Sistemas Lineares (Segunda Parte)

Lembrando de alguns e*xemplos:*

(*) Sistema triangular. Neste exemplo temos um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas

$$\begin{aligned} 1x_1+2x_2+1x_3&=3 \\ -1x_2-1x_3&=-2 \\ 1x_3&=4 \end{aligned}$$

OBS: Matriz de coeficientes neste exemplos é triangular superior

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para achar o conjunto solução do sistema triangular (ou escalonado), atuamos com substituição de baixo para cima :

- da última equação temos $x_3=4$;
- isolando x_2 na segunda equação e substituindo x_3 obtemos: $x_2=-2$;
- isolando x_1 na primeira equação e substituindo x_3 e x_2

$$x_1=3-2x_2-x_3=3-2(-2)-4=3$$

Assim o sistema possui uma única solução, a saber, o vetor coluna do R^3

$$S=\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}\in R^3\right\} \quad .$$

Um sistema que tenha **solução única** é chamado de s**istema possível e determinado**.

(**) Sistema na forma escalonada. Neste exemplo temos mais incógnitas que equações

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + \quad\quad 4x_4&=-2 \\ x_2+2x_3+3x_4&=0 \\ -x_3-8x_4&=5 \end{aligned}\right\} \quad .$$

OBS: Matriz de coeficientes está escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad .$$

Assim não temos equações suficientes que amarrem todas as incógnitas e deixaremos algumas incógnitas livres. Como são 4 incógnitas e 3 equações teremos 4-3=1 grau de liberdade, isto é, deixaremos uma incógnita livre. Uma vez que o sistema é resolvido por substituição de baixo para *cima, fizemos nossa atenção na última equação e escolhamos para incógnita ou variável livre ou x_4 ou x_3 (apenas uma delas !!!) . No que segue deixaremos x_4 livre.*

Procedimento para encontrar o conjunto solução:

- *da última equação isolamos* x_3 *e obtemos* $x_3=-5-8x_4$;
- *substituindo o valor de* x_3 *na segunda equação e isolando* x_2 *obtemos*
$$x_2=-2(-5-8x_4)-3x_4=10+13x_4 \;;$$
- *substituindo o valor de* x_2 *e isolando* x_1 *na primeira equação*
$$x_1=-2-x_2-4x_4=-2-(10+13x_4)-4x_4=-12-17x_4 \;;$$
- *e* x_4 *? Esta variável pode assumir qualquer valor real, pois foi deixada livre.*

Escrevendo o conjunto solução:

Observe que uma solução será um vetor do R^4, pois são 4 incógnita. Assim

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12-17x_4\\10+13x_4\\-5-8x_4\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\10\\-5\\0\end{pmatrix}+x_4.\begin{pmatrix}-17\\13\\-8\\1\end{pmatrix}$$

e x_4 pode assumir qualquer valor real. Ou seja, o conjunto solução é

$$S=\left\{\begin{pmatrix}-12\\10\\-5\\0\end{pmatrix}+x_4.\begin{pmatrix}-17\\13\\-8\\1\end{pmatrix};\ \forall x_4\in R\right\} \quad ,$$

ou seja, existem **infinitas soluções** e este sistema é chamado de **possível e indeterminado.**

(***) Sistema escalonado e impossível:

Neste exemplo temos 4 incógnitas e 3 equações, porém observe o que a última equação exige:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 \quad -x_3-2x_4=2\\ x_2+4x_3+3x_4=-1\\ 0.x_4=-1\end{array}\right\} \; .$$

OBS: Matriz de coeficientes está escalonada

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&4&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

A última equação é inconsistente, um **absurdo: 0=-1** . Ou seja, o sistema **não possui solução** e, portanto, é um sistema chamado de **sistema impossível e o conjunto solução é vazio:** $S=\emptyset$

O Método da Eliminação de Gauss

O método será explicado através de exemplos em que resolveremos os seguintes sistemas:

$$x_1+2x_2+x_3=3$$
$$3x_1-x_2-3x_3=-1$$
$$2x_1+3x_2+x_3=4$$

que em notação matricial, a ser trabalhada daqui por diante, é

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 4\end{pmatrix} \quad .$$

Nosso objetivo é achar o conjunto de vetores $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ que solucionam o sistema, o tal conjunto solução , encontrando um sistema equivalente e mais fácil de ser resolvido e cuja matriz de coeficientes estará na forma escalonada.

Procedimentos na Eliminação de Gauss

Passo 1: Considere a matriz *A* de coeficientes aumentada da coluna *b*, que denotamos por A|b:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

e chamemos as linhas de L_1 , L_2 e L_3 . Nosso objetivo é realizar operações elementares nas linhas desta matriz até que a nova matriz, com as três primeiras colunas , seja uma matriz triangular (ou escalonada).

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Passo 2: Fixemos a primeira linha e chamamos o seu primeiro elemento não nulo de pivô. Nosso objetivo neste passo é zerar elementos da primeira coluna que estão abaixo do pivô, sem alterar o conjunto solução do sistema. Portanto, só vamos realizar operações elementares para substituir L_2 e L_3 por novas linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \quad ;$$

$$L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \quad .$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -7 & -6 & -10\\ 0 & -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Passo 3: Numa operação estratégica, podemos trocar a segunda linha com a terceira, para facilitar contas

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{pmatrix} \quad ;$$

Passo 4: Nosso objetivo é obter no quadrado 3x3 das primeiras três colunas uma matriz triangular, para a matriz de coeficientes de um novo sistema equivalente. Portanto, não mexemos nem na primeira nem na segunda linhas. Na segunda linha o pivô é -1 e vamos substituir L_3 , trabalhando com operações elementares para obter uma nova linha em que o elemento abaixo do pivô -1 seja zero

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7\,L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Passo 5: Chegamos ao nosso objetivo e agora temos um sistema triangular equivalente ao original

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + 2x_2 + 1\,x_3 &= 3 \\ -1\,x_2 - 1\,x_3 &= -2 \\ 1x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Enfim vamos encontrar o conjunto solução :

Passo 6: Achar a solução do sistema triangular (ou escalonado), resolvendo por substituição de baixo para cima : $x_3 = 4$, $x_2 = -2$ e

$$x_1 = 3 - 2\,x_2 - x_3 = 3 - 2(-2) - 4 = 3$$

Assim o sistema possui uma única solução, a saber, o vetor coluna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ;$$

e portanto o sistema é possível e determinado. Verifique que este vetor também armazena a solução do sistema original, ou seja, vale que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Assim os sistemas possuem o mesmo conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

Exemplo 2: Encontre o conjunto solução do sistema dado por

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

ou, equivalentemente, em notação matricial *A.X = b*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e observe que a matriz *A* é 3×4 .

Passo 1: Considere a matriz *A* de coeficientes aumentada da coluna *b*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

Passo 2: $L_1 \leftrightarrow L_2$ esta troca ajeita a matriz de coeficientes no caminho de torna-la escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ;$$

Passo 3: Abaixo do pivô 1 que está em L_1 devemos zerar os elementos, portanto, nada será feito na segunda linha. Faremos a operação elementar $L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} ;$$

Passo 4: Não mexemos nem na linha 1 e nem na linha 2. Na linha 2 temos o pivô e vamos realizar uma operação elementar com a linha 3 para zerar o elemento que está abaixo do pivô deste passo:

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 5 \end{array}\right)$$

Já obtemos uma **matriz** 3x4 **na forma escalonada**, e aproveitamos para definir com rigor o que é uma matriz na forma escalonada:

- *se a linha k não consiste apenas de zeros então a quantidade de zeros no início da linha k+1 (linha abaixo) é maior que a quantidade de zeros no início da linha k;*
- *se existirem linhas constituídas só por zeros elas ficam abaixo de todas as demais que não são nulas.*

O sistema a ser resolvido é

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 4x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_3 - 8x_4 = 5 \end{array}\right\} ,$$

ou seja, um sistema de 3 equações e 4 incógnitas que resolvemos por substituição de baixo para cima:

- *da última equação isolamos* x_3 *e obtemos* $x_3 = -5 - 8x_4$;
- *substituindo o valor de* x_3 *na segunda equação e isolando* x_2 *obtemos*
$$x_2 = -2(-5 - 8x_4) - 3x_4 = 10 + 13x_4 \ ;$$
- *substituindo o valor de* x_2 *e isolando* x_1 *na primeira equação*
$$x_1 = -2 - x_2 - 4x_4 = -2 - (10 + 13x_4) - 4x_4 = -12 - 17x_4 \ ;$$
- *e* x_4 *? Esta variável pode assumir qualquer valor real.*

Assim uma solução tem que ser um vetor coluna do tipo :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 17x_4 \\ 10 + 13x_4 \\ -5 - 8x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 . \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e x_4 pode assumir qualquer valor real. Ou seja, o conjunto solução é

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 . \begin{pmatrix} -17 \\ 13 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ \forall x_4 \in R \right\} ,$$

ou seja, existem infinitas soluções e, portanto, o sistema é possível e indeterminado.

Nesse exemplo (ou no anterior) o procedimento da Eliminação de Gauss poderia prosseguir até chegar numa **matriz na forma escada**, isto é,

- além de estar na forma escalonada;
- o primeiro elemento não nulo de uma linha qualquer é 1.

Para tal basta voltamos no passo 4 em que obtivemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

e substituimos a linha 3 por $L_3 \leftarrow -L_3$ e obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} .$$

Ou ainda, poderíamos deixar a **matriz na forma escada reduzida por linha,** isto é:

- além de estar na forma escada ;
- o primeiro elemento não nulo de cada linha é o único elemento diferente de zero na sua coluna.

Para deixarmos a matriz do sistema do exemplo anterior na forma escada reduzida por linha, partimos da forma escada e para, estabelecer a segunda exigência, vamos trabalhar de baixo para cima, ou seja, começando da última linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

- Não mexemos na última linha L3 e devemos operar para que na coluna do pivô desta linha só ocorra zeros. Então devemos modificar apenas L2,neste momento, utilizando a L3

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} ;$$

- Agora fixemos nossa atenção em L2 e não mexemos mais em L3 e L2. Acima do pivô de L2 deve haver apenas zeros. Então vamos modificar L1 operando com L2

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 \end{array}\right) \quad ,$$

- *Conclusão: a matriz de coeficientes está na forma escada reduzida por linha e o sistema equivalente é ainda mais simples de ser resolvido.*

Exemplos de matrizes na forma escada reduzida por linha (página 105).

Exemplo 3: Encontre o conjunto solução do sistema dado por

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=1 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+9x_4=0 \end{array}\right\} \quad ,$$

ou em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

utilizando a eliminação de Gauss até obter a matriz de coeficientes na forma escada reduzida por linhas

1- Partimos da matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad ,$$

2- Fixemos a primeira linha e vamos trabalhar inicialmente para obter a matriz de coeficientes na forma escalonada. Para tal façamos:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad e \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad ,$$

3- E neste passo façamos $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ obtendo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) ,$$

4- Já temos a matriz na forma escada. Mas ainda precisamos modificar a lina L1, operando com L2, para que ela esteja na forma escada reduzida por linha. Façamos $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ para obter

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) .$$

A matriz de coeficientes está na forma escada reduzida por linha. Voltando ao sistema em sua forma usual

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 \quad - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ 0 = -1 \end{array}\right\} ,$$

percebemos que a última equação exige um absurdo! Ou seja, o sistema não possui solução e, portanto, é um sistema impossível.

Observações Importantes

O processo de Eliminação de Gauss começa com a matriz aumentada (A| b) e termina com (R|d) com R na forma escalonada ou escada ou escada reduzida por linhas. Suponha que a matriz R esteja na forma escada reduzida por linhas:

- Se **R é mxn, com m≤ n,** tem linha nula e essa linha corresponde a um elemento de d também nulo então o sistema AX=b tem infinitas soluções ou seja é possível e indeterminado;
- Se R tem linha nula que não corresponde a um elemento nulo de d então o sistema não tem solução ou seja é impossível;
- Um sistema **AX=0 ,** com termo independente nulo, é chamado de **sistema homogêneo**, caso contrário, será não homogêneo. Um sistema homogêneo tem ao menos uma solução, a saber, o vetor nulo X=0. Ou seja, **sistemas homogêneos são sempre possíveis**.
- Um sistema AX=b, $\boldsymbol{n \times n}$,com R sendo uma matriz triangular com nenhuma linha toda nula terá solução única, ou seja, o sistema é determinado.
- Se **RX=d for possível** e o **número de equações não nulas for igual ao número de incógnitas** então o sistema terá **solução única.**

Matriz Inversa e Sistemas Lineares

Considere A uma matriz quadrada $n \times n$. Diremos que *A* é invertível ou não singular se existe uma matriz B, $n \times n$, tal que

A.B=I=B.A,

ou seja, o produto de A por B comuta e o resultado do produto é a matriz identidade.

A matriz *B* é chamada de matriz inversa de *A* e é representada por A^{-1}. Nem sempre existe a inversa de uma matriz! Por que?

Exemplo: Verifique que $B=A^{-1}$*, ou seja, calcule A.B e B.A, encontrando como resultado I*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Propriedades:

P1) Se A é invertível então existe uma única inversa de A.

De fato, se AB=BA=I e AC=CA=I então vale

C=C.I=C.(A.B)=(C.A).B=I.B=B!!

P2) Se A e D são matrizes invertíveis então $(A.D)^{-1}=D^{-1}.A^{-1}$ (Exercício);

P3) $(A^{-1})^{-1}=A$ (Exercício).

P4) Se A é invertível então A^t também é e vale $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ (Exercício).

P5) Se A é $n \times n$ e existe uma matriz B também $n \times n$ tal que *A.B=I* então também vale que B.A=I, ou seja, $B=A^{-1}$. Ou seja, para verificar que B é a inversa de A basta calcular A.B e encontrar I.

Demo (P5): Considere *b* um vetor qualquer. Pela hipótese *AB=I*, *podemos provar que* o sistema *BX=b* tem solução única e, além disso, a solução pode ser encontrada da seguinte forma

$$A.(BX)=A.b \to (A.B).X=A.b \to I.X=A.b \to X=A.b .$$

Portanto, dado o vetor *b* , para *X=A.b* vale

(B.A).b=B(A.b)=B.X=b ,

ou seja, provamos que (B.A).b = b qualquer que seja b. Mas a única matriz que cumpre isto é a identidade I.

Teorema:

Considere A uma matriz quadrada $n\times n$. **Dizer que *A* possui inversa é equivalente a dizer que todo sistema *A.X=b* , sendo *b*, um vetor qualquer tem solução única.**

Demonstração:

$\rightarrow$ Se *A* tem inversa A^{-1} então o sistema AX=b pode ser resolvido assim

$$A^{-1}.AX=A^{-1}.b \quad ;$$

ou seja, a solução única será

$$X=A^{-1}.b \quad .$$

$\leftarrow$ Por outro lado, se qualquer que seja *b* o sistema *AX=b* possui solução única então vamos resolver *n* sistemas

$$(1)\,A.X^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad(2)\,A.X^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad(3)\,A.X^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad\dots\quad(n)\,A.X^{(n)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\quad .$$

Daí montamos a matriz B em que as colunas são as soluções de cada sistema acima respeitando a ordem, isto é,

$$B=\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ X^{(1)} & X^{(2)} & X^{(3)} & \cdots & X^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix} \quad .$$

O produto entre duas matrizes A e B quaisquer, desde que seja possível realizá-lo, pode ser calculado da seguinte forma

$$A.B=A.\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ X^{(1)} & X^{(2)} & X^{(3)} & \cdots & X^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ A.X^{(1)} & A.X^{(2)} & A.X^{(3)} & \cdots & A.X^{(n)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix} \quad .$$

No nosso caso, pelo que foi feito anteriormente, vale

$$A.B = I.$$

OBS: Dessa demonstração obtemos um método para encontrar a inversa de uma matriz A, $n\times n$ *, ou decidir se ela não é invertível. Vamos apresentar isto através de um exemplo*

Exemplo: Vamos encontrar a inversa de $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *ou decidir se a matriz não é invertível.*

A ideia é resolvermos 3 sistemas simultaneamente a saber:

$$(1)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.X^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.X^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.X^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Passo 1: Para resolver simultaneamente consideremos a matriz A aumentada de 3 colunas

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 2: Vamos aplicar o método de Gauss até obter a forma escada reduzida por linha para a matriz A .

L2 ← L2 + 3 L1

L3 ← L3 – L1

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L3 ← L3-L2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Até aqui chegamos com a matriz de coeficientes na a forma escalonada, a seguir, obtemos a forma escada!)

L1 ← -L1

L2 ← (½) L2

L3 ← (- 1/5)L3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

(Agora partimos para obter a forma escada reduzida por linhas)

$$L2 \leftarrow L2 - \frac{7}{2} L3$$

$$L1 \leftarrow L1 + 2\mathrm{L3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L1} \leftarrow \mathrm{L1} + \mathrm{L2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) .$$

Passo 3: Se a forma escada reduzida por linha de A for uma matriz identidade então A é invertível e sua inversa é a matriz que está formada do outro lado. Ou seja,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

Caso não tenha sido possível chegar até a matriz identidade então a matriz *A não é invertível.*

Do que fizemos até aqui podemos concluir que:

1) Dizer que uma matriz quadrada A é invertível é o mesmo que dizer a forma escada reduzida por linha de A é a identidade, que é o mesmo que dizer que todo sistema AX=b tem solução única.
2) Se A tem inversa A^{-1} então a solução única do sistema AX=b é representada por $X=A^{-1}.b$. Mas na prática nunca calculamos a inversa de uma matriz.

Considere uma matriz quadrada 2×2 o mais geral possível

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

vamos realizar as contas para descobrir que condições essa matriz deve satisfazer para ter inversa.

Supomos que $a_{11}\neq 0 \;\; e \;\; a_{21}\neq 0$. Daí fazemos $L2\leftarrow L2-\frac{a_{21}}{a_{11}}L1$ para obter

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \end{pmatrix} .$$

Assim a matriz terá inversa se $a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}=\frac{a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}}{a_{11}}\neq 0$ o equivale a dizer que $det\ A\neq 0$.

Determinante a Inversa e o método de Eliminação de Gauss.

Dada uma matriz quadrada A, a ela está associado um número real chamado de determinante de A, denotado por det A, que tem as seguintes propriedades:

- Se A é uma identidade I então det A = 1;
- Se A tem uma linha então det A =0;
- Ao trocarmos duas linhas de *A* então o determinante troca de sinal;
- Multiplicando toda uma linha por uma constante *k* o determinante fica multiplicado por *k*;
- Aplicando a terceira operação elementar (substituir uma linha por ela mais um múltiplo de outra equação: $(L_i\leftarrow L_i+k\ L_j)$) o determinante não se altera;
- $det\ A=det\ A^t$;
- Se A e B são quadradas e do mesmo tipo $n\times n$ então det (A.B)=det A . det B.

Acreditando na existência do determinante de uma matriz, podemos utilizar o processo de eliminação de Gauss até chegar na forma escada reduzida por linha para encontrar encontrá lo. Vejamos o procedimento no exemplo abaixo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Passo 1: Faça L1 $\leftrightarrow$ L2 e, portando, o det troca de sinal

$$det\,A=-det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Passo 2: Atuamos só com operações elementares do tipo 3

L3 $\leftarrow$ L3-2L1 ; L4 $\leftarrow$ L4-L1 e L5 $\leftarrow$ L5+L1

e o valor do determinante não se altera.

$$det\,A=-det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Passo 3: L2 $\leftarrow$ (1/4)L2 e o valor do det fica multiplicado por 1/4

$$\frac{1}{4}.det\,A=-det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & 12 & 7 \end{pmatrix} \quad ;$$

Passo 4: L3 $\leftarrow$ L3+4L2; L5 $\leftarrow$ -6 L2 e o det não se altera

$$\frac{1}{4}det\,A=-det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Passo 5: L4 $\leftarrow$ L4 – L3 ; L5 $\leftarrow$ L5 + L3

$$\frac{1}{4} \det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 6: $L3 \leftarrow \frac{1}{3} L3$; L4 ← - L4 ; $L5 \leftarrow \frac{1}{2} L5$

$$(\frac{1}{4}).(\frac{1}{3}).(-1).(\frac{1}{2}) \det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Passo 7: L4 ← L4 – 3L5 ; $L3 \leftarrow L3 - \frac{1}{3} L5$; L2 ← L2 – L5 e L1 ← L1-4L5

$$(\frac{1}{4}).(\frac{1}{3}).(-1).(\frac{1}{2}) \det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Passo 8: L2 ← L2 – 2L4 e L1 ← L1 – 5 L4

$$(\frac{1}{4}).(\frac{1}{3}).(-1).(\frac{1}{2}) \det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Passo 9: L2 ← L2 + L3 e L1 ← L1 + 4L3

$$(\frac{1}{4}).(\frac{1}{3}).(-1).(\frac{1}{2}) \det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passo 10: L1 ← L1 -3L2

$$(\frac{1}{4}).(\frac{1}{3}).(-1).(\frac{1}{2})\,det\,A=-det\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=-det\,I=-1$$

Daí obtemos det A = 24.

OBS: Se o processo para obter uma matriz escada reduzida por linha não chegasse na identidade então chegaria em uma matriz com um linha toda nula o que daria det A=0!

Desenvolvimento de Laplace

A definição de determinante não faz uso do escalonamento e segue o que é chamado de desenvolvimento de Laplace. Lembrando que já sabemos calcular o determinante de uma matriz 2×2 , apresentamos o definição para matrizes quadradas $n\times n$, com $n\geq 3$:

1. Numa dada matriz quadrada A, $n\times n$, escolha uma linha de A (ou uma coluna), digamos a i-ésima linha;
2. Considere A_{ij} uma matriz, $(n-1)\times(n-1)$ obtida de A retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna;
3. O determinante de A é definido por

$$det\,A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}.detA_{ij}\quad .$$

Exemplo: Calcule a determinante da matriz abaixo pela definição

$$\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$$

Escolhi a linha 3, isto é, vamos reescrever a fórmula para *i=3:*

$$det\,A=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{3+j}.a_{3j}detA_{3j}=(-1)^{3+1}.3.det\begin{pmatrix}4&7\\5&8\end{pmatrix}+(-1)^{3+2}.6.det\begin{pmatrix}1&7\\2&8\end{pmatrix}+(-1)^{3+3}.9.det\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}$$

Assim det A = 3x (-3) – 6x(-6) + 9x(-3) = -9+36-27=0

OBS: Quanto mais zeros tiver uma linha ou uma coluna menos faremos contas. Portanto, escolha uma linha ou coluna que possua mais zeros.

Exemplo: Calcule o determinante da matriz triangular superior e observe que o resultado é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A definição de determinante pelo desenvolvimento de Laplace nos permite provar todas as 7 propriedades descritas anteriormente, além de mostrar que tanto para matrizes triangulares superiores quanto inferiores o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Exercícios:

1. Utilize as propriedades para mostrar que se A tem inversa A^{-1} então $det\,A \neq 0$ e $det\,A^{-1} = \frac{1}{det\,A}$;
2. Dê um exemplo em que $det(A+B) \neq det\,A + det\,B$.

Teorema: (Relação entre determinantes, matrizes invertíveis e sistemas lineares)

Considere A uma matriz quadrada então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $det\,A \neq 0$;
2. Pelo processo de Gauss aplicado a A obtemos na forma escada reduzida por linha a matriz identidade;
3. A é invertível.
4. O sistema AX=b para qualquer b tem solução única.