UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO

ICE – Institutos de Ciências Exatas
DEMAT – Departamento de Matemática

CÁLCULO 1 - SEMANA 5

Prof. Roseli Alves de Moura

Conteúdo:

III – A Derivada:

1. **Derivada – definição formal, interpretação geométrica e física**
2. **Taxas de variação**
3. **Regras de derivação**

DERIVADA: DEFINIÇÃO

A derivada é um limite especial e muito importante, com muitas aplicações em engenharia e nas ciências naturais. Nascida nos problemas de cinemática e de geometria se expandiu para incluir os demais campos do conhecimento.

Definição - Seja f(x) uma função definida num intervalo aberto I contendo o valor x_o. A derivada da função *f* no ponto de abscissa x_o é o valor do limite, ou de seu equivalente, desde que existam. Indica-se por $f'(x_o)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

f' (linha)

derivada $f'(x_o) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

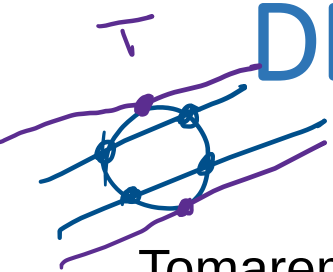
$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$h \to 0$ $\quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Se $f'(x_o)$ existe, dizemos que f é derivável ou diferenciável no ponto de abscissa x_0. Dizemos que f é derivável em um conjunto se for derivável em cada ponto. $\frac{dy}{dx} \approx$ $f(x) = 2x + 1$ ou $y = 2x + 1$ $\quad \frac{dx}{dy}$ é inversa

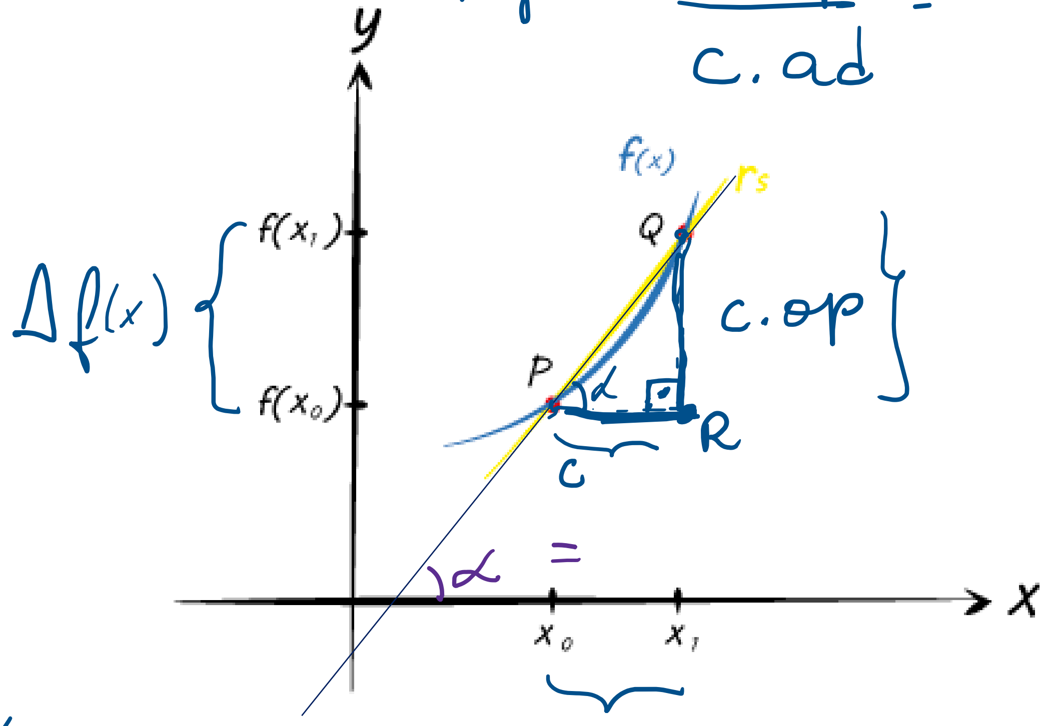
$f'(x) = 2$

DERIVADA: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



$$tg\,\alpha = \frac{c.op}{c.ad} =$$

Tomaremos como ponto de partida uma função qualquer f(x), cujo objetivo de construir uma equação para a reta que intercepta o gráfico de f(x) em dois pontos, esta reta é chamada de reta secante ao gráfico. De acordo com o estudo da reta, para determinarmos uma equação para esta reta, precisamos das informações:



$$\Delta x = x_1 - x_0$$

1) um ponto que pertença à reta

2) o coeficiente angular da reta $m_{rs} = tg\,\alpha$

$$\alpha \to f'(x_0) = \tan\alpha$$

O coeficiente angular pode ser calculado a partir das coordenadas dos pontos P e Q que pertencem a reta.

Fórmula

$$\boxed{f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)}$$

$$tg\,\alpha = m_{rs} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cancel{=} f'(x_0)$$

DERIVADA: ORIGENS

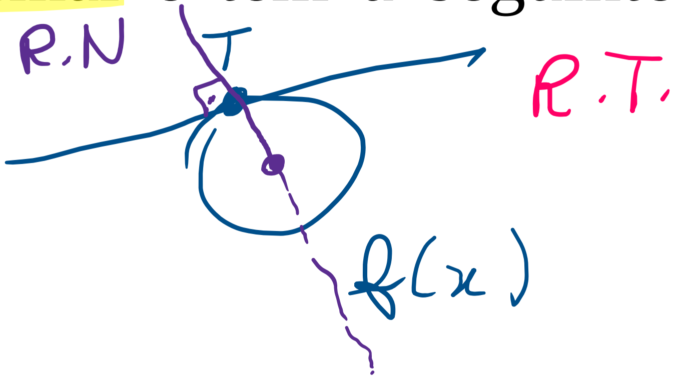
A derivada teve duas origem: uma em cinemática (com Newton), através do cálculo da velocidade instantânea e outra em geometria (com Leibniz), no problema de se traçar retas tangentes a uma curva.

O número $f'(x_o)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P=(x_o,f(x_o))$. A equação da reta tangente é:

R.T. $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$ (Fórmula)

A reta perpendicular à reta tangente, chama-se reta normal e tem a seguinte equação:

R.N $$y - f(x_o) = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$$



$$\alpha \rightarrow f'(x_0) = \tan\alpha$$

DERIVADA: EXEMPLO 1

Derivar pela definição: $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{1/3}$

$f(a) = a^{1/3}$

Fazendo $x_o = a$, teremos:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} =$$

Observe que a função f do exemplo está definida para todos os números reais, porém, a expressão de f'(a) não aceita o valor zero para a. Em zero o limite é igual $+\infty$

$$\boxed{x^3 - a^3 = (x - a) \cdot (x^2 + x \cdot a + a^2)}$$

$$?? \quad = \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3} a^{1/3} + a^{2/3}}{x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3} a^{1/3} + a^{2/3}} \right) =$$

$$(x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3 = \underbrace{(x^{1/3} - a^{1/3}) \cdot (x^{2/3} + x^{1/3} \cdot a^{1/3} + a^{2/3})}$$

$$x^{3/3} - a^{3/3} = x - a$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{x - a}}{\cancel{(x - a)}(x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3} a^{1/3} + a^{2/3})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{1/3} a^{1/3} + a^{2/3}} = \frac{1}{3a^{2/3}}$$

CONTINUAÇÃO EXEMPLO 1

Observe a função f e sua derivada f ’:

$$f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

<u>Tabela</u>: $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\left(\frac{1}{3} - 1\right)} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 \cdot x^{2/3}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

<u>Propriedades</u>:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Regra "Mãe"

$$f(x) = x^{n} \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Exemplo:

1) $f(x) = x^{3} \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1}$

$$f'(x) = 3x^{2}$$

2) $f(x) = 3x^{4} \Rightarrow f'(x) = 12x^{3}$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Função	Função Derivada
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
$f(x) = a^x, a > 0 \text{ e } a \neq 1$	$f'(x) = a^x.\ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_b x, b > 0 \text{ e } b \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x}.\log_b e$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \text{sen}x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen}x$
$f(x) = \text{tg}x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \text{cotg}x$	$f'(x) = -\text{cossec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x.\text{tg}x$
$f(x) = \text{cossec}x$	$f'(x) = -\text{cossec}x.\text{cotg}x$
$f(x) = \text{arcsen}x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \text{arctg}x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \text{arccotg}x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \text{arcsec}x$	$f'(x) = \frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \text{arccossec}x$	$f'(x) = -\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

Tabela

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ÁLGEBRA DAS DERIVADAS

"importante" !!

R1) A derivada de uma soma ou subtração de funções é a soma ou a subtração das derivadas, isto é: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

R2) Produto de funções: $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$[u.v]' = u'.v + u.v'$

R3) Quociente de funções: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{u} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

R4) Casos particulares: Sendo K uma constante, então:

1) $[Kf(x)]' = k.(f'(x))$ $\Rightarrow [2f(x)]' = 2.[f(x)]'$ exemplo

2) $\left[\frac{k}{g(x)}\right]' = -\frac{Kg'(x)}{g^2(x)}$

1) Derivar as seguintes funções pela Definição e utilizando a Tabela

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x_o) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1º Definição:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^2 - (x+h)\right] - (x^2 - x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{-x} - h \cancel{-x^2} \cancel{+x}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 1)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h - 1 = 2x - 1 = f'(x)$$

2º Tabela

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} - x^{1-1}$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

2) Mais exemplos utilizando a Tabela

$y = ax + b$

$y' = a = tg\,\alpha$

a) $f(x) = 3x^1 + 2$

$f'(x) = 3.x^0 + 0$

$f'(x) = 3$

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n\,x^{n-1}$

b) $f(x) = 7$ cte

$f'(x) = 0$

c) $f(x) = x^3 - 5x^1$

$f'(x) = 3x^2 - 5.x^0$

$f'(x) = 3x^2 - 5$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ (u) v

$\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'.v - u\,v'}{v^2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x).(2x+1) - (x^2).(2+0)}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 0}{(2x)^2 + 2.(2x).(1) + (1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{4x^2 + 4x + 1}$ ok

e) $f(x) = (x-2)\cdot(x^2-3)$

$[u \cdot v]' = u'.v + u.v'$

$f'(x) = (1-0).(x^2-3) + (x-2).(2x^1-0)$

$f'(x) = 1.(x^2-3) + (x-2).(2x)$

$f'(x) = x^2 - 3 + 2x^2 - 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$ //

$e = 2{,}7\ldots\ldots$

f) $f(x) = \ln_e x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ (Tabela)

Ex: $f(x) = \ln a$

$f'(x) = \frac{1}{a}$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$

Preparar: $f(x) = x^{-1}$

Tab

$f'(x) = -1\,x^{-1-1}$

$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$

álgebra

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

h) $f(x) = tg\ x$

Tabela

$f'(x) = sec^2 x$

Resp.:

Álgebra $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$tgx = \frac{senx}{cosx}$ $\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$ $f(x) = \frac{senx}{cosx}$

$$f'(x) = \frac{(senx)'.\,cosx - senx.\,(cosx)'}{(cosx)^2}$$

$$f'(x) = \frac{cosx.\,cosx - senx.\,(-senx)}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

Relação Fundamental: $cos^2x + sen^2x = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$$

Como :

$$\frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$ → identi// trig.

Concluímos que:

$$f(x) = tgx \rightarrow f'(x) = sec^2x$$

i) $f(x) = \frac{5}{x^3} - 3\log_2 x$

$\boxed{f(x) = \log_b x, b > 0 \text{ e } b \neq 1}$ $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}.\log_b e}$

$$f(x) = 5.x^{-3} - 3\log_2 x$$

$$f'(x) = (5.x^{-3})' - (3\log_2 x)'$$

$$f'(x) = 5.(x^{-3})' - 3.(\log_2 x)'$$

Usando a tabela de derivadas :

$$f'(x) = 5.(-3.x^{-4}) - 3.\frac{1}{x}\log_2 e = -15x^{-4} - \frac{3.\log_2 e}{x}$$

Concluímos que:

$$f(x) = \frac{5}{x^3} - 3\log_2 x \rightarrow f'(x) = -15x^{-4} - \frac{3.\log_2 e}{x}$$

Ver com calma!

j) $f(x) = 3^x + \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}$

$\boxed{f(x) = a^x, a > 0 \text{ e } a \neq 1}$ $\boxed{f'(x) = a^x . \ln a}$

Ver com calma!

$$f(x) = 3^x + \frac{2}{x^{\frac{1}{4}}}$$

$$f(x) = 3^x + 2.x^{\frac{-1}{4}}$$

$$f'(x) = (3^x)' + \left(2.x^{\frac{-1}{4}}\right)'$$

$$f'(x) = (3^x)' + 2.\left(x^{\frac{-1}{4}}\right)'$$

$$f'(x) = 3^x.\ln 3 + 2.\left(\frac{-1}{4}.x^{\frac{-1}{4}-1}\right)$$

$$= 3^x.\ln 3 + \cancel{2}.\left(\frac{-1}{\cancel{4}}.x^{\frac{-5}{4}}\right) = 3^x.\ln 3 - \frac{x^{\frac{-5}{4}}}{2}$$

Concluímos que:

$$f(x) = 3^x + \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \rightarrow f'(x) = 3^x.\ln 3 - \frac{x^{\frac{-5}{4}}}{2}$$

TAXA DE VARIAÇÃO E O ESTUDO DAS DERIVADAS

TAXA DE VARIAÇÃO

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. examinaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

A partir da ideia básica das taxas de variação, temos que, se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será:

$S = 2t + 2$

$S' = \frac{dS}{dt} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

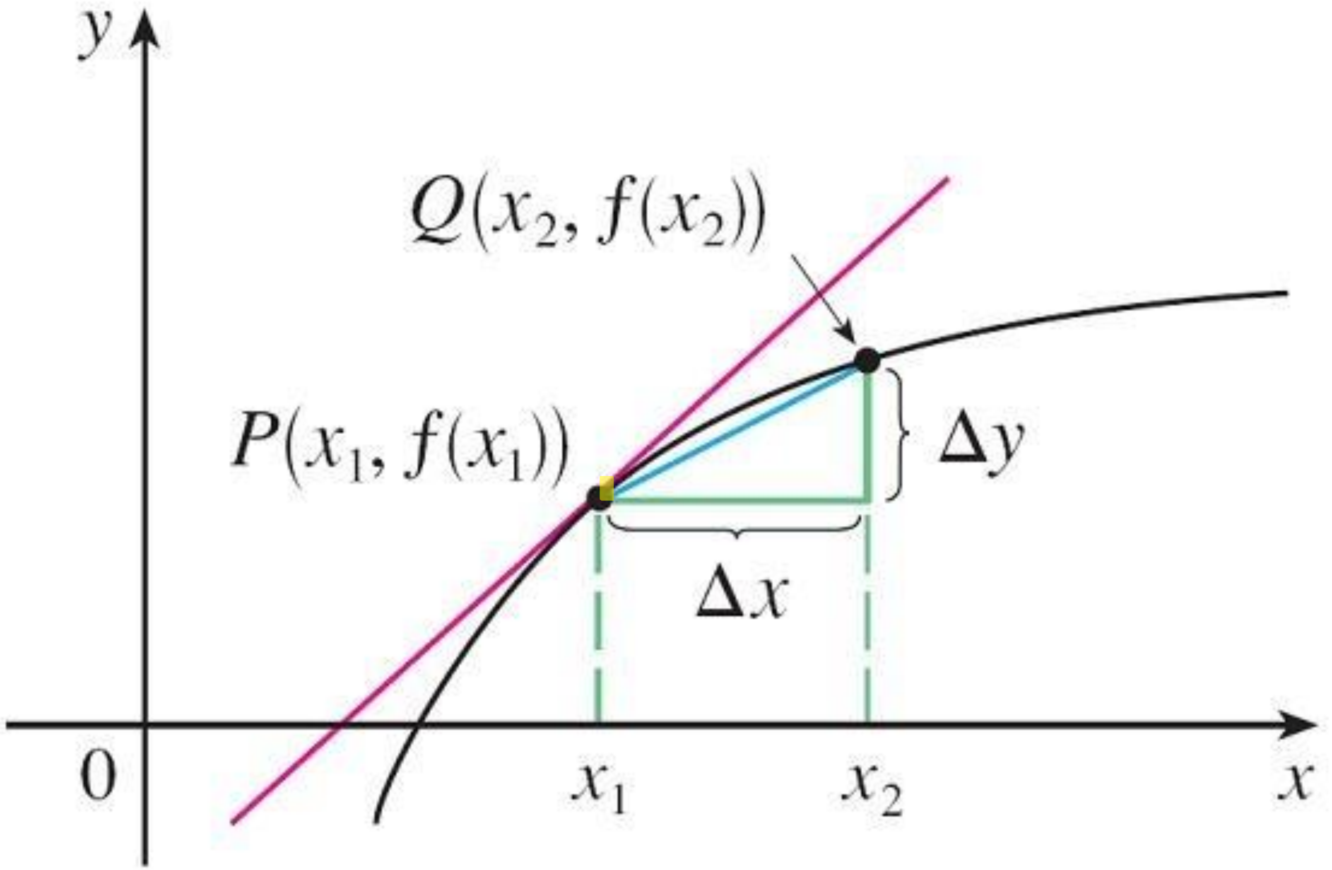
$v = 2t + 3$

$v' = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$

e a variação correspondente em y será $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

O quociente da diferença é a **taxa média de variação de *y* em relação a *x*** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretada como a inclinaçãoda reta secante *PQ* na Figura.

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$



m_{PQ} = a taxa de variação média $m = f$
$'(x_1)$ = taxa instantânea de variação

Seu limite quando $\Delta x \to 0$ é a derivada $f'(x_1)$, que pode portanto ser interpretada como a **taxa instantânea de variação de *y* em relação a *x*** ou a inclinação da reta tangente em $P(x_1, f(x_1))$. Usando a notação de Leibniz, escrevemos o processo na forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

TAXA DE VARIAÇÃO EM CIÊNCIAS NATURAIS - FÍSICA

Se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que está se movendo em uma reta, então $\Delta s/\Delta t$ representa a velocidade média ao longo de um período de tempo Δt, e

$v = ds/dt$ representa a **velocidade** instantânea (a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo). A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é a **aceleração**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$, mas agora que conhecemos as fórmulas de derivação, estamos habilitados a resolver os problemas de velocidade mais facilmente.

Exemple : $S(t) = t^2 - 3t + \underline{2}$ cte

$v(t) = S'(t) = 2t - 3 + 0 \Rightarrow v(t) = 2t - 3$

$[v(t)]' = [S'(t)]' = (2t - 3)'$

$a(t) = S''(t) = 2 - 0$

$a(t) = 2$ cte

EXEMPLO

A posição de uma partícula é dada pela equação $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$
onde t é medido em segundos e s, em metros. $f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 9.1 = 4$

(a) Encontre a velocidade no tempo t. s'

(b) Qual a velocidade depois de 2 s? E depois de 4 s?

(c) Quando a partícula está em repouso?

(d) Quando a partícula está se movendo para a frente (isto é, no sentido positivo)?

(e) Faça um diagrama para representar o movimento da partícula.

(f) Encontre a distância total percorrida pela partícula durante os primeiros cinco segundos.

(g) Encontre a aceleração no tempo t e depois de 4 s. $v' = s''$

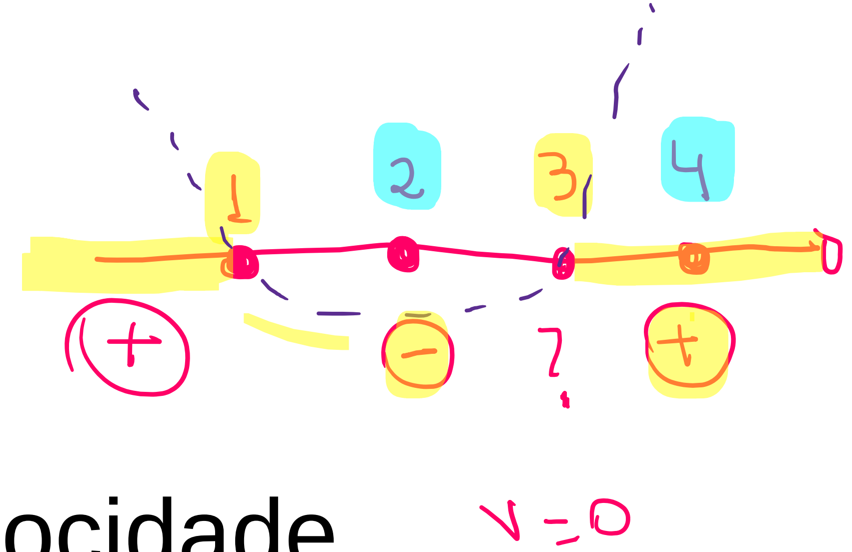
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leq t \leq 5$.

(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

EXEMPLO - RESOLUÇÃO

(a) A função velocidade é a derivada da função posição: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$

$$s' = \quad v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$



(b) A velocidade depois de 2 s é a velocidade instantânea quando $t = 2$, ou seja,

$$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

A velocidade depois de 4 s é

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

EXEMPLO - RESOLUÇÃO

(c) A partícula está em repouso quando $v\ (t) = 0$, isto é,

$v = +3t^2 - 12t + 9$

$\downarrow$

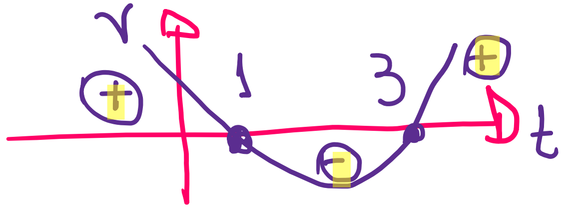
$0 = 3t^2 - 12t + 9$

$$3t^{\,2} - 12t + 9 = 3(\underbrace{t^{\,2} - 4t + 3}) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

Raízes $t_1 = 1$ ou $t = 3$

$3.(t - \text{raiz}).(t - \text{raiz}) = 0$

e isso é verdadeiro quando $t = 1$ ou $t = 3$. Dessa forma, a partícula está em repouso após 1 s e depois de 3 s.



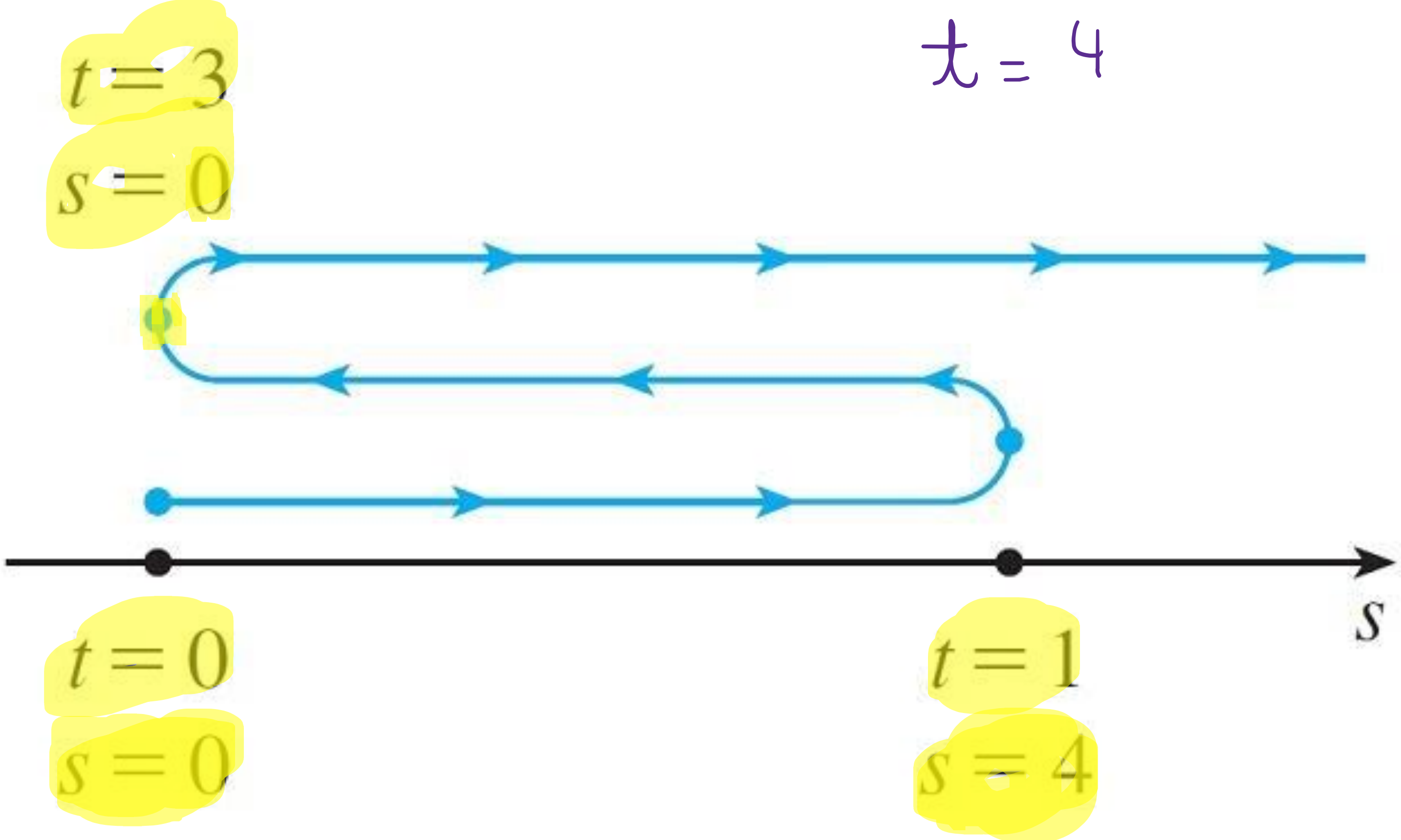
(d) A partícula move-se no sentido positivo quando $v\ (t) > 0$, ou seja,

$$v(t) = 3t^{\,2} - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0.$$

Essa desigualdade é verdadeira quando ambos os fatores forem positivos ($t > 3$) ou quando ambos os fatores forem negativos ($t < 1$). Assim, a partícula move-se no sentido positivo nos intervalos de tempo $t < 1$ e $t > 3$. Move-se para trás (no sentido negativo) quando $1 < t < 3$.

EXEMPLO - RESOLUÇÃO

(e) Usando as informações da parte (d), fazemos um esquema ilustrativo na Figura do movimento da partícula, que volta e depois torna a avançar ao longo da reta (eixo *s*).



EXEMPLO - RESOLUÇÃO

(f) Por causa do que aprendemos nas partes (d) e (e), precisamos calcular separadamente a distância percorrida durante os intervalos de tempo [0, 1], [1, 3], e [3, 5] separadamente.

A distância percorrida no primeiro segundo é:

$$| f(1) - f(0) | = | 4 - 0 | = 4 \text{ m}.$$

De $t = 1$ a $t = 3$ a distância percorrida é:

$$| f(3) - f(1) | = | 0 - 4 | = 4 \text{ m}.$$

De $t = 3$ a $t = 5$ a distância percorrida é:

$$| f(5) - f(3) | = | 20 - 0 | = 20 \text{ m}.$$

A distância total é $4 + 4 + 20 = 28$ m

$v = 3t^2 - 12t + 9$

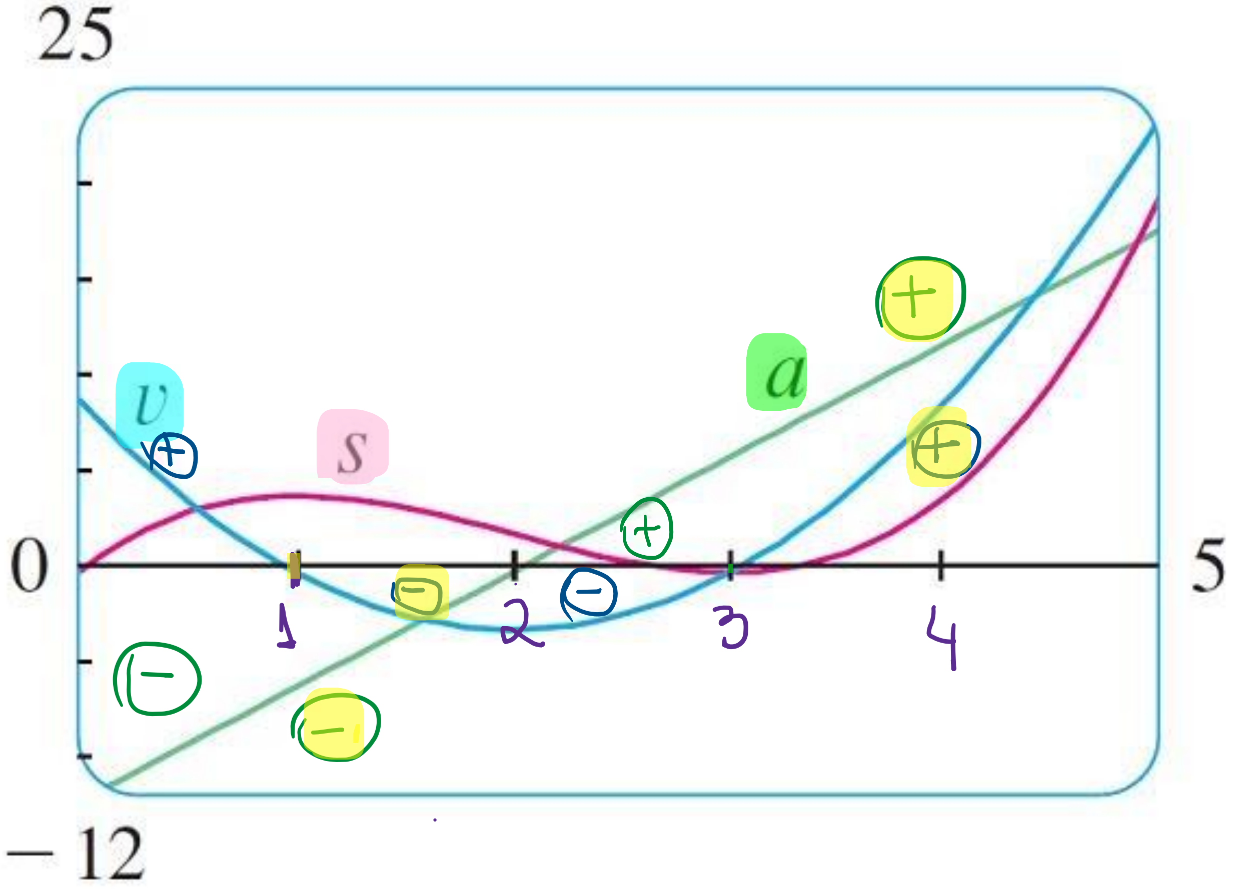
$v' = 6t - 12 + 0$

EXEMPLO - RESOLUÇÃO

(g) A aceleração é a derivada da função velocidade:

$a(t) = 6t - 12$, então $a(4) = 6(4) - 12 = 12$ m/s²

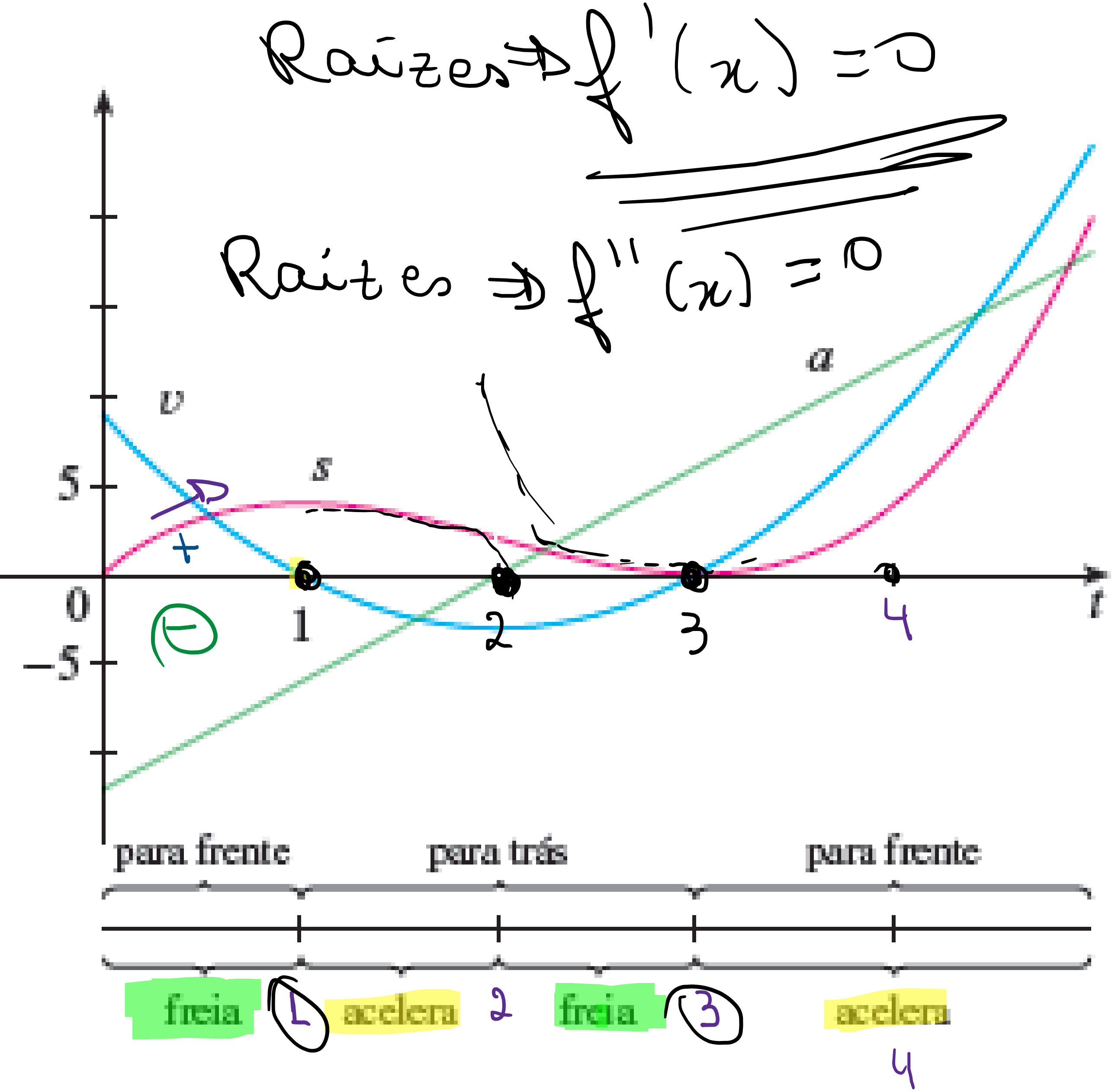
(h) A Figura mostra os gráficos de s, v e a



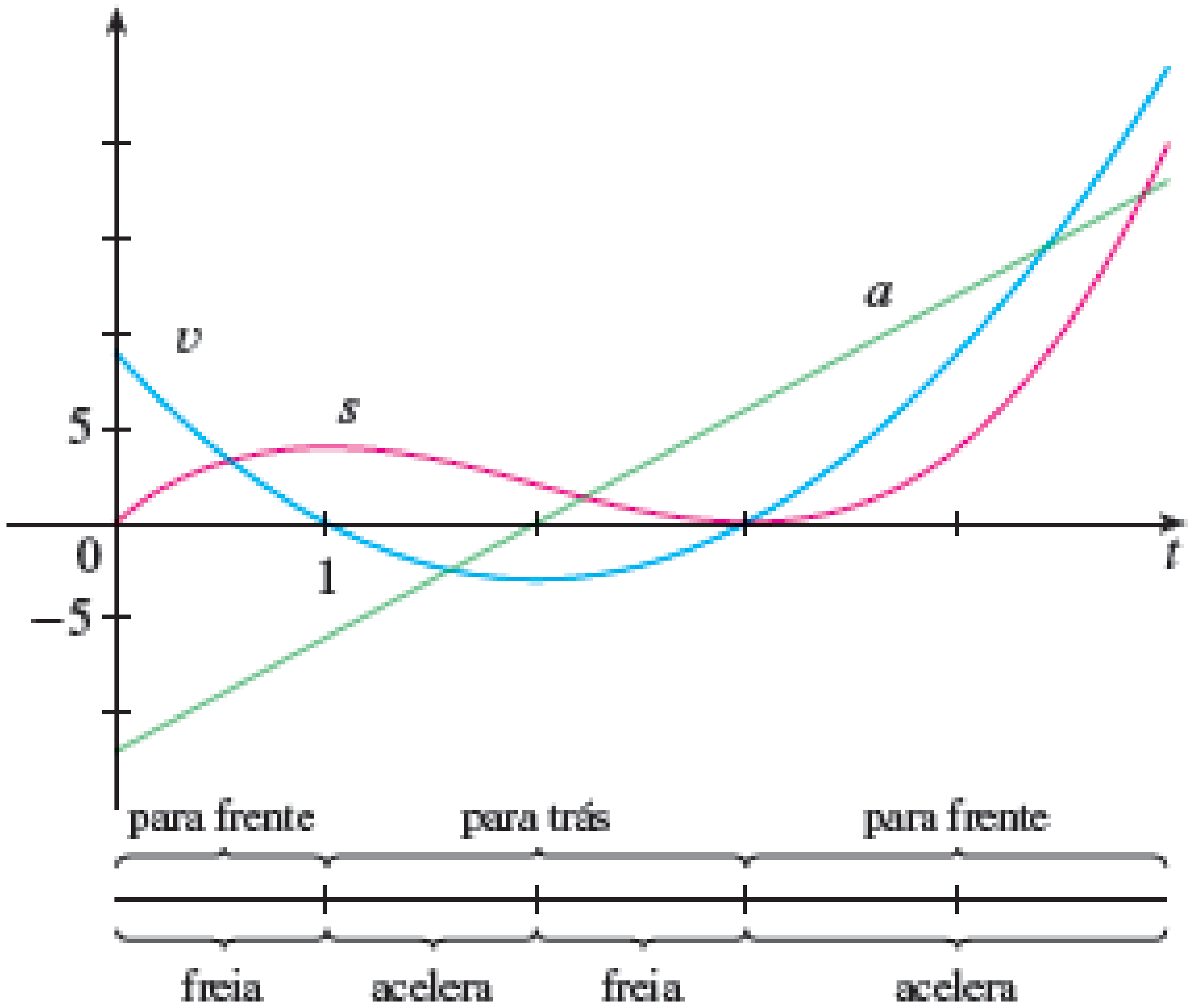
$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$a(t) = 6t - 12$



(i) A partícula acelera quando a velocidade é positiva e crescente (v e a são ambas positivas) e, também, quando a velocidade é negativa e decrescente (v e a são ambas negativas). A partícula é empurrada na mesma direção em que está se movendo. Vemos que isso ocorre quando $1 < t < 2$ e quando $t > 3$.



Em outras palavras, a partícula aumenta a velocidade quando a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal. A partícula está reduzindo velocidade quando *v* e a *a* têm sinais opostos, ou seja, quando $0 \leq t < 1$ e quando $2 < t < 3$.

SÍNTESE DE ALGUNS ASPECTOS NO ESTUDO DAS DERIVADAS

DERIVADA DA FUNÇÃO NO PONTO

Chama-se de derivada da função f(x) no ponto de abscissa x_0, e denota-se por $f'(x_0)$, ao seguinte limite, caso exista e seja finito:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Podemos notar que, o que é chamado de derivada da função no ponto, equivale numericamente ao coeficiente angular da reta tangente calculado em um ponto, conforme o exemplo dado

Também podemos notar que, o que é chamado de função derivada, equivale numericamente a função coeficiente angular da reta tangente, conforme o exemplo

FUNÇÃO DERIVADA

Chama-se de função derivada da função f(x), e denota-se por $f'(x)$, a função obtida por quando calculamos $f'(x_0)$ em um ponto genérico de abscissa x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dada a FUNÇÃO f(x) derivável.

Função	Função Derivada
$y(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$y'(x) = 0$
$y(x) = f(x)^n$	$y'(x) = n.f(x)^{n-1}.f'(x)$
$y(x) = a^{f(x)}, a > 0 \text{ e } a \neq 1$	$y'(x) = a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$
$y(x) = e^{f(x)}$	$y'(x) = e^{f(x)}.f'(x)$
$y(x) = \log_b f(x), b > 0 \text{ e } b \neq 1$	$y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.\log_b e$
$y(x) = \ln f(x)$	$y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y(x) = \text{sen} f(x)$	$y'(x) = \cos f(x).f'(x)$
$y(x) = \cos f(x)$	$y'(x) = -\text{sen} f(x).f'(x)$
$y(x) = \text{tg} f(x)$	$y'(x) = \sec^2 f(x).f'(x)$
$y(x) = \text{cotg} f(x)$	$y'(x) = -\text{cossec}^2 f(x).f'(x)$
$y(x) = \sec f(x)$	$y'(x) = \sec f(x).\text{tg} f(x).f'(x)$
$y(x) = \text{cossec} f(x)$	$y'(x) = -\text{cossec} f(x).\text{cotg} f(x).f'(x)$
$y(x) = \text{arcsen} f(x)$	$y'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y(x) = \arccos f(x)$	$y'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y(x) = \text{arctg} f(x)$	$y'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$
$y(x) = \text{arccotg} f(x)$	$y'(x) = \frac{-f'(x)}{1 + f(x)^2}$
$y(x) = \text{arcsec} f(x)$	$y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x).\sqrt{f(x)^2 - 1}}$

REGRA DA CADEIA – FUNÇÕES COMPOSTAS

Próxima Aula

EXERCÍCIOS - REGRA DA CADEIA

a) $y(x) = \operatorname{sen} x^3$

Da tabela, temos:

$y(x) = \operatorname{sen} f(x) \rightarrow y'(x) = \cos f(x).f'(x)$

$y'(x) = \cos x^3.(3x^2)$

b) $y(x) = (\operatorname{sen} x)^3$

c) $y(x) = e^{x^3}$

Da tabela, temos:

$y(x) = e^{f(x)} \rightarrow y'(x) = e^{f(x)}.f'(x)$

$y'(x) = e^{x^3}.3x^2$

d) $y(x) = \ln \cos x$

Da tabela, temos: $y(x) = \ln f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

No caso:

$y'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$

e) $y(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

Da tabela, temos:

$y(x) = a^{f(x)}, a > 0 \text{ e } a \neq 1$

$\rightarrow y'(x) = a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$

$y'(x) = 2^{\operatorname{sen} x}.\ln 2.\cos x$

f) $y(x) = \operatorname{cotg} x^3$

Da tabela, temos:

$y(x) = \operatorname{cotg} f(x)$

$\rightarrow y'(x) = -\operatorname{cossec}^2 f(x).f'(x)$

$y'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x^3.(3x^2)$

EXERCÍCIOS - REGRA DA CADEIA

g) $y(x) = \text{arcsen}x^4$

Da tabela, temos:

$y(x) = \text{arcsen}f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$

$y'(x) = \dfrac{4x^3}{\sqrt{1 - (x^4)^2}}$

h) $y(x) = \text{arccos}e^x$

Da tabela, temos:

$y(x) = \text{arccos}f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$

$y'(x) = \dfrac{-e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}$

i) $y(x) = \text{arcsec}x^5$

Da tabela, temos:

$y(x) = \text{arcsec}f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x).\sqrt{f(x)^2 - 1}}$

$y'(x) = \dfrac{5x^4}{x^5.\sqrt{(x^5)^2 - 1}}$

j) $y(x) = \text{arctg}x^3$

Da tabela, temos:

$y(x) = \text{arctg}f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$

$y'(x) = \dfrac{3x^2}{1 + (x^3)^2}$

k) $y(x) = \text{arccotg}e^x$

Da tabela, temos:

$y(x) = \text{arccotg}f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{-f'(x)}{1 + f(x)^2}$

$y'(x) = \dfrac{-e^x}{1 + (e^x)^2}$

l) $y(x) = \text{arccosec}e^x$

Da tabela, temos:

$y(x) = \text{arccosec}f(x)$

$\rightarrow y'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x).\sqrt{f(x)^2 - 1}}$

$y'(x) = \dfrac{e^x}{e^x.\sqrt{(e^x)^2 - 1}}$

EXERCÍCIOS EXTRA

$$\mathbf{f(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}}$$