ICE – Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 6

Componente Curricular:

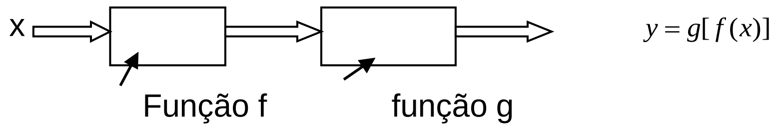
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)

Prof. Roseli Alves de Moura

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

1) FUNÇAO COMPOSTA: Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por gof, é definida por $gof(x) = g[f(x)]$. O seu domínio é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.



De modo semelhante, define-se a composta $fog(x) = f[g(x)]$.

REGRA DA CADEIA - Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$. Se as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ ou $y'(x) = g'(u).f'(x)$.

Prova: Como *f(x)* é diferenciável em <u>a</u> podemos escrever

$$\Delta u = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.\Delta x = [f'(a) + \varepsilon_1]\Delta x. \text{ (I)}$$

Note que quando $\Delta x \to 0$, $\varepsilon_1 \to 0$ também.

De maneira similar, *g* é diferenciável em $b = f(a)$, logo:

$$\Delta y = \frac{g(b+\Delta u) - g(b)}{\Delta u}.\Delta u = [g'(b) + \varepsilon_2]\Delta u \quad \text{(II)}$$

Quando $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0 \Rightarrow \varepsilon_2 \to 0$.

Substituindo (I) em (II):

$$\Delta y = [g'(b) + \varepsilon_2][f'(a) + \varepsilon_1]\Delta x = [g'(f(a)) + \varepsilon_2][f'(a) + \varepsilon_1]\Delta x.$$

Passando ao limite para se obter a derivada teremos o seguinte:

$[gof]'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(f(a))f'(a)$ o que prova a regra.

TABELA - Usando a regra da cadeia podemos reformular a nossa tabela de derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada
$y = u^{\alpha}, \alpha \neq 0$	$y' = \alpha . u^{\alpha-1} . u'.$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = \cos u . \, u'.$
$y = a^{u}, 0 < a \neq 1$	$y' = a^{u} . \ln a . \, u'.$	$y = \cos u$	$y' = -\operatorname{sen} u . \, u'.$
$y = e^{u}$	$y' = e^{u} . \, u'.$	$y = \tan u$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} . u'.$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{1}{u} . u'.$	$y = u^{v}, u > 0$	$y' = v . u^{v-1} . u' + u^{v} . \ln u . v'.$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u} . \log_a e$	$y = \dfrac{1}{u^n}$	$y' = -\dfrac{n}{u^{n+1}} . u'.$

EXERCÍCIOS:

a) $y = \cos^3 x$

Resolução:

$$y' = 3\cos^2 x . (-\operatorname{sen} x) = -3\cos^2 x . \operatorname{sen} x$$

b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

Resolução:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x} . \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x \, .$$

2) FUNÇÃO INVERSA: Sejam $f : A \to B \; e \; g : B \to A$ duas funções. Uma função é a inversa da outra se, e somente se, $g(f(x) = x, \forall x \in A$ e $f(g(y)) = y \, , \forall y \in B$.

Nota: Graficamente podemos saber se *f* admite inversa. Basta traçar uma reta paralela ao eixo x, se esta cortar o gráfico de *f* em apenas um ponto *f* admite inversa. O gráfico de *f* e de sua inversa são simétricos em relação primeira bissetriz.

Teorema: Suponha que f admita uma função inversa g contínua em $]a,b[$. Se existe $f'(x) \; e \; f'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$, então g é derivável e vale $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

Demonstração: Seja f invertível com inversa f^{-1}. Se f for derivável em $x_0 = f^{-1}(y_0)$ com $f'(x_0) \neq 0$, e se f^{-1} for contínua em y, então será derivável em y_0, com

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Como queremos provar que existe a derivada de f^{-1} no ponto y_0, vamos examinar o quociente, sempre que $y \neq y_0$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$$

Seja $x = f^{-1}(y)$, como f^{-1} é contínua em y_0, temos que:

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

Ou seja, quando $y \to y_0, f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, isto é, $x \to x_0$. Então:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

pois f é derivável em $x_0 = f^{-1}(y_0)$ com $f'(x_0) \neq 0$. Logo, mostramos que existe,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ou seja f^{-1} é derivável em y_0 e $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, como queríamos demonstrar.

Exemplo: $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

TABELA – Trigonométricas inversas

1)	$y = \text{arcsen}\, x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	ou	$y = \text{arcsen}\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
2)	$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$	ou	$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{!+u^2}$
3)	$y = arc \sec x \Rightarrow y' = \frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2 - 1}}$	ou	$y = arc \sec u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$
4)	$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	ou	$y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5)	$y = arc \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$	ou	$y = arc \cot u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{!+u^2}$
6)	$y = \text{arccossec}\, x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2 - 1}}$	ou	$y = \text{arccossec}\, u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$

Há uma tendência de se escrever as funções trigonométricas com 4 letras:
$a\,\text{sen}\, x,\ a \tan x,\ etc.$