

# Ecuaciones diferenciales II

20 de octubre de 2022

# Índice general

1. Teoremas de existencia y unicidad global	2
2. Teoremas de existencia y unicidad local	5
3. Resultados de unicidad	7
4. Teoremas de existencia	10
5. Prolongaciones de soluciones y soluciones maximales	12

# Capítulo 1

## Teoremas de existencia y unicidad global

**Teorema 1.1.** *Consideramos el problema de Cauchy:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  y  $(t_0, x^0) \in D$ . Sea  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  tal que  $t_0 \in I$  y  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función cuya gráfica está contenida en  $D$ :

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución de  $(P)$ .
- $x$  es una función continua en  $I$  que verifica:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in I$$

**Definición 1.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es lipschitziana en  $D$  respecto de la segunda variable  $x$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

En tal caso se escribe  $f \in Lip(x, D)$  y se dice que  $L$  es una constante de Lipschitz para  $f$  en  $D$  respecto a la segunda variable.

**Definición 1.2.** Sean  $n > 1$ ,  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$  y  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

- Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es lipschitziana en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

- Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es lipschitziana en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

**Proposición 1.2.** Sean  $n > 1$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Se verifica:

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow f_k \in Lip(x, D), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

**Proposición 1.3** (Caracterización de la condición de Lipschitz). Si  $D$  es un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^2$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que existe  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ es acotada en } D$$

*Observación.* Si  $K$  es un conjunto convexo y compacto en  $\mathbb{R}^2$  y existe  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y es continua sobre  $K$ , entonces  $f \in Lip(x, K)$ .

**Definición 1.3.** Sea  $I$  cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$ . Se dice que una función  $f : D = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , satisface una condición de Lipschitz generalizada en  $D$  respecto de la segunda variable  $x$  cuando existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $I$  y no negativa tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in D$$

En tal caso se escribe  $f \in LipG(x, D)$ .

**Definición 1.4.** Sean  $n > 1$ ,  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $D = I \times \mathbb{R}^n$ .

- Se dice que la función vectorial  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , satisface una condición de Lipschitz generalizada en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua en  $I$  tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

- Se dice que la función vectorial  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , satisface una condición de Lipschitz generalizada en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua en  $I$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

**Proposición 1.4.** Sean  $n > 1$ ,  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $f : D = I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Se verifica:

$$f \in \text{LipG}(x, D) \Leftrightarrow f_k \in \text{LipG}(x, D), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

**Proposición 1.5** (Caracterización de la condición de Lipschitz generalizada). Sean  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $f : D = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que existe la función derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Las dos siguientes condiciones son equivalentes:

- $f \in \text{LipG}(x, D)$ .
- Existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua en  $I$  tal que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L(t), \quad \forall (t, x) \in D$$

**Teorema 1.6** (Teorema de existencia y unicidad global). Sea  $n \geq 1$  y supongamos las tres siguientes condiciones:

1.  $D = I \times \mathbb{R}^n$  donde  $I$  es un intervalo no degenerado en  $\mathbb{R}$ .
2. La función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , es continua en  $D$ .
3.  $f \in \text{LipG}(x, D)$ .

En tal situación, para cada  $(t_0, x^0) \in D$  el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo  $I$ .

## Capítulo 2

# Teoremas de existencia y unicidad local

**Teorema 2.1** (Teorema de existencia y unicidad local). Sean  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Sea el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $(t_0, x^0) \in D$ .

Supongamos que existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que:

$$Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

y la función  $f$  verifica las dos siguientes condiciones:

1.  $f$  es continua en  $Q$ .
2.  $f \in \text{Lip}(x, Q)$ .

Entonces, existen intervalos  $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ , siendo  $0 < h \leq a$ , tales que  $(P)$  posee una única solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Esto sucede si:

$$0 < h \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad \text{siendo } M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

*Observación.* Existen versiones laterales del teorema local:

- Tomando  $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b)$ , para obtener una única solución  $x : [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema  $(P)$  (solución lateral a la derecha).
- Tomando  $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b)$ , para obtener una única solución  $x : [t_0 - h, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema  $(P)$  (solución lateral a la izquierda).

**Corolario 2.2.** *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

- *$D$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  con interior  $\dot{D}$  no vacío.*
- *La función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , es continua en  $D$ .*
- *Existe la función derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$  y es continua en  $D$ .*

*En tal situación, para cualquier punto  $(t_0, x^0) \in \dot{D}$  existen intervalos  $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ , siendo  $h > 0$ , tales que el problema de Cauchy:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

*tiene una única solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Observación.* Si  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ , entonces  $f$  satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

## Capítulo 3

# Resultados de unicidad

**Definición 3.1** (Propiedad de unicidad global). Sean  $n \geq 1$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Se dice que la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  tiene la propiedad de unicidad global en una región  $D \subset \Omega$  cuando, dadas dos soluciones  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  con gráficas contenidas en  $D$ , sucede que si existe  $t_0 \in I \cap J$  tal que  $x(t_0) = y(t_0)$  entonces  $x(t) = y(t)$  para cada  $t \in I \cap J$ .

**Definición 3.2.** Sean  $n \geq 1$  y  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es localmente lipschitziana en la región  $D \subset \Omega$  respecto de la variable  $x$  cuando para cada punto  $(t_0, x^0) \in D$  existe un entorno  $U$  de  $(t_0, x^0)$  tal que  $f \in Lip(x, U \cap D)$ . Cuando esto sucede escribiremos  $f \in Lip_{Loc}(x, D)$ .

**Definición 3.3.** Sean  $n > 1$  y  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es localmente lipschitziana en la región  $D \subset \Omega$  respecto de la variable  $x$  cuando para cada punto  $(t_0, x^0) \in D$  existe un entorno  $U$  de  $(t_0, x^0)$  tal que  $f \in Lip(x, U \cap D)$ .

**Proposición 3.1.** Sean  $n > 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Sea  $D \subset \Omega$ . Se verifica:

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f_i \in Lip_{Loc}(x, D), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

**Proposición 3.2** (Condición suficiente para la condición de Lipschitz local). Supongamos:

- $n \geq 1$  y  $A$  un abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \dots, x_n)$ , una función tal que, para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$ , existe la función derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  y es continua en  $A$ .

Entonces  $f \in Lip_{Loc}(x, A)$ , siendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .



**Teorema 3.3** (Caracterización de la condición de Lipschitz local). Sean  $n \geq 1$ ,  $D$  un abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en  $D$ . Entonces:

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f \in Lip(x, K), \quad \forall K \subset D \text{ compacto}$$

**Proposición 3.4** (Lema de Gronwall). Sean  $k$  una constante no negativa,  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  dos funciones continuas en el intervalo  $I$  y  $t_0 \in I$  tales que:

$$u(t) \leq k + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Entonces, se verifica:

$$u(t) \leq k \exp \left| \int_{t_0}^t v(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

**Teorema 3.5** (Estimación de la diferencia entre dos soluciones). Sean  $n \geq 1$ ,  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos soluciones de la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  con gráficas contenidas en una región  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y sea  $t_0 \in I$ .

1. Si  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, D)$  con constante de Lipschitz  $L$ , se tiene la siguiente estimación:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{L|t-t_0|}, \quad \forall t \in I$$

2. Si  $D = J \times \mathbb{R}^n$ , donde  $J$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap LipG(x, D)$  con función de Lipschitz  $L : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto L(t)$ , entonces:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp \left| \int_{t_0}^t L(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

**Teorema 3.6** (Teorema de unicidad global). Sean  $n \geq 1$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Supongamos que existe  $D \subset \Omega$  tal que:

$$f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip_{Loc}(x, D)$$

Entonces, la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  tiene la propiedad de unicidad global en  $D$ .

*Observación.* Si  $D$  es abierto y  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ , entonces  $f$  satisface las condiciones del teorema de unicidad global. Recordamos que satisface además las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

**Proposición 3.7** (Criterio de unicidad de Peano). Sean  $J$  y  $K$  intervalos en  $\mathbb{R}$  y consideramos el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D = J \times K \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(t_0, x^0) \in D$ .

Por otra parte, sea  $I$  un intervalo tal que  $t_0 \in I \subset J$  y consideramos:

$$I^- = \{t \in I : t \leq t_0\}, \quad I^+ = \{t \in I : t \geq t_0\}$$

suponiendo que los intervalos  $I^-$  e  $I^+$  no sean degenerados.

1. *Unicidad a la izquierda.* Si para cada  $t \in I^-$  la función  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f_t(x) = f(t, x)$  es creciente, entonces (P) tiene a lo sumo una solución definida en  $I^-$ .
2. *Unicidad a la derecha.* Si para cada  $t \in I^+$  la función  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f_t(x) = f(t, x)$  es decreciente, entonces (P) tiene a lo sumo una solución definida en  $I^+$ .

**Teorema 3.8** (Teorema de dependencia continua). Sean  $I$  un intervalo acotado en  $\mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D = I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x^0) \in D$  y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}(x, D)$ .

Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución de (P) y para cada  $v \in \mathbb{R}^n$  sea:

$$(P_v) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = v \end{cases}$$

Se verifica lo siguiente:

1. Dado cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que, si  $y^0 \in \mathbb{R}^n$  verifica que  $\|x^0 - y^0\| < \delta$ , entonces la solución  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema  $(P_{y^0})$  verifica que:

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in I$$

2. Si  $(v_m)$  es una sucesión en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $v_m \rightarrow x^0$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\phi_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , es la solución del problema  $(P_{v_m})$ , entonces la sucesión  $(\phi_m)$  converge uniformemente hacia la solución del problema (P) en el intervalo  $I$ .

## Capítulo 4

# Teoremas de existencia

**Teorema 4.1** (Versión lateral a la derecha del teorema de existencia local de Peano). Sean  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Sea el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $(t_0, x^0) \in D$ .

Supongamos que existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$  y  $f$  es continua en  $Q$ .

Entonces, (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo  $I = [t_0, t_0 + h]$ , donde:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

*Observación.* La versión lateral a la izquierda del teorema de existencia local de Peano consiste en tomar

$$Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

De esta forma, el problema (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo  $I = [t_0 - h, t_0]$ .

**Corolario 4.2** (Versión centrada del teorema de existencia local de Peano). Sean  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Sea el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $(t_0, x^0) \in D$ . Supongamos que existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$  y  $f$  es continua en  $Q$ .

Entonces,  $(P)$  tiene al menos una solución definida en el intervalo  $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ , donde:

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

**Teorema 4.3** (Teorema de existencia global de Peano). Sean  $I$  un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  y  $f : D = I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y acotada en  $D$ . Entonces, para cada  $(t_0, x^0) \in D$ , el problema

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución definida en  $I$ .

## Capítulo 5

# Prolongaciones de soluciones y soluciones maximales

**Definición 5.1** (Soluciones estrictamente prolongables y soluciones maximales). Una solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de una ecuación diferencial o de un problema de Cauchy se dice que es estrictamente prolongable cuando existe otra solución  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$I \subsetneq J, \quad y|_I = x$$

Cuando esto sucede, se dice que  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una prolongación estricta de  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Una solución que no admite prolongación estricta se dice que es no prolongable o que es maximal.

**Teorema 5.1** (Existencia y unicidad de soluciones no prolongables). *Si  $f$  es continua en  $D$  se verifica:*

1. *Si  $(t_0, x^0)$  es un punto interior a  $D$ , entonces  $(P)$  tiene al menos una solución que no es prolongable definida en un intervalo que contiene al punto  $t_0$  en el interior. Si además  $f \in \text{Lip}_{\text{Loc}}(x, D)$ , esta solución maximal es única.*
2. *Si existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ , entonces  $(P)$  posee al menos una solución lateral a la derecha que no es prolongable a la derecha.*
3. *Si existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ , entonces  $(P)$  posee al menos una solución lateral a la izquierda que no es prolongable a la izquierda.*

*Observación.* Si  $D$  es abierto y  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $D$ , entonces  $(P)$  tiene una única solución maximal, que está definida en un intervalo que contiene a  $t_0$  en su interior.

**Teorema 5.2** (Soluciones maximales con gráficas contenidas en conjuntos compactos). *Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  y  $(t_0, x^0) \in D$ . Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una solución maximal de  $(P)$  y sea  $\Gamma$  su gráfica.

Supongamos que existe un conjunto  $K$  compacto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tal que  $\Gamma \subset K \subset D$  y  $f$  es continua en  $K$ . Entonces:

1.  $I$  es un intervalo compacto, es decir,  $I = [a, b]$ .
2. Los puntos  $(a, x(a))$  y  $(b, x(b))$  están en la frontera de  $K$ .

**Definición 5.2** (Puntos límite). Sean  $n \geq 1$  y  $x : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función tal que  $t_1 < \infty$ . Sea  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $(t_1, x^1)$  es un punto límite de la gráfica de  $x$  para  $t \rightarrow t_1$  cuando existe una sucesión  $(s_m)$  en el intervalo  $[t_0, t_1)$  tal que  $(s_m, x(s_m)) \rightarrow (t_1, x^1)$  en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

**Proposición 5.3.** Sean  $n \geq 1$ ,  $t_1 < \infty$ ,  $x : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función,  $\Gamma$  su gráfica y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Se verifica una y solamente una de las dos siguientes situaciones:

- $\lim_{t \rightarrow t_1} \|x(t)\| = \infty$
- $\Gamma$  tiene al menos un punto límite para  $t \rightarrow t_1$ .

**Teorema 5.4** (Lema de Wintner). Sea  $x : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $t_1 < \infty$ , una solución de la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$ , con gráfica  $\Gamma$  contenida en  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $D$ . Sea  $(t_1, x^1)$  un punto límite de  $\Gamma$  para  $t \rightarrow t_1$  y supongamos que se verifica la siguiente condición:

Existe un entorno  $U$  de  $(t_1, x^1)$  tal que  $f$  es acotada de  $U \cap D$ .

Entonces  $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = x^1$ .

**Teorema 5.5** (Soluciones maximales con gráficas contenidas en conjuntos abiertos). Sean  $A$  un abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $A$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución no prolongable de la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  con gráfica  $\Gamma$  contenida en  $A$ , se verifica:

1. El intervalo  $I$  es abierto.
2. Si  $I$  tiene un extremo finito  $\alpha$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \|x(t)\| = \infty$  o bien cualquier punto límite de  $\Gamma$  para  $t \rightarrow \alpha$  está en la frontera de  $A$ .

**Teorema 5.6** (Teorema fundamental de las ecuaciones autónomas). *Supongamos que  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  una solución no prolongable de la ecuación  $X' = g(x)$  y sea  $t_0 \in \dot{I}$ . Se verifica lo siguiente:*

1. *El intervalo  $I$  es abierto.*
2. *Si  $x$  es acotada en  $I^+ = [t_0, \infty)$ , existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$ , siendo  $a \in \mathbb{R}$ , y la función constante dada por  $y(t) \equiv a$  es solución de la ecuación  $x' = g(x)$ .*
3. *Si  $x$  es acotada en  $I^- = (-\infty, t_0]$ , existe  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = b$ , siendo  $b \in \mathbb{R}$ , y la función constante dada por  $y(t) \equiv b$  es solución de la ecuación  $x' = g(x)$ .*