Matrizes

Uma matriz é um objeto matemático constituído por linhas e colunas, cujos elementos são números. Em uma matriz A (notação: usamos letras maiúsculas para denotar matrizes), com m linhas e n colunas, a notação para seus elementos, que nos facilita a localização deles, é chamar o elemento que está na linha de índice i e coluna j de a_{ij} .

Assim utilizamos as notações:

- Diremos que a matriz *A* é *mxn,* significando que possui *m* linhas e *n* colunas;
- Os elementos serão denotados por a_{ij} ; sendo i o índice que representa linhas assim assume valores $i = 1,2, \ldots, m$ e j o índice que representa linhas assim assume valores $j = 1,2, \ldots, n$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$;

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix} .$$

Exemplos:

1) Matriz 3x3: matriz com mesmo número de linhas e colunas

2) Matriz 2x4:

3) Matriz 1x4:

4) Matriz 4x1:

<u>Nomes e Matrizes Especiais</u>

- Uma matriz *A* com o **mesmo número de linhas é colunas**, por exemplo , *n* x *n,* é chamada de **matriz quadrada** (exemplo 1) , **caso contrário** é chamada de **matriz retangular** (exemplos: 2,3 e 4);
- Uma matriz *m* x *1 (exemplo 4) , isto é, uma matriz com uma única coluna,* é chamada de matriz coluna ou vetor coluna;
  Exemplo: matriz 4x1 então chamada de matriz coluna (ou vetor coluna) e é uma matriz retangular

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz *1* x *n (exemplo 3)* é chamada de matriz linha ou vetor linha;

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{matriz 1x5}$$

- Numa matriz **quadrada A, *n* x *n*,** *o*s elementos que tem o mesmo índice para linha e de coluna, representados por $\boldsymbol{a_{ii}}$, estão no que chamamos de **diagonal principal da matriz.**

$$A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$, A,nxn.

- A matriz quadrada, *n* x *n ,* que tem os elementos fora da diagonal principal todos nulos e os $a_{ii}=1$ é chamada de matriz identidade. *Exemplo:*

$$I=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$ *,* nxn.

- Se os elementos da diagonal principal são os únicos não nulos então a matriz é chamada de matriz diagonal.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\lambda_n} \end{bmatrix}$$ nxn matriz diagonal

- Duas matrizes ***A* e *B* são iguais** se tem o mesmo número de linhas e colunas, ***m* x *n*,** e $a_{ij}=b_{ij}, \forall i=1,2,\ldots,m$ e $j=1,2,\ldots,n$.
- Uma matriz em que todos os elementos são nulos é chamada de **matriz nula** e é denotado por O,
- O conjunto de todas as matrizes *m* x *n* em que os elementos são números reais é chamado de $M_{m\times n}$ ou $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Operações com Matrizes de $\mathbb{R}^{m\times n}$

Adição de Matrizes: Dadas duas matrizes *A e B,* ambas ***m* x *n* ,** a matriz soma ***A*+*B*** também é *m* x *n* e seu elemento na posição *ij* é $a_{ij}+b_{ij}$;

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad A+B=\begin{pmatrix} 1-2 & -1+0 \\ 0+0 & 1+1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Multiplicação por escalar: Dados uma número real *k* e uma matriz *A* então a matriz *kA* é a matriz cujo na posição *ij* é $k.a_{ij}$.

$$(1/2).\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

OBS: Combinação linear entre matrizes mesmo tipo e exemplo.

A Transposta de uma Matriz

Seja *A*, *m* x *n*, a matriz transposta de *A,* denotada por A^t , é uma matriz *n* x *m* em que o elemento *ij* é a_{ji} . Assim as linhas da matriz *A* são as colunas de A^t , respeitando a ordem, e as colunas de *A* são as linhas de A^t , respeitando a ordem.

Exemplos:

$$A=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$, matriz 3x2, para obter a matriz A^t, 2x3, $$A^t=\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

O que devemos ter para que $A=A^t$? Primeiro devemos exigir que A seja quadrada:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Para estas matrizes serem iguais neste caso, 2x2, basta exigir que $a_{12} = a_{21}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & k \\ k & a_{22} \end{pmatrix}$$

OBS: *a) A transposta da transposta :* $(A^t)^t=A$;

b) A diagonal principal de A e A^t ***é a mesma;***

c) Se A e B são m x *n então* $(A+B)^t=A^t+B^t$;

d) Se k é um número real então a matriz $(kA)^t=k.A^t$;

e) ***Uma matriz quadrada A é chamada de matriz simétrica se*** $A^t=A$ **;**

Definições: Matriz Triangular Superior (ou Inferior)

Uma **matriz quadrada** é **triangular superior** se todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal são nulos. Uma matriz quadrada será uma triangular inferior se todos elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{matriz triangular superior}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{matriz triangular inferior}$$

<u>Produto entre Matrizes</u>

Considere as matrizes *A, m* x ***n,*** e *B,* ***n*** x *p*. Observe que **o número de colunas de *A* é igual ao número de linhas de *B.*** Para matrizes desse tipo podemos definir a matriz produto ***A.B*** que será uma matriz com o número de linha de *A* e o número de colunas de *B, isto é,* ***A.B é m x p*** e será obtida da seguinte forma:

1) Chamamemos a matriz produto *A.B* de *C, n*a matriz *A* estaremos atentos às linhas e na *B* às colunas

$$C_{m\,x\,p}=A.B=\begin{pmatrix} \cdots A_1 \cdots \\ \cdots A_2 \cdots \\ \vdots \\ \cdots A_m \cdots \end{pmatrix}_{m\,x\,n} . \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{n\,x\,p}$$

2) Chamamemos a matriz produto $A.B$ de C, o elemento ij da matriz produto c_{ij} é calculado utilizando a *i-ésima* linha da matriz A e a *j-ésima* coluna de B

$$\begin{pmatrix} a_{i1} a_{i2} a_{i3} \cdots a_{in} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \quad .$$

Assim $c_{ij} = a_{i1} . b_{1j} + a_{i2} . b_{2.j} + a_{13.} b_{3j} + \cdots + a_{in} . b_{nj}$ ou numa notação de somatório

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{kj} \quad .$$

Exemplos:

1) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ calcule BA , A^2 , $A.H$ e $H.A$

Solução:

- BA : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e Para calcular o elemento ij da matriz produto olhamos para linha i da primeira matriz e para linha j da segunda matriz:

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B . A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ OBS: A.B=0 (matriz nula), mas nem A ou B são matrizes nulas

- A.A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $C = A . A = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ $c_{11} = 1x1 + (-1)x(-2) = 3$ $c_{12} = 1x(-1) + (-1)x(2) = -3$

$c_{21} = (-2)x(1) + (2)x(-2) = -6$ $c_{22} = 6$

OBS: $A.A = A^2$ é uma matriz que possui elementos negativos!

- A.H:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A . H = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

- H.A:

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $\Rightarrow H . A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ OBS: $A.H \neq H.A$

2) Dadas $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcule $C_{2x3}.D_{3x2}$, *que será uma matriz de tamanho* 2x2. *Podemos calcular* D_{3x2} . C_{2x3} e o resultado será 3x3. *Não podemos calcular* C_{2x3} .C_{2x3} *ou* D_{3x2} .D_{3x2} . *Justifique.*

3) Considere vetores ou matriz coluna $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$. Observe que <u>a equação matricial</u>

$$\boldsymbol{A.X=B} \text{ sendo } A=\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix},$$

gera o sistema

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x-y=3}\\\boldsymbol{-2x+2y=-6}\end{Bmatrix}.$$

Solução:

$$A\,X=\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix}_{2x2}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{2x1}=\begin{pmatrix}x-y\\-2x+2y\end{pmatrix}_{2x1}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}_{2x1}$$

Para que esta expressão seja verdadeira: $\begin{Bmatrix}x-y=3\\-2x+2y=-6\end{Bmatrix}$

4) Faça o oposto, considere o sistema

$$\begin{Bmatrix}-2x+y+3z=1\\4x+y+6z=0\end{Bmatrix}$$

e encontre uma equação matricial AX=B a partir dele.

Solução: O vetor coluna de incógnitas e o vetor B de termos que não tem incógnitas e estão do lado direito das equações

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad e \quad B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Identificamos os vetores X_{3X1} e B, agora temos que achar A que faça o sistema tornar-se a equação matricial $A_{2x3}.X_{3x1}=B_{2x1}$.

<u>OBS:</u> A matriz tem tem o número de linhas igual ao número de equações e o número de colunas igual ao número de incógnitas do sistema dado.

$$A.X=\begin{pmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y+3z\\4x+y+6z\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\4 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

$$A.X=B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\4 & 1 & 6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}-2x+y+3z=1\\4x+y+6z=0\end{Bmatrix}$$

Observe como o produto de matrizes é diferente do produto de números:

- Do exemplo um vemos que $AH\neq HA$, ou seja, **em geral o produto de matrizes**, mesmo quando pode ser realizado, **não é comutativo**!
- Pode ocorrer, que BA=0 (matriz nula) sem que A ou B sejam uma matriz nula!
- A matriz A^2 pode não ter todos os seus elementos positivos!

Portanto devemos ter cuidado sobre o que podemos afirmar sobre o produto de matrizes! Daí a importância de conhecermos certas propriedades válidas sempre.

Propriedades das Operações entre Matrizes

A seguir são apresentadas algumas propriedades das operações entre matrizes, cujas demonstrações são deixadas como desafios.

Considere A, B e C matrizes $m \times n$, D matriz $n\,x\,p$ e $\boldsymbol{k}$ um número então valem:

- ***(A+B)+C = A+(B+C)*** , isto é, vale associatividade da soma;
- ***(A+B).D= A.D+ B.D***, isto é, vale a distributividade;
- ***(kA).D = k(A.D) = A.(kD),*** *isto é um número real comuta dentro de um produto de matrizes;*
- Para S matriz $p \times q$ vale: ***(A.D).S=A.(D.S) respeitando a ordem*** *o produto é associativo;*
- $\boldsymbol{(A.D)^t = D^t.A^t} \neq A^t.D^t$; a transposta do produto **não é** o produto das transpostas na ordem dada;
- Se ***m=n*** e *I* é a matriz identidade $n \times n$ então vale ***A.I =I.A= A***.
- Se O é a matriz nula $n \times n$ então *A.O=O.A = O;*

Além dessas propriedades existem formas de interpretar certas contas entre matrizes que nos ajudam em determinados momentos. Por exemplo:

- O produto de uma matriz *B* por um vetor coluna é uma combinação linear das colunas de *B:*

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 . \begin{pmatrix} \vdots \\ B_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 . \begin{pmatrix} \vdots \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + x_n . \begin{pmatrix} \vdots \\ B_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- O produto de um vetor linha por um vetor coluna é o produto interno entre os vetores:

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + a_{3.} b_3 + \cdots + a_n . b_n$$