Autovetores e Autovalores da matriz A (ou da transformação linear T(v)=A.v)

Considere $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada , $n \times n$, que representa uma transformação linear; ou seja, a transformação linear para esta definição deverá ter domínio e contradomínio sendo R^n.

Diremos que um vetor $v \in R^n$ **não nulo** é um autovetor de $\boldsymbol{A}$ se existir um número λ tal que

$$\boldsymbol{A.v = \lambda . v} ,$$

ou seja, ao multiplicarmos a matriz $\boldsymbol{A}$ pelo vetor $\boldsymbol{v}$ obtemos um múltiplo de $\boldsymbol{v}$.

O número λ é chamado de **autovalor de** A e o vetor não nulo $\boldsymbol{v}$ é chamado de **autovetor de A associado ao autovalor** $\boldsymbol{\lambda}$ **.**

Se pensarmos na transformação linear $\boxed{T: R^n \rightarrow R^n}$ tal que $\boxed{T(v)=A.v,}$ a definição de autovetor nos diz que a "direção" do vetor v não é alterada quando aplicamos a transformação T.

Antes de apresentarmos exemplos, vamos trabalhar um pouco mais com a definição apresentada no sentido de encontrar um procedimento para o cálculo de autovalores e autovetores de $\boldsymbol{A}$.

Considere a equação matricial

$$\boldsymbol{A.v = \lambda . v} \qquad \textbf{(1)}$$

Queremos encontrar um vetor **NÃO NULO** $\boldsymbol{v}$ tal que exista um escalar λ que cumpra a equação (1).

<u>Ajeitando a equação (1)</u>: podemos reescreve la da seguinte forma

$$\boldsymbol{A.v - \lambda\ v = 0},$$

e, lembrando que, para $\boldsymbol{I}$,nxn, a matriz identidade, vale $\boldsymbol{I.v = v}$ **,** então

$$\boldsymbol{A.v - \lambda I v = 0},$$

e colocando $\boldsymbol{v}$ em evidência obtemos

$$\boldsymbol{(A - \lambda I)\ v = 0} . \qquad \textbf{(2).}$$

Portanto, um autovetor do autovalor λ será uma solução não nula para o sistema homogêneo descrito em **(2)** .

Assim, ao buscarmos autovalores para $\boldsymbol{A}$**,** estamos investigando valores λ tais que o sistema homogêneo dado pela equação **(2)** não tem solução única, pois se a solução fosse única ela seria o vetor nulo e $\boldsymbol{v}$**=0 não é considerado um autovetor.** Portanto, devemos exigir que o sistema **(2)** não tenha solução única o que é o mesmo que encontrar valores de λ tais que

$$\boldsymbol{det(A - \lambda . I) = 0} \quad .$$

A matriz ***A-λI*** é $n\times n$ e quando terminarmos o cálculo de **det** (***A-λI***) encontraremos um polinômio de grau ***n*** chamado de **polinômio característico de *A***. As raízes desse polinômio serão os autovalores de ***A.***

Exemplo 1: Encontre os autovalores de $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Passo 1: Monte a matriz A-λI

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

Passo 2: Encontre o polinônio característico p(λ) de A;

$$p(\lambda)= \det(A-\lambda I)=(1-\lambda).(-1-\lambda)=\lambda^2-1$$

Passo 3: Os autovalores de A são as raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2-1 =0 \Rightarrow \lambda=1 \text{ e } \lambda=-1$$

Assim, descobrimos que a matriz A possui dois autovalores: $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-1$.

Como calcular os autovalores?

Para calcular os autovetores de A associados respectivamente aos autovalores

$$\lambda_1=1 \text{ e } \lambda_2=-1$$

agimos da seguinte forma:

- ***Pegamos cada autovalor λ e vamos resolver o sistema homogêneo***

$$(A-\lambda I)\, v = 0.$$

As soluções não nulas , v ≠0, serão os autovalores associados ao respectivo autovalor.

No exemplo 1 consideremos $\lambda_1=1$ e então

$$A-\lambda_1 I=A-I=\begin{pmatrix}1-1 & 0\\ 0 & -1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\ .$$

Daí o sistema o sistema homogêneo abaixo terá infinitas soluções, as soluções não nulas serão chamadas de autovetores do autovalor $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$ $-2v_2=0 \rightarrow v_2=0$ e v_1 pode assumir qualquer valor real exceto zero.

Os autovetores serão: $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}=v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1\neq 0$. Todos os múltiplos não nulos do vetor $(1,0)^T$ são autovetores de $\lambda_1=1$.

O mesmo teremos que fazer para $\lambda_2=-1$, isto é achem o núcleo da matriz (*A- λ_2I*), ou seja, a solução do sistema homogêneo com a matriz de coeficientes

$$A-(-1)I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS: Os autovetores de λ são todos os vetores do núcleo de A- λI exceto o vetor nulo.

<u>Definição:</u> **AUTOESPAÇO**

O núcleo de **A-** ***λI é chamado autoespaço da matriz A associado ao autovalor λ.***

Exemplo 2: Encontre os autovalores e os autoespaços de

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad :$$

Tudo começa calculando a matriz

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad ,$$

seu determinante será o polinômio característico de A:

$$\det(A-\lambda I)=(-1-\lambda)^2(4-\lambda)-(4-\lambda)=(4-\lambda).[(-1-\lambda)^2-1]=(4-\lambda)(\lambda^2+2\lambda)=(4-\lambda).\lambda.(\lambda+2)$$

OBS: **Quanto mais fatorado estiver o polinômio característico mais fácil será calcular suas raízes, que serão os autovalores de A.**

Para encontrar os autovalores encontramos as raízes de

$$p(\lambda)=(4-\lambda).\lambda.(\lambda+2),$$

ou seja, queremos os valores de λ para os quais $p(\lambda)=0$, ou seja,

$$(4-\lambda).\lambda.(\lambda+2)=0 .$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1=4$, $\lambda_2=0$ e $\lambda_3=-2$. Agora, para cada um dos autovalores λ_k encontre o núcleo de **A-** $\lambda_k I$ e encontre os autoespaços.

Exemplo 3: $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ seu polinômio característico $p(\lambda)=\lambda^2+1$ e suas raízes são complexas *i e -i.* Esta informação é de extrema importância para muitas aplicações, mas não trabalhamos com informações envolvendo números complexos neste curso.

Conclusão:

Sobre o cálculo dos autovetores e autoespaços:

Uma vez calculado o autovalor ***λ,*** vamos achar os autovetores associados a ***λ*** resolvendo o sistema homogêneo em que a matriz de coeficientes é ***A-λI*** , isto é, os autovetores serão as soluções não nulas. Ou equivalentemente, os vetores não nulos do núcleo de ***A-λI .*** Já autoespaço associado ao autovalor λ é o núcleo de A-λI e, portanto, inclui o vetor nulo.

Exercício 9 do livro texto (Capítulo IV): Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ com expressão dada por

$$T(x,y,z,w)=(25x,-7y+24z+24w,24y+7z-18w,-25w) \quad ,$$

já sabemos que ela será representada por uma matriz A,4x4, tal que T(X)=A.X , e X,$_{4x1}$.

1.1)Verifique que o polinômio característico de A (ou de T) é

$$p(\lambda)=(25-\lambda)(-25-\lambda)(\lambda^2-625) \quad ;$$

1.2) Encontre os autovalores de T;

1.3) Encontre base para os autoespaços, justificando.

Solução:

Passo 1: T é representada por sua matriz canônica dada por

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 & 24 \\ 0 & 24 & 7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \quad .$$

Encontrar os autovalores é encontrar valores de λ tais que a matriz A-λI tenha determinante zero. Portanto, o polinômio característico é dado através do cálculo deste determinante , feito por Laplace aplicado à primeira linha

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 25-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7-\lambda & 24 & 24 \\ 0 & 24 & 7-\lambda & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -25-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)=det(A-\lambda I)=(25-\lambda)det\begin{pmatrix} -7-\lambda & 24 & 24 \\ 24 & 7-\lambda & -18 \\ 0 & 0 & -25-\lambda \end{pmatrix}=(25-\lambda)(-25-\lambda).[(-7-\lambda).(7-\lambda)-576]$$

e daí , realizando a conta do colchete, obtemos $p(\lambda)=(25-\lambda)(-25-\lambda)(\lambda^2-625)$.

Os autovalores de T são as raízes do polinômio característico, ou seja: $\lambda_1=\lambda_2=25$ *e* $\lambda_3=\lambda_4=-25$.

Para encontrar o autoespaço de $\lambda_1=\lambda_2=25$ *resolvemos o sistema homogêneo* $(A-25.I).\boldsymbol{v}=0$ *escalonando*

$$A-25.I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-32&24&24\\0&24&-18&-18\\0&0&0&-50\end{pmatrix}$$

daí obtemos $\begin{pmatrix}0&-4&3&3\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ *cuja resolução gera:* $-4.v_2+3.v_3+3.v_4=0$ *e* $v_4=0$.

Assim, $S_{(\lambda=25)}=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\\frac{3}{4}.v_3\\v_3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}v_1+\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}.v_3,\ \forall\ v_1, v_3\in\mathbb{R}\right\}$ *ou* $S_{\lambda=25}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}\right]$

donde obtemos a base $\beta=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *, para tal faltaria justificar por que são l.i.s*

Para encontrar o autoespaço de $\lambda_3=\lambda_4=-25$ *resolvemos o sistema homogêneo* $(A+25.\mathrm{I}).V=0$ *escalonando*

$$A+25.I=\begin{pmatrix}50&0&0&0\\0&18&24&24\\0&24&32&-18\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad L2\leftarrow 1/6\,L2\quad \begin{pmatrix}50&0&0&0\\0&3&4&4\\0&24&32&-18\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad L3\leftarrow L3\text{-}8L2$$

$$\begin{pmatrix}50&0&0&0\\0&3&4&4\\0&0&0&-50\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad L1\leftarrow (1/50)L1 \text{ e } L3\leftarrow (-1/50)L3$$

daí obtemos $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&4&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ *cuja resolução gera:* $v1=0,\ 3.v_2+4.v_3+4.v_4=0,$ *e* $v_4=0$.

Fizemos v_2 ser livre:

Assim, $S_{(\lambda=-25)}=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{-3}{4}\\0\end{pmatrix}.v_2,\ \forall\ v_2\in\mathbb{R}\right\}$ *donde obtemos a base* $\gamma=\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\-3\\0\end{pmatrix}\right\}$.