ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1- SEMANA 6 - DERIVADAS

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

DERIVADAS EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

P1) A derivada da exponencial de base e: $f(x)=e^x$ é $f'(x)=\dfrac{df}{dx}=e^x$.

P2) A derivada do logaritmo natural (base e): $f(x)=\ln x$ *é* $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Provas: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(\dfrac{x+h}{h}\right)^{1/h}=\ln e^{1/x}=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=$$

$=e^x\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0}(1+\frac{1}{t})^{1/t}}=e^x$ onde $t=e^h-1$.

P3) Exponencial de base a: $\dfrac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$

P4) Logaritmo de base a : $\dfrac{d}{dx}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}$

EXERCÍCIOS - Derivar as funções abaixo:

1) $y=f(x)=\ln 2$

Resolução: Como $\ln 2$ é uma constante a derivada é zero.

2) $y=\ln(2x)$

Resolução:

3) $y=\log 2^{x-3}$

Resolução:

$$y=\log 2^{x-3}=(x-3)\log 2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\log 2$$

4) $y = \ln(x^3 e^{2x^3})$

Resolução:

$$y = \ln x^3 + \ln e^{2x^3} = 3\ln x + 2x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + 6x^2$$

5) $y = \log(\frac{x^5}{10^{2-3x}})$

Resolução:

$$y = 3\log x - (2-3x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x\ln 10} + 3$$

6) $y = e^{2x-1}$

Resolução:

$y = e^{2x-1} = e^{-1}e^{2x} = e^{-1}e^x e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-1}(e^x e^x + e^x e^x) = 2e^{2x-1}$ (derivada de produto)

7) $y = x^2 e^x$

Resolução:

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$$

8) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

Resolução:

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ (derivada de quociente)

9) Dada $f(x) = e^{-x}$, calcular $f(\ln 2) - 3f'(\ln 2)$

Resolução: $y = f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$

$$f(\ln 2) - 3f'(\ln 2) = e^{-\ln 2} + 3e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

10)Mostre que a função $y = xe^{-x}$ é uma solução da equação diferencial $xy' = (1-x)y$.

Resolução:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Substituindo y’ na equação dada vem $xy' = xe^{-x}(1-x) = (1-x)y$