GABARITO Prova 2 de Álgebra Linear II – **T02** – 16/12/2021 – ECE 2021/2

Questão 1: Em R^3 considere $S=[\vec{u},\vec{v}]$ sendo $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(1,1,1)$:
(2.5 PTS)

1.1) Justifique a frase a seguir:

S é um subespaço do R^3 ,ou ainda. S é um plano que passa pela origem.

Solução: S é descrito como um subespaço gerado por $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(1,1,1)$, vetores do R^3 e, portanto, é um subespaço do R^3. Pela definição do colchete entre dois vetores temos que um vetor qualquer (x,y,z) de S tem que ser do tipo

$$(x,y,z)= c_1\,(1,1,0) + c_2\,(1,1,1)$$
$$x = c_1 . 1 + c_2 . 1 ;$$
$$y = c_1 . 1 + c_2 . 1 ;$$
$$z = c_1 . 0 + c_2 . 1 .$$

Ou seja, os pontos de S são dados por equações paramétricas que representam um plano que passando pela origem.

1.2) Considere $\vec{w}$ o produto vetorial $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$. Verifique se $\alpha=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base para o R^3.

Solução:

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,-1,0)$$

Para verificar que α = { (1,1,0) , (1,1,1) , (1,-1,0)} é base precisamos verificar que é um conjunto gerador do R^3 , que seja linearmente independente. Assim montamos sistema com a matriz de coeficientes tendo os vetores de α como colunas:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificar que é um conjunto gerador para o R^3 é verificar se, dado um vetor genérico do R^3 , Y= (x,y,z) , se o o sistema AX=Y tem solução.

Verificar se o conjunto é l.i. é verificar se o sistema AX=0 tem solução única.

Como det A ≠0 podemos concluir que SIM é uma base ou então resolvemos o sistema AX=Y e verificamos que sempre terá solução e o homogêneo terá solução única.

Questão 2: Considere a matriz
(3.5 PTS)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1) Construa a matriz *A-λI* e, pelo desenvolvimento de Laplace, calcule det(A-λI) . Verifique que o resultado é o mesmo que $(1-\lambda)^2.(\lambda+2).(\lambda+1)$.

Solução:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Escolhendo a última linha no cálculo do determinante:

$$det(A-\lambda I)=(-1)^{4+4}.(1-\lambda).det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda).[\lambda^2(-2-\lambda)+2+\lambda]$$

Abrindo as contas de det(A-λI)=(1-λ)(-λ^3-2λ^2+λ+2) e de $(1-\lambda)^2.(\lambda+2).(\lambda+1)$ *chegamos ao mesmo resultado, ou seja, det(A-λI)=λ^4 + λ^{3-} 3λ^2 -λ + 2.*

2.2) Encontre a transformação linear T que tenha A como matriz canônica, justificando sua resposta, isto é, você tem que informar o domínio, o contradomínio e a expressão da função T.

Solução: T: $R^4 \to R^4$

$$T((x,y,z,w)^T)=A.(x,y,z,w)^T = (2z\ ,\ x+z\ \ ,\ y - 2z\ \ ,\ w)^T$$

2.3) Por que a afirmação a seguir é verdadeira:

A imagem de T é todo o R^4.

Solução:A imagem de T é o espaço coluna da matriz A, como são quatro vetores colunas do R^4, para verificar se as colunas formam base utilizamos o mesmo raciocício da questão 2.1. Ou seja, como det A = 2≠0 podemos verificar que a afirmação é verdadeira.

Questão 3: Considere a transformação linear
(4 PTS)

$$T: R^4 \rightarrow R^4$$
$$T(x,y,z,w)=(2z\ ,\ x+z\ \ ,\ y-2z\ \ ,\ w).$$

3.1) Encontre matriz canônica de T;

Solução: A matriz canônica é a matriz A da questão anterior.

3.2) Verifique que o polinômio característicode T é $p(\lambda)=(1-\lambda)^{2\cdot}(\lambda+2)(\lambda+1)$. Quais são os autovalores de T?

Solução: O polinômio característico de T é obtido calculando det(A-λI), que já foi feito em (2.1). Os autovalores são as raízes do polinômio característico, isto é, é necessário encontrar todos os λ *tais que*

$$(1-\lambda)^{2\cdot}(\lambda+2)(\lambda+1)=0 \quad .$$

Assim os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3=-2$ *e* $\lambda_4=-1$.

3.3) Encontre os autovetores do autovalor λ=1:

3.4) Qual a dimensão do autoespaço de λ=1? Por que?

Solução:Resolveremos 3.3 e 3.4 . Substituimos λ=1 na matriz A-λI e resolveremos o sistema homogêneo (A-λI)v=0 para encontrar os autovetores associados a λ=1 e seu autoespaço.

Escalonando a matriz A-I

$$A-I=\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\1&-1&1&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad L2\leftarrow L2+L1\quad \begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&-1&3&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad L3\leftarrow L3+L2\quad \begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&-1&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Concluido o escalonamento resolvermos um sistema homogêneo com 2 equações e 2 incógnitas, ou seja, com 2 graus de liberdade:

$$-v_1 + 2v_3 = 0$$
$$-v_2 + 3v_3 = 0$$

Façamos v_3 *e* v_4 *como variáveis livres:* $v_1 = 2v_3$ *e* $v_2 = 3v_3$.

O conjunto solução do sistema homogêneo é o autoespaço associado ao λ=1:

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2v_3\\3v_3\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=v_3\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+v_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\forall\, v_1\, ou\, v_2\, em\, R\right\}$$

e todos os elementos de S_1 *são autovetores de* $\lambda=1$*, exceto o vetor nulo. Observemos que*

$$S_1=\left[\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] \quad ,$$

ou seja, temos um conjunto gerador para S_1 *formado pois 2 vetores, que são l.i., pois eles não são múltiplos !!*

Portanto, o conjunto $\beta=\{(2,3,1,0)^T, (0,0,0,1)^T\}$ *é uma base para o autoespaço de* $\lambda=1$ *, que, assim, terá dimensão 2.*