UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 6

Prof. Roseli Alves de Moura

Conteúdo:
III – A Derivada: 4. Teorema da função inversa
IV – Aplicações da Derivada: Teorema do Valor Médio e suas consequências

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Seja y = f(x) uma função cujo domínio é um intervalo aberto $]a,b[$. Se f(x) é derivável neste intervalo e f'(x) ≠ 0 para qualquer x $\in]a,b[$, então $f^{-1}(x)$ é derivável e sua derivada vale

$$\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\right)' = \frac{1}{\mathbf{f}'\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\right)}$$

https://br.video.search.yahoo.com/search/video?fr=mcafee&ei=UTF-8&p=teorema+da+fun%C3%A7%C3%A3o+inversa&type=E215BR714G0#id=6&vid=3923fefbd3d2c76b4dc16503d027029d&action=view

EXEMPLOS -TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

1) Seja $y = f(x) = x^2 - 4$, determine a derivada da função inversa de f(x)

$f(x) = x^2 - 4$

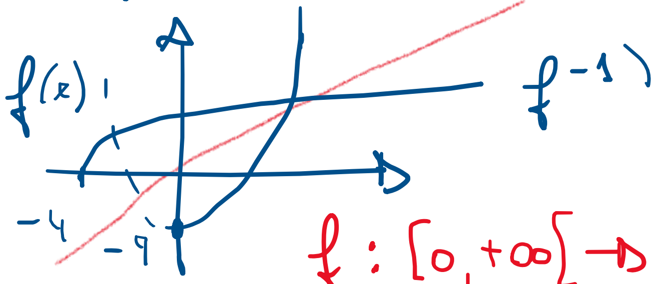
$y = x^2 - 4$

$x = y^2 - 4$

$y^2 = x + 4$

$y = \pm\sqrt{x+4}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$



$f : [0, +\infty[\to [-4, +\infty[$

$f'(x) = 2x$

$f'\left(f^{-1}(x)\right) = 2\sqrt{x+4}$

Logo:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

Prova Real

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$

$f^{-1}(x) = (x+4)^{1/2}$

$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}-1}$

$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-1/2}$

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{2(x+4)^{1/2}}$$

EXEMPLOS -TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

2) Seja y = f(x) = $8x^3$, determine a derivada da função inversa de f(x)

$$f(x) = 8x^3$$
$$y = 8x^3$$
$$x = 8y^3$$
$$y^3 = \frac{x}{8}$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{x}{8}}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$$

$$f'(x) = 24x^2$$
$$f'\left(f^{-1}(x)\right) = 24.\left[f^{-1}(x)\right]^2$$
$$f'\left(f^{-1}(x)\right) = 24.\left[\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right]^2$$
$$f'\left(f^{-1}(x)\right) = 24\,\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}$$
$$f'\left(f^{-1}(x)\right) = 6\sqrt[3]{x^2}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$\boxed{\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}}$$

EXEMPLOS -TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

3) Seja $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$, para $x > 3/2$ determine a dx/dy quando $y = 1$.

$$[f(x)]' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow [f^{-1}(x)]' = \frac{dx}{dy}$$

$$y = x^2 - 3x + 1$$

$$\cancel{1} = x^2 - 3x + \cancel{1}$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$

$$f(3) = 1$$

$$f^{-1}(1) = 3$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'[f^{-1}(x)] = 2.[f^{-1}(x)] - 3$$

$$f'[f^{-1}(1)] = 2.[f^{-1}(1)] - 3$$

$$f'[f^{-1}(1)] = \underbrace{2 . 3}_{6} \underbrace{- 3}_{-3} - 3 = 3$$

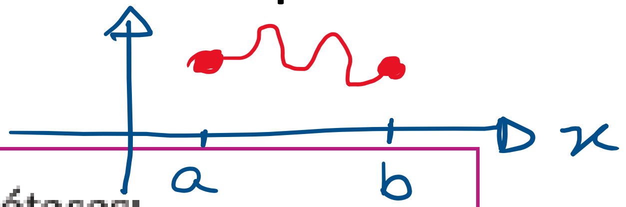
$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$$[f^{-1}(1)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$$[f^{-1}(1)]' = \frac{1}{3}$$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO
INTRODUÇÃO

Antes de falarmos sobre o Teorema do Valor Médio, devemos observer os gráficos de algumas funções típicas que satisfaçam as três hipóteses do Teorema de Rolle, a saber:

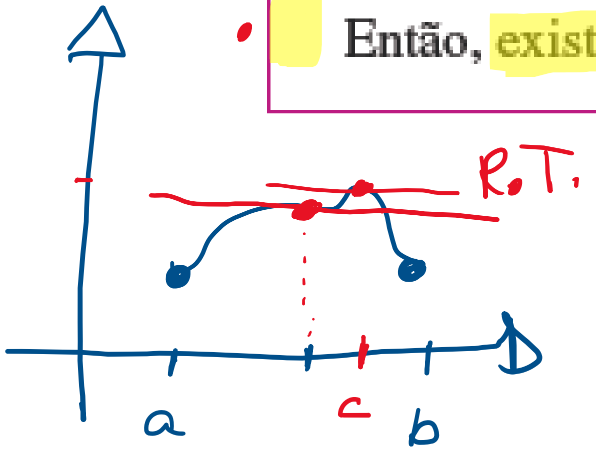


Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b). $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Máx / Mín

?



TEOREMA DE ROLLE

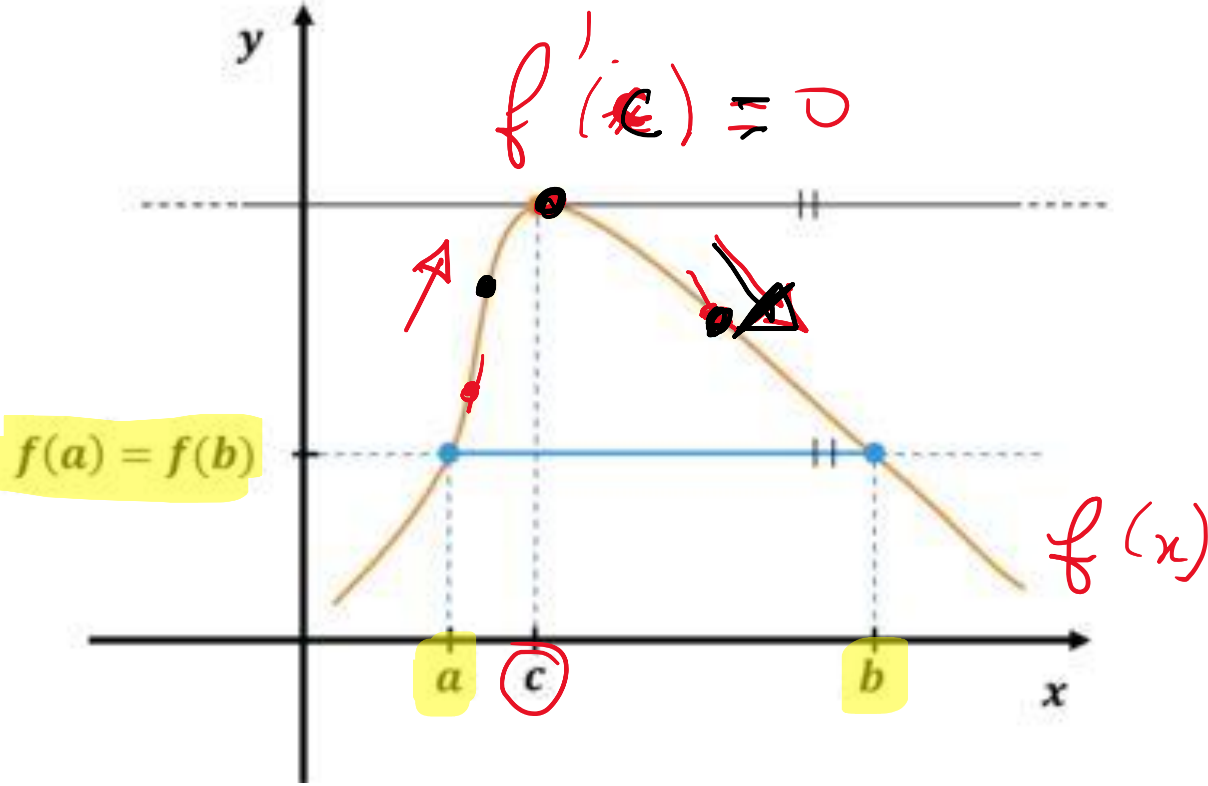
1) *f* é contínua sobre o intervalo fechado [a, b]

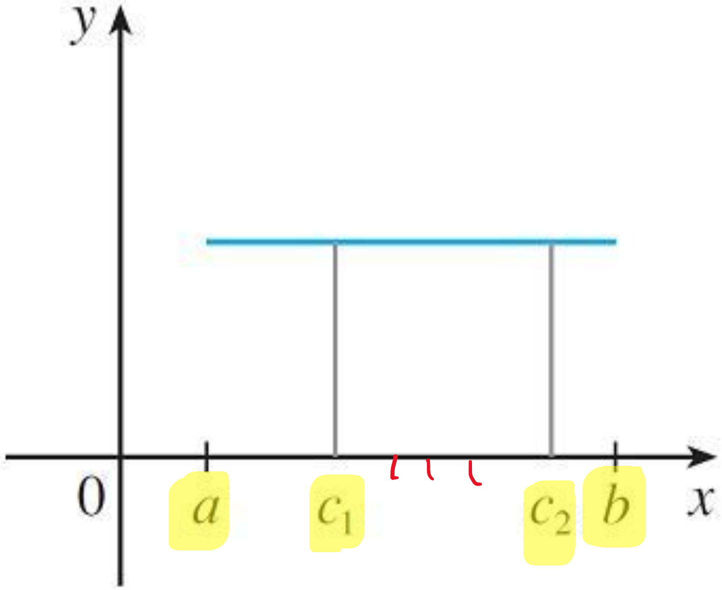
2) *f* é diferenciável no intervalo aberto (a, b)

3) f(a) = f(b)

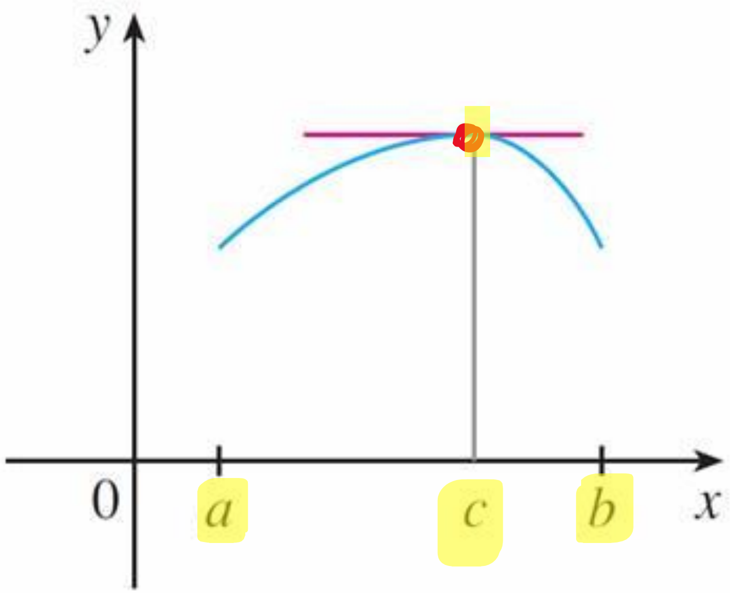
Então existe pelo menos um número c entre a e b com a propriedade de que

f’(c) = 0

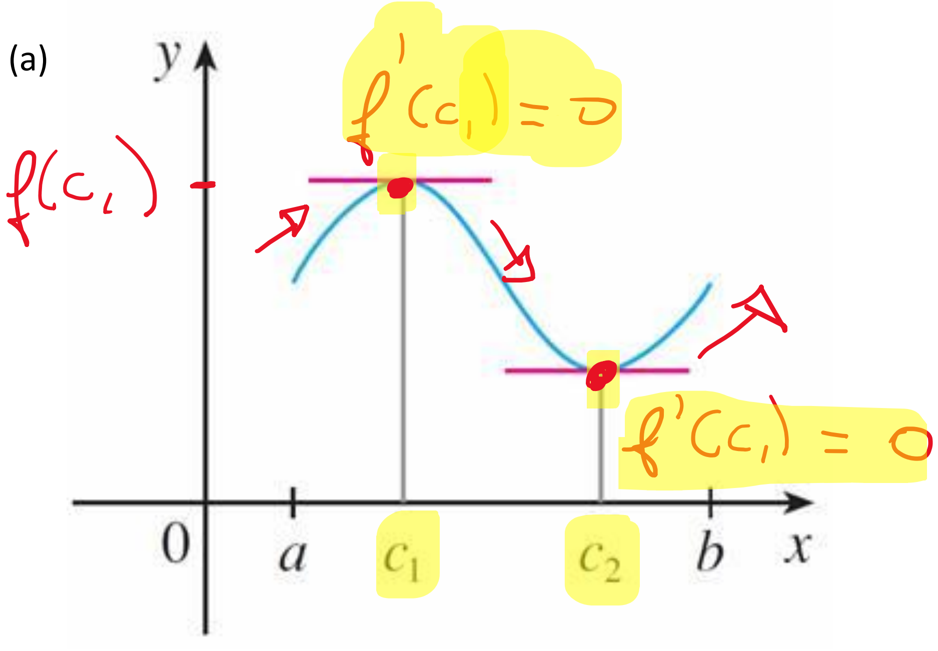




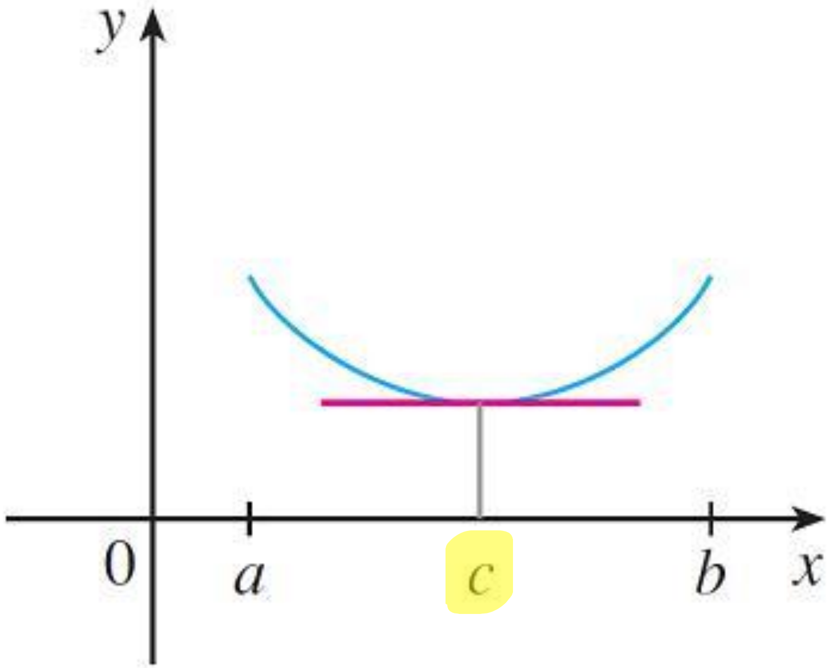
(a)



(b)



(c)



(d)

Em cada caso, parece que há pelo menos um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é horizontal e, portanto, $f'(c) = 0$.

Assim, o Teorema de Rolle é plausível.

EXEMPLOS

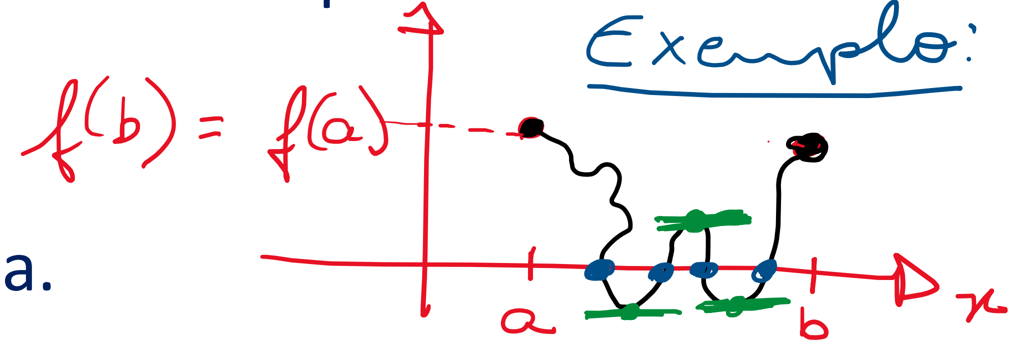
$f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$
$f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$

Verd.

1) Demonstre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

Usamos o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz.
Seja $f(x) = x^3 + x - 1$.

Exemplo:



$f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$.

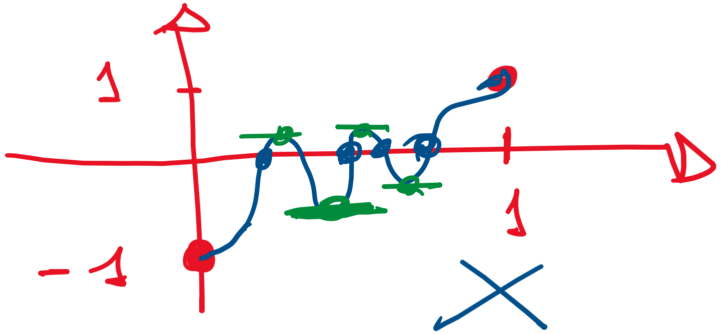
Como f é uma função polinomial, ela é continua.

O Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 0 e 1 tal que $f(c) = 0$. A equação dada, portanto, tem uma raiz.

Para mostrar que a equação não tem outra raiz real, usamos o Teorema de Rolle e argumentamos por contradição.

Suponha que ele tenha duas raízes a e b.

Falso



Raízes

Então $f(a) = 0 = f(b)$ e, uma vez que f é uma função polinomial, é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe um número c entre a e b entre $f'(c) = 0$. Mas, calculando a derivada de $f(x) = x^3 + x - 1$, temos:

contradição

$$f'(x) = 3x^2 + 1 - 0$$

$$f'(x) = \underbrace{3x^2 + 1}_{\text{positivo}} \geq 1 \qquad \text{para todo } x$$

$$f'(x) \geq 1$$

(uma vez que $x^2 \geq 0$), portanto, $f'(x)$ nunca pode ser zero.

Isso fornece uma contradição.

Portanto, a equação não pode ter duas raízes reais.

c.q.d

Observe que o Teorema de Rolle garante que existe um número com certa propriedade mas não nos diz como achá-lo!

O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado teorema da existência

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O principal uso do Teorema de Rolle é na demonstração do importante teorema do valor médio, o qual foi primeiro enunciado por outro matemático francês, Joseph-Louis Lagrange.

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existe um número c em (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$y - y_0 = y'(c) \cdot (x - x_0)$$

ou

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

A inclinação da reta secante *AB* é

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O Teorema do Valor Médio garante que há, no mínimo, um ponto *P* $(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante *AB*. Em outras palavras, há um ponto *P* onde a reta tangente é paralela à reta secante *AB*.

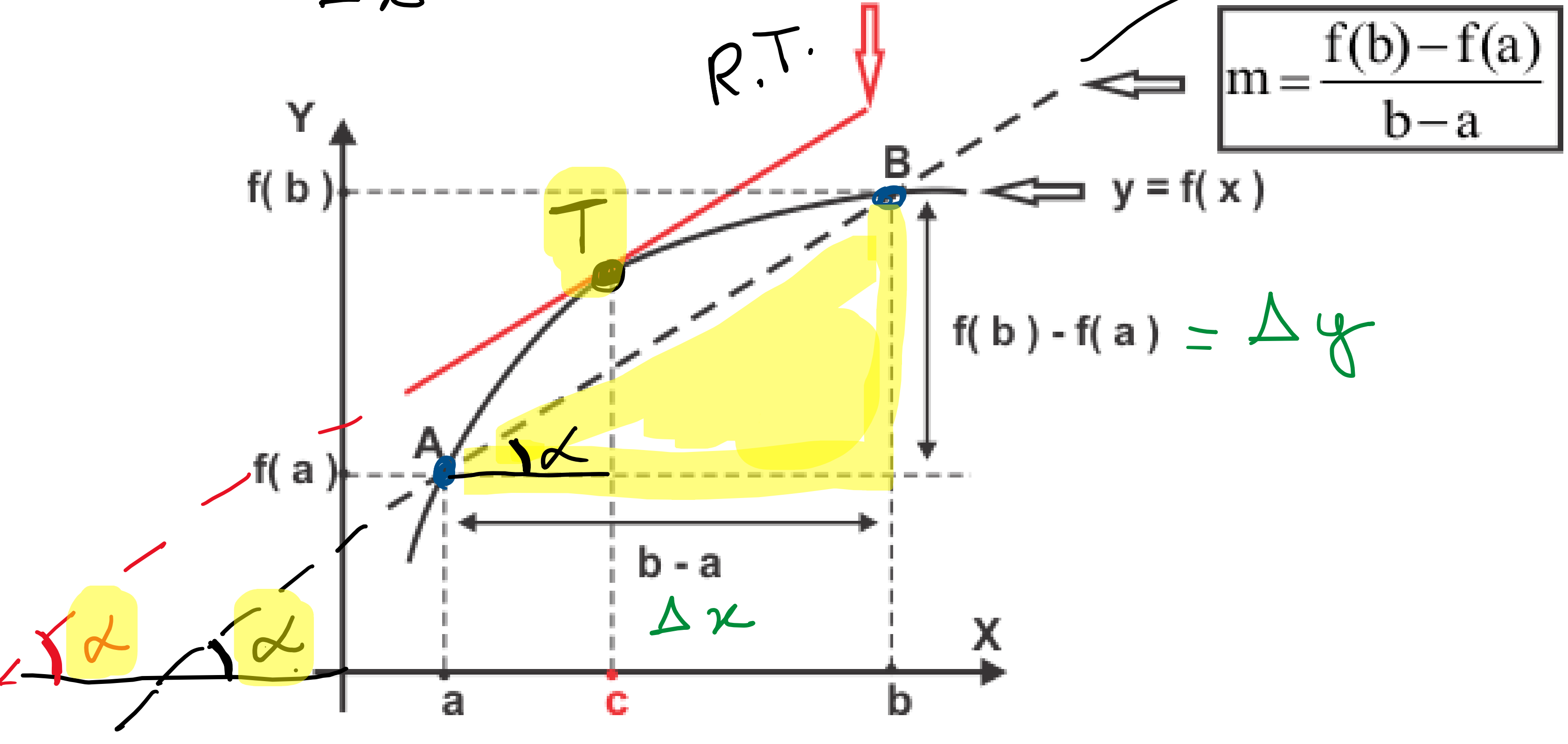
TEOREMA DO VALOR MÉDIO - CONDIÇÕES

3) Existe pelo menos um x = c no intervalo (a, b), tal que: $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c)$$

$$\boxed{m=f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Reta Secante

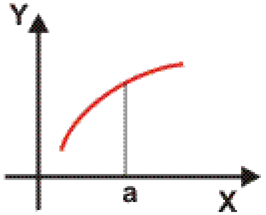


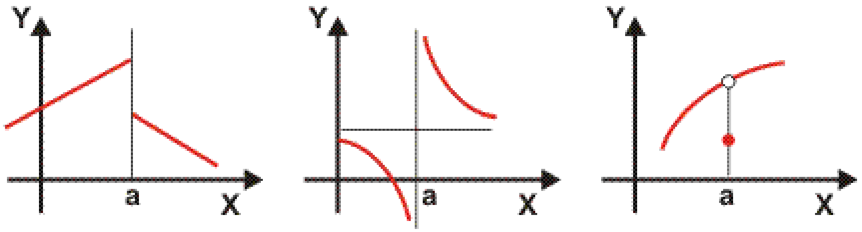
R.T. // R. Sec.

"igual m"

TEOREMA DO VALOR MÉDIO - CONDIÇÕES

1) A função deve ser contínua num intervalo [a, b]

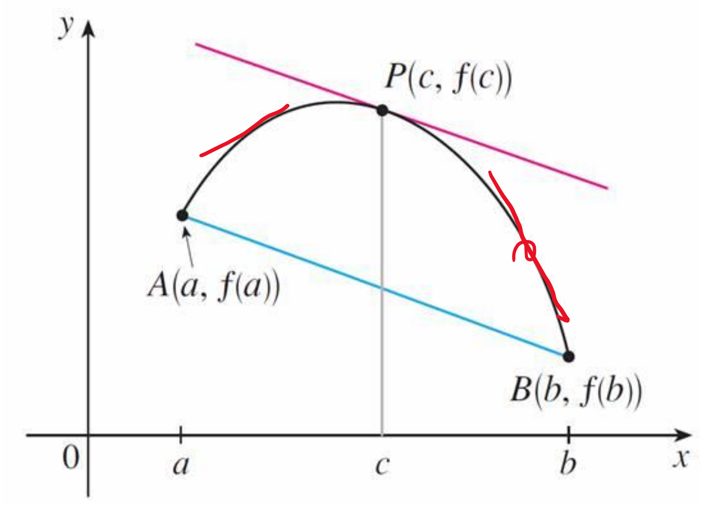


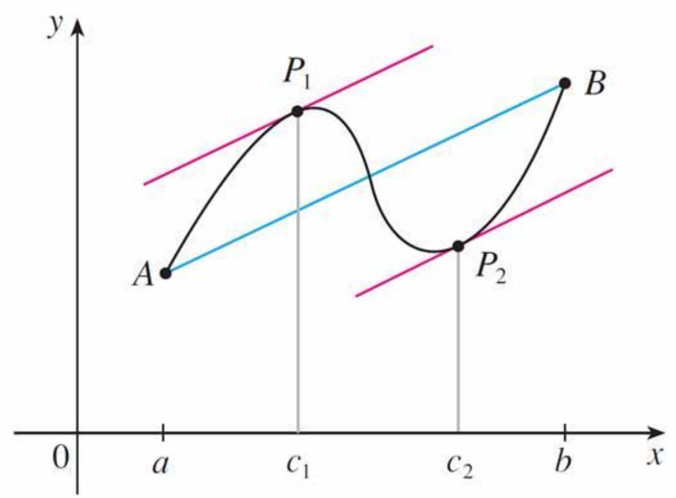


Contínua

Não contínua

2) A função deve ser derivável num intervalo (a, b)





EXEMPLOS

$f(2) = 2^3 - 2 = 6$

$f(0) = 0^3 - 0 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(c) = 3c^2 - 1$

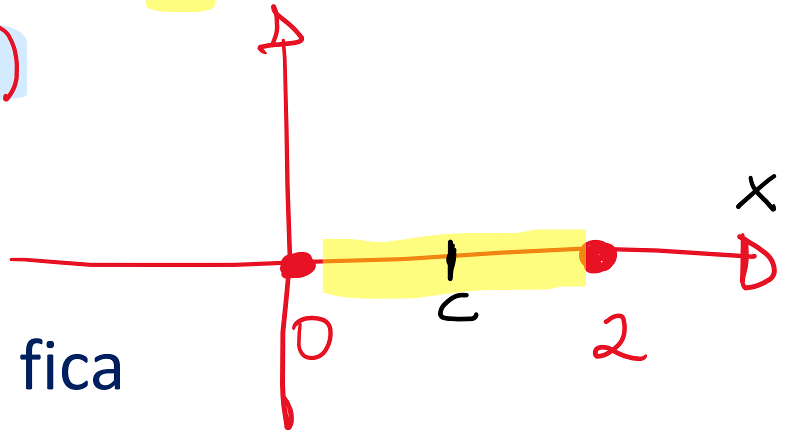
2) Para ilustrarmos o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$.

Uma vez f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que:

$$y - y_0 = y'(c)\cdot(x - x_0)$$

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0).$$

$$6 - 0 = f'(c)\cdot 2$$



Agora $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

- $6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$

$$\Rightarrow 6c^2 - 2 = 6$$

$$6c^2 = 8$$

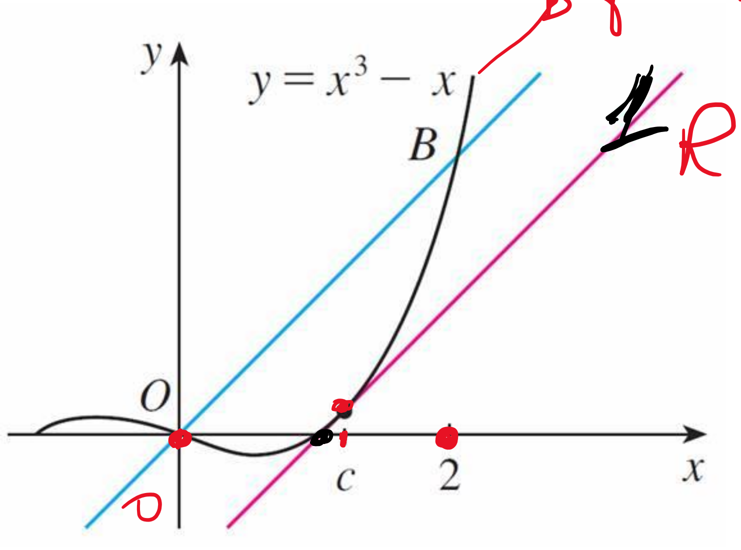
$$c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$c = \pm\sqrt{4/3} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

sto é $c = \pm 2/\sqrt{3}$.

Mas c deve estar entre $(0, 2)$, então, $c = 2/\sqrt{3}$.

A Figura ilustra esse cálculo: a reta tangente neste valor de *c* é paralela à reta secante *OB*.



$\to f(x)$

1 R.T.

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$

$f'(c) = \frac{12}{3} - 1$

$f'(c) = 3$

$y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$

$y - 0 = 3 \cdot (x - 0)$

$y = 3x$

✓O Teorema do Valor Médio pode ser interpretado como uma afirmação de que:

Existe um número no qual a taxa de variação instantânea é igual a taxa de variação média em um intervalo.

✓A grande importância do TVM reside no fato de que:

Ele nos possibilita obter informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos do cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir.

5 Teorema Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

7 Corolário Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Observação:

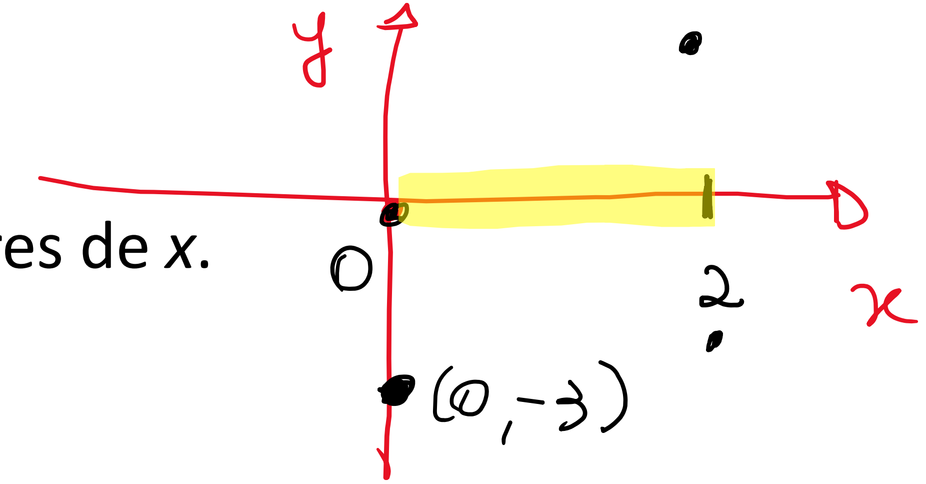
•É necessário cuidado ao aplicar o Teorema 5. Seja

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D = \{x \mid x \neq 0\}$ e $f'(x) = 0$ para todo x em D.

Apesar de f não ser uma função constante, não contradiz o Teorema pois D não é um intervalo. Observe que f é constante no intervalo $(0, \infty)$ e também no intervalo $(-\infty, 0)$.

EXEMPLO EXTRA



Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x.

Quão grande $f(2)$ pode ser?

$f(x)$

RESOLUÇÃO: Foi-nos dado que f é derivável (e, portanto, contínua) em toda parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0, 2]$. Existe, então, um número c tal que

$$y - y_0 = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

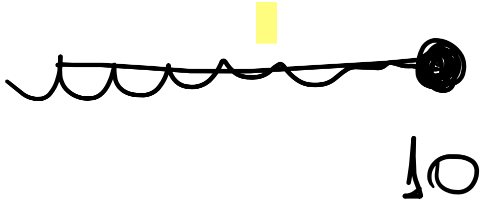
$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Logo $$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + \underbrace{2f'(c)}_{?}.$$

EXEMPLO EXTRA

Foi-nos dado que $f'(x) \leq 5$ para todo x; assim, sabemos que $f'(c) \leq 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos

$2f'(c) \leq 10$, logo



Maior valor

- $f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7.$

- O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

$f(x)$ não importa a fórmula!!

APÊNDICE –
ALGUNS TEOREMAS AUXILIARES

TEOREMA DO VALOR EXTREMO

Se f for contínua em um intervalo fechado [a, b], então f assume um valor máximo absoluto f(c) e um valor mínimo absoluto f (d) em certos números c e d em [a, b]