Segunda Prova de Cálculo 2 – T02

Prof.: Montauban

1. (2.5) Considere a função $f(x,y) = 9(x-1)^2 + 16y^2$. Seja S a superfície dada pelo gráfico da função $f$.

   a. (0.5) Dê as parametrizações das seções de S com os planos $z = 3$ e $x = 1$.
   b. (0.2) Identifique a superfície S.
   c. (0.6) Encontre a equação do plano tangente a S em $(2,0,9)$.
   d. (0.6) Encontre a reta normal a S em $(2,1,25)$ e uma reta tangente a S em $(2,1,25)$.
   e. (0.3) Encontre a taxa de variação de $f$ em $(1,1)$, na direção do vetor $(1,3)$.
   f. (0.3) Encontre a direção e a máxima taxa de variação de $f$ no ponto $(1,1)$.

2. (2.0) Encontre e classifique os pontos críticos da função
   $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

3. (2.0) Verifique se a função abaixo é diferenciável em $(x,y) = (0,0)$, justificando em detalhes.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^{12}y^{12}}{x^{12}+y^{12}}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. (1.5) Encontre os pontos da superfície $2z^2 - 1 = 3x^2 + y^2$ onde os vetores normais são ortogonais ao plano $x + y + 2z = 9$.

5. (2.0) Encontre os valores máximo absoluto e o mínimo absoluto da função $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ na região $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$.

Boa prova!

1 $\boxed{f(x,y) = 9(x-1)^2 + 16y^2}$

---

a) $\begin{cases} z = 9(x-1)^2 + 16y^2 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow 9(x-1)^2 + 16y^2 = 3$

$\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{3}{16}} = 1$

$\boxed{\gamma(t) = \left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos t, \sqrt{\tfrac{3}{16}}\sin t, 3\right), \ t \in [0, 2\pi)}$

$\begin{cases} z = 9(x-1)^2 + 16y^2 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow z = 16y^2 \qquad \boxed{\gamma(t) = (1, t, 16t^2), \ t \in \mathbb{R}}$

---

b) PARABOLÓIDE ELÍPTICO

---

c) $z = 9(x-1)^2 + 16y^2$

$9(x-1)^2 + 16y^2 - z = G(x,y,z)$

$\nabla G(x,y,z) = (18(x-1), 32y, -1)$ É O NORMAL A S.

EM $(2,0,9)$: $\nabla G(2,0,9) = (18, 0, -1)$

PLANO TG: $18x + 0y - z + D = 0$

EM $(2,0,9)$: $18.2 + 0 - 9 + D = 0 \rightarrow \boxed{D = -27}$

PLANO TG. $\rightarrow \boxed{18x - z - 27 = 0}$

---

d) UTILIZANDO $\nabla G(x,y,z) = (18(x-1), 32y, -1)$ DO ITEM ANTERIOR, TEMOS:

NORMAL A S EM $(2,1,25)$: $\nabla G(2,1,25) = (18, 32, -1)$.

RETA NORMAL EM $(2,1,25)$: $\boxed{\gamma_N(t) = (2,1,25) + t(18,32,-1), \ t \in \mathbb{R}}$

RETA TANGENTE EM $(2,1,25)$: $\boxed{\gamma_T(t) = (2,1,25) + t(1,0,18), \ t \in \mathbb{R}}$

(e) $\nabla f(x,y) = (18(x-1), 32y)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \frac{(1,3)}{\sqrt{1^2+3^2}} = (0,32) \cdot \frac{(1,3)}{\sqrt{10}} = \frac{96}{\sqrt{10}}$$

---

(f) DIREÇÃO MÁXIMA TAXA : $\nabla f(1,1) = (0,32)$..

MÁXIMA TAXA : $|\nabla f(1,1)| = \sqrt{0^2+32^2} = 32$ //

---

**2** PONTOS CRÍTICOS:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x(2-x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= y(-2-x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 0\end{aligned}\right\}$$

$$x(2-x^2+y^2)=0$$

$$\boxed{x=0} \qquad \boxed{2-x^2+y^2=0}$$

Para $\boxed{x=0}$:

NA SEGUNDA EQUAÇÃO

$$y(-2+y^2)e^{-\frac{1}{2}y^2}=0$$

$$y(-2+y^2)=0$$

$$\boxed{y=0} \text{ ou } \boxed{y=\pm\sqrt{2}}$$

Para $\boxed{2-x^2+y^2=0}$:

NA SEGUNDA EQUAÇÃO

ou $\boxed{y=0} \to x^2=2 \to x=\pm\sqrt{2}$

ou $\boxed{-2-x^2+y^2=0}$ IMPOSSÍVEL POIS

$$-2-x^2+y^2=2-x^2+y^2$$
$$-2=2$$

---

ENTÃO OS PONTOS CRÍTICOS SÃO: $(0,0)$, $(0,\pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2},0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2-3x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + x(2-x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\left(-\tfrac{1}{2}\right)(2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = (2xy)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + x(2-x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\left(-\tfrac{1}{2}\right)(2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-2-x^2+3y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} + y(-2-x^2+y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\left(-\tfrac{1}{2}\right)(2y)$$

$\boxed{(0,0)}$ $\begin{cases} A = 2e^{-1/2}\\ B = 0\\ C = -2e^{-1/2}\end{cases}$

$B^2-AC = 0^2-(-4e^{-1})$

$\boxed{\text{PONTO DE SELA}}$

$\boxed{(0,\sqrt{2})}$ $\begin{cases} A = 4e^{-1}\\ B = 0\\ C = 4e^{-1}\end{cases}$

$B^2-AC = -16e^{-2} < 0$

$A>0$

$\boxed{\text{MÍNIMO LOCAL}}$

$\boxed{(0,-\sqrt{2})}$ $\begin{cases} A = 4e^{-1}\\ B = 0\\ C = 4e^{-1}\end{cases}$

$B^2-AC = 0^2-16e^{-2} < 0$

$A>0$

$\boxed{\text{MÍNIMO LOCAL}}$

CONTINUAÇÃO Q3

$\boxed{(\sqrt{2},0)}$

$$\begin{cases} A = -4e^{-1} \\ B = 0 \\ C = -4e^{-1} \end{cases}$$

$B^2 - AC = 0^2 - 16e^{-1} < 0$

$A < 0$ $\boxed{\text{MÁXIMO LOCAL}}$

$\boxed{(-\sqrt{2},0)}$

$$\begin{cases} A = -4e^{-1} \\ B = 0 \\ C = -4e^{-1} \end{cases}$$

$B^2 - AC < 0$

$A < 0$ $\boxed{\text{MÁXIMO LOCAL}}$

---

③ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^{12}y^{12}}{x^{12}+y^{12}} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

---

SOLUÇÃO

FAREI SOMENTE P/ $\frac{\partial f}{\partial x}$, POIS A FUNÇÃO É SIMÉTRICA.

VAMOS MOSTRAR QUE $f$ É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$:

1º AS DERIVADAS PARCIAIS EXISTEM NUMA VIZ. DE $(0,0)$:

EM $(x,y) \neq (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{84x^{11}y^{12}(x^{12}+y^{12}) - 7x^{12}y^{12}(12x^{11})}{(x^{12}+y^{12})^2} = \dfrac{84x^{11}y^{24}}{(x^{12}+y^{12})^2}$

EM $(x,y) = (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{7\Delta x^{12} \cdot 0^{12}}{\Delta x^{12}+0^{12}}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

A EXPRESSÃO DE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ É:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{84x^{11}y^{24}}{(x^{12}+y^{12})^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2º AS DERIVADAS PARCIAIS SÃO CONTÍNUAS EM $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{84x^{11}y^{24}}{(x^{12}+y^{12})^2} \Rightarrow$ PELO TEOREMA:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 84x^{11} = 0$ ✓
- $\left|\dfrac{y^{24}}{(x^{12}+y^{12})^2}\right| = \dfrac{y^{24}}{x^{24}+2x^{12}y^{12}+y^{24}} \leq \dfrac{y^{24}}{y^{24}} = 1$ (LIMITADA) ✓

LOGO $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ É CONTÍNUA EM $(0,0)$.

COMO AS DERIVADAS PARCIAIS EXISTEM E SÃO CONTÍNUAS EM $(0,0)$,

ENTÃO $f$ É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$. ■

④ PLANOS PARALELOS $\Rightarrow$ VETORES NORMAIS PARALELOS

- VETOR NORMAL À SUPERFÍCIE S : $\boxed{\nabla S(x,y,z) = (6x, 2y, -4z)}$

  $\left(S(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - 2z^2 + 1\right)$

- VETOR NORMAL AO PLANO : $\boxed{(1,1,2)} = V_N$

VETORES NORMAIS PARALELOS : $\nabla S = \lambda V_N$

$$(6x, 2y, -4z) = \lambda(1,1,2)$$

$$6x = \lambda \rightarrow x = \lambda/6$$
$$2y = \lambda \rightarrow y = \lambda/2$$
$$-4z = 2\lambda \rightarrow z = \lambda/-2$$

ESTE PONTO PERTENCE À SUPERFÍCIE:

$$2\left(\frac{\lambda}{-2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\lambda}{6}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$$\frac{\lambda^2}{36} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} = -1$$

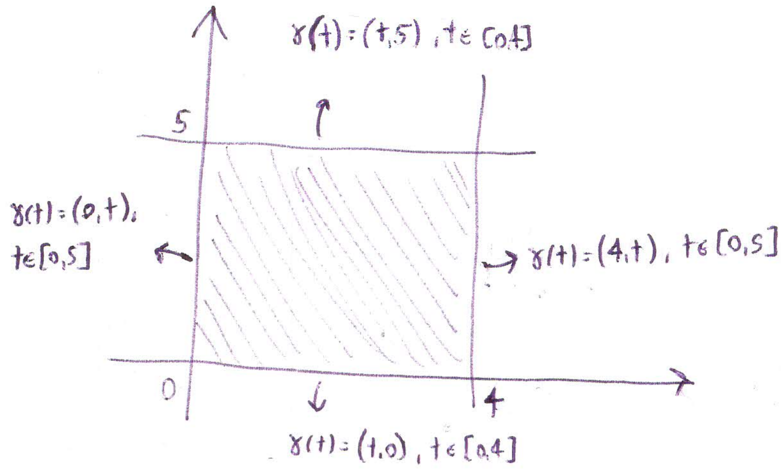
$$\frac{1+9-18}{36}\lambda^2 = -1 \rightarrow \frac{-8}{36}\lambda^2 = -1 \quad \lambda^2 = \frac{36}{8} \quad \lambda = \pm\frac{6}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

PONTOS $\left(\frac{3}{6\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

E

$\left(-\frac{3}{6\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

5




**NO INTERIOR DA REGIÃO:**

$$\nabla f(x,y) = (4-2x,\ 6-2y) = (0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\star\ (x,y) = (2,3)$$ (ÚNICO PONTO CRÍTICO NO INTERIOR)

**NA FRONTEIRA:**

(a) NA CURVA $(0,t)$ $\rightarrow$ $f(0,t) = 6t - t^2 = g(t)$

$g'(t) = -2t+6 \rightarrow \boxed{t=3}$
$\quad = 0$

$\star$ CANDIDATOS: $(0,3)$, $(0,0)$, $(0,5)$

(b) NA CURVA $(t,0)$ $\rightarrow$ $f(t,0) = 4t - t^2 = g(t)$

$g'(t) = -2t+4 \rightarrow \boxed{t=2}$
$\quad = 0$

CANDIDATOS: $(2,0)$, $(0,0)$, $(4,0)$ $\star$

(c) NA CURVA $(4,t)$ $\rightarrow$ $f(4,t) = \cancel{16} + 6t - \cancel{16} - t^2$

$= 6t - t^2 = g(t)$

$g'(t) = -2t+6 \quad \boxed{t=3}$

CANDIDATOS: $(4,3)$, $(4,0)$, $(4,5)$ $\star$

(d) NA CURVA $(t,5)$ $\rightarrow$ $f(t,5) = 4t + 30 - t^2 - 25$

$= -t^2 + 4t + 5 = g(t)$

$g'(t) = -2t+4 \rightarrow \boxed{t=2}$

CANDIDATOS: $(2,5)$, $(0,5)$, $(4,5)$ $\star$

COMPARANDO:

$(2,3) \rightarrow f(2,3) = 13$ MÁX
$(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$ MÍN
$(4,0) \rightarrow f(4,0) = 0$
$(0,5) \rightarrow f(0,5) = 5$
$(4,5) \rightarrow f(4,5) = 5$
$(0,3) \rightarrow f(0,3) = 9$
$(2,0) \rightarrow f(2,0) = 4$
$(4,3) \rightarrow f(4,3) = 9$
$(2,5) \rightarrow f(2,5) = 9$

PT. MÁX. ABS. $(2,3)$

PT. MÍN. ABS. $(0,0)$ E $(4,0)$