UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

ICE– Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 – SEMANA 8 - APLICAÇÕES

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

DERIVADAS – TAXAS DE VARIAÇÃO

Como já vimos, os termos taxa, razão, quão rápido, velocidade, etc estão de maneira geral associados a **derivada** de alguma função (GRANDEZA) em relação ao **tempo t**: $\frac{df}{dt}$. A regra da cadeia vista anteriormente estabelece uma relação entre duas taxas: $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}.\frac{dx}{dt} = f'(x).\frac{dx}{dt}$.

EXERCÍCIOS

1) Injeta-se ar em um balão esférico a uma taxa constante de $0{,}01.\pi\frac{m^3}{s}$. Determinar a razão com a qual aumenta
a) o raio do balão;
b) a área da superfície do balão.
No instante em que o raio do balão medir 0,05m.

Resolução:

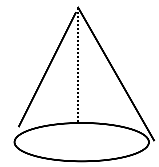
a) Volume de uma esfera: $V = \frac{4\pi}{3}r^3$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}.\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \qquad \Rightarrow 0{,}01.\pi = 4\pi(0{,}05)^2\frac{dr}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 1\frac{m}{s}$$

b) A área superficial da esfera: $S = 4\pi.r^2$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr}.\frac{dr}{dt} = 8.\pi.r.\frac{dr}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 8.\pi.0{,}05.1\frac{m^2}{s} = 0{,}4.\pi\frac{m^2}{s}$$

2) Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone cuja altura é igual ao raio da base em todo instante do processo. Se o volume de areia cresce a uma taxa fixa de $10\frac{m^3}{h}$, com que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de 4m?



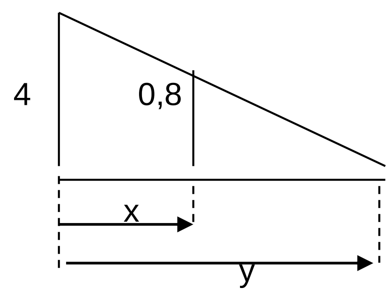
<u>Resolução</u>: Volume de um cone: $V=\frac{\pi}{3}.r^2.h$

No caso de $r=h \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}.r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\pi.r^2.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{1}{\pi.r^2}.\frac{dV}{dt}$

Área da base: $A=\pi.r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt}=2.\pi.r.\frac{dr}{dt}=\frac{2}{r}.\frac{dV}{dt}=\frac{20}{4}=5\frac{m^2}{h}$

3) Uma lâmpada colocada em um poste está a 4 m de altura. Se uma criança de 80 cm de altura aproximando-se da lâmpada à razão de $5\frac{m}{s}$, com rapidez se encurta sua sombra?

<u>Resolução</u>: Semelhança de triângulos



$$\frac{4}{y}=\frac{0,8}{y-x} \Rightarrow y=\frac{5}{4}.x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{4}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{5}{4}(-5)=-6,25\frac{m}{s}$$

4) Um aplicativo de computador exibe na tela de um monitor um quadrado que se inicia com um ponto e vai se expandindo até um tamanho fixado e retorna novamente a um ponto. A área (em mm^2) desse quadrado em função do tempo t de exposição (t em segundos) é definida por $A=12.t-t^3$.Determinar:

a) a área do quadrado no instante $t=1s$.
b) O lado do quadrado no instante $t=2s$.
c) A taxa de variação da área do quadrado nos instantes $t=1s, t=2s, t=3s$.
d) A taxa de variação do lado do quadrado nos instantes $t=1s, t=3s$.

e) A expressão da medida do lado do quadrado em função do tempo.

<u>Resolução</u>:

a) $A(1) = 12 - 1^3 = 11 mm^2$

b) $A(2) = 24 - 2^3 = 16 mm^2 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{16} = 4mm$

c) $\frac{dA}{dt} = 12 - 3.t^2$

$\frac{dA}{dt}(t=1) = 9\frac{mm^2}{s}$ área crescendo

$\frac{dA}{dt}(t=2) = 0\frac{mm^2}{s}$ o quadrado atingiu área máxima

$\frac{dA}{dt}(t=3) = -15\frac{mm^2}{s}$ área decrescendo

d) $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dL}.\frac{dL}{dt} = 2L.\frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2L}.\frac{dA}{dt}$

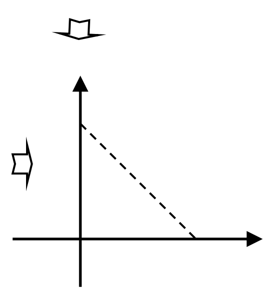
$\frac{dL}{dt}(t=1) = \frac{1}{2\sqrt{11}}.9\frac{mm}{s}$ lado crescendo

$\frac{dL}{dt}(t=3) = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-15) = -\frac{5}{3}\frac{mm}{s}$ lado decrescendo

e) $L = \sqrt{12.t - t^3} mm$

$\frac{dL}{dt} = \frac{12 - 3.t^2}{2\sqrt{12.t - t^3}}\frac{mm}{s}$

5) Uma viatura de polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que toma a direção leste. Quando a viatura está a 4 Km ao norte do cruzamento e o carro do fugitivo a 3 Km a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e fugitivo está aumentando a 20 $\frac{Km}{h}$. Se a viatura está se deslocando a 60 $\frac{Km}{h}$ no instante dessa medida, qual é a velocidade do fugitivo?



<u>Resolução:</u>

Distância entre os carros: $s^2 = x^2 + y^2$

Derivando em t: $2s.s' = 2x.x' + 2y.y'$

$\sqrt{3^2 + 4^2}.20 = 4.x' + 3.(-60) \Rightarrow x' = 75$ Km por hora.

6) Um reservatório tem a forma de um cone reto invertido com raio da base 4 m e altura 12 m. Injeta-se água no tanque a razão de $0{,}2\ \dfrac{m^3}{\min.}$. Determinar a razão segundo a qual o nível da água está se elevando quando a altura da água é de 8 m.

7) Uma bola de neve esférica de raio R>0 está derretendo uniformemente de modo que sua superfície ($S = 4\pi R^2$) diminui a uma taxa de $10\dfrac{cm^2}{\min.}$, determinar a variação do volume ($V = \dfrac{4\pi}{3}R^3$) quando o raio medir 16 cm.

8) Um protetor de tela exibe um retângulo colocado num sistema de coordenadas cartesianas (virtual) do seguinte modo: dois lados sobre os eixos, um vértice está na origem do sistema de coordenadas cartesianas, e um outro vértice desliza sobre o arco de parábola $y = 6x - x^2$, $0 \le x \le 6$, A área do retângulo cresce a uma taxa constante de $0{,}24\dfrac{pol^2}{s}$, com taxa cresce a sua altura no instante que o comprimento da base é de 2 pol.