ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 4

Prof. Roseli Alves de Moura

Conteúdo:
Limites Laterais
Limites Indeterminados
Funções contínuas
Teorema do Valor Intermediário

Exercícios - Limites

P-1

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$$ R: -3

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$ R: 0

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$ R: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

d) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$ R: 4/3

e) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$ R: 2/3

CONTINUAÇÃO

TÉCNICAS USUAIS PARA CÁLCULO DE LIMITES INDETERMINADOS

ÁLGEBRA DO SÍMBOLO INFINITO

ADIÇÃO

Indicando um número real por r e uma forma indeterminada por (ind), tem-se:

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$

$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$

$r+(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)+(-\infty)=(\text{ind})$

$(-\infty)+(+\infty)=(\text{ind})$

$(-\infty)-(-\infty)=(\text{ind})$

$r-(+\infty)=-\infty$

$(+\infty)-(+\infty)=(\text{ind})$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$r+(+\infty)=+\infty$

$r-(-\infty)=+\infty$

MULTIPLICAÇÃO

$(+\infty).(+\infty)=+\infty$

$(-\infty).(-\infty)=+\infty$

$(+\infty).(-\infty)=-\infty$

$(-\infty).(+\infty)=-\infty$

$$r.(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \text{se } r>0\\ (\text{ind}), & \text{se } r=0\\ -\infty, & \text{se } r<0\end{cases}$$

$$r.(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & \text{se } r>0\\ (\text{ind}), & \text{se } r=0\\ +\infty, & \text{se } r<0\end{cases}$$

ÁLGEBRA DO SÍMBOLO INFINITO

DIVISÃO

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)} = (\text{ind}) \qquad \frac{r}{(\pm\infty)} = 0 \qquad \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{r}{0}\right) = \begin{cases} (\text{ind}), & \text{se } r = 0 \\ \infty, & \text{a menos de sinal,} \end{cases}$$

$$\frac{2}{\infty} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{0} = \infty$$

POTÊNCIA DE BASE POSITIVA

$$(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$$

$$(+\infty)^{(-\infty)} = 0$$

$$r^{(+\infty)} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } r > 1 \\ (\text{ind}), & \text{se } r = 1 \\ 0, & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$r^{(-\infty)} = \begin{cases} 0, & \text{se } r > 1 \\ (\text{ind}), & \text{se } r = 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < r < 1 \end{cases}$$

2. Caso – Limites indeterminados envolvendo raiz quadrada

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ex: $(\sqrt{x} + 2) \cdot (\sqrt{x} - 2) = \cancel{\sqrt{x}}^{\cancel{2}} - 2^2 = x - 4$

Neste caso, em geral, multiplicar e dividir a expressão pelo conjugado do termo que contém a raiz quadrada observando que o conjugado de (A – B) é (A + B) – vale a recíproca. Com isso teremos uma diferença entre quadrados.

$(a - b)\cdot(a + b) = a^2 - b^2$ ind

Exemplo 1:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x+3} = \frac{\sqrt{9-3-2}-2}{-3+3} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{0}{0}$$

logo:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\right)}{(x+3)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)} \Rightarrow$$

-3	1	1	-6
	1	-2	0

Resto

$(1x - 2)$

ou resolver

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)^{\cancel{2}}-(2)^2}{(x+3)\cdot\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{(x+3)\cdot\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)} = \lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}\cdot(x-2)}{\cancel{(x+3)}\cdot\sqrt{x^2+x-2}+2}$$

$(x - \text{raiz})\cdot(x - \text{ra}$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x-2)}{\sqrt{x^2+x-2}+2} = \frac{-3-2}{\sqrt{4}+2} = \frac{-5}{4}$$

Observe:

$x^2 + x - 6 = 0$

$\Downarrow$

$(x+3)\cdot(x-2) = 0$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -3$ $\qquad$ $x = 2$

Exemplo 2:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \qquad = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3. Caso – Limites envolvendo polinômios com a variável tendendo ao $\pm\infty$

$x^2 \cdot \frac{3}{x} = 3x^1$

$\frac{3x^2}{x^1} = 3x^{2-1}$

$x^2 + 3x = x \cdot (x + 3)$ (usual)

$x^2 + 3x = x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x}\right)$ (em limites)

Neste caso, em geral, colocar em evidência, em cada termo, a maior potência da variável simplificar e usar a álgebra do símbolo infinito.

$\sqrt{x^2} = |x| \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\sqrt{9} = 3 = \sqrt{(3)^2} = \sqrt{(-3)^2}$

$x^2 = 9$

$x = \mp 3$

Módulo

$\cancel{\sqrt{x^2} = x}$

ok

Exemplo 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - x + 1}{x^7 + 1} = \frac{3\cdot\infty^5 - \infty + 1}{\infty^7 + 1} = \frac{+\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\cdot\left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^7\cdot\left(1 + \frac{1}{x^7}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3 - \cancel{\frac{1}{x^4}}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{x^5}}^{\,0}\right)}{x^2\cdot\left(1 + \cancel{\frac{1}{x^7}}_{\,0}\right)} =$$

$$= \frac{3 - 0 + 0}{(+\infty)^2\cdot(1+0)} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Exemplo 2: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x}{\sqrt{4x^2+5}-3x}$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}-3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{-x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-3x}$$

detalhe

Fator "comum" em evidência

Definição de o módulo

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{-x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}+3\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{+\left(\cancel{\frac{1}{x}}-1\right)}{-\left(\sqrt{4}+\cancel{\frac{5}{x^2}}+3\right)} = \frac{-1}{-(2+3)} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

0

0

LIMITES

FUNDAMENTAIS 1 E 2

4. Caso – Limites indeterminados envolvendo trigonometria

coringa: $sen^2 x + cos^2 x = 1$

$sen^2 x = 1 - cos^2 x$

Neste caso, se a variável tender a zero, usar o 1. limite fundamental, isto é: $\frac{0}{0}$ ind.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen(\alpha x)}{x} \right) = \alpha$$

$\lim_{x \to 0} \frac{sen(1x)}{x} = 1$

Dica: Se a função for cos, sec, tg, etc, utilizar as identidades trigonométricas de tal forma que apareça sen x

Se $x \to a$, com $a \neq 0$, $fazer\ x - a = t$ e observar que $x \to a \Leftrightarrow t \to 0$

$cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$sen\, 0° = 0$

$sen\, 90° = 1$

e

$cos\, 0° = 1$

$cos\, 90° = 0$

$\lim_{x \to 0} \left[\frac{sen(2x)}{x} \right]^3 = (2)^3$ cuidado!

Exemplo 1:

$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+\cos^2 x} - 2}{x^2} = \frac{\sqrt{3+\cos^2 0} - 2}{0^2} = \frac{\sqrt{3+1} - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{3+\cos^2 x} - 2}{x^2}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{3+\cos^2 x} + 2\right)}{\left(\sqrt{3+\cos^2 x} + 2\right)}$$

$$-1 + \cos^2 x$$
$$-(1 - \cos^2 x)$$
$$-(\mathrm{sen}^2 x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sqrt{3+\cos^2 x}}^{\,\cancel{2}} - 2^2}{x^2 \cdot \left(\sqrt{3+\cos^2 x} + 2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(3+\cos^2 x - 4\right)}{x^2 \cdot \left(\sqrt{3+\cos^2 x} + 2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} - \frac{\left(\mathrm{sen}\, x\right)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{3+\cos^2 x} + 2\right)}$$

LF

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\right]^2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{3+\cos^2 x} + 2} = 1^2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{-1}{4}$$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Exemplo 2: $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \frac{0}{0}$

Mudança de variável

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{2\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \pi} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{-\text{sen}\, t}{\cancel{\pi} + 2 \cdot t - \cancel{\pi}} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{-1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\, t}{t} = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen}\, t}{t}}_{\text{L. F.}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

1º) Fazendo: $x - \frac{\pi}{2} = t$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 0}$ ∴ $x = \frac{\pi}{2} + t$

Logo: $\boxed{x \to \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{t \to 0}$

2º) cos (a + b) = cos a . cos b – sen a . sen b

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos t - \text{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\, t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \underbrace{\cancel{0 \cdot \cos t}}_{0} - \underbrace{1 \cdot \text{sen}\, t}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\text{sen}\, t \quad \text{ok}$$

5. Caso – Limites indeterminados da forma (1^{∞})

Neste caso, usar o 2. limite fundamental, isto é:

1º exemplo $\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}}= e^{\alpha} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\alpha\cdot\frac{1}{x}\right)^{x}$

Ou $\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x} = e^{\alpha}$

2º exemplo

Exemplo 1:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

Sabendo que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=1^{\infty}\ \text{(indet)}$$

Logo: $\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}\right]^{3} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}$

$$\underbrace{\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}\right]^{3}}=\left[e^{\frac{1}{5}}\right]^{3}=e^{3/5}$$

Exemplo 2:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{0}{0}\ (\text{ind})$$

1) $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

2) $a\cdot \ln b = \ln\left(b^{a}\right)$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\cdot \ln(a+h)-\ln a = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\cdot \ln\left(\frac{a+h}{a}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\ \ln\left(\frac{a+h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\ \ln\left(\frac{a}{a}+\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$\ln\ \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{a}\cdot h\right)^{\frac{1}{h}}}_{\left(e^{\alpha} = e^{1/a}\right)} = \ln(e)^{1/a} = \frac{1}{a}\cdot \ln(e)$$

$$= \frac{1}{a}\cdot(1) = \frac{1}{a}$$

$\log_{(b)}(b) = \cancel{x} = 1$

(def) $\cancel{b}^{\cancel{x}} = b^{1}$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

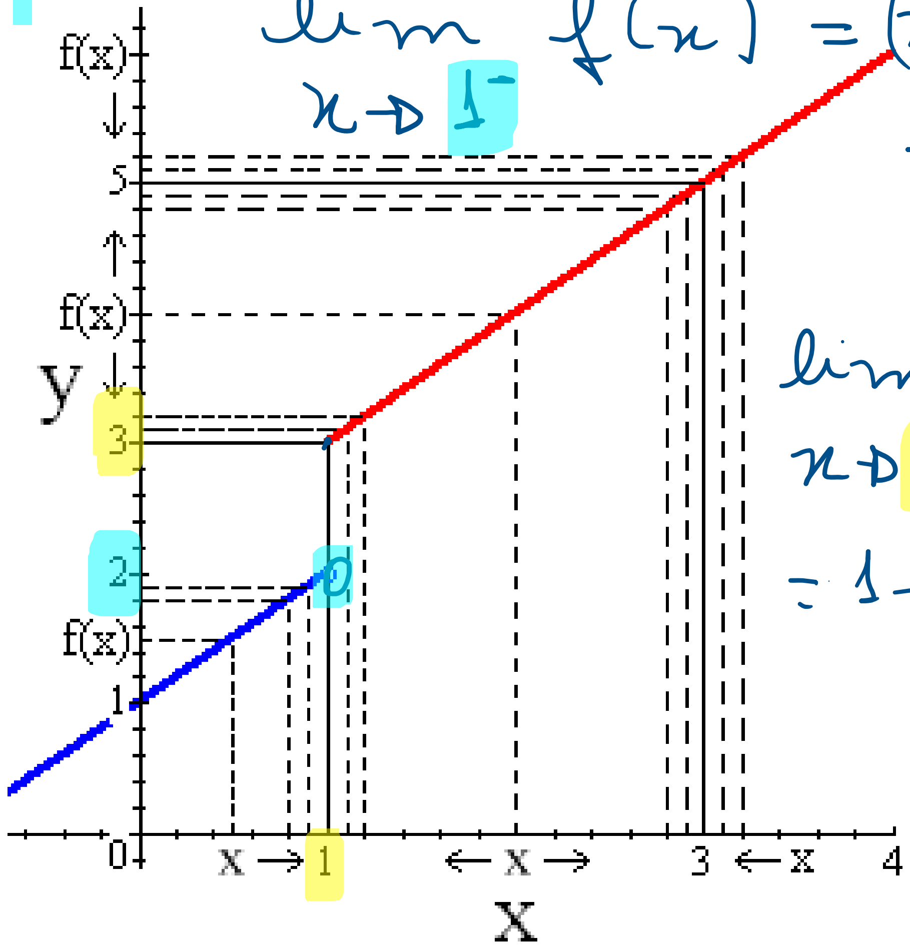
Obs.:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \; se \; x \geq 1 \\ x + 1 \; se \; x < 1 \end{cases}$$

DEFINIÇÃO DE LIMITE LATERAL

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = (x+1)$

$1 + 1 = 2$



$\lim_{x \to 1^+} (x+2)$

$= 1 + 2 = 3$

Não existe limite Lateral no ponto x em questão

Seja f uma função real, de variável real, e **a** um ponto de acumulação do seu domínio.

Diz-se que **b** é o limite de f(x) à esquerda de **a** e escreve-se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

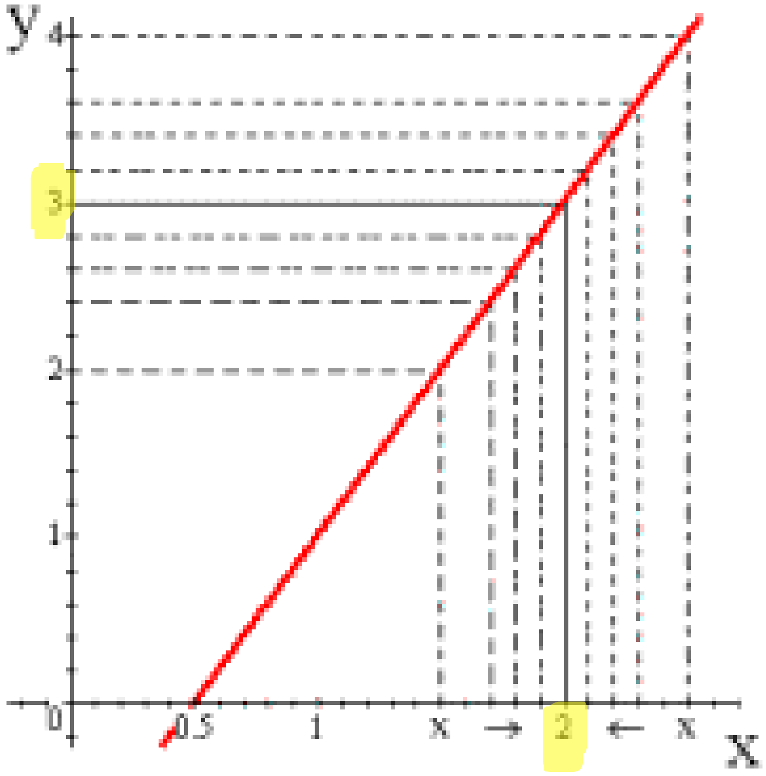
se a toda a sucessão de valores de x tendente para **a** (sendo todos esses valores menores do que **a**) corresponde uma sucessão de valores da função tendente para **b**.

Diz-se que **b** é o limite de f(x) à direita de **a** e escreve-se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

se a toda a sucessão de valores de x tendente para **a** (sendo todos esses valores maiores do que **a**) corresponde uma sucessão de valores da função tendente para **b**.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3 \end{cases}$$



Propriedade 1:

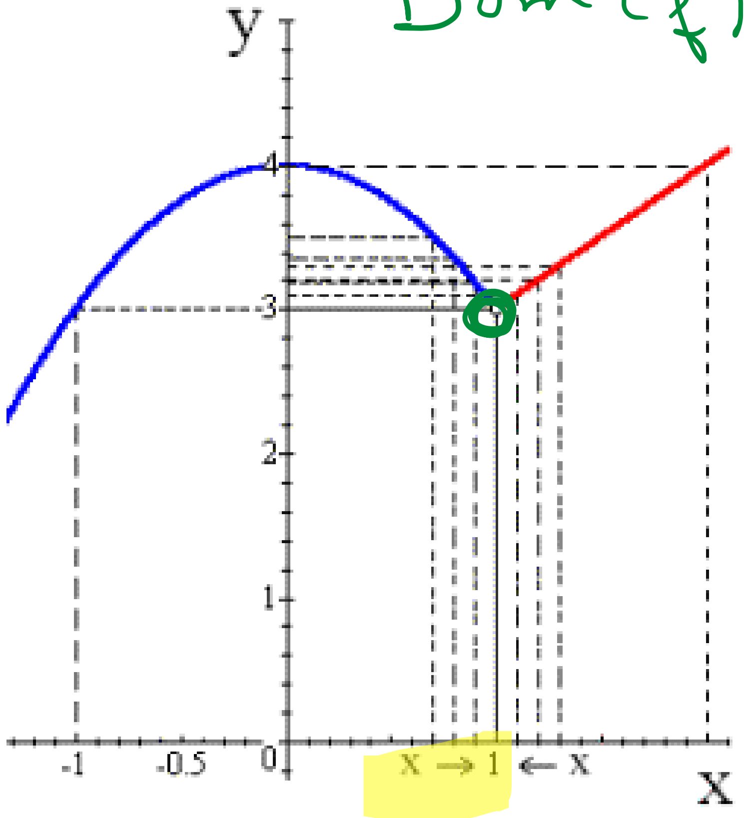
Se o limite de uma função f(x) quando x tende para **a** é **b**, então os limites à direita e à esquerda de **a** também são iguais a **b**.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

$$\lim_{x\to 1^+} x+2 = 1+2 = 3$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 \text{ se } x > 1 \\ 4-x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$



Propriedade 2:

$$\lim_{x\to 1^-} (4-x^2) = 4-(1)^2 = 3$$

Se o limite de f(x) à direita de **a** é igual ao limite de f(x) à esquerda de **a** e o valor comum desses limites é **b**, então o limite de f(x) quando x tende para **a** é igual a **b**.

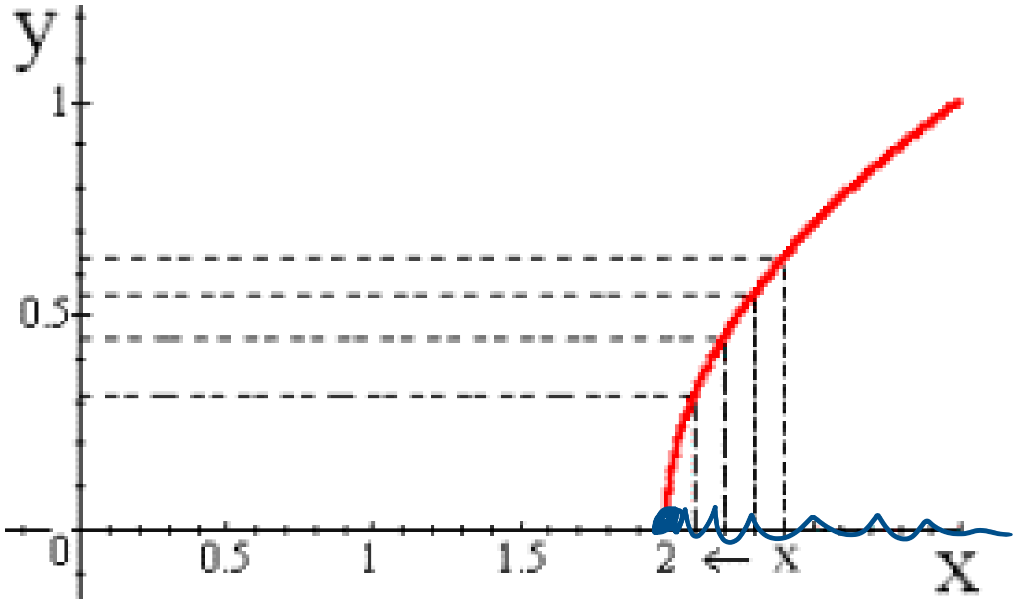
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to a} f(x) = b.}$$

Não existe

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$D_f = [2, +\infty[$$

$$D_f \Rightarrow x \geq 2$$



Propriedade 3:

Se a função f está definida apenas à direita (ou à esquerda) de **a** então o valor do limite de f(x) quando x tende para **a** coincide com o limite à direita (ou à esquerda) de **a**.

FUNÇÕES CONTINUAS - DEFINIÇÕES

Def. 1 - Uma função definida em $x = a$ (existe $f(a)$), se e somente se, existe o limite de f em $x = a$ e ainda vale a condição:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

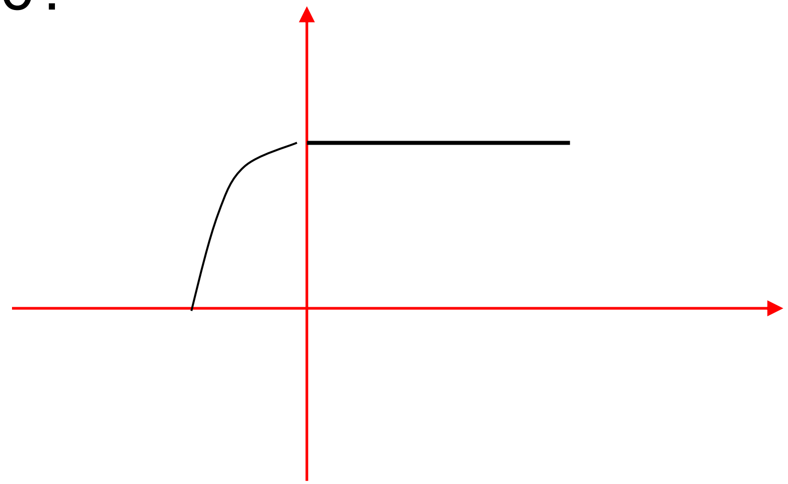
Def. 2 - Uma função é continua num intervalo aberto I se for contínua em cada ponto desse intervalo. Uma função é contínua num intervalo fechado [a,b] se for continua nos pontos internos e nas extremidades do intervalo ocorrer:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \; e \; \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

FUNÇÕES CONTINUAS – EXEMPLO 1

$$f(x) = \begin{cases} 2 \quad se \quad x \geq 0 \\ 2 - x^2 \quad se \quad x < 0 \end{cases}$$

A função é contínua ou não no ponto x= 0?



1. f(0) = 2
2. $\lim_{x \to 0^+} 2 = \lim_{x \to 0^-} (2 - x^2) = 2$

Como as condições da definição estão verificadas, a função dada é contínua no ponto de abscissa x = 0?

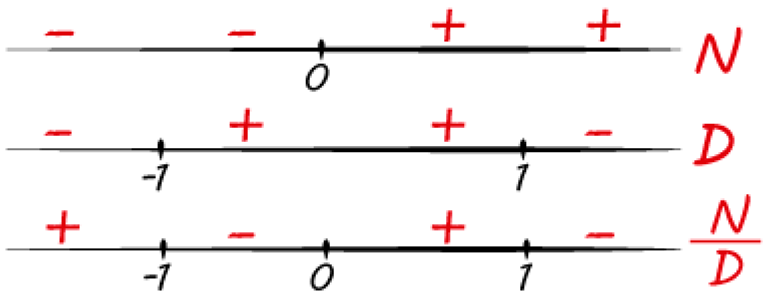
Exemplo 2: Verifique o comportamento da função, com x próximo e maior que 1.

$$f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

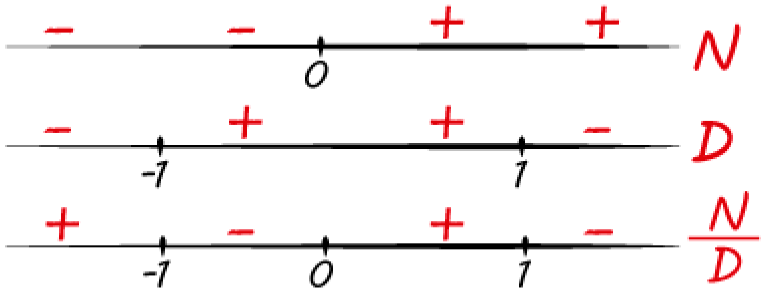
Resolução: $$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\,.\,1}{1 - 1^2} = \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{0}$$

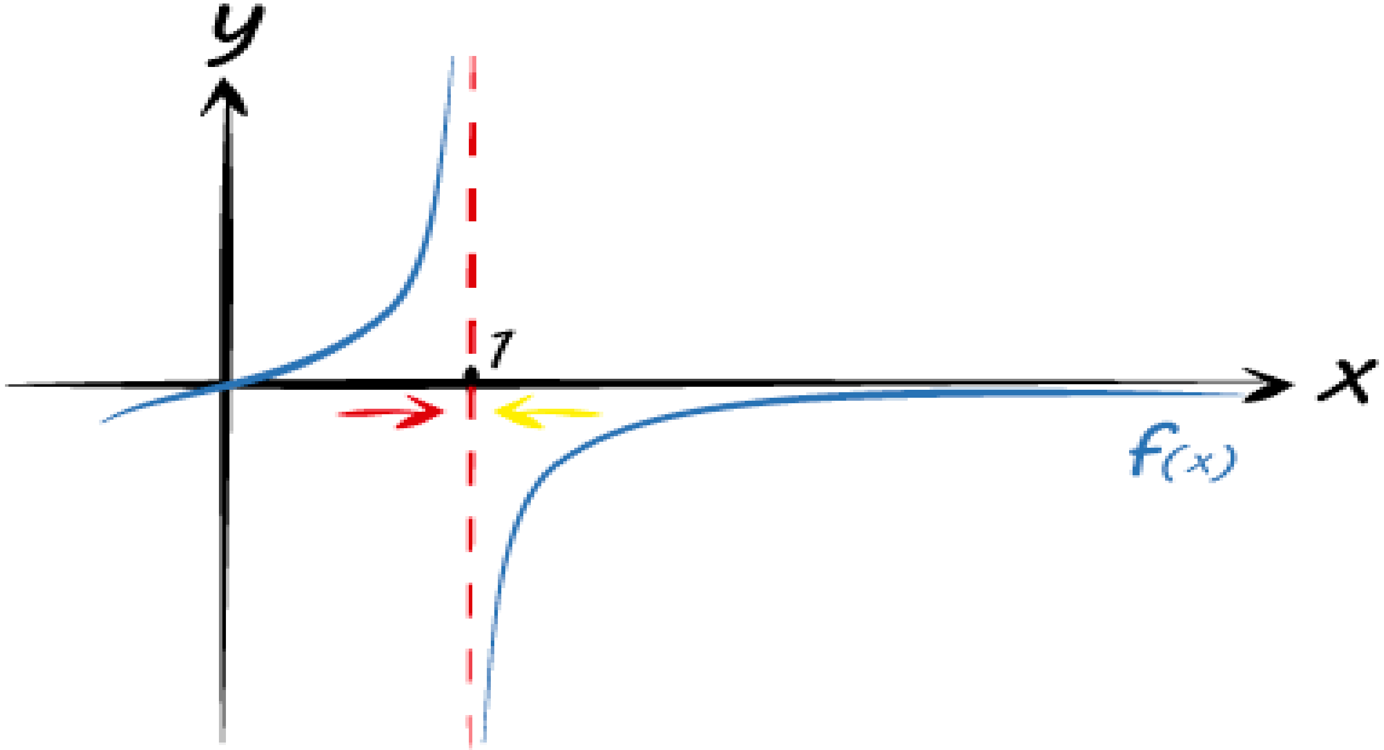
Como não sabemos se o lim tende para o infinito positivo ou negativo, temos que fazer análise de sinal das funções, como pode ser observado a seguir:

$$f(x) = \frac{N}{D} = \frac{2x}{1 - x^2}$$



E se quisermos compreender o comportamento da função, com x próximo e menor que 1?





FUNÇÕES CONTINUAS – EXEMPLO 3

Considere a função: $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x^4+x^2-2}, & se \quad x\neq -1\\ K, & se \quad x=-1\end{cases}$$

a) Se k = 1, a função é contínua em x = - 1?
b) Se a resposta for negativa, determinar o valor de ka para que seja contínua.

Resolução: No item a) pede-se que $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x^4+x^2-2}, & \text{se } x\neq -1\\ 1, & \text{se } x=-1\end{cases}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x^4+x^2-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x^3-x^2+2x-2)(\sqrt{x+2}+1)}=-\frac{1}{12}\neq 1$$

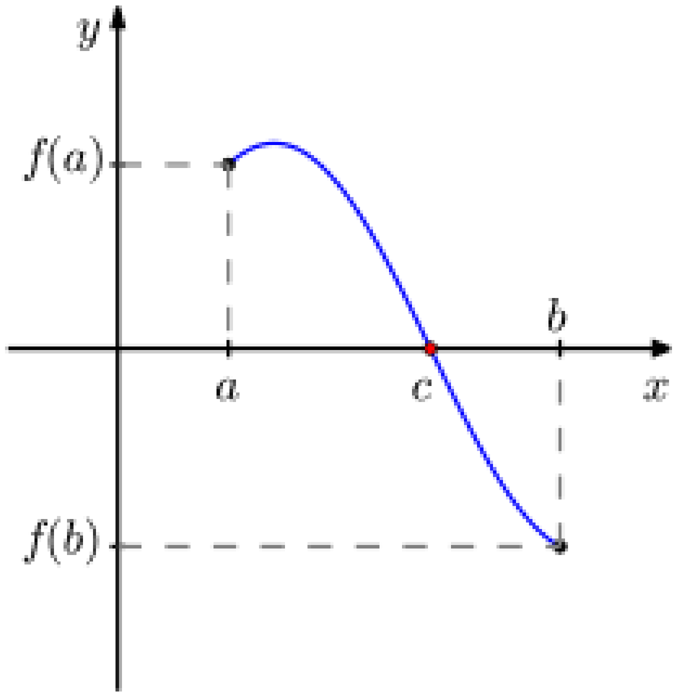
Logo, f não é contínua.

b) Basta colocar k = -1/12

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado [a,b] e seja N um número qualquer entre f(a) e f(b), em que f(a) ≠ f(b). Então existe um número c em (a,b) tal que f(c) = N.

O teorema do Valor Intermediário afirma que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores da função f(a) e f(b).



Uma das aplicações do teorema é a localização das raízes de equações.

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO - EXEMPLO

Mostre que existe uma raiz da equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$, entre 1 e 2

Resolução: Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$

Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Portanto, tomamos $a = 1$ e $b = 2$ e $N = 0$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$
$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Logo $f(1) < 0 < f(2)$, isto é $N = 0$ é um número entre $f(1)$ e $f(2)$.

Como f é contínua, o TVI nos garante que tem pelo menos uma raiz c no intervalo (1,2)

EXTRAS TEORIAS DE LIMITES

TEOREMA DO CONFRONTO (OU SANDUÍCHE)

Se *f*, *g* e *h* são funções que estão definidas em algum intervalo aberto I que contém x_0, exceto, possivelmente, no próprio x_0, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo x em I, tal que $x \neq x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

TEOREMA DO CONFRONTO - EXEMPLO

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}, se\left|f(x)\right| \le x^3 \forall x \in \Re$$

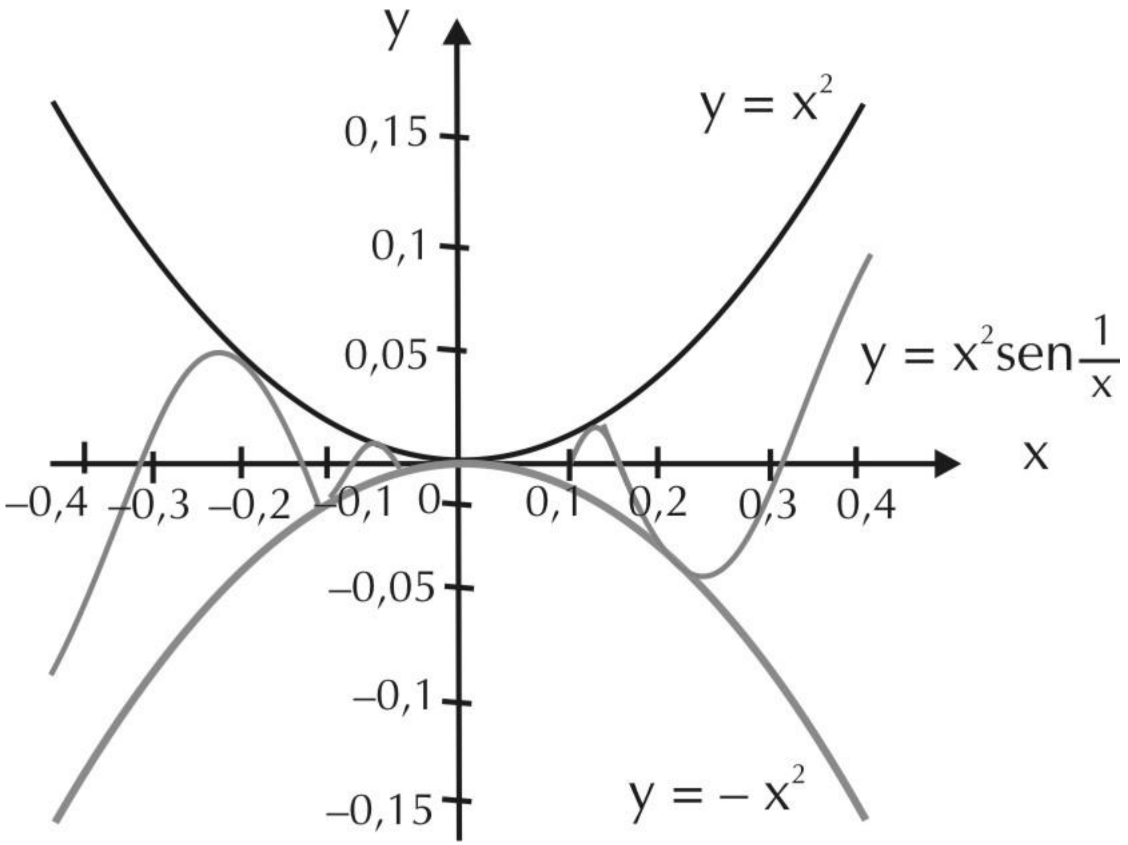
Sabemos que: Se $|f(x)| \le x^3$, então $-x^3 \le f(x) \le x^3$

- Dividindo por x^2 toda a inequação temos: $$-x \le \frac{f(x)}{x^2} \le x$$

- Pelo teorema do confronto: $$\lim_{x\to 0}(-x) \le \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} \le \lim_{x\to 0} x$$

$$0 \le \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} \le 0 \therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Ilustração do uso do teorema do confronto



$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$