T R A N S F O R M A Ç Õ E S L I N E A R E S
VERSÃO RESUMIDA

Transformações Lineares:

Transformação linear. Matriz canônica.

Núcleo e imagem, Teorema do Núcleo e da Imagem.

Posto linha = posto coluna.

Autovalores e autovetores.

OBSERVAÇÃO GERAL: Este tópico é abordado no **Capítulo IV** do livro texto, porém ele não será cumprido em sua totalidade. Nosso foco estará nas seguintes seções e exercícios:

Seções: **1 , 2 e 3 ; 5, 6, 7 e 8.**

Exercícios: **1 (do *a até e*), 3 (*a,b, c*), 4 (*a,b,d*), 7 (*a,b*), 8, 9, 12*, 13*, 19, 22(*a,b,d*), 24.**

Definição:

Uma transformação linear é uma função cujo domínio e o contradomínio são espaços vetoriais ***V*** e ***W*** :

$$T : V \rightarrow W$$

$$v \rightarrow w = T(v)$$

e que satisfaz duas propriedades

CONDIÇÃO 1: Para quaisquer v_1 e v_2 vetores de ***V*** vale

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

(Lê-se: a transformada da soma é a soma das transformadas)

CONDIÇÃO 2: Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e v vetor de ***V*** vale

$$T(k.v) = k.T(v)$$

(Lê-se: a transformada de um escalar vezes o vetor é o escalar vezes a transformada do vetor)

Importante: Toda transformação linear $T : V \rightarrow W$ leva o vetor nulo de *V* no vetor nulo de *W. (Por que?)*

Daremos foco às transformações lineares com domínio e contradomínio sendo V=R^n e W=R^m.

Toda transformação linear de R^n em R^m será do tipo

$$T: R^n \rightarrow R^m$$

$$X \rightarrow T(X) = A.X$$

Aqui o vetor ***X*** do R^n é considerado um vetor coluna , nx1, e a matriz A terá que ser do tipo mxn . Daí o vetor ***T(X)=AX*** , produto de ***A*** por ***X***, será um vetor coluna do R^m .

A matriz A é chamada de matriz que representa a transformação linear e , neste caso, é também chamada de matriz canônica.

Exemplo 1: Verifique que $T: R^3 \rightarrow R^4$ é linear

$$T((x,y,z)^T)=(x+y+z, 3x-y+3z, y+5z, 2x+2y-z)^T \quad ,$$

aqui consideramos o vetor coluna

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad .$$

e, aplicando a função T em $\boldsymbol{X}$, obtemos o vetor *T(X)* do R^4 , que também pode ser expresso como vetor coluna, isto é,

$$T(\boldsymbol{X})=T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x-y+3z \\ y+5z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix} \quad .$$

Para toda transformação linear ***T*** existirá uma matriz ***A*** tal que ***T(X)= AX.*** Para verificar este fato neste exemplo, vamos mexer um pouquinho na expressão de *T(X)*:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x-y+3z \\ y+5z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 3}}_{Matriz\ A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad .$$

A matriz A, 4x3, é a matriz que representa T. A razão porque esta matriz é chamada de matriz canônica está na observação que segue.

Observe que a matriz A também pode ser obtida calculando suas 3 colunas que serão os vetores coluna $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$, com

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

os vetores da base canônica do R^3:

De fato, da definição de T

$$T((x,y,z)^T)=(x+y+z, 3x-y+3z, y+5z, 2x+2y-z)^T$$

obtemos

$T(1,0,0)^T=(1+0+0, 3.1-0+0,0+0, 2.1+0-0)=(1,3,0,2)^T$ (primeira coluna da matriz canônica);

$T(0,1,0)^T=(0+1+0, 0-1+0, 1+0,0+2.1-0)^T= (1,-1,1,2)^T$ (segunda coluna da matriz canônica);

$T(0,0,1)^T=(0+0+1,0-0+3.1, 0+5.1, 0+0-1)=(1,3,5,-1)^T$ (terceira coluna da matriz canônica);

$$\underset{Matriz\ A}{\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}_{4\times 3}}$$

A matriz ***A***, $m\times n$ **,** obtida desta forma é chamada de matriz canônica da transformação linear $\boldsymbol{T}$**.**

Exemplo:

I) Obtenha a matriz canônica das transformações lineares

1) $T: R^4 \to R^2$ definida por $\boldsymbol{T(x,y,z,t)^T=(x-y,\ z+t)^T}$**;**

2) $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x,y)^T=(-y,x)^T$;

II) Por que a função $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(x,y)=(-y+1,x)$ não é uma transformação linear?

III) Encontre a expressão da transformação linear de R^2 em R^3 tal que

$$T\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ e\ T\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) .$$

Resposta de (III):

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear T(v)
(Ou núcleo e espaço coluna de uma matriz A)

Considere a transformação linear

$$\boldsymbol{T}: \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R^n} & \rightarrow & \boldsymbol{R^m} \\ v & \rightarrow & \boldsymbol{T}(v)=\boldsymbol{A}.v \end{array} ,$$

sendo ***A***, $m\times n$, sua matriz canônica.

Define-se **núcleo de T** como sendo o subconjunto do domínio

$$\boldsymbol{ker\,T = N(T) = \{v \in R^n\ tal\ \ que\ \ \text{com}\ \ T(v) = vetor\,nulo\ \ do\ \ R^m\}} .$$

Um outro subconjunto associado a uma transformação linear é a sua imagem, ou seja, um subconjunto do contradomínio R^m

$$\textit{im } T = I(T) = \{ w \in R^m \mid \text{existe } v \in R^n \text{ com } T(v) = w \} .$$

Como I(T) e N(T) estão relacionados à matriz A que representa T ?

Sendo ***T(v)=A.v*** então estas definições estarão associadas à matriz ***A***. De fato, observe que

$$N(T) = \{ v \in R^n \ \textit{tal que} \ \text{com} \ T(v) = \textit{vetor nulo} \} = \{ v \in R^n \ \text{tal que} \ A.v = 0 \} = N(A) \ .$$

Ou seja, N(T)=N(A) que é o conjunto solução do sistema ***A.v =0*** . Já mostramos que N(A) é um subespaço de R^n.

Por outro lado, o conjunto imagem de T é dado por

$$\textit{Im } T = \{ w \in R^m \ \text{tal que existe} \ v \in R^n \ \text{com} \ T(v) = A.v = w \} .$$

Da álgebra feita com matrizes, se

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

então

$$T(v) = A.v = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}}_{\textit{MATRIZ A}} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1.A_1 + x_2.A_2 + x_3.A_3 + \cdots + x_n.A_n \ .$$

Ou seja, **a imagem de T é obtida realizando todas as combinações lineares das colunas de *A*, matriz canônica, mxn. Portanto, vale**

Afirmação: A imagem de ***T*** é um subespaço do R^m, a saber, o subespaço gerado pelas colunas de ***A***, chamado de **espaço coluna de A .**

Nulidade e Posto Coluna

A dimensão do espaço coluna de ***A*** é chamado de **posto coluna de *A*** e a dimensão do núcleo de ***A*** é chamado de nulidade de **A .**

Exemplo:

Considere

$$\underset{Matriz\ A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 3}}$$

1) Encontre o núcleo e a imagem da transformação linear $\begin{array}{rccc} \boldsymbol{T}: & & \boldsymbol{R}^3 & \to & \boldsymbol{R}^4 \\ & v & \to & \boldsymbol{T}(v)=\boldsymbol{A}.v \end{array}$,

2) Encontre bases para o núcleo e a imagem:

3) Qual é o posto coluna e a nulidade de A.

4) Verifique se vale a expressão

dimensão do domínio de T = dimensão da imagem + dimensão do núcleo.

Solução:

Núcleo de A é o conjunto solução do sistema homogêneo Av=0. Escalonando A:

L2← L2-3L1 e L4← L4-2L1   L2← (-1/4)L2 e L4← (-1/3)L4   L3← L3-L2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{4\times 3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Assim após o escalonamento obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}.$$

Na resolução do sistema homogêneo teremos 3 equações e 3 incógnitas. Assim, neste exemplo, o sistema homogêneo tem uma única solução e N(A)={$(0,0,0)^T$} e nulidade=0.

A imagem de T é o espaço coluna de A, ou seja, é constituída por todas as combinações lineares das colunas de A:

$$\underset{Matriz\ A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 3}} \qquad Imagem(T)=\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Para obter uma base de Im(T) precisamos retirar do conjunto gerador os vetores que são l.ds. Assim faremos uso do escalonamento de uma matriz para dar essa resposta. Trabalhamos com uma matriz em que as linhas serão as colunas de A, ou seja, escalonamos A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

Queremos descobrir se há linha linearmente dependente e, para tal, vamos escalonar A^T. Façamos: L2← L2 – L1 e L3← L3-L1

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

Como não apareceu nenhuma linha nula na matriz escalonada então nenhuma linha de A^T é l.d., ou seja, todas as linhas de A^T são linearmente independentes e, portanto, todas as colunas de A são linearmente independentes. Daí podemos dizer que as colunas formam uma base do espaço coluna de A, ou seja, o posto coluna (=dimensão do espaço coluna) é 3.

Assim para $T: \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}^3 & \to & \boldsymbol{R}^4 \\ v & \to & \boldsymbol{T}(v)=\boldsymbol{A}.v \end{array}$ vale :

dimensão do domínio (R^3)=dimensão da imagem(posto coluna de A) + nulidade (dimensão do núcleo)

3=3+0

OBS: O que ocorreu no último item do exemplo anterior não é um caso particular!!!

O Teorema Núcleo Imagem

Teorema do Núcleo e Imagem

Dada uma transformação linear $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ então vale

***dimensão domínio = dim Im T + dim ker T*.**

Se ***T(v)=A.v*** com ***A***, uma matriz $m\times n$, vale ***n = posto coluna de A + nulidade de A.***

São várias as aplicações deste teorema e, a seguir, apresentaremos uma delas.

O **posto coluna de uma matriz *A***, uma matriz $m\times n$, é a dimensão do espaço gerado pelas colunas da matriz. Observe que o **espaço coluna é um subespaço do R^m**. Para descobrir o posto coluna basta descobrir uma base para este subespaço, ou seja, as linhas não nulas da matriz obtida de A^T na forma escalonada ou escada reduzida por linha.

O **posto linha de uma matriz *A***, uma matriz $m\times n$, é a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz. Observe que o espaço linha é um subespaço do R^n. Para descobrir o posto linha basta descobrir uma base para este subespaço, ou seja, as linhas não nulas da matriz obtida de A na forma escalonada ou escada reduzida por linha.

Exercício: Verifique se na matriz do exemplo anterior vale que posto linha = posto coluna.

Posto de uma Matriz

Como consequência do Teorema Núcleo Imagem podemos afirmar que:

O posto linha de uma matriz A é igual ao seu posto coluna, que será chamado simplesmente posto de A.