UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

ICE – Institutos de Ciências Exatas

DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 3

Componente Curricular:

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)

IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)

Prof. Roseli Alves de Moura

LIMITES – FORMAS INDETERMINADAS

1) **FORMAS INDETERMINADAS:** $\frac{0}{0}$ **-** A resolução dos limites que apresentam essa forma dependente do tipo da função $f(x)$. Vejamos alguns casos:

a) No caso de f ser um quociente de polinômios produzindo $\frac{0}{0}$. Fatorar os polinômios, em seguida simplificar o fator comum: $f(x) = \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)}$. Isto é dividir o numerador e o denominador por $x-a$, onde a é a tendência do limite.

b) No caso de f ser um quociente de expressões envolvendo pelo menos um radical do tipo: $\sqrt{A}-\sqrt{B}$, produzindo $0/0$. Devemos multiplicar e dividir a expressão de f pela forma "conjugada": $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, seguida de uma simplificação.

1) As fórmulas de fatoração vistas no colégio são extremamente úteis nos cálculos de limites nas formas indeterminadas:

- $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp a.b + b^2)$
- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

2) Dispositivo Prático Briott-Ruffini

Importante: Só é possível fazer simplificações quando o numerador e denominador da função quociente estiver na forma fatorada.

a) Pode ocorrer que num limite seja necessário aplicar uma combinação de técnicas estudadas.

Exercícios resolvidos:

1) Calcular os limites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2}{2.x + 1}$ (resolução : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2}{2.x + 1} = \frac{-2}{3}$)

b) $\lim_{x \to -1} (x+3)^{2x+1}$ (resolução: $\lim_{x \to -1} (x+3)^{2x+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$)

2) Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 12}{x^2 - 5x + 6}$

Resolução:

Briott-Ruffini

3 (+⟶)	1 ⟶	-5↓	2↓	12↓
(X ⟵)	1	-2	-4	0

$x^3 - 5x^2 + 2x + 12 = (x-3)(x^2 - 2x - 4)$

3 (+⟶)	1	-5↓	6↓

(x ←	1	-2	0

$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

logo: $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+2x+12}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)(x^2-2x-4)}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{x^2-2x-4}{x-2}$ válida para $x\neq 3$

Portanto: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-4}{x-2}=\dfrac{-1}{1}=-1$

3) Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-x-1}{x^3-1}$

Resolução:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-x-1}{x^3-1}\left(\frac{\sqrt{x+3}+x+1}{\sqrt{x+3}+x+1}\right)=\frac{-x^2-x+2}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+x+1)}=$$

$$=\frac{-x-1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+x+1)}$$

Portanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x-1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x+3}+x+1)}=\dfrac{-1}{6}$

4) **Calcular** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$

Resolução: Para expressões com raiz cúbica empregamos as identidades $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\left(\frac{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1}\right)=$$

$$=\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)((\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1)}=$$

$$=\frac{1}{(x^2-x+1)((\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1)}$$

Logo $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x^2-x+1)((\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{1}{9}$.

5) **Calcular** $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

Resolução: $mmc(2,3) = 6$. Pondo $x = t^6$ e substituindo no limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} = \frac{3}{2}.$$

6) **Calcular: :** $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen2x} - \sqrt{1 - sen2x}}{3senx}$.

Resolução: : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen2x} - \sqrt{1 - sen2x}}{3senx} = \lim_{x \to 0} \frac{2sen2x}{3senx(\sqrt{1 + sen2x} + \sqrt{1 - sen2x})}$.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\cos x}{3(\sqrt{1 + sen2x} + \sqrt{1 - sen2x})} = \frac{2}{3}$$

7) **Calcular** $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ **sabendo que** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **.**

Resolução:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h.\sqrt{x}.\sqrt{x+h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

8) **Considere a função escada assim definida:** $f : \Re \to \Re \,/\, f(x) = N$ **onde N é o maior inteiro contido em** x **.**

a) Ache o conjunto imagem de f **.**

b) Calcule os limites laterais: $\lim_{x \to N_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to N_o^+} f(x)$ **sendo** N_o **um inteiro.**

Resolução:

a) $\text{Im } f = Z = \{..-2,-1,0,+1,+2,..\}$

b) $\lim\limits_{x \to N_0^-} f(x) = N_0 - 1$ e $\lim\limits_{x \to N_o^+} f(x) = N_0$

9) Calcular: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{1 - \sqrt{x}}$

Resolução:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 3x + 3)(1 + \sqrt{x})}{-(x-1)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \{-(x^3 + x^2 + 3x + 3)(1 + \sqrt{x})\} = -16$$

10) **Calcular** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2.x^3 - 5x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ **(**$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 + x + 3}{x - 2} = 24$**).**

Dispositivo prático Briot-Ruffini:

+ →	→	↓	↓	↓
3	2	-5	0	-9
X↑ ←	2	1	3	0
←	←	←	←	

11) Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^4 - 1}$

$$(= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^4 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3 - 4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{16}).$$

12) Calcular os limites laterais. Existe o limite da função no ponto considerado?

$$a)\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\left|2 - \sqrt{x+4}\right|}$$

$$b)\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\left|2 - \sqrt{x+4}\right|}$$

Resolução: a) $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x + 4 < 4 \Rightarrow 2 - \sqrt{x+4} > 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\left|2 - \sqrt{x+4}\right|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 + \sqrt{x+4}}{-1} = -4$$

b) $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x + 4 > 4 \Rightarrow 2 - \sqrt{x+4} < 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\left|2 - \sqrt{x+4}\right|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{-(2 - \sqrt{x+4})} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2 + \sqrt{x+4}}{1} = 4$$

Não, pois os limites laterais são diferentes.