_2 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0 \therefore a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0.$
Por hipótese $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e como v_2 é autovetor, não pode ser o vetor nulo, segue que $a_2 = 0$, que substituído na equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ leva a $a_1 v_1 = 0$. Da mesma forma, v_1 é autovetor e não pode ser o vetor nulo, segue que $a_1 = a_2 = 0$.

—————————— □

Esse teorema poderia ter sido demonstrado para um número qualquer de autovalores diferentes. Ou seja, k autovetores, respectivamente, associados a k autovalores distintos são LI.

TEOREMA IV.10 ——————————

Se $dim\ V = n$ e a soma das dimensões de todos os autoespaços do operador linear $T:V \to V$ é n então existe uma base de V formada por autovetores de T.

Demonstração

"$\Rightarrow$" Se T possui k autovalores distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_k$ e $dim\ V_{\lambda_j} = d_j$, $j = 1, \ldots, k$, por hipótese, $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = n$. Sejam $\{v_{1\lambda_j}, \ldots, v_{d_j\lambda_j}\}$ bases dos autoespaços V_{λ_j}. Considere o conjunto β formado por todos os elementos de todas as bases acima, $\beta = \bigcup_{j=1}^{k} \{v_{1\lambda_j}, \ldots, v_{d_j\lambda_j}\} \subset V$. Esse conjunto β possui n vetores e é linearmente independente, pois é constituído por autovetores LI. para cada autovalor e, para os autovalores diferentes, são LI, pelo teorema anterior (para demonstrar que β é LI., deve ser usado indução matemática em k).

□

EXEMPLO IV.37

Considere a transformação linear $T: R^3 \rightarrow R^3$, que leva os vetores do R^3 em suas sombras no plano π de equação $x + 2y - z = 0$. A sombra é provocada pela luz do sol, que está na direção do vetor $u = (1, 1, 1)$. Deseja-se obter a transformação linear T.

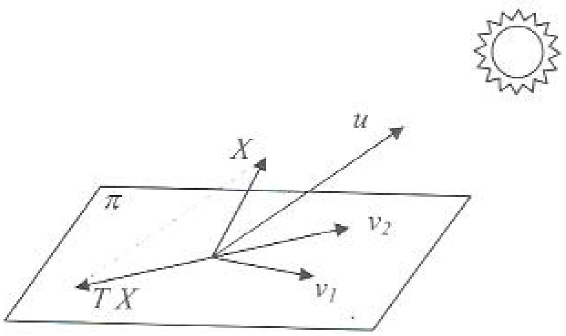

Figura IV.5 – A transformação linear projeção obliqua num plano.

A sombra do vetor u, que dá a direção do sol, é o vetor nulo. Logo, u é um autovetor do núcleo de T, ou seja, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 0$. Qualquer vetor do plano π fica fixo, logo esse plano é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$. Tomando dois vetores LI. do plano π, por exemplo, os vetores $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (1, -1, -1)$, obtém-se uma base do autoespaço V_1.

Coloque em um único conjunto β os vetores u, v_1 e v_2.

Assim, $\beta = \{u, v_1, v_2\}$ é uma base do R^3 formada por autovetores de T.

Escreva um vetor genérico $(a, b, c) \in R^3$ como combinação linear de β. Ou seja, $(a, b, c) = x\,u + y\,v_1 + z\,v_2 = x(1, 1, 1) + y(1, 0, 1) + z(1, -1, -1)$

$\therefore (a, b, c) = (x + y + x\ ,\ x - z\ ,\ x + y - z)$, levando ao seguinte sistema: $\begin{cases} x + y + z = a \\ x - z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$, cuja matriz aumentada é $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right)$ e tem como matriz escalonada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+2b-c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-c}{2} \end{array}\right)$. Logo a solução é, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+2b-c}{2} \\ c-b \\ \frac{a-c}{2} \end{pmatrix}$ e assim, $(a, b, c) = x\,u + y\,v_1 + z\,v_2 = \frac{a+2b-c}{2}u + (c-b)v_1 + \frac{a-c}{2}v_2$.

Aplicando T nos dois lados da igualdade fica:

$T(a, b, c) = x\,Tu + y\,Tv_1 + z\,Tv_2$.

Usando que β é uma base de autovetores, $T(a, b, c) = x\,0 + y\,v_1 + z\,v_2$, logo, $T(a, b, c) = y\,v_1 + z\,v_2 =$

$(c-b)\,v_1 + \frac{a-c}{2}v_2 = (c-b)(1, 0, 1) + \frac{a-c}{2}(1, -1, -1) =$

$\left(\frac{a-2b+c}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{3c-2b-a}{2}\right)$.

Ou se preferir, $T(x, y, z) = \left(\frac{x-2y+z}{2}, \frac{z-x}{2}, \frac{3z-2y-x}{2}\right)$.

$\square$

Esse exemplo mostra a importância de se conhecer uma base formada por autovetores. O processo para se obter a transformação linear a partir dessa base é o seguinte:

Seja $\beta = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$ uma base conhecida, formada por autovetores de $T: R^n \to R^n$, associados, respectivamente, aos autovalores λ_1, λ_2, ... e λ_n. Para encontrar T, escreva um vetor genérico $v = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in R^n$ como combinação linear da base β, obtendo:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Depois, aplique T em v, sabendo que $Tv_i = \lambda_i v_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

$$Tv = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 Tv_1 + a_2 Tv_2 + \dots + a_n Tv_n .$$

Agora usando que esses vetores são autovetores de T:

$$Tv = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_n \lambda_n v_n .$$

Assim, encontrar T consiste, basicamente, em obter $v|_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, ou seja, obter as coordenadas de v na base β e depois fazer a combinação linear acima.

IV.9 – Exercícios

1) Verifique se as funções abaixo, são ou não são transformações lineares, justificando:

a) $F_1 : R^3 \to R^3$, tal que $F_1(x, y, z) = (3x - 4y + 5z, 4x + z, y - 6z)$.

b) $F_2 : R^2 \to R^3$, tal que $F_2(x, y) = (x - y, 4x + y, 8xy)$.

c) $F_3 : R^3 \to R^2$, tal que $F_3(x, y, z) = (4x - 4y + z, 4x + y - 7)$.

d) $F_4 : R^2 \to R^3$, tal que $F_4(x, y) = (12x - 7y, 4y, 8x + y)$.

e) $F_5 : R^4 \to R^2$, tal que $F_5(x, y, z, t) = (-x - 4y + 4z - 3t, 4x + 6y - t)$.

f) $F_6 : P_2 \to R^2$, tal que $F_6(at^2 + bt + c) = (a + b, b - 2c)$.

g) $F_7 : R^2 \to M_{2x2}$, tal que $F_7(x, y) = \begin{pmatrix} x - y & -2y \\ 3x & x + y \end{pmatrix}$.

2) Dê exemplos de:

a) Uma transformação linear de R^3 em R^4.

b) Uma transformação linear de R^4 em R^5.

c) Uma função de R^3 em R^3 que não seja uma transformação linear.

d) Uma transformação linear de R^3 em R^4, tal que $dim\ ker\ T$ seja 3.

e) Uma transformação linear de R^3 em R^4, tal que $dim\ Im\ T$ seja 3.

f) Uma transformação linear de R^3 em R^4, tal que $dim\ Im\ T$ seja 2.

g) Uma transformação linear de R em R^3, tal que $Im\ T = [(1, 2, 3)]$.

h) Um isomorfismo de M_{2x2} em R^4.

3) Dada a transformação linear T do R^4 no R^4, tal que $T(x, y, z, t) = (x - y + z - t, x + 2z + 2t, x + 4z, x + y + 5z + 3t)$:

a) Obtenha uma base para o núcleo de T.

b) Obtenha uma base para a imagem de T.

c) Justifique os resultados dos itens anteriores pelo teorema do Núcleo e da Imagem.

d) Obtenha equação (ou equações) para a imagem de T.

4) Determine o núcleo e a imagem e teste o teorema do Núcleo e da Imagem para as transformações lineares:

a) $T : R^3 \to R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y - z, x - 2y + z, x + 4y - 3z)$.

b) $T : R^4 \to R^3$ tal que $T(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + t, y + z)$.

c) $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(at^2 + bt + c) = 2at + b$.

d) $T : R^3 \to R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x + 3z)$.

e) $T : M_{2x2} \to R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c, a - d)$.

5) No exercício anterior, verifique qual das transformações lineares dadas é isomorfismo. Em caso afirmativo, determine sua inversa. Verifique se a inversa está correta fazendo a composta.

6) Ache as compostas, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$, das transformações lineares:
$T_1 : R^3 \to R^2$ tal que $T_1(x, y, z) = (x + y, x - z)$ e
$T_2 : R^2 \to R^3$ tal que $T_2(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$.

7) Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem, e dê as dimensões de:
a) $T: R^4 \to R^4$ tal que $T(x,y,z,t) = (x + y + z + t,\ x + t,\ y + t,\ 2y + z + t)$.
b) $T: R^4 \to R^4$ tal que
$T(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - t,\ z + 2t, x + y + 2z + 3t)$.
c) Verifique se as transformações lineares acima são isomorfismos.

8) Determine os autovalores e autovetores das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

9) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 & 24 \\ 0 & 24 & 7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$:

a) Encontre os autovalores e autovetores de A.
b) Quais são as dimensões dos autoespaços associados aos autovalores encontrados.
c) A partir dos autovalores como é possível saber se a matriz A tem inversa? Justifique.

10) Dê exemplos de:
a) Um operador linear de R^2 em R^2 que não tenha autovalores.
b) Um operador linear de R^4 em R^4 que tenha apenas um autovalor.
c) Um operador linear de R^3 em R^3 que tenha 3 autovalores.
d) Um operador linear de R^3 em R^3, tal que $\dim \ker T$ seja 2.
e) Um operador linear que é isomorfismo em R^4.

11) Seja S um subespaço de V e $T: V \to W$ uma transformação linear. Mostre que o subconjunto $T(S) = \{ w \in W \mid w = Tv \ \textit{para algum} \ v \in S \}$ é um subespaço de W.

12) Considere a transformação linear $T: R^2 \to R^2$ que tem autovalor $\lambda_1 = 5$ associado ao autovetor $(1, 2)$ e o autovalor $\lambda_2 = 10$ associado ao autovetor $(2, -1)$:
   a) Escreva o vetor genérico (x, y) do R^2 como combinação linear da base $\beta = \{(1, 2), (2, -1)\}$.
   b) Encontre $T(x, y)$.
   c) Obtenha a matriz canônica de T.

13) Determine a transformação linear de R^3 em R^3, tal que:
$(1, 1, 1)$ é um autovetor associado autovalor 3,
$(1, 0, -1)$ é um autovetor associado ao autovalor 2 e
$(1, -2, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor 6.

14) Determine uma transformação linear de R^3 em R^3, tal que:
Faz a simetria em relação ao plano $x + y + z = 0$.

15) Mostre que uma reta no R^3 que contém a origem é isomorfa aos reais.

16) Determine uma transformação linear de R^3 em R^3, tal que:
Projeta ortogonalmente os vetores na reta que tem equação paramétrica:
$x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$.

17) Mostre que:
   a) Dois autovetores associados a dois autovalores diferentes são linearmente independentes.
   b) Dois autovetores podem ser linearmente independentes, mas estarem associados ao mesmo autovalor.
   c) Se v é um autovetor e k é um número real, não nulo, então $k\,v$ também é um autovetor, associado ao mesmo autovalor.
   d) Se o operador linear T não é injetivo, tem apenas dois autovalores diferentes e se u e v são autovetores associados, respectivamente, aos dois autovalores então Tu e Tv são LD.

18) Se $T: V \to V$ é uma transformação lineares, α um número real não nulo, e λ autovalor de T. Determine um autovalor para:
   a) αT b) $T \circ T$ c) $T + T$ d) T^{-1}

19) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

a) Mostre que A e B são invertíveis.
b) Mostre que $A\,B$ é diferente de $B\,A$
c) Determine o posto de A, B, A^{-1}, $A\,B$ e $B\,A$.
d) Encontre os autovalores de $A, B, A\,B$ e $B\,A$.
e) Encontre os autovetores de $A, B, A\,B$ e $B\,A$.

20) Considere as transformações lineares:
$T_1: R^3 \to R^3$ tal que $T_1(x, y, z) = (x + y - 2z, x - z, y - z)$ e
$T_2: R^3 \to R^3$ tal que $T_2(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, x)$:
a) Ache as compostas $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$.
b) Determine os autovalores e autovetores de T_1, T_2, $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$.
c) Pelos seus autovalores é possível dizer se essas transformações lineares são invertíveis? Como?
d) Calcule as dimensões dos autoespaços e dos núcleos de $T_1 \circ T_2$ e $T_2 \circ T_1$

21) Sejam A e B duas matrizes invertíveis de mesma ordem. Mostre que:
a) Se λ é um autovalor da matriz $A\,B$ associado ao autovetor v, então λ é um autovalor associado ao autovetor $B\,v$ da matriz $B\,A$.
b) Os autovalores de $A\,B$ e de $B\,A$ são iguais.

22) Determine os autovalores e autovetores das transformações lineares:
a) $T: R^3 \to R^3$ tal que
$T(x, y, z) = 1/3(3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$.
b) $T: R^4 \to R^4$ tal que $T(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y + t, 3z, 2t)$.
c) $T: P_2 \to P_2$ tal que $T(at^2 + bt + c) = 2at + b$.
d) $T: R^3 \to R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, -z, 3z)$.

23) Dada a transformação linear T que faz a projeção ortogonal no plano $x = z$:
a) Encontre, geometricamente, uma base do R^3 formada por autovetores de T.
b) Determine $T(x, y, z)$.

24) Determine o posto da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Qual é o posto linha e o posto coluna de A ?

b) Se A é a matriz canônica da transformação linear $T:R^n \to R^m$, calcule $dim\ Im\ T$ e $dim\ ker\ T$.

25) Sejam $T:R^n \to R^n$ uma transformação linear, v um autovetor de T associado ao autovalor λ e A a matriz canônica de T:

a) Se $P \in M_{nxn}$ é invertível e para alguma matriz B tem-se que $A = P^{-1} B P$, mostre que A e B têm os mesmos autovalores.

b) Com as mesmas hipóteses do item anterior, mostre que $P^{-1} v$ é um autovetor de B, associado ao mesmo autovalor λ de A.

c) Mostre que: zero é autovalor de $A \Leftrightarrow A$ não é invertível.

d) Se A é invertível, mostre que $1/\lambda$ é autovalor de A^{-1} e v é autovetor de A^{-1} associado ao autovalor $1/\lambda$.

e) Mostre que: se $p \in R$ então $\lambda - p$ é autovalor de $A - pI$ associado ao autovetor v, sendo I a matriz identidade de ordem n.

f) Mostre que: se A não é invertível então existe $p \in R$ que torna a matriz $A - pI$ invertível.

g) Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, encontre os valores de p para os quais $A - pI$ é invertível

h) Considerando a matriz A do item anterior, encontre p de forma que, se λ é um autovalor de $A - pI$ então $-\lambda$ é o outro autovalor de $A - pI$.

i) Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, mostre que: se λ_1 e λ_2 são dois autovalores de A, então $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ e $\lambda_1 \lambda_2 = det\ A$.

IV.10 –'Apêndice do Capítulo IV

Aplicação em Computação Gráfica

A álgebra linear é uma ferramenta importante quando se pretende usar um computador para trabalhar gráficos de funções. Aqui, será feita apenas uma pequena introdução, mostrando como é possível traçar gráficos de funções de R em R e curvas no R^3 usando a tela do computador para exibi-los.

Não serão mostrados os detalhes computacionais, e sim um método para fazer desenhos na tela utilizando os conceitos desse livro,.

A tela do computador pode ser vista como uma matriz em que cada elemento é uma luz que acende ou apaga, ou ainda, pode ser pintado de uma determinada cor. Esses elementos são denominados **pixels**. Para simplificar, suponhamos que a tela é toda branca (ou seja, os pixels estão todos pintados de branco). Escrever ou desenhar na tela significa pintar pixels de preto (ou de outra cor escolhida).

O tamanho dessa matriz varia. No nosso caso, será considerado que ela tem 600 linhas e 800 colunas. O pixel de coordenadas $(0, 0)$ se encontra no canto esquerdo superior da tela, como mostra a figura abaixo.

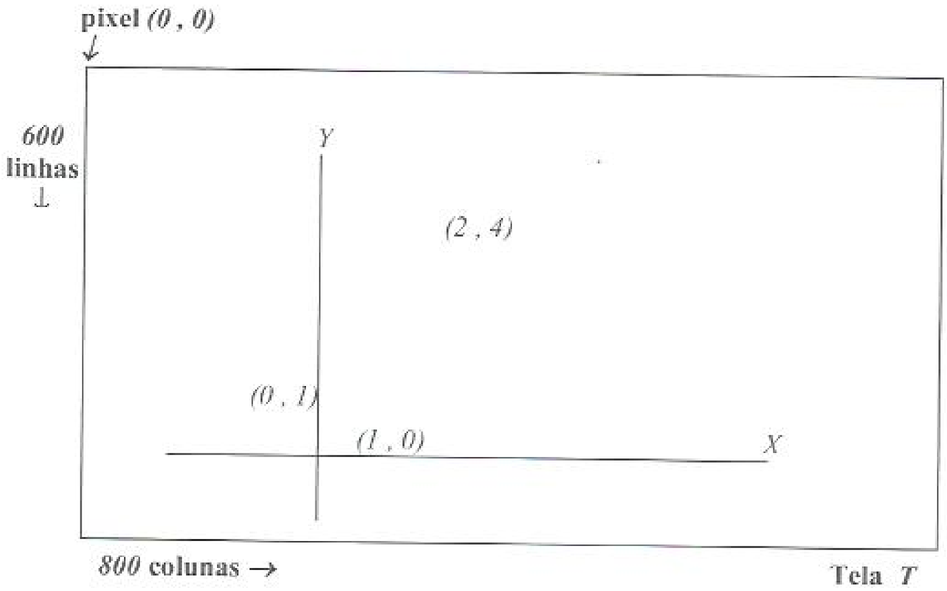

Figura IV.6 – Desenho na tela do computador dos eixos cartesianos.

Para desenhar os eixos do R^2 na tela do computador, que será denominada T, é preciso criar uma função $F:R^2 \rightarrow T$, que leva os pontos do R^2 na tela T, $F(x, y) = (x', y')$. Considere que a tela do computador T é um retângulo, em uma outra cópia do R^2, e que os valores de x' e de y', em T, só recebem valores inteiros, com $1 \leq x' \leq 800$ e $1 \leq y' \leq 600$. Para desenhar os eixos cartesianos do R^2 é preciso decidir a posição desses eixos na tela. Para isso são necessárias três informações: em que lugar da tela vai ficar a origem e a qual é a posição dos dois vetores de uma base, de preferência a canônica. Se é desejado colocar os eixos como os da figura acima, e para isso, deve-se fixar na tela a posição da origem e da base canônica do R^2, considere, por exemplo, que a origem fique no pixel $(400, 200)$ e que os elementos da base canônica ficam nos seguintes pixels: $(1, 0) \rightarrow (400, 210)$ e $(0, 1) \rightarrow (390, 200)$. Esses valores são arbitrados, escolhidos por quem vai fazer os eixos.

Com esses dados, é possível ver que F não é uma transformação linear, pois $F(0, 0) \neq (0, 0)$. A função F é uma **transformação afim**, isto é, **a soma de uma transformação linear com uma constante**. Ou seja, $F(x, y) = T(x, y) + (a, b)$, sendo T uma transformação linear e (a, b) constante a determinar. Como uma transformação linear leva a origem na origem, temos que as constantes a e b podem ser determinadas por:

$$(a, b) = F(0, 0) - T(0, 0) = (400, 200) - (0, 0) = (400, 200).$$

Para determinar T, e consequentemente F, basta substituir os vetores da base canônica em F:

$$T(1, 0) = F(1, 0) - (400, 200) = (400, 210) - (400, 200) = (0, 10).$$

E,

$$T(0, 1) = F(0, 1) - (400, 200) = (390, 200) - (400, 200) = (-10, 0).$$

De posse desses valores, a matriz canônica de T é $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$. Assim, é possível escrever a função F, matricialmente, como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Ou ainda, podemos colocar a função na seguinte forma:

$$(x', y') = F(x, y) = (400 - 10y, 200 + 10x).$$

Para desenhar o ponto $(2, 4) \in R^2$ na tela, basta desenhar (colorir) o pixel $F(2, 4) = (400 - 40, 200 + 20) = (360, 220)$.

Com essas escolhas, os menores e os maiores valores do R^2 que podem ser representados na tela T são, respectivamente: $x = -20$ e $y = -40$ e $x = 40$ e $y = 40$.

Para desenhar na tela o eixo X, ou seja, desenhar a reta $y = 0$, que corresponde à linha 400, deve-se colorir os pixels $F(x, 0) = (400, 200 + 10x)$, com x variando no intervalo $[-19, 39]$, para não ocupar a tela toda.

O eixo Y $(x = 0)$ corresponde à coluna 200 da tela e para desenhá-lo deve ser usada a função $F(0, y) = (400 - 10y, 200)$ com $y \in [-39, 39]$.

O gráfico de uma função $y = f(x)$ é constituído por pontos da forma $(x, f(x))$. Esse gráfico pode ser desenhado na tela usando-se a função $F(x, y) = (400 - 10f(x), 200 + 10x)$ com $-20 \le x \le 40$, como mostra a figura abaixo.

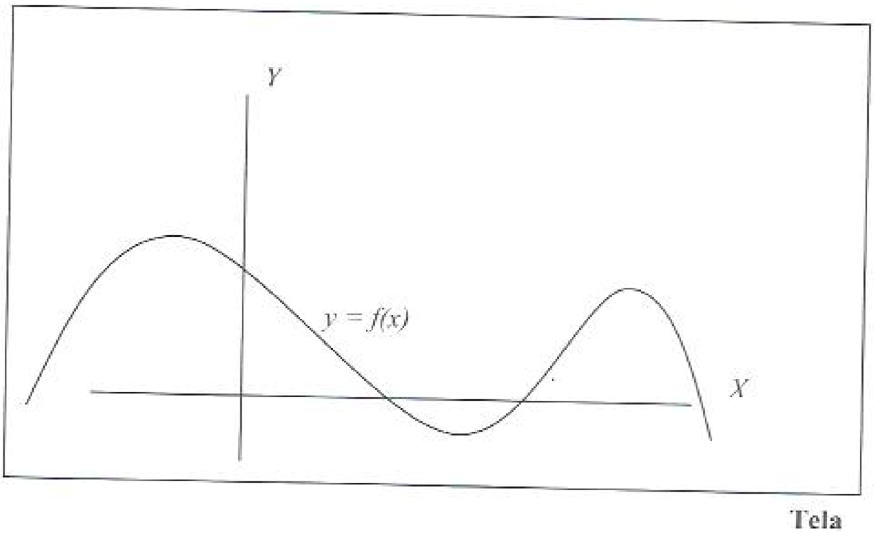

Figura IV.7 – Desenho na tela do gráfico da função $y = f(x)$.

Da mesma forma que foi feito o desenho, na tela do computador, dos eixos do R^2, é possível desenhar os eixos do R^3. Para isso, é necessário definir as posições na tela do computador da origem e da base canônica do R^3. Podemos fazer as seguintes escolhas.

Pontos do R^3		**Localizações na tela (pixels)**
origem	$\rightarrow$	$(300\,,\,350)$
$(1,0,0)$	$\rightarrow$	$(310\,,\,340)$
$(0,1,0)$	$\rightarrow$	$(300\,,\,360)$
$(0,0,1)$	$\rightarrow$	$(290\,,\,350)$

Usando o mesmo raciocínio feito para o R^2, a função afim que leva pontos do R^3 em pontos da tela, considere

$$(x', y') = F(x, y, z) = T(x, y, z) + (300, 350).$$

Ou de forma matricial, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 \\ -10 & 10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 300 \\ 350 \end{pmatrix}$. (*)

Ou ainda, $(x', y') = F(x, y, z) = (300 + 10x - 10z\,,\, 350 - 10x + 10y)$.

Para desenhar os eixos, temos:

Eixo X: $(y = z = 0)$, $F(x, 0, 0) = (300 + 10x\,,\, 350 - 10x)$, $0 \le x \le 25$.
Eixo Y: $(x = z = 0)$, $F(0, y, 0) = (300\,,\, 350 + 10y)$, $0 \le y \le 25$.
Eixo Z: $(x = y = 0)$, $F(0, 0, z) = (300 - 10z\,,\, 350)$, $0 \le z \le 25$.

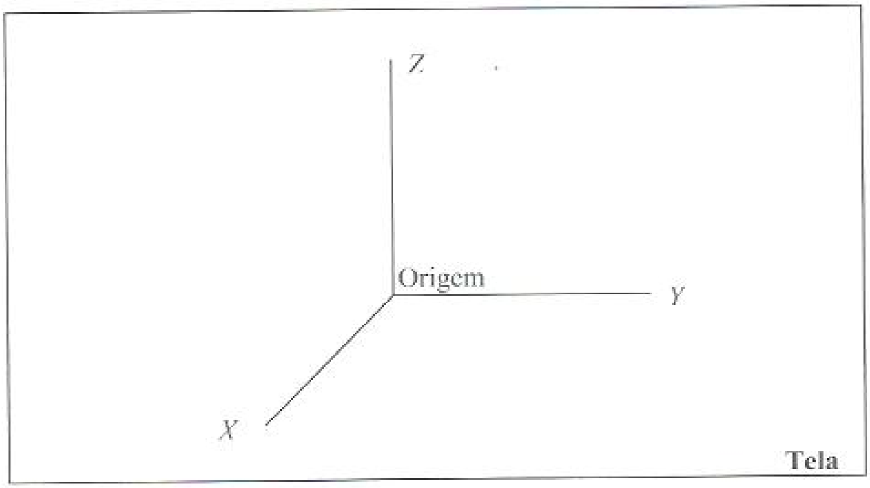

Figura IV.8 – Desenho na tela dos eixos cartesianos do R^3.

Para desenhar uma curva da forma $g(t) = (\cos t\,,\ sen\ t\,,\ t)$ na tela do computador, deve-se prestar atenção pois estamos trabalhando com valores inteiros. Não serão discutidos aqui os problemas da parte computacional, como havíamos comentado. Porém, será feita a parte matemática necessária do método no caso dessa função $g(t)$,

$$x = \cos t\,,\ y = sen\ t \ \text{ e } \ z = t.$$

A função F definida em (*), assume a forma

$$F(x\,,y\,,z) = (300 + 10\cos t - 10t\,,\ 350 - 10\cos t + 10sen\ t)\,,\ \text{com } 0 \le t \le 20.$$

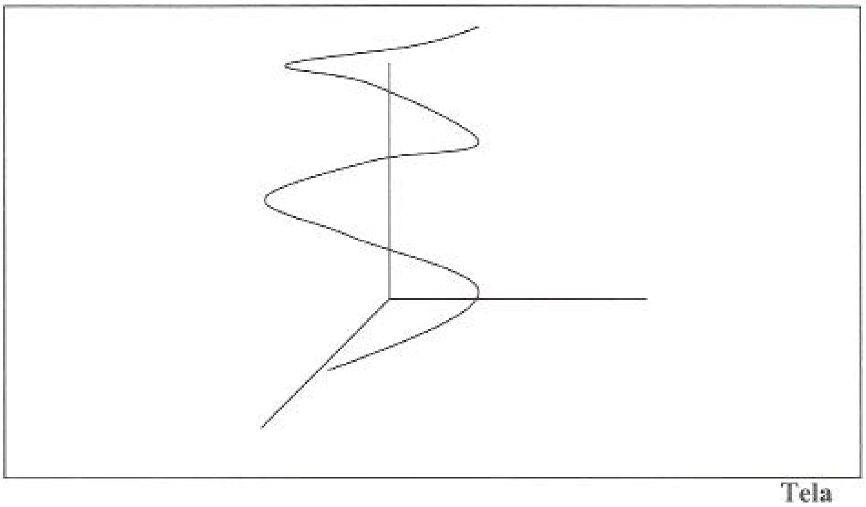

Figura IV.9 – Desenho de uma curva no R^3.

V - Respostas de Alguns Exercícios

Capítulo I

I.6.1) a) ± 3 b) Pontos da circunferência de centro na origem $(0, 0)$ e raio 3.
c) Pontos da esfera de centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio 3.

I.6.2) $(3, 2) = 5/2\,(1, 1) + 1/2\,(1, -1)$.

I.6.4) a) $(3, 5)$ b) $(1, 2)$ c) $(-1, 1)$.

I.6.5) Circunferência de centro na origem e raio 1.

I.6.6) $(3/5, -4/5)$ e $(-3/5, 4/5)$.

I.6.7) a) $x^2 + y^2 = 4$. b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$. c) $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

I.6.9) a) $X = tA$, $t \in R$. b) $X = tA + B$, $t \in R$. c) Retas.

I.6.11) a) $x + y = 2$ e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in R$ e $2x - y = 6$

c) $2x + 3y = 5$ d) $3x - 2y = 0$.

I.6.12) a) (a, b) é perpendicular à reta b) 5. c) $\sqrt{2}/2$.

d) Interseção: $(1/3, -1/3)$, ângulo: $\arccos(\sqrt{10}/10)$.

e) Distância: $\sqrt{2}$, paralelas. f) $2x - y = 9$. g) $2\sqrt{5}/5$.

h) Perpendiculares, interseção: $(8, 0)$.

i) Perpendiculares, interseção: $(3, -3)$.

I.6.13) a) $x = \dfrac{y^2}{4} + 1$. b) $x = \dfrac{y^2}{4p}$. c) $(y - b)^2 = 4px$.

I.6.14) a) $(3, -3)$. b) $(3/2, -3/2)$. c) $(-1, -7)$. d) $(2, -1)$.

I.6.15) a) Não.

b) Não, pois o R^2 é o conjunto dos pares de números reais, e o R^3 é o conjunto das triplas de números reais.

I.6.17) a) Esfera de centro na origem e raio 1.

b) $(1/3, -2/3, 2/3)$ e $(-1/3, 2/3, -2/3)$.

I.6.18) a) (a, b, c) é perpendicular ao plano

b) $(1, -2, 1)$ c) $(0, 0, 0)$.

I.6.19) a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$. b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

c) $x - y + z = 0$. d) $x - y + z = 1$. e) $x - 2y + z = 0$.

f) $2x - 3y + 2z = 2$. g) $x = z$. h) $x + y - 2z = 0$.

I.6.20) a) $\alpha = \dfrac{d}{\|u\|^2}$; b) $ax + by + cz = 0$. c) $\dfrac{|d|}{\|u\|}$.

d) $\dfrac{|d|}{\|u\|}$. e) $\dfrac{|d - d'|}{\|u\|}$. f) $\dfrac{|a+b+c|}{\|u\|}$.

I.6.21) $(-1, 2)$. No R^2.

I.6.22) $x + y + z = 0$ e $x + y + z = 6$.

I.6.23) a) $\pi/3$. b) $3\pi/4$. c) $\pi/2$. d) $\pi/2$. e) $\pi/4$.

f) As retas do item c estão no R^2 e as do item d no R^3.

I.6.24) b) $(2, 0, 3)$.

I.6.25) a) Direção: $(1, 1, 1)$. b) $x + y + z = 0$.

c) $(1/3, -5/3, 4/3)$ e $(5/3, -1/3, -4/3)$ d) $4\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

I.6.26) a) $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -2t - 1 \\ z = 1 \end{cases}$ $; t \in R$. b) 3. c) $\begin{cases} x = 2s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$ $; s \in R$.

I.6.27) a) $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$ $; t \in R$.b) $x = y$. b) $(1, -1, 1)$. c) $\dfrac{\pi}{4}$.

I.6.28) b) $x = y$. c) $x - y = -1$ e $x - y = 1$. d) $\sqrt{2}$. e) $\sqrt{2}$.

I.6.29) a) $\pi_2 : y + z = 0$ e $\pi_3 : x + 2y + z = 0$.

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in R$.

I.6.30) a) Paralelas, mesma direção e distância $= \sqrt{5}$.

b) Reversas, não são paralelas e não têm interseção e distância $7\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

c) Concorrentes no ponto $(1, 1, -1)$.

e) $\sqrt{3}/3$.

I.6.31) a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. b) Centro: $(1, -2, 0)$ raio: $\sqrt{5}$.

I.6.32) a) Plano contendo a origem. b) R^3. c) Plano $x = y$.

I.6.33) a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in R$. b) $x + y - 2z + 4 = 0$.

I.6.34) a) Não. b) Sim, $2x + 2y - z = 3$. c) Não.

I.6.35) a) 5. b) $\sqrt{83}$, c) $4\sqrt{6}$.

I.6.36) a) $\begin{cases} x = t + s + 1 \\ y = t + 2s - 1 \, ; \, t, s \in R \\ z = t + 3s + 1 \end{cases}$. F:($t = s = 0$), Q:($t = 1$ e $s = 0$), P:($t = 0$ e $s = 1$)
e T:($t = 1$ e $s = 1$) b) $x - 2y + z = 4$. c) Pela Regra do Paralelogramo: $FQ + FP = FT$. d) $\sqrt{6}$. e) $\sqrt{29}$ e $\sqrt{5}$. f) $(2 \, , \, ½ \, , \, 3)$.
I.6.37) 1.
I.6.38) a) $1/6$, b) $2/3$.
I.6.39) $\sqrt{29}$.
I.6.40) São paralelos.
I.6.41) a) $(2 \, , \, 3 \, , \, 4)$. b) $x + y + z = 9$. c) $\sqrt{3}$.
d) Sim, paralelo à reta que contém A e B distando $\sqrt{3}$ dessa reta.
I.6.42) a) $x + y + z = 3$. b) $\sqrt{3}/2$. c) $\sqrt{3}$. d) $1/2$.
I.6.43) a) $(A \times B) . X = 0$. c) $(A + B) . A = (A + B) . B$. d) $(3/5 \, , \, -4/5 \, , \, 7/5)$.
e) $(3 \, , \, 4 \, , \, -1)$.
I.6.44) a) $D = (8 \, , \, 1 \, , \, -3)$. b) $x + y + z = 6$.
I.6.45) b) $x - y - z = 0$ e $x - y - z = -1$. c) $x - y + 2z = 3$. d) $(4/3 \, , \, 1 \, , \, 4/3)$.
e) $(x \, , \, y \, , \, z) = (1 \, , \, -1 \, , \, -1)u + (4/3 \, , \, 1 \, , \, 4/3)$, $u \in R$ f) $(5/3 \, , \, 2/3 \, , \, 1)$.
I.6.47) a) Mostre que os vértices, origem e $A + B$, estão em uma das retas e os outros dois vértices, A e B, estão na outra.
b) Use as direções das retas do item anterior.
c) Faça o desenho do paralelogramo e use a área de dois triângulos.
I.6.48) a) $t = -1/2$. b) $(-1 \, , \, 5 \, , \, 4)$ e $(7 \, , \, 5 \, , \, 10)$.
c) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 7)^2 = 25$.
I.6.49) a) $(x \, , \, y \, , \, z) = (2t - 1 \, , \, 2t - 2 \, , \, t - 3)$, $t \in R$. b) $(1 \, , \, 2 \, , \, 3)$. c) 1.
I.6.50) a) $(x \, , \, y \, , \, z) = (t + 1 \, , \, t \, , \, t - 1)$, $t \in R$. b) $(0 \, , \, -1 \, , \, -2)$.
I.6.51) a) $B = (2 \, , \, 2 \, , \, 3)$. b) $(x \, , \, y \, , \, z) = (2s + 2 \, , \, 2 \, , \, 3 - s)$, $s \in R$.
c) $D = (4 \, , \, 2 \, , \, 2)$. d) 15/2 e) $5x + y + z = 24$.
f) $(x \, , \, y \, , \, z) = (2t + 2 \, , \, 2 - 5t \, , \, 4t + 3)$, $0 \le t \le 1$.
I.6.52) b) Mostre que $u . v = 0$.
I.6.53) a) $x + y + z = 2$. c) $F = (3 \, , \, 3 \, , \, -1)$, $G = (-1 \, , \, 4 \, , \, 0)$ e $H = (-1 \, , \, 2 \, , \, 2)$.
d) 12.

Capítulo II

II.10.2) a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 10 & 24 & 26 & -8 \\ 4 & 10 & 10 & -4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 13 & 30 & 35 & -8 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. n) *1*. o) *0*. q) *0*. r) *1*. s) *1*.

II.10.3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e B^{-1} não existe logo $\det B^{-1}$ não pode ser calculado. $(AB)^{-1}$ não existe.

II.10.4) a) Sistema possível e determinado, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Sistema impossível.

d) Sistema possível e indeterminado, $X = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; t, s \in R$.

e) Sistema impossível.

f) $AX = E \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}E \Rightarrow X = A^{-1}E = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II.10.5) a) $FC = I_2$. b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 & -a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b \\ 0 & -c & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d \\ 0 & -e & \frac{1}{2}f & \frac{1}{2}f \\ 0 & -g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}h \end{pmatrix} \neq I_4$.

II.10.8) a) Está reduzida por linhas à forma escada.

b) Não está, pois o primeiro elemento da primeira linha não é um.

c) Não está, pois a linha nula não ocorre abaixo de todas.

d) Não está, pois acima do 1º elemento não nulo de uma linha tem elemento não nulo.

II.10.9) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -8/5 & -2/5 \\ -1/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $det\,A = -5$ e $X^t = (1\ ,-1\ ,2\ ,-2)$.

II.10.10) a) $X^t = (-1\ ,1\ ,-1\ ,1)$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ d) $det\,A = 2$.

II.10.11) a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s,t \in R$. b) Possível e indeterminado.

c) Sim, $X^t = (3\ \ 2\ \ 0\ \ -1\ \ 0)$.

II.10.12) a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3 \in R$. Possível e indeterminado.

b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II.10.13) a) Possível e indeterminado. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, s e $t \in R$.

b) Impossível.

c) Possível e indeterminado. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$, s e $t \in R$.

II.10.14) a) *0.* b) *-2.* c) *4.*

II.10.15) a) *5.* b) *-18.* c) *2.*

II.10.16) a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \, , \; t \in R.$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} , \; t \in R.$

II.10.17) a) 2 , 0 , 2 , 1 e 0.

b) $2 + 2 = 4$, $0 + 4 = 4$, $2 + 3 = 5$, $1 + 2 = 3$ e $0 + 2 = 2$.

c) Separe as em duas partes: as que contêm a matriz identidade e as das variáveis livres e conclua.

II.10.19) a) $X = 0$ é uma solução. b) Pois $det\, A \neq 0$. c) $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$.

II.10.20) d) Sugestão: multiplique $A^t A X = 0$ à esquerda por X^t e conclua que o sistema $A^t A X = 0$ tem uma única solução. Finalmente, use os teoremas II.1 e II.2 para chegar à tese.

II.10.21) a) $X = C^{-1} A B^{-1}$. b) $X = C$. c) $X = A B^t C$.

II.10.22) a) $2ab = 1$. b) $(a, b) = \left(\sqrt{2}/_2, -\sqrt{2}/_2\right)$ ou $(a, b) = \left(-\sqrt{2}/_2, \sqrt{2}/_2\right)$.

II.10.23) a) $k \neq 2$ e $k \neq 3$. b) $k = 2$. c) $k = 3$.

Capítulo III

III.6.5) a) u é a soma dos 4 vetores de C.

b) $u = (4, 3, 2, 1) - (1, 2, 3, 4)$.

c) Não é possível.

d) $u = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

e) $u = (1 + t + t^2) + (1 - t) - (1 + 2t^2)$.

III.6.6) a) $\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5 \mid x_3 = x_5 \}$.

b) $\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \text{ e } 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \}$.

c) $\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \mid c = d \}$.

d) $\{ 1 + t + t^2, \; 1 - t, \; 1 + 2t^2 \}$ é base de P_2, logo não tem equação.

III.6.7) a) $\{ (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 1) \}$, $dim\, S = 3$.

b) $\{ (1, 0, -1, 1, 0), (2, -4, 2, 0, 1) \}$, $dim\, U = 2$.

c) $\{ 1, t, t^2 \}$, $dim\, W = dim\, P_2 = 3$.

d) $\{ (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \}$, $dim\, V = 3$.

e) $\{ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$, $dim\, X = 1$.

III.6.8) U e V são os conjuntos das soluções de sistemas lineares homogêneos, logo são subespaços. W é um subespaço gerado. X também é o conjunto das soluções de um sistema homogêneo, escrito em forma de matrizes $2x2$, logo é subespaço. Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

III.6.9) Exemplo: $\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2)\}$.

III.6.10) A dimensão é 3.

III.6.11) a) Não. b) $\{(1,1,1,0),(1,2,3,0),(0,1,1,1)\}$.
c) A dimensão é 3.

III.6.12) a) Quaisquer dois vetores podem ser escolhidos.
b) Não, pois $dim\, S = 2$ e $dim\, P_2 = 3$.

III.6.14) b) $v|_\beta = (5,-6,1)^t$. c) $w = (2,1,4)$.
d) $(x,y,z)|_\beta = (x,\ y-2x,\ x-2y+z)^t$.

III.6.15) a) $\beta = \{(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$, $dim\, U = 2$.
b) $\delta = \{(1,0,-1,0),(0,1,2,1)\}$, $dim\, W = 2$.
c) $W = \{(x,y,z,t) \in R^4 \mid x-2y+z=0 \ \ e \ \ y-t=0\}$.
d) $\lambda = \{(-1,0,1,0)\}$, $dim\, U \cap W = 1$.
e) $\alpha = \{(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)\}$, $dim\, U+W = 3$.

III.6.16) a) $\beta = \{(1,-1,-1,1,0,0),(-2,0,1,0,1,0),(0,-1,0,0,0,1)\}$, $dim\, U = 3$.
b) $\delta = \{(1,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0,½),(0,0,0,0,1,½)\}$, $dim\, W = 5$.
c) $x_5 + x_4 - 2x_6 = 0$.
d) $\lambda = \{(-3,1,2,-1,1,0),(2,-3,-2,2,0,1)\}$, $dim\, U \cap W = 2$.
e) α = base canônica do R^6, $dim\, U+W = 6$.

III.6.17) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$. b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. d) $b|_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III.6.18) b) $v|_\varphi = (1,1,1,-2)^t$. c) $w = 3t^3 + 6t^2 + 10t + 13$.

III.6.19) a) $dim\, M_{2x2} = 4$ e φ tem 3 vetores. b) Adicione v ao conjunto φ.
c) $v|_\beta = (0,0,0,1)^t$. d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

III.6.21) b) $\{(1,2,3),(3,2,1),(1,-2,1)\}$.

III.6.23) a) $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$. b) Igual.
c) $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$. d) Igual.

III.6.24) c) $dim\, S = 3$.

III.6.25) a) Gera mas é LD, logo não é base. A dimensão é 3.
b) Não gera e é LD, logo não é base. A dimensão é 3.
c) É LI mas não gera, logo não é base. A dimensão é 2.
d) É uma base do R^4. Logo, a dimensão é 4.

Capítulo IV

IV.9.1) Itens: a , d , e , f e g Sim e b e c Não.

IV.9.3) a) $\left\{\begin{pmatrix}4\\4\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. c) Pois $\dim R^4 = 4$, $\dim \ker T = 1$ e $\dim Im\, T = 3$. d) $Im\, T = \{ (x, y, z, t) \in R^4 \mid x - y - z + t = 0 \}$.

IV.9.4) a) $\ker T = [(1, 2, 3)]$, $\dim \ker T = 1$, uma reta;
$Im\, T = [(1, 0, 2), (0, 1, -1)]$, $\dim Im\, T = 2$, um plano.
b) $\ker T = [(-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)]$, $\dim \ker T = 2$;
$Im\, T = [(1, 0, 1), (0, 1, -1)]$, $\dim Im\, T = 2$, um plano.
c) $\ker T = \{ a t^2 + b t + c \mid a = b = 0 \}$, $\dim \ker T = 1$;
$Im\, T = [t, 1]$, $\dim Im\, T = 2$, $\dim P_2 = 3$.
c) $\ker T = \left[\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$, $\dim \ker T = 2$;
$Im\, T = R^2$, $\dim Im\, T = 2$, $\dim M_{2x2} = 4$.

IV.9.5) Somente a transformação linear do item d é um isomorfismo,
$T^{-1} : R^3 \to R^3$ é tal que
$T^{-1}(x, y, z) = (3x - 3y - 2z, -x + 2y + z, -x + y + z)$.

IV.9.6) $T_1 \circ T_2 (x, y) = (2x, -x - 2y)$ e
$T_2 \circ T_1 (x, y, z) = (2x + y - z, y + z, 5x + 2y - 3z)$.

IV.9.7) a) $\ker T = [(-1, -1, 1, 1)]$, $\dim \ker T = 1$;
$Im\, T = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)]$, $\dim Im\, T = 3$.
b) $\ker T = [(1, -1, 0, 0), (1, 0, -2, 1)]$, $\dim \ker T = 2$;
$Im\, T = [(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -1)]$, $\dim Im\, T = 2$.

IV.9.8)

A:	Autovalores autovetores	0 $a(1, 1, 1), a \neq 0$	-2 $b(1, -1, 0), b \neq 0$	6 $c(1, 1, -2), c \neq 0$
B:	Autovalores autovetores	-1 $a(-9, 0, -2, 6)$, $a \neq 0$	1 $b(1, 0, 0, 0), b \neq 0$	2 $c(2, 1, 0, 0) +$ $d(3, 0, 1, 0)$, com c ou $d \neq 0$
C:	Autovalores autovetores	2 $a(-1, 1, 0), a \neq 0$	-1 $b(1, 2, 3) +$ $c(0, -1, 1)$, com b ou $c \neq 0$	
D:	Autovalores autovetores	-4 $a(1, 1, -1, -1)$, $a \neq 0$	4 $b(1, -1, -1, 1), b \neq 0$	0 $c(1, 1, 1, 1) +$ $d(1, -1, 1, -1)$, com c ou $d \neq 0$

IV.9.9) a) $\lambda = 25,\ v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0\\3\\4\\0\end{pmatrix}z$ com x ou $z \neq 0$; $\lambda = -25,\ v = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\4\end{pmatrix}t$ com $t \neq 0$.

b) $dim\ V_{25} = 2,\ \ dim\ V_{-25} = 1$. c) Sim, pois todos os autovalores são não nulos.

IV.9.12) a) $(x\,,y) = \dfrac{x+2y}{5}(1\,,2) + \dfrac{2x-y}{5}(2\,,-1)$.

b) $T(x\,,y) = (\,9x - 2y\,,\,6y - 2x\,)$. c) $\begin{pmatrix}9 & -2\\-2 & 6\end{pmatrix}$.

IV.9.13) $T(\,x\,,y\,,z\,) = (\,3x - y + z\,,\,-x + 5y - z\,,\,x - y + 3z\,)$.

IV.9.14) $T(\,x, y\,,z\,) = 1/3\,(\,x - 2y - 2z\,,\,-2x + y - 2z\,,\,-2x - 2y + z\,)$.

IV.9.16) $T(\,x, y\,,z\,) = 1/14\,(\,x + 2y + 3z\,,\,2x + 4y + 6z\,,\,3x + 6y + 9z\,)$.

IV.9.18) a) $\alpha\lambda$. b) λ^2. c) 2λ. d) $1/\lambda$ se $\lambda \neq 0$.

IV.9.19) c) $P(A) = P(B) = P(A^{-1}) = P(A\,B) = P(B\,A) = 3$.

d) Autovalores de $A : 1\,, -1$ e -1; autovalores de $B : 1\,, 2$ e 3 ; autovalores de $A\,B$ = autovalores de $B\,A : 1\,, -2$ e -3.

e) Autovetor de A: para $1 = (\,1\,,0\,,0\,)\,t\,,\,t \in R\,,\,t \neq 0$ e
para $-1 = (\,1\,,-1\,,0\,)\,t\,,\,t \in R, t \neq 0$.
Autovetor de B: para $1 = (\,1\,,0\,,0\,)\,t\,,\,t \in R\,\,,t \neq 0$,
para $2 = (\,3\,,-1\,,0\,)\,t\,,\,t \in R\,\,,t \neq 0$ e
para $3 = (\,1\,,0\,,2\,)\,t\,,\,t \in R, t \neq 0$.

IV.9.20) a) $T_1\,o\,T_2\,(\,x\,,y\,,z\,) = (\,0\,,\,y - z\,,\,-y + z\,)$ e
$T_2\,o\,T_1\,(\,x\,,y\,,z\,) = (\,2x - 2z\,,\,2y - 2z\,,\,x + y - 2z\,)$.

b) De $T_1\,o\,T_2$: autovalor $\lambda = 0$,
autovetores $a(\,1\,,0\,,0\,) + b(\,0\,,1\,,1\,)$, a ou $b \neq 0$.
autovalor $\lambda = 2$, autovetores $c(\,0\,,1\,,-1\,)$, $c \neq 0$.
De $T_2\,o\,T_1$: autovalor $\lambda = 0$, autovetores $a(\,1\,,1\,,1\,)$, $a \neq 0$
autovalor $\lambda = 2$, autovetores $b(\,1\,,-1\,,0\,)$, $b \neq 0$.

c) Não são invertíveis pois têm autovalor nulo

d) De $T_1\,o\,T_2$: $dim\ V_0 = dim\ ker\,(\,T_1\,o\,T_2\,) = 2$ e $dim\ V_2 = 1$
De $T_2\,o\,T_1$: $dim\ V_0 = dim\ ker\,(\,T_2\,o\,T_1\,) = 1$ e $dim\ V_2 = 1$.

IV.9.21) $A\,B\,v = \lambda\,v \Rightarrow B\,A\,(\,B\,v\,) = \lambda\,(\,B\,v\,)$.

IV.9.22)

a)	Autovalores autovetores	1 $a(1\,,1\,,1),\ a \neq 0$	2 $b(1\,,-2\,,1),\ b \neq 0$	$2/3$ $c(1\,,0\,,-1),\ c \neq 0$
b)	Autovalores autovetores	1 $a(1\,,0\,,0\,,0),\ a \neq 0$	2 $b(2\,,1\,,0\,,1),\ b \neq 0$	3 $c(1\,,0\,,2\,,0),\ c \neq 0$
c)	Autovalor autovetor	0 $c\ ,\ c \neq 0$		
d)	Autovalores autovetores	0 $a(1\,,-1\,,1),\ a \neq 0$	1 $b(1\,,0\,,0),\ b \neq 0$	3 $c(1\,,-1\,,3),\ c \neq 0$

IV.9.23) a) Por exemplo $\beta = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$.

b) $T(x,y,z) = (\frac{x-z}{2}, y, \frac{z-x}{2})$.

IV.9.24) a) O posto de A é 4. b) $dim\, Im\, T = 4$ e $dim\, ker\, T = 1$.

IV.9.25) g) $p \neq 0$ e $p \neq 4$. h) $p = 2$.

Índice das Figuras

Capítulo I

Capítulo II

Capítulo IV

Bibliografia

1. P. Parga; "Álgebra Linear Aplicada", EDUR, Seropédica, Rio de Janeiro, 2006.
2. E. A.Carlen e M.C.Carvalho; " Álgebra linear". LTC, Rio de Janeiro, 2009.
3. A. Steinbruch e P. Winterle; "Álgebra Linear"; 2.ª ed., Pearson-MAKRON Books, São Paulo, 1987.
4. J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H.GG. Wetzler, "Álgebra Linear", 3.ª ed., HARBRA, São Paulo, 1986.
5. K. Hoffman and R. Kunze, "Linear Algebra", 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
6. T. Lawson, "Álgebra Linear", Edgard Blücher, São Paulo, 1997.
7. S. J. Leon, "Álgebra Linear com Aplicações", 4.ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 1999.
8. C.H. Edwards e D.E. Penney, "Introdução à Álgebra Linear", Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1998.
9. B. Kolman e D. R. Hill; "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações"; 8ª ed., LTC; Rio de Janeiro, 2006.
10. B. Noble e J.W.Daniel; "Álgebra Linear Aplicada", 2ª ed.; Prentice Hall do Brasil; Rio de Janeiro; 1986.
11. G. Strang, "Álgebra Linear e Suas Aplicações", tradução da 4ª edição, São Paulo, Cengage Learning, 2009.
12. E. L.Lima,; "Coordenadas no Plano", IMPA, Rio de Janeiro, 1992.
13. A. Steinbruch e P. Winterle; "Geometria Analítica"; 2ª ed., McGraw Hill, São Paulo, 1987.
14. G. L. Reis e V.V. Silva, "Geometria Analítica", 2ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 1996.
15. I. Camargo e P. Boulos, "Geometria Analítica – Um Tratamento Vetorial", Pearson Prentice Hall, 3ª ed., São Paulo, 2008.

16 I. J. Venturi; "Álgebra Vetorial e Geometria Analítica", 9ª ed., eBook: www.geometriaanalitica.com.br, Curitiba, 2009.

17 B. Spindel, E. C. Andrade, P. Parga e P. L. V. Pereira; "Espaços Vetoriais R^n e Sistemas Lineares"; PUC–RJ; Notas de aula; Rio de Janeiro; 1975.

18 E.K.Fainguelernt,. e N.de C.Bordinhão,; "Álgebra Linear e Geometria Analítica"; São Paulo; Ed. Moderna; 1980.

19 E.L.Lima, P. C. P. Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado; "A Matemática do Ensino Médio", volume 3. Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1999.

20 "Tecnologia Moderna para a Agricultura" vol III – A Indústria Nacional de Rações Balanceadas e Concentrados; IPEA/IPLAN, série Estudos para o Planejamento 20; Brasília; 1978.

este livro é uma publicação da
edur / ufrrj.
impresso pela Gráfica Editora Formulários Contínuos e Etiquetas F & F ltda. ME,
na cidade de Vicente Pires, Brasília - DF
em agosto de 2015.
foi usado papel offset, 75g/m2
e a fonte bodoni old face be,
c. 10.5 /15 pt.

A álgebra linear é uma parte da matemática muito importante para alunos de graduação dos cursos de Matemática, Física, Química, Ciência da Computação, Sistema de Informação, Ciências Econômicas e das diversas Engenharias. Além disso, outros alunos de graduação e de pós-graduação de áreas técnicas também necessitam dessa ferramenta.

O pré-requisito para esse livro é o ensino fundamental, e, para alguns exemplos feitos aqui, o ensino médio. Por isso, ele funciona como um primeiro livro de geometria analítica e de álgebra linear. Sendo assim, a álgebra linear básica para o ensino do cálculo, de informática e para aqueles que precisem dar prosseguimento ao estudo da álgebra linear que se estuda no ensino médio.

Esse livro começa com a geometria analítica e conduz o leitor, sempre tendo à mão os conceitos geométricos de reta, plano e espaço, vistos no primeiro capítulo, aos conceitos mais abstratos de espaço vetorial real e de autovalores e autovetores. São feitos muitos exemplos para suavizar essa passagem do concreto ao abstrato. Os capítulos estão interligados e cada um deles usa os anteriores, mostrando sempre a ligação da geometria analítica com os sistemas lineares, esses com os espaços vetoriais e finalmente, das transformações lineares com todos esses tópicos.

Outros livros do autor que foram publicados nessa mesma editora: "Álgebra Linear Aplicada" e "Elementos de Programação Linear".

Edur
UFRRJ

ISBN 978-85-8067-061-5
9 788580 670615 >