Espaços Vetoriais Reais

(VERSÃO RESUMIDA – 2022 – ÁLGEBRA LINEAR)

A subárea da Matemática chamada de Álgebra Linear trabalha com conjuntos em que estão definidas a **adição** (ou soma) entre seus elementos e a **multiplicação por escalar.** Os escalares, neste momento, serão números reais.

Assim nosso ponto de partida é um conjunto $V \neq \phi$ em que estão definidas

- **Adição:** $\begin{array}{l} + : V \times V \to V \\ (u, v) \to u + v \end{array}$

  (lê-se: ao par ordenado de elementos (*u,v*) é associado um elemento de *V* denotado por *u+v*)

- **Multiplicação por Escalar:** $\begin{array}{l} . : \mathbb{R} \times V \to V \\ (k, v) \to k . v \end{array}$

  (lê-se: ao par ordenado *(k,v)* **em que** $k \in \mathbb{R}$ **e** $v \in V$ **é associado um elemento de *V* denotado por $k . v$)**

Exemplos: Nosso foco está nos espaços $V=R^n$: $R^2, R^3, \ldots, R^n$

Com a adição e a multiplicação por escalar podemos definir **combinações lineares entre elementos de um tal conjunto *V* , isto é, dados** $u \in V$ **,** $v \in V$ **e** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ então temos a combinação linear

$$c_1 u + c_2 v$$

que também está em $\boldsymbol{V=R^n}$.

DEFINIÇÃO: Espaço Vetorial (V, +, .)

Pois bem, um conjunto $V \neq \phi$ em que as operações **adição** (ou soma) e **multiplicação por escalar** satisfazem as **8 propriedades** (axiomas de um espaço vetorial), dadas a seguir, será chamado de **espaço vetorial.**

Propriedades: Para u, v e $w \in V$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

1. Comutatividade na soma: u+v = v+u
2. Associatividade na soma: (u+v)+w = u+(v+w)
3. Existência de elemento neutro da soma: Existe um elemento em ***V*** , que será representado

por **0** e que satisfaz $u + \mathbf{0} = u$, para qualquer u de V;

4. Existência de elemento simétrico: Para cada $u \in V$ existe um elemento de *V*, que denotamos por ***-u*** , que satisfaz u + ***(-u)*** = **0 (elemento neutro);**
5. Distributividade (1): $c_1.(u+v)=c_1.u+c_1.v$;
6. Distributividade (2): $(c_1+c_2)u=c_1.u+c_2.u$;
7. Associatividade na multiplicação: $(c_1.c_2)u=c_1(c_2.u)$
8. Elemento neutro da multiplicação por escalar: $1.u=u$;

Os elementos de um espaço vetorial *(V,+, .)* serão chamados de vetores.

Exemplos:

1) Verifique que o R^n é um espaço vetorial:

Consideremos $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ e $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ elementos do R^n. Então valem:

P1) COMUTATIVIDADE DA ADIÇÃO

Pelo o que já conhecemos da adição em R^n temos

$$u+v=(u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$$

$$v+u=(v_1,v_2,\ldots,v_n)+(u_1,u_2,\ldots,u_n)=(v_1+u_1,v_2+u_2,\ldots,v_n+u_n) \quad ,$$

como, em cada coordenada, u_i e v_i são números reais e soma de números reais é comutativa então

$$u_i + v_i = v_i + u_i$$

e, portanto, $u+v=v+u$.

P2) ASSOCIATIVIDADE DA ADIÇÃO: Façam!

P3) EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO

O vetor ***O*****=*(0,0,0,…,*0)** (vetor nulo do R^n) satisfaz $u+O = u$

P4) EXISTÊNCIA DE ELEMENTO SIMÉTRICO DA ADIÇÃO

Para $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ **e** $-u=(-1)u=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)$ **vale** ***u+(-u) =O***

As demais propriedades P5, P6, P7 E P8 também são válidas e assim R^n é um espaço vetorial e seus elementos passam a ser chamados de vetores

2) Exemplos de conjuntos que **não são espaços vetoriais:** Um conjunto que não tenha o elemento neutro não será um espaço vetorial.

- Uma reta em R^2 que não passa pela origem:

$$S=\{(x,y) \text{ em } R^2/ y=2x+3\}=\{(x,2x+3) , x \in R\},$$

, a soma e produto por escalar são os usuais do R^2.

Observe também que se considerarmos dois pontos em S

$(x_1, 2x_1+3) + (x_2, 2x_2+3) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)+6)$

que não estará na reta e **S não é espaço vetorial.**

OBS: Se (x,y) em R^2 for tal que ***y=ax+b***, com **b=0,** isto é, *y=ax*, *a≠0,* então o novo conjunto

$$U=\{(x,y) \text{ em } R^2 / y=ax\}$$

será uma reta que passa pela origem e, com a soma e produto por escalar definidos na forma usual em R^2, será um espaço vetorial

$(x_1, ax_1) + (x_2, a\,x_2) = (x_1 + x_2,\ ax_1 + a\,x_2) = (x_1 + x_2,\ a(x_1 + x_2))$

$k(x_1, ax_1) = (kx_1, a(kx_1))$

- *O elemento neutro (0,0) está em U,*
- *-1(x,ax) = (-1.x, -1.a.x) =(-x, a(-x)) o elemento simétrico está conjunto*
- (FAÇA COMO EXERCÍCIO).

Algumas propriedades extras de Espaços Vetoriais (V,+,.) são obtidas a partir dos 8 axiomas:

(1) O elemento neutro 0 é único e é chamado de vetor nulo

(2) Se u+v=u então v=0.

(3) Dado um vetor qualquer *u* do espaço vetorial *V* então vale 0.*u*= vetor nulo.

(lê-se: o número zero vezes um vetor qualquer gera o vetor nulo)

(4) O elemento simétrico de u é único.

(5) O simétrico de um elemento *u* é obtido fazendo (-1).*u*.

Subespaços Vetoriais

Considere(**V,+, .)** um espaço vetorial e *S* um **subconjunto não vazio de V** . Diremos que *S* é um subespaço vetorial de ***V*** quando valerem:

(i) Se $u, v \in \boldsymbol{S}$ então o vetor soma $u+v$ também está em $\boldsymbol{S}$;

(ii) Se $u \in \boldsymbol{S}$ e $k \in \mathbb{R}$ então o vetor $k.u \in \boldsymbol{S}$.

OBS: Se essas duas propriedades são satisfeitas então as outras 8 necessariamente também serão, pois $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ e a adição e multiplicação de que falamos é a mesma definida para o espaço todo *V*. Ou seja, um subespaço vetorial é, ele mesmo, um espaço vetorial dentro de um espaço vetorial.

Exemplos: Alguns exemplos do livro texto (autor: P. Parga)

1) Considere $V = R^2$ (ou R^3) e ***S*** o subconjunto dos pontos que estão numa reta que passa pela origem, isto é, dado um vetor $v=(v_1, v_2)$ então os pontos de uma reta que

passa pela origem satisfazem as equações paramétricas

$$\begin{Bmatrix} x=t.v_1 \\ y=t.v_2 \end{Bmatrix} .$$

Se $v=(3,-4)$ estaríamos tratando de todos os pontos (ou vetores) múltiplos de (3,-4):

$$\begin{Bmatrix} x=-3t \\ y=4t \end{Bmatrix} .$$

Em geral temos $\boldsymbol{S}=\{t.v=(t.v_1,t.v_2) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Inicialmente, perceba que $\boldsymbol{S}\neq\phi$, depois verifique que (i) e (ii) são satisfeitas.

2) Considere $V=R^3$ (ou R^2) e ***S*** o subconjunto dos pontos que estão numa reta que NÃO passa pela origem. Isto é, dado um vetor $v=(v_1, v_2, v_3)$ paralelo a reta e um ponto $P=(a, b, c)\neq(0,0,0)$, tal reta tem equações paramétricas do tipo

$$\begin{Bmatrix} x=t.v_1+a \\ y=t.v_2+b \\ z=t.v_3+c \end{Bmatrix} .$$

Assim obtemos o subconjunto de $V=R^3$

$$\boldsymbol{S}=\{(x, y, z)=(t.v_1+a, t.v_2+b, t.v_3+c) \mid t\in\mathbb{R}\} ,$$

que NÃO é um subespaço vetorial de $V=R^3$, pois o vetor nulo (0,0,0) não pertence a S.

3) Considere em R^n o subconjunto unitário formado apenas pela origem, isto é,

$$\boldsymbol{S}=\{(0,0,\ldots,0)\}.$$

Mostre que ***S*** é um subespaço. <u>Afirmação:</u> este é o menor subespaço de R^n , no seguinte sentido: nenhum outro conjunto unitário é um subespaço e ***S*** está contido em nos demais subespaços de R^n .

4) Os planos de R^3 que passam pela origem são subespaços e os que não passam não são (as contas estão na vídeoaula):

5) As matrizes simétricas de $M_{2\times2}$

- A matriz nula é simétrica, ou seja, o vetor nulo está no subconjunto;
- Soma de matrizes simétricas é simétrica

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix}$$

- Múltiplos de matrizes simétricas são simétricas

$$k.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.b & k.c \end{pmatrix}$$

6) Subespaços associados a uma matriz: **o núcleo ou espaço nulo de uma matriz.**

Dada uma matriz A, $m \times n$, o conjunto solução do sistema homogêneo $\boldsymbol{A_{mxn} . X_{nx1} = 0}$ é chamado de núcleo (ou espaço nulo) da matriz **A e é um subespaço do $\mathbf{R^{n}}$.**

Notação: ***N(A)={X do R^n / A.X=0}, é o conjunto solução do sistema homogêneo.***

- ***De fato, N(A) não é um subconjunto vazio pois o vetor nulo é sempre solução de um sistema homogêneo.***
- ***Considere dois vetores do núcleo, isto é, X_1 e X_2 tais que $A X_1=0$ e $A. X_2=0$, ou seja, duas soluções do sistema homogêneo AX=0.***

1. Queremos provar que $A(X_1+X_2)=0$, isto é, a soma de soluções de um sistema homogêneo também é solução. Temos

$$A.(X_1+X_2)= AX_1 +AX_2 =0+0=0 ,$$

isto é, a soma das solução X_1+X_2 também é solução do sistema homogêneo!!!

2. Queremos provar que $A.(kX_1)=0$ **, isto é, multiplos *kX_1* de solução** ***também são soluções:***

$$A(kX_1)=k.A.X_1=k.0=0 ,$$

então kX_1 também é solução!!!

Exercício: Encontre o núcleo da matriz A, 2x4, portanto vamos resolver o sistema $A_{2x4} X_{4x1} = 0_{2x1}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo, o núcleo será um subespaço de que espaço vetorial R4, para encontra-lo resolvemos o sistema homogêneo eperceba que não precisamos ampliar a matriz A por uma coluna nula. Assim façamos em A

$$L2 \leftarrow L2 - 2\,L1$$

e obtemos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Acabada a eliminação de Gauss, temos 2 equações e quatro incógnitas, ou seja, temos duas variáveis livres:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$-x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

Escolhendo para variável livre x_3 e x_4 , da última equação $x_2 = -2x_3 + x_4$ e substituindo na primeira

$$x_1 + (-2x_3 + x_4) + x_3 = 0$$

$$x_1 = x_3 - x_4 \, .$$

Assim N(A):

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -2x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x_3 \;\; e \, x_4 \;\; recebem \;\; qualquer \, valor \, real \right\}$$

Observe que N(A) é o conjunto de todas as combinações lineares feitas com os vetores

$$v_1 = (1, -2 , 1 , 0)^T \text{ e } v_2 = (-1,1, 0 ,1)^T.$$

Uma forma de Criar Subespaços *S* de um espaço vetorial *V*:

Subespaços Gerados

Num espaço vetorial *V* (lembre-se: nosso foco é o R^n) considere um subconjunto constituído pelos vetores

$$\{ v_1 , v_2, \cdots , v_k \} \; .$$

Chamemos de ***S*** o conjunto formado por **todas as combinações lineares** formadas com os vetores $v_i , \; i = 1,2,\ldots, k$. Assim

$$S = \{ c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + c_3 . v_3 + \cdots + c_k . v_k \mid \textbf{os escalares } c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k \textbf{ são números reais quaisquer} \}$$

.

O conjunto ***S*** é um subespaço de ***V*** chamado de subespaço gerado por $v_1 , v_2, \cdots , v_k$ e também é dito que os vetores $v_1 , v_2, \cdots , v_k$ geram ***S ou que constituem um conjunto gerador de S.***

<u>Notação:</u> Colchete $S = [v_1 , v_2, \cdots , v_k]$

Exemplos:

1. No exemplo anterior concluímos que o núcleo da matriz A era N(A)=[v_1 , v_2]. Ou seja, o núcleo de A é o subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (1, -2 , 1 , 0)^T$ e $v_2 = (-1,1, 0 ,1)^T$.
2. Se o conjunto gerador tiver um único vetor

$S=[v]=\{ k.v \mathbin{/} k$ qualquer número real$\}$,

ou seja, S contem todos os múltiplos do vetor v!!! Observe que em R^3 ou em R^2, se $v \neq 0$, este conjunto é uma reta que passa pela origem e é paralela a v.

3. Considere $V=R^3$ e o vetor $v=(1,1,1)$, observemos que $[v]=[(1,1,1)]$ tem por elementos vetores *(x,y,z)* que são múltiplos de (1,1,1). Ou seja, *(x,y,z)=t. (1,1,1)*, sendo t um número real qualquer, ou ainda:

$$x=t.1;$$
$$y=t.1;$$
$$z=t.1;$$

sendo t um número real qualquer. Ou seja, [(1,1,1)] é o subespaço que tem como representação geométrica a reta que passa pela origem e é paralela ao vetor (1,1,1).

O menor subespaço do R^n: {(0,0,0,...0)} = [(0,0,0,...0)] e o maior subespaço do R^n é ele mesmo!

Exemplo: Dados dois vetores de R^3 : $v_1=(1,1,1)$ e $v_2=(1,2,3)$, que não são paralelos, como descrever o subespaço $S= [v_1, v_2]$?

Por definição, S é o conjunto com todas as combinações lineares destes dois vetores, ou seja,

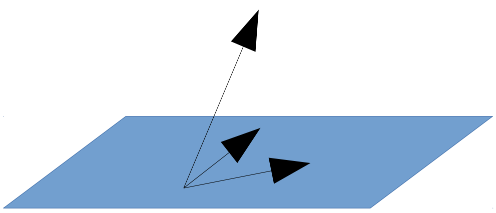
$S=[v_1, v_2]=\{(x,y,z)=t.(1,1,1)+s(1,2,3),$ sendo t e s números reais quaisquer$\}$

Assim para um vetor *(x,y,z)* do R^3 estar em S devem existir números reaos t e s tais que

$$x = t.1 +s.1;$$
$$y = t.1 +s.2;$$
$$z = t.1+s.3;$$

Ou seja, S é um plano, que passa pela origem e tem os vetores v_1 e v_2, que não são paralelos. Dizemos que o plano S foi gerado por v_1 e v_2. O que acontece se incluirmos mais um vetor v_3 no conjunto gerador de S, mas este vetor já sendo uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2? Ou ainda, que conjunto é $S_2 = [v_1, v_2, v_3]$ se $v_3 = v_1+v_2$? Perceba que não criamos nada de novo, isto é, $S_2 = S$.

OBS: Para incluirmos um vetor que gere algo diferente do plano gerado por v_1 e v_2 precisamos de um v_3 que NÃO SEJA combinação linear dos vetores v_1 e v_2. Ou seja, diremos que v_1, v_2 e v_3 são **linearmente independentes.**



Uma outra versão do exemplo anterior pode ser encontrada no exemplo 18, página 144 do livro

texto

Exemplos Parga:

18) Dados dois vetores de R^3 : $v_1=(1,1,1)$ e $v_2=(1,2,3)$, vamos responder a algumas perguntas:

1) Qualquer vetor do R^3 pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores?
2) Essa mesma pergunta pode ser feita da outra forma: podemos afirmar que $R^3=[v_1,v_2]$?

Matematicamente, estamos querendo responder:

Dado *(x,y,z)* um vetor de R^3 existem números reais c1 e c2 tais que

(x,y,z)=c1 (1,1,1)+c2(1,2,3) ?

Se desenvolvemos a equação anterior e utilizando a notação matricial, a pergunta (2) torna-se: o sistema a seguir tem solução

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c1\\ c2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad ?$$

Resolvendo o sistema por eliminação de Gauus

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \vdots & x\\ 1 & 2 & \vdots & y\\ 1 & 3 & \vdots & z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & \vdots & x\\ 0 & 1 & \vdots & y-x\\ 0 & 2 & \vdots & z-x\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & \vdots & x\\ 0 & 1 & \vdots & y-x\\ 0 & 0 & \vdots & z-x-2y+2x\end{pmatrix}$$

percebemos que o sistema só terá solução se *x-2y+z=0.* Portanto, nem todos os vetores do R^3 poderão fazer com que este sistema tenha solução. Ao contrário, apenas os pontos (x,y,z) do R^3 do plano x-2y+z=0 estarão no subespaço

[(1,1,1), (1,2,3)].

OBS: Verifique se completando o conjunto anterior com mais um vetor que não esteja no plano x-2y+z=0 então R^3 será gerado por esses 3 vetores. Por exemplo verifique se:

[(1,1,1), (1,2,3), (1,-2,1))]=R^3 ?

3) Tentando responder a pergunta (1) iremos nos deparar com outra:

Existe uma equação que representa o subespaço $[v_1,v_2]$? Qual? Resposta: A equação do plano *x-2y+z=0.*

4) O R^3 pode ser gerado por apenas dois vetores?

<u>Vetores Linearmente Dependentes(l.ds) e Vetores Linearmente Independentes(l.is)</u>

Ao considerar k vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ de um espaço vetorial V diremos que eles serão <u>linearmente dependentes (l.ds)</u> se algum deles for resultante de uma combinação linear dos demais. Digamos

$$v_i = a_{1.} v_1 + a_2 . v_2 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} \cdots + a_k . v_k \quad .$$

Quando isto ocorre, podemos reescrever a equação anterior e obter

$$a_{1.} v_1 + a_2 . v_2 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} - v_i + a_{i+1} v_{i+1} \cdots + a_k . v_k = \boldsymbol{O} = vetor \quad nulo \quad ;$$

<u>Conclusão:</u>

Dizer que os vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ são l.ds é o mesmo que dizer que o vetor nulo pode ser obtido por uma combinação linear, não trivial, dos vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ (aqui chamamos de combinação linear trivial para o vetor nulo aquela em que todos os números reais forem zero).

Dados vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ é claro que se $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ são escalares todos nulos então

$$c_{1.} v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_k . v_k = 0 \quad .$$

Mas se os vetores são l.ds esta não será a única combinação linear gerando o vetor nulo!!! Então, dado os vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$, para verificar se os vetores são linearmente dependentes ou independentes devemos responder a seguinte pergunta:

Existe algum outro conjunto de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_k$, não todos nulos, tais que

$$c_{1.} v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_k . v_k = 0 \quad ?$$

Os vetores do $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ do espaço vetorial ***V s***ão ditos um ***conjunto linearmente independentes (l.i.s)*** se a única combinação linear realizada com esses vetores que resulte o vetor nulo será a trivial. Isto é, se $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ forem l.i.s e

$$c_{1.} v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_k . v_k = 0$$

então $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

Se para os vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_k$ for possível encontrar escalares não todos nulos tal que, mesmo assim, a combinação seja nula, isto é,

$$c_{1.} v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_k . v_k = 0$$

então os vetores são chamados de ***vetores linearmente dependentes (l.d.s)***.

Exemplo: Os vetores do subconjunto $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ do R^3 são linearmente independentes ou dependentes?

Isto é, existem escalares c1 , c2 e c3, não todos nulos, tais que

$$c1.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad ?$$

Se a resposta for SIM então os vetores serão LDs e se a resposta for NÃO os três vetores serão LIs. Para responder a esta pergunta, devemos resolver um sistema cujas incógnitas são os escalares c1, c2, e c3!!!!! De fato, desenvolvendo as contas que estão na pergunta anterior obtemos

$$\begin{pmatrix}c1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\c2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\c3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c1\\c2\\c3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{c1=0, c2=0 e c3=0}$$

que equivale a resolver o sistema

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

cuja solução é única, a saber: c1=c2=c3=0. Portanto, os vetores são Lis.

OBS:

- Para decidir se vetores do R^n são linearmente independentes ou dependentes precisaremos resolver um sistema homogêneo. No sistema homogêneo a matriz de coeficientes terá as colunas sendo os tais vetores. Se o sistema tiver solução única então os vetores serão linearmente INDEPENDENTES, caso contrário, isto é, se o sistema tiver infinitas soluções então os vetores serão linearmente DEPENDENTES.
- Se estivermos com um exemplo de n vetores $v_1, v_{2,} \cdots, v_n$ do R^n , então tal conjunto será linearmente independente se o sistema ***AX=0,*** cuja matriz ***A***, $n \times n$, tem colunas $v_1, v_{2,} \cdots, v_n$, tiver solução única. Isto equivale a dizer que ***A*** é invertível, ou ainda, determinante det ***A***≠0;

Exemplo: Verifique se os vetores $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ são linearmente independentes ou dependentes. Matematicamente devemos resolver a equação vetorial:

$$c_1.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2.\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}+c_3.\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_4.\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad .$$

Desenvolvendo estas contas obtemos o sistema

$$\begin{gathered}c_1-2c_2+c_3+c_4=0\\c_1-2c_2+2c_3=0\\3c_3-3c_4=0\end{gathered}$$

que em notação matricial torna-se

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\1&-2&2&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad .$$

Ou seja, um sistema em que a matriz de coeficientes tem os vetores

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

em suas colunas.

Portanto, resolvendo o sistema pela eliminação de Gauss

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\1&-2&2&0\\0&0&3&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$L_2\leftarrow L_2-L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&3&-3\end{pmatrix}$$

$$L_3\leftarrow L_3-3L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad .$$

c1-2c2+c3+c4=0 c1-2c2+c4+c4=0 c1-2c2+2c4=0 => c1=2c2-2c4

c3-c4=0=>c3=c4

Daí obtemos que o sistema tem infinitas soluções: $c_3=c_4$ e $c_1=2c_2-2c_4$, sendo que c_2 e c_4 podem assumir qualquer valor real . Assim o conjunto de vetores

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

é linearmente dependente.

Se retiramos o segundo vetor, que corresponde à segunda coluna da matriz, então os vetores

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

geram uma matriz de coeficiente que na forma escalonada será

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

e o sistema homogêneo ainda tem infinitas soluções! Ou seja, ainda são l.d.s. Se retirarmos o último vetor, ou seja, a última coluna obtemos o sistema com a matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},$$

e resolvendo-o temos $c_2=0$ e $c_1=-c_2=0$ que, portanto, são l.i.s.

<u>Leiam as observações do Livro Texto que estão na página 150 e 151</u>, uma delas diz:

OBS: Dois vetores v_1 e v_2 de um espaço vetorial ***V*** são l.d.s se forem múltiplos um do outro e são l.i.s se não forem.

A definição de conjunto linearmente independente junto com a definição de conjunto gerador , que daremos a seguir, formam a definição de <u>base de um espaço vetorial</u>.

Conjunto gerador de um Espaço Vetorial

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_{2,} \cdots, v_k\}$ de um espaço vetorial ***V*** é chamada de **conjunto gerador de *V*** se $V=[v_1, v_{2,} \cdots, v_k]$. Ou ainda, o conjunto será um conjunto gerador para V se qualquer vetor de ***V*** **for uma combinação linear de** $\{v_1, v_{2,} \cdots, v_k\}$

Exemplo: Considere o plano Π dado pela equação *x-y+z=0*, que é um subespaço de R^3 (por que?). Encontre um conjunto gerador para o plano Π .

Vamos resolver a equação *x-y+z=0 , ou seja, temos uma equação e 3 incógnitas e, portanto, faremos y e z como variáveis livres:*

x-y+z=0 => x=y-z

(x,y,z)=(y-z ,y , z)=(y,y,0) +(-z,0,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)

(x,y,z)=y(1,1,0)+z(-1,0,1)

quaisquer números reais y e z.

Assim os pontos que satisfazem x-y+z=0 também satisfazem

{ y(1,1,0)+z(-1,0,1)/ y e z assumem qualquer real}=[(1,1,0),(-1,0,1)]

e o conjunto { (1,1,0), (-1,0,1)} é conjunto gerador do plano Π dado. E além de ser um conjunto gerador este conjunto é linearmente independente.

Determine quais dos conjuntos a seguir são ou não um conjunto gerador de R^2 :

$$(1)\ \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\};\ (2)\ \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\};\ (3)\ \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}\right\};\ (4)\ \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Resultado Importante que Relaciona:

Conjunto Gerador e Vetores Linearmente Independentes

Teorema 1:

Considere o espaço vetorial ***V*** gerado por $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *, ou seja,* $V=[v_1, v_2, \cdots, v_k]$ *, mas* $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *são l.d.s, então podemos excluir algum ou alguns vetores de forma a obter um conjunto gerador que seja constituído só por vetores l.i.s.*

OBS: Um procedimento para descobrir que vetores retirar está apresentado na videoaula!!!!

O Teorema 1 motiva a definição de ***base de um espaço vetorial.***

Definição: Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *vetores do espaço vetorial* ***V*** ***tais que:***

1. $v_1, v_2, \cdots, v_k$ ***são l.i.s***
2. $V=[v_1, v_2, \cdots, v_k]$ ***, isto é, são geradores de*** V **.**

Um conjunto de vetores que cumpra essas duas exigências é chamado de base do espaço vetorial V.

Exemplos:

1) A base mais "famosa" do R^n é a base formada pelas colunas da matriz identidade ***I***, $n \times n$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\ \cdots\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\ ,$$

que é chamada de base canônica do R^n .

Exemplo: base canônica do R^3 $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

Já mostramos que são l.i.s, pois o sistema homogêneo tem como matriz de coeficientes a identidade e det I =1, ou seja, o sistema tem solução única.

Para mostrar que é um conjunto gerador do R^3, devemos mostrar que [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]=R^3. Ou seja, precisamos mostrar que qualquer vetor $(x,y,z)^T$ pode ser escrito como uma combinação linear desses 3 vetores:

$$(x,y,z)^T=(x,0,0)^T + (0,y,0)^T + (0,0,z)^T=x.(1,0,0)^T+y.(0,1,0)^T+z(0,0,1)^T$$

Base Canônica do R^3: $\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

Veremos nos exemplos do livro texto e nos exercícios que existem outras bases do R^3. Além disso, é possível afirmar que as bases de um espaço vetorial terão sempre o mesmo número de elementos. O **número de elementos da base será chamado de DIMENSÃO do espaço vetorial**.

Exemplo: Outra base do R^3 .

Mais exemplos: Parga

Outros Resultados Importante que Relacionam:

Conjunto Gerador e Vetores Linearmente Independentes e Base

Teoremas:

*1) Se $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k$ geram o espaço vetorial **V**,, ou seja, $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k]$, mas $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k$ são l.d.s, então podemos excluir algum ou alguns vetores de forma a obter uma base de **V**;*

*2) Se $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k]$, isto é, se **k** vetores geram o espaço **V** então qualquer outro conjunto de vetores com **mais de k elementos** é formado por vetores l.d.s;*

*3) Se os conjuntos $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ e $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{2,} \boldsymbol{u}_3, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ de vetores do espaço vetorial **V*** são bases de ***V*** então devem ter o mesmo número de elementos, neste caso, ***k=n*** **.**

4) Se $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{2,} \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ é uma base para o espaço vetorial ***V*** então dado qualquer vetor ***u*** de ***V***

existe uma única combinação linear dos vetores da base originando *u*, ou seja, existe um único coonjunto de valores para $c_1, c_2, \cdots, c_k$ tal que

$$u = c_1 . v_1 + c_2 . v_2 + \cdots + c_k . v_k$$

Esses resultados motivam a **definição de dimensão de um espaço vetorial.**

Definição: Dimensão de um espaço vetorial

→ *Seja V espaço vetorial. Se existir uma base de V com **k** vetores então diremos que a **dimensão de V é k.***

→ Se $V = \{ 0 \}$, isto é, *V* só contem o vetor nulo, então diremos que ***dimensão de V é* 0 (zero).**

→ Se apenas um conjunto finito de vetores geram *V* então o espaço vetorial tem dimensão finita, caso contrário, tem dimensão infinita.

Exemplos:

1) A dimensão de R^n é n, pois já construímos uma base para R^n com n vetores, a saber, a base canônica.

2) Parga, páginas 163 e 164: *Considere* ***S*** o subespaço de R^5 gerado pelos vetores do conjunto

$$\{(1,1,0,1,0),(1,2,1,2,1),(-1,0,1,0,1),(0,1,2,3,4),(1,3,3,5,5),(0,0,0,0,1)\}$$

(2.1) Encontre uma base para o subespaço ***S***;

(2.2) Qual a dimensão de ***S?***

Exercício 14 do livro texto página 167:

(a) Mostre que o conjunto β={ $(1,2,3)^T$, $(0,1,2)^T$, $(0,0,1)^T$} é uma base do R^3:

Solução: Devemos verificar duas propriedades

(i)Os vetores são l.i.s , isto é, a única combinação linear dos vetores dando o vetor nulo é a trivial;

(ii) Os vetores geram todo o R^3, isto é, qualquer vetor *(x, y, z)* pode ser escrito a partir de uma combinação linear dos vetores de β.

No caminho de verificar (i) precisamos verificar quais valores de c1, c2 e c3 satisfazem

c1 (1,2,3) + c2 (0 , 1,2) + c3 (0,0,1) = (0,0,0) (c1+0.c2+0.c3, 2c1+c2+0.c3, 3c1+2c2+1c3)=(0,0,0)

c1=0;

2c1+c2=0

3c1+2c2+c3=0

No caminho de verificar (ii) precisamos verificar se é possível encontrar k1, k2 e k3 tais que

k1 (1,2,3) + k2 (0 , 1,2) + k3 (0,0,1) =*(x,y,z)*

(k1+0.k2+0.k3, 2k1+k2+0.k3 , 3k1+2.k2+k3)=(x,y,z)

k1=x

2k1+k2=y

3k1+2k2+k3=z

$$(i)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c1\\ c2\\ c3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (ii)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k1\\ k2\\ k3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Como o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero então os dois sistemas terão solução única. A única solução do sistema homogêneo é (c1,c2,c3)=(0,0,0). Como o outro sistema também tem solução o conjunto β além de ser l.i. será também um conjunto gerador do R^3. Portanto, o conjunto β é base do R^3.

Também poderíamos responder às questões resolvendo os sistemas:

$$\left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 0 & \vdots & x\\ 2 & 1 & 0 & \vdots & y\\ 3 & 2 & 1 & \vdots & z\end{array}\right)$$ ***L2← L2-2L1 e L3← L3-3L1***

$$\left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 0 & \vdots & x\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & y-2x\\ 0 & 2 & 1 & \vdots & z-3x\end{array}\right) \quad \textbf{\textit{L3← L3-2L2}} \quad \left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 0 & \vdots & x\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & y-2x\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & z-3x-2(y-2x)\end{array}\right)$$

o sistema tem solução e os vetores geram o R^3 e o sistema homogêneo terá solução único e os vetores serão l.i.s.

k1=x, k2=y-2x e k3=z+x-2y

Ou ainda,

(x,y,z)= x.(1,2,3)+(y-2x).(0,1,2)+(z+x-2y).(0,0,1).

Nestaf conta descobrimos que as coordenadas do vetor (x,y,z) serão os coeficientes k1,k2 e k3 nesta ordem:

$(x,y,z)|_\beta$=(k1,k2,k3)= (x , y-2x , z+x-2y)

OBS: Já sabíamos que

(x,y,z)= x.(1,0,0)+y.(0,1,0)+z.(0,0,1)

Pelo item (a) vimos que o conjunto β={ $(1,2,3)^T$, $(0,1,2)^T$, $(0,0,1)^T$} é uma outra base de R^3 , ou

seja, um outro referencial em que os eixos não são mais gerados por (1,0,0) , (0,1,0) e (0,0,1). Quando, em geral, informamos as coordenadas de um vetor como, por exemplo, v=(5,4,2) estamos pensando nos eixos x, y e z como determinados para a representação geométrica do R^3:

$$v=(5,4,2)=5(1,0,0) + 4(0,1,0) +2(0,0,1),$$

e os coeficientes 5, 4 e 2 são chamados de coordenadas de v na base canônica.

(b) Encontre as coordenadas do vetor v=(5,4,2) na base β:

Solução: Queremos encontrar números k1 , k2 e k3 tais que

$$v=(5,4,2)=k1\ (1,2,3) + k2\ (0 , 1,2) + k3\ (0,0,1)$$

tais números são chamados de coordenadas do vetor v na base β . Observe que do item anterior sabemos que para (x,y,z) vale

$$k1=x,\ \ k2=y-2x\ \ e\ \ k3==z+x-2y.$$

Então para v=(5,4,2) teremos

$$v=(5,4,2)=5\ (1,2,3) + (4-2.5)(0 , 1,2) + (2+5-2.4)\ (0,0,1)$$

$$v=(5,4,2)=5\ (1,2,3) + (-6)(0 , 1,2) + (-1)\ (0,0,1)$$

$$v|\beta=(5,4,2)|\beta =(5,-6,-1)$$

(c) Determine o vetor w que na base β é $w|_\beta=(2,-3,4)^T$, ou seja, o exercício te dá as coordenadas na base β e quer as coordenadas da base canônica:

$$k1=2 , k2=-3\ e\ k3=4$$

$$w =2\ (1,2,3) + -3\ (0 , 1,2) + 4\ (0,0,1) = (2,1,4) \text{ na base canônica}$$

(d) Determine as coordenadas do vetor v_1 = (3,2,1) na base β:

Exercício 11 página 167: Dado $\{(1,1,1,0)^T , (1,2,3,0)^T , (0,1,2,0)^T, (0,1,1,1)^T \}$ subconjunto do R^4:

(a) Verifique se o conjunto é l.i. (Resposta: Não são, isto é, são l.d.s)

(b) Encontre, dentre esses vetores, uma base para S=[(1,1,1,0) , (1,2,3,0) , (0,1,2,0), (0,1,1,1)]

Resposta: A base de S será {(1,1,1,0) , (1,2,3,0) , (0,1,1,1)}.

(c) Qual a dimensão de S? Resposta: A dimensão é o número de elementos de uma base, ou seja, a dimensão de S é 3. Ou seja, S é um subespaço vetorial do R^4 que tem dimensão 3.

Solução:

Raciocinando como no exercício anterior resolveríamos um sistema homogêneo com a matriz de coeficientes tendo as colunas dadas pelos vetores informados ou, como neste caso temos uma matriz 4x4, poderíamos calcular o determinante. Se o det=0 os vetores seriam l.d.s.

Procedimento para descobrir dentre vetores de um conjunto gerador se existem vetores que são combinação linear dos demais e para obter uma base para o subespaço gerado. Utilizamos a ideia do escalonamento:

- **Passo 1: Montamos uma matriz com os vetores sendo as linhas,**
- **Passo 2: Vamos usar as operações elementares do escalonamento, que são combinações lineares de linhas, mas não vamos trocar linhas**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L2 \leftarrow L2\text{-}L1 \text{ e } L4 \leftarrow L4\text{-}L3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L3 \leftarrow L3\text{-}L2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ *(Bastava trocar as duas últimas para acabar o escalonamento)*

- **Passo 3: Descobrimos uma linha nula na terceira linha, pois a linha original foi descoberta sendo uma combinação linear das outras. Ou seja, a linha original L3=(0,1,2,0) é combinação linear das outras. Ou seja, os vetores são linearmente dependentes.**
- **Passo 4: Retirando esta linha o escalonamento das outras 3 linhas não gerará outra linha nula e os outros 3 vetores serão linearmente independentes:**

  {(1,1,1,0) , (1,2,3,0) , (0,1,1,1)}.

  Portanto S=[(1,1,1,0) , (1,2,3,0) , (0,1,1,1)}], tem dimensão 3. O conjunto de vetores não nulos resultantes do escalonamento será outra base de S:

  {(1,1,1,0) , (0,1,2,0) , (0,0,-1,1)}.

PRÓXIMO CAPÍTULO: TRANSFORMAÇÕES LINEARES

As funções que estudaremos na Álgebra linear são as **transformações lineares T**, isto é, **são funções cujo domínio e o contradomínio são espaços vetoriais** e satisfazem as seguintes propriedades

1. **(i) Para u e v vetores do domínio V deve valer: T(u+v)=T(u) + T(v),**
2. **(ii) Para k número real e u vetor de V deve valer: T(k.u)= k.T(u).**