Ecuaciones diferenciales II

17 de noviembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Teoremas de existencia y unicidad global para problemas de valores iniciales

1.1. Ecuación integral equivalente a un problema de Cauchy

Teorema 1.1. *Consideramos el problema de Cauchy:*

$$(P)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es continua en* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ *y* $(t_0, x^0) \in D$. *Sea* I *un intervalo en* $\mathbb{R}$ *tal que* $t_0 \in I$ *y* $x : I \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ *una función cuya gráfica está contenida en* D*:*

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $x : I \to \mathbb{R}^n$ *es solución de* (P).
- x *es una función continua en* I *que verifica:*

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \forall t \in I$$

1.2. Condiciones de Lipschitz

Definición 1.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es lipschitziana en D respecto de la segunda variable x cuando existe una constante $L > 0$ tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|, \quad (t,x),(t,y) \in D$$

En tal caso se escribe $f \in Lip(x, D)$ y se dice que L es una constante de Lipschitz para f en D respecto a la segunda variable.

Definición 1.2. Sean $n > 1$, $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

- Una función $f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es lipschitziana en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una constante $L > 0$ tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (t,x),(t,y) \in D$$

- Una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es lipschitziana en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una constante $L > 0$ tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\|x - y\|, \quad (t,x),(t,y) \in D$$

Proposición 1.2. *Sean $n > 1$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Se verifica:*

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow f_k \in Lip(x, D), \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

Proposición 1.3 (Caracterización de la condición de Lipschitz)**.** *Si D es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$ y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$, entonces:*

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ es acotada en } D$$

Observación. Si K es un conjunto convexo y compacto en $\mathbb{R}^2$ y existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ y es continua sobre K, entonces $f \in Lip(x, K)$.

Definición 1.3. Sea I cualquier intervalo en $\mathbb{R}$. Se dice que una función $f : D = I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, satisface una condición de Lipschitz generalizada en D respecto de la segunda variable x cuando existe una función $L : I \to \mathbb{R}$ continua en I y no negativa tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)|x - y|, \quad \forall (t,x),(t,y) \in D$$

En tal caso se escribe $f \in LipG(x, D)$.

Definición 1.4. Sean $n > 1$, $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $D = I \times \mathbb{R}^n$.

- Se dice que la función vectorial $f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, satisface una condición de Lipschitz generalizada en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una función $L : I \to \mathbb{R}^+$ continua en I tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

- Se dice que la función vectorial $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, satisface una condición de Lipschitz generalizada en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una función $L : I \to \mathbb{R}^+$ continua en I tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

Proposición 1.4. *Sean $n > 1$, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : D = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Se verifica:*

$$f \in LipG(x, D) \Leftrightarrow f_k \in LipG(x, D), \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

Proposición 1.5 (Caracterización de la condición de Lipschitz generalizada)**.** *Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : D = I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$. Las dos siguientes condiciones son equivalentes:*

- *$f \in LipG(x, D)$.*
- *Existe una función $L : I \to \mathbb{R}^+$ continua en I tal que:*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq L(t), \quad \forall (t, x) \in D$$

1.3. El teorema de existencia y unicidad global

Teorema 1.6 (Teorema de existencia y unicidad global)**.** *Sea $n \geq 1$ y supongamos las tres siguientes condiciones:*

1. *$D = I \times \mathbb{R}^n$ donde I es un intervalo no degenerado en $\mathbb{R}$.*
2. *La función $f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, es continua en D.*
3. *$f \in LipG(x, D)$.*

En tal situación, para cada $(t_0, x^0) \in D$ el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo I.

Capítulo 2

Teoremas de existencia y unicidad local para problemas de valores iniciales

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad local)**.** *Sean* $n \geq 1$ *y* $\|.\|$ *una norma en* $\mathbb{R}^n$*. Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$*,* $(t, x) \mapsto f(t, x)$*,* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *y* $(t_0, x^0) \in D$*.*

Supongamos que existen $a > 0$ *y* $b > 0$ *tales que:*

$$Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

y la función f *verifica las dos siguientes condiciones:*

1. f *es continua en* Q*.*
2. $f \in Lip(x, Q)$*.*

Entonces, existen intervalos $I = [t_0 - h, t_0 + h]$*, siendo* $0 < h \leq a$*, tales que* (P) *posee una única solución* $x : I \to \mathbb{R}^n$*. Esto sucede si:*

$$0 < h \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad \textit{siendo } M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

Observación. Existen versiones laterales del teorema local:

- Tomando $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b)$, para obtener una única solución $x : [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ del problema (P) (solución lateral a la derecha).
- Tomando $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b)$, para obtener una única solución $x : [t_0 - h, t_0] \to \mathbb{R}^n$ del problema (P) (solución lateral a la izquierda).

Corolario 2.2. *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

- *D es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con interior $\dot{D}$ no vacío.*
- *La función $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, es continua en D.*
- *Existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$ y es continua en D.*

En tal situación, para cualquier punto $(t_0, x^0) \in \dot{D}$ existen intervalos $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, siendo $h > 0$, tales que el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene una única solución $x : I \to \mathbb{R}$.

Observación. Si D es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, entonces f satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

Capítulo 3

Resultados de unicidad para ecuaciones diferenciales

3.1. La propiedad de unicidad global

Definición 3.1 (Propiedad de unicidad global)**.** Sean $n \geq 1$, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se dice que la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ tiene la propiedad de unicidad global en una región $D \subset \Omega$ cuando, dadas dos soluciones $x : I \to \mathbb{R}^n$, $y : J \to \mathbb{R}^n$ con gráficas contenidas en D, sucede que si existe $t_0 \in I \cap J$ tal que $x(t_0) = y(t_0)$ entonces $x(t) = y(t)$ para cada $t \in I \cap J$.

3.2. Funciones localmente lipschitzianas

Definición 3.2. Sean $n \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es localmente lipschitziana en la región $D \subset \Omega$ respecto de la variable x cuando para cada punto $(t_0, x^0) \in D$ existe un entorno U de (t_0, x^0) tal que $f \in Lip(x, U \cap D)$. Cuando esto sucede escribiremos $f \in Lip_{Loc}(x, D)$.

Definición 3.3. Sean $n > 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es localmente lipschitziana en la región $D \subset \Omega$ respecto de la variable x cuando para cada punto $(t_0, x^0) \in D$ existe un entorno U de (t_0, x^0) tal que $f \in Lip(x, U \cap D)$.

Proposición 3.1. *Sean $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Sea $D \subset \Omega$. Se verifica:*

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f_i \in Lip_{Loc}(x, D), \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Proposición 3.2 (Condición suficiente para la condición de Lipschitz local)**.** *Supongamos:*

- *$n \geq 1$ y A un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*
- *$f : A \to \mathbb{R}$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \ldots, x_n)$, una función tal que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \to \mathbb{R}$ y es continua en A.*

Entonces $f \in Lip_{Loc}(x, A)$, siendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Teorema 3.3 (Caracterización de la condición de Lipschitz local)**.** *Sean $n \geq 1$, D un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ continua en D. Entonces:*

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f \in Lip(x, K), \quad \forall K \subset D \text{ compacto}$$

3.3. Comparación de soluciones

Proposición 3.4 (Lema de Gronwall)**.** *Sean k una constante no negativa, $u, v : I \to \mathbb{R}^+$ dos funciones continuas en el intervalo I y $t_0 \in I$ tales que:*

$$u(t) \leq k + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Entonces, se verifica:

$$u(t) \leq k \exp \left| \int_{t_0}^{t} v(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Teorema 3.5 (Estimación de la diferencia entre dos soluciones)**.** *Sean $n \geq 1$, $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ e $y : I \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ con gráficas contenidas en una región $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea $t_0 \in I$.*

1. *Si $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, D)$ con constante de Lipschitz L, se tiene la siguiente estimación:*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{L|t - t_0|}, \quad \forall t \in I$$

2. *Si $D = J \times \mathbb{R}^n$, donde J es un intervalo en $\mathbb{R}$, y $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap LipG(x, D)$ con función de Lipschitz $L : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto L(t)$, entonces:*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp \left| \int_{t_0}^{t} L(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

3.4. El teorema de unicidad global

Teorema 3.6 (Teorema de unicidad global)**.** *Sean $n \geq 1$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $D \subset \Omega$ tal que:*

$$f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip_{Loc}(x, D)$$

Entonces, la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ tiene la propiedad de unicidad global en D.

Observación. Si D es abierto y $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, entonces f satisface las condiciones del teorema de unicidad global. Recordamos que satisface además las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

3.5. El criterio de unicidad de Peano

Proposición 3.7 (Criterio de unicidad de Peano). *Sean J y K intervalos en $\mathbb{R}$ y consideramos el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D = J \times K \to \mathbb{R}$ y $(t_0, x^0) \in D$.

Por otra parte, sea I un intervalo tal que $t_0 \in I \subset J$ y consideramos:

$$I^- = \{t \in I : t \leq t_0\}, \quad I^+ = \{t \in I : t \geq t_0\}$$

suponiendo que los intervalos I^- e I^+ no sean degenerados.

1. *Unicidad a la izquierda. Si para cada $t \in I^-$ la función $f_t : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_t(x) = f(t, x)$ es creciente, entonces (P) tiene a lo sumo una solución definida en I^-.*

2. *Unicidad a la derecha. Si para cada $t \in I^+$ la función $f_t : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_t(x) = f(t, x)$ es decreciente, entonces (P) tiene a lo sumo una solución definida en I^+.*

3.6. Dependencia continua de las soluciones

Teorema 3.8 (Teorema de dependencia continua). *Sean I un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, $n \geq 1$ y $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Consideramos el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x^0) \in D$ y $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, D)$.

Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ la solución de (P) y para cada $v \in \mathbb{R}^n$ sea:

$$(P_v) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = v \end{cases}$$

Se verifica lo siguiente:

1. *Dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $y^0 \in \mathbb{R}^n$ verifica que $\|x^0 - y^0\| < \delta$, entonces la solución $y : I \to \mathbb{R}^n$ del problema (P_{y^0}) verifica que:*
$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in I$$

2. *Si* (v_m) *es una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $v_m \to x^0$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\phi_m : I \to \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *es la solución del problema* (P_{v_m}), *entonces la sucesión* (ϕ_m) *converge uniformemente hacia la solución del problema* (P) *en el intervalo* I.

Capítulo 4

Teoremas de existencia de soluciones para problemas de valores iniciales

4.1. Teoremas de existencia local de Peano

Teorema 4.1 (Versión lateral a la derecha del teorema de existencia local de Peano)**.** *Sean $n \geq 1$ y $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $(t_0, x^0) \in D$.
Supongamos que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ y f es continua en Q.

Entonces, (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo $I = [t_0, t_0 + h]$, donde:

$$h = \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

Observación. La versión lateral a la izquierda del teorema de existencia local de Peano consiste en tomar

$$Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

De esta forma, el problema (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo $I = [t_0 - h, t_0]$.

Corolario 4.2 (Versión centrada del teorema de existencia local de Peano). *Sean $n \geq 1$ y $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $(t_0, x^0) \in D$. Supongamos que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ y f es continua en Q.

Entonces, (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, donde:

$$h = \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M \geq \max_{(t,x)\in Q} \|f(t,x)\|$$

4.2. El teorema de existencia global de Peano

Teorema 4.3 (Teorema de existencia global de Peano). *Sean I un intervalo compacto en $\mathbb{R}$, $n \geq 1$ y $f : D = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y acotada en D. Entonces, para cada $(t_0, x^0) \in D$, el problema*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución definida en I.

Capítulo 5

Prolongaciones de soluciones y soluciones maximales

Definición 5.1 (Soluciones estrictamente prolongables y soluciones maximales)**.** Una solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ de una ecuación diferencial o de un problema de Cauchy se dice que es estrictamente prolongable cuando existe otra solución $y : J \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$I \underset{\neq}{\subseteq} J, \quad y_{|_I} = x$$

Cuando esto sucede, se dice que $y : J \to \mathbb{R}^n$ es una prolongación estricta de $x : I \to \mathbb{R}^n$. Una solución que no admite prolongación estricta se dice que es no prolongable o que es maximal.

Definición 5.2 (Soluciones estrictamente prolongables lateralmente)**.**

- Una solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (P) se dice que es estrictamente prolongable a la derecha cuando existe otra solución $y : J \to \mathbb{R}^n$ de (P) con $I \subset J$ tal que:

  $$I^+ = \{t \in I : t \geq t_0\} \underset{\neq}{\subseteq} J^+ = \{t \in J : t \geq t_0\} \quad \text{y} \quad y|_I = x$$

  Cuando esto sucede, se dice que $y : J \to \mathbb{R}^n$ es una prolongación estricta a la derecha de $x : I \to \mathbb{R}^n$. Una solución de (P) que no admite prolongación estricta a la derecha se dice que no es prolongable a la derecha.

- Una solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ de (P) se dice que es estrictamente prolongable a la izquierda cuando existe otra solución $y : J \to \mathbb{R}^n$ de (P) con $I \subset J$ tal que:

  $$I^- = \{t \in I : t \leq t_0\} \underset{\neq}{\subseteq} J^- = \{t \in J : t \leq t_0\} \quad \text{y} \quad y|_I = x$$

Cuando esto sucede, se dice que $y : J \to \mathbb{R}^n$ es una prolongación estricta a la izquierda de $x : I \to \mathbb{R}^n$. Una solución de (P) que no admite prolongación estricta a la izquierda se dice que no es prolongable a la izquierda.

5.1. Existencia y unicidad de soluciones no prolongables

Teorema 5.1 (Existencia y unicidad de soluciones no prolongables)**.** *Si f es continua en D se verifica:*

1. *Si (t_0, x^0) es un punto interior a D, entonces (P) tiene al menos una solución que no es prolongable definida en un intervalo que contiene al punto t_0 en el interior. Si además $f \in Lip_{Loc}(x, D)$, esta solución maximal es única.*

2. *Si existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$, entonces (P) posee al menos una solución lateral a la derecha que no es prolongable a la derecha.*

3. *Si existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$, entonces (P) posee al menos una solución lateral a la izquierda que no es prolongable a la izquierda.*

Observación. Si D es abierto y f es de clase $\mathcal{C}^1$ en D, entonces (P) tiene una única solución maximal, que está definida en un intervalo que contiene a t_0 en su interior.

5.2. Soluciones maximales con gráficas contenidas en compactos

Teorema 5.2. *Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ y $(t_0, x^0) \in D$. Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ una solución maximal de (P) y sea Γ su gráfica.

Supongamos que existe un conjunto K compacto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma \subset K \subset D$ y f es continua en K. Entonces:

1. *I es un intervalo compacto, es decir, $I = [a, b]$.*

2. *Los puntos $(a, x(a))$ y $(b, x(b))$ están en la frontera de K.*

5.3. Puntos límites y el lema de Wintner

Definición 5.3 (Puntos límites)**.** Sean $n \geq 1$ y $x : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $t_1 < \infty$. Sea $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que (t_1, x^1) es un punto límite de la gráfica de x para $t \to t_1$ cuando existe una sucesión (s_m) en el intervalo $[t_0, t_1)$ tal que $(s_m, x(s_m)) \to (t_1, x^1)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.3. *Sean $n \geq 1$, $t_1 < \infty$, $x : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ una función, Γ su gráfica y $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Se verifica una y solamente una de las dos siguientes situaciones:*

- $\lim\limits_{t \to t_1} \|x(t)\| = \infty$
- *Γ tiene al menos un punto límite para $t \to t_1$.*

Teorema 5.4 (Lema de Wintner)**.** *Sea $x : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$, siendo $t_1 < \infty$, una solución de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$, con gráfica Γ contenida en $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función continua en D. Sea (t_1, x^1) un punto límite de Γ para $t \to t_1$ y supongamos que se verifica la siguiente condición:*

Existe un entorno U de (t_1, x^1) tal que f es acotada de $U \cap D$.

Entonces $\lim\limits_{t \to t_1} x(t) = x^1$.

5.4. Soluciones maximales con gráficas contenidas en abiertos

Teorema 5.5. *Sean A un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función continua en A y $\|.\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución no prolongable de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ con gráfica Γ contenida en A, se verifica:*

1. *El intervalo I es abierto.*
2. *Si I tiene un extremo finito α, entonces $\lim\limits_{t \to \alpha} \|x(t)\| = \infty$ o bien cualquier punto límite de Γ para $t \to \alpha$ está en la frontera de A.*

5.5. Soluciones maximales de las ecuaciones diferenciales autónomas

Teorema 5.6 (Teorema fundamental de las ecuaciones autónomas)**.** *Supongamos que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sea $x : I \to \mathbb{R}$ una solución no prolongable de la ecuación $X' = g(x)$ y sea $t_0 \in \dot{I}$. Se verifica lo siguiente:*

1. *El intervalo I es abierto.*
2. *Si x es acotada en $I^+ = [t_0, \infty)$, existe $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = a$, siendo $a \in \mathbb{R}$, y la función constante dada por $y(t) \equiv a$ es solución de la ecuación $x' = g(x)$.*

3. *Si x es acotada en $I^- = (-\infty, t_0]$, existe $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = b$, siendo $b \in \mathbb{R}$, y la función constante dada por $y(t) \equiv b$ es solución de la ecuación $x' = g(x)$.*

Capítulo 6

Espacios de soluciones de los sistemas y ecuaciones diferenciales lineales

Teorema 6.1. *Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua en el intervalo I, el conjunto de soluciones del sistema diferencial lineal homogéneo $x' = A(t)x$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de dimensión finita igual a n.*

6.1. Matrices soluciones y matrices fundamentales

Definición 6.1 (Matrices soluciones y matrices fundamentales)**.** Sea el sistema diferencial homogéneo $x' = A(t)x$, donde $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua en I.

- Una matriz solución del sistema es una función matricial $\Phi : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas n columnas son soluciones del sistema.
- Una matriz fundamental del sistema es una función matricial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas n columnas forman un sistema fundamental de soluciones del sistema.

Si Φ es matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$, el conjunto de soluciones del sistema viene dado por:

$$\{x : I \to \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 6.2 (Caracterización de las matrices solución)**.** *Una función matricial $\Phi : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, derivable en I, es matriz solución del sistema $x' = A(t)x$ si y solo si verifica:*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad \forall t \in I$$

Teorema 6.3 (Caracterización de las matrices fundamentales)**.** *Si Φ es matriz solución del sistema diferencial lineal $x' = A(t)x$, las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Φ es matriz fundamental de $x' = A(t)x$.*
2. *$\det(\Phi(t)) \neq 0$ para cada $t \in I$.*
3. *Existe $t_0 \in I$ tal que $\det(\Phi(t_0)) \neq 0$.*

Corolario 6.4. *Para una matriz solución Φ solo caben las dos siguientes posibilidades:*

1. *$\det(\Phi(t)) \neq 0$ para cada $t \in I$.*
2. *$\det(\Phi(t)) = 0$ para cada $t \in I$.*

En la primera situación la matriz Φ es fundamental.

Proposición 6.5. *Sea Φ una matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$. Una función matricial $\Psi : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es matriz fundamental de $x' = A(t)x$ si y solo si:*

$$\Psi(t) = \Phi(t)C, \quad \forall t \in I$$

donde $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\det(C) \neq 0$.

Proposición 6.6. *Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua en el intervalo I, entonces para cada $t_0 \in I$ existe una única matriz fundamental Φ del sistema $x' = A(t)x$ tal que $\Phi(t_0) = I_n$. Tal función matricial se conoce como matriz fundamental canónica del sistema $x' = A(t)x$ en el punto $t_0 \in I$.*

Observación. Consideramos el problema de Cauchy:

$$(P) : \begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

con $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continua en I, $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que (P) tiene una única solución $x : I \to \mathbb{R}^n$.

1. Supongamos que Φ es una matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$. Entonces, la solución del problema (P) es:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0$$

2. Supongamos que Φ es una matriz fundamental canónica del sistema $x' = A(t)x$. Entonces, la solución del problema (P) es:

$$x(t) = \Phi(t)x^0$$

6.2. Fórmula de Abel-Liouville

Teorema 6.7. *Sea $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continua en el intervalo I y sea $t_0 \in I$. Si $\Phi : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es matriz solución del sistema homogéneo $x' = A(t)x$, se verifica:*

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds\right), \quad \forall t \in I$$

6.3. Soluciones de un sistema diferencial no homogéneo

Proposición 6.8. *Si V_H es el espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo (S_H), con $\dim V_H = n < \infty$, y $x_p : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema no homogéneo (S), el conjunto de soluciones de (S) viene dado por:*

$$\{x : I \to \mathbb{R}^n : x = x_h + x_p,\ x_h \in V_H\}$$

Corolario 6.9. *Si Φ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$ y x_p es una solución de $x' = A(t)x + b(t)$, entonces las soluciones del sistema no homogéneo son de la forma:*

$$x(t) = \Phi(t)c + x_p(t), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

Proposición 6.10 (Conjetura de Lagrange)**.** *Si Φ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$, existen soluciones del sistema $x' = A(t)x + b(t)$ que son de la forma:*

$$x_p(t) = \Phi(t)c(t)$$

donde la función $c : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable y viene dada por:

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

Capítulo 7

Resolución de sistemas y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

7.1. Exponencial de una matriz cuadrada

Definición 7.1. Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se llama matriz exponencial de A y se escribe e^A a la matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Proposición 7.1 (Propiedades de la exponencial)**.**

1. *Si $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz nula, entonces $e^{\Theta} = I_n$.*
2. *Si $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz identidad, $e^I = eI$.*
3. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A y B conmutan, entonces $Ae^B = e^B A$*
4. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A y B conmutan, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$*
5. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces e^A es invertible y su inversa es $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

7.2. Determinación de una matriz fundamental

Teorema 7.2. *Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ es intervalo no degenerado, que $B \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ y que B y B' conmutan para todo $t \in I$. Entonces, fijado $t_0 \in I$,* *la aplicación:*

$$\begin{aligned}\Phi_{t_0} : I &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ t_0 &\mapsto \Phi_{t_0}(t) = e^{B(t)-B(t_0)}\end{aligned}$$

es la matriz fundamental canónica de $x' = B'(t)x$ en t_0.

Corolario 7.3. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ entonces, para cada $t_0 \in I$ y cada $x^0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de Cauchy*

$$(P) : \begin{cases} x' = Ax + b \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene solución única en I.

Además, esta solución viene dada por:

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds, \quad t \in I$$

7.3. Cálculo de la exponencial de una matriz

1. Si $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, entonces:

$$e^{tA} = diag(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$$

2. Si A es semejante a una matriz diagonal D, es decir, existe P invertible tal que $A = PDP^{-1}$, entonces:

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

3. Si A es diagonal por bloques, es decir, $A = diag(A_1, \ldots, A_l)$ siendo cada $A_j \in \mathcal{M}_{r_j}(\mathbb{R})$ con $r_1 + \cdots + r_l = n$, entonces:

$$e^{tA} = diag(e^{tA_1}, \ldots, e^{tA_l})$$