Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Professor: Montauban Oliveira

Monitor: Matheus dos Santos Martins

Disciplina: Cálculo II

DOMÍNIOS, GRÁFICOS E LIMITES DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Questão 1 -

• A análise de domínio de cada função de duas ou mais variáveis é feita utilizando os mesmos princípios de funções de uma variável.

a) $z = \sqrt{x+y-4} = f(x,y)$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -x+4\}$

• $x+y-4 \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \geq -x+4}$

b) $z = \sqrt{y-1-x^2}$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2+1\}$

• $y-1-x^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \geq x^2+1}$

c) $z = \dfrac{5\ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

• $\begin{cases} x+y > 0 \Rightarrow \boxed{y > -x} \\ 4-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 < 4} \end{cases}$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -x,\ x^2+y^2 < 4\}$

Questão 2 -

• $S = S_1 \cup S_2$

$\Rightarrow S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 2\}$

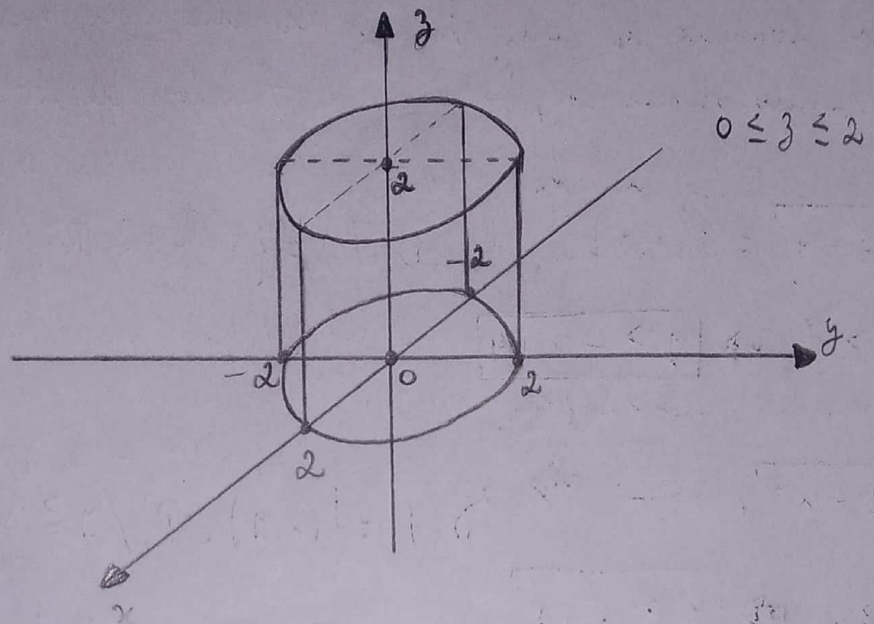
Observe que a equação $x^2+y^2=4$, em $\mathbb{R}^3$, é um cilindro de base circular de raio 2.

$\Rightarrow S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{x^2+y^2},\ 4 \leq x^2+y^2 \leq 25\}$

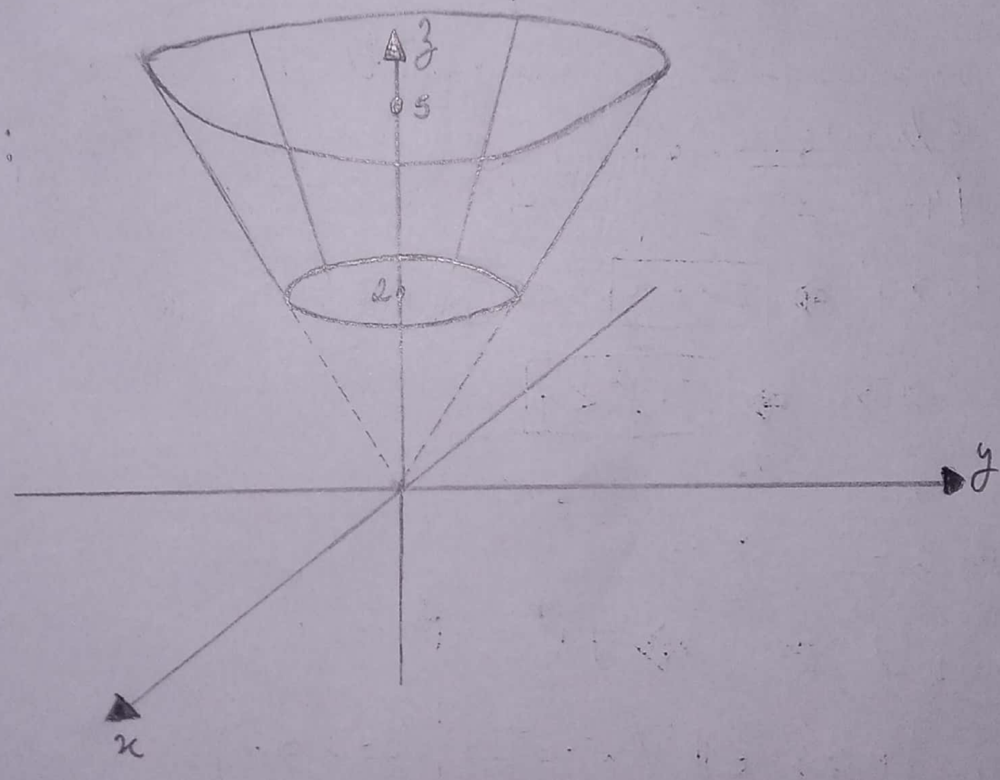
Note que $z = \sqrt{x^2+y^2}$, representa a parte superior de um cone.

• Representando graficamente S_1 e S_2:

↳ S_1:

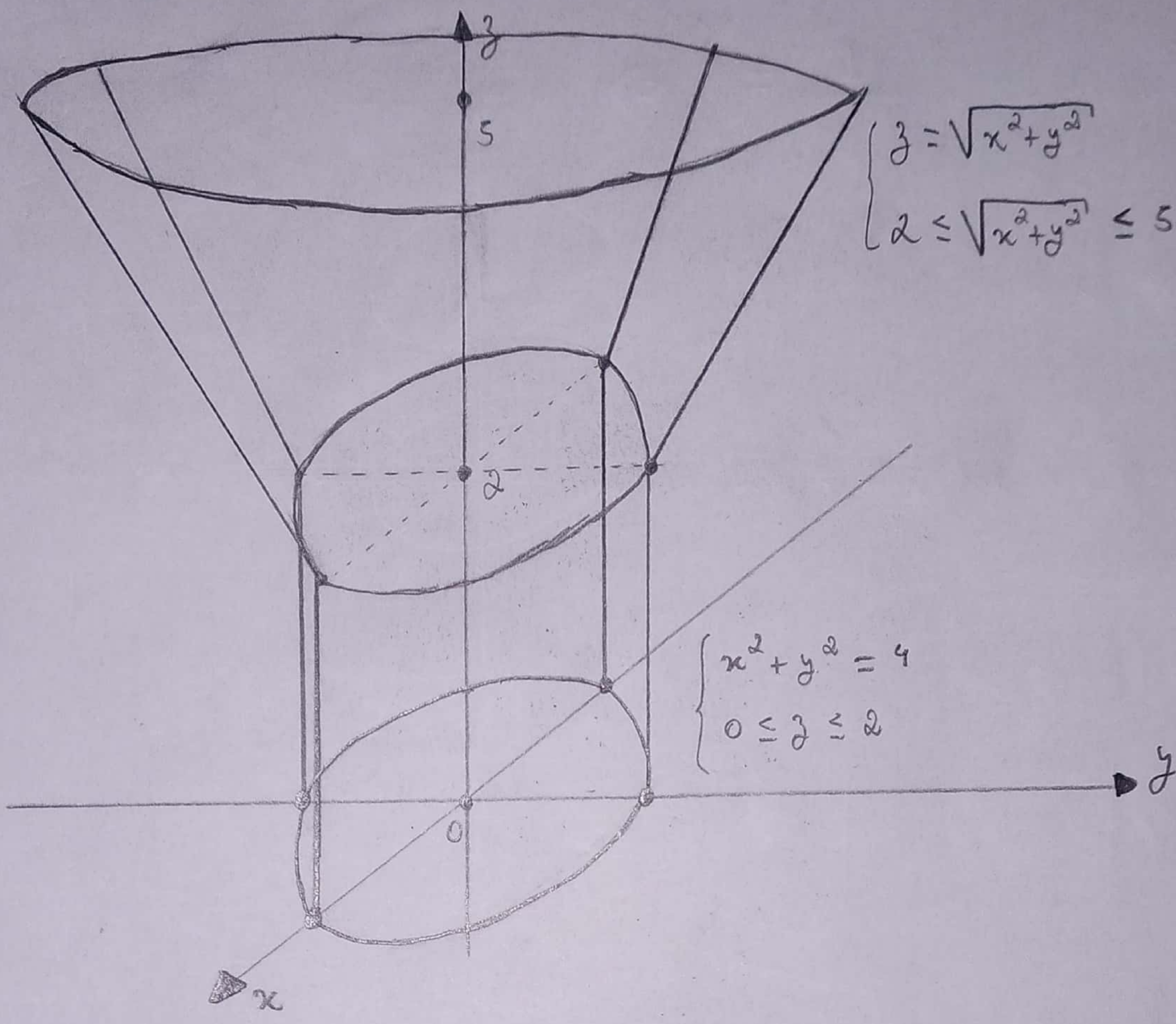


↳ S_2:



• $4 \le x^2+y^2 \le 25 \Rightarrow 2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 5$

$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \ge 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le 5 \end{cases}$ > Visto que temos a equação do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, então $2 \le z \le 5$.



Questão 3

- $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} = z$

a) • Para $z = \dfrac{1}{4}$, Temos: $\dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2 = 4$ (circunferência de raio 2 e centro $(0,0)$)

↳ Parametrização: $\rho_1(t) = \left(2\cos(t),\ 2\,\text{sen}(t)\right),\ t \in [0, 2\pi]$

- Para $z = 4$: $\dfrac{1}{x^2+y^2} = 4 \Rightarrow x^2+y^2 = \dfrac{1}{4}$ (Circunferência de raio 1/2 e centro $(0,0)$)

↳ Parametrização: $\rho_2(t) = \left(\dfrac{\cos(t)}{2},\ \dfrac{\text{sen}(t)}{2}\right),\ t \in [0, 2\pi]$

Digitalizado com CamScanner

Para $z = 9$: $\dfrac{1}{x^2+y^2} = 9 \Rightarrow x^2+y^2 = \dfrac{1}{9}$ (Circunferência de raio $\frac{1}{3}$ e centro $(0,0)$).

↳ Parametrização: $\rho_3(t) = \left(\dfrac{\cos(t)}{3}, \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{3}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ //

b) Para esboçar o gráfico de f, vamos utilizar algumas <u>curvas de nível</u>:

• $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} = z$. Fazendo $z = c$, $c \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = \frac{1}{z}} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = \frac{1}{c}}$$

• Para $c = 0$, teremos o conjunto vazio, ou seja, o gráfico de f não tangencia (encosta) ou intercepta (atravessa) os eixos x e y. Mais ainda, tal informação nos dá a entender que há um comportamento assintótico de f com $z=0$ (plano xy).

• Para $c < 0$, também teremos o conjunto vazio, pois a equação $x^2+y^2 = \frac{1}{c}$, não admitirá solução. (Reflita!)
Tal informação implica que todo o gráfico de f está acima do plano xy $(z > 0)$.

• Para $c > 0$, coisas interessantes começam a acontecer na equação $x^2+y^2 = 1/c$. Observe que:

↳ Se c for um número muito grande então $1/c$ será um número definitivamente muito pequeno, e caso c seja um número muito pequeno, claramente $1/c$ será um número muito grande. (I)

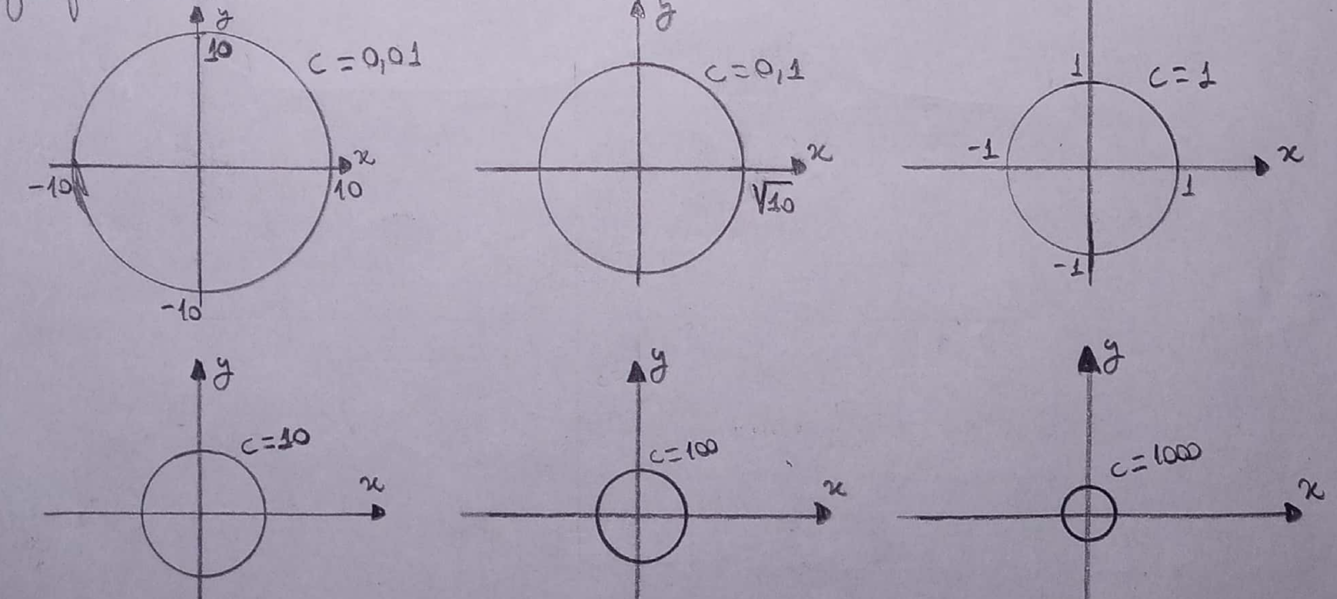
* Lembre que $c > 0$ *

↳ A equação $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$ representa uma família de circunferências com centro na origem $(0,0)$ e raio $\sqrt{\frac{1}{c}}$. (II)

Analise agora as observações I e II e como elas se relacionam.

• Relação 1 – Como o raio de cada circunferência da equação é dado por $\sqrt{\frac{1}{c}}$, $c > 0$, então quanto mais diminuirmos o valor de c, maiores serão as circunferências, analogamente, quanto mais aumentarmos, menores serão as circunferências.

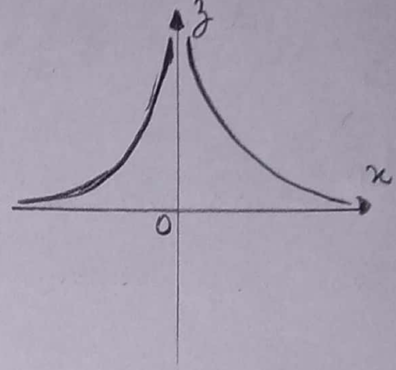
• Relação 2 (Gráfico) – Observe alguns exemplos do comportamento gráfico das curvas de nível no plano xy:



• O estudo gráfico feito anteriormente foi para uma visão superior (vista de cima) de f, ou seja, projeções no plano xy. Vamos agora analisar o comportamento de f nos planos xz e yz.

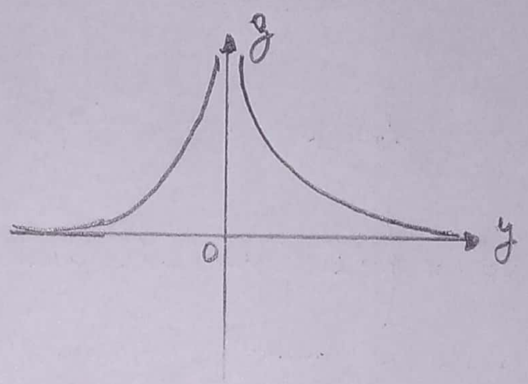
↳ Plano xz $(y=0)$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,0) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

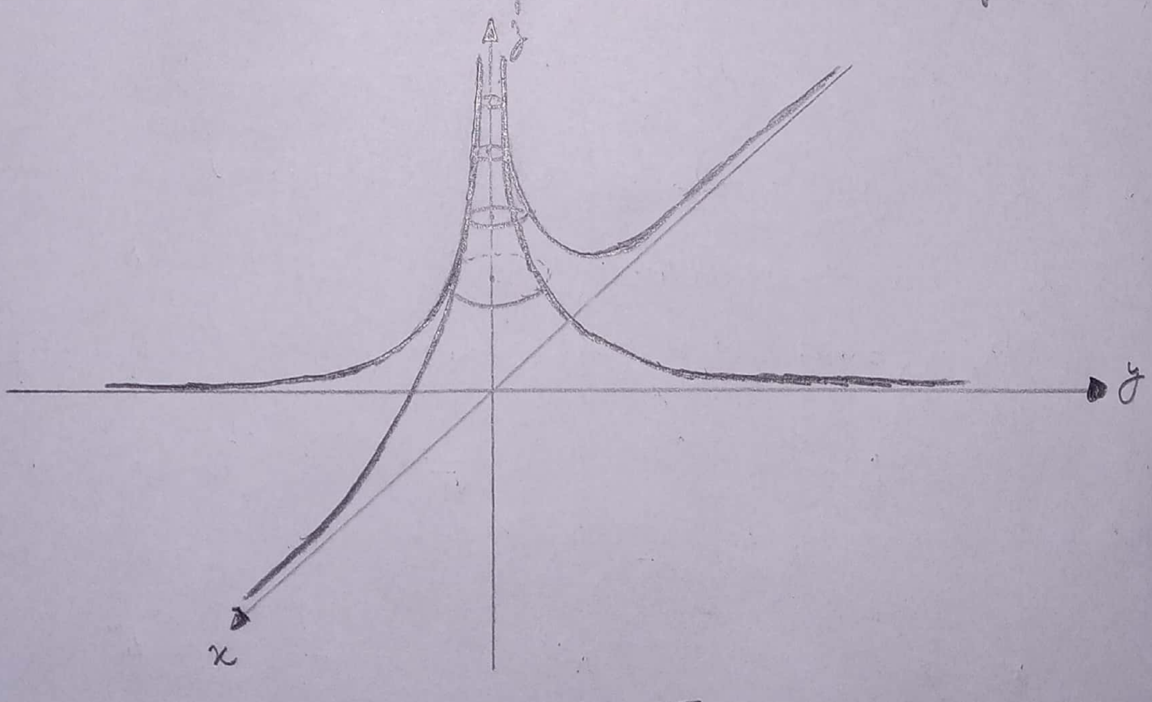


↳ Plano yz $(x=0)$

$$f(0,y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow$$



Ao juntarmos todas as informações, podemos, enfim, esboçar f:



• Observe o gráfico e verifique se todas as conclusões que tiremos correspondem com o mesmo!

Questão 4

$$f(x,y) = \begin{cases} 7 - \sqrt{x^2+y^2} & , 0 \leq x^2+y^2 \leq 16 \\ \sqrt{25-x^2-y^2} & , 16 \leq x^2+y^2 \leq 25 \end{cases}$$

• Em $f(x,y) = 7 - \sqrt{x^2+y^2}$, podemos fazer:

$\Rightarrow z - 7 = -\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (7-z) = \sqrt{x^2+y^2}$, que representa a equação de cone com centro em $(0,0,7)$.

Como $0 \leq x^2+y^2 \leq 16$, então:

$0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 7-z \leq 4 \Rightarrow 0-7 \leq -z \leq 4-7$

$\Rightarrow -7 \leq -z \leq -3 \quad .(-1) \Rightarrow \boxed{3 \leq z \leq 7}$

• Em $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$, fazemos:

$z = \sqrt{25-x^2-y^2} \Rightarrow$ Na qual representa a parte superior de uma esfera de raio 5. (Reflita!)

Como $16 \leq x^2+y^2 \leq 25$, fazemos:

$-25 \leq -x^2-y^2 \leq -16 \Rightarrow -25+25 \leq 25-x^2-y^2 \leq -16+25$

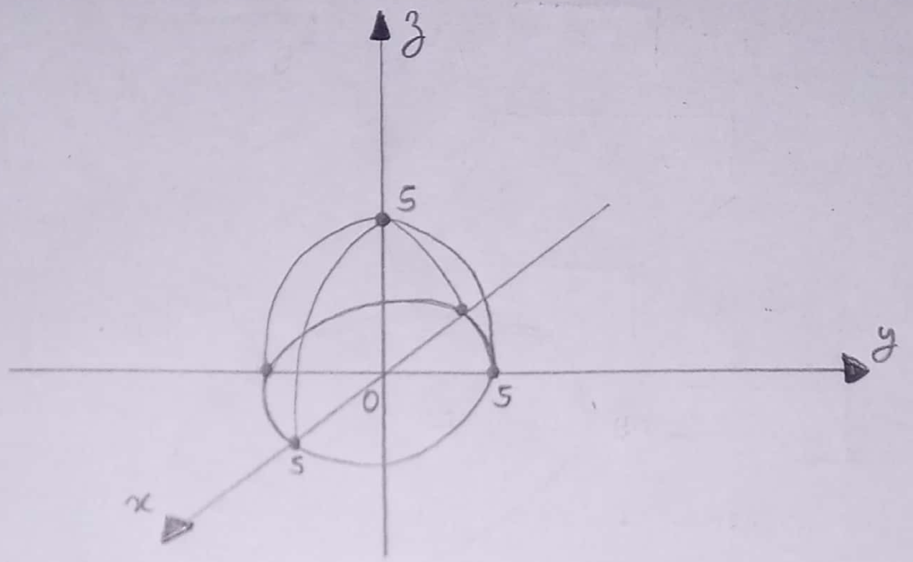
$0 \leq 25-x^2-y^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{25-x^2-y^2} \leq 3$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq z \leq 3}$

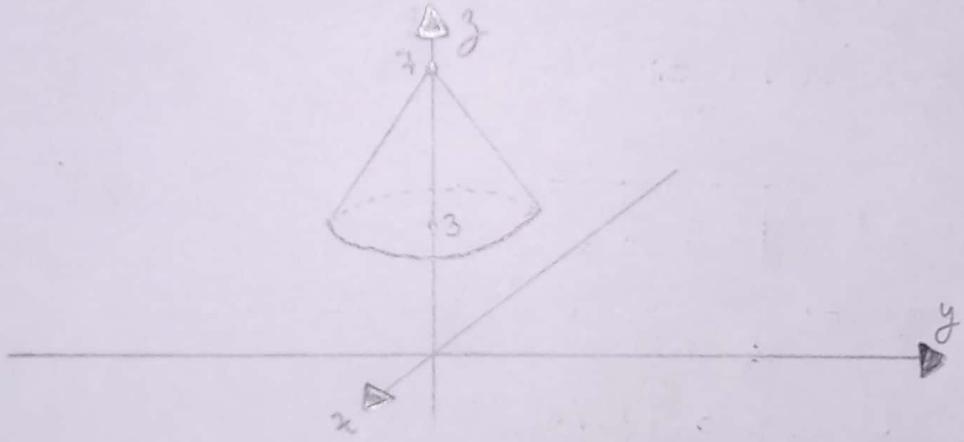
Logo, Temos: $f(x,y) = \begin{cases} 7 - \sqrt{x^2+y^2} & , 3 \leq z \leq 7 \\ \sqrt{25-x^2-y^2} & , 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$

Esboçando, em etapas, Temos:

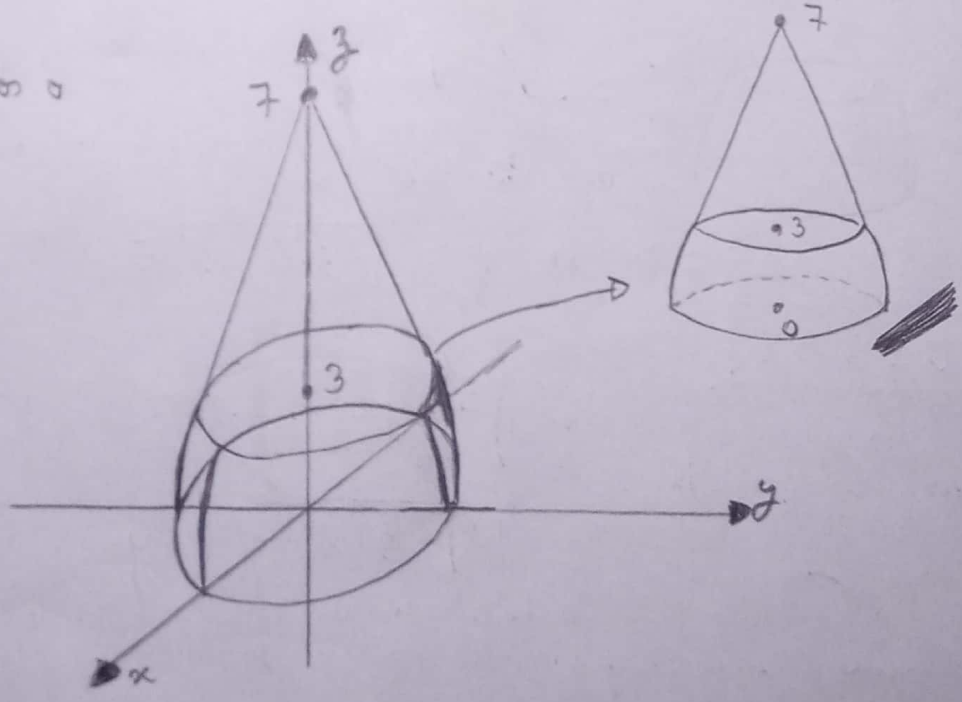
• Esfera: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $0 \leq z \leq 5$



• Cone: $z = 7 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $3 \leq z \leq 7$



Logo, teremos o sólido:



Questão 5

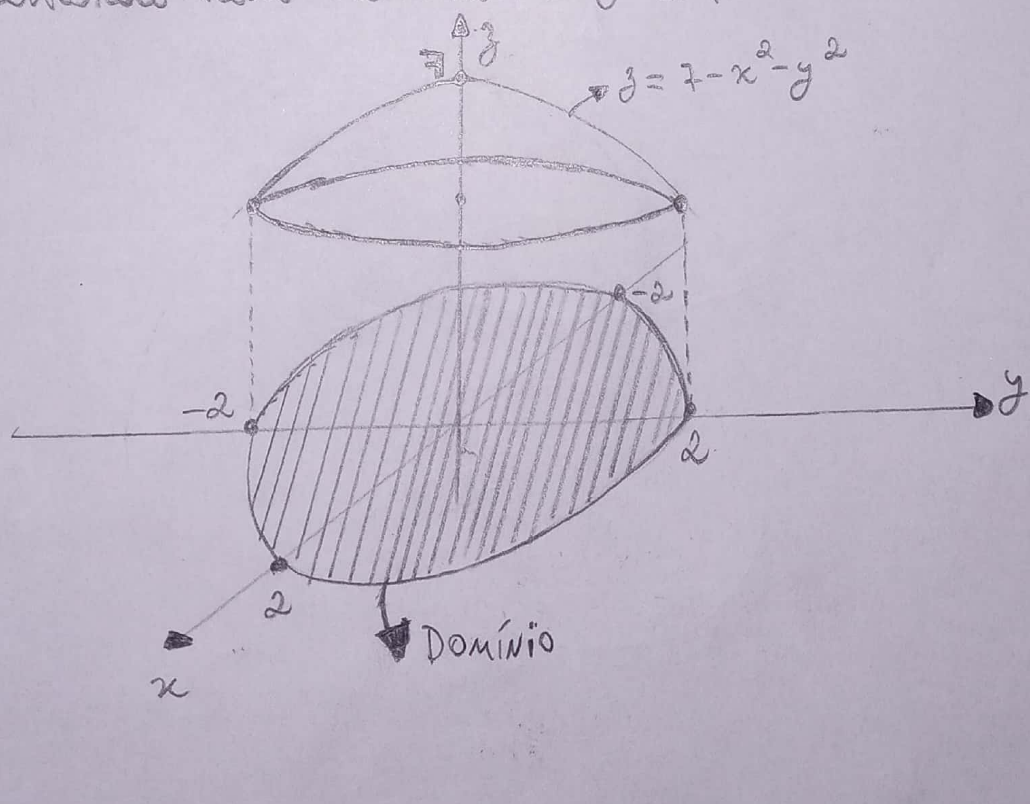
$$f(x,y) = \begin{cases} 7 - x^2 - y^2, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 4, & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

- Em $f(x,y) = 7 - x^2 - y^2$, façamos:

$z = 7 - x^2 - y^2$. * Como exercício, faça as curvas de nível de $f(x,y)$ e mostre que se trata de um parabolóide elíptico. *

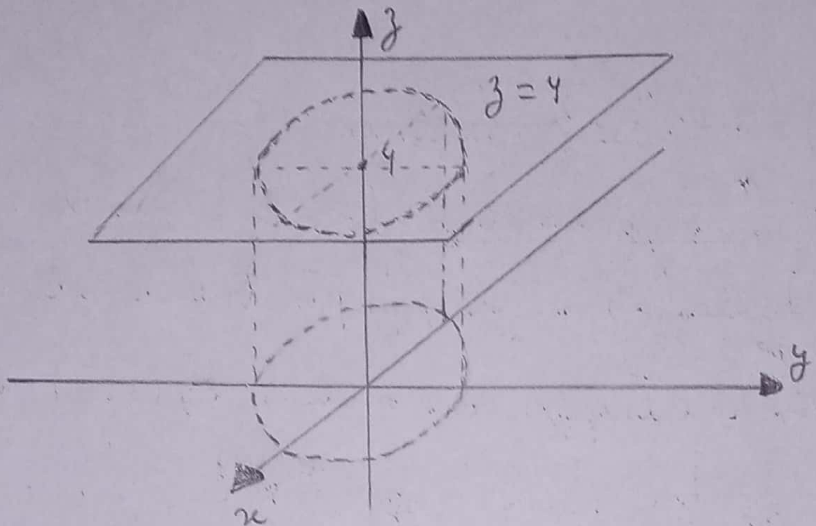
(Dica: Analise as interseções com os planos xy $(z=0)$, xz $(y=0)$ e yz $(x=0)$).

Observando nosso domínio $x^2 + y^2 \leq 4$, teremos:

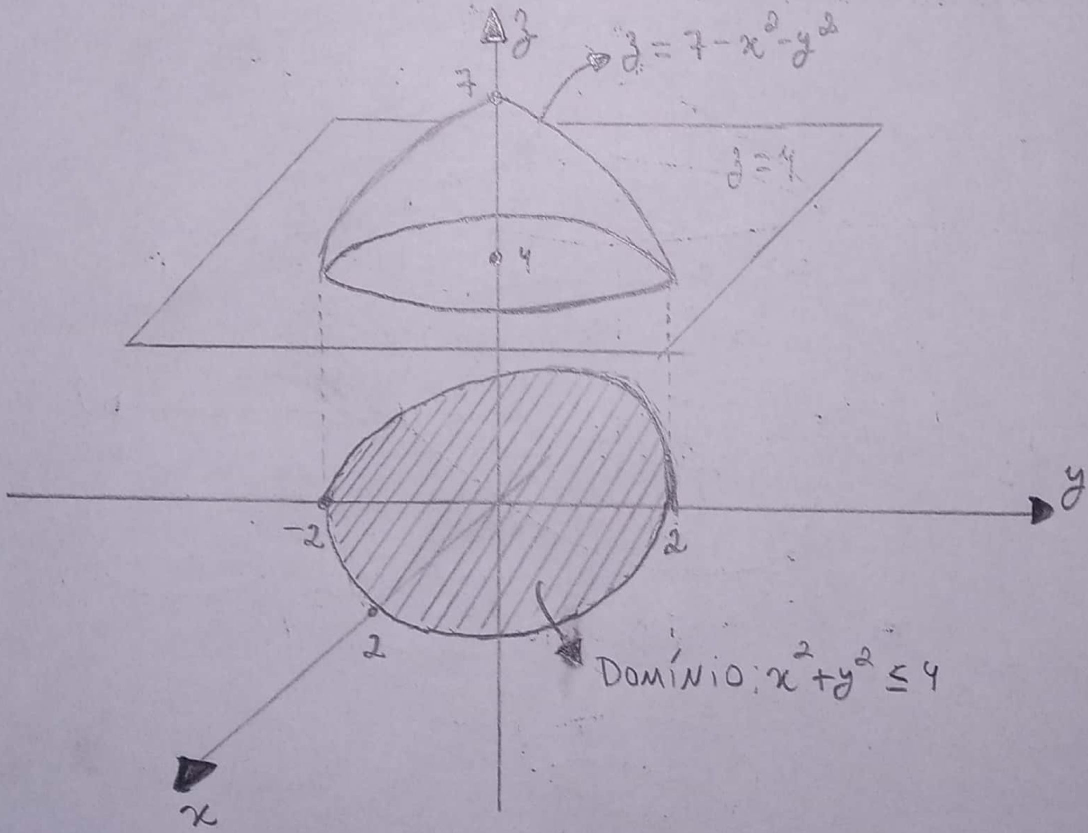


• Em $f(x,y) = 4$, podemos notar que se trata de um plano paralelo ao plano xy.

Considerando o domínio $x^2+y^2 > 4$. Temos:



Com isso, podemos esboçar:



Questão 6 -

• Antes de iniciarmos, alguns comentários:

I) A Regra de L'Hospital para o cálculo de limites não é válida quando estamos tratando de funções de várias variáveis, a mesma é restringida para funções de uma variável.

II) Para verificar a existência dos limites a seguir, seguiremos 3 passos.

• P_1 - Aplicamos o ponto a função, caso gere um valor real, tal valor será o limite que procuramos, caso gere uma indeterminação, seguiremos ao próximo passo.

• P_2 - Usaremos o Teste por caminhos, caso achamos <u>dois caminhos</u> na qual gerem <u>limites distintos</u>, definitivamente, o limite <u>**não existirá**</u>, caso escolhemos vários caminhos na qual gerem o <u>mesmo limite</u>, então <u>nada poderá se confirmar ainda</u> mas poderemos utilizar o recurso a seguir.

• P_3 - (Teorema) Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e se $|g(x,y)| \leq K$ para $0 \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \leq \delta$, onde $K, \delta \in \mathbb{R}$, então:

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{f(x,y)}_{=0} \cdot \underbrace{g(x,y)}_{\text{LIMITADA}} = 0$$

* Como podemos notar, é bem mais fácil mostrar que o limite não existe (pois basta utilizar P_2) e mostrar que ele existe.

Nessa lista, não abordaremos a definição de limite em $\mathbb{R}^3$ para a resolução dos itens a seguir, no entanto, recomendo sua leitura para praticar as notações e aprimorar os conceitos vistos em Cálculo I. *

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos(x) + \operatorname{sen}(y)} = \frac{e^0 + e^0}{1+0} = 2$$

b) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,0)} \frac{y^3 + x \cdot y^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(-1)^3 + 0}{(-1)^2} = -1$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$, indeterminação! Utilizando caminhos:

➡ Tendendo a $(0,0)$ pela reta $(x,0)$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x,0)} \frac{x^2+0}{x^2+0} = 1$, assim $\boxed{\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} 1 = 1}$

➡ Tendendo a $(0,0)$ pela reta $(0,y)$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y)} \frac{0+y}{0+y^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$, assim $\boxed{\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \frac{1}{y} = \frac{1}{0}}$, indeterminação!

Como encontramos dois caminhos gerando limites diferentes, então,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$$ não existe.

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+3y^2+7z^2}{9x^2+5y^2+2z^2} = \dfrac{0}{0}$, indeterminação!

➡ Tendendo a $(0,0,0)$ pelo caminho $(x,0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(x,0,0)} \dfrac{x^2+0+0}{9x^2+0+0} = \dfrac{x^2}{9x^2} = \dfrac{1}{9}$, assim $\boxed{\lim\limits_{(x,0,0)\to(0,0,0)} \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{9}}$

➡ Tendendo a $(0,0,0)$ pelo caminho $(0,y,0)$:

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,y,0)} \dfrac{0+3y^2+0}{0+5y^2+2z^2} = \dfrac{3y^2}{5y^2} = 3/5$, assim $\boxed{\lim\limits_{(0,y,0)\to(0,0,0)} \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}}$

Assim $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+3y^2+7z^2}{9x^2+5y^2+2z^2}$ não existe

e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{7x^2y^2z^2}{15x^6+2y^6+6z^6} = \dfrac{0}{0}$, indeterminação!

➡ Tendendo a $(0,0,0)$ pelo caminho $(0,0,z)$:

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,z)} \dfrac{0}{0+0+6z^6} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{(0,0,z)\to(0,0,0)} 0 = 0}$

➡ Tendendo a $(0,0,0)$ pelo caminho (t,t,t):

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(t,t,t)} \dfrac{7t^2t^2t^2}{15t^6+2t^6-6t^6} = \dfrac{7t^6}{11t^6} = \dfrac{7}{11} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{(t,t,t)\to(0,0,0)} \dfrac{7}{11} = \dfrac{7}{11}}$

Logo $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{7x^2y^2z^2}{15x^6+2y^6-6z^6}$ não existe.

. Nos itens f, g, h, i a seguir, será utilizado de forma direta o Teorema descrito em P_3, no entanto, faça, como exercício, a verificação de P_1 e P_2 em tais itens para praticar.

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{15x^7y^5}{2x^2+2y^2} \Rightarrow \frac{15}{2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7y^5}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{15}{2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^5 \cdot y^5) \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Observe que:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^5y^5 = 0$

- $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada. Pois:

$\rightarrow \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2} = 1$ (Reflita), assim $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, o que mostra a limitação.

Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{15}{2}(x^5y^5)}_{\to 0} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA}} = 0$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$ (Lembre das propriedades de limites!)

$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2}_{\to 0} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA } (\leq 1)}} = \sqrt{0} = 0$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x}_{0} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{LIMITADA } (\leq 1)}$

Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{6(x-1)^7(y-3)^5}{5(x-1)^2+5(y-3)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{6}{5} \cdot \underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (x-1)^7 \cdot (y-3)^3}_{0} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \underbrace{\dfrac{(y-3)^2}{(x-1)^2+(y-3)^2}}_{\text{LIMITADA (VERIFIQUE!)}}$

$= 0$

Digitalizado com CamScanner