Base Numéricas

Quando o homem aprendeu a contar, foi obrigado a desenvolver símbolos, chamados algarismos, que representassem as quantidades e grandezas.

- Pre-histórico : sistema unário.

- Algarismos romanos (basicamente aditivos)

III = I + I + I

para representar grandes quantidades símbolos especiais:

V =5, X= 10, L =50, C= 100, D=500, M = 1000

=> A realização de cálculos, como multiplicação e divisão, extremamente complexa.

- Sistema Hindu-arábico :

10 algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

Características:

1- Existe um símbolo para o valor nulo.

2- Cada algarismo utilizado é uma unidade maior que o seu predecessor.

3- A notação é posicional, ou seja , o valor de um algarismo é determinado pela sua posição dentro do número. Cada posição possui um determinado peso.

Os sistemas atuais formam os números inteiros da seguinte forma:

$$\mathbf{a = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \,.\, B^i}$$

onde:

a – número propriamente dito
n – número de casas inteiras
B – base
x_i – dígito na posição i, sendo que a unidade possui i =0 dígito menos significativo, n-1 dígito mais significativo.

$$X_{n-1} .B^{n-1} + X_{n-2} .B^{n-2} + \ldots X_2 .B^2 + X_1 .B^1 + X_0 .B^0$$

Regras :

- A base B de um sistema é igual à quantidade de algarismos distintos utilizados.

Ex: base 10 (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) ; Ex: base binária (0,1).

base hexadecimal(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F).

- Quando uma posição é ocupada pelo maior algarismo e deve ser aumentada de uma unidade, esta posição recebe o símbolo nulo e a posição seguinte deve ser aumentada de uma unidade.
- O algarismo mais à direita tem peso 1. O algarismo imediatamente à esquerda tem o peso da base B, o seguinte tem peso de ao quadrado, depois ao cubo e assim por diante.
- O valor de cada algarismo de um número é determinado multiplicando-se o algarismo pelo peso de sua posição
- O valor do número é determindo pela soma dos valores

de cada algarismo

Para uma determinada base B, empregando-se *n* dígitos tem-se:

B^n combinações distintas, ou seja, B^n números distintos.

Ex: Base decimal empregando-se 3 dígitos para sua representação: _ _ _

{0 ,... 9} = 10 possibilidades

{0, ... 9} = 10 possibilidades

{0, ... 9} = 10 possibilidades,

$10 \times 10 \times 10 = B^n = 10^3 = 1000$ números distintos, cuja faixa de representação vai de 0 a 999.

Ex: Base binária empregando-se 3 dígitos para sua representação: _ _ _

{0 ,1} = 2 possibilidades

{0, 1} = 2 possibilidades

{0, 1} = 2 possibilidades,

$2 \times 2 \times 2 = B^n = 2^3 = 8$ números distintos, cuja faixa de representação vai de 0 a 7.

2 dígitos => _ _ , $2^2 = 4$, faixa > 00_2 0_{10} (primeiro número)

01_2 1_{10}

10_2 2_{10}

11_2 3_{10} (último número)

3 dígitos => _ _ _ , $2^3 = 8$, faixa > 000_2 0_{10} (primeiro número)

001_2 1_{10}

010_2 2_{10}

011_2 3_{10}

100_2 4_{10}

101_2 5_{10}

110_2 6_{10}

111_2 7_{10} (último número)

4 dígitos => _ _ _ _ , $2^4 = 16$, faixa > 0000_2 0_{10} (primeiro número)

.

.

.

1111_2 15_{10} (último número)

4 dígitos => _ _ _ _ , $2^4 = 16$, faixa > 0000_2 0_{10} (primeiro número)

.
.
.

1111_2 15_{10} (último número)

5 dígitos => _ _ _ _ _, $2^5 = 32$, faixa > 00000_2 0_{10} (primeiro número)

.
.
.

11111_2 31_{10} (último número)

8 dígitos => _ _ _ _ _ _ _ _, $2^8 = 256$,

faixa > 00000000_2 0_{10} (primeiro número)

.
.
.

11111111_2 255_{10} (último número)

10 dígitos => _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , $2^{10} = 1024$,

faixa > 0000000000_2 0_{10} (primeiro número)

.
.
.

1111111111_2 1023_{10} (último número)

Exercício: Quantos bits na representação binária, no mínimo, são necessários para representar o número 509_{10} ?

solução:

sabe-se que $2^8 = 256$ => faixa de valores possíveis vai de 0 a 255, logo 8 bits é insuficiente.

Mas $2^9 = 512$ => faixa de valores possíveis vai de 0 a 511, logo 9 bits é suficiente.

Dê a representação de 509_{10} na base binária. (repare que este exercício esta sendo aplicado sem sabermos as regras da conversão de números entre base diferentes)

solução:

Sabe-se que $511_{10} = 111111111_2$ (ultimo número da faixa de valores para uma representação com 9 bits). Se começássemos a escrever a tabela de valores de baixo para cima teríamos:

111111101_2 509_{10} → resposta

111111110_2 510_{10}

111111111_2 511_{10}

Mudança de Base de Números Inteiros

Convenciona-se indicar em sub-escrito o valor da base. Assim, o número dezessete em diversas bases seria: 17_{10}, 17_8 ou 17_{16} etc.

- **Conversão de binário para decimal.**

Soma-se os pesos das posições em que o número binário tiver bit 1.

Ex: 11011_2 => 1 1 0 1 1

$$2^4 + 2^3 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27_{10}$$

Ex: 10110101_2 =

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 181_{10}$$

128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1

- **Mudança entre as bases 2 e 8.**

As bases 2 e 8 são potências uma da outra visto que $8 = 2^3$. Por isto cada algarismo na base 8 é representado por três algarismos na base 2:

Base 8	Base2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Assim, se temos um número na base 8 e desejamos passar para a base 2 basta trocar cada algarismo octal por seu correspondente binário.

$342_8 = 011.100.010_2$, pois $3_8 = 0112$, $4_8 = 100_2$ e $2_8 = 010_2$.

De forma semelhante podemos trocar da base 2 para a base 8 grupando de três em três os algarismos binários e, em seguida, transformando-os em seus correspondentes octais. ex: o número 1001010011001_2 pode ser grupado como $001.001.010.011.001_2 = 11231_8$.

Mudança entre as bases 2 e 16

Similar a mudança entre as bases 2 e 8, a mudança entre as bases 2 e 16 é feita transformando-se cada quatro algarismos binários em um algarismo hexadecimal. Isto porque $16 = 2^4$.

Base 16	Base2	Base 16	Base2
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

Assim, se temos um número na base 16 e desejamos passar para a base 2 basta trocar cada algarismo hexadecimtal por seu correspondente binário.

EX: 1001010110011101101_2 em

$0100.1010.1100.1110.1101_2 = 4ACED_{16}$

Da mesma forma, se tivermos $10A3_{16}$ podemos, rapidamente, transformar em $0001.0000.1010.0011_2$

Mudança entre as bases 8 e 16

Para fazer transformações entre as bases 8 e 16, que não são potências uma da outra, usamos a base 2 como intermediária nestas transformações.

Por exemplo, para transformar $1BC4_{16}$ para seu equivalente na base 8. Inicialmente transformamo-lo para a base 2. Então:

$1BC4_{16} = 0001.1011.1100.0100_2$

reagrupando o agora número binário de três em três temos:

$0.001.101.111.000.100_2 = 15704_8$

Portanto

$1BC4_{16} = 15704_8$.

Por outro lado, se tivermos, por exemplo, o número 235_8 para transformá-lo para a base 16, primeiro passamo-lo para a base 2.

$235_8 = 010.011.101_2$

Em seguida grupamos os algarismos binários de quatro em quatro.

$0.1001.1101_2 = 9D_{16}$

Conversão de decimal para binário

Método das subtrações ou processo inverso.

EX: 681_{10} . (Escrever as potências de 2 para auxiliar) | $2^{10} = 1024$

681 é um número menor 1024 e maior que 512 | $2^9 = 512$

Então podemos escrever : 681 = 512 + 169, | $2^8 = 256$

| $2^7 = 128$

169 é um número menor que 256 e maior que 128 | $2^6 = 64$

Logo, 169 = 128 + 41, | $2^5 = 32$

| $2^4 = 16$

41 é um número menor que 64 e maior que 32, | $2^3 = 8$

Logo, 41 = 32 + 9 | $2^2 = 4$

... | $2^1 = 2$

9 = 8 + 1 | $2^0 = 1$

Assim tem-se

$$681 = 512 + 128 + 32 + 8 + 1$$

$$= 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 1010101001_2$$

Conversão de decimal para binário

Método das divisões sucessivas:

681 / 2 = 340 , resto 1 (bit menos significativo)

340 / 2 = 170 , resto 0

170 / 2 = 85 , resto 0

85 / 2 = 42 , resto 1

42 / 2 = 21 , resto 0

21 / 2 = 10 , resto 1

10 / 2 = 5 , resto 0

5 / 2 = 2 , resto 1

2 / 2 = 1 , resto 0

1/ 2 = 0, resto 1 (bit mais significativo)

$681_{10} = 1010101001_2$

- Conversão de Octal para decimal

Soma dos pesos:

Ex: $372_8 = 3_x8^2 + 7_x8^1 + 2_x8^0$

$= 3_x64 + 7_x8 + 2_x1 = 250_{10}$

- Conversão de decimal para Octal

Método das divisões sucessivas:

Ex: 250_{10} ,

250 / 8 = 31, resto 2 (dígito menos significativo)

31 / 8 = 3 , resto 7

3 / 8 = 0 , resto 3 (dígito mais significativo)

$250_{10} = 372_8$

- Conversão de hexadecimal para decimal

Soma dos pesos:

Ex: $356_{16} = 3 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 6 \times 16^0$

$= 768 + 80 + 6 = 854_{10}$

Ex: $2AF_{16} = 2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0$

$= 512 + 160 + 15 = 687_{10}$

- Conversão de decimal para hexadecimal

Método das divisões sucessivas:

Ex: 687_{10}

687 / 16 = 42 , resto 15 (dígito menos significativo)

42 / 16 = 2 , resto 10

2 / 16 = 0 , resto 2 (dígito mais significativo)

$687_{10} = 2AF_{16}$