ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 4

Componente Curricular:
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 02 (2020.1)
IC241 - CÁLCULO I (90h) - Turma: 07 (2020.1)
Prof. Roseli Alves de Moura

LIMITES FUNDAMENTAIS

Os limites abaixo são importantes para o próximo tópico: a derivada. Porém suas as demonstrações exigem um conhecimento matemático mais avançado do que temos no momento. Por isso apenas ilustramos os resultados.

1^0) PRIMEIRO LIMITE FUNDAMENTAL $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$ (F0RMA BÁSICA)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(\alpha.x)}{x} = \alpha \quad \text{(FORMA GENERALIZADA)}$$

Nota: A proposição nos diz que nas proximidades de zero, o seno de um arco é praticamente igual ao arco ($senx \approx x$).Ver tabela abaixo.

X:rad	0,04	0,03	0,02	0,01	0,005	...	$x\to 0$
$sen(x)$	0,03998 9	0,02999 5	0,01999 8	0,00999 9	0,00499 9	....	$\text{sen}(x) \to 0$
$\dfrac{\text{sen}\, x}{x}$	0,99973	0,99985	0,99993	0,99998	0,99999	......	$f \to 1$

A função $f(x) = \dfrac{senx}{x}$ é par, isto é: $f(-x) = f(x)$. Use uma calculadora para esboçar seu gráfico.

Exercícios:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+senx} - \sqrt{1-2senx}}{x}$

Resolução:
Multiplicando e dividindo pelo “conjugado” e usando o 1^0 limite fundamental teremos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+senx}-\sqrt{1-2senx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+senx-1+2senx}{x(\sqrt{1+senx}+\sqrt{1-2senx})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\frac{3}{\sqrt{1+senx}+\sqrt{1-2senx}}=\frac{3}{2}$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2sen3x}{x+sen5x}$

Resolução: Dividindo o numerador e denominador por x , vem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2sen3x}{x+sen5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2\frac{sen3x}{x}}{1+\frac{sen5x}{x}}=\frac{0-6}{1+5}=-1$$

2⁰) **SEGUNDO LIMITE FUNDAMENTAL :** $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

Todos os limites da forma indeterminada 1^∞ são potências do número e ≅2,71828182846 é o que diz o próximo resultado:

Teorema : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-1].g(x)}$ (SEGUNDO GENERALIZADO)

(Prova-se pondo: $f(x)=1+\frac{1}{v(x)}\Rightarrow\frac{1}{v(x)}=f(x)-1\ ou\ seja\ \frac{g(x)}{v(x)}=[f(x)-1].g(x)$).

A tabela abaixo ilustra o segundo limite fundamental

X	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000	...	$x\to\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2,718268	2,718280	2,718281	2,7182818	...	$f\to e$

Exercícios:

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Resolução: Forma 1^∞

Logo $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right).x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = e^{2}$

4) $\lim_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{2}{x^2}}$

Resolução: $\lim_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{2}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}(-2)} = e^{-2}$

MAIS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular os limites abaixo (usando os limites fundamentais)

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+2}\right)^{x}$

Resolução: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+2}\right)^{x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x^2+2}} = e^{0} = 1$

6) **Aplicação** – Juros compostos contínuos.

A fórmula geral do montante é $C_n = C(1+i)^n$ onde C é o capital inicial, i a taxa , n o número de períodos e C_n o montante no final dos n períodos.
Seja K o número de capitalizações (anualmente, semestralmente, trimestralmente , mensalmente, etc) em 1 ano e n o número de anos. O montante agora é $C_n = C(1+\frac{i}{k})^{k.n}$.
Fazendo o número de capitalizações tendendo para o infinito teremos:

$$C_n = \lim_{k\to\infty} C.(1+\frac{i}{k})^{k.n} = C.e^{i.n}$$

A taxa instantânea i_I equivalente a anual i é dada por : $i_I = \ln(1+i)$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

Resolução: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen 2x}{x\cos 2x} = 2$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec 2x-1}{x^2}$

Resolução :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec 2x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sec 2x-1)(\sec 2x+1)}{x^2(\sec 2x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{x^2(\sec 2x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen 2x}{x}\right)^2\frac{1}{\cos^2 2x(\sec 2x+1)}=2^2\,\frac{1}{2}=2$$

Outro modo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec 2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos 2x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2\cos 2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2\cos^2 2x(1+\cos 2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 2x}{x^2}\frac{1}{\cos^2 2x(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen 2x}{x}\right)^2\frac{1}{\cos^2 2x(1+\cos 2x)}=$$

$$2^2\,\frac{1}{2}=2$$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{senx}{x^2}$

Resolução : Observe que o $\lim\limits_{x\to\infty} senx$ não existe, pois as imagens da função seno percorrem todo o intervalo $[-1,1]$ na medida que x vai aumentando.

Dividindo por x^2 as desigualdades $-1\le senx\le 1$ obtemos : $\dfrac{-1}{x^2}\le\dfrac{senx}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$.

Tomando o limite ($x\to\infty$) da última relação teremos:

$$0\le\lim_{x\to\infty}\frac{senx}{x^2}\le 0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{senx}{x^2}=0$$

10) Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sabendo que

a) $f(x)=senx$ b) $f(x)=\cos x$.

Resolução:

a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-senx}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2sen(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=\cos x$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2sen(\frac{h}{2})sen(x+\frac{h}{2})}{h}=-senx$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$

Resolução :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\ln(\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}})=\ln(e^{\lim\limits_{x\to 2}(\frac{x}{2}-1)\frac{1}{x-2}})=\ln e^{1/2}=\dfrac{1}{2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

Resolução : Pondo $t=a^x-1\Rightarrow x=\dfrac{\ln(t+1)}{\ln a}$ vem:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\ln a.\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\ln a$