

CÁLCULO 1 - SEMANA 3

Prof. Roseli Alves de Moura

Conteúdo:

II – Cálculo de limites

- 1. Limites: Conceitos e Propriedades**
- 2. Cálculo de Limites – Algumas Técnicas**

$\mathbb{R}^x \rightarrow \mathbb{R}^y$

dom $\rightarrow \mathbb{C} \mathbb{D}$

FUNÇÕES E A IDEIA DE LIMITE

Lembramos que um “função” estabelece a correspondência entre números reais e outros (funções de variáveis reais)

$$\begin{pmatrix} \text{número} \\ \text{real} \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \text{outro n.º} \\ \text{real} \end{pmatrix}$$

Como exemplos de função temos

$$y = ax + b$$

reta

$$y = ax^2 + bx + c$$

parábola

em que a , b e c são parâmetros constantes. Outras funções que correspondem a figuras geométricas conhecidas são

$$x^2 + y^2 = R^2$$

círculo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hipérbole



LIMITES: Valor que tende a função quando a variável tende a um certo valor

Exemplo:

$$f(x) = 2x + 1$$

O valor desta função para alguns pontos particulares são

$$f(1) = 3$$

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = -1$$

etc.

(II.9)

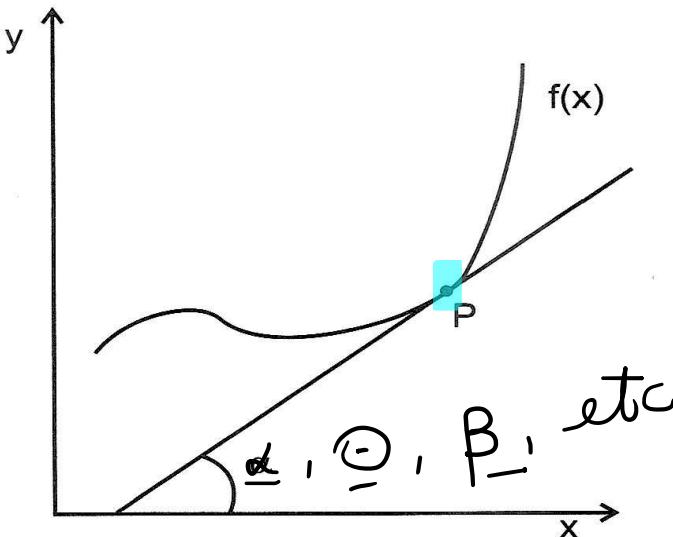


Figura I.1: Representação gráfica de um função $f(x)$

$$f(x) = 2x + 1 \quad (1, 3)$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

Podemos introduzir o conceito de limite dizendo simplesmente que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é 3, que o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 é 1 etc. Matematicamente, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

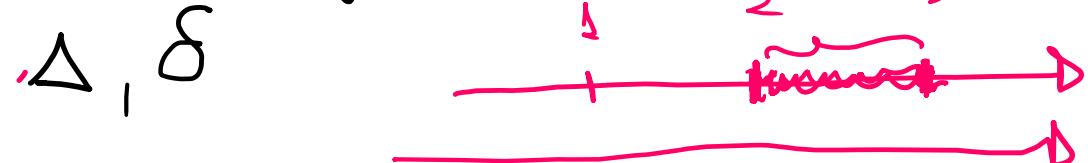
(II.10)

LIMITES: DEFINIÇÃO

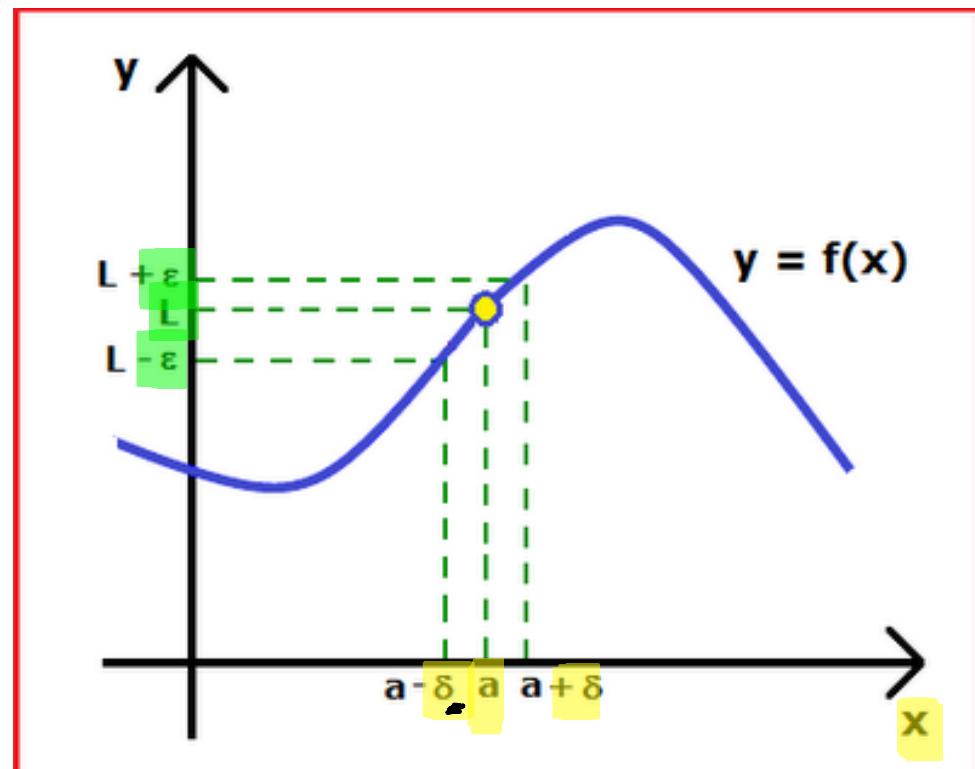
A função $y = f(x)$ tende ao limite L quando x “tende” para a , se para todo número real $\varepsilon > 0$ existe um número positivo $\delta > 0$ tal que, para todo $x \neq a$ temos que,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Letras Gregas



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow a$

“ x ” “tende” a “ a ”

PROPRIADES DOS LIMITES

Sejam b e c dois números reais, e seja n um inteiro positivo.

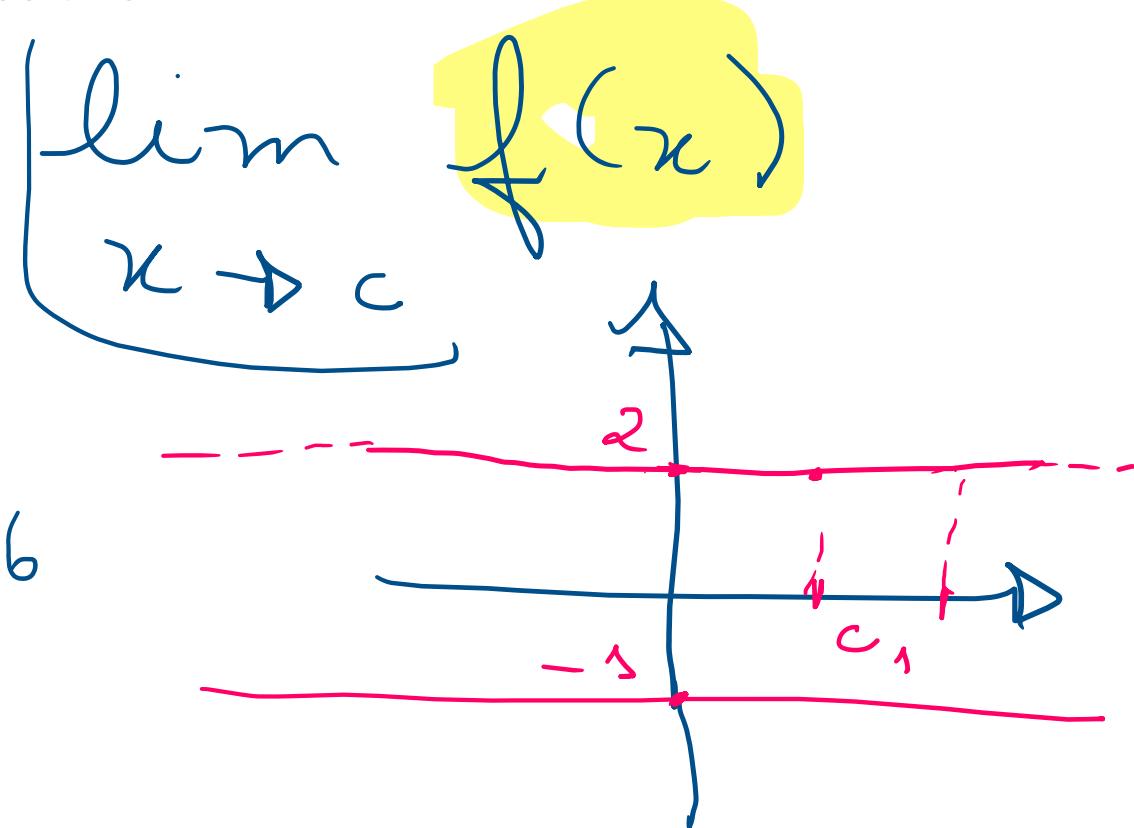
$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow c} b = b$$

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

$$\text{III) } \lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$$

$$\text{IV) } \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} x^4 \\ &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$



Obs.: Em IV, se n for par, c deve ser positivo.

OPERAÇÕES COM LIMITES

Sejam b e c dois números reais, n um inteiro positivo e f e g funções para as quais

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M.$$

$$b \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = b \cdot L$$

Cuidado!

I) $\lim_{x \rightarrow c} [b \cdot f(x)] = bL$

II) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

III) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

IV) $\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}; \quad \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0 \right)$

V) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n$

VI) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

$\frac{2}{0} \neq A$

$\frac{0}{2^3} = 0$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₁ - O limite de uma função **constante** $f(x) = K$, quando x tende a “a”, é igual a própria constante:

$$\lim_{x \rightarrow a} K = K$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 4 = 4$$

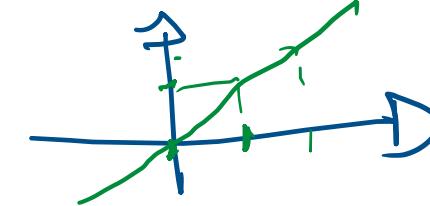
$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} e = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \pi = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

$$y = x$$



P₂ - O limite da função identidade $f(x) = x$, quando x tende a “a”, é igual a “a”.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow e} (x + 2) = e + 2$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow e} x = e$$

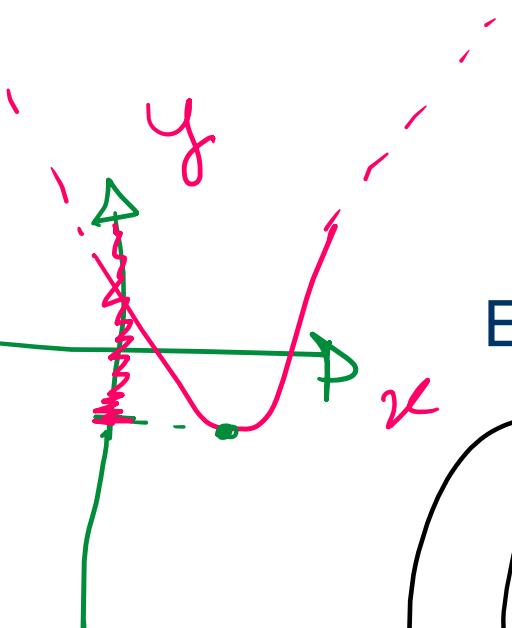
$$\lim_{x \rightarrow \pi} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{5}} x = \sqrt[3]{5}$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₃ - O limite da soma é igual a soma dos limites

(caso esses limites existam):


$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 =$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 = 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 15$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₄ - O limite da diferença é igual a diferença dos limites
(caso esses limites existam):

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \cdot 2^2 - 2 = 6$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₅ - O limite do produto é igual ao produto dos limites (caso esses limites existam):

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2) = \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \cdot 3 = 9$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₆ - O limite do quociente é igual ao quociente dos limites

(caso esses limites existam): $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x-5}{x^3-7} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3-7)} = \frac{3-5}{27-7} = \frac{-2}{20} = \frac{-1}{10}$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₇ - O limite da potência de uma função $(f(x))^n$, onde n é um número inteiro positivo, é igual a **potência do limite** da função (caso exista):

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

Exemplo:

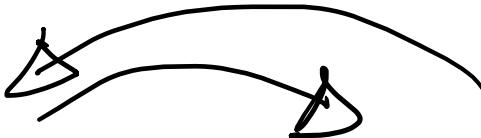
$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + x^3)^4 = (\lim_{x \rightarrow 1} (2x + x^3))^4 = 3^4 = 81$$

\downarrow

$$(2 \cdot 1 + 1^3) = 3$$

PROPRIEDADES E EXEMPLOS NAS OPERAÇÕES COM LIMITES

P₈ - O limite da raiz de uma função $\sqrt[n]{f(x)}$, é a raiz do limite da função, se o limite existe e é maior ou igual a zero:



$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - 4x + 1)} = \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1} = 5$$

$$\sqrt{25} = 5$$

lim

RESUMO DAS PROPRIEDADES DOS LIMITES

Se L, M, a e c são números reais e n inteiro

e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

RESUMO DAS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Regra da soma e subtração: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
- Regra do Produto: $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.M$
- Regra da multiplicação por escalar: $\lim_{x \rightarrow a} c.f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.L$
- Regra do quociente: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$

RESUMO DAS PROPRIEDADES DOS LIMITES

- Regra da potência: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n = L^n$

- Regra da raíz $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

- Regra da exponencial: $\lim_{x \rightarrow a} c^{f(x)} = c^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = c^L$

- Regra do logaritmo: $\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\log_c(f(x))}_{= \log_c L \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0} = \log_c(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

- Regra do seno (o mesmo para o cosseno)

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\sin f(x)}_{= \sin L} = \underbrace{\sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))}_{= \sin L}$$

LIMITE DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Se $P(x)$ é uma função polinomial e c é um número real, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c)$$

Teorema 1 – Os Limites de Funções Polinomiais podem ser obtidos por substituição:

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

então $\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$

Exemplo – Limite de Uma Função Polinomial

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^5 + 4x^4 - x^2 - x + 2) =$$

$$3 \times (-2)^5 + 4 \times (-2)^4 - (-2)^2 - (-2) + 2 =$$

$$3 \times (-32) + 4 \times 16 - 4 + 2 + 2 =$$

$$-96 + 64 - 4 + 2 + 2 = -32$$

LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS

Teorema 2 – Os Limites de Funções Racionais podem ser obtidos por substituição, caso o limite do denominador não seja zero:

Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$

então $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

Exemplo – Limite de Uma Função Racional

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

FORMAS INDETERMINADAS: Pré- Requisitos

→ Transformar em produto

1) As fórmulas de fatoração vistas no colégio são extremamente úteis nos cálculos de limites nas formas indeterminadas:

1 - $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$ - Fator comum

2 - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ - Diferença de Quadrad

3 - $\underline{a^2 \pm 2ab + b^2} = (a \pm b)^2$ - Triâng. Qua d. Perfeito

4 - $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp a.b + b^2)$

5 - $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

2) Dispositivo Prático Briott-Ruffini

4) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)$

$$\cancel{x^3} + 8 = \cancel{x^3} + \cancel{2^3} = (x + 2) \cdot \cancel{(x^2 - 2x + 4)}$$
$$\cancel{x^3} + 8 = \cancel{x^3} + \cancel{2^3} = (x + 2) \cdot \cancel{(x^2 - 2x + 4)}$$
$$(x^2 - 2x + 4)$$

1) As fórmulas de fatoração vistas no colégio são extremamente úteis nos cálculos de limites nas formas indeterminadas:

- $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{0}{0} = \text{ind}$$

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

2) Dispositivo Prático Briott-Ruffini

$$a = x \rightarrow (x^3 + 2^3)$$

$$b = 2$$

$$(x^3 + 8) = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$$

x^3	$+ 8$	x^2	$- 2x$	$+ 4$	0	0	8
-2	1	0	0	4	0	$(resto)$	

termo ind.

=

1) As fórmulas de **fatoração** vistas no colégio são extremamente úteis nos cálculos de limites nas formas indeterminadas:

- $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{0}{0} = \text{ind}$$

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

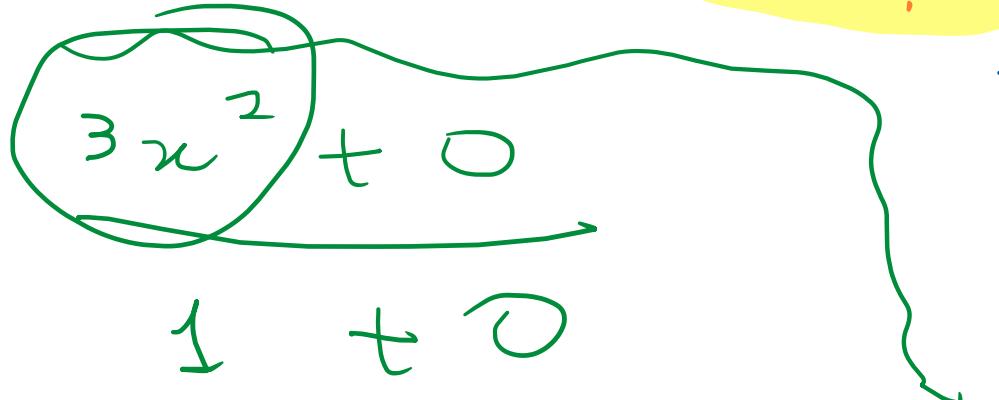
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)} =$$

2) Dispositivo Prático **Briott-Ruffini**



$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

TÉCNICAS USUAIS

PARA CÁLCULO DE

LIMITES

INDETERMINADOS

Alguns exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x} = \infty$$

A quantidade $\frac{0}{0}$ não pode ser associada, de forma absoluta, a nenhum número. Inadvertidamente, poder-se-ia pensar que é 1, mas não é (ou pode não ser). Observando-a com mais atenção, é fácil perceber o porquê disto. Qualquer número (diferente de zero) dividido por zero é infinito, mas zero dividido por qualquer número (também diferente de zero) é zero. $\frac{0}{0}$ é uma quantidade indeterminada e é chamada de símbolo de indeterminação. Adiantemos que existem outros: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 e 1^∞ . A quantidade 0^∞ não é um símbolo de indeterminação (qualquer número menor que 1 elevado a infinito dá zero, logo $0^\infty = 0$).

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{0} = \infty$$

$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} = 0,5 \\ \frac{1}{3} = 0,3\ldots \\ \frac{1}{10} = 0,1 \end{array} \right.$

Com relação a indeterminação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$$

E se tivéssemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^x = 1^\infty$$

Poderia ser qualquer valor !!!

$$1^\infty = 1$$

1. Caso – Limites indeterminados da forma:

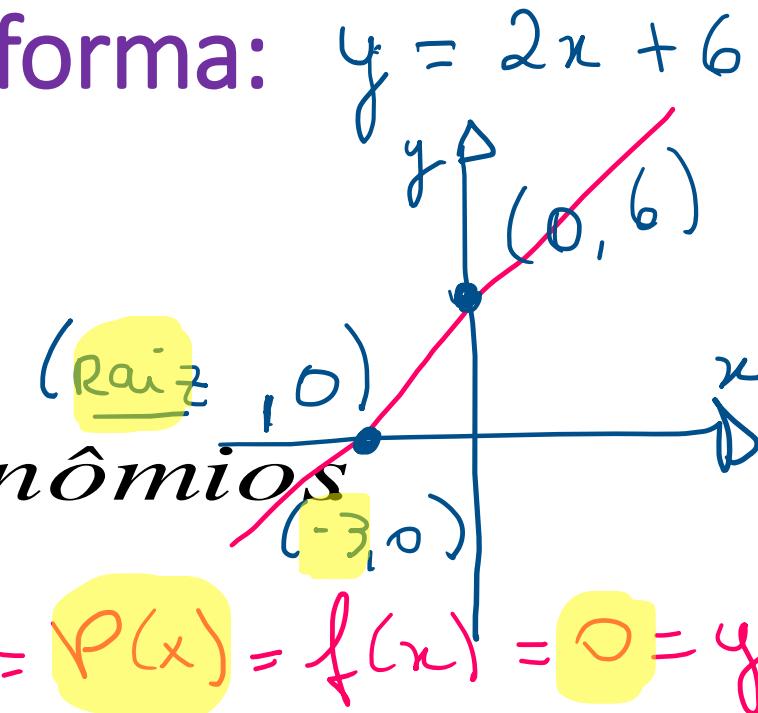
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0},$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios

Raíz

Neste caso, fatorar os polinômios e simplificar para obter a fatoração basta dividir cada polinômio por $(x - a)$

$(x - \text{raiz})$



$$\begin{array}{c} P(x) \\ \text{---} \\ R(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} D(x) \\ \hline Q(x) \end{array}$$

Divisão exata:
Resto "zero"

Resto $R(x) = 0$ se $D(x) = (x - \text{Raiz})$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 0 \\ \hline 3 \end{array} \quad \Rightarrow 6 = 2 \cdot 3$$

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x)$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$\text{Obs.: } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Exemplo 2 Cancelando um Fator Comum

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$(x - \text{raiz}_1) \cdot (x - \text{raiz}_2)$$

2 raízes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{0}{0} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 1}$$

Solução: Não podemos substituir $x = 1$ porque isso resulta em um denominador zero. Testamos o numerador para ver se este também é zero em $x = 1$. Também é, portanto apresenta o fator $(x - 1)$ em comum com o denominador. Cancelar o $(x - 1)$ resulta em uma fração mais simples, com os mesmos valores da original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x} \quad \text{Se } x \neq 1$$

fator comum

O uso da fatoração é uma das melhores alternativas!

Usando a fração simplificada, obtemos o limite desses valores quando $x \rightarrow 1$ por substituição:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(\cancel{x-1})}{x(\cancel{x-1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x+2}}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}$$

$$\frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1^4 - 4 \cdot 1 + 3}{1^3 - 3 \cdot 1 + 2} = \frac{-3 + 3}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

indet

$$(I) \quad 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 4x + 3 =$$

$$(x^3 + x^2 + x - 3) \cdot (x - 1)$$

$$(x^2 + 2x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)$$

$$(II) \quad 1x^3 + 0x^2 - 3x + 2$$

$$(x^2 + x - 2) \cdot (x - 1)$$

$$(x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-1)$$

1	1	0	0	-4	3	(x ⁴)
1	1	1	1	-3	0	(x ³)
1	1	2	3	0	(x ²)	

1	1	0	-3	2	(x ³)	
1	1	1	-2	0	(x ²)	
1	2	0	(x)			
1	2	0	(x + 2)			

$$\lim_{x \rightarrow 1}$$

$$\frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1^4 - 4 \cdot 1 + 3}{1^3 - 3 \cdot 1 + 2} = \frac{-3 + 3}{-2 + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1}$$

$$\frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x^3 + x^2 + x - 3) \cdot (x-1)}{(x^2 + x - 2) \cdot (x-1)}$$

indeT

$$\lim_{x \rightarrow 1}$$

$$\frac{1^3 + 1^2 + 1 - 3}{1^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x + 3) \cdot (x-1) \cdot (x-1)}{(x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^2 + 2 \cdot 1 + 3}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2$$

EXERCÍCIOS - LIMITES

Fator a, b, c

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ R: -3

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ R: 0

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ R: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ R: 4/3

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ R: 2/3

2. Caso – Limites indeterminados envolvendo raiz quadrada

Neste caso, em geral, multiplicar e dividir a expressão pelo conjugado do termo que contém a raiz quadrada observando que o conjugado de $(A - B)$ é $(A + B)$ – vale a recíproca. Com isso teremos uma diferença entre quadrados.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} + 3) \cdot (\sqrt{x} - 3)}{x} = \frac{\cancel{(\sqrt{x} + 3)} \cdot (\sqrt{x} - 3)}{\cancel{x}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}^2 - 3^2}{\cancel{x}}$$

$\cancel{x - 9}$

Exemplo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})}{h} \cdot (A + B)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{A^2 - B^2}{(\sqrt{2+h})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Racionalização

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$