ICE– Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 7 - APLICAÇÕES

Componente Curricular:

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)

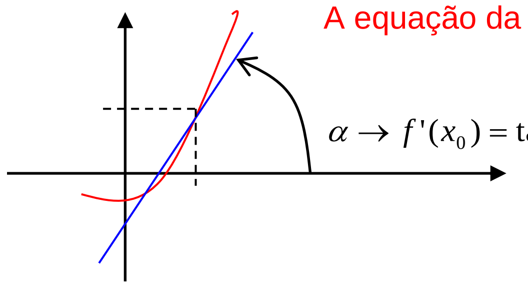
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)

Prof. Roseli Alves de Moura

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Como comentado nas aulas anteriores a derivada tem como uma de suas origens a geometria (com Leibniz), no problema de se traçar retas tangentes a uma curva. Abaixo está esquematizado o problema das tangentes. O número f'(x_0) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P=(x_0,f(x_0)).

A equação da reta tangente é:



$\alpha \to f'(x_0) = \tan\alpha$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

A reta perpendicular a reta tangente no ponto (x_0,f(x_0)) chama-se reta normal e tem a seguinte equação: $y - f(x_o) = -\dfrac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$.

Exemplo: Escreva a equação da reta t que tangência a curva $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa $a = 1$. Resposta: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x - 1)$

1. RETAS TANGENTE E NORMAL- Equações:

RT: $y = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$.

RN; $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}.(x - x_0)$.

Notas:

(1) Se $f'(x_0) \neq 0$ as retas RT e RN são inclinadas em relação aos eixos.

(2) Se $f'(x_0) = 0$ a reta RT é paralela ao eixo X e a reta RN é perpendicular ao eixo X.

(3) Se $f'(x_0)$ não existir, a função NÃO tem RT no ponto considerado (tem um “bico” nesse ponto).

(4) Se $f'(x) \to \pm\infty, \, para \; x \to x_0^{\pm}$, a função pode não ter RT ou ter RT “vertical” nesse ponto.

EXERCÍCIOS:

1) Escreva as equações das retas RT e RN, quando existirem, para as funções abaixo nos pontos indicados.

a) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pontos: a) $(-1, f(-1))$ b) $(0, f(0))$.

b) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ pontos: a) $(-1, f(-1))$ b) $(0, f(0))$.

2) Num jogo de videogame, os aviões (ícones) voam da esquerda para a direita segundo a trajetória $y = 15 + \dfrac{3}{x^2}$ e, podem disparar seus mísseis na direção das tangentes de sua trajetória contra alvos localizados sobre o eixo x nas posições x = 1,2,3,4 e 5. Verificar se algum alvo será atingido no caso do avião disparar um míssil quando se encontrar sobre o ponto de coordenadas (1,18).

<u>Resolução</u>: O ponto de tangência é P=(1,18) daí vem que $x_0 = 1 \; e \; f(x_0) = 18$.

Derivando a função trajetória f teremos: $f'(x) = \dfrac{-6}{x^3}$

Assim, o coeficiente da reta tangente a f será: f’(1) = -6

Portanto a equação da RT é: $y = 18 - 6(x - 1) = -6x + 24$

Agora determinando a interseção de RT com x obtém-se: -6x+24=0 $\Rightarrow$ x = 4.

Logo o alvo número 4 será o atingido.

3) Determinar a equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^2$, que seja paralela à reta $y = 1 - x$.

Resolução: Duas retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular: $m_t = m_r$.

$$m_t = -2x_0 = -1 = m_r \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x_0) = \frac{3}{4}$$

RT: $y - \frac{3}{4} = -(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = -x + \frac{5}{4}$

4) Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - x$, que seja perpendicular à reta $y = -x$.

Resolução: Condição de perpendicularismo: $m_t.m_r = -1 \Rightarrow m_t = -\frac{1}{-1} = 1$

Por outro lado $m_t = 2x_0 - 1 \Rightarrow 2x_0 - 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow f(0) = 0$

Equação da RT: $y = x - 1$

5) Determinar as coordenadas do ponto P do gráfico de $y=x^3$, sabendo que a tangente em P intercepta o eixo x em (4,0).

Resolução $RT: y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0) \Rightarrow y = 3x_0^2.x - 2x_0^3$

RT passa pelo ponto $(4{,}0) \Rightarrow 12x_0^2 - 2x_0^3 = 0 \Rightarrow x_0^2(12 - 2x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \;\; ou \;\; x_0 = 6$

Equações de RT: $y = 0 \quad ou \quad y = 108x - 432$

6) Numa batalha naval de um videogame, pequenas naus de guerra (ícones)navegam da esquerda para a direita segundo a trajetória $y = x^2 - 3x + 5$. Todas as vezes que ultrapassam a reta determinada pelos pontos A(1,3) e B(4,6) podem ser atingidas por disparos efetuados por tanques localizados numa praia representada pelo eixo x. Uma nau só é abatida por disparos que a acerte na tangente de sua trajetória . Num certo instante um tanque efetua um disparo com ângulo igual a da reta AB e abate uma nau. Determinar:

(a) as coordenadas do ponto de impacto (b) a posição do tanque sobre o eixo.

Resolução:

a) coeficiente angular da reta AB : $m_r = \dfrac{6-3}{4-1} = 1$

coeficiente da tangente: $m_t = 2x_0 - 3$. As retas r e t são paralelas, logo $m_t = 2x_0 - 3 = 1 \Rightarrow x_0 = 2$

As coordenadas do ponto de impacto será $(x_0, f(x_0)) = (2,3)$

b) A equação de RT é $y - 3 = 1(x-2) \Rightarrow y = x+1$.

A posição do tanque é $y = x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

7) Achar as equações das retas que passam por $P = (1,-1)$ e são tangentes à curva $y = x^2 - 3x + 5$.

<u>Resolução</u>: RT: $y - x_0^2 + 3x_0 - 5 = (2x_0 - 3)(x - x_0)$.

Como $P \in RT \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \; e \; x_o = 3$

RT$_1$: $y - 9 = -5(x+1)$ e RT$_2$: $y - 5 = 3(x-3)$