Ampliación de teoría de la probabilidad

2 de noviembre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Función de distribución

1.1. Introducción

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad, donde $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ es una σ-álgebra y $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ es una medida de probabilidad.

Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

para todo $B \in \mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel. X induce una medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$:

$$P_X : \mathcal{B} \to [0, 1], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Definición 1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad. Sean $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y P_X la medida de probabilidad inducida por X en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. La función de distribución asociada a X es:

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad F(a) = P_X((-\infty, a]) = P(X \leq a)$$

Nota. Variables aleatorias distintas pueden tener la misma función de distribución.

1.2. Propiedades

Sea F la función de distribución asociada a una variable aleatoria X. Entonces:

- F es creciente.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

- F es continua por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Existe $\lim\limits_{h \to 0^-} F(x+h) = F(x^-) = F(x) - P_X(\{x\})$

Teorema 1.1 (Teorema de correspondencia)**.** *Si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ es una función que verifica:*

- *F es creciente.*
- *$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$*
- *F es continua por la derecha.*

Entonces existe una única medida de probabilidad P_F en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que F es su función de distribución. Es decir, tal que $F(a) = P_F((-\infty, a])$.

Definición 1.2. Sea F función de distribución. El conjunto de discontinuidad de F se define como:

$$C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x^-)\}$$

También se puede definir el conjunto de puntos de discontinuidad de F como:

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Observación. $D(F) = C(\bar{F})$.

Proposición 1.2. *$D(F)$ es a lo sumo numerable.*

Corolario 1.3. *$C(F)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.4. *Sean F y G funciones de distribución tales que $F(x) = G(x)$ para todo $x \in E \subset \mathbb{R}$, con E denso en $\mathbb{R}$. Entonces $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definición 1.3. La función de masa de probabilidad se define como:

$$p : \mathbb{R} \to [0,1], \quad p(x) = P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$$

Definición 1.4. Sea X variable aleatoria con función de distribución F y función de masa p. Entonces:

- X es discreta cuando $\sum_{x \in D(F)} p(x) = 1$.
- X es continua cuando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En otro caso, X es mixta.

Definición 1.5. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variable aleatoria. X es singular si existe $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ tal que $P_X(B) = 1$.

Observación. Las variables aleatorias discretas son singulares.

Definición 1.6. Sea X variable aleatoria. X es absolutamente continua si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ se tiene que $P_X(B) = 0$.

Teorema 1.5. *Sea F función de distribución. F es absolutamente continua si y solo si existe una función medible f no negativa y finita tal que*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b$$

La función f se llama función de densidad.

Observación. F es continua cuando no hay saltos y absolutamente continua cuando tiene una densidad.

Teorema 1.6 (Mixtura de distribuciones)**.** *Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma:*

$$F = \alpha F_d + (1-\alpha)F_c, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

donde F_d es la función de distribución de una variable aleatoria discreta y F_c de una continua.

Ejemplo. Consideramos la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{5}{8} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{4x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Estudiamos sus puntos de discontinuidad y la probabilidad en ellos.

$$D(F) = \{4, 5\}, \quad \begin{cases} p(4) = F(4) - F(4^-) = \frac{1}{8} \\ p(5) = F(5) - F(5^-) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

Luego la función de distribución discreta es:

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Por último podemos calcular la función de distribución continua:

$$F_c(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\left(F(x) - \frac{1}{4}F_d(x)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{5x}{24} - \frac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{3x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Lema 1.7. *Sea F función de distribución. Entonces:*

- *Existe F' en casi todo punto y es no negativa y finita.*
- $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a), \quad a < b$
- *Siendo $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$ y $F_s(x) = F(x) - F_{ac}(x)$, entonces $F'_{ac}(x) = F'(x)$ en casi todo punto y $F'_s(x) = 0$.*

Teorema 1.8 (Descomposición de Lebesgue)**.** *Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma:*

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)F_s$$

con F_{ac} función de distribución absolutamente continua y F_s singular.

Observación. Se pueden aplicar ambas descomposiciones (continua-discreta y Lebesgue) a una función de distribución F.

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)\left(\alpha F_d + (1 - \alpha)F_{cs}\right)$$

Definición 1.7 (Esperanza)**.** Sea X variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La esperanza de X se define como:

$$E(X) = \int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} x dF(x)$$

Observación.

- Si F es absolutamente continua,

$$E(X) = \int_\mathbb{R} x f(x) dx$$

- Si F es discreta,

$$E(X) = \sum_{x \in D(F)} x p(x)$$

1.3. Convolución en funciones de distribución

Definición 1.8. Sean F y G funciones de distribución. Definimos la convolución de F y G como la función definida por:

$$(F * G)(z) = \int_\mathbb{R} F(z - y) dG(y), \quad z \in R$$

Nota. La convolución es conmutativa con funciones medibles no negativas.

Proposición 1.9. *$F * G$ es una función de distribución.*

Teorema 1.10. *Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_X y F_Y respectivamente. Entonces $F_X * F_Y$ es la función de distribución de la variable aleatoria $X + Y$.*

Teorema 1.11. *Si F es absolutamente continua con densidad f, entonces $F * G$ es absolutamente continua con densidad*

$$(f * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)dG(y)$$

Teorema 1.12. *Si F y G son absolutamente continuas con densidades f y g respectivamente, entonces $F * G$ es absolutamente continua con densidad $f * g$.*

Ejemplo. Sean $X, Y \sim U([0,1])$. Sus funciones de distribución son:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$ y $z \in \mathbb{R}$. Como X e Y son absolutamente continuas, Z es absolutamente continua. Queremos calcular:

$$F_Z(z) = (F_X * F_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y)dF_y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y)f_Y(y)dy$$

Consideramos todos los casos:

- Si $z < 0$ entonces $z - y < 0$ para todo $y \in [0,1]$. Luego $F_X(z-y) = 0$, así que $F_Z(z) = 0$.
- Si $0 \leq z < 1$ distinguimos dos casos:
  - Si $0 \leq y < z$ entonces $0 < z - y < 1$, así que $F_X(z-y) = z - y$.
  - Si $z \leq y < 1$ entonces $z - y < 0$, luego $F_X(z-y) = 0$.

  $$F_Z(z) = \int_0^z (z-y)dy + \int_z^1 0dy = \frac{z^2}{2}$$

- Si $1 \leq z < 2$ de nuevo distinguimos dos casos:
  - Si $0 \leq y < z - 1$ entonces $z - y \geq 1$, luego $F_X(z-y) = 1$.
  - Si $z - 1 \leq y < 1$ entonces $0 \leq z - 1 < 1$, así que $F_X(z-y) = z - y$.

  $$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1dy + \int_{z-1}^1 (z-y)dy = 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

- Si $z \geq 2$ entonces $z - y \geq 1$ para todo $y \in [0,1]$. Luego $F_X(z-y) = 1$, de forma que $F_Z(z) = \int_0^1 1dx = 1$.

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 2z - \frac{z^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea $X \sim U([-1, 1])$ y sea Y absolutamente continua con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{4} & \text{si } -2 \leq y < 0 \\ \frac{2-y}{4} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabemos que X es absolutamente continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$. Como X e Y son absolutamente continuas, Z es absolutamente continua con función de densidad $f * g$.

$$(f_X * f_Y)(z) = (f_Y * f_X)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x) dx$$

Sabemos que $S_X = [-1, 1]$ y $S_Y = [-2, 2]$, así que $S_Z = [-3, 3]$. Consideramos los casos:

- Si $z < -3$ entonces $z - x < 2$ para todo $x \in [-1, 1]$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
- Si $-3 \leq z < -1$ distinguimos dos casos:
  - Si $-1 \leq x < z+2$ entonces $-2 \leq z-x < 0$, así que $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$.
  - Si $z + 2 \leq x < 1$ entonces $z - x < -2$, luego $f_Z(z) = 0$.

  $$f_Z(z) = \int_{-1}^{z+2} \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z+3)^2}{16}$$

- Si $-1 \leq z < 1$ distinguimos dos casos:
  - Si $-1 \leq x < z$ entonces $0 \leq z - x < 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$.
  - Si $z \leq x < 1$ entonces $-2 \leq z - x < 0$, luego $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$.

  $$f_Z = \int_{-1}^{z} \frac{2-z+x}{4} \frac{1}{2} dx + \int_{z}^{1} \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{3-z^2}{8}$$

- Si $1 \leq z < 3$ distinguimos dos casos:
  - Si $-1 \leq x < z - 2$ entonces $z - x \geq 2$, luego $f_Z(z) = 0$.

- Si $z-2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z-x < 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^{1} \frac{2-z+x}{4}\frac{1}{2}dx = \frac{(z-3)^2}{16}$$

- Si $z \geq 3$ entonces $z-x \geq 2$ para todo $x \in [-1,1]$, así que $f_Z(z) = 0$.

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{(z+3)^2}{16} & \text{si } -3 \leq z < -1 \\ \frac{3-z^2}{8} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{(z-3)^2}{16} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejemplo. Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que Y es absolutamente continua y X es mixta, así que $Z = X+Y$ es absolutamente continua. Queremos calcular la función de densidad de Z. Como F_X es discontinua en 1,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)dF_x(x) = \int_{-2}^{1} f_Y(z-x)f_X(x)dx + f_Y(z-1)p_x(1)$$

Nota. Para no lidiar con discontinuidades, también se podría calcular:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)dF_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

Calculamos las funciones de densidad, pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$S_X = [-2,1]$ y $S_Y = [0,2]$, así que $S_Z = [-2,3]$. Consideramos los casos:

- Si $z < -2$ entonces $z-x < 0$ para todo $x \in [-2,1]$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
- Si $-2 \leq z < 0$ entonces $0 \leq z-x \leq 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{-2}^{z} \frac{1}{2}\frac{1}{4}dx = \frac{z+2}{8}$$

- Si $0 \leq z \leq 1$, $f_Y(z-1) = 0$. Distinguimos tres casos:
  - Si $-2 \leq x < z-2$ entonces $z - x > 2$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
  - Si $z - 2 \leq x < z$ entonces $0 \leq z - x < 2$. Así que $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.
  - Si $z \leq x \leq 1$ entonces $z - x \leq 0$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

  $$f_Z(z) = \int_{-2}^{z-2} 0dx + \int_{z-2}^{z} \frac{1}{2}\frac{1}{4}dx + \int_{z}^{1} 0dx + 0p_x(1) = \frac{1}{4}$$

- Si $1 < z \leq 3$, $f_Y(z-1) = \frac{1}{2}$ y $p_X(1) = \frac{1}{4}$. Distinguimos dos casos:
  - Si $-2 \leq x < z-2$ entonces $z - x \geq 2$, así que $f_Y(z-x) = 0$.
  - Si $z - 2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z - x < 2$, luego $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.

  $$f_Z(z) = \int_{z-2}^{1} \frac{1}{2}\frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{4-z}{8}$$

- Si $z \geq 3$ entonces $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z+2}{8} & \text{si } -2 \leq z < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{4-z}{8} & \text{si } 1 < z \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio. Sean X y Y variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2y}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ \frac{5}{7} & \text{si } 2 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$$

Observamos que X es una variable aleatoria mixta con funciones de pseudodensidad y de masa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Y también es mixta con pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } y = 2 \\ \frac{2}{7} & \text{si } y = 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$, queremos calcular F_Z. Observamos que $S_X = [-1, 1) \cup \{1\} = [-1, 1]$ y $S_Y = [0, 2) \cup \{2\} \cup \{4\} = [0, 2] \cup \{4\}$. Por tanto, $S_Z = [-1, 5]$. Calculamos:

$$F_Z = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) dF_x(x) = \int_{-1}^{1} F_Y(z-x) f_X(x) dx + F_Y(z-1) p_X(1)$$

Consideramos los casos:

- Si $z < -1$, $F_Z(z) = 0$.
- Si $-1 \leq z < 1$, consideramos tres casos:
  - Si $-1 \leq x < z$ entonces $0 \leq z - x < 2$, luego $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$.
  - Si $z \leq x < 1$ entonces $z - x < 0$, así que $F_Z(z) = 0$.
  - Si $x = 1$ entonces $z - 1 < 0$, luego $F_Z(z) = 0$.

  $$F_Z(z) = \int_{-1}^{z} \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx = \frac{(z+1)^2}{21}$$

- Si $1 \leq z < 3$, consideramos tres casos:
  - Si $-1 \leq x < z - 2$ entonces $2 \leq z - x < 4$, así que $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$.
  - Si $z - 2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z - x < 2$, luego $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$.
  - Si $x = 1$ entonces $0 \leq z - 1 < 2$, así que $F_Y(z-1) = \frac{2(z-1)}{z}$.

  $$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-2} \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \int_{z-2}^{1} \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} + \frac{2(z-1)}{7} \frac{1}{3} = \frac{-z^2 + 9z - 4}{21}$$

- Si $3 \leq z < 5$, consideramos tres casos:
  - Si $-1 \leq x < z - 4$ entonces $z - x \geq 4$, luego $F_Y(z-x) = 1$.
  - Si $z - 4 \leq x < 1$ entonces $2 \leq z - x < 4$, así que $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$.
  - Si $x = 1$ entonces $2 \leq z - 1 < 4$, luego $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$.

  $$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-4} 1 \frac{1}{3} dx + \int_{z-4}^{1} \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{5}{7} \frac{1}{3} = \frac{2z + 9}{21}$$

- Si $z \geq 5$, $F_Z(z) = 1$.

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \\ \frac{(z+1)^2}{21} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{-z^2+9z-4}{21} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ \frac{2z+9}{21} & \text{si } 3 \leq z < 5 \\ 1 & \text{si } z \geq 5 \end{cases}$$

1.4. Convergencia en distribución

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea X_n una variable aleatoria en $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$. $\{X_n\}_n$ tiene una sucesión asociada $\{F_n\}_n$ de funciones de distribución.

Definición 1.9. Sean F y F_n funciones de distribución. Decimos que la sucesión $\{F_n\}_n$ converge a F débilmente cuando

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe $F_n \xrightarrow{d} F$.

Ejemplo. Sea $X_n \sim \delta(\frac{1}{n})$, es decir, $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$. Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculamos el límite puntual de la sucesión:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aunque $\{F_n\}_n$ converge puntualmente a F, observamos que F no es continua por la derecha. Así que F no es función de distribución y no puede ser el límite débil de la sucesión. Definimos:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es función de distribución y además $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x)$ para todo $x \in C(G) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, luego $F_n \xrightarrow{d} G$. Es función de distribución de una variable aleatoria $\delta(0)$.

Ejemplo. Sea $Y_n \sim \delta(-\frac{1}{n})$. Procedemos de forma análoga al ejemplo anterior. Su función de distribución es:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

y su límite puntual es:

$$F_Y(y) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En este caso el límite puntual F_Y sí es función de distribución, así que el límite puntual coincide con el límite débil.

$$F_{Y_n} \xrightarrow{d} F_Y$$

Teorema 1.13. *El límite débil de una sucesión de funciones de distribución es único en caso de existir.*

Ejemplo. Sea $X_n \sim U([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$. Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{nx+1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

El límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

F no es función de distribución porque no es continua por la derecha en $x = 0$. Definimos entonces:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es función de distribución y $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x)$ para todo $x \in C(G)$, así que $F_n \xrightarrow{d} G$.

Ejemplo. Consideramos la sucesión de funciones de distribución $\{F_n\}_n$, con

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos descomponer F_n como mixtura de distribuciones de la forma $F_n = \alpha F_n^d + (1-\alpha) F_n^c$. Calculamos el valor de α:

$$\alpha = \sum_{x \in D(F_n)} p(x) = p(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, las funciones de distribución son:

$$F_n^d(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{t \leq x, t \in D(F_n)} p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F^d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_n^c(x) = \frac{1}{1-\alpha}(F_n(x) - \alpha F_n^d(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F^c(x) = 0$$

Observamos que $F = \alpha F^d + (1-\alpha) F^c$.

Definición 1.10. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_n$ converge en distribución a otra variable aleatoria X cuando $F_n \xrightarrow{d} F$, siendo F_n y F las funciones de distribución asociadas a X_n y X, respectivamente. Se escribe $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ejercicio. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad, donde:

$$\Omega = [0,3], \quad \mathcal{A} = \{B \cap [0,3] : B \in \mathcal{B}\}$$

$$P : \mathcal{A} \to [0,1], \quad P(A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A = \{0\} \\ 0 & \text{si } A \subset (0,1) \\ \frac{m(A)}{6} & \text{si } A \subset [1,3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } A = \{3\} \end{cases}$$

Sobre este espacio definimos para $n \in \mathbb{N}$ las variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega-1}{n\omega+1} & \text{si } 0 \leq \omega < 1 - \frac{1}{n} \\ 2 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq \omega < 3 - \frac{1}{n} \\ n(\omega - 3) & \text{si } 3 - \frac{1}{n} \leq \omega \leq 3 \end{cases}$$

$\{X_n\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias.

1. **Determinar los puntos de discontinuidad y sus masas.** Sabemos que x es punto de discontinuidad de F_n si $F_n(x) - F_n(x^-) > 0$, es decir, $P_{X_n}(\{x\}) > 0$. En primer lugar estudiamos las imágenes por X_n de los puntos con masa en la definición de P. En este caso, estos puntos son 0 y 3, con imágenes $X_n(0) = -1$ y $X_n(3) = 0$.

$$P_{X_n}(-1) = P(X_n^{-1}(-1)) = P(\{0\} \cup \{3 - \frac{1}{n}\}) = \frac{1}{6}$$
$$P_{X_n}(0) = P(X_n^{-1}(0)) = P(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

   Además, estudiamos los puntos cuya imagen inversa es un intervalo, es decir, donde X_n es constante.

$$P_{X_n}(2) = P([1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})) = P([1, 3 - \frac{1}{n})) = \frac{2n-1}{6n}$$

   Así que $D = \{-1, 0, 2\}$.

2. **Calcular la función de distribución F_n asociada a X_n.** Recordamos que la función de distribución F_n asociada a una variable aleatoria X_n se define como:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

   Distringuimos varios casos:

   - Si $x < -1$, $F_n(x) = P(\emptyset) = 0$.

- Si $-1 \leq x < -\frac{1}{n^2}$,

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P([0, \alpha] \cup [3 - \frac{1}{n}, \beta])$$

donde:

$$X_n(\alpha) = x \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{n\alpha + 1} = x \Leftrightarrow \alpha = \frac{x+1}{1-nx}$$
$$X_n(\beta) = x \Leftrightarrow n(\beta - 3) = x \Leftrightarrow \beta = \frac{x+3n}{n}$$

Así que

$$F_n(x) = P([0, \frac{x+1}{1-nx}] \cup [3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si $-\frac{1}{n^2} \leq x < 0$,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n})) + P([3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si $0 \leq x < 2$,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n})) + P([3 - \frac{1}{n}, 3)) + P(\{3\}) = \frac{4n+1}{6n}$$

- Si $X \geq 2$, $F_n(x) = 1$.

Por tanto,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1+n}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{4n+1}{6n} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. **Analizar la convergencia en distribución de** $\{X_n\}$ Sabemos que $X_n \xrightarrow{d} X$ cuando $F_n \xrightarrow{d} F$. Tomamos el límite puntual en $\{F_n\}$.

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F es continua por la derecha y $D(F) = \{-1, 0, 2\}$ con $p_X(-1) = \frac{1}{6}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ y $p_X(2) = \frac{1}{3}$. Observamos que estas masas coinciden con los límites cuando $n \to \infty$ de las masas de los puntos de discontinuidad de X_n. Por tanto, $F_n \xrightarrow{d} F$.

Lema 1.14. *Sean F_n y F funciones de distribución. $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si*

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x) \quad y \quad \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq F(x^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.15 (Helly-Bray)**.** *Sean F_n y F funciones de distribución. $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

para toda función g real, continua y acotada.

Observación. En general, el teorema de Helly-Bray no implica que $E(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(X)$ porque $g(x) = x$ no siempre está acotada.

Ejemplo. Sean $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que G no es función de distribución. Definimos entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F es función de distribución así que $F_n \xrightarrow{d} F$.

Sea $g(x) = I_{(0,2]}(x)$, veamos si $E(g(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(g(X))$.

$$E(g(X_n)) = E(I_{(0,2]}(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} I_{(0,2]}(x) dF_n(x) = \int_0^2 dF_n(x) =$$
$$= F_n(2) - F_n(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}$$
$$E(g(X)) = \int_0^2 dF(x) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Observamos que $E(g(X_n))$ no tiende a $E(g(X))$ con $n \to \infty$. No se cumplen las hipótesis del teorema de Helly-Bray porque g no es continua.

Sea ahora $g(x) = x$. Queremos calcular $E(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$. Como F_n es mixta, hallamos primero las masas de sus puntos de discontinuidad y su función de pseudodensidad:

$$D(F_n) = \{0, \frac{2}{n}\}, \quad p(0) = \frac{1}{4}, \quad p(\frac{2}{n}) = \frac{1}{4}$$

$$f_n(x) = F_n'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X_n)) = 0\frac{1}{4} + \frac{2}{n}\frac{1}{4} + \int_{-1}^{0} \frac{x}{2n} dx + \int_{\frac{2}{n}}^{2} \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Procedemos de forma análoga para F.

$$D(F) = \{0\}, \quad p(0) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = 0\frac{1}{2} + \int_{0}^{2} \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2}$$

Luego en este caso $E(g(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(g(X))$. Se verifica el teorema de Helly-Bray porque $g(x) = x$ está acotada en los soportes de f_n y f, que son acotados.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{R}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Es claro que:

$$F_n \xrightarrow{d} \delta(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea $g(x) = x$, procedemos igual que en el ejemplo anterior.

$$D(F_n) = \{0, n\}, \quad p(0) = \frac{n-1}{n}, \quad p(n) = \frac{1}{n}$$

$$E(g(X_n)) = 0\frac{n-1}{n} + n\frac{1}{n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
$$E(g(X)) = E(\delta(0)) = 0 \neq 1$$

No se cumplen las hipótesis del teorema porque g no está acotada en el soporte, ya que no está acotado.

Definición 1.11. Una función F es función de distribución impropia si verifica:

- F es creciente.
- F es continua por la derecha.
- Existe $\lim\limits_{h \to 0^-} F(x+h) = F(x^-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $F(-\infty) > 0$ o $F(\infty) < 1$.

Definición 1.12. Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución y sea F una función de distribución propia o impropia. Decimos que $\{F_n\}$ converge de forma vaga o vagamente a F si:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe $F_n \xrightarrow{v} F$.

Observación. Convergencia débil implica convergencia vaga.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

El límite puntual de $\{F_n\}$ es:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es una función de distribución impropia. Por tanto, $F_n \xrightarrow{v} G$.

Ejemplo. Consideramos la función de distribución:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Definimos:

$$F_n(x) = F_0(x+n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x+n < 2 \\ 1 & \text{si } x+n \geq 2 \end{cases}$$

El límite puntual de $F_n(x)$ es $F(x) = 1$, que es una función de distribución impropia. Por tanto, $F_n \xrightarrow{v} F$.

Ejercicio. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad con:

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\omega) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{w!}, \quad w \in \mathbb{R}, \lambda > 0$$

Consideramos la sucesión de variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = e^{n\omega}$$

Observamos que $x = e^{n\omega} \Leftrightarrow \omega = -\frac{\log(x)}{n}$, con $x > 0$.

$$P(X_n^{-1}(x)) = P\left(-\frac{\log(x)}{n}\right) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{-\frac{\log(x)}{n}}}{(-\frac{\log(x)}{n})!} & \text{si } \frac{-\log(x)}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calculamos la función de distribución de X_n:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n^{-1}((-\infty, x])) = P(X_n^{-1}([0, x])) = P(X_n^{-1}([0, e^{-nk}])) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega \geq k\}) = 1 - P(\{\omega \in \Omega : \omega < k\}) = 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x <= 0 \\ 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} & \text{si } e^{-nk} \leq x < e^{-n(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x <= 0 \\ \vdots & \\ 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) & \text{si } e^{-2n} \leq x < e^{-n} \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } e^{-n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que $F_n(x)$ tiene como límite puntual:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x <= 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

G no es función de distribución. Podemos definir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 <= x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como F sí es función de distribución, $F_n \underset{d}{\to} F$.

Teorema 1.16. *Supongamos que $F_n \underset{v}{\to} F$ con F función de distribución impropia. Sea g real y continua en $[a, b]$, con $a, b \in C(F)$. Entonces:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[a,b]} g(x) dF_n(x) = \int_{[a,b]} g(x) dF(x)$$

Teorema 1.17. *Supongamos que* $F_n \underset{v}{\rightarrow} F$ *con* F *función de distribución impropia. Sea* g *real y continua con* $g(\infty) = g(-\infty) = 0$*. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x)$$

Lema 1.18. *Una sucesión* $\{F_n\}_n$ *converge vagamente si y solo si converge en algún conjunto denso* $D \subset \mathbb{R}$*.*

Teorema 1.19 (Principio de selección de Helly)**.** *Toda sucesión* $\{F_n\}_n$ *de funciones de distribución tiene una subsucesión que converge vagamente.*

Definición 1.13. Sea $\mathcal{H}$ una familia de funciones de distribución. $\mathcal{H}$ es ajustada si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a > 0$ tal que:

$$P_F((-a, a]) > 1 - \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

Equivalentemente,

$$P_F((-\infty, -a] \cup (a, \infty)) < \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

Definición 1.14. $\mathcal{H}$ es relativamente compacta si cada $\{F_n\}_n$ con $F_n \in \mathcal{H}$ tiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.20 (Prokhorov)**.** $\mathcal{H}$ *es relativamente compacta si y solo si es ajustada.*

Teorema 1.21. *Sea* $\{F_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión ajustada. Si todas sus subsucesiones convergentes tienen el mismo límite* F*, entonces* $F_n \xrightarrow{d} F$*.*

Capítulo 2

Función característica

Definición 2.1. Sea X variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F. La función característica asociada a X es:

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$$

Observación. Usando que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, podemos escribir:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) dF(x)$$

Ejemplo. Sea $X \sim \delta(a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{ita} P(X = a) = e^{ita}$$

Ejemplo. Sea $X \sim Bi(n, p)$, con $n \geq 0$ y $0 \leq p \leq 1$. Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $X \sim Po(\lambda)$. Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

Observación.

$$\varphi_{Bi}(x) = (pe^{it} + 1 - p)^n = \left(1 + \frac{np(e^{it}-1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{np\to\lambda} e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_{Po}(t)$$

Ejemplo. Sea $X \sim U([0,1])$. Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it}-1}{it}$$

Ejemplo. Sea $X \sim N(0,1)$. Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x^2-2itx)}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{x^2-t^2-2it}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

Nota. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

2.1. Propiedades

Veamos las propiedades más importantes de las funciones características. Sea φ la función característica de una variable aleatoria X. Entonces:

1. $\varphi(0) = 1$.
$$E(e^{i0X}) = E(1) = 1$$

2. $|\varphi(t)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
$$|\varphi(t)| = |E(e^{itX})| \leq E|e^{itX}| = E|\cos(tx) + i\sin(tx)| = 1$$

3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.
$$\begin{aligned}\varphi(-t) &= E(e^{itX}) = E(\cos(-tx) + i\sin(-tx)) = \\ &= E(\cos(tx)) - iE(\sin(tx)) = \overline{E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))} = \\ &= \overline{E(\cos(tx)) + i\sin(tx)} = \overline{\varphi(t)}\end{aligned}$$

4. φ es función definida positiva, es decir,
$$\sum_{k,j=1}^{n} z_k \varphi(t_j - t_k) \overline{z_j} \geq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

Además,

- $\varphi \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$ es simétrica.

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} = \varphi(t)$$

- Sea $Y = a + bX$. Entonces:

$$\varphi_Y(t) = E(e^{it(a+bX)}) = e^{ita}E(e^{itbX}) = e^{ita}\varphi_X(bt)$$

Teorema 2.1. *φ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.*

2.2. Teorema de inversión

Teorema 2.2 (Teorema de inversión)**.** *Sea X variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F y función característica φ. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces:*

$$\frac{F(b) + F(b^-)}{2} - \frac{F(a) + F(a^-)}{2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it}\varphi(t)dt$$

Corolario 2.3. *Sea X variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F y función característica φ. Sean $a, b \in C(F)$ con $a < b$, entonces:*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it}\varphi(t)dt$$

Teorema 2.4 (Unicidad)**.** *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias, con funciones de distribución F_1 y F_2 y funciones características φ_1 y φ_2 respectivamente. Entonces:*

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Teorema 2.5. *Existe $k \in (0, \infty)$ tal que para todo $a > 0$ y toda medida de probabilidad P_F se tiene que:*

$$P_F\left(\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]^c\right) \leq \frac{k}{a}\int_0^a (1 - Re(\varphi_F(t)))dt$$

donde φ_F es la función característica asociada a P_F.

Corolario 2.6. *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias X_n con F_n, P_{F_n} y φ_{F_n}. Supongamos que:*

1. *Existe $\delta > 0$ tal que $\varphi_{F_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$, siendo φ una función.*

2. *φ es continua en 0.*

Entonces $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión ajustada. Es decir, $\{F_n\}$ forma una familia ajustada.

Ejercicio. Sea X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right) & \text{si } |x| \leq a,\ a>0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos su función característica φ.

Como f es simétrica, sabemos que $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) = E(e^{itX}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = \\ &= \int_{-a}^{a} \cos(tx) f(x) dx + \int_{-a}^{a} \sin(tx) f(x) dx = 2\int_0^a \cos(tx)\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{2(1-\cos(at))}{a^2t^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)}{\left(\frac{at}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que $\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$.

Ejercicio. Sea X con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0$$

Calculemos su función característica φ_X.

Para facilitar los cálculos, consideramos la variable estandarizada $Y = \frac{X-\alpha}{\beta}$ y calculamos φ_Y. Para ello, hallamos primero F_Y y f_Y:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-\alpha}{\beta} \leq y\right) = P(X \leq \beta y + \alpha) = F_X(\beta y + \alpha) \\ f_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\beta y + \alpha)\beta = f_X(\beta y + \alpha)\beta = \frac{1}{2} e^{-|y|} \end{aligned}$$

Observamos que f_Y es simétrica, así que $\varphi_Y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \int_{\mathbb{R}} (\cos(ty) + i\sin(ty))\frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \\ &= \int_0^{\infty} \cos(ty) e^{-y} dy = \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\varphi_X(t) = e^{it\alpha}\varphi_Y(\beta t) = \frac{e^{it\alpha}}{1+\beta^2t^2}$$

También se puede ver que $Y = Y_1 - Y_2$, con $Y_i \sim Exp(1)$ independientes. De esta forma:

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) = E(e^{it(Y_1-Y_2)}) = E(e^{itY_1})E(e^{-itY_2}) = \varphi_{Y_1}(t)\varphi_{Y_2}(-t) = \\ &= \varphi_{Y_1}(t)\overline{\varphi_{Y_2}(t)} = \frac{1}{1-it}\frac{1}{1+it} = \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

Teorema 2.7 (Teorema de continuidad de Lévy)**.** *Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ y sean φ_n las funciones de distribución asociadas. Supongamos que existe una función φ tal que:*

1. *$\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.*
2. *φ es continua en 0.*

Entonces $X_n \xrightarrow{d} X$, donde X es la variable aleatoria con función característica φ.

Teorema 2.8. *Una sucesión $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es ajustada si y solo si*

$$\lim_{t\to 0}\left(\limsup_{n\to\infty} Re(1-\varphi_n(t))\right) = 0$$

Observación (Teorema central del límite de De Moivre). Sean $X_n \sim Bi(n,p)$. Sabemos que $E(X_n) = np$ y $V(X_n) = npq$, con $q = 1-p$. Consideramos:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X_n - np}{\sigma_n}$$

Veamos que $Z_n \xrightarrow{d} Z$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= E(e^{itZ_n}) = E(e^{it\frac{X_n-np}{\sigma_n}}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}}E(e^{\frac{it}{\sigma_n}X_n}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}}\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) = \\ &= e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}}(pe^{i\frac{t}{\sigma_n}} + q)^n = (pe^{i\frac{t}{\sigma_n}q} + qe^{-i\frac{t}{\sigma_n}p})^n\end{aligned}$$

Se puede comprobar que:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}(pe^{i\frac{t}{\sigma_n}q} + qe^{-i\frac{t}{\sigma_n}p})^n = e^{-\frac{t^2}{n}} = \varphi_Z(t)$$

con $Z \sim N(0,1)$.

Por el teorema de continuidad de Lévy, $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

2.3. Momentos

Recordamos los momentos de una variable aleatoria X.

- Momento de orden n: $E(X^n)$.
- Momento central de orden n: $E((X - E(X))^n)$.
- Momento absoluto de orden n: $E(|X|^n)$.
- Momento central absoluto de orden n: $E(|X - E(X)|^n)$.

Proposición 2.9. *Si $E(|X|^p) < \infty$ para algún $n \geq 1$, entonces:*

$$E(X^r), E(|X|^r) < \infty, \quad 0 < r \leq n$$

Definición 2.2. El espacio L^p es el conjunto de las variables X tales que $E(|X|^r) < \infty$.

$$L^r = \left\{ X \text{ variable aleatoria } : \int |X|^r dF(x) < \infty \right\}$$

$(L^p, \|.\|_p)$ es un espacio normado, con $\|X\|_p = (E(|X|^p))^{1/p}$, $X \in L^p$.

Teorema 2.10. *Sea $X \in L^n$ para algún $n \geq 1$ y con función característica φ. Entonces existen las derivadas $\varphi^{(k)}$ con $k = 1, \ldots, n$ y son uniformemente continuas. Además,*

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} dF(x)$$

y $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$. Así que φ se puede expresar como:

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + O(t^n)$$