O espaço R^3

Vetores em R^3

Da mesma forma como fizemos com o espaço $R^2 = R \times R$, o espaço R^3 é o conjunto de ternos ordenados RxRxR ,

$$R \times R \times R = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\} \qquad R^3$$

munido das operações **adição** e **multiplicação por escalar.**

Adição: Considere dois ternos *(x , y, z)* e *(a , b, c)* , adição associa a esses ternos o terno

$$\boldsymbol{(x , y, z) + (a , b, c)= (x+a , y + b, z+c);}$$

Multiplicação por Escalar: Considere um número real λ *e o terno (x , y, z)* , a *multiplicação de (x , y , z) pelo escalar k* gera o terno

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad .$$

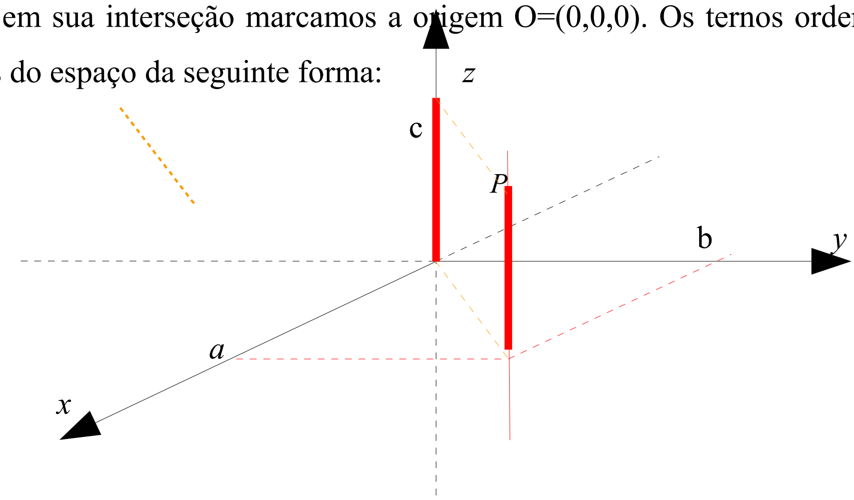
Dados ternos *(x , y, z)* e *(a , b, c) e* numeros reais λ e α montamos o que chamamos de uma combinação linear entre os ternos ou triplas ordenadas

$$\lambda(x, y, z) + \alpha(a, b, c) = (\lambda x + \alpha a, \lambda y + \alpha b, \lambda z + \alpha c)$$

Exemplo:

Uma vez que o R^3 é constituído por ternos ordenados $(x, y, z) \in RxRxR$ então precisamos de mais um eixo além do horizontal e do vertical. Assim teremos o eixo x, o eixo y e o eixo z, chamados de eixos coordenados.

Imaginemos no espaço tri-dimensional em que vivemos tres retas perpendiculares entre si que se interceptam e em sua interseção marcamos a origem O=(0,0,0). Os ternos ordenados serão associados aos pontos do espaço da seguinte forma:

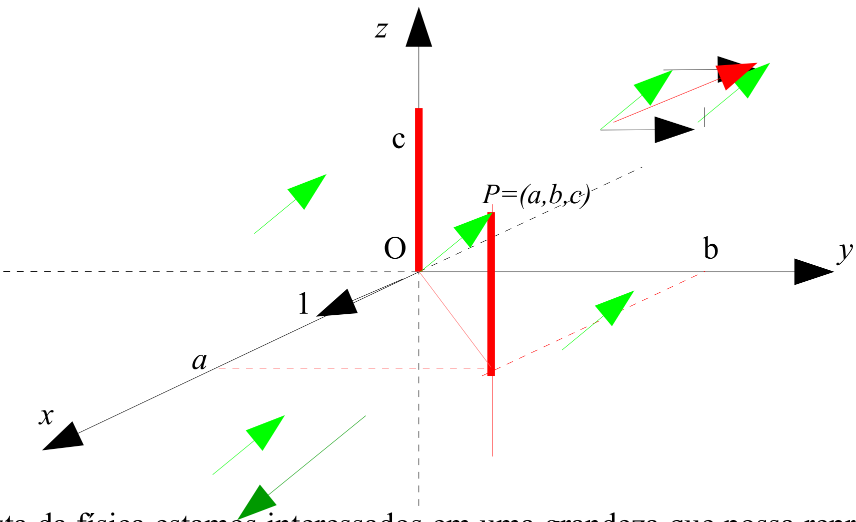


Dado um terno ordenado *(a,b,c)* marcamos inicialmente o par *(a,b)* no plano *xy,* isto é, plano gerado pelos eixos *x* e *y.* Neste ponto traçamos uma reta paralela ao eixo *z* e marcamos uma “altura” c.

Se fizermos o caminho contrário podemos partir de um ponto qualquer P do espaço e encontrar no referencial de eixos x, y e z as coordenadas (a,b,c) de P.

Outra forma de representar o R^3 :

Em vez de olharmos o par *(a,b,c)* como o ponto P podemos considerá-lo como um segmento orientado $\vec{OP}$ ou flecha, que tem sua extremidade inicial na origem O e extremidade final no ponto P:



Do ponto de vista da física estamos interessados em uma grandeza que possa representar no espaço tridimensional algo que tem direção, sentido e intensidade (ou comprimento). Daí chamaremos de vetor a todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, sentido e comprimento. Assim o terno *(a,b,c)* passa a ser identificado com o segmento orientado $\vec{OP}$, ou com qualquer outro que tenha a mesma direção, sentido e comprimento, e será chamado simplesmente de vetor $\vec{v}$.

O vetor nulo (0,0,0) é representado pela origem ***O*** e não tem significado físico.

Exemplo: Esboce o ponto *P=(1,-1,1)* e um vetor representado pelo segmento $\vec{OP}$

Pelas mesmas razões dadas no R^2 , diremos que o comprimento do vetor $\vec{v}=(a,b,c)$ é a distância entre P e a origem O que é dada por

$$d(O,P)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\|\vec{v}\| ,$$

também chamada de norma de $\vec{v}=(a,b,c)$ e representada por $\|\vec{v}\|$. Um vetor $\vec{v}$ do R^3 é dito unitário se $\|\vec{v}\|=1$.

Exemplos: Os vetores $\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0)\ e\ \vec{k}=(0,0,1)$ são vetores unitários na direção dos eixos coordenados x,y e z.

OBS:

1) Dado um vetor $\vec{u}=(u_{1,}u_{2,}u_3)$ então $\|\vec{u}\|=0$ apenas se o vetor for o nulo.
2) Se um vetor $\vec{u}$ não é o vetor nulo então podemos gerar dois vetores unitários com a mesma direção dele, a saber, $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

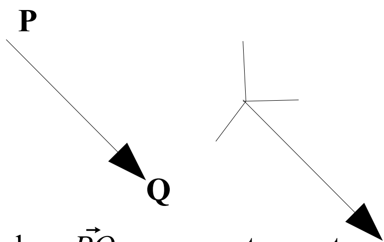
Exemplos

1) Calcule a distância de *P=(1,-1,1)* à origem e informe a norma de $\vec{OP}$. Encontre dois vetores unitários na direção de $\vec{OP}$,
2) O lugar geométrico em R^3 dos pontos que estão a uma distância *r* da origem é chamado de esfera de centro (0,0,0) e raio *r.* Esboce uma esfera de centro em (0,0,0) e raio 1.

OBS: Do ponto de vista algébrico dois vetores serão iguais se possuem as mesmas coordenadas.

Exemplo: Resolva e equação vetorial *(x+y, x-y, z-1) = (4,2,3)*

As interpretações geométricas da adição e multiplicação por escalar são as mesmas quando traduzidas para vetores, ou seja, vale a regra do paralelogramo e vetores que são múltiplos escalares do mesmo vetor serão chamados de vetores paralelos.



Distâncias em R^3

Dados dois pontos *P=(a,b,c)* e *Q=(x,y,z)* o segmento orientado $\vec{PQ}$ representa o vetor que tem início na origem e extremidade final no ponto de coordenadas Q-P= *(x-a, y-b, z-c).*

Exercício: Esboce P=(1,-1,1), Q=(1,1,1), $\vec{PQ}$ *e um representante deste vetor com extremidade inicial na origem.*

A distância entre dois pontos *P* e *Q* é o comprimento do vetor $\vec{PQ}$, isto é, para *P=(a,b,c)* e *Q=(x,y,z)* temos

$$d(P,Q)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\|\vec{PQ}\| \quad .$$

Exemplo: A esfera de centro *P=(a,b,c)* e raio *r é o lugar geométrico* em R^3 dos pontos que estão a uma distância *r* de *P.* Esboce na mesma figura do exemplo anterior a esfera de centro *P=(1,-1,1)* e raio *r=2.*

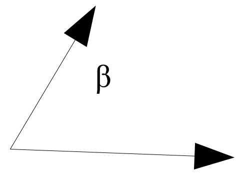
Produto Interno

Também de forma semelhante ao que foi feito em R^2 definimos o produto interno entre vetores $\vec{u}=(u_{1,}u_{2,}u_3)$ e $\vec{v}=(v_{1,}v_{2,}v_3)$ do R^3 que representamos por $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ ou $\vec{u}.\vec{v}$:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=u_1.v_1+u_2.v_2+u_3.v_3 \quad .$$

Pensando que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem ser representados em um mesmo plano do R^3 então teremos o ângulo β entre eles cumprindo a identidade

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.\cos(\beta) \quad ,$$



e nesta fórmula também trabalhamos com $0\leq\beta\leq\pi$.

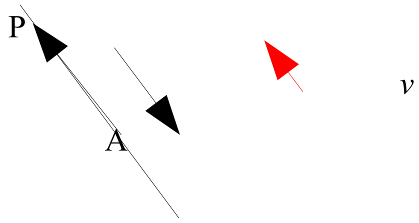
Assim

3) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão perpendiculares se $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$,
4) Dado um vetor $\vec{u}=(u_{1,}u_{2,}u_3)$ então vale

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$$

Retas no R^3

Também pelas mesmas razões consideradas no plano, quando estamos no espaço tridimensional, um ponto $A=(a_{1,}a_{2,}a_3)$ e uma vetor $\vec{v}=(v_{1,}v_{2,}v_3)$ determinam uma reta que é paralela a $\vec{v}$ e passa por A . Assim se um ponto qualquer *P= (x,y,z)* também pertencer a reta então deve valer



$$\vec{AP}=t\vec{v}$$

$$P\text{-}A=t.v$$

$$P=A+tv$$

donde obtemos as equações paramétricas da reta, que agora serão 3, a saber:

$$x=a_1+t.v_1$$
$$y=a_2+t.v_2$$
$$z=a_3+t.v_3$$

Exercícios:

1) *Esboce a reta que passa pela origem e tem a direção do vetor (1,2,3). Encontre as suas equações paramétricas.*
2) *De as equações da reta paralela ao vetor v=(1,0,-1) e que contem o ponto A=(3,2,1).*

$$x=3+t$$
$$y=2$$
$$z=1-t$$

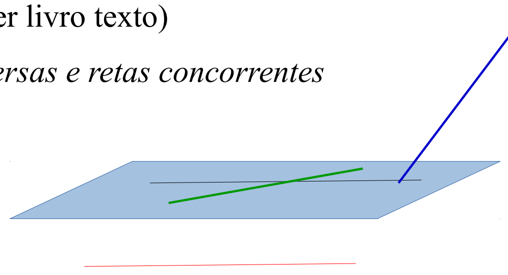
Ex: t=2 => P=(5,2,-1) e AP=P-A=(2,0,-2)=2(1,0,-1)=2v

3) *Duas retas são ditas paralelas se não tem ponto em comum e têm a mesma direção.*

Portanto, a reta que tem a direção (1,0,-1) e contem o ponto B=(2,-1,4) é paralela à do exemplo anterior. Encontre as equações paramétricas dessa reta e verifique que elas não têm ponto em comum.

Classificação de retas: (ver livro texto)

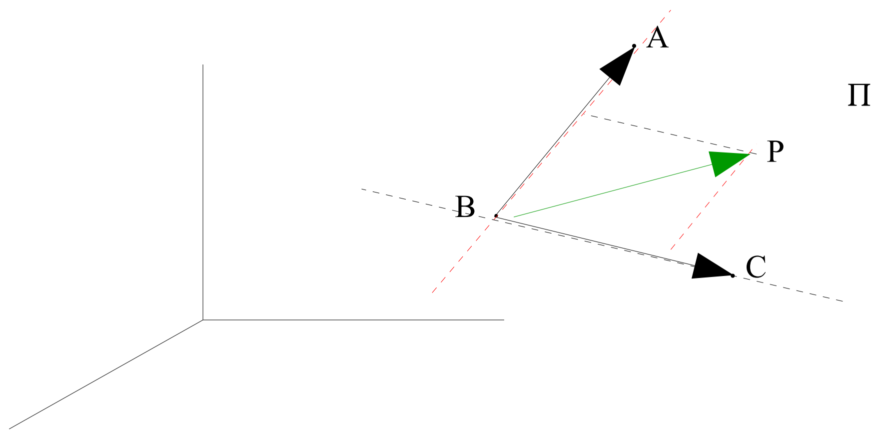
retas paralelas, retas reversas e retas concorrentes



Planos em R^3

Equações Paramétricas de um Plano Π

Por três pontos não colineares $A, B\, e\, C$ passa um único plano Π. Consideremos nesse plano as retas que passam por BA e por BC, que não são paralelas.



Vamos considerar um outro ponto qualquer do plano Π, que representamos por $P=(x, y, z)$. No plano Π traçamos por P reta paralela a BA e BC e assim criamos um paralelogramo. Portanto, existem números reais *t* e λ tais que a diagonal $\vec{BP}$ do paralelogramo será

$$\vec{BP}=t.\vec{BA}+\lambda\vec{BC}\ .$$

$$P\text{-}B= t(A\text{-}B)+\lambda(C\text{-}B)$$

$$P=B+t.\vec{BA}+\lambda\vec{BC}$$

O que esta expressão algebricamente informa é que qualquer vetor do R^3, que possua um representante no plano Π, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$\vec{BA}$ e $\vec{BC}$, que não são paralelos. Ou ainda, diremos que os vetores $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$ geram Π . E assim obtemos as chamadas equações paramétricas do plano Π :

Exemplo: Encontre as equações paramétricas do plano que contem os pontos A=(1,1,1) , B=(2,1,2) e C=(-1,0,1). Antes verifique que os vetores BA e BC não são paralelos, isto é, não são múltiplos , o que garante tanto que formam ângulo entre si quanto que os pontos dados são não colineares:

BA=A-B=(-1,0,-1) t.BA=(-t,0,-t)

BC=C-B=(-3,-1,-1)

BC// BA? Não, porque não são múltiplos um do outro,

P=(x,y,z) ponto do plano gerado pelos vetores BC e BA tem que satisfazer

BP=t(BA)+λ(BC)

P=B+t(A-B)+λ(C-B)

x=2+t(-1)+λ(-3)

y=1+t(0)+λ(-1)

z=2+t(-1)+λ(-1)

λ e t assumirão qualquer valor real e são chamados de parâmetros.

Acabamos de obter as equações paramétricas do plano que contem os pontos não colineares A, B e C.

OBS: A equação anterior também pode ser interpretada de outra forma: quando são conhecidos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não paralelos, e um ponto B plano Π podemos obter qualquer ponto P do Π fazendo

$$\vec{BP}=t.\vec{u}+\lambda\vec{v} \quad ,$$

ou seja,

$$P=B+t.\vec{u}+\lambda\vec{v} \quad ,$$

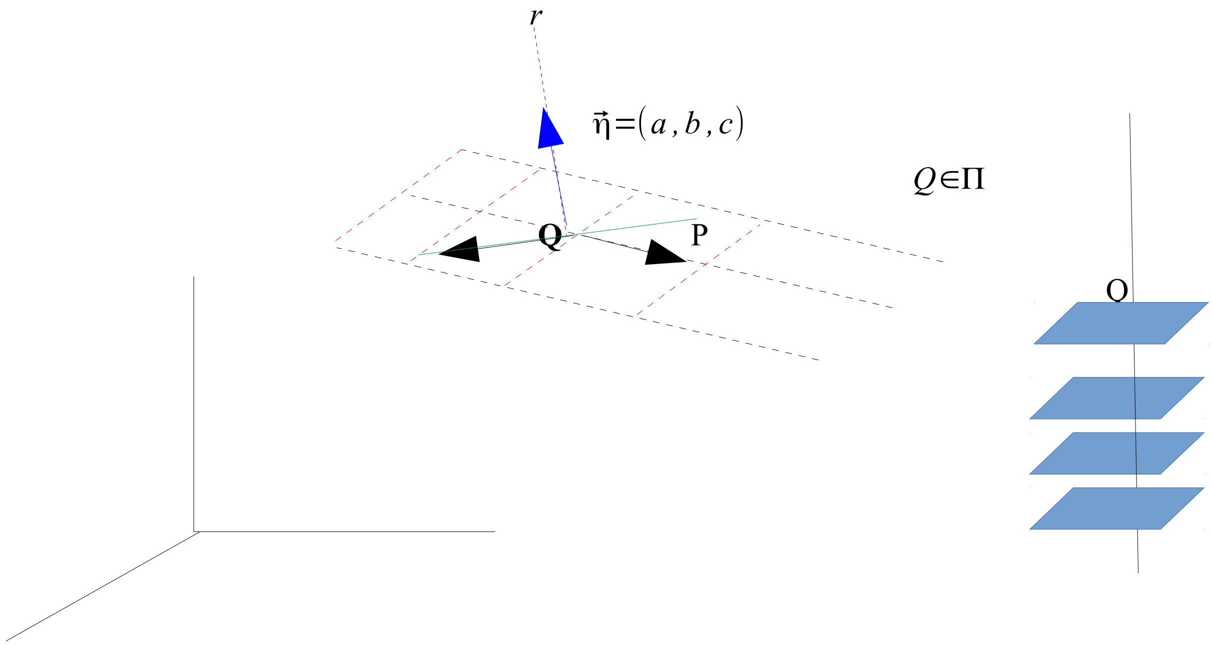
sendo *t* e λ números reais quaisquer. Também diremos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram Π .

Exemplos:

1) Encontre as equações paramétricas do plano que contem os pontos *A=(1,1,1) , B=(3,2,1) e C=(1,-1,0).*
2) Encontre as equações paramétricas do plano que contem a origem O=(0,0,0) e os vetores *(1,1,1) e (3,-2,1).*

Equação Cartesiana do Plano

Apresentamos agora outra forma de visualizar os pontos de um plano Π . Dados, em R^3 , o plano Π e uma reta r perpendicular a Π , interceptando-o em um ponto $Q=(x_0, y_0, z_0)$.



Portanto, se considerarmos um vetor $\vec{\eta}=(a, b, c)$ com a mesma direção de r e $P=(x, y, z)$ um ponto qualquer de Π teremos, para $Q=(x_{0,} y_{0,} z_0)$:

$$\langle \vec{QP}, \vec{\eta} \rangle = 0 \quad .$$

Se realizarmos as contas obtemos, lembrando que o vetor QP=P-Q

$$(x-x_0).a+(y-y_0).b+(z-z_0).c=0 \quad ,$$

e ajeitando

$$(x-x_0).a+(y-y_0).b+(z-z_0).c=0$$

$$ax+by+cz-a.x_0-b.y_0-c.z_0=0 \quad .$$

Assim essa equação que identifica todos os pontos do plano Π é chamada de equação cartesiana de Π e é do tipo

$$ax+by+cz=d \quad ,$$

sendo o número $d=ax_0+by_0+cz_0$ e o vetor de coordenadas *(a,b,c)* é um vetor chamado de vetor normal ou ortogonal ao plano Π . Observe que o valor de d é obtido substituindo no lado direito da equação as coordenadas de um ponto do plano.

Exemplos:

1) Encontre a equação do plano tendo reta perpendicular r paralela à direção η=$(1,-2,1)=(a,b,c)$ e que contem o ponto Q=$(2,-3,1)$:

   Sabemos que a equação cartesiana deste plano é do tipo: a=1, b=-2 e c=1 => $1.x+(-2).y+1.z=d$ (até aqui temos planos paralelos) falta usar a informação do ponto $Q=(x_0 , y_0 ,z_0)=(2,-3,1)$ que está no plano pedido. Para encontrar d basta substituir Q na equação

$$1.x+(-2).y+1.z=d$$

$$1.(2)+(-2).(-3)+1.1=d \Rightarrow d=9$$

E a equação do plano será: $x-2y+z=9$

2) Leiam o exemplo 1.43 do livro e comentem.

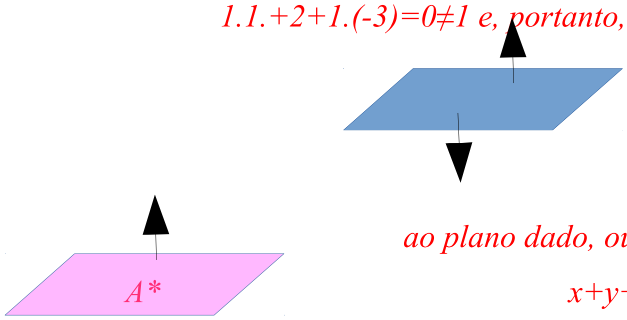
3) Planos que passam pela origem: $ax+by+cz=d$ *e como* $Q=(0,0,0)$ *está no plano o valor de d sempre será 0.*

4) Planos paralelos: dois planos paralelos têm uma mesma direção ortogonal a eles. Portanto, terão equações do tipo $ax+by+cz=d_1$ e $ax+by+cz=d_2$

5) Considere o plano $1.x+1.y+1.z=1$. Verifique que o ponto A=(1,2,-3) não está neste plano e construa a equação de um plano que é paralelo ao anterior e contem *A.*

   Para verificar que um ponto não está no plano basta verificar que suas coordenadas não satisfazem a equação deste plano:

$$1.1.+2+1.(-3)=0\neq 1 \text{ e, portanto, A não está no plano dado}$$

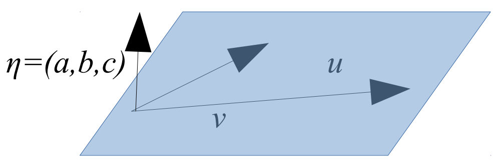


A equação do plano pedido tem o mesmo vetor normal ou ortogonal ao plano dado, ou seja, η=(1,1,1) pois são paralelos:

$$x+y+z=d_2$$

Substituindo A=(1,2,-3): 1+2+(-3)=d=0 e o plano pedido tem equação cartesiana x+y+z=0.

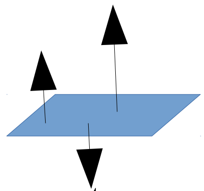
Como achar um vetor $\vec{\eta}$ normal Π ?



Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não sã paralelos e geram Π então um vetor do R^3 que seja ortogonal aos dois será um vetor normal ao plano. De fato, qualquer reta do plano tem a direção de um vetor que está no plano e que é do tipo $\vec{BP}=t.\vec{u}+\lambda\vec{v}$. Daí se um vetor $\vec{\eta}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ teremos $\langle\vec{u},\vec{\eta}\rangle=0$ e $\langle\vec{v},\vec{\eta}\rangle=0$ e, portanto, para qualquer outro vetor no plano Π vale

$$\langle\vec{BP},\vec{\eta}\rangle=\langle t.\vec{u}+\lambda\vec{v},\vec{\eta}\rangle=t.\langle\vec{u},\vec{\eta}\rangle+\lambda\langle\vec{v},\vec{\eta}\rangle=0$$

Com essa ideia em mente busca-se um vetor $\vec{\eta}=(a,b,c)$ tal que para $\vec{u}=(u_{1,}u_{2,}u_3)$ e $\vec{v}=(v_{1,}v_{2,}v_3)$ valem simultaneamente as equações



$$\begin{aligned} a.u_1+b.u_2+c.u_3=0 \\ a.v_1+b.v_2+c.v_3=0 \end{aligned} \;.$$

É possível verificar que uma possibilidade é que $\vec{\eta}$ seja o vetor que representamos por $\vec{u}\times\vec{v}$ dado por

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(u_2.v_3-u_{3.}v_2 \quad , \quad u_3.v_1-u_{1.}v_3 \quad , \quad u_1.v_2-u_{2.}v_1\right) \;,$$

chamado de **produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$** .

Assim definimos uma nova operação entre vetores motivados por uma necessidade geométrica.

Para gravarmos as coordenadas do vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ mais facilmente precisamos lembrar da noção de determinante de uma matriz.

Considere uma matriz com duas linha e duas colunas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

então a essa matriz relacionamos um número real chamado de determinante e que é dado por

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12} \quad \text{ou} \quad det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a.d-b.c$$

Exemplo: $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=1\,\text{x}\,4-2\,x\,3=-2$

Se a matriz 3x3, isto é, possuir 3 linha e 3 colunas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

então seu determinante é calculado da seguinte forma:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}.det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12.}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13.}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Agora podemos observar que se escrevermos uma matriz com sua primeira linha tendo seus elementos sendo as coordenadas de $u = (u_1, u_2, u_3)$ *e a segunda sendo* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *então podemos gravar a definição do produto vetorial* $u \times v$ *usando um certo olhar para a matriz*

$$\begin{pmatrix} u_1 & \boxed{u_2} & u_3 \\ v_1 & \boxed{v_2} & v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 . v_3 - u_3 . v_2 \ , \ u_3 . v_1 - u_1 . v_3 \ , \ u_1 . v_2 - u_2 . v_1) = \left(det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, - det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right)$$

.

Ou ainda, se considerarmos os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ *e* $\vec{k} = (0,0,1)$, os vetores unitários na direção dos eixos coordenados x,y e z, a fórmula do produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ pode ser lembrada usando o artifício de um determinante de uma matriz 3x3:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \ .$$

Exemplos:

1) Encontre um vetor $\vec{\eta}$ ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$ e escreva a equação de qualquer plano ortogonal a $\vec{\eta}$

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = (-1, -1, 2) \qquad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS: Verifique que $< v, u \text{ x } v > = 0$ e $< u, u \text{ x } v > = 0$

2) Verifique que se $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ *e* $\vec{k} = (0,0,1)$ então valem:

$$(2.1) \ \ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad (2.2) \ \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (2.3) \ \ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \ .$$

3)

4) Verifique que os resultados do item (2) satisfazem a regra da mão direita explicada a seguir:

Uma forma de determinar o sentido do vetor resultante do produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ é a *regra da mão direita*. Com a mão direita, aponte o indicador na direção do primeiro operando $\vec{u}$ e o dedo médio na direção do segundo operando $\vec{v}$. Desta forma, o sentido do vetor resultante é dado pelo sentido do polegar.

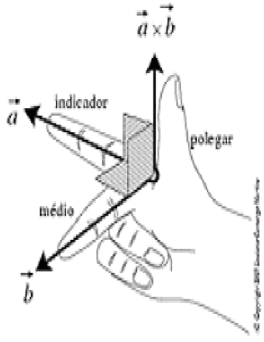


Figura: Fonte http://www.mundofisico.joinville.udesc.br/index.php?idSecao=102&idSubSecao=&idTexto=81

Propriedades do Produto Vetorial:

(Demonstradas com mais rigor no Apêndice do Capítulo 1 do livro texto)

P1) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos então $\vec{u}\times\vec{v}=(0,0,0)$;

P2) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos então $\vec{u}\times\vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

P3) Não vale a comutatividade, de fato, o que vale é $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$;

P4) Em geral não vale a associatividade: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}\,x\,\vec{v})\times\vec{w}$;

P5) Sendo k um número real então vale $(k\,\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times(k\,\vec{v})$;

P6) Vale a distributividade

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w}) \quad \text{e} \quad (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w}) \;;$$

P7) O sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$ segue a regra da mão direita;

P8) Vale $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|sen(\beta)$, sendo β o ângulo entre os vetores tal que $0\leq\beta\leq\pi$;

Demonstração de P8:

Da definição do produto vetorial

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2.v_3-u_3.v_2\ ,\ u_3.v_1-u_1.v_3\ ,\ u_1.v_2-u_2.v_1)=\left(det\begin{pmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{pmatrix},-det\begin{pmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{pmatrix},det\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{pmatrix}\right)$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2=\left[det\begin{pmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{pmatrix}\right]^2+\left[det\begin{pmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{pmatrix}\right]^2+\left[det\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{pmatrix}\right]^2$$

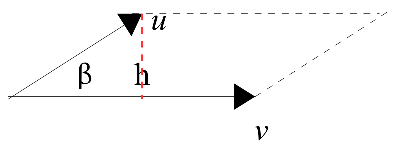
e fazendo todas essas contas verifica-se que este número satisfaz a identidade.

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2-\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2=\|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2.\cos^2(\beta)\ .$$

Como sabemos que $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\beta)$ *, substituindo este valor na identidade anterior o resultado segue:*

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\,sen(\beta)$$

Aplicação de P8: ***Área do Paralelogramo de lados*** $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$



sen(β)=h/||u|| <=> h=||u|| sen(β)

área = base x *h =* $\|\vec{v}\|.h=\|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.sen(\beta)=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

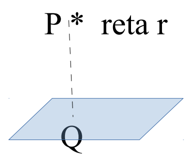
Exercício:

i) Mostre que os pontos A=(1,2,2) , B=(2,3,0), C=(2,1,2) e D=(3,2,0) estão no mesmo plano,

ii) Encontre a área do paralelogramo formado por $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$,

Exercício: Leia sobre o Produto Misto no livro texto (páginas 63, 64 e 65).

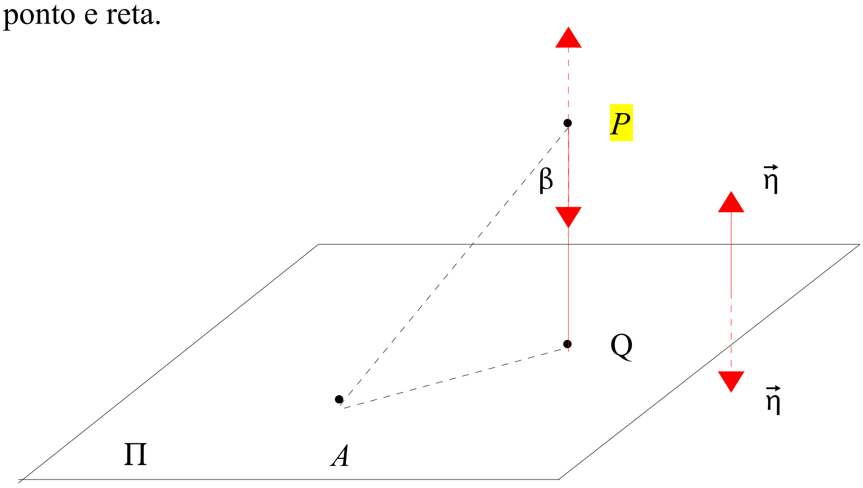
Distâncias e Ângulos no $\mathbb{R}^3$ (continuação)



Distância entre Ponto e Plano

Considere *P* um ponto e Π um plano . Se $P\in\Pi$ então diremos que a distância entre *P* e Π é zero e denotamos: $d(P,\Pi)=0$. Se $P\notin\Pi$ então para calcular $d(P,\Pi)$ traçamos uma reta *r* perpendicular o plano passando por *P*. Seja *Q* o ponto interseção de *r* com Π . Diremos que $d(P,\Pi)=d(P,Q)$.

O racicínio para obtenção de uma fórmula é semelhante ao realizado no R^2 para a distância entre ponto e reta.



Procedimento para justificar o cálculo desta distância sem calcular o ponto Q:

- Trace um outro ponto A qualquer em Π e construa o triângulo AQP,
- Observe que o ângulo β entre $\vec{PA}$ e $\vec{PQ}$ satisfaz
$$d(P,\Pi)=d(P,Q)=\|PA\|\cos(\beta) \;;$$
- Mas, considerando $\vec{\eta}$ uma direção normal ao plano Π , como $\vec{PQ}$ e $\vec{\eta}$ têm a mesma direção, então
$$\cos(\beta)=\frac{|\langle\vec{PA},\vec{\eta}\rangle|}{\|\vec{PA}\|.\|\vec{\eta}\|} \;,$$
- Portanto, substituindo este valor na fórmula de $d(P,\Pi)$ obtem-se a fórmula procurada

$$d(P,\Pi)=\frac{|\langle\vec{PA},\vec{\eta}\rangle|}{\|\vec{\eta}\|} \;.$$

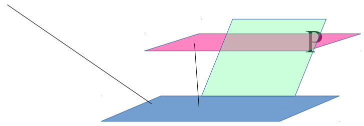
Ajeitando a fórmula, para $P=(x_{0,}y_{0,}z_0)$, o plano dado pela equação *ax+by+cz=d* e *A=(x,y,z)* um ponto qualquer do plano, temos $\vec{\eta}=(a,b,c)$ e daí
$$d(P,\Pi)=\frac{|\langle(x-x_0,y-y_0,z-z_0),(a,b,c)\rangle|}{\|(a,b,c)\|}=\frac{|d-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\|(a,b,c)\|}$$

ATENÇÃO: Caso a equação seja apresentada na forma $ax+by+cz+\hat{d}=0$ então teríamos a fórmula equivalente
$$d(P,\Pi)=\frac{|\langle(x-x_0,y-y_0,z-z_0),(a,b,c)\rangle|}{\|(a,b,c)\|}=\frac{|-\hat{d}-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\|(a,b,c)\|}$$

Exemplo: Encontre a distância entre a origem P=(0,0,0) e o plano *x+y+z-3=0 e lembre que para aplicar a fórmula aqui consideramos d=-3 e η=(1,1,1)*

P=(0,0,0) e

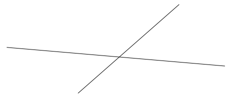
$$d(P,\Pi)=\frac{|-(-3)-(1.0+1.0+1.0)|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$



Distância e ângulo entre dois Planos

Dois planos em R^3 ou se interceptam ou são paralelos.

Se os planos Π e Σ se interceptam então eles se interceptam em uma reta e a distância entre eles é nula. **O ângulo entre dois planos que se interceptam é o ângulo entre vetores normais a eles.**



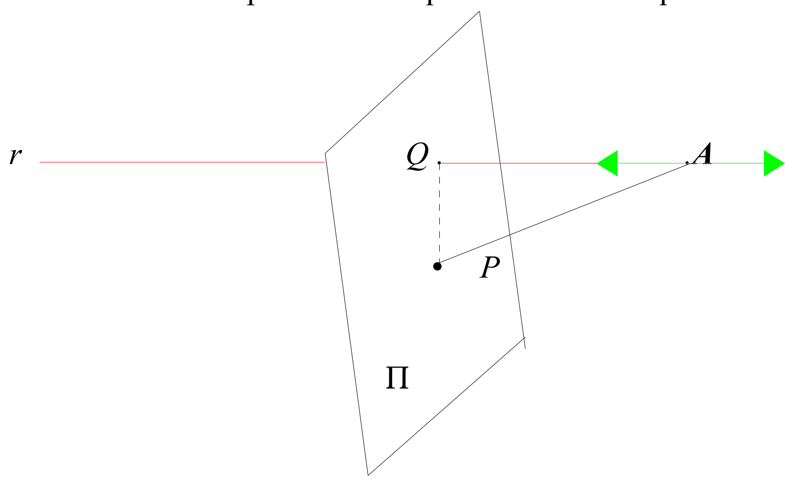
Exercício: Encontre o ângulo entre os planos x+y+z=1 e x-y=7.

Se os planos Π e Σ são paralelos então a distância entre eles é medida tomando um ponto *P* qualquer de Σ e medindo a distância $d(P,\Pi)$.

Exemplo: Considere os planos *x+2y+3x=7* e *2x+4y+6z=9* encontre a distância entre eles.

Distância entre Ponto e Reta

Dado uma reta *r* e um ponto *P* do R^3 . Se $P\in r$ então diremos que $d(P,r)=0$, caso contrário construímos um plano Π que contem P e que *r* é uma direção ortogonal à Π .



Seja Q o ponto em que a reta r intercepta o plano Definimos d(P,r)=d(P,Q).

Como calcular *d(P,Q):*

- *Considere A um ponto qualquer de r e construa o triângulo retângulo AQP*
- *Considere* β *o ângulo entre* $\vec{AQ}$ *e* $\vec{AP}$ *daí podemos escrever que*

$sen(\beta)=\frac{\|\vec{PQ}\|}{\|\vec{AP}\|}$ *,ou ainda , d(P,r)=d(P,Q)=* $\|\vec{PQ}\|=sen(\beta).\|\vec{AP}\|$.

- *Sendo* $\vec{\eta}$ *um vetor com a mesma direção da reta r normal ao plano* Π *então temos*

$$sen(\beta)=\frac{\|\eta\times\vec{AP}\|}{\|\eta\|.\|\vec{AP}\|} \quad ,$$

- *E, portanto,* $d(P,r)=\|\vec{PQ}\|=sen(\beta).\|\vec{AP}\|=\frac{\|\eta\times\vec{AP}\|}{\|\eta\|}$,

  lembrando que P é o ponto que queremos medir a distância a reta r, o vetor $\vec{n}$ *tem a direção de r* e *A* é um ponto qualquer de *r.*

Exemplo:P=(0,2,-1) e a reta *r* de equações

$$\begin{Bmatrix} x=s-1 \\ y=s+2 \\ z=s+1 \end{Bmatrix}, s\in R.$$

$d(P,r)=\sqrt{\frac{14}{3}}$. Faça pela fórmula ou utilizando a *d(P,Q)*

Distância e Ângulo entre duas retas:

Duas retas no espaço R^3 ou se interceptam ou não. Quando se interceptam o ângulo entre elas é o menor ângulo entre as suas direções.

Sejam *r* e *s* duas retas em R^3 que se interceptam então diremos que *d(r,s)=0*. Caso contrário, elas não se interceptam e existem duas possibilidades:

- *r* e *s* tem a mesma direção, isto é, são paralelas;
- *r* e *s* **não tem a mesma direção** mas estão em planos paralelos . Neste caso as retas são chamadas de reversas.

No primeiro caso diremos que *d(r,s)=d(P,s),* sendo *P* um ponto qualquer de *r.*

No segundo caso, isto é, duas retas reversas então se $r\in\Pi$ e $s\in\Sigma$, sendo Π e Σ planos paralelos então diremos que $d(r,s)=d(\Pi,\Sigma)$. Neste caso, observe que para encontrar tais planos consideramos um vetor $\vec{u}$ com a direção de *r* e um vetor $\vec{v}$ com a direção de *s,* estes vetores tem representantes nos dois planos e geram os planos pois não são da mesma direção! Ou ainda, o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$.

Exemplos: Considere as retas

$$r_1=\begin{Bmatrix} x=s-1 \\ y=s+2 \\ z=s+1 \end{Bmatrix}, \quad r_2=\begin{Bmatrix} x=t-2 \\ y=-t+5 \\ z=t \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad r_3=\begin{Bmatrix} x=\lambda-1 \\ y=-\lambda+2 \\ z=\lambda+3 \end{Bmatrix} \quad .$$

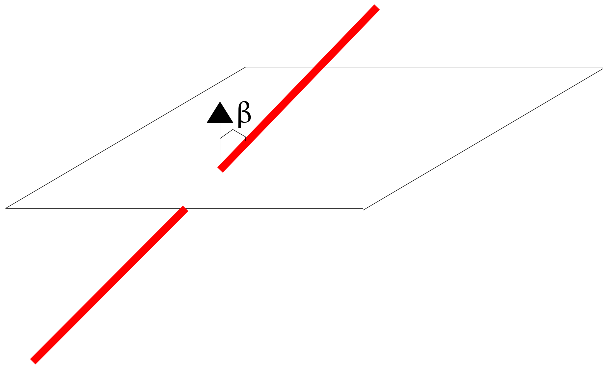
Verifique:

- *as retas r_1 e r_2 não são paralelas. Elas são concorrentes, isto é, se interceptam ou são reversas? Sol: São concorrentes, por que?*
- *as retas r_1 e r_3 também não são paralelas. Elas são concorrentes, isto é, se interceptam ou são reversas? Sol.: São reversas, por que?*

- *as retas r_2 e r_3 são paralelas , por que?*
- *Qual a distância entre as retas?*

Ângulo e Distância entre Reta e Plano

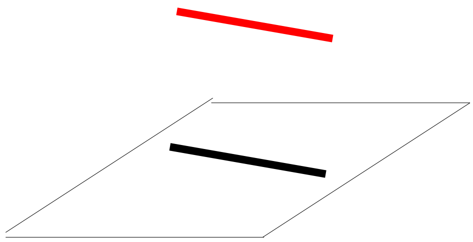
Suponha que a reta *r* e o plano Π tenham um único ponto em comum .



O ângulo θ entre a reta *r* e Π é o complementar do ângulo β formado entre o vetor $\vec{\eta}$, normal ao plano, e a direção de *r:* $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$.

Exemplo: x+y+z=7 e $r=\left\{\begin{array}{c} x=s-2 \\ y=-s+3 \\ z=\sqrt{6}s-4 \end{array}\right\}, s\in R.$.

As outras possibilidades entre retas e planos são $r\in\Pi$ ou a reta *r* é paralela a Π :



Quando a reta tem algum ponto em comum com o plano diremos que $d(r,\Pi)=0$, caso contrário a reta é paralela ao plano e distância entre eles será a distância entre qualquer $P\in r$ e o plano Π .

Os Espaços R^n (Parga)

E generalizando teremos o espaço R^n que é o conjunto das n-uplas ordenadas

$$\underbrace{RxRxR\cdots xR}_{n\ vezes}=\{(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n) | x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

munido das operações **adição** e **multiplicação por escalar** definidas de forma análoga. Uma combinação linear entre vetores de R^n será somas de produtos de vetores por escalares.

O produto interno é também definido de forma análoga, bem como a norma.

Se $n>3$ então há representação geométrica para R^n .

Provaremos mais tarde a conhecida desigualdade de Schwartz, isto é, para $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n)$ e $Y=(y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots, y_n)$ vale

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\|.\|Y\| \quad .$$

Assim podemos afirmar que

$$\frac{|\langle X, Y\rangle|}{\|X\|.\|Y\|}=\left|\frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|.\|Y\|}\right| \leq 1 \quad ,$$

ou ainda,

$$-1 \leq \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|.\|Y\|} \leq 1 \quad .$$

Definimos o cosseno do ângulo entre os vetores X e Y de

$$\cos(\beta)=\frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|.\|Y\|} \quad .$$

Daí mesmo em R^n , com $n>3$, em que não existe a geometria Euclidiana, podemos definir vetores ortogonais!