ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 10 - INTEGRAIS

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

INTEGRAÇÃO POR PARTES

O método de integração por partes nos permite avançar um pouco mais nos cálculos das integrais.Dadas duas funções deriváveis f(x) e g(x), sabemos do estudo das derivadas que:

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Integrando os dois lados da igualdade em verde na variável x, temos:

$$\int (f(x).g(x))'\,dx = \int (f'(x).g(x) + f(x).g'(x))\,dx$$

Integrando os dois lados da igualdade em verde na variável x, temos:

$$\int (f(x).g(x))'\,dx = \int (f'(x).g(x) + f(x).g'(x))\,dx$$

A integral de $(f(x).g(x))'$ é a própria função $f(x).g(x)$

Deixaremos, a princípio, de adicionar a constante de integração e crescentaremos no momento do cálculo da última integral.

$$f(x).g(x) = \int (f'(x).g(x) + f(x).g'(x))\,dx$$

$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$

A igualdade que pode ser escrita também como:

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx$$

Que em termos práticos também pode ser escrita como:

$$u = f(x) \to \frac{du}{dx} = f'(x) \to du = f'(x).dx$$

$$v = g(x) \to \frac{dv}{dx} = g'(x) \to dv = g'(x).dx$$

Reescrevendo a igualdade em verde em termos de u e v:

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx$$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

Esta igualdade que será de grande utilidade na resolução das próximas integrais.

Exemplos: Calcule as integrais.

a) $I = \int x.\operatorname{sen}x\,dx$

Resolução:

Inicialmente podemos notar que nesta integral I, além de não ser uma integral imediata, não podemos utilizar a mudança de variável. Cabe, neste caso, a integração por partes através da igualdade obtida acima.

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

Fazendo uma comparação entre a igualdade estabelecida e a integral I temos:

$$I = \int x.\operatorname{sen}x\,dx = \int u\,dv$$

Por esta comparação podemos associar:

$$u = x \quad e \quad dv = \operatorname{sen}x\,dx$$

Vamos agora diferenciar a primeira igualdade:

$du = dx$, e integrar a segunda:

$$\int dv = \int \operatorname{sen}x\, dx \rightarrow v = -\cos x$$

Reescrevendo a integral I:

$$I = \int x.\operatorname{sen}x\, dx = \int u\, dv = u.v - \int v\, du = x.(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx$$

$$I = -x.\cos x + \int \cos x\, dx$$

A integral restante é uma integral imediata.

$$I = -x.\cos x + \operatorname{sen}x + C$$

A constante C que representa todas as constantes obtidas.

Portanto:

$$I = \int x.\operatorname{sen}x\, dx = -x.\cos x + \operatorname{sen}x + C$$

Observação: Vale notar que a escolha $u = x \;\; e \;\; dv = \operatorname{sen}x\, dx$ não é arbitrária, pois se tivessemos escolhido $u = \operatorname{sen}x \;\; e \;\; dv = x\, dx$, teríamos na sequência:

$$du = \cos x\, dx$$ e $$\int dv = \int x\, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Ea integral I ficaria:

$$I = \int x.\operatorname{sen}x\, dx = \int u\, dv = u.v - \int v\, du = \operatorname{sen}x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cos x\, dx$$

O que nos levaria a uma integral mais trabalhosa ainda !

$$b)\ I = \int x^2.\cos x\, dx$$

<u>Resolução</u>: Fazendo uma comparação entre a igualdade estabelecida e a integral I temos:

$$I = \int x^2 . \cos x \, dx = \int u \, dv$$

Por esta comparação podemos associar:

$$u = x^2 \quad e \quad dv = \cos x \, dx$$

Observação: A escolha de u e dv é fundamental, como enfatizado no exemplo anterior, uma escolha contraria nos levaria a uma integral bem mais trabalhosa!

Vamos diferenciar a primeira igualdade:

$$du = 2x \, dx$$

E integrar a segunda:

$$\int dv = \int \cos x \, dx \ \rightarrow \ v = \operatorname{sen} x$$

Reescrevendo a integral I:

$$I = \int x^2 . \cos x \, dx = \int u \, dv = u . v - \int v \, du = x^2 . \operatorname{sen} x - \int 2x . \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = x^2 . \operatorname{sen} x - 2 \int x . \operatorname{sen} x \, dx$$

Observem que a integral em vermelho é justamente a integral I do exemplo anterior.

$$I = x^2 . \operatorname{sen} x - 2(-x . \cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

$$I = x^2 . \operatorname{sen} x + 2x . \cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$

Portanto:

$$I = \int x^2 . \cos x \, dx = x^2 . \operatorname{sen} x + 2x . \cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$

Observação: Com a solução destes dois primeiros exemplos, podemos notar que para resolvermos uma integral do tipo:

$\int x^n . \operatorname{sen} x \, dx$ ou $\int x^n . \cos x \, dx$ basta aplicarmos a igualdade chamada Integração por partes n vezes, sempre escolhendo a potência para ser derivada e a função trigonométrica (seno ou cosseno) para ser integrada.

c) $\int x . e^x \, dx$

<u>Resolução</u>: Fazendo uma comparação entre a igualdade estabelecida e a integral I temos:

$$I = \int x . e^x \, dx = \int u \, dv$$

Por esta comparação podemos associar:

$u = x$ e $dv = e^x \, dx$

Vamos agora diferenciar a primeira igualdade e integrar a segunda::

$du = dx$

$$\int dv = \int e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

$$I = \int x . e^x \, dx = \int u \, dv = u . v - \int v \, du = x . e^x - \int e^x \, dx$$

A integral restante é uma integral imediata.

$$I = x . e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C$$

Portanto:

$$I = \int x . e^x \, dx = e^x (x - 1) + C$$

d) $\int x^2 . e^x \, dx$

<u>Resolução</u>: Fazendo uma comparação entre a igualdade estabelecida e a integral I temos:

$$I = \int x^2 . e^x \, dx = \int u \, dv$$

Por esta comparação podemos associar:

$$u = x^2 \quad e \quad dv = e^x \, dx$$

Vamos agora diferenciar a primeira igualdade e integrar a segunda:

$$du = 2x \, dx$$

$$\int dv = \int e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

Reescrevendo a integral I:

$$I = \int x^2 . e^x \, dx = \int u \, dv = u.v - \int v \, du = x^2 . e^x - \int 2x . e^x \, dx$$

$$= x^2 . e^x - 2 \int x . e^x \, dx$$

A integral em vermelho é justamente a integral I do exemplo anterior.

$$I = x^2 . e^x - 2e^x(x-1) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Portanto:

$$I = \int x^2 . e^x \, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Observação: Podemos notar que para resolvermos uma integral do tipo potência (x^n) vezes exponencial basta aplicarmos a igualdade chamada Integração por partes n vezes, sempre escolhendo a potência para ser derivada e a exponencial para ser integrada.

$e) \int x^5 . e^{x^2} \, dx$

Resolução: Neste caso, faremos inicialmente uma mudança de variável:

$$t = x^2 \quad e \quad dt = 2x \, dx \rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} dt$$

Substituindo em I:

$$I = \int x^5 . e^{x^2} \, dx = \int x^2 . x^2 . x . e^{x^2} \, dx = \int t.t.e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^2 . e^t \, dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int t^2 . e^t \, dt$$

Observe que o resultado para a integral em vermelho foi obtido no exemplo d:

$$I = \frac{1}{2}\left(e^t(t^2 - 2t + 2)\right) + C$$

Usando que t=x^2, voltamos à variável original:

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}((x^2)^2 - 2x^2 + 2)\right) + C$$

Portanto:

$$I = \int x^5 . e^{x^2} \, dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^4 - 2x^2 + 2) + C$$