

# Análisis complejo

28 de febrero de 2023

# Índice general

<b>Preliminares</b>	<b>2</b>
<b>1. Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad</b>	<b>8</b>
1.1. Funciones meromorfas . . . . .	8
1.2. Aplicaciones conformes . . . . .	9
1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido . . . . .	11
1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad . . . . .	14
1.5. El teorema de Schwarz-Pick . . . . .	16
1.6. Subordinación . . . . .	20
1.7. La métrica de Poincaré . . . . .	24
<b>2. Familias normales</b>	<b>29</b>
2.1. Familias normales . . . . .	29
2.2. El teorema de Montel . . . . .	30

# Preliminares

**Definición 0.1.** Si  $a \in \mathbb{C}$  y  $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ , se define la corona de centro  $a$  y radios  $R_1$  y  $R_2$  como:

$$A(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

**Teorema 0.1.** Si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$  y  $f$  es holomorfa en  $A(a, R_1, R_2)$ , entonces existe una única sucesión  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$  en  $\mathbb{C}$  tal que:

- $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  converge para todo  $z \in A(a, R_1, R_2)$ .
- $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  para todo  $z \in A(a, R_1, R_2)$ .

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

siendo  $\gamma$  cualquiera camino que esté en  $A(a, R_1, R_2)$  con  $n(\gamma, a) = 1$

Además, la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  converge absoluta y uniformemente a cada subconjunto compacto de  $A(a, R_1, R_2)$ .

A esta serie se le llama desarrollo de Laurent de  $f$  en  $A(a, R_1, R_2)$ .

**Definición 0.2.**  $f$  tiene una singularidad aislada en  $a \in \mathbb{C}$  si existe  $R > 0$  tal que  $f$  está definida y es holomorfa en  $D(a, R) \setminus \{a\} = A(a, 0, R)$ .

Podemos considerar el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $D(a, R) \setminus \{a\}$ . Existe una única sucesión en  $\mathbb{C}$ ,  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ , tal que:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n, \quad z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

Como la sucesión  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$  no depende de  $R$ , a este desarrollo se le puede llamar desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$  o en un entorno perforado de  $a$ .

**Proposición 0.2.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $a \in \mathbb{C}$  y sea  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$ . Entonces:

1.  $a$  es una singularidad evitable de  $f \Leftrightarrow a_n = 0$  si  $n < 0 \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\} = \emptyset$ .
2.  $a$  es un polo de orden  $N$  de  $f \Leftrightarrow a_{-N} \neq 0$  y  $a_n = 0$  si  $n < -N$ . Luego  $a$  es un polo de  $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$  es finito y no vacío.
3.  $a$  es una singularidad esencial de  $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$  es infinito.

**Definición 0.3.**  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$  si existe  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ .

1. Es una singularidad evitable de  $f$  si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  existe en  $\mathbb{C}$ .
2. Es un polo de  $f$  si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .
3. Es una singularidad esencial en otro caso.

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  para un cierto  $R > 0$ . Entonces la función  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  es holomorfa en  $D\left(0, \frac{1}{R}\right) \setminus \{0\}$ , por lo que tiene una singularidad aislada en 0.

Entonces:

1.  $f$  tiene una singularidad evitable en  $\infty \Leftrightarrow g$  tiene una singularidad evitable en 0.
2.  $f$  tiene un polo en  $\infty \Leftrightarrow g$  tiene un polo en 0.
3.  $f$  tiene una singularidad esencial en  $\infty \Leftrightarrow g$  tiene una singularidad esencial en 0.

**Proposición 0.3.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $\infty$ . Entonces:

1.  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f \Leftrightarrow f$  está acotada en un entorno perforado de  $\infty$ . Es decir, si existe  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa y está acotada en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ .
2.  $\infty$  es un polo de  $f \Leftrightarrow$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^N}$  existe en  $\mathbb{C}$  y es distinto de 0. En este caso,  $N$  es único y se denomina el orden de  $\infty$  como polo de  $f$ .
3.  $\infty$  es una singularidad esencial de  $f \Leftrightarrow f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$  es denso en  $\mathbb{C}$  para todo  $R > 0$  suficientemente grande.

*Observación.* En (2), el orden de  $\infty$  como polo de  $f$  coincide con el orden de 0 como polo de  $f\left(\frac{1}{z}\right)$ .

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} = A(0, R, \infty)$ . Podemos considerar el desarrollo

de Laurent de  $f$  en  $A(0, R, \infty)$ : existe una única sucesión  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  en  $\mathbb{C}$  tal que:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R$$

Como no depende de  $R$ , se le puede llamar desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ .

**Proposición 0.4.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $\infty$  y sea  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ . Entonces:

1.  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f \Leftrightarrow a_n = 0$  si  $n > 0$ .
2.  $\infty$  es un polo de  $f$  de orden  $N \Leftrightarrow a_N \neq 0$  y  $a_n = 0$  si  $n > N$ .
3.  $\infty$  es una singularidad esencial de  $f \Leftrightarrow \{n > 0 : a_n \neq 0\}$  es infinito.

**Definición 0.4.** Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $a \in \mathbb{C}$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$  es el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$ , se define  $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$ .

**Proposición 0.5.** Sea  $a \in \mathbb{C}$  y  $f$  una función con una singularidad aislada en  $a$ . Sea  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $D(a, R) \setminus \{a\}$ . Entonces, para todo  $r \in (0, R)$ , se tiene que:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$$

**Proposición 0.6.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $\infty$ . Sea  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ . Se define:

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz, \quad \text{siendo } r > R$$

**Proposición 0.7.** Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  es el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ , entonces  $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$ .

**Teorema 0.8** (Teorema de los residuos). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$  salvo por singularidades aisladas, es decir, existe  $A \subset D$ ,  $A$  sin puntos de acumulación en  $D$ , tal que  $f$  es holomorfa en  $D \setminus A$ . Sea  $\gamma$  un camino cerrado en  $D \setminus A$ , con  $n(\gamma, z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus D$ . Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) n(\gamma, a)$$

**Teorema 0.9** (Teorema de la función inversa). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$ , con  $a \in D$  tal que  $f'(a) \neq 0$ . Entonces existen  $U, V$  abiertos en  $\mathbb{C}$  con  $a \in U \subset D$ ,  $f(a) \in V$ , tales que:

1.  $f$  es inyectiva en  $U$ .

2.  $f(U) = V$ .
3.  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .
4.  $f^{-1} : V \rightarrow U$  es holomorfa y además:

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \forall z \in U$$

**Teorema 0.10.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  no constante y  $a \in D$ . Sea  $n$  el orden de  $a$  como cero de  $f - f(a)$ , es decir, el primer natural para el que  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Entonces  $f$  es localmente una aplicación  $n \rightarrow 1$  cerca de  $a$ . Es decir, existe  $\alpha > 0$  con  $D(a, \alpha) \subset D$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \alpha$  existe  $\delta > 0$  tal que cada punto  $w \in D(f(a), \delta) \setminus \{f(a)\}$  es la imagen de exactamente  $n$  puntos distintos  $z_1, z_2, \dots, z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ . En particular,  $f(D(a, \varepsilon)) \supset D(f(a), \delta)$ .

**Definición 0.5.** Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$  salvo por polos. Si  $a \in D$  es un polo de  $f$ , se tiene que  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . Definimos  $f(a) = \infty$ . Entonces  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  y es continua. Se dice que  $f$  es meromorfa en  $D$ .

**Teorema 0.11.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  meromorfa en  $D$ , con  $a \in D$  un polo de orden  $n$  de  $f$ . Entonces  $f$  es localmente una aplicación  $n \rightarrow 1$  cerca de  $a$ . Es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que  $D(a, \alpha) \subset D$ ,  $f$  es holomorfa en  $D(a, \alpha) \setminus \{a\}$  y se verifica que para todo  $0 < \varepsilon < \alpha$  existe  $R > 0$  tal que cada punto  $w \in \mathbb{C}$  con  $|w| > R$  es la imagen de exactamente  $n$  puntos distintos  $z_1, z_2, \dots, z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ . En particular,  $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$ .

**Teorema 0.12.** Sea  $f$  una función con un polo de orden  $n$  en  $\infty$ . Entonces  $f$  es localmente una aplicación  $n \rightarrow 1$  cerca de  $\infty$ . Es decir, existe  $R_0 > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$  y se verifica que para todo  $R > R_0$  existe  $R' > 0$  tal que cada punto  $w \in \mathbb{C}$  con  $|w| > R'$  es la imagen de exactamente  $n$  puntos distintos  $z_1, \dots, z_n$  de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ . En particular,  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R'\}$ .

**Teorema 0.13** (Teorema de la aplicación abierta). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y no constante. Entonces  $f$  es una aplicación abierta. En particular,  $f(D)$  es un dominio.

**Lema 0.14.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$ .

- Sea  $a \in D$ . Entonces  $f'(a) \neq 0$  si y solo si  $f$  es inyectiva en un entorno de  $a$ .
- Si  $f$  es inyectiva en  $D$ , entonces  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$ .

## Aplicaciones conformes

**Definición 0.6.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e inyectiva. Sea  $D' = f(D)$ . Entonces:

- $D'$  es un dominio en  $D$ .
- $f : D \rightarrow D'$  es biyectiva.
- $f^{-1} : D' \rightarrow D$  es holomorfa.

En ese caso decimos que  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ .

*Observación.*

1. Si  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ , entonces  $f^{-1}$  es una aplicación conforme de  $D'$  sobre  $D$ .
2. Si  $D_1, D_2$  y  $D_3$  son dominios en  $\mathbb{C}$  con  $f$  aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_2$  y  $g$  aplicación conforme de  $D_2$  sobre  $D_3$ , entonces  $g \circ f$  es una aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_3$ .

**Definición 0.7.** Si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios en  $\mathbb{C}$ , se dice que  $D_1$  y  $D_2$  son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme  $f$  de  $D_1$  sobre  $D_2$ .

En el conjunto de los dominios en  $\mathbb{C}$ , se tiene la relación de equivalencia "ser conformemente equivalentes".

**Definición 0.8.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ .  $D$  es simplemente conexo si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo. Equivalentemente,  $D$  es simplemente conexo si todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$  es homólogo a cero módulo  $D$ , es decir,  $n(\gamma, z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus D$ .

**Teorema 0.15.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos dominios en  $\mathbb{C}$  que son conformemente equivalentes. Entonces  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $D_2$  es simplemente conexo.

**Definición 0.9.** Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , el ángulo formado por  $z_1$  y  $z_2$  se define como:

$$\theta(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in (-\pi, \pi]$$

*Observación.* Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , entonces  $\theta(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) = \theta(z_1, z_2)$ .

**Definición 0.10.** Sea  $\gamma$  un camino con origen en un punto  $a \in \mathbb{C}$ . Se dice que  $\gamma$  es regular en  $a$  si existe una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\gamma'(0) \neq 0$ .

**Definición 0.11.** Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos caminos con origen  $a \in \mathbb{C}$  que son regulares en  $a$ . El ángulo que forman  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $a$ ,  $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$ , se define como sigue.

Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizaciones  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente tales que  $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$ . Entonces  $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ .

**Definición 0.12.** Si  $\gamma$  es una curva en  $\mathbb{C}$  y  $f : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  es continua, se define la curva imagen de  $\gamma$  por  $f$  como la curva  $\Gamma$  que tiene por parametrización  $f \circ \gamma$ , siendo  $\gamma$  una parametrización de  $\gamma$ .

**Definición 0.13.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  y  $a \in D$ . Diremos que  $f$  preserva ángulos en  $a$  o que  $f$  es conforme en  $a$  si se verifica lo siguiente.

Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son caminos con origen  $a$ , regulares en  $a$ , entonces las curvas imagen de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  por  $f$  de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente son caminos con origen  $f(a)$ , que son regulares en  $f(a)$  y se tiene que:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

**Teorema 0.16.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  y  $a \in D$ . Si  $f'(a) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $a$ .

*Demostración.* Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caminos en  $D$ , con origen en  $a$  y regulares en  $a$ . Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizaciones de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente, ambas  $\mathcal{C}^1$  a trozos con  $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$ . Consideramos las curvas imagen de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por  $f$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= f \circ \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \Gamma_2 &= f \circ \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

$\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son  $\mathcal{C}^1$  a trozos. Además,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son caminos con origen  $f(a)$ , porque:

$$\Gamma_1(0) = f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(\gamma_2(0)) = \Gamma_2(0)$$

Observamos que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son regulares en  $a$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_1'(0) &= f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = f'(a)\gamma_1(0) \neq 0 \\ \Gamma_2'(0) &= f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) = f'(a)\gamma_2(0) \neq 0\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

□

**Ejemplo (Contraejemplo).** Sean  $D = \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  y  $a = 0$ . Observamos que  $f'(a) = 0$ . Sea  $\gamma_1$  el segmento  $[0, 1]$  y  $\gamma_2$  el segmento  $[0, i]$ . Es claro que  $\theta_0(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$ . Si consideramos las curvas imagen de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por  $f$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , podemos ver que  $\Gamma_1$  es el segmento  $[0, 1]$  y  $\Gamma_2$  el segmento  $[0, -1]$ , que tienen  $\theta_0(\Gamma_1, \Gamma_2) = \pi \neq \frac{\pi}{2}$ .

De hecho, se tiene la equivalencia. Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  y  $a \in D$ . Entonces  $f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow f$  es conforme en  $a$ .



# Capítulo 1

## Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad

### 1.1. Funciones meromorfas

**Definición 1.1.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}^*$ . La función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  es meromorfa en  $D$  si dado  $a \in D$  se verifica una de las siguientes posibilidades:

- $a \in \mathbb{C}$  y  $f$  es holomorfa en  $a$ .
- $a \in \mathbb{C}$  y  $f$  tiene un polo en  $a$ , es decir,  $f(a) = \infty$ .
- $a = \infty$  y  $f$  tiene una singularidad evitable en  $\infty$ , es decir,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ .
- $a = \infty$  y  $f$  tiene un polo en  $a$ , es decir,  $f(\infty) = \infty$ .

Entonces  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  es continua.

*Observación.* En el caso  $D \subset \mathbb{C}$ , la definición es la que ya conocíamos de función meromorfa. Si además  $f(D) \subset \mathbb{C}$ , se tiene una función holomorfa en  $D$ .

*Observación.* Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  continua. Supongamos que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$  y que el conjunto  $\{z \in D : f(z) = z\}$  no tiene puntos de acumulación en  $D$ . Entonces  $f$  es meromorfa en  $D$ .

*Observación.* Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $f$  meromorfa e inyectiva en  $A = \{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$ . Entonces  $f$  tiene a lo sumo un polo y tal polo es simple. Además,  $f'(a) \neq 0$  para todo  $a \in A$ , por lo que  $f$  es conforme en  $a$  para todo  $a \in A$ .

**Teorema 1.1** (Teorema de la aplicación abierta). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  una función meromorfa y no constante en  $D$ . Entonces  $f$  es una aplicación abierta. En particular,  $f(D)$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ .*

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  meromorfa e inyectiva, con  $D' = f(D)$ . Entonces:

1.  $D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ .
2.  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  es meromorfa e inyectiva.

Veamos que (2) es cierto. Como  $f$  es una aplicación abierta, se tiene que  $f^{-1}$  es continua. Sea  $w \in D' \cap \mathbb{C}$  tal que  $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}$ , veamos que  $f^{-1}$  es holomorfa en  $w$ . Como  $z \in \mathbb{C} \cap D$  y  $f(z) \in \mathbb{C}$ ,  $f$  es holomorfa en  $z$  con  $f'(z) \neq 0$ . Por el teorema de la función inversa,  $f^{-1}$  es holomorfa en  $w$ .

## 1.2. Aplicaciones conformes

**Definición 1.2.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  meromorfa e inyectiva en  $D$ . Sea  $D' = f(D)$ . Entonces diremos que  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ .

En este caso, se tiene que  $D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y que  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  es meromorfa e inyectiva en  $D'$ . Por tanto,  $f : D \rightarrow D'$  es un homeomorfismo, con  $f$  y  $f^{-1}$  meromorfas.

*Observación.*

1. Si  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ , entonces  $f^{-1}$  es una aplicación conforme de  $D'$  sobre  $D$ .
2. Si  $D_1, D_2$  y  $D_3$  son dominios en  $\mathbb{C}^*$ , con  $f$  aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_2$  y  $g$  aplicación conforme de  $D_2$  sobre  $D_3$ , entonces  $g \circ f$  es una aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_3$ .

Se puede comprobar que, sean  $G_1, G_2$  abiertos en  $\mathbb{C}^*$  y  $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}, g : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfas tal que  $f(G_1) \subset G_2$ , entonces  $g \circ f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es meromorfa.

**Definición 1.3.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dominios en  $\mathbb{C}^*$ . Diremos que  $D_1$  y  $D_2$  son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme  $f$  de  $D_1$  sobre  $D_2$ .

En el conjunto de los dominios en  $\mathbb{C}^*$ , el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.

**Definición 1.4.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Diremos que  $D$  es simplemente conexo si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo.

**Ejemplo.**

- $D = \mathbb{C}$ .
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \{a\}, a \in \mathbb{C}$ .
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(a, R), a \in \mathbb{C}, R > 0$ .
- $D = D(a, R), a \in \mathbb{C}, R > 0$ .

- Un semiplano sin  $\infty$ .
- Un sector sin  $\infty$ .
- El plano menos dos semirrectas.
- $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , no es simplemente conexo, porque  $\mathbb{C}^* \setminus D = \{a, \infty\}$  no es conexo.

**Lema 1.2.** Dado  $a \in \mathbb{C}$ , la transformación  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $T(z) = \frac{1}{z-a}$  si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ ,  $T(a) = \infty$  y  $T(\infty) = 0$ , es una aplicación conforme de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ .

**Lema 1.3.** Sea  $H$  un homeomorfismo de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ . Si  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $H(D)$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ .

*Demostración.* Como  $H : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  y  $D$  es abierto y conexo en  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $H(D)$  es abierto y conexo en  $\mathbb{C}^*$ . Luego  $H(D)$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Como además  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo, entonces  $\mathbb{C}^* \setminus H(D) = H(\mathbb{C}^* \setminus D)$  es conexo. Por tanto,  $H(D)$  es un dominio simplemente conexo.  $\square$

**Teorema 1.4.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos dominios en  $\mathbb{C}^*$  que son conformemente equivalentes. Entonces  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $D_2$  es simplemente conexo.

*Demostración.* Sea  $F : D_1 \rightarrow D_2$  aplicación conforme. Consideramos todos los posibles casos teniendo en cuenta que los papeles de  $D_1$  y  $D_2$  son intercambiables.

- Si  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ , se cumple.
- Si  $D_1 = \mathbb{C}^*$ , como  $\mathbb{C}^*$  es cerrado y  $F$  es un homeomorfismo, se tiene que  $D_2$  es compacto y por tanto cerrado. Entonces  $D_2$  es abierto y cerrado en  $\mathbb{C}^*$ , que es conexo. Por tanto,  $D_2 = \mathbb{C}^* = D_1$ , ambos simplemente conexos.
- Si  $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}^*$ , consideramos dos casos.
  - Supongamos que  $\infty \notin D_1$  y  $\infty \in D_2$ .  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $D_2$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Sea  $a \in \mathbb{C}^* \setminus D_2$ , de hecho  $a \in \mathbb{C} \setminus D_2$ . Tomamos la aplicación conforme  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $T(z) = \frac{1}{z-a}$  si  $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$ ,  $T(a) = \infty$ . Tenemos el diagrama:

$$D_1 \xrightarrow{F} D_2 \xrightarrow{T} T(D_2)$$

$T(D_2)$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Como  $a \notin D_2$ , entonces  $T(a) = \infty \notin T(D_2)$ . Así que  $T(D_2)$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  conformemente equivalente a  $D_1$ . Luego  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $T(D_2)$  es simplemente conexo. Por el lema anterior, esto es equivalente a que  $D_2$  sea simplemente conexo.

- Supongamos que  $\infty \in D_1, D_2$ . Se sigue de un razonamiento similar usando el apartado anterior.

□

### 1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido

Veremos que hay tres clases de equivalencia de dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}^*$ :  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$  y el disco unidad  $\mathbb{D} = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

$\mathbb{C}^*$  es compacto. Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$  que es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $D$  es compacto y por tanto cerrado. Como  $D$  es abierto, entonces  $D = \mathbb{C}^*$ .

$\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  son homeomorfos. Por ejemplo,  $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T(z) = \frac{z}{1-|z|}$  es un homeomorfismo.

**Proposición 1.5.**  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  no son conformemente equivalentes.

*Demostración.* Supongamos que existe una aplicación conforme  $F$  de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{D}$ . Entonces  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  es entera y acotada. Por el teorema de Liouville,  $F$  es constante. Esto contradice que  $F$  sea una aplicación conforme. □

**Proposición 1.6.** Sea  $f$  entera e inyectiva, entonces  $f$  es de la forma

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

*Demostración.* Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , el desarrollo de Taylor de  $f$  en 0. Entonces  $\infty$  es una singularidad aislada de  $f$  y el desarrollo anterior coincide con el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ .

- Si  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f$ , entonces  $a_n = 0$  si  $n \geq 1$ , así que  $f$  es constante. Esto no es posible.
- Si  $\infty$  es un polo de orden  $N$  de  $f$ , entonces  $a_N \neq 0$  y  $a_n = 0$  si  $n > N$ . Luego  $f$  es un polinomio de grado  $N$ .  $f'$  es un polinomio de grado  $N-1$ , con  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Así que  $f'$  es constante, por tanto  $N-1 = 0 \Rightarrow N = 1$ .
- Si  $\infty$  es una singularidad esencial de  $f$ , entonces  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$  es denso en  $\mathbb{C}$ . Por el teorema de la aplicación abierta,  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$  es abierto en  $\mathbb{C}$ . Estos conjuntos son disjuntos por ser  $f$  inyectiva, y esto no es posible.

□

Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  que es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , entonces  $D = \mathbb{C}$ . Veamos que esto es verdad. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow D$  aplicación conforme.  $f$  es entera e inyectiva, así que  $f(z) = \alpha z + \beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Luego  $D = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .

Las aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{C}$  son de la forma:

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0$$

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  que es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ .

- Si  $\infty \notin D$ , entonces  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  y, por tanto,  $D = \mathbb{C}$ .
- Si  $\infty \in D$ , consideramos  $F : \mathbb{C} \rightarrow D$  aplicación conforme. Como sabemos que  $D \neq \mathbb{C}^*$ , existe  $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus D$ , de hecho  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$ . Sea

$$T : D \rightarrow T(D), \quad T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$$

Tenemos el diagrama:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{T} T(D) = D'$$

$D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , así que  $D' = \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\}$ . Por tanto,  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ .

Hemos probado que si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , entonces  $D = \mathbb{C}$  o  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Es decir,  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

Los dominios en  $\mathbb{C}^*$  que son conformemente equivalentes a  $\mathbb{C}$  son  $\mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

## Aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$

Sea  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  aplicación conforme. Sea  $a \in \mathbb{C}^*$  tal que  $T(a) = \infty$ . Consideramos dos casos:

1. Si  $a = \infty$ ,  $T(\infty) = \infty$ .  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación conforme, así que  $T(z) = \alpha z + \beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ .
2. Si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $T(a) = \infty$ .  $T$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , así que  $a$  es un polo simple de  $T$ . Consideramos el desarrollo de Laurent de  $T$  en  $a$ .

$$T(z) = \frac{A_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}, \quad A_{-1} \neq 0$$

$\infty$  es una singularidad aislada de  $T$ . De hecho, es una singularidad evitable.

Sea  $F(z) = T(z) - \frac{A_{-1}}{z - a}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ .  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .  $a$  es singularidad evitable de  $F$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = T(\infty) \in \mathbb{C}$ , así que  $\infty$  es una singularidad evitable también. Evitando la singularidad de  $F$  en  $a$ ,

tenemos que  $F$  es entera y acotada. Por tanto  $F$  es constante. Así que  $F(z) = a_0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces:

$$T(z) = F(z) + \frac{A_{-1}}{z-a} = a_0 + \frac{A_{-1}}{z-a} = \frac{a_0 z + (A_{-1} - a_0 a)}{z-a}$$

En cualquiera de los dos casos,  $T$  es de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

No todas las aplicaciones de esta forma son aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ .

**Ejemplo** (Contraejemplo). No es una aplicación conforme si  $\alpha = \beta = 0$  o  $(\alpha, \beta)$  y  $(\gamma, \delta)$  son proporcionales. Por ejemplo:

$$T(z) = \frac{3z+2}{6z+4} = \frac{1}{2}$$

Para que las aplicaciones de esa forma sean aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ , se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

En el caso (1),  $T(z) = Az + B = \frac{Az+B}{0z+1}$ , con  $A, B \in \mathbb{C}$ ,  $A \neq 0$ , luego:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = A \neq 0$$

En el caso (2),

$$\begin{vmatrix} a_0 & A_{-1} - a_0 a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a_0 a - A_{-1} + a_0 a = -A_{-1} \neq 0$$

**Teorema 1.7.** Las aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^*$  son de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

*Demostración.* Sea  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  una aplicación de esa forma.

■ Si  $\gamma = 0$ , entonces:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}, \quad \alpha, \delta \neq 0$$

$T$  es una aplicación conforme de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{C}$ , con  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$ . Definiendo  $T(\infty) = \infty$ , tenemos que  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  es una aplicación conforme.

- Si  $\gamma \neq 0$ , entonces  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\} \\ T\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) &= \infty \\ T(\infty) &= \frac{\alpha}{\gamma} \end{aligned}$$

$T$  es meromorfa en  $\mathbb{C}^*$  y  $T$  es inyectiva.

Veamos que  $T$  es sobreyectiva. Sea  $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$  y sea  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} T(z) = w &\Leftrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w \Leftrightarrow \alpha z + \beta = \gamma z w + \delta w \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \gamma w)z = \delta w - \beta \Leftrightarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} \end{aligned}$$

Por tanto,  $T$  es una aplicación conforme de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ .

Además, hemos probado que  $T^{-1}$  es de la forma:

$$T^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}, \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Si  $\gamma = 0$ , también es válida esta expresión. □

## 1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad

**Teorema 1.8** (Lema de Schwarz). *Sea  $\varphi$  una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Entonces:*

1.  $|\varphi(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .
2.  $|\varphi'(0)| \leq 1$ .

Además, se da la igualdad en (1) para algún  $z \in \mathbb{D}$  con  $z \neq 0$  o bien se da la igualdad en (2) si y solo si  $\varphi$  es una rotación de  $\mathbb{D}$ , es decir, si existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| = 1$  tal que  $\varphi(z) = \lambda z$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

*Observación.* Si  $\varphi$  es una rotación, entonces se da la igualdad en (1) para todo  $z \in \mathbb{D}$  y se da la igualdad en (2).

*Observación.* El teorema se puede enunciar de forma equivalente con la condición  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$  en lugar de  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Es decir, si  $\varphi$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ , entonces  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Veamos que esto es cierto. Supongamos que existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  con  $|\varphi(z_0)| = 1$ . Como  $|\varphi(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , por el principio del máximo  $\varphi$  es constante, luego  $\varphi \equiv \varphi(0) = 0$ . Esto contradice que  $|\varphi(z_0)| = 1$ .

Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Sea  $a \in \mathbb{D}$  y  $b = f(a) \in \mathbb{D}$ . Definimos:

$$\begin{aligned} T_a(z) &= \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, & T_a \in \mathcal{M}, T_a(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, T_a(0) = a \\ S_b(z) &= \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, & S_b \in \mathcal{M}, S_b(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, S_b(b) = 0 \end{aligned}$$

Sea  $\varphi = S_b \circ f \circ T_a$ .  $\varphi$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ , con  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  y  $\varphi(0) = 0$ . Por el lema de Schwarz,

1.  $|\varphi(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .
2.  $|\varphi(0)| \leq 1$ .

Además, se da la igualdad en (1) para algún  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq 0$ , o bien se da la igualdad en (2) si y solo si  $\varphi$  es una rotación.

Desarrollamos las dos expresiones:

1. Sea  $z \in \mathbb{D}$ . Consideramos  $T_a^{-1}(z) \in \mathbb{D}$ .

$$\begin{aligned} |\varphi(T_a^{-1}(z))| &\leq |T_a^{-1}(z)| \Leftrightarrow |S_b(f(z))| \leq |S_a(z)| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \frac{f(z)-b}{1-\bar{z}f(z)} \right| &\leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|, \quad \forall z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Además, si se da la igualdad para algún  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq a$ , entonces  $\varphi$  es una rotación. Entonces,  $f = S_b^{-1} \circ \varphi \circ T_a^{-1} \in \mathcal{M}$ , con  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

2. Por la regla de la cadena,  $\varphi'(0) = T'_a(0)f'(a)S'_b(b)$ .

$$\begin{aligned} T'_a(z) &= \frac{1+\bar{a}z-(z+a)\bar{a}}{(1+\bar{a}z)^2}, & T'_a(0) &= 1-|a|^2 \\ S'_b(z) &= \frac{1-\bar{b}z+(z-b)\bar{b}}{(1-\bar{b}z)^2}, & S'_b(b) &= \frac{1-|b|^2}{(1-|b|^2)} = \frac{1}{1-|b|^2} \end{aligned}$$

Así que:

$$\varphi'(0) = (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2}$$

Por tanto:

$$|\varphi'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

Además, si se da la igualdad, entonces  $\varphi$  es una rotación y por tanto  $f \in \mathcal{M}$ , con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Por tanto, hemos probado lo siguiente:



1. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|$$

Si se da la igualdad para algún  $z \in \mathbb{D}$  con  $z \neq a$  entonces  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

- 2.

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

Si se da la igualdad entonces  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

## 1.5. El teorema de Schwarz-Pick

**Teorema 1.9** (Teorema de Schwarz-Pick). *Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Entonces:*

1. Para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

2. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Además, se da la igualdad en (1) para algún par de puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  con  $z_1 \neq z_2$  o bien se da la igualdad en (2) para algún  $z \in \mathbb{D}$  si y solo si  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , en cuyo caso se da la igualdad en (1) para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  y se da la igualdad en (2) para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

**Proposición 1.10.** *Sea  $T \in \mathcal{M}$  con  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . Entonces:*

1. Para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,

$$\left| \frac{T(z_2) - T(z_1)}{1 - \overline{T(z_1)}T(z_2)} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

2. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

**Definición 1.5.** Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ , definimos:

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

Observamos que si  $1 - \bar{z}_1 z_2 = 0$  entonces  $\bar{z}_1 z_2 = 1 \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$ . Como esto no ocurre,  $\rho$  está bien definida.

La primera parte del teorema de Schwarz-Pick se puede reescribir usando  $\rho$ .

Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Entonces:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, se da la igualdad para algún par de puntos distintos  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  si y solo si  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , en cuyo caso se da la igualdad para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ .

Vamos a ver que  $\rho$  es una distancia en  $\mathbb{D}$ .

$$\rho : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

- $\rho(z_1, z_2) \geq 0$ .
- $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ .
- $\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ .
- $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$ .

**Lema 1.11.** Para todo  $a, z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}$$

Observamos que si  $a, z \in \mathbb{D}$ , tenemos:

$$\rho(a, z) = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = |S_a(z)| < 1, \quad S_a \in \mathcal{M}, S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$$

Dados  $a \in \mathbb{D}$  y  $0 < r < 1$ , denotamos:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

Entonces, dado  $z \in \mathbb{D}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} z \in \Delta(a, r) &\Leftrightarrow \rho(z, a) < r \Leftrightarrow |S_a(z)| < r \Leftrightarrow S_a(z) \in D(0, r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \in S_a^{-1}(D(0, r)) \Leftrightarrow z \in T_a(D(0, r)) \end{aligned}$$

Entonces  $\Delta(a, r) = T_a(D(0, r))$ .

$T_a(\partial D(0, r))$  es una circunferencia  $C$  contenida en  $\mathbb{D}$ . Sean  $c$  y  $R$  el centro y el radio de  $C$ , con  $c \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$ . Entonces  $T_a(D(0, r)) = D(c, R)$ . Por tanto:

$$\Delta(a, r) = T_a(D(0, r)) = D(c, R)$$

Así que  $\Delta(a, r)$  es un disco euclídeo. Como  $T_a(0) = a$  tenemos que  $a \in \Delta(a, r)$ , pero  $a$  no tiene por qué ser el centro del disco.

Vamos a calcular  $c$  y  $R$ . Si  $a = 0$ ,  $T_a(z) = z$  luego  $T_a(D(0, r)) = D(0, r)$ . Supongamos que  $a \neq 0$ . Sea  $L$  la recta que pasa por  $0$  y  $a$ . Calculamos  $S_a(L)$  hallando la imagen de tres puntos.

$$\begin{aligned} S_a(0) &= -a \\ S_a(a) &= 0 \\ S_a\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) &= \infty \end{aligned}$$

$L' = S_a(L)$  es la recta que pasa por  $0$  y por  $-a$ , luego  $L'$  coincide con  $L$ . Como  $L'$  es perpendicular a  $\partial D(0, r)$  en los dos puntos de corte y  $T_a$  preserva ángulos en esos dos puntos, entonces  $L$  es perpendicular a  $C$ . Por tanto  $c$  está en  $L$ .

El diámetro  $\left[-r\frac{a}{|a|}, r\frac{a}{|a|}\right]$  se aplica mediante  $T_a$  en un diámetro de  $C$ , que es:

$$\left[T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right), T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2} \left( T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) + T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) \right) \\ R &= \frac{1}{2} \left| T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) - T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) \right| \end{aligned}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) &= \frac{-r\frac{a}{|a|} + a}{1 - \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{-ra + a|a|}{|a| - r|a|^2} = \frac{a(|a| - r)}{|a|(1 - r|a|)} \\ T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) &= \frac{r\frac{a}{|a|} + a}{1 + \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{ra + a|a|}{|a| + r|a|^2} = \frac{a(|a| + r)}{|a|(1 + r|a|)} \end{aligned}$$

Se llega a que:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1 - r^2}{1 - r^2|a|^2} a \\ R &= \frac{r(1 - |a|^2)}{1 - r^2|a|^2} \end{aligned}$$

Observamos que los puntos de mayor y menor módulo de  $C$  son  $T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)$  y  $T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)$ . Veamos que, de hecho,

$$\left| T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) \right| = \frac{||a| - r|}{1 - r|a|} \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} = \left| T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) \right|$$

- Si  $|a| \geq r$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|a| - r}{1 - r|a|} &\leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} \Leftrightarrow |a| + r|a|^2 - r - r^2|a| \leq r + |a| - r^2|a| - r|a|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2r|a|^2 \leq 2r \Leftrightarrow |a| \leq 1 \end{aligned}$$

- Si  $|a| < r$  se razona de forma análoga.

Entonces, para todo  $z \in \partial D(0, r)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{|a| - r}{1 - r|a|} &\leq T_a(z) \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} \Leftrightarrow \frac{|a| - r}{1 - r|a|} \leq \left| \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \right| \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{||a| - |z||}{1 - |z||a|} \leq \left| \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |z||a|} \leq |z| + |a| \end{aligned}$$

Hemos probado esto para  $a, z \in \mathbb{D}$ ,  $a, z \neq 0$ . Pero si  $a = 0$  o  $z = 0$  la desigualdad es trivial. Por tanto, esta cadena de desigualdades es cierta para todo  $a, z \in \mathbb{D}$ .

Cambiando  $a$  por  $-a$ , tenemos:

$$\frac{||a| - |z||}{1 - |z||a|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |z||a|} \leq |z| + |a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Las desigualdades primera y segunda corresponden al último lema.

Por otro lado,

$$\rho(a, z) \leq |z| + |a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Como  $\rho(z_1, 0) = |z_1|$  y  $\rho(0, z_2) = |z_2|$ , entonces:

$$\rho(a, z) \leq \rho(a, 0) + \rho(0, z), \quad a, z \in \mathbb{D}$$

Esto es un caso particular de la desigualdad triangular.

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ . Tenemos, usando el teorema de Schwarz-Pick,

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_3) &= \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_3)) \leq \rho(S_{z_2}(z_1, 0)) + \rho(0, S_{z_2}(z_3)) = \\ &= \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_2)) + \rho(S_{z_2}(z_2), S_{z_2}(z_3)) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \end{aligned}$$

Así que  $\rho$  verifica la desigualdad triangular. Por tanto,  $\rho$  es una distancia en  $\mathbb{D}$  que se denomina distancia pseudohiperbólica en  $\mathbb{D}$ .

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = |S_{z_1}(z_2)| < 1$$

Si  $a \in \mathbb{D}$  y  $0 < r < 1$ , el disco pseudohiperbólico de centro  $a$  y radio  $r$  es:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

No consideramos  $r \geq 1$  porque  $\Delta(a, r) = \mathbb{D}$ . Sabemos que  $\Delta(a, r)$  es un disco euclídeo, en concreto un disco abierto de centro  $\frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a$  y radio  $\frac{r(1-|a|^2)}{1-r^2|a|^2}$ . Si  $a = 0$ ,  $\Delta(a, r) = D(0, r)$ .

Esta distancia es equivalente a la distancia euclídea en  $\mathbb{D}$ .

Si  $T \in \mathcal{M}$  con  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , se tiene que:

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , se tiene que:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

## 1.6. Subordinación

**Definición 1.6.** Sean  $f, F$  holomorfas en  $\mathbb{D}$ . Diremos que  $f$  está subordinada a  $F$ ,  $f \prec F$ , si existe  $w$  holomorfa en  $\mathbb{D}$ , con  $w(0) = 0$  y  $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  tal que  $f = F \circ w$ .

*Observación.*  $w$  está en las condiciones del lema de Schwarz.

Veamos algunas propiedades:

- $f(0) = F(w(0)) = F(0)$ .
- $f(\mathbb{D}) = F(w(\mathbb{D})) \subset F(\mathbb{D})$ .
- Si  $0 < r < 1$ , veamos que

$$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$

Si  $z \in D(0, r)$ ,  $f(z) = F(w(z))$ . Por el lema de Schwarz,

$$|w(z)| \leq |z| < r$$

- Si  $0 < r < 1$ , veamos que

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

Si  $|z| = r$ , como por el lema de Schwarz  $|w(z)| \leq |z| = r$ , entonces:

$$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)|$$

- Si  $|z| = r$ , como por el lema de Schwarz  $|w'(0)| \leq 1$  y además  $f'(0) = F'(w(0))w'(0) = F'(0)w'(0)$ , entonces:

$$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)|$$

- No se verifica para todo  $r \in (0, 1)$  que

$$\max_{|z|=r} |f'(z)| \leq \max_{|z|=r} |F'(z)|$$

**Ejemplo** (Contraejemplo). Sean  $f(z) = z^2$  y  $F(z) = z$ . Podemos tomar  $w(z) = z^2$ , que verifica  $w(0) = 0$  y  $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , luego  $f \prec F$ . Si  $0 < r < 1$ ,

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |f'(z)| &= \max_{|z|=r} 2|z| = 2r \\ \max_{|z|=r} |F'(z)| &= 1 \end{aligned}$$

Observamos que no se cumple que  $2r \leq 1$  para todo  $r \in (0, 1)$ .

Por la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick,

$$\frac{|w'(z)|}{1 - |w(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Entonces, si  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= |F'(w(z))||w'(z)| \leq |F'(w(z))| \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |w(z)|^2)|F'(w(z))| \end{aligned}$$

Entonces, si  $0 < r \leq 1$ , tenemos que:

$$\sup_{|z| < r} (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \sup_{|z| < r} (1 - |z|^2)|F'(z)|$$

Veamos que esto es cierto. Si  $|z| < r$ , como  $|w(z)| \leq |z| < r$ ,

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |w(z)|^2)|F'(w(z))| \leq \sup_{|z| < r} (1 - |z|^2)|F'(z)|$$

**Proposición 1.12.** Sean  $f, F$  holomorfas en  $\mathbb{D}$ , con  $f \prec F$ . Entonces:

1.  $f(0) = F(0)$ .
2.  $f(\mathbb{D}) \subset F(\mathbb{D})$ .
3. Para todo  $r \in (0, 1)$ ,

$$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$

4. Para todo  $r \in (0, 1)$ ,

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

5.  $|f'(0)| \leq |F'(0)|$ .

6. Para todo  $r \in (0, 1]$ ,

$$\sup_{|z| < r} (1 - |z|^2) |f'(z)| \leq \sup_{|z| < r} (1 - |z|^2) |F'(z)|$$

La última propiedad tiene mucha relación con el espacio de Bloch  $\mathcal{B}$  de las funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$  que satisfacen:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$$

*Observación.* Veamos qué se puede decir sobre los coeficientes de Taylor. Sean  $f$  y  $F$  holomorfas en  $\mathbb{D}$  con  $f \prec F$ . Consideramos los desarrollos de Taylor de  $f$  y  $F$  para  $z \in \mathbb{D}$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \end{aligned}$$

Usando (1), observamos que:

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ A_0 = F(0) \end{cases} \Rightarrow a_0 = A_0$$

Con (2), vemos que:

$$\begin{cases} a_1 = f'(0) \\ A_1 = F'(0) \end{cases} \Rightarrow |a_1| \leq |A_1|$$

No podemos decir nada más. Por ejemplo, dado  $N \geq 2$ , podemos considerar  $f(z) = z^N$  y  $F(z) = z$ . Observamos que  $f \prec F$  con  $w(z) = z^N$ . Observamos que  $a_N = 1$  y  $A_N = 0$ , luego no es cierto que  $|a_n| \leq |A_n|$ .

Veamos ahora un ejemplo importante de subordinación. Sea  $F$  una aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ , siendo  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  tal que  $f(\mathbb{D}) \subset D$  y  $f(0) = F(0)$ , entonces  $f \prec F$ .

Sea  $w = F^{-1} \circ f$ .  $w$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ ,  $w(0) = F^{-1}(f(0)) = F^{-1}(F(0)) = 0$  y  $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Además,  $f = F \circ w$ .

Por ejemplo:

$$P(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Esta es una transformación de Möbius que aplica  $\partial\mathbb{D}$  en el eje imaginario.  $P(\mathbb{D})$  es el semiplano de la derecha  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  y  $P(0) = 1$ . Entonces, si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ ,  $f(\mathbb{D}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  y  $f(0) = P(0)$ , entonces  $f \prec P$ . Es decir, si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ ,  $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  y  $f(0) = 1$ , entonces  $f \prec P$ .

Sea  $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \forall z \in \mathbb{D}, f(0) = 1\}$ . Entonces:

- $P \in \mathcal{P}$ .
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow f \prec P$ . De hecho,  $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f \prec P\}$ .
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{P}$ .

**Teorema 1.13.** Si  $f \in \mathcal{P}$ , entonces:

1. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

2.  $|f'(0)| \leq 2$

Veamos cuáles son las aplicaciones conformes de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$ .

Sea  $f$  una aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$ . Sea  $a = f(0) \in \mathbb{D}$ . Aplicando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick a  $f$  en 0, tenemos:

$$\frac{|f'(0)|}{1 - |a|^2} \leq 1$$

y si se diera igualdad,  $f$  sería una transformación de Möbius.

Sea  $g = f^{-1}$ , que es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y  $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Aplicando lo mismo en el punto  $a$  tenemos:

$$|g'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

y si se diera igualdad,  $g$  sería una transformación de Möbius.

Tenemos que:

$$|f'(0)| \leq 1 - |a|^2 \leq \frac{1}{|g'(a)|} = |f'(0)|$$

Por tanto se da igualdad, así que  $f$  es una transformación de Möbius con  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . En conclusión, las aplicaciones conformes de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$  son:

$$\begin{aligned} \{\lambda T_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} &= \{\lambda S_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \\ &= \{\lambda \varphi_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} \end{aligned}$$



## 1.7. La métrica de Poincaré

Si  $\gamma$  es un camino en  $\mathbb{C}$  y  $f : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  es continua, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ \int_{\gamma} f(z) |dz| &= \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt\end{aligned}$$

siendo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma$ .

Veamos algunas propiedades:

1. Si  $f$  es real, entonces  $\int_{\gamma} f(z) |dz| \in \mathbb{R}$ . Si además  $f$  es no negativa, entonces  $\int_{\gamma} f(z) |dz| \geq 0$ .

2. Si  $f(z) = 1$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \text{long}(\gamma)$$

- 3.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \text{sop}(\gamma)} |f(z)| \text{long}(\gamma)$$

4. Si  $f, g : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y  $f \leq g$ , entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| \leq \int_{\gamma} g(z) |dz|$$

- 5.

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) |dz| = \int_{\gamma_1} f(z) |dz| + \int_{\gamma_2} f(z) |dz|$$

- 6.

$$\int_{-\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|$$

- 7.

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z)) |dz| = a \int_{\gamma} f(z) |dz| + b \int_{\gamma} g(z) |dz|, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Sea  $\gamma$  un camino en  $\mathbb{D}$  con origen  $z_1$  y extremo  $z_2$ . Podemos considerar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1 - |z|^2} |dz| = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

Como la función  $z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1}{1-|z|^2}$  es real y positiva, entonces la integral es no negativa. Definimos:

$$\delta(z_1, z_2) = \inf \left\{ \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2 \right\}$$

Entonces:

- $\delta(z_1, z_2) \geq 0$ .
- $\delta(z_1, z_2) = \delta(z_2, z_1)$ .
- $\delta(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ .

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ . Consideramos:

$$A_{12} = \left\{ \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2 \right\}$$

Se definen de manera análoga  $A_{13}$  y  $A_{23}$ . Observamos que  $A_{12} + A_{23} \subset A_{13}$ . Por tanto:

$$\inf(A_{12} + A_{13}) = \inf A_{12} + \inf A_{23} \geq \inf A_{13} \Leftrightarrow \delta(z_1, z_3) \leq \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$$

$\delta$  es una distancia en  $\mathbb{D}$ , denominada distancia hiperbólica en  $\mathbb{D}$ .

**Proposición 1.14.**

1. Si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , entonces:

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \delta(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

2. Si  $T \in \mathcal{M}$  con  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , entonces:

$$\delta(T(z_1), T(z_2)) = \delta(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

*Demostración.*

1. Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  y sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ .

$$\begin{aligned} \delta(z_1, z_2) &= \inf \left\{ \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino de } z_1 \text{ a } z_2 \right\} \\ \delta(f(z_1), f(z_2)) &= \inf \left\{ \int_{\Gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} : \Gamma \text{ camino de } f(z_1) \text{ a } f(z_2) \right\} \end{aligned}$$

Sea  $\gamma$  un camino en  $\mathbb{D}$  con origen  $z_1$  y extremo  $z_2$ , con parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $\Gamma = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de un camino  $\Gamma$  en  $\mathbb{D}$  con origen  $f(z_1)$  y extremo  $f(z_2)$ . Tenemos:

$$\int_{\Gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_a^b \frac{|\Gamma'(t)|}{1-|\Gamma(t)|^2} dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2} dt$$

Usando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick:

$$\int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2} dt \leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Luego tenemos que:

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \quad \forall \gamma$$

Por tanto,  $\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \gamma(z_1, z_2)$ .

2. Se tiene aplicando (1) a  $T$  y  $T^{-1}$ .

□

**Proposición 1.15.** Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ , entonces:

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1 + \rho(z_1, z_2)}{1 - \rho(z_1, z_2)}$$

*Demostración.* Si  $z_1 = z_2$  es trivial. Supongamos  $z_1 \neq z_2$ . Consideramos:

$$S_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

Se tiene que  $S_{z_1} \in \mathcal{M}$ ,  $S_{z_1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $S_{z_1}(z_1) = 0$ . Sabemos que  $S_{z_1}(z_2) \neq 0$ . Además,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2))$$

Tomamos  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ , tal que  $\lambda S_{z_1}(z_2) \in (0, 1)$ . Sea  $r = \lambda S_{z_1}(z_2)$ . Entonces:

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2)) = \delta(0, r)$$

Además,  $r = |\lambda S_{z_1}(z_2)| = |S_{z_1}(z_2)| = \rho(z_1, z_2)$ . Calculamos  $\delta(0, r)$ .

$$\delta(0, r) = \inf \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } 0 \text{ y extremo } r \right\}$$

Si  $\gamma = [0, r]$ ,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} &= \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^r \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} [-\text{Log}(1-t) + \text{Log}(1+t)]_0^r = \frac{1}{2} \left[ \text{Log} \frac{1+t}{1-t} \right]_0^r = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

Luego  $\delta(0, r) \leq \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r}$ .

Sea  $\gamma$  un camino en  $\mathbb{D}$  con origen 0 y extremo  $r$ . Veamos que

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} \geq \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r}$$

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma$ . Sean  $u = \text{Re}(f)$  y  $v = \text{Im}(f)$ , de forma que  $\gamma = u + iv$ .  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^1$  a trozos.

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$$

Tenemos que:

$$\begin{cases} |\gamma(t)|^2 \geq u(t)^2 \Rightarrow 0 < 1 - |\gamma(t)|^2 \leq 1 - u(t)^2 \Rightarrow \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{1}{1-u(t)^2} \\ |\gamma'(t)| \geq |u'(t)| \geq 0 \end{cases}$$

Así que:

$$\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{|u'(t)|}{1-u(t)^2} \geq \frac{u'(t)}{1-u(t)^2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt &\geq \int_a^b \frac{u'(t)}{1-u(t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_a^b \left( \frac{u'(t)}{1-u(t)} + \frac{u'(t)}{1+u(t)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} [-\text{Log}(1-u(t)) + \text{Log}(1+u(t))]_a^b = \frac{1}{2} \left[ \text{Log} \frac{1+u(t)}{1-u(t)} \right]_a^b = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

porque  $u(a) = 0$  y  $u(b) = r$ . Por tanto,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, r) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho(z_1, z_2)}{1-\rho(z_1, z_2)}$$

□

*Observación.* Sea  $h(x) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$ ,  $x \in [0, 1)$ . Observamos que si  $x < 1$ , entonces  $1+x \geq 1-x > 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 1$ , así que  $h : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ .  $h$  es creciente, con  $h(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \infty$ . Podemos escribir  $\delta = h \circ \rho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \xrightarrow{\rho} [0, 1) \xrightarrow{h} [0, \infty)$ . Fijado  $a \in \mathbb{D}$ , si  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  está en  $\mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ , entonces:

$$\rho(a, z_n) = |S_a(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Por tanto,  $\delta(a, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

$\mathbb{D}$  con esta distancia  $\delta$  es un modelo de la geometría hiperbólica. Si  $\gamma$  es un camino en  $\mathbb{D}$ , la longitud de  $\gamma$  es

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

La geodésica que une  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  es el camino  $\gamma$  para el que:

$$\delta(z_1, z_2) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

Las geodésicas con respecto a  $\delta$  son los diámetros de  $\partial\mathbb{D}$  y los arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{D}$ .

## Capítulo 2

# Familias normales

### 2.1. Familias normales

**Teorema 2.1** (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sean  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones holomorfas en  $D$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $D$  y  $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$  uniformemente en cada subconjunto compacto. Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)}$  uniformemente en cada compacto.*

**Definición 2.1.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal si para cada sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}$  existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

*Observación.* El límite  $f$  de tal subsucesión es una función holomorfa en  $D$ , pero no tiene por qué pertenecer a  $\mathcal{F}$ .

**Definición 2.2.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es compacta si para cada sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}$  existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$  a una función que pertenece a  $\mathcal{F}$ .

En el conjunto  $Hol(D)$  de las funciones holomorfas en  $D$ , con  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$ , se puede definir una distancia  $d$  tal que  $(Hol(D), d)$  es un espacio métrico completo, y en el que:

$$f_n \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ uniformemente en cada subconjunto compacto de } D$$

Si  $\mathcal{F} \subset Hol(D)$ ,  $\mathcal{F}$  es finitamente normal si y solo si  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto. Los compactos coinciden con la definición de familia compacta dada.

## 2.2. El teorema de Montel

**Lema 2.2.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de  $D$ .
2. Para cada  $a \in D$  existe  $r_a > 0$  con  $D(a, r_a) \subset D$  y  $f$  está uniformemente acotada en  $D(a, r_a)$ .

**Lema 2.3.** Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sean  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  para  $n = 1, 2, \dots$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces son equivalentes:

1.  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .
2. Para cada  $a \in D$  existe  $r_a > 0$  con  $D(a, r_a) \subset D$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $D(a, r_a)$ .

**Lema 2.4.** Sean  $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ , con  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  y  $C_1, C_2 \neq \emptyset$ . Si  $C_1$  es compacto y  $C_2$  es cerrado, entonces:

$$\text{dist}(C_1, C_2) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in C_1, z_2 \in C_2\} > 0$$

*Observación.* Si  $C_1$  no es compacto no es cierto en general.

**Lema 2.5.** Sea  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $A \neq \emptyset$  y sea

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(z) = \text{dist}(z, A) = \inf\{|z - a| : a \in A\}$$

Entonces  $F$  es continua y  $F(z) = 0$  para todo  $z \in A$ . Si además  $A$  es cerrado, entonces  $F(z) = \min\{|z - a| : a \in A\}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Lema 2.6.** Sea  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $A \neq \emptyset$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Consideramos los conjuntos:

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, A) < \varepsilon\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, A) \leq \varepsilon\}$$

Entonces  $B$  es abierto y  $C$  es cerrado, con  $A \subset B \subset C$ . Si además  $A$  es acotado, entonces  $B$  es acotado y  $C$  es compacto.

**Proposición 2.7.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Supongamos que  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $D$ . Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $D$ . Entonces existe  $A > 0$  tal que:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|, \quad \forall z_1, z_2 \in K, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

*Demostración.* Sea  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in D$  y para toda  $f \in \mathcal{F}$ . Sean  $K \subset D$ ,  $K$  compacto. Sea  $d > 0$  con  $d < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus D)$ . Si  $D = \mathbb{C}$ , tomamos  $d > 0$  cualquiera. Sea  $z_0 \in K$ . Entonces  $D(z_0, d) \subset D$ . De hecho,

podemos tomar  $\varepsilon > 0$  tal que  $D(z_0, d + \varepsilon) \subset D$ . Dada  $f \in \mathcal{F}$ , por la fórmula de Cauchy,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0|=d} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad \text{si } z \in D\left(z_0, \frac{d}{2}\right)$$

Entonces:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \max_{|\xi - z_0|=d} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2}$$

Podemos acotar:

$$|\xi - z| = |(\xi - z_0) + (z_0 - z)| \geq |\xi - z_0| - |z_0 - z| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

Así que  $|\xi - z|^2 \geq \frac{d^2}{4} > 0$ . Luego:

$$|f'(z)| \leq d \frac{M}{d^2/4} = \frac{4M}{d}$$

Hemos probado que si  $z_0 \in K$ ,  $f \in \mathcal{F}$  y  $z \in D(z_0, \frac{d}{2}) \subset D$ , entonces  $|f'(z)| \leq \frac{4M}{d}$ .

Ahora, sean  $z_1, z_2 \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ . Supongamos que  $|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$ . Si  $\xi \in [z_1, z_2]$ , entonces  $z_2 \in D(z_1, \frac{d}{2}) \subset D$  y  $|\xi - z_1| \leq |z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$ ,  $\xi \in D(z_1, \frac{d}{2})$ . Entonces  $\xi \in D$  y  $|f'(\xi)| \leq \frac{4M}{d}$ . Por tanto:

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(\xi) d\xi \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{\xi \in [z_1, z_2]} |f'(\xi)| \leq |z_2 - z_1| \frac{4M}{d}$$

Entonces, si  $z_1, z_2 \in K$ ,  $|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$  y  $f \in \mathcal{F}$ , se tiene que:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|$$

Ahora, si  $z_1, z_2 \in K$ ,  $|z_2 - z_1| \geq \frac{d}{2}$  y  $f \in \mathcal{F}$ , tenemos:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq |f(z_2)| + |f(z_1)| \leq 2M = 2M \frac{d}{2d} \leq \frac{4M}{d} |z_2 - z_1| = A|z_2 - z_1|$$

□

**Teorema 2.8** (Teorema de Arzelá-Ascoli). Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos, siendo  $(X_1, d_1)$  separable y  $(X_2, d_2)$  completo. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de aplicaciones continuas de  $X_1$  en  $X_2$  que verifica:

1.  $\mathcal{F}$  es puntualmente equicontinua. Es decir, dado  $x \in X_1$  se verifica que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $y \in X_1$  con  $d_1(x, y) < \delta$ , entonces  $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$  para toda  $f \in \mathcal{F}$ .
2. Para todo  $x \in X_1$ , el conjunto  $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$  es relativamente compacto.



Entonces, si  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión en  $\mathcal{F}$ , existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $X_1$ .

**Teorema 2.9** (Teorema de Montel). Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
2.  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de  $D$ . Es decir, para cada  $K \subset D$ ,  $K$  compacto, existe  $M_K > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M_K$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  y para todo  $z \in K$ .

*Observación.*

1. Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$ . Si  $\mathcal{F}$  es una familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D$ , entonces la familia  $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$  es finitamente normal. En general, si  $k \in \mathbb{N}$ , la familia  $\mathcal{F}^{(k)} = \{f^{(k)} : f \in \mathcal{F}\}$  es finitamente normal.

Sea  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}'$ . Entonces  $g_n = f'_n$ ,  $f_n \in \mathcal{F}$ . Existe  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  subsucesión de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$  a una función  $f$  holomorfa en  $D$ . Entonces  $g_{n_k} = f'_{n_k} \rightarrow f'$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

2. Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{G}$  familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D$  con  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
3. Si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  y  $K \subset D(a, R)$ ,  $K$  compacto, entonces existe  $r \in (0, R)$  tal que  $K \subset \overline{D}(a, r)$ .

**Ejemplo.**

1.  $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es entera y } |f(z)| \leq n \text{ si } |z| = n, n = 1, 2, \dots\}$ . Sea  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $K$  compacto, y sea  $f \in \mathcal{F}$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset \overline{D}(0, n_0)$ . Además,  $|f(z_0)| \leq n_0$  si  $|z| = n_0$ . Por el principio del máximo,  $|f(z)| \leq n_0$  si  $|z| \leq n_0$ . En particular,  $|f(z)| \leq n_0$  si  $z \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K$ . Por el teorema de Montel,  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
2.  $\mathcal{P} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}, f(0) = 1, \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \ \forall z \in \mathbb{D}\}$ . Sea  $K \subset \mathbb{D}$ ,  $K$  compacto. Si  $f \in \mathcal{P}$  y  $z \in K$ ,

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

Existe  $R \in (0, 1)$  tal que  $K \subset \overline{D}(0, R)$ . Entonces, si  $f \in \mathcal{P}$  y  $z \in K$ ,

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \leq \frac{1 + R}{1 - R}$$

$\mathcal{P}$  está uniformemente acotada en  $K$  para todo subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{D}$ . Por el teorema de Montel,  $\mathcal{P}$  es finitamente normal.

*Observación.* Si quitamos la condición  $f(0) = 1$  en  $\mathcal{P}$ , la familia deja de ser finitamente normal. Por ejemplo,  $f_n(z) = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\{f_n : n = 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{P}$ . Si tomamos  $K = \{0\}$ ,  $\mathcal{P}$  no está uniformemente acotada en  $K$ , así que  $\mathcal{P}$  no es finitamente normal.

Recordemos que  $\mathcal{P} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}, f \prec P\}$ , con  $P(z) = \frac{1+z}{1-z}$ . Esto es un caso particular del siguiente ejemplo.

3. Sea  $F$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  y sea

$$\mathcal{F}_F = \{f : f \text{ holomorfa en } \mathbb{D}, f \prec F\}$$

Entonces  $\mathcal{F}_F$  es finitamente normal.

4. Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D(a, R)$ . Para cada  $f \in \mathcal{F}$ , consideramos el desarrollo de Taylor de  $f$  centrado en  $a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z-a)^n, \quad z \in D(a, R)$$

Entonces  $M_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)| < \infty$  para cada  $n$  y la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$ , y por tanto define una función holomorfa en  $D(a, R)$ .

5.  $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D} \text{ y } \int_{\mathbb{D}} |f(z)| dx dy \leq M\}$ , siendo  $M > 0$ . Veamos que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

Sea  $K \subset \mathbb{D}$ ,  $K$  compacto. Tomamos  $r \in (0, 1)$  con  $K \subset D(0, r)$ . Sea  $f \in \mathcal{F}$  y  $z \in K$ , por la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta} - z} \rho d\theta, \quad r \leq \rho < 1$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - z|} \rho d\theta, \quad r \leq \rho < 1$$

$$\int_{\frac{1+r}{2}}^1 |f(z)| d\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1+r}{2}}^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - z|} \rho d\theta d\rho = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\frac{1+r}{2} < |w| < 1} \frac{|f(w)|}{|w-z|} dx dy$$

Como  $|w-z| \geq |w| - |z| > \frac{1+r}{2} - r = \frac{1-r}{2} > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \int_{\frac{1+r}{2} < |w| < 1} \frac{|f(w)|}{|w-z|} dx dy &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1-r} \int \int_{\frac{1+r}{2} < |w| < 1} |f(w)| dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi(1-r)} \int \int_{\mathbb{D}} |f(w)| dx dy \leq \frac{M}{\pi(1-r)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_{\frac{1+r}{2}}^1 |f(z)| d\rho = |f(z)| \left(1 - \frac{1+r}{2}\right) = |f(z)| \frac{1-r}{2}$$

Entonces:

$$|f(z)| \frac{1-r}{2} \leq \frac{M}{\pi(1-r)} \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2M}{\pi(1-r)^2}$$

Por tanto,  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K$ .

**Teorema 2.10.** Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D(a, R)$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
2. Existe una sucesión  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  con  $M_n \geq 0$  para todo  $n$  tal que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$  y tal que, si para cada  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z-a)^n, \quad z \in D(a, r)$$

se tiene que  $|a_n(f)| \leq M_n$  para todo  $n$  y para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

*Demostración.*

$$\Rightarrow M_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)|.$$

$\Leftarrow$  Sea  $K \subset D(a, R)$ ,  $K$  compacto. Existe  $r \in (0, R)$  tal que  $K \subset \overline{D}(a, r)$ . Si  $z \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z-a)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)| |z-a|^n \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n |z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n r^n < \infty \end{aligned}$$

ya que  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$  converge para  $z = a + r$ .  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K$ .

□

**Teorema 2.11** (Teorema de Stieltjes-Vitali). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D$ . Sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $\mathcal{F}$ . Si existe  $A \subset D$  tal que  $A$  tiene algún punto de acumulación en  $D$ , para el que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \in \mathbb{C}$  para todo  $a \in A$ , entonces  $\{f_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

**Ejemplo.** Para  $x \geq 0$ , tenemos que  $(1 + \frac{x}{n})^n$  es una sucesión creciente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , siendo la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ .

Sea  $D = \mathbb{C}$ ,  $f_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Cada  $f_n$  es una función entera. Veamos que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

Sea  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $K$  compacto. Tomamos  $R > 0$  con  $K \subset \overline{D}(0, R)$ . Si  $k \in K$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n(z)| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n \leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{R}{n}\right)^n \leq e^R$$

Sea  $A = [0, 1]$ .  $A$  tiene puntos de acumulación en  $\mathbb{C}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x$  para todo  $x \in A$ . Por el teorema de Stieltjes-Vitali,  $\{f_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ . Sea  $f$  el límite, entonces  $f$  es entera. Si  $x \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = e^x$ . Por el teorema de identidad,  $f(z) = e^z$  si  $z \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 2.12** (Teorema de Lindelöf). *Sea  $f$  holomorfa y acotada en  $\mathbb{D}$ . Sea  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  y supongamos que existe el límite radial, es decir,  $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\xi) = L \in \mathbb{C}$ . Entonces para todo  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  existe el límite tangencial de  $f$  en  $\xi$ , es decir,*

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in S_\alpha(\xi)} f(z) = L$$

siendo  $S_\alpha(\xi)$  el vector de vértice  $\xi$  y ángulo  $2\alpha$ , simétrico con respecto al segmento  $[0, \xi]$ .

**Teorema 2.13.** *Sea  $f$  holomorfa y acotada en  $D(1, 1)$ . Supongamos que existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L \in \mathbb{C}$ . Entonces para todo  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  existe*

$$\lim_{z \rightarrow 0, |\text{Arg}(z)| < \alpha} f(z) = L$$

*Demostración.* Sea  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  si  $z \in D(1, 1)$ . Consideramos la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $f_n(z) = f(\frac{z}{n})$ . Cada  $f_n$  es holomorfa en  $D(1, 1)$ . La familia  $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  está uniformemente acotada en  $D$ , porque si  $z \in D$  y  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $|f_n(z)| = |f(\frac{z}{n})| \leq M$ . Así que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

Sea  $A = (0, 1)$ . Si  $x \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{x}{n}) = L$ . Por el teorema de Stieltjes-Vitali,  $\{f_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D(1, 1)$ . Sea  $g$  el límite, entonces  $g$  es holomorfa en  $D(1, 1)$  y  $g(x) = L$  para todo  $x \in A$ . Por el teorema de identidad,  $g(z) = L$  para todo  $z \in D(1, 1)$ . Hemos probado que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

Sea  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Sea  $K = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\cos(\alpha)}{2} \leq |z| \leq \cos(\alpha), |\text{Arg}(z)| \leq \alpha\right\}$ .  $K \subset D(1, 1)$ ,  $K$  compacto.

