Matrizes e Sistemas Lineares
(Conteúdo resumido para o período 2022/2- até 12/2022)

Das noções apresentadas para adição e multiplicação de matrizes citamos as seguintes propriedades.

<u>**Propriedades das Operações entre Matrizes**</u>

Considere **A, B e C** matrizes $\boldsymbol{m \times n}$, **D** matriz ***n x p*** e ***k*** um número então valem:

- ***(A+B)+C = A+(B+C)*** , isto é, vale <u>associatividade da soma;</u>
- ***(A+B).D= A.D+ B.D***, isto é, vale a <u>distributividade</u> (respeitada a ordem!);
- ***(kA).D = k(A.D) = A.(kD),*** *isto é um número real comuta dentro de um produto de matrizes;*
- Para S matriz $p \times q$ vale: ***(A.D).S=A.(D.S) respeitando a ordem*** *o produto é associativo;*
- Se ***m=n*** e *I* é a matriz identidade $n \times n$ então vale ***A.I =I.A= A***.
- Se O é a matriz nula $n \times n$ então *A.O=O.A = O;*

Além dessas propriedades existem formas de interpretar certas contas entre matrizes que nos ajudam em determinados momentos. Por exemplo:

- O produto de uma matriz **A** por um vetor coluna ***X*** é uma combinação linear das colunas de *B:*

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 . \begin{pmatrix} \vdots \\ A_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 . \begin{pmatrix} \vdots \\ A_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_n . \begin{pmatrix} \vdots \\ A_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- O produto de um vetor linha por um vetor coluna é o produto interno entre os vetores:

$$\begin{pmatrix} a_1 \, a_2 \, a_3 \cdots a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + a_{3.} b_3 + \cdots + a_n . b_n$$

Utilizaremos estes aspectos no próximo assunto: Sistemas Lineares

Sistemas Lineares

A primeira equação linear que conhecemos (faz tempo!) é do tipo que possui uma única incógnita:

$$a.x=b;$$

sendo *a e b* números conhecidos e x **a incógnita**, isto é, o que queremos encontrar para solucionar a equação.

Exemplo: 2x=3 , tem solução única

0x=0 , são infinitas soluções

0.x=3, não tem solução

Na vídeo aula são apresentados exemplos com equações lineares com duas incógnitas e sua interpretação geométrica como também equações lineares com 3 incógnitas.

Aumentando a complexidade de nossas equações lineares pensemos, por exemplo, em *n incógnitas* $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n}$ então uma equação linear é do tipo

$$\boldsymbol{a_1.x_1+a_2.x_2+...+a_n.x_n=b} \quad ,$$

sendo $a_{1,} a_{2,} a_{3,} \cdots, a_n$ e b números conhecidos.

Quando queremos resolver um conjunto de equações lineares simultaneamente, isto é, quando nossas incógnitas tem que solucionar mais de uma equação linear ao mesmo tempo teremos o que chamamos de um sistema linear de equações:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix} \quad .$$

Neste exemplo genérico temos *m* equações e as *n* incógnitas $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, ou variáveis. Os números a_{ij} , *com i=1,2,...m e j=1,2,...n* , que acompanham as incógnitas são chamados de coeficientes do sistema e os b_j são os termos independentes.

A principal aplicação que veremos no uso de matrizes é a resolução de sistemas de equações lineares . Inicialmente, observemos que o sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad ,$$

chamada de forma matricial do sistema. Ou ainda, fazendo

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad ,$$

o sistema toma a forma da nossa primeira equação linear:

$$A.X = b.$$

O vetor coluna X é chamado de vetor de incógnitas ou variáveis, a matriz *A* é a matriz de coeficientes e *b* é o termo ou vetor independente. Resolver esse sistema é encontrar todos os vetores *X, com n coordenadas,* cujas coordenadas solucionam todas as equações, ou ainda, cujo o produto *A.X* de exatamente *b*. Neste caso diremos que o sistema é $m \times n$. *Além disto, as soluções, quando existirem, podem ser consideradas vetores do* R^n*.*

Exemplos: Vamos analisar , do ponto de vista geométrico, sistemas 2x2

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Observemos que, em cada sistema, queremos encontrar um vetor ou ponto ou par do R^2 que satisfaça cada sistema. No R^2 as equações lineares

$$ax_1+bx_2 = c \quad (\text{ou } ax+by=c)$$

representam retas. Assim em cada um destes sistemas estamos nos pergunto se as retas dadas por cada equação têm pontos em comum.

No primeiro sistema temos as duas retas:

- **Sistema 1:** $\begin{matrix} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=2 \end{matrix}$ e resolvendo o sistema obtemos como **única solução o ponto** $(x_1, x_2)=(2{,}0)$ **.**
- **Sistema 2:** $\begin{matrix} x_1+x_2=2 \\ x_1+x_2=1 \end{matrix}$ aqui temos **duas retas paralelas e**, portanto, **não há interseção .**

  Dizemos que o **sistema é impossível ou** que **não tem solução.**
- **Sistema 3:** $\begin{matrix} x_1+x_2=2 \\ -x_1-x_2=-2 \end{matrix}$ **aqui temos duas retas coincidentes e termos infinitas soluções.**

O que ocorreu com esse exemplo pode ocorrer com qualquer outro sistema $m \times n$. Isto é, um sistema ou terá única solução ou terá infinitas soluções ou não terá solução. Nosso objetivo sempre será encontrar o conjunto que contenha todas as soluções de um sistema, chamado de **conjunto solução do sistema**.

Se o sistema tiver *n* incógnitas, usualmento denotaremos o conjunto solução S como um subconjunto do R^n, cujos elementos serão consideredos vetores colunas com n coordenadas:

$$S=\left\{ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n \textit{ tais que } AX=b \right\}$$

Exemplo: Encontre o conjunto solução dos sistemas 2x2 do exemplo anterior.

No caminho de obter um método que sirva para resolver qualquer sistema e que seja um procedimento a ser implementado no computador, vamos explorar mais alguns aspectos desta teoria.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas com as mesmas incógnitas são chamados de sistemas equivalentes se possuem o mesmo conjunto de soluções.

Exemplo: Considere o sistema

$$\begin{Bmatrix} x_1+2x_2=0 \\ 3x_1-x_2=0 \end{Bmatrix}$$

cujo conjunto solução é {(0,0)}. Os sistemas abaixo são todos equivalentes:

$$\begin{Bmatrix} 3x_1-x_2=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} x_1+2x_2=0 \\ 3x_1-x_2=0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} x_1+2x_2=0 \\ -7x_2=0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{Bmatrix} \quad .$$

Existem 3 (três) operações que podem ser efetuadas com as equações de um sistema sem que o seu conjunto de soluções seja alterado. Tais operações são chamadas de **operações elementares:**

(1) **Tipo 1:** Trocar a ordem de duas equações: $(E_i \leftrightarrow E_j)$;

(2) **Tipo 2:** Multiplicar os dois lados de uma equação por uma mesma constante constante não nula: $(E_i \leftarrow kE_i)$;

(3) **Tipo 3**: Substituir uma equação por ela mais um múltiplo de outra equação: $(E_i \leftarrow E_i + k\,E_j)$.

OBJETIVO: Utilizaremos as operações elementares para transformar um sistema mxn “complicado” em um sistema equivalente “mais simples” e do seguinte tipo:

$$\begin{array}{rcl} r_{11}x_1+r_{12}x_2+r_{13}x_3+ & \cdots & +r_{1n}x_n=d_1 \\ r_{22}x_2+r_{23}x_3+ & \cdots & +r_{2n}x_n=d_2 \\ r_{33}x_3+ & \cdots & +r_{3n}x_n=d_3 \\ & \vdots & \\ & & r_{mn-1}x_{n-1}+r_{mn}x_n=d_m \end{array} \quad ,$$

isto é, um sistema na forma escalonada, pois a matriz de coeficientes tem é do tipo:

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1(n-1)} & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2(n-1)} & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3(n-1)} & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n(n-1)} & r_{nn} \end{bmatrix}$$

O procedimento que explicaremos a seguir é chamado de Método de Eliminação de Gauss ou escalonamento.

OBS: Se o sistema original for $n \times n$, isto é, possuir o mesmo número de equações e incógnitas então, após de aplicarmos as operações elementares e através do Método de Eliminação de Gauss, obteremos um sistema chamado de triangular :

$$\begin{array}{r} r_{11}x_1+r_{12}x_2+r_{13}x_3+\cdots+r_{1n}x_n=d_1 \\ r_{22}x_2+r_{23}x_3+\cdots+r_{2n}x_n=d_2 \\ r_{33}x_3+\cdots+r_{3n}x_n=d_3 \\ \vdots \quad \\ r_{nn}x_n=d_n \end{array} \quad ,$$

cuja matriz de coeficientes no final do processo será do tipo

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad ,$$

ou seja, R será uma Matriz Triangular Superior, pois todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

A resolução de um sistema triangular superior (ou inferior) ou escalonado é imediata e realizada por substituição de baixo para cima.

Exemplos:

- *(*) Sistema triangular. Neste exemplo temos um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas*

$$\begin{aligned} 1x_1+2x_2+1x_3&=3\\ -1x_2-1x_3&=-2\\ 1x_3&=4\end{aligned}$$

OBS: Matriz de coeficientes neste exemplos é triangular superior

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Para achar o conjunto solução do sistema triangular (ou escalonado), atuamos com substituição de baixo para cima :

- da última equação temos $x_3=4$;
- isolando x_2 na segunda equação e substituindo x_3 obtemos: $x_2=-2$;
- isolando x_1 na primeira equação e substituindo x_3 e x_2

$$x_1=3-2x_2-x_3=3-2(-2)-4=3$$

Assim o sistema possui uma única solução, a saber, o vetor coluna do R^3

$$S=\left\{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\in R^3\right\} \quad .$$

Um sistema que tenha **solução única** é chamado de s**istema possível e determinado**.

- *(**) Sistema na forma escalonada. Neste exemplo temos mais incógnitas que equações*

$$\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+\quad 4x_4&=-2\\ x_2+2x_3+3x_4&=0\\ -x_3-8x_4&=5\end{aligned}\right\} \quad .$$

OBS: Matriz de coeficientes está escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -8\end{pmatrix} \quad .$$

Assim não temos equações suficientes que amarrem todas as incógnitas e deixaremos algumas incógnitas livres. Como são 4 incógnitas e 3 equações teremos 4-3=1 grau de liberdade, isto é, deixaremos uma incógnita livre. Uma vez que o sistema é resolvido por substituição de baixo para cima, fixemos nossa atenção na última equação e escolhamos para incógnita ou variável livre ou x_4 ou x_3 (apenas uma delas !!!) . No que segue deixaremos x_4 livre.

Procedimento para encontrar o conjunto solução:

- *da última equação isolamos* x_3 *e obtemos* $x_3=-5-8x_4$;
- *substituindo o valor de* x_3 *na segunda equação e isolando* x_2 *obtemos*

$$x_2=-2(-5-8x_4)-3x_4=10+13x_4 \quad ;$$

- *substituindo o valor de* x_2 *e isolando* x_1 *na primeira equação*

$$x_1=-2-x_2-4x_4=-2-(10+13x_4)-4x_4=-12-17x_4 \quad ;$$

- *e* x_4 *? Esta variável pode assumir qualquer valor real, pois foi deixada livre.*

<u>Escrevendo o conjunto solução:</u>

Observe que uma solução será um vetor do R^4, pois são 4 incógnita. Assim

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12-17x_4 \\ 10+13x_4 \\ -5-8x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4.\begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e x_4 pode assumir qualquer valor real. Ou seja, o conjunto solução é

$$S=\left\{\begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4.\begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ \forall x_4\in R\right\} \quad ,$$

ou seja, existem **infinitas soluções** e este sistema é chamado de **possível e indeterminado.**

<u>(***) Sistema escalonado e impossível:</u>

Neste exemplo temos 4 incógnitas e 3 equações, porém observe o que a última equação exige:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 \quad -x_3-2x_4=2 \\ x_2+4x_3+3x_4=-1 \\ 0.x_4=-1 \end{array}\right\} \quad .$$

OBS: Matriz de coeficientes está escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A última equação é inconsistente, um **absurdo: 0=-1** . Ou seja, o sistema **não possui solução** e, portanto, é um sistema chamado de **sistema impossível e o conjunto solução é vazio:** $S=\emptyset$

O Método da Eliminação de Gauss

O método será explicado através de exemplos em que resolveremos os seguintes sistemas:

$$
\begin{gathered}
x_1+2\mathrm{x}_2+x_3=3\\
3x_1-x_2-3x_3=-1\\
2x_1+3x_2+x_3=4
\end{gathered}
$$

que em notação matricial, a ser trabalhada daqui por diante, é

$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 4\end{pmatrix} \quad .
$$

Nosso objetivo é achar o conjunto de vetores $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ que solucionam o sistema, o tal conjunto solução , encontrando um sistema equivalente e mais fácil de ser resolvido e cuja matriz de coeficientes estará na forma escalonada.

Procedimentos na Eliminação de Gauss

Passo 1: Considere a matriz *A* de coeficientes aumentada da coluna *b*, que denotamos por A|b:

$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}
$$

e chamemos as linhas de L_1 , L_2 e L_3 . Nosso objetivo é realizar operações elementares nas linhas desta matriz até que a nova matriz, com as três primeiras colunas , seja uma matriz triangular (ou escalonada).

$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}
$$

Passo 2: Fixemos a primeira linha e chamamos o seu primeiro elemento não nulo de pivô. Nosso objetivo neste passo é zerar elementos da primeira coluna que estão abaixo do pivô, sem alterar o conjunto solução do sistema. Portanto, só vamos realizar operações elementares para substituir L_2 e L_3 por novas linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \quad ;$$

$$L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \quad .$$

$$
\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -7 & -6 & -10\\ 0 & -1 & -1 & -2\end{pmatrix}
$$

Passo 3: Numa operação estratégica, podemos trocar a segunda linha com a terceira, para facilitar contas

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{array}\right) \;;$$

Passo 4: Nosso objetivo é obter no quadrado 3x3 das primeiras três colunas uma matriz triangular, para a matriz de coeficientes de um novo sistema equivalente. Portanto, não mexemos nem na primeira nem na segunda linhas. Na segunda linha o pivô é -1 e vamos substituir L_3 , trabalhando com operações elementares para obter uma nova linha em que o elemento abaixo do pivô -1 seja zero

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7\,L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Passo 5: Chegamos ao nosso objetivo e agora temos um sistema triangular equivalente ao original

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + 2\mathrm{x}_2 + 1\,x_3 &= 3 \\ -1\,x_2 - 1\,x_3 &= -2 \\ 1\mathrm{x}_3 &= 4 \end{aligned}$$

Enfim vamos encontrar o conjunto solução :

Passo 6: Achar a solução do sistema triangular (ou escalonado), resolvendo por substituição de baixo para cima : $x_3 = 4$, $x_2 = -2$ e

$$x_1 = 3 - 2\,x_2 - x_3 = 3 - 2(-2) - 4 = 3$$

Assim o sistema possui uma única solução, a saber, o vetor coluna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \;;$$

e portanto o sistema é possível e determinado. Verifique que este vetor também armazena a solução do sistema original, ou seja, vale que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Assim os sistemas possuem o mesmo conjunto solução $S=\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Exemplo 2: Encontre o conjunto solução do sistema dado por

$$\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_1+x_2+4x_4=-2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=3 \end{cases}$$

ou, equivalentemente, em notação matricial *A.X = b*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e observe que a matriz *A* é 3×4 .

Passo 1: Considere a matriz *A* de coeficientes aumentada da coluna *b*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

Passo 2: $L_1 \leftrightarrow L_2$ esta troca ajeita a matriz de coeficientes no caminho de torna-la escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

Passo 3: Abaixo do pivô 1 que está em L_1 devemos zerar os elementos, portanto, nada será feito na segunda linha. Faremos a operação elementar $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} ;$$

Passo 4: Não mexemos nem na linha 1 e nem na linha 2. Na linha 2 temos o pivô e vamos realizar uma operação elementar com a linha 3 para zerar o elemento que está abaixo do pivô deste passo:

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 5 \end{array}\right)$$

Já obtemos uma **matriz** 3x4 **na forma escalonada**, e aproveitamos para definir com rigor o que é uma matriz na forma escalonada:

- *se a linha k não consiste apenas de zeros então a quantidade de zeros no início da linha k+1 (linha abaixo) é maior que a quantidade de zeros no início da linha k;*
- *se existirem linhas constituídas só por zeros elas ficam abaixo de todas as demais que não são nulas.*

O sistema a ser resolvido é

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 + \quad 4x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 - 8x_4 = 5 \end{array}\right\} \quad ,$$

ou seja, um sistema de 3 equações e 4 incógnitas que resolvemos por substituição de baixo para cima:

- *da última equação isolamos* x_3 *e obtemos* $x_3 = -5 - 8x_4$;
- *substituindo o valor de* x_3 *na segunda equação e isolando* x_2 *obtemos*
$$x_2 = -2(-5 - 8x_4) - 3x_4 = 10 + 13x_4 \quad ;$$
- *substituindo o valor de* x_2 *e isolando* x_1 *na primeira equação*
$$x_1 = -2 - x_2 - 4x_4 = -2 - (10 + 13x_4) - 4x_4 = -12 - 17x_4 \quad ;$$
- *e* x_4 *? Esta variável pode assumir qualquer valor real.*

Assim uma solução tem que ser um vetor coluna do tipo :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 17x_4 \\ 10 + 13x_4 \\ -5 - 8x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 . \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e x_4 pode assumir qualquer valor real. Ou seja, o conjunto solução é

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 . \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \forall x_4 \in R \right\} \quad ,$$

ou seja, existem infinitas soluções e, portanto, o sistema é possível e indeterminado.

Nesse exemplo (ou no anterior) o procedimento da Eliminação de Gauss poderia prosseguir até chegar numa **matriz na forma escada**, isto é,

- além de estar na forma escalonada;
- o primeiro elemento não nulo de uma linha qualquer é 1.

Para tal basta voltamos no passo 4 em que obtivemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

e substituimos a linha 3 por $L_3 \leftarrow -L_3$ e obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ou ainda, poderíamos deixar a **matriz na forma escada reduzida por linha,** isto é:

- além de estar na forma escada ;
- o primeiro elemento não nulo de cada linha é o único elemento diferente de zero na sua coluna.

Para deixarmos a matriz do sistema do exemplo anterior na forma escada reduzida por linha, partimos da forma escada e para, estabelecer a segunda exigência, vamos trabalhar de baixo para cima, ou seja, começando da última linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

- Não mexemos na última linha L3 e devemos operar para que na coluna do pivô desta linha só ocorra zeros. Então devemos modificar apenas L2,neste momento, utilizando a L3

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix};$$

- Agora fixemos nossa atenção em L2 e não mexemos mais em L3 e L2. Acima do pivô de L2 deve haver apenas zeros. Então vamos modificar L1 operando com L2

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{array}\right) \quad ,$$

- *Conclusão: a matriz de coeficientes está na forma escada reduzida por linha e o sistema equivalente é ainda mais simples de ser resolvido.*

Exemplos de matrizes na forma escada reduzida por linha (página 105).

Exemplo 3: Encontre o conjunto solução do sistema dado por

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=1 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+9x_4=0 \end{array}\right\} \quad ,$$

ou em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

utilizando a eliminação de Gauss até obter a matriz de coeficientes na forma escada reduzida por linhas

1- Partimos da matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad ,$$

2- Fixemos a primeira linha e vamos trabalhar inicialmente para obter a matriz de coeficientes na forma escalonada. Para tal façamos:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad e \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

obtendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & -3 \end{array}\right) \quad ,$$

3- E neste passo façamos $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ obtendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

4- Já temos a matriz na forma escada. Mas ainda precisamos modificar a lina L1, operando com L2, para que ela esteja na forma escada reduzida por linha. Façamos $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ para obter

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

A matriz de coeficientes está na forma escada reduzida por linha. Voltando ao sistema em sua forma usual

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 \quad - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ 0 = -1 \end{array} \right\} \quad ,$$

percebemos que a última equação exige um absurdo! Ou seja, o sistema não possui solução e, portanto, é um sistema impossível.