UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

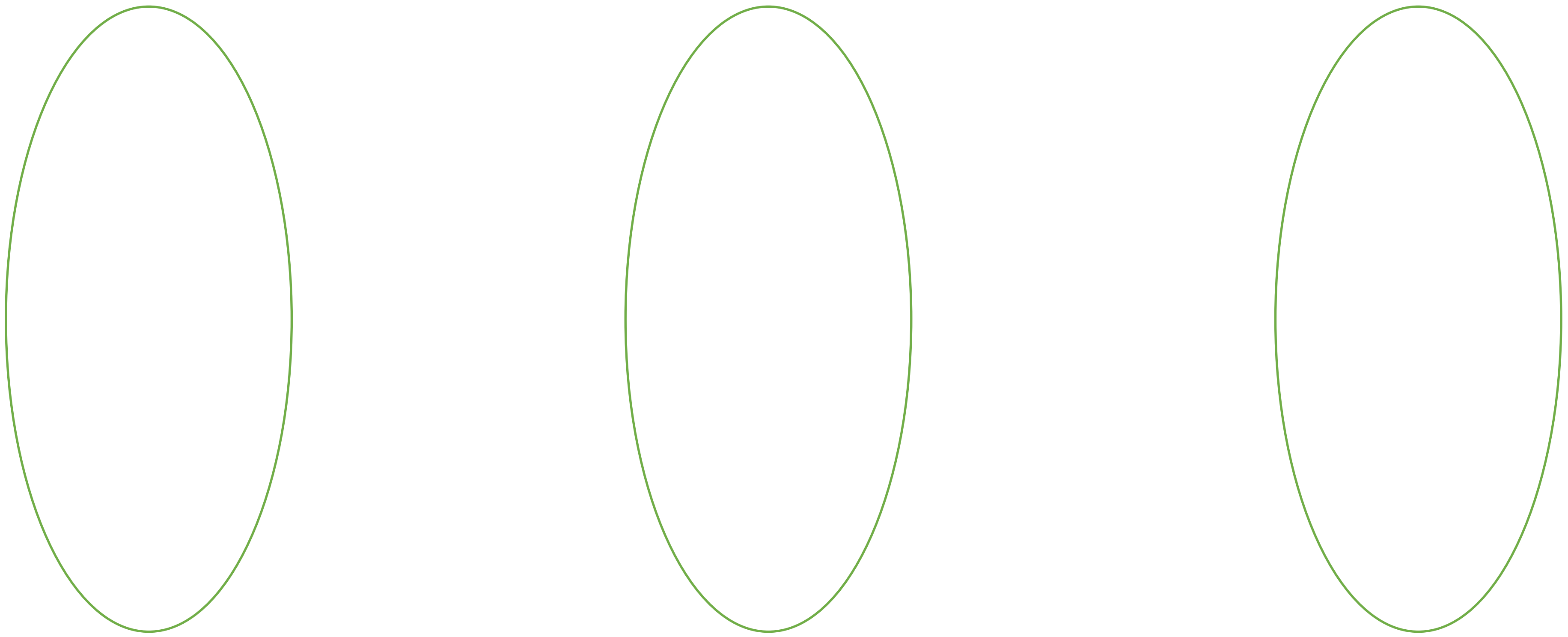
CÁLCULO 1 - SEMANA 2

Prof. Roseli Alves de Moura

Conteúdo:
Funções compostas
Função inversa e seu gráfico
Introdução ao logaritmo e a exponencial
Funções trigonométricas inversas

Pré Calculo para quem interessar:

https://www.youtube.com/watch?v=pYmnNGVh5P8&list=PLLxIAh7NuabjHLCm1N46FqRXUELUMpe6P -



FUNÇÕES COMPOSTAS

Dadas duas funções $g(x)$ e $f(x)$, a função composta g com f é denotada por $g \circ f$ e definida como:

$$g \circ f = g[f(x)]$$

Exemplo 1: $f(x) = x^2$, $g(x) = sen\ x$ e $h(x) = \sqrt{x}$, temos que:

a) $g \circ f =$ $g \circ f = g[f(x)] = \text{sen}[x^2] = \text{sen}x^2$

b) $f \circ g =$ $f \circ g = f[g(x)] = [\text{sen}x]^2$ $= \text{sen}x . \text{sen}x = \text{sen}^2 x$

c) $h \circ g =$ $h \circ g = h[g(x)] = \sqrt{\text{sen}x}$

d) $g \circ h =$ $g \circ h = g[h(x)] = \text{sen}\sqrt{x}$

FUNÇÕES COMPOSTAS

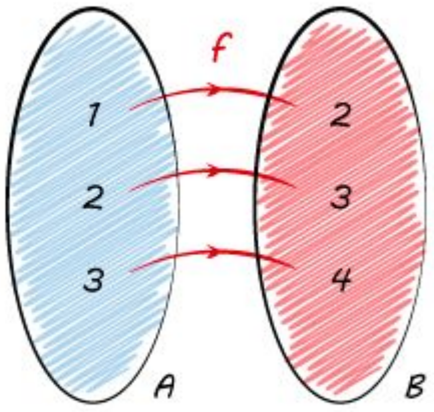
Exemplo 2: Determine $g(x)$ nos casos em que $f[g(x)] = x$ e $f(x) = 3x + 2$

Resolução: Inicialmente observamos que se $f(x) = 3x + 2$ então $f[g(x)] = 3g(x) + 2$

Exemplo 3: Determine $g(x)$ nos casos em que $g[f(x)] = 1 - 2x$ e $f(x) = x + 1$

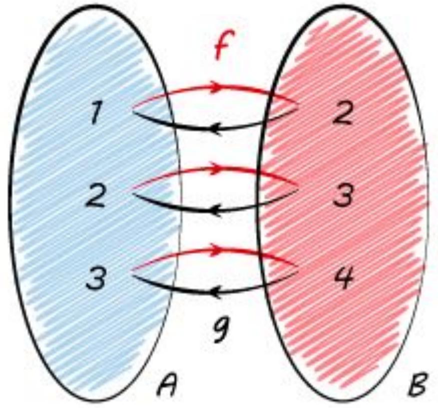
FUNÇÕES INVERSAS E GRÁFICOS

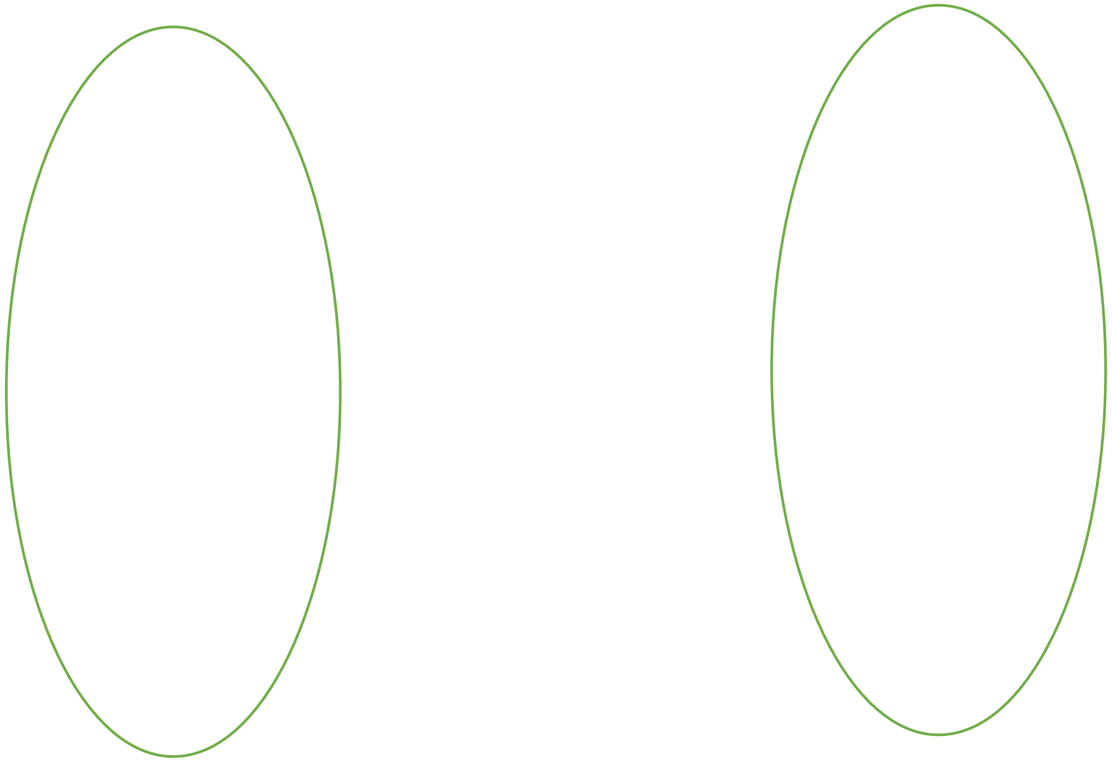
A relação f, em vermelho, pode ser chamada de função, pois cada elemento do conjunto A está associado a um único elemento do conjunto B (de acordo com a definição de função). Neste caso, dizemos que o <u>domínio</u> da função é o conjunto A e a imagem da função é o conjunto B, portanto o Domf=A e a Imf=B.



$Y = f(x) = x + 1$

A relação "contrária" g (descrita em preto) pode ser chamada de função pois cada elemento de B está associado a um único elemento de A. Neste caso, Dom g=B e a Im g=A, podemos ainda descrever uma expressão algébrica para a função g: $y = g(x) = x - 1$





DEFINIÇÃO: FUNÇÕES INVERSAS

Dadas f e g tais que $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$. função f é inversa da função g se, e somente se

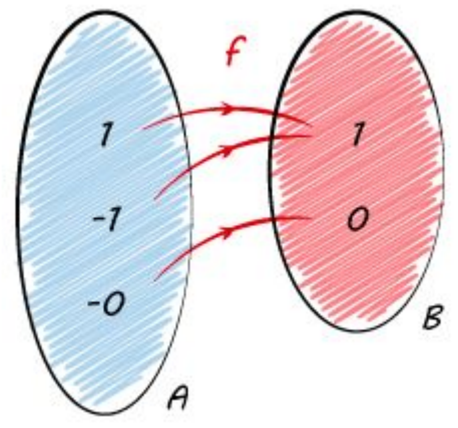
$$f[g(x)] = x \text{ e } g[f(x)] = x$$

A função f é inversa da função g, e denotamos por $f = g^{-1}$ e g é inversa da função g e denotamos por $g = f^{-1}$

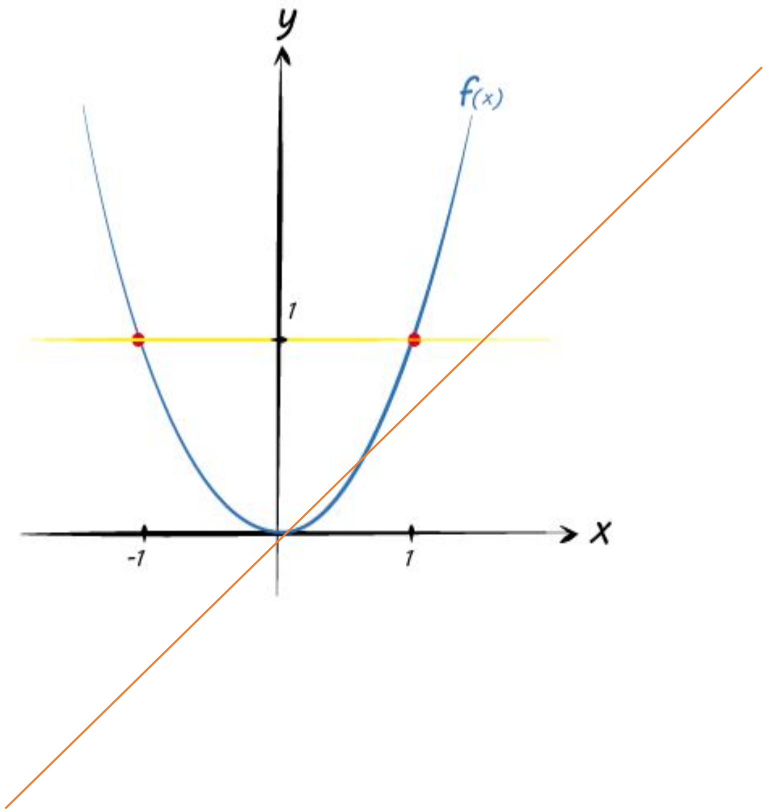
No exemplo anterior podemos verificar a validade, lembrando que, se $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$, temos:

FUNÇÕES INVERSAS

Observe a seguinte situação:

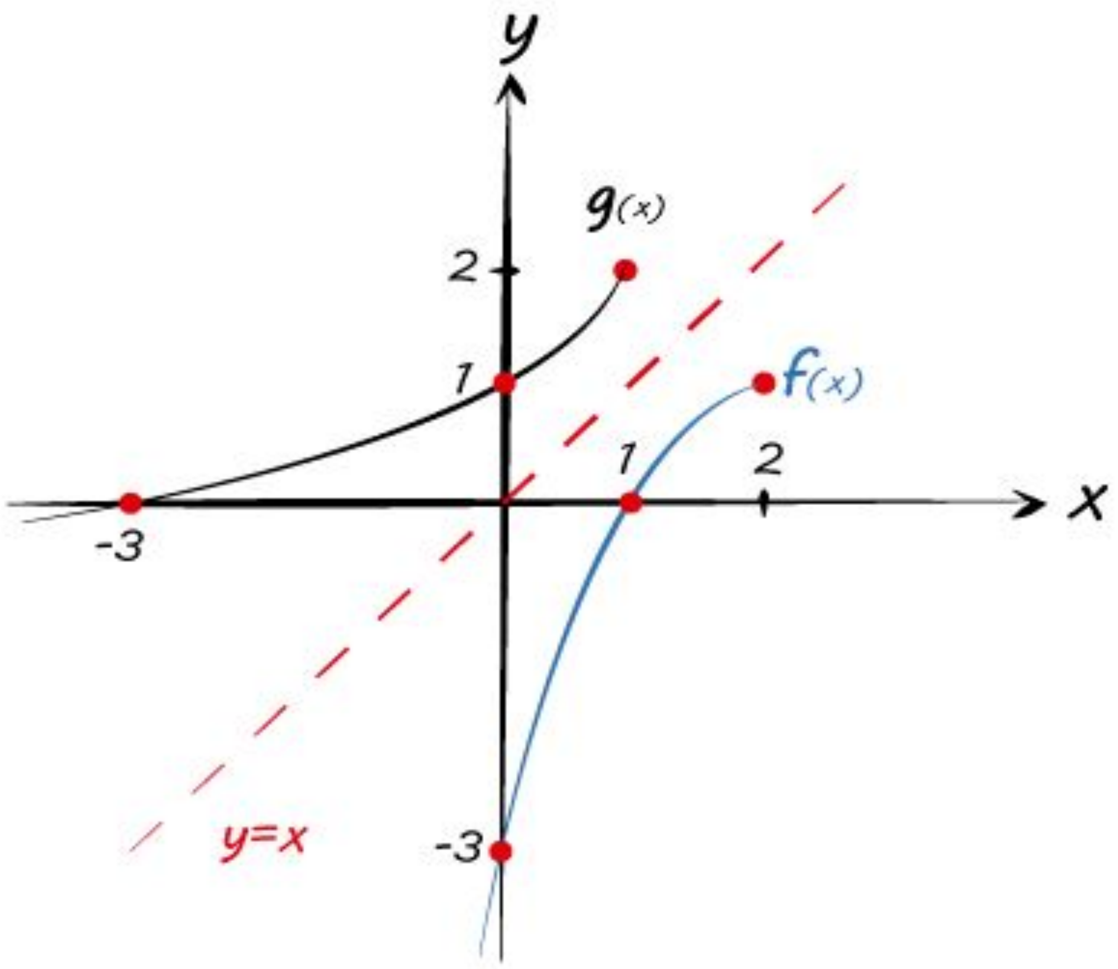


Antes de qualquer coisa, se pretendemos trabalhar com funções inversas, precisamos de procedimento de verificação da existência da função inversa em um dado domínio. Para verificação da existência da função inversa usaremos o chamado teste da reta horizontal.



Logo, não podemos falar em função inversa sem antes verificarmos o domínio da função a ser invertida.

EXEMPLO FUNÇÕES INVERSAS E GRÁFICOS



$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

$$g(x) = 2 - \sqrt{1 - x}$$

EXEMPLO FUNÇÕES INVERSAS E GRÁFICOS

Determine a função g(x), inversa de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

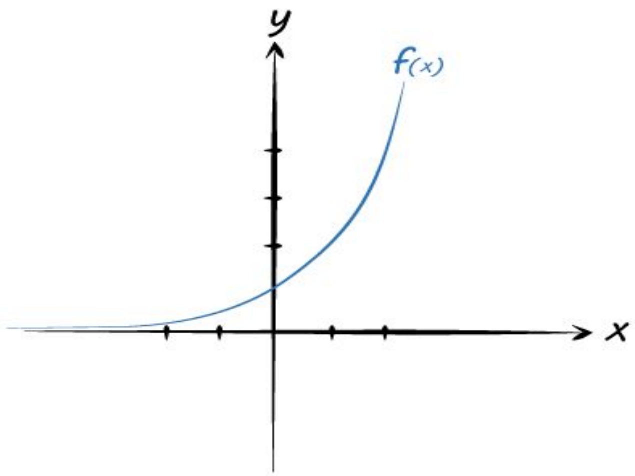
LOGARITMOS E EXPONENCIAIS

1) FUNÇÕES EXPONENCIAIS

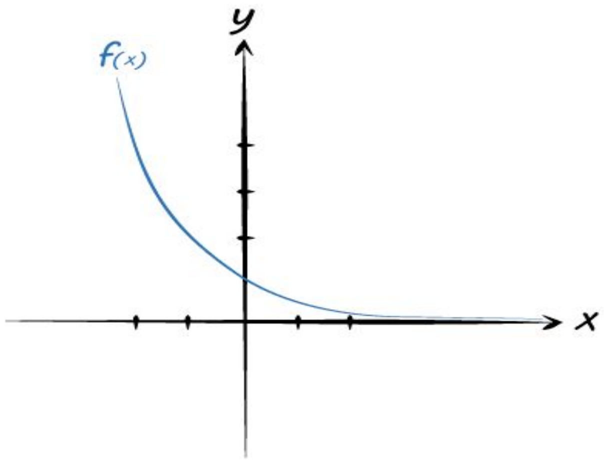
$$y = f(x) = b^x$$

Sendo b um número real **positivo** que chamaremos de base e x, a variável em questão, que será o expoente.

$(b > 1)$



$(0 < b < 1)$

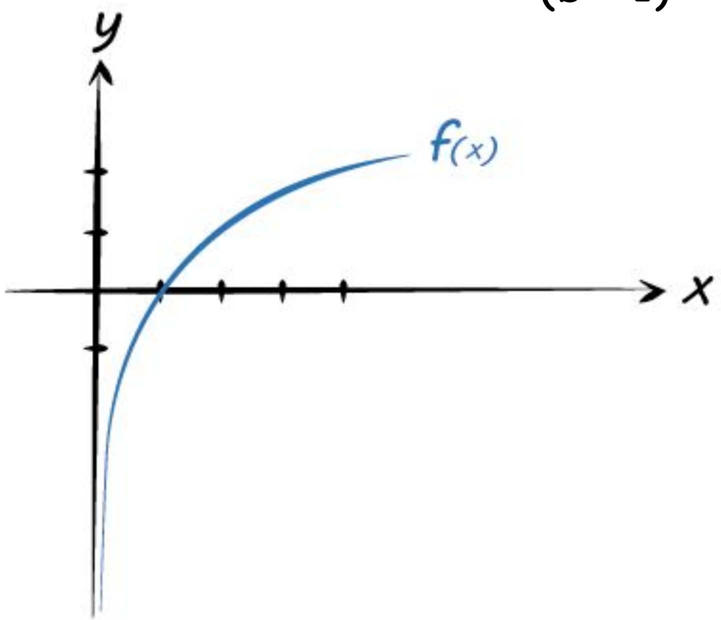


Observação: Vale notar que no crescimento exponencial $(b > 1)$ quanto menor o valor de x (extremo esquerdo do gráfico) mais a função (o valor de y) se aproxima de zero, porém este valor y nunca "chega a zero". Tal "comportamento limitado" será estudado detalhadamente. Quanto ao decrescimento exponencial $(0 < b < 1)$ quanto maior o valor de x (extremo direito do gráfico) mais a função (o valor de y) se aproxima de zero.

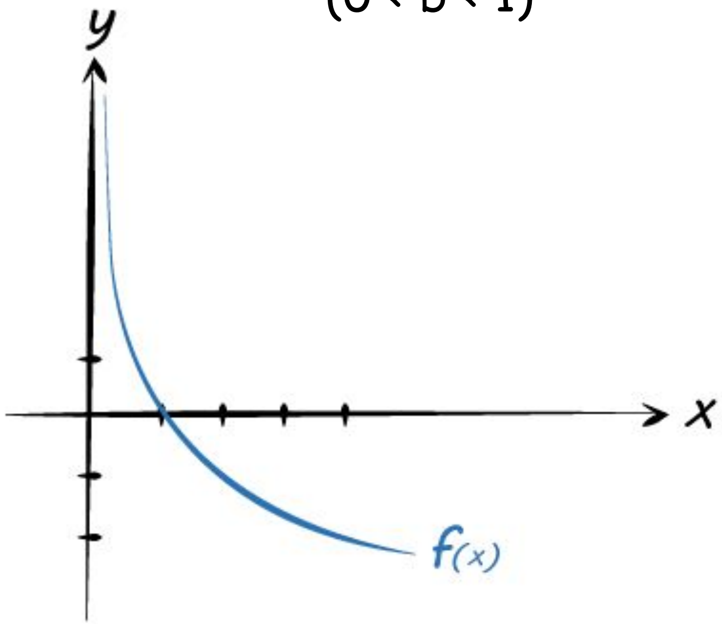
2) FUNÇÃO LOGARITMÍCA $y = f(x) = \log_b x$

Sendo b um número real **positivo** que chamaremos de base e x, a variável em questão, que será chamado de logaritmando.

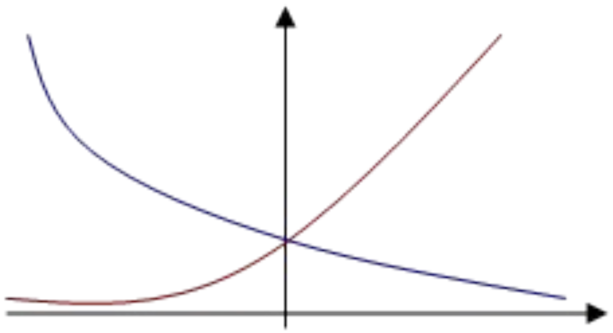
(b > 1)



(0 < b < 1)



EXPONENCIAIS - PROPRIEDADES



a > 1:crescente $\qquad 0 < a <$

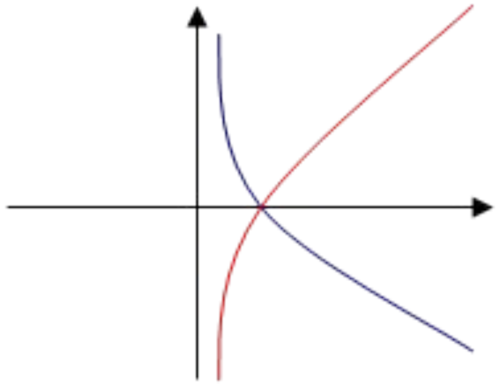
Propriedades:

P1) $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^{-1} = \dfrac{1}{a},\quad a^x > 0\ \forall x.$

P2) $a^{m+n} = a^m.a^n$

P3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$

LOGARITMOS - PROPRIEDADES



a>1:crescente, $0 < a < 1$:decrescente

Propriedades:

P1) $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1,\ \log_a \left(1/a \right) = -1.$

P2) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y.$

P3) $\log_a \left(\dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y.$

$\log_a (x^y) = y.\log_a x$

Há duas bases que são mais freqüentes, são elas a base 10 (decimal) e a base e (natural) indicados respectivamente por:

log x e ln x

Conhecendo-se o logaritmo numa base se conhece o logaritmo em qualquer outra base.

Exemplos:

1) Utilizando as propriedades de logaritmos, explicitar y como função de x, no seguinte caso: **$2\log y = 5\log x + 4\log 3$**

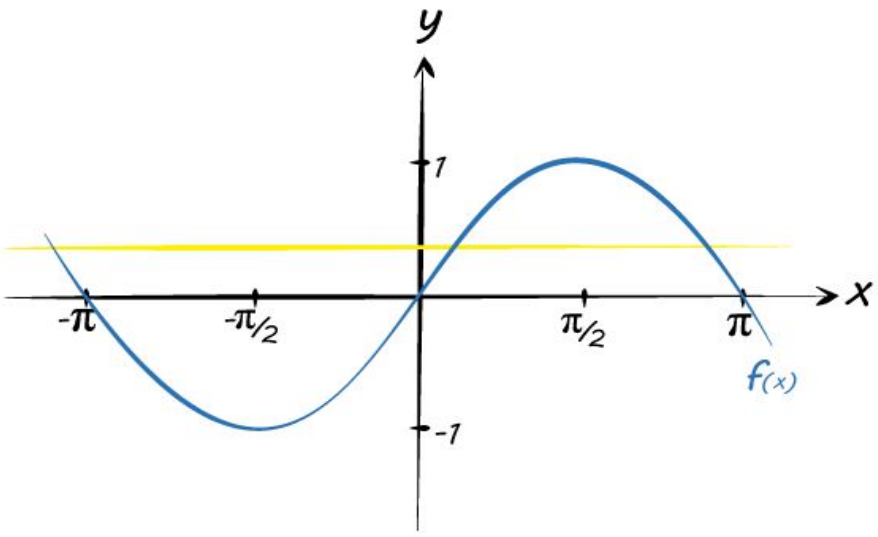
$$x \qquad\qquad x$$

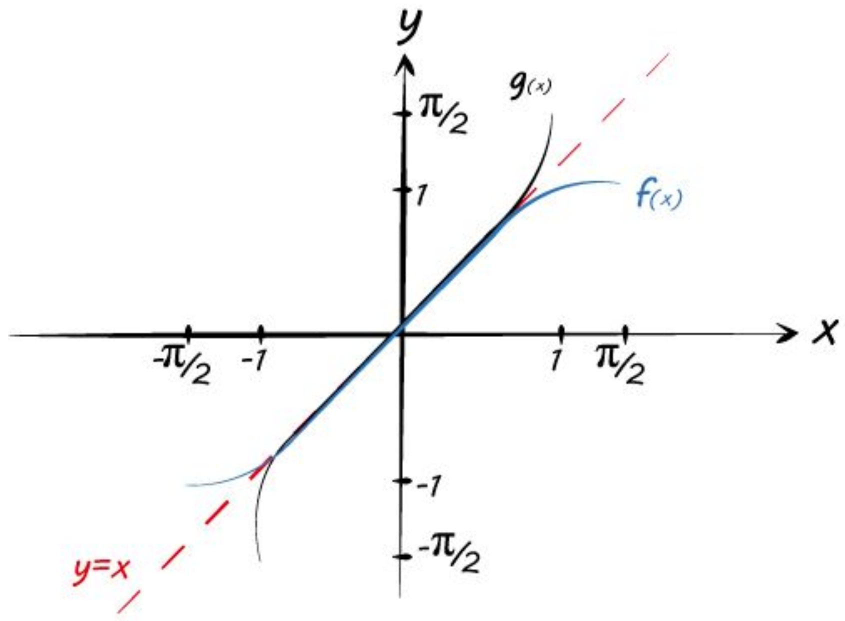
2) Determinar o valor de x, no seguinte caso: $\log_{\frac{1}{x}} 27 = -\frac{3}{5}$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Partindo do mesmo princípio das funsões inversas, buscaremos as funções inversas das funções trigonométricas.

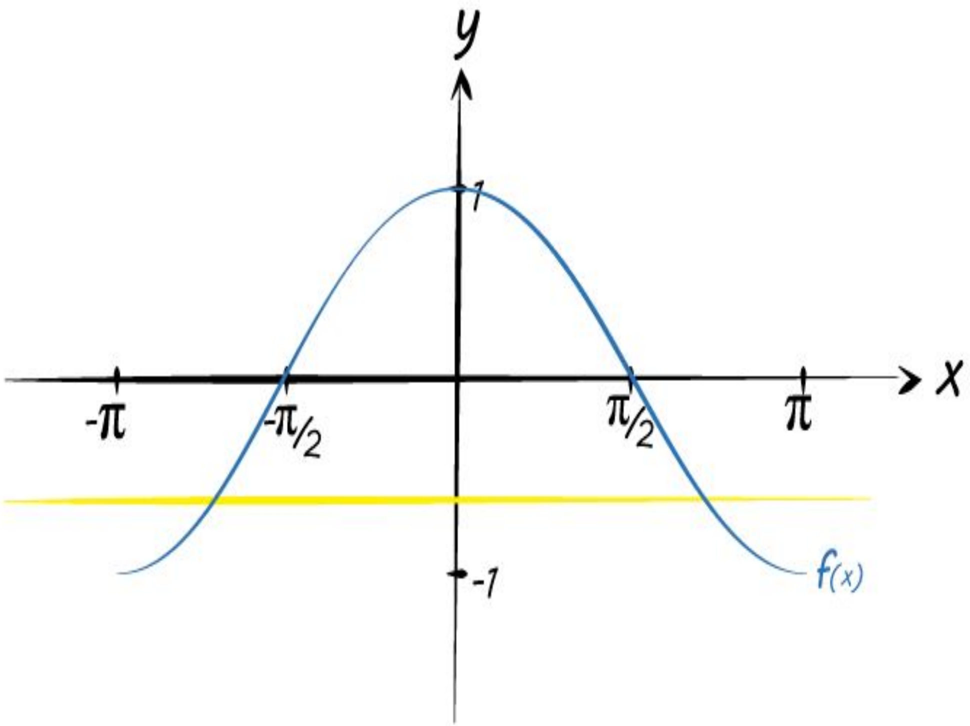
$$f(x) = \text{sen } x \text{ então } g(x) = \text{arcsen } x = \text{sen}^{-1} x$$

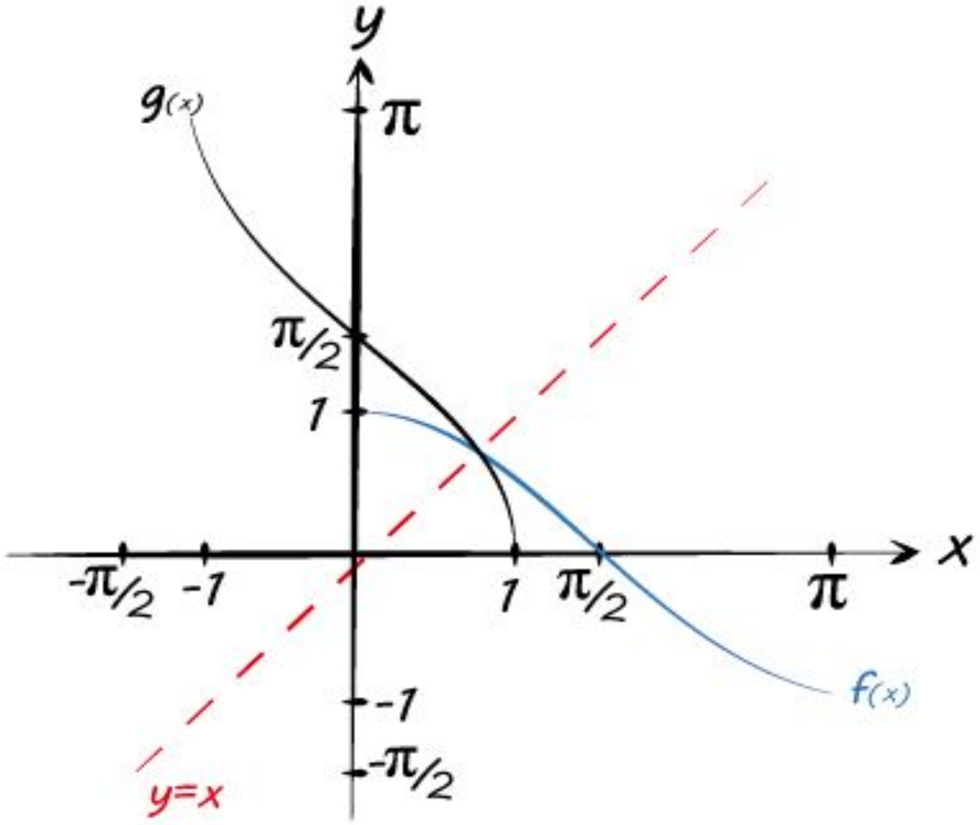




FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$f(x) = \cos x$ então $g(x) = \text{arccos } x = \cos^{-1} x$





DEMAIS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$f(x) = tg\ x$ então $g(x) = arctg\ x$

$f(x) = sec\ x$ então $g(x) = arcsec\ x$

$f(x) = cossec\ x$ então $g(x) = arccossec\ x$

FUNÇÕES ASSOCIADAS

Relação Fundamental da Trigonometria

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$$

$$tgx = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

$$\text{cot}gx = \frac{cos\ x}{\text{sen}\ x}$$

$$\text{sec}\ x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{cosec}\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$$

Exemplo: Utilizando as identidades e relações trigonométricas conhecidas, prove a seguinte identidade, caso exista:

$$\text{cosec } x = \cos x \, . \, \text{cotg } x + \text{sen } x$$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

LEI DOS SENOS

LEI DOS COSSENOS