ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 9

Prof. Roseli Alves de Moura

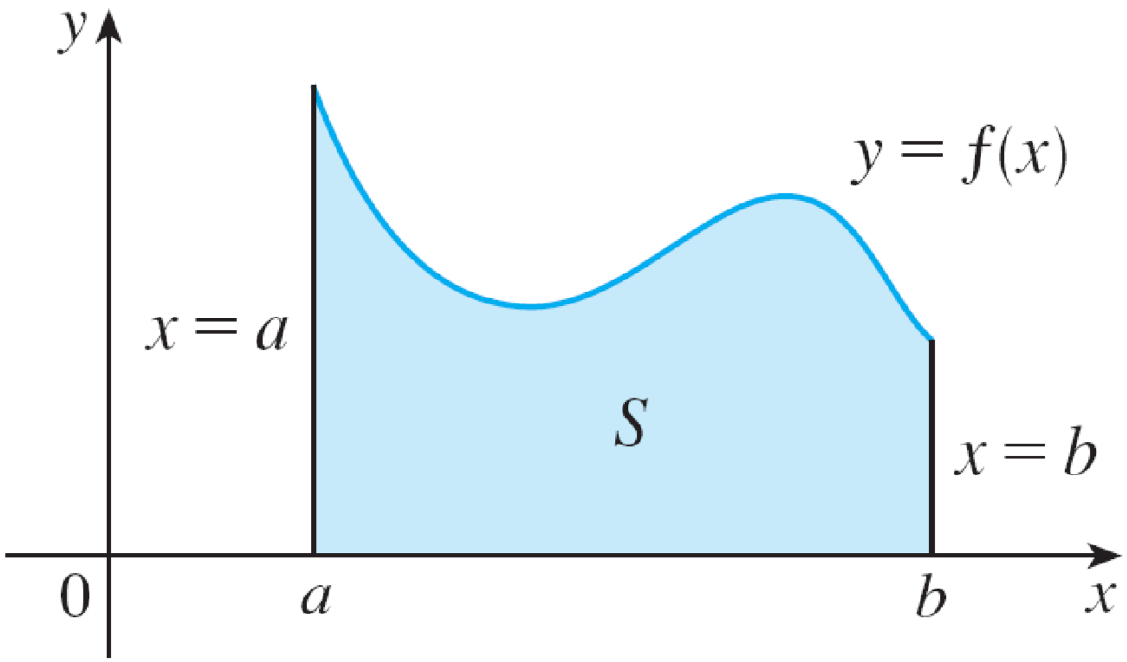
V – A Integral:

1. Antiderivadas e integrais indefinidas
2. Integração por substituição. Exercícios

O PROBLEMA DA ÁREA

Uma das preocupações centrais na história do Cálculo consistia na resolução de problemas de *área.*

Encontrar a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a a b, significa por exemplo, que S está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x, conforme a Figura.



$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

O PROBLEMA DA ÁREA

Em um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos e a seguir somando-se as áreas dos triângulos, etc.

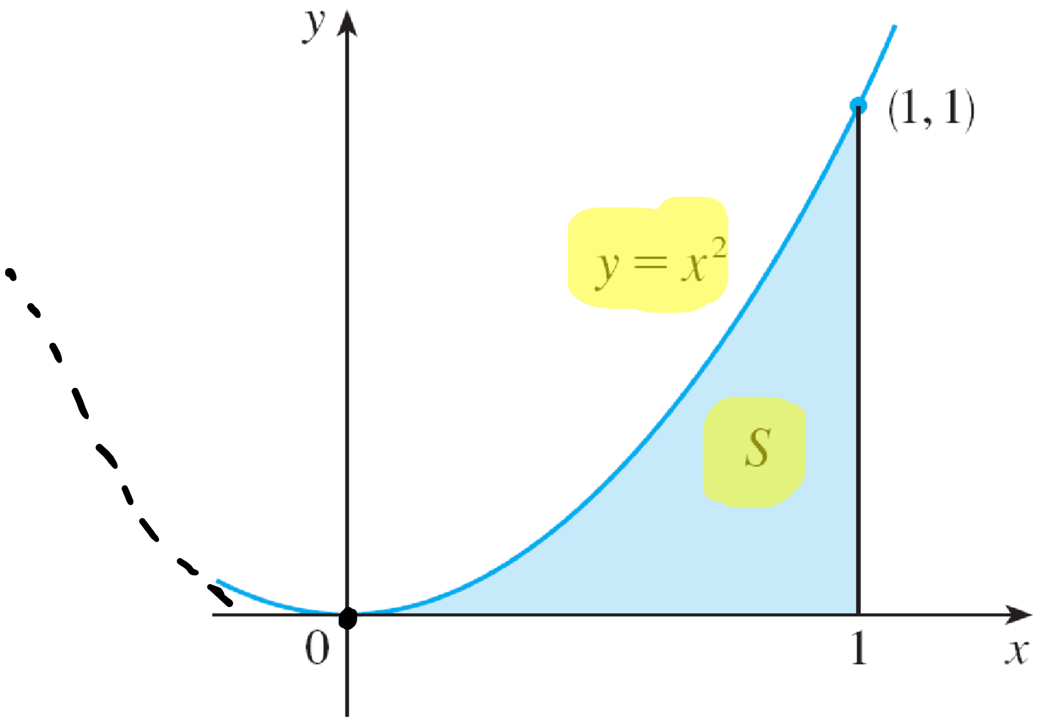
Não é tão fácil, porém, encontrar a área de uma região com lados curvos. Apesar de termos uma ideia intuitiva é necessário mais precisão, dando uma definição exata de área.

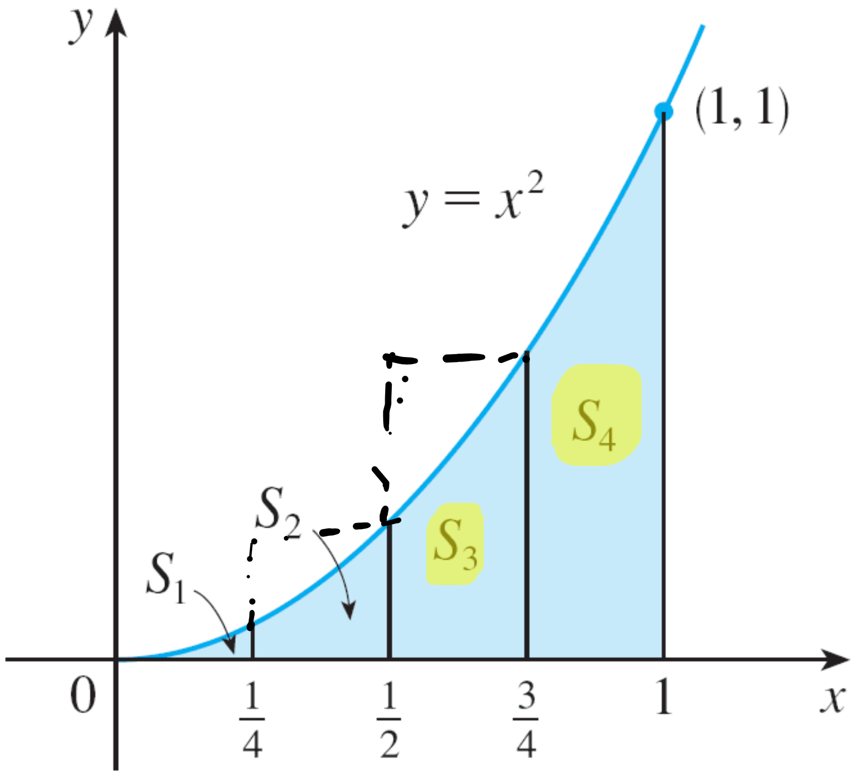
Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar é usada para as áreas, utilizando retângulos para aproximarmos à região S, e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos.

NECESSÁRIO ESTIMATIVAS...

Exemplo: Utilizando retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3, e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{4}$

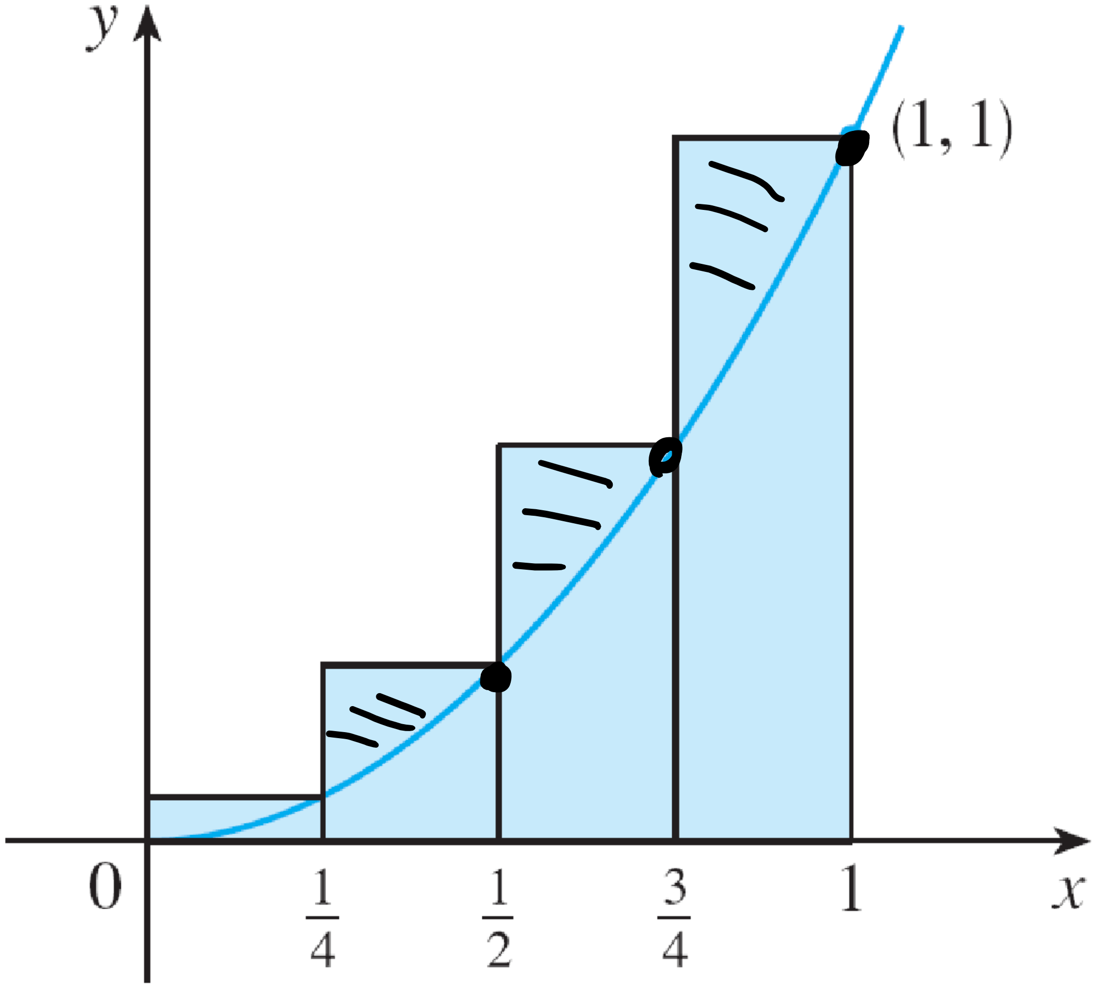




APROXIMAÇÕES COM RETÂNGULOS

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. As alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, e $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e a altura e $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$, e 1^2.



APROXIMAÇÕES COM RETÂNGULOS

Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximados, teremos

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0{,}46875$$

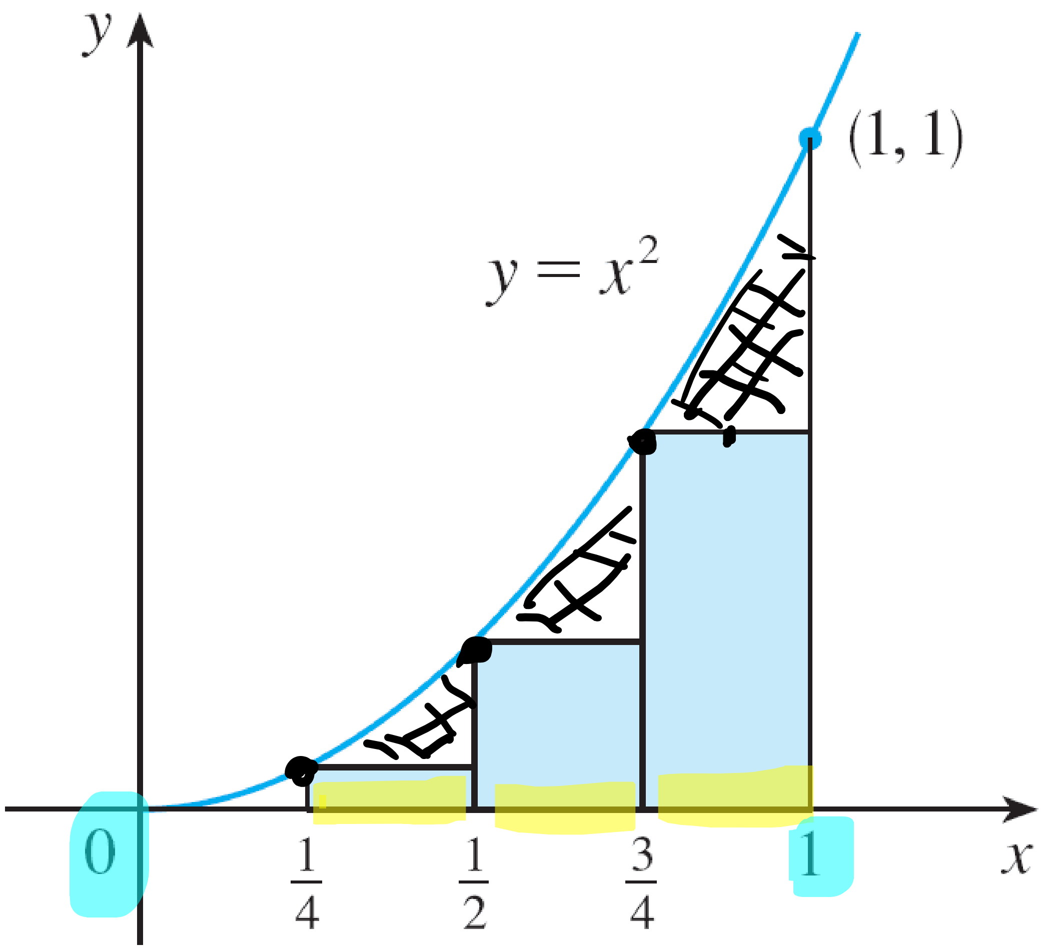
Da Figura vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875.$$

APROXIMAÇÕES COM RETÂNGULOS MENORES

Poderíamos também usar os retângulos menores cujas alturas seguem os valores de *f* nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.)

A soma das áreas desses retângulos aproximantes é



Soma

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A: $0,21875 < A < 0,46875$.

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas e obter melhores estimativas. A tabela à direita mostra os resultados de cálculos similares usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434, por exemplo.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0,3333335$.

$A \cong \frac{1}{3}$

Ou seja, conforme *n* aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores à área de *S*.

Definimos a área *A* como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes:

Logo $\int_0^1 x^2\,dx$

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

Aqui, lembramos alguns detalhes do estudo de derivadas:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

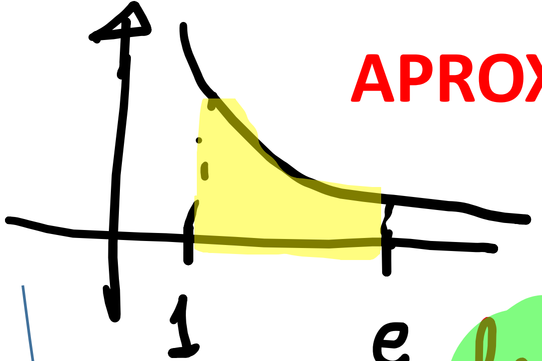
$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^1$

Prova Real: $= \frac{1}{3}$

$f(x) = \frac{x^3}{3} + C$

$f'(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{3} = x^2$

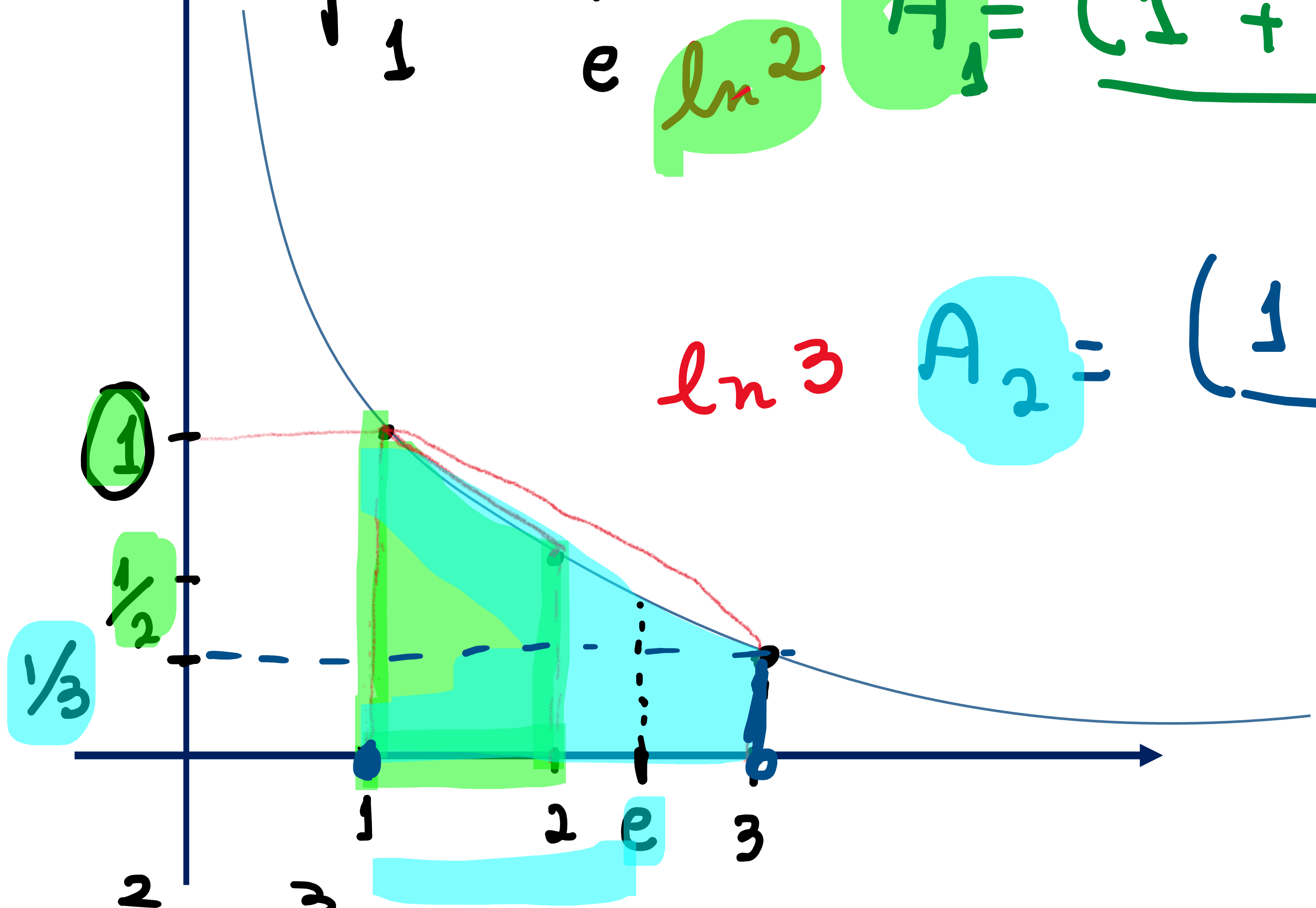
APROXIMAÇÕES COM RETÂNGULOS



$$A = \frac{(B+b)\cdot H}{2}$$

$\ln 2$ $\quad A_1 = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot 1}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

$\ln 3$ $\quad A_2 = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdot 2}{2} = \dfrac{4}{3} = 1{,}3\ldots$



$A = 1 = \ln e$

$e = 2{,}7\ldots$

$\int_1^2$ ou $\int_1^3$

$y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow A = \ln x$

$$\log_b a = c \Rightarrow b^c = a$$

$$\log_a a = c \Rightarrow a^c = a$$

$$c = 1$$

Logo $\log_a a = 1$ e $\ln e = 1$

ANTIDERIVADA

Como o próprio nome sugere, uma **antiderivada** é relacionado ao processo inverso da derivada. Desta forma, se temos a função derivada, ***f' (x)***, com a antiderivada encontraremos a função originária ***f (x)***.

PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função definida num intervalo I.
Uma função F é denominada uma primitiva de f no intervalo I se

F' (x) = f(x) para todo x em I.

INTEGRAL INDEFINIDA

As primitivas de f no interval I são funções da forma F (x) + C, com C constante, representadas pelo símbolo $\int f(x)dx$

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$$

F(x) é chamada função integranda

dx indica o nome da variável

$\int f(x)dx$ é a integral indefinida

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

ln|x|

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

EXEMPLOS

a) $I = \int (2 + 3x^2 + 5.2^x)\,dx \quad = \int 2\,dx + \int 3.x^2\,dx + \int 5.2^x\,dx$

$= 2.\int 1\,dx + 3.\int x^2\,dx + 5.\int 2^x\,dx =$

$= 2(x)^{+C_1} + \cancel{3}\left(\dfrac{x^3}{\cancel{3}}\right)^{+C_2} + 5.\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}\right)^{+C_3} =$

Obs.: $K = C_1 + C_2 + C_3$

$= 2x + x^3 + \underset{0{,}75}{\underline{5}}.(2^x) = 2x + x^3 + \dfrac{20}{3}.2^x + K$

EXEMPLOS

b) $I = \int \left(2e^x - \frac{2}{x^3} + \sqrt{x}\right) dx$ $= 2\int e^x dx - 2\int \frac{1}{x^3} dx + \int x^{1/2} dx$

$$= 2e^x - 2\int x^{-3} dx + \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) =$$

$$= 2e^x - 2\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + \frac{x^{3/2}}{3/2} =$$

$$= 2e^x - \cancel{2}\left(\frac{x^{-2}}{-\cancel{2}}\right) + \sqrt{x^3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = 2e^x + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} + C$$

EXEMPLOS

$$c)\ I = \int \left(\frac{-5}{x} - \frac{10}{x^{\frac{3}{2}}} + 5 \right) dx$$

EXEMPLOS

$$d)\ I = \int \left(2cosx + 19sec^2x - \frac{12}{1+x^2}\right)dx$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Suponha que façamos u igual a quantidade sob o sinal de raiz em, $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2xdx$.

Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em $u = 1 + x^2$; portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever:

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação.

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$.

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C\right]=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x=2x\sqrt{x^2+1}$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO - REGRA

4 **Regra da Substituição** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação.

Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de se recordar a Regra da Substituição é imaginar *dx* e *du* em como diferenciais. Assim, a Regra de Substituição diz que:

É permitido operar com *dx* e *du* após sinais de integração como se fossem diferenciais.

EXEMPLOS

$\int (3x^2 + e^x).\, sen(x^3 + e^x)\, dx$

Fazendo a mudança de variável:

$$u = f(x) = x^3 + e^x$$

$$du = f(x).\, dx = (3x^2 + e^x)dx$$

Na integral temos:

$$I = \int (3x^2 + e^x).\, sen(x^3 + e^x)\, dx = \int sen(u)\, du$$

$$I = \int sen(u)\, du = -cos(u) + C$$

Voltamos à variável original x.

$$I = -cos(u) + C = -cos(x^3 + e^x) + C$$

$$I = \int (3x^2 + e^x).\, sen(x^3 + e^x)\, dx = -cos(x^3 + e^x) + C$$

EXEMPLOS

$\int e^{senx}.\cos x \, dx$

Fazendo a mudança de variável:

$$u = f(x) = \text{senx}$$

$$du = f(x).dx = \text{cosx}\,dx$$

Substituindo na integral:

$$I = \int e^{senx}.\text{cosx}\,dx = \int e^{u}\,du$$

O que nos leva a uma integral imediata em termos da variável u:

$$I = \int e^{u}\,du = e^{u} + C$$

Voltando à variável original x.

$$I = e^{u} + C = e^{senx} + C$$

Portanto:

$$I = \int e^{senx}.\text{cosx}\,dx = e^{senx} + C$$