ICE – Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 3

Componente Curricular:

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)

Prof. Roseli Alves de Moura

LIMITES – CONCEITOS E PROPRIEDADES

1. CONCEITO

Em limites, de um modo não rigoroso, mas intuitivo, estamos interessado em responder a seguinte pergunta:

"Na medida em que x se aproxima cada vez mais de a ($x \neq a$), as imagens correspondentes f(x) da função ficam cada vez mais próxima de algum número L?

Se a resposta for afirmativa dizemos que o limite de f(x), para x tendendo a, é igual a L e, escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

O objetivo do cálculo do limite é examinar o **comportamento** de uma função nas proximidades (vizinhanças) de um ponto, observando se pertence ou não ao domínio da função. Nesse estudo encontraremos diversos "comportamentos" possíveis para as funções. Na pergunta acima o ponto crucial é a expressão "ficar mais próxima" que não permite uma conceituação matemática precisa. Para fugir dela emprega-se definição abaixo, de modo formal do seguinte modo:

Definição - Seja f(x) uma função definida nas vizinhanças de a e L um valor do seu contradomínio. Então dizer que "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$" significa que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que, para todo x do conjunto $0 < |x - a| < \delta$ (vizinhança de a), tem-se $|f(x) - L| < \varepsilon$ (vizinhança de L).

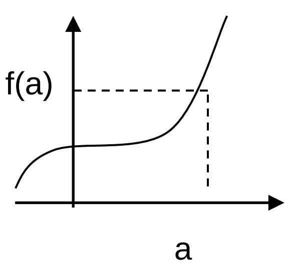
De forma geral, o que a definição está dizendo é que f(x) pode tornar-se arbitrariamente próxima de L, escolhendo-se "x" suficientemente próximo de "a", pois ε pode tornar-se arbitrariamente pequeno.

Propriedades

P1) Se f(x) possuir limite em a, então esse valor é <u>único</u>.

P2) O limite de uma constante é a própria constante.

Cálculo do limite - Na prática, em geral, usamos a seguinte regra: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ("parte" da definição de função contínua), exceto quando aparecem as formas indeterminadas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ (que exigem técnicas especiais) ou quando não existe o limite.



Exercício 1 - Calcular os limites:

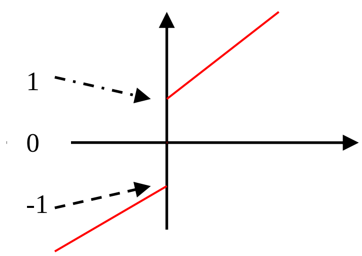
a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ (resposta: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$).

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x + 3)^{x+1}$ (resposta: $\lim\limits_{x \to -1} (x + 3)^{x+1} = (-1 + 3)^{-1+1} = 2^0 = 1$).

2. LIMITES LATERAIS – Estudam o comportamento da função em cada lado do ponto (direito e esquerdo). Considere o gráfico da função:

$$y = f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Podemos notar que para valores próximos de zero pelo seu lado esquerdo, a função assume sempre o valor –1, já pelo lado direito, assume sempre o valor +1. Isto ocorre por a função é descontínua no ponto x =0.



Essa função não é contínua em x = 0. Nesse ponto ela tem uma ruptura.

Expressamos este comportamento em termos de limites da seguinte maneira:

$\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = -1$ denominado de limite lateral à esquerda

$\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 1$ denominado de limite lateral à direita.

Como o valor do limite deve ser único (propriedade anterior) implica na não existência desse limite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no ponto x=0.

Observe que o gráfico da função tem uma ruptura (salto). Vamos dizer que a função tem limite no ponto, quando os limites laterais forem iguais.

Propriedade da existência do limite:

$$\boxed{\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow existemos \ \text{lim.}\ laterais\, e \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L}.$$

Nos demais casos, a função não tem limite no ponto.

Definições formais de limites laterais:

I) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / se.\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

II) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / se.\ a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$

Observações importantes:

1) Quando o limite existe, e é igual ao valor da função no ponto dizemos que função é **<u>contínua</u>** nesse ponto: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) O limite de uma função pode existir sem que ela esteja definida no ponto.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad \text{(resolução: } \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4.$$

(O gráfico dessa função é uma reta com um "furo" em $x = 2$).

3) Uma outra forma de não existência do limite, além do caso ter limites laterais diferentes, aparece quando não é possível de modo algum calcular o seu valor:

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right).$$

(Use uma calculadora gráfica para fazer o gráfico dessa função).