ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 4

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

O limite, como já foi dito, estuda o comportamento das funções nas vizinhanças de um ponto. Podemos estender o estudo para englobar o $\pm\infty$ e os pontos onde as funções se tornam infinita.

Considere a função: $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$ onde a, b e c são constantes reais.

Ela está definida no conjunto: $D = \{x \in \Re / x \neq c\}$.

1) **Limites infinitos** (limites tipos: $1/0$).

Nas vizinhanças de c, a segunda parcela se torna infinita na medida em que x se aproxima de c, pois o denominador se torna cada vez mais próximos de zero e a fração correspondente cada vez maior em valor absoluto, isto é, os limites laterais da função ficam:

$$\lim_{x \to c^+} [a + \frac{b}{x-c}] = \begin{cases} +\infty \ se\ b > 0 \\ -\infty \ se\ b < 0 \end{cases} \quad e \quad \lim_{x \to c^-} [a + \frac{b}{x-c}] = \begin{cases} -\infty \ se\ b > 0 \\ +\infty \ se\ b < 0 \end{cases}.$$

Notas:

I) $a \pm \infty = \pm\infty$

II) a reta vertical $x = c$ em torno da qual a função se torna infinita denomina-se assíntota vertical.

III) Um caso particular desse limite é $\lim_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$.

X	-0,00001	-0,000001	-0,0000001	-0,00000001	$x \to 0^-$
$f(x) = 1/x$	-100.000	-1.000.000	-10.000.000	-100.000.000	$f \to -\infty$

X	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	$x \to 0^+$
$f(x) = 1/x$	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000	$f \to +\infty$

Exercício 1 – Calcular $\lim_{x\to 0}\left(2^{\frac{1}{x}}\right)$, se existir.

Resolução: $\lim_{x\to 0^+} 2^{1/x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} 2^{1/x} = 0$. Portanto. Não existe o limite no ponto

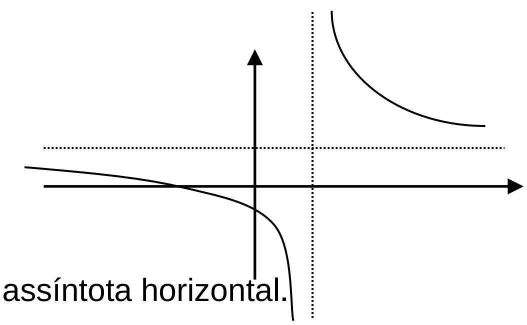
Exercício 2 – Calcular $\lim_{x\to 0}\left(3^{1-(\frac{1}{x^2})}\right)$, se existir.

Resolução: Como $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ acarreta que $\lim_{x\to 0} 3^{1-(\frac{1}{x^2})} = 0$

2) Limites no infinito (limites tipos: $1/\pm\infty$).

Quando $x \to \pm\infty$ o denominador da fração se toma muito grande valor absoluto e consequentemente a fração se aproxima de zero o que implica nos limites:

$\lim_{x\to +\infty}[a + \frac{b}{x-c}] = a$ e $\lim_{x\to -\infty}[a + \frac{b}{x-c}] = a$



Notas:

I) a reta horizontal $y = a$ denomina-se assíntota horizontal.

II) Um caso particular $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x} = 0$.

X	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000	$x \to +\infty$
$f(x) = 1/x$	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	$f \to 0^+$

De modo semelhante pode-se ilustrar o outro caso.

3) Propriedades

I) Para um quociente de polinômios produzindo a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, devemos colocar evidência as potências dominantes do numerador e do denominador, simplificar os termos comuns e em seguida aplicar os resultados anteriores, isto é:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0 & se\ n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & se\ n = m \\ \dfrac{a_0}{b_0}[\pm\infty]^{n-m} & se\ n > m \end{cases}$$

II) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g(x) é limitada nas vizinhanças de a então: $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.

Exercícios

1) Calcular: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x+2}$. Resolução: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{2}{3}$ $(n = m)$

2) Calcular: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x^2+x}$. Resolução: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x^2+x} = 0$ *pois* $n<m$

3) Calcular: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x^2}{5+x}$. Resolução: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x^2}{5+x} = \frac{1}{1}[+\infty] = +\infty$ $se\ n > m$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4) Calcular:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1}$

Resolução: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x.(1-\frac{1}{x})} = \sqrt{2}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$

resolução: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x.(1-\frac{1}{x})} = -\sqrt{2}$

5) Calcular $\lim_{x\to 1} [\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}]$ (forma: $\infty - \infty$).

Resolução: $\lim_{x\to 1} [\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}] = \lim_{x\to 1} \frac{x+1-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

6) Mostrar: $\lim_{x\to+\infty} \frac{senx}{x} = 0$

Resolução: $-1 \le senx \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{senx}{x} \le \frac{1}{x}$, $(x>0)$.

Passando ao limite teremos: $\lim_{x\to+\infty} [\pm\frac{1}{x}] = 0$ e consequentemente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{senx}{x} = 0$.

7) Calcular $\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x+1000} - \sqrt{x}]$

Resolução: $\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x+1000} - \sqrt{x}] = \lim_{x\to\infty} \frac{1000}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$