UTFPR
Disciplina: EL66J
Prof. Gustavo B. Borba

Notas de aula #5
ÁLGEBRA BOOLEANA e SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA

Em uma publicação científica de 1854, denominada *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability*, o matemático inglês George Boole (por isso o nome **álgebra Booleana**, com maiúscula) estabeleceu os princípios de um sistema algébrico para variáveis binárias (variáveis que assumem apenas dois valores).

Em 1938, o matemático e engenheiro eletricista norte americano Claude E. Shannon utilizou a álgebra Booleana para analisar e descrever circuitos elétricos baseados em relés. Faz todo sentido, já que os contatos dos relés são variáveis binárias: só interessam as situações nas quais está aberto ou fechado. O título do artigo científico publicado por ele é *Symbolic analysis of relay and switching circuits*.

Nos tópicos a seguir, observe que os **axiomas** (afirmações que não exigem provas para serem consideradas verdadeiras [1]) da álgebra Booleana estabelecem aquilo que utilizamos como ponto de partida: as operações *não*, *e*, *ou* e que os estados das variáveis são *mutuamente exclusivos*. Os **teoremas** podem ser considerados como o conjunto de regras para a manipulação das variáveis.

Em eletrônica digital, os teoremas podem ser utilizados em uma técnica de simplificação de equações lógicas (que agora podemos chamar também de equações Booleanas) denominada **simplificação algébrica**. O objetivo de um processo de simplificação de uma equação lógica é obter uma equação equivalente à original, porém mais simples [claro!].

Duas equações lógicas são *equivalentes* quando apresentam a mesma tabela verdade. *Mais simples* pode ser entendido como menor. Por isso, este processo também é chamado de *minimização* de uma equação lógica. A simplificação é importante porque pode permitir (não necessariamente) a implementação de um circuito digital mais compacto, portanto mais vantajoso que suas versões não minimizadas.

- *Axiomas* (há autores que chamam de *postulados*)

a1) $A = 0$ se $A \neq 1$ a1') $A = 1$ se $A \neq 0$

---

a2) se $A = 0$, então $\overline{A} = 1$ a2') se $A = 1$, então $\overline{A} = 0$

---

a3) $0 \cdot 0 = 0$ a3') $1+1 = 1$

a4) $1 \cdot 1 = 1$ a4') $0+0 = 0$

a5) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ a5') $1+0 = 0+1 = 1$

- Teoremas (há autores que chamam de *leis*, *propriedades*, *identidades*, *regras*)

t1)	$\overline{\overline{A}} = A$			Involução
t2)	$A\cdot 0 = 0$	t2')	$A+1 = 1$	Elementos nulos
t3)	$A\cdot 1 = A$	t3')	$A+0 = A$	Identidades
t4)	$A\cdot A = A$	t4')	$A+A = A$	Idempotência
t5)	$A\cdot\overline{A} = 0$	t5')	$A+\overline{A} = 1$	Complementos
t6)	$A\cdot B = B\cdot A$	t6')	$A+B = B+A$	Comutativa
t7)	$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$	t7')	$(A+B)+C = A+(B+C)$	Associativa
t8)	$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$	t8')	$A+(B\cdot C) = (A+B)\cdot(A+C)$	Distributiva
t9)	$A\cdot(A+B) = A$	t9')	$A + A\cdot B = A$	Absorção
t10)	$A\cdot(\overline{A}+B) = A\cdot B$	t10')	$A + \overline{A}\cdot B = A+B$	Absorção
t11)	$(A+B)\cdot(A+\overline{B}) = A$	t11')	$A\cdot B + A\cdot\overline{B} = A$	Adjacência lógica
t12)	$A\cdot B + \overline{A}\cdot C + B\cdot C = A\cdot B + \overline{A}\cdot C$	t12')	$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C) = (A+B)\cdot(\overline{A}+C)$	Consenso
t13)	$\overline{A\cdot B\cdot \ldots\cdot Z} = \overline{A}+\overline{B}+\ldots+\overline{Z}$	t13')	$\overline{A+B+\ldots+Z} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\ldots\cdot\overline{Z}$	DeMorgan

- Algumas provas

t9) $A\cdot(A+B) = A$

$(A+0)\cdot(A+B)$
$A+(0\cdot B)$
$A+0$
A

t9') $A + A\cdot B = A$ — Absorção

$A\cdot 1 + A\cdot B$
$A\cdot(1+B)$
$A\cdot 1$
A

t10) $A\cdot(\overline{A}+B) = A\cdot B$

$A\cdot\overline{A} + A\cdot B$
$0 + A\cdot B$
$A\cdot B$

t10') $A + \overline{A}\cdot B = A+B$ — Absorção

$(A+\overline{A})\cdot(A+B)$
$1\cdot(A+B)$
$A+B$

t11) $(A+B)\cdot(A+\overline{B}) = A$

$A + (B\cdot\overline{B})$
$A + 0$
A

t11') $A\cdot B + A\cdot\overline{B} = A$ — Adjacência lógica

$A\cdot(B+\overline{B})$
$A\cdot 1$
A

t12) $A\cdot B + \overline{A}\cdot C + B\cdot C = A\cdot B + \overline{A}\cdot C$

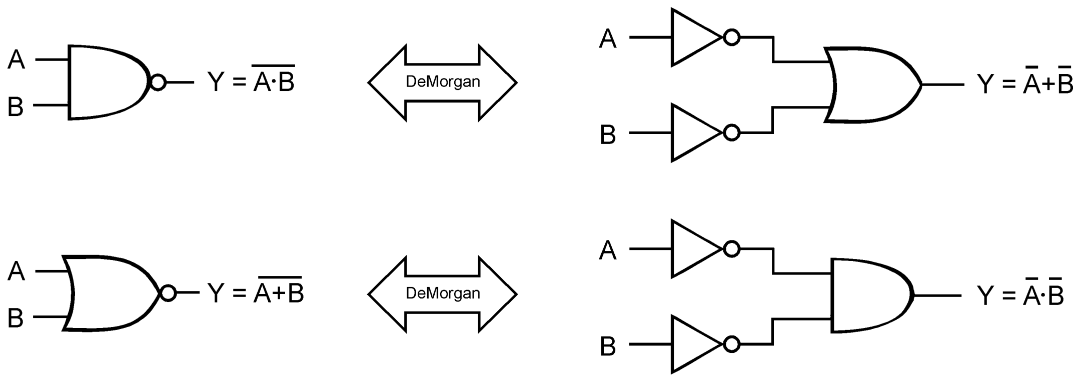
$A\cdot B + \overline{A}\cdot C + B\cdot C\cdot(A+\overline{A})$
$A\cdot B + \overline{A}\cdot C + B\cdot C\cdot A + B\cdot C\cdot\overline{A}$
$A\cdot B + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot C + \overline{A}\cdot C\cdot B$
$A\cdot B\cdot(1+C) + \overline{A}\cdot C\cdot(1+B)$
$A\cdot B\cdot 1 + \overline{A}\cdot C\cdot 1$
$A\cdot B + \overline{A}\cdot C$

t12') $(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C) = (A+B)\cdot(\overline{A}+C)$ — Consenso

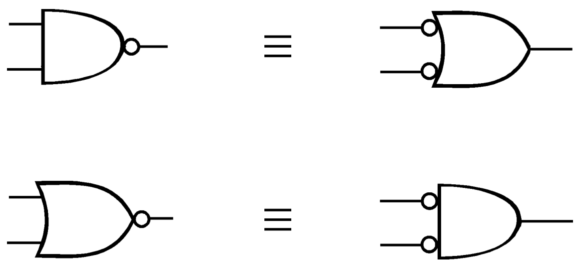
$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot((B+C)+A\cdot\overline{A})$
$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C+A)\cdot(B+C+\overline{A})$
$(A+B)\cdot(A+B+C)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(\overline{A}+C+B)$
$((A+B)+(0\cdot C))\cdot((\overline{A}+C)+(0\cdot B))$
$(A+B+0)\cdot(\overline{A}+C+0)$
$(A+B)\cdot(\overline{A}+C)$

- Símbolos equivalentes para as portas NE e NOU

Conforme os teoremas de DeMorgan:



Assim, às vezes são utilizados os símbolos a seguir para representar as portas NE e NOU:



- Exemplos

1. DeMorgan

a) $Y = \overline{A+B+C}+\overline{\overline{D}\cdot E}$

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{\overline{D}}+\overline{E}$

$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + D+\overline{E}$

b) $Y = \overline{A\cdot B\cdot C + D\cdot E\cdot F}$

$\overline{A\cdot B\cdot C}\cdot\overline{D\cdot E\cdot F}$

$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{D}+\overline{E}+\overline{F})$

c) $Y = \overline{(A\cdot B+C)\cdot(D+E\cdot F)}$

$(\overline{A\cdot B+C})+(\overline{D+E\cdot F})$

$(\overline{A}+\overline{B})\cdot\overline{C} + \overline{D}\cdot(\overline{E}+\overline{F})$

d) $Y = \overline{\overline{A+B\cdot\overline{C}}+D\cdot(\overline{E+\overline{F}})}$.

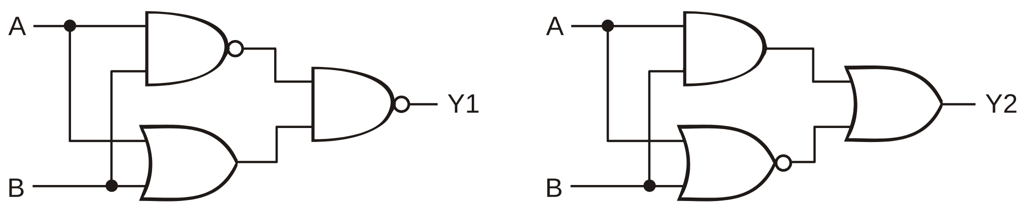
$\overline{(\overline{A}\cdot(\overline{B}+\overline{\overline{C}}))+(D\cdot(\overline{E}\cdot\overline{\overline{F}}))}$

$(\overline{\overline{A}}+(\overline{\overline{B}}\cdot\overline{C}))\cdot(\overline{D}+(\overline{\overline{E}}+\overline{F}))$

$(A+B\cdot\overline{C})\cdot(\overline{D}+E+\overline{F})$

Resolver 'de fora para dentro' seria mais fácil.

2. Prove que os circuitos são equivalentes utilizando manipulação algébrica. *Obs*: outra forma de provar a equvalência lógica seria através das tabelas verdade. As tabelas verdade de Y1 e Y2 devem ser iguais.



$Y1 = \overline{\overline{A\cdot B}\cdot(A+B)}$

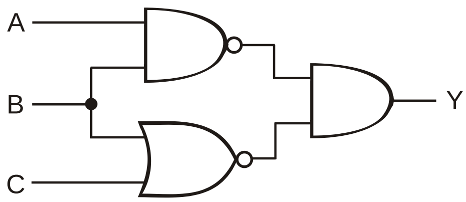
$\overline{\overline{A\cdot B}}+\overline{A+B}$

$A\cdot B+\overline{A+B}$

$Y2 = A\cdot B+\overline{A+B}$

=

3. Simplifique o circuito. Para observar que os circuitos original e simplificado são realmente equivalentes, obtenha as tabelas verdade de cada um. As tabelas verdades devem ser iguais.



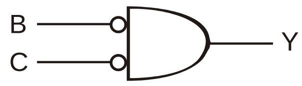
$$Y = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{B+C}$$

$(\overline{A}+\overline{B}) \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$\overline{B} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{A}+1)$

$\overline{B} \cdot \overline{C}$



A	B	C	$\overline{AB}$	Simplif. $\overline{B+C}$	Original $\overline{AB}\,\overline{B+C}$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

4. Simplifique as equações lógicas.

a) $Y = AB + A(B+C) + B(B+C)$

$AB + AB + AC + BB + BC$

$AB + AC + B + BC$

$B(1+A+C) + AC$

$B1 + AC$

$B + AC$

b) $Y = (A\overline{B}(C + BD) + \overline{A}\,\overline{B})C$

$(A\overline{B}C + A\overline{B}BD + \overline{A}\,\overline{B})C$

$(A\overline{B}C + 0 + \overline{A}\,\overline{B})C$

$A\overline{B}CC + \overline{A}\,\overline{B}C$

$A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C$

$\overline{B}C(A + \overline{A})$

$\overline{B}C1$

$\overline{B}C$

c) $Y = (A+\overline{B})(A+C)$

$AA + AC + A\overline{B} + \overline{B}C$

$A + AC + A\overline{B} + \overline{B}C$

$A(1+C+\overline{B}) + \overline{B}C$

$A1 + \overline{B}C$

$A + \overline{B}C$

d) $Y = AB + \overline{AB}C + A$

$(AB + \overline{AB})(AB + C) + A$

$1(AB + C) + A$

$AB + C + A$

$A(1+B) + C$

$A1 + C$

$A + C$

e) $Y = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A+B+\overline{C}} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{\overline{C}} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$\overline{A}\,\overline{B}(C + \overline{C}D)$

$\overline{A}\,\overline{B}((C+\overline{C})(C+D))$

$\overline{A}\,\overline{B}(1(C+D))$

$\overline{A}\,\overline{B}(C+D)$

f) $Y = ABC(AB+\overline{C}(BC+AC))$

$ABC(AB+BC\overline{C}+AC\overline{C})$

$ABC(AB+0+0)$

$ABC(AB)$

$AABBC$

ABC

g) $Y = \overline{AB} + \overline{A+C}$

$\overline{A} + \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$

$\overline{A}(1+\overline{C}) + \overline{B}$

$\overline{A}1 + \overline{B}$

$\overline{A} + \overline{B}$

h) $Y = \overline{\overline{AB} + CD} + \overline{AC\overline{D}}$

$\overline{\overline{AB}}\,\overline{CD} + \overline{AC} + \overline{\overline{D}}$

$AB(\overline{C}+\overline{D}) + \overline{A} + \overline{C} + D$

$AB\overline{C} + AB\overline{D} + \overline{A} + \overline{C} + D$

$\overline{C}(AB+1) + \overline{A} + AB\overline{D} + D$

$\overline{C}1 + (\overline{A}+A)(\overline{A}+B\overline{D}) + D$

$\overline{C} + 1(\overline{A}+B\overline{D}) + D$

$\overline{C} + \overline{A} + D + \overline{D}B$

$\overline{C} + \overline{A} + (D+\overline{D})(D+B)$

$\overline{C} + \overline{A} + 1(D+B)$

$\overline{C} + \overline{A} + D + B$

Referências

[1] iDicinário Aulete, disponível em http://aulete.uol.com.br/axioma, acessado em jan/2013.