ICE– Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 5 – DERIVADAS

Componente Curricular:

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)

Prof. Roseli Alves de Moura

DERIVADAS - INTRODUÇÃO

A derivada é um limite especial e muito importante, com muitas aplicações em engenharia e nas ciências naturais. Nascida nos problemas de cinemática e de geometria se expandiu para incluir os demais campos do conhecimento.

DEFINIÇÃO: Seja f(x) uma função definida num intervalo aberto I contendo o valor x_0 . A derivada da função f no ponto de abscissa é x_0 o valor do limite:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou do seu equivalente
$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

desde que existam.

Indica-se derivada por: $f'(x_o)$, $\frac{df}{dx}(x_o)$ ou $\overset{o}{f}(x_o)$, notações de Lagrange, Leibniz e Newton , respectivamente .

Se f'(x_0) existe, dizemos que f é derivável ou diferenciável no ponto de abscissa x_0.

Dizemos que f é derivável em um conjunto se for derivável em cada ponto.

Exemplo 1) Derivar pela definição $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

Resolução: Fazendo $x_0 = a$,

teremos: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} =$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}}{x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)(x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}} = \frac{1}{3a^{2/3}}.$$

Observe que a função f do exemplo está definida para todos os números reais, porém, a expressão de f'(a) não aceita o valor zero para a.
Em zero o limite é igual $+\infty$.

FUNÇÃO DERIVADA: Seja D' o conjunto de valores do domínio de f para os quais f'(a) existam. A função $f': D' \to \Re \,/\, y = f'(x)$ chama-se função derivada ou simplesmente derivada.

Exemplo: A derivada de $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ é a função $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

ÁLGEBRA DAS DERIVADAS:

R1) A derivada de uma soma ou subtração de funções é a soma ou a subtração das derivadas, isto é: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

R2) Produto de funções: $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

R3) Quociente de funções: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

R4) Casos particulares: Sendo K uma constante, então:

1) $[Kf(x)]' = k.f'(x)$

2) $\left[\frac{k}{g(x)}\right]' = -\frac{Kg'(x)}{g^2(x)}$

Usando o limite da definição de derivada prova-se todas as propriedades “operacionais” abaixo:

R1) A derivada de uma soma ou subtração de funções $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

Prova:

$$[f(x) \pm g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h) - [f(x) \pm g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

R2) Produto de funções: $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Prova:

$$[f(x).g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

R3) Quociente de funções : $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

Prova:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h.g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h.g(h+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

R4) Casos particulares: Sendo K uma constante, então a sua derivada é zero e, portanto:

i) $[Kf(x)]' = k.f'(x)$

ii) $\left[\frac{k}{g(x)}\right]' = -\frac{Kg'(x)}{g^2(x)}$

TABELA DE DERIVADAS: Na prática a derivada (isto é, o limite) será mais útil se for usada na forma tabelada. A tabela funciona como uma “caixa preta” no seguinte sentido:

1ªcoluna (entrada) — 2ªcoluna (saída)

função $f(x)$ $\longrightarrow \boxed{} \longrightarrow$ derivada $f'(x)$

(0 mecanismo da caixa é o limite)

TABELA 1

Função	Derivada
$f(x) = K$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$, função potência inteiras positivas de x	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, função potência inteiras negativas de x	$f'(x) = -x^{-n-1} = \dfrac{1}{x^{n+1}}$
$f(x) = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$, função com potências racionais de x	$f'(x) = \dfrac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \Re$, função potência	$f'(x) = \alpha . x^{\alpha - 1}$

CONTINUIDADE:

Teorema: Se $f(x)$ tem derivada em $x = a$, então $f(x)$é contínua em $x = a$.

Prova:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=f'(a).0=0\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Logo $f(x)$ é contínua no ponto $x=a$.

Nota: A recíproca não é verdadeira. Basta observar que a função modular $f(x)=|x|$ é contínua no ponto $x=0$ porém não tem derivada nesse ponto. Achando as derivadas laterais (limites laterais) da função teremos:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$ e

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\Rightarrow f'(0)$ não existe. Isto é, a função não tem reta tangente nesse ponto.

Um ponto no qual as derivadas laterais $f'(a^+)\neq f'(a^-)$ (existem, são finitas e diferentes), chama-se ponto anguloso da curva.

Exemplos:

1) $f(x)=|x|$ tem ponto anguloso em $x=0$.

2) $f(x)=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ não tem ponto anguloso em $x=0$.

EXERCÍCIOS

I) Derivar as funções abaixo pela definição:

1) $f(x)=x^3-x$

Resolução: Pela definição teremos:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^3-x-a^3+a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3-(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2-1)=3a^2-1$$

para um valor genérico a. Em outras palavras: $\frac{d}{dx}(x^3-x)=3x^2-1$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Resolução: Explorando a outra expressão do limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

II) Derivar as funções abaixo usando a tabela

3) $y = (x+1)^3$

Resolução - Desenvolvendo o binômio teremos:

$$y = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Logo: $y' = 3x^2 + 6x + 3$

4) $y = (x^2 + \sqrt{x})^2$

Resolução: $y = x^4 + 2x^2 x^{1/2} + x = x^4 + 2x^{5/2} + x \Rightarrow y' = 4x^3 + 5x^{3/2} + 1$

5) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

Resolução: $y' = \dfrac{(x^2-1)'.(x^2+2) - (x^2-1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x.(x^2+2) - (x^2-1).2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2}$$

6) Sendo $f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = 3, g'(1) = 4$ calcule:

a) $(f^2)'(1)$

b) $(f+g)'(1)$

c) $(f.g)'(1)$

d) $(\dfrac{f}{g})'(1)$

Resolução

a) Como $f^2(x) = f(x).f(x)$ teremos pela derivação do produto o seguinte: $(f^2(x))' = 2.f(x).f'(x)$. Para x=1, obtemos $(f^2)'(1) = 2.1.2 = 4$

b) $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \Rightarrow [f+g]'(1) = f'(1)+g'(1) = 2+4 = 6$

c) $[f.g]'(1) = f'(1).g(1) + f(1).g'(1) = 2.3+1.4+10$

d) $\left[\frac{f}{g}(1)\right] = \frac{f'(1)g(1) - f(1).g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2.3-1.4}{3^2} = \frac{2}{9}$