Gabarito Primeira Avaliação

Álgebra Linear II - (2021/ ERE) - T02

21 de outubro de 2021

Profa Rosane F. Oliveira

Questão 1: No espaço $\mathbf{R}^2$

Considere a reta r_1 dada por *x-y=1.*

Encontre equações paramétricas de r_1 ;

Solução: Com dois pontos da reta r1

A=(2,1) e B=(1,0)

e o vetor AB=B-A=(-1,-1) com a direção da reta obtem-se equações paramétricas

x=1-t;

y=0-t;

Considere o ponto *P=(1,2)* e *Q=(3,0)* e encontre as coordenadas do ponto médio do segmento PQ;

Solução: M=(P+Q).1/2=(2,1)

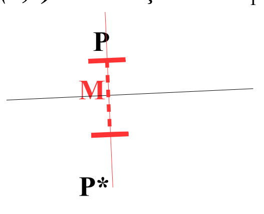
Encontre a equação cartesiana da reta r_2 perpendicular a r_1 e passando por *P=(1,2);*

Solução: Pelas equações paramétricas, r1 o vetor (-1,-1) é paralelo a r1 e, portanto, é perpendicular a r2. Assim a equação cartesiana de r2 será do tipo

-x-y=c

e substituindo P=(1,2) : -1-2=c . Daí a equação cartesiana de r2: ***x+y=3***

Encontre as coordenadas do ponto ***P**** simétrico a ***P=(1,2)*** em relação à r_1 .



Solução: Para encontrar o simétrico a P em relação a r1 precisamos traçar uma reta perpencicular a r1 passando por P, mas isto foi feito em 1.3. Achamos o ponto de interseção entre r1 e r2:

x-y=1

x+y=3

que será o ponto M=(2,1). Vale

*MP=-MP**

e, portanto,

P-M=-(P-M)*

P=2M-P=(4,2)-(1,2)=(3,0)*

Questão 2: No espaço $\mathbf{R}^3$

Considere a*s* retas r_1 , r_2 e r_3 dadas por

$$r_1:\begin{Bmatrix} x=t+1 \\ y=t-1 \\ z=2t \end{Bmatrix} \quad r_2:\begin{Bmatrix} x=s \\ y=s \\ z=2s-3 \end{Bmatrix} \quad e \quad r_3:\begin{Bmatrix} x=k-1 \\ y=1 \\ z=-k+1 \end{Bmatrix} .$$

2.1 Utilize as equações das retas para mostrar que:

(i) r_1 e r_2 são paralelas

(ii) r_2 e r_3 se interceptam em um ponto P

Solução:

(i) Duas retas paralelas têm a mesma direção e, além disso, não têm pontos comuns.

As retas r_1 e r_2 ,pelas suas equações paramétricas, têm direção dada pelo vetor v=(1,1,2).

Os pontos *(x,y,z)* da reta r2 têm as duas primeiras coordenadas iguais, ou seja, *x=y* . Para que os pontos da *r1* tenham as duas primeiras coordenadas iguais o número *t* deve satisfazer *t+1=t-1, ou seja, isto é impossível.* Assim r1 e r2 não têm ponto em comum e isto conclui que as restas são paralelas.

(ii) Para que um ponto *(x,y,z)* esteja nas retas r2 e r3 devemos ter

x=s=k-1

y=s=1

z=2s-3=-k+1

Substituindo s=1 na primeira equação obtemos k=2. Assim, substituindo s=1 na equação de r2 ou k=2 na equação de r3 obtem-se o ponto (x,y,z)=(1,1,-1) nas duas retas. Além disso, as retas não são coincidentes pois são paralelas a vetores que formam ângulo entre si, a saber, v2=(1,1,2) e v3=(1,0,-1) .

2.2 Encontre as equações paramétricas do plano Π, que contem as retas r_2 e r_3.

Solução: O plano que contem as duas retas terá os vetores v2=(1,1,2) e v3=(1,0,-1) e o ponto (1,1,-1). Assim as equações paramétricas são:

$$x=1+s+k;$$

$$y=1+s;$$

$$z=-1+2s-k$$

2.3 Encontre a equação cartesiana de Π .

Solução: Um vetor normal ao plano será

v2 x v3= (-1, 3, -1)

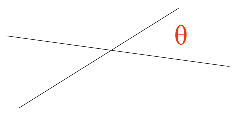
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, o plano tem equação do tipo $-x+3y-z=d$. Para encontrar d substituimos o ponto (1,1,-1)

$$-1+3+1=d \Rightarrow d=3.$$

Assim a equação cartesiana é $-x+3y-z=3$.

2.4 Qual o ângulo entre r_2 e r_3 ?



Solução: O ângulo entre duas retas é o ângulo agudo θ entre elas. Como r2 e r3 tem direções dadas, respectivamente, por v2=(1,1,2) e v3=(1,0,-1) então o ângulo θ terá o cosseno dado por:

$$\cos(\theta)=\frac{|\langle v2,v3\rangle|}{\|v2\|\|v3\|}=\frac{|-1|}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Considere os pontos *A=(1,1,1), B=(2,1,0) , C=(1,2,0) e D=(2,2,2)* vértices de um tetraedro (como na figura).

2.5 Qual a área da face ABC do tetraedro?

(*Dica: A área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo)*

Solução: Pela dica faremos

$$area\ ABC=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| \quad .$$

Temos

$AB=B-A=(2,1,0) -(1,1,1) = (1,0,-1)$

$AC=C-A=(1,2,0)-(1,1,1)=(0,1,-1)$

AB x AC = (1, 1, 1)

$$area\ ABC=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6 Calcule a distância de D ao plano que contem A, B e C:

Solução: Plano que contem o triãngulo ABC tem equação do tipo $x+y+z=d$ e substituindo o ponto A=(1,1,1) obtemos $d=3$. A distância do ponto $D=(2,2,2)$ até o plano será obtida pela fórmula

$$\frac{|d-ax_0-by_0-cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|3-2-2-2|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

2.7 O valor calculado em 2.6 é altura do tetraedro relativa a face ABC. Por que?