

Ampliación de teoría de la probabilidad

17 de diciembre de 2022

Índice general

1. Función de distribución	2
1.1. Introducción	2
1.2. Propiedades	2
1.3. Convolución en funciones de distribución	5
1.4. Convergencia en distribución	11
2. Función característica	20
2.1. Propiedades	21
2.2. Teorema de inversión	22
2.3. Teorema de continuidad	24
2.4. Momentos	25
2.5. Reconocimiento de funciones características	30
3. Convergencia	33
3.1. Tipos de convergencia	35
3.2. Leyes de los grandes números	40
3.3. Teorema central del límite	46

Capítulo 1

Función de distribución

1.1. Introducción

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad, donde $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ es una σ -álgebra y $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad.

Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

para todo $B \in \mathcal{B}$ σ -álgebra de Borel. X induce una medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$:

$$P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Definición 1.1. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad. Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) y P_X la medida de probabilidad inducida por X en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. La función de distribución asociada a X es:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F(a) = P_X((-\infty, a]) = P(X \leq a)$$

Nota. Variables aleatorias distintas pueden tener la misma función de distribución.

1.2. Propiedades

Sea F la función de distribución asociada a una variable aleatoria X . Entonces:

- F es creciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

- F es continua por la derecha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Existe $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-) = F(x) - P_X(\{x\})$

Teorema 1.1 (Teorema de correspondencia). *Si $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es una función que verifica:*

- F es creciente.
- $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$
- F es continua por la derecha.

Entonces existe una única medida de probabilidad P_F en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que F es su función de distribución. Es decir, tal que $F(a) = P_F((-\infty, a])$.

Definición 1.2. Sea F función de distribución. El conjunto de continuidad de F se define como:

$$C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x^-)\}$$

También se puede definir el conjunto de puntos de discontinuidad de F como:

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Observación. $D(F) = C(\bar{F})$.

Proposición 1.2. $D(F)$ es a lo sumo numerable.

Corolario 1.3. $C(F)$ es denso en \mathbb{R} .

Proposición 1.4. Sean F y G funciones de distribución tales que $F(x) = G(x)$ para todo $x \in E \subset \mathbb{R}$, con E denso en \mathbb{R} . Entonces $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3. La función de masa de probabilidad se define como:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad p(x) = P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$$

Definición 1.4. Sea X variable aleatoria con función de distribución F y función de masa p . Entonces:

- X es discreta cuando $\sum_{x \in D(F)} p(x) = 1$.
- X es continua cuando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En otro caso, X es mixta.

Definición 1.5. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variable aleatoria. X es singular si existe $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ tal que $P_X(B) = 1$.

Observación. Las variables aleatorias discretas son singulares.

Definición 1.6. Sea X variable aleatoria. X es absolutamente continua si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ se tiene que $P_X(B) = 0$.

Teorema 1.5. Sea F función de distribución. F es absolutamente continua si y solo si existe una función medible f no negativa y finita tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b$$

La función f se llama función de densidad.

Observación. F es continua cuando no hay saltos y absolutamente continua cuando tiene una densidad.

Teorema 1.6 (Mixtura de distribuciones). Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma:

$$F = \alpha F_d + (1 - \alpha) F_c, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

donde F_d es la función de distribución de una variable aleatoria discreta y F_c de una continua.

Ejemplo. Consideramos la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{5}{8} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{4x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Estudiamos sus puntos de discontinuidad y la probabilidad en ellos.

$$D(F) = \{4, 5\}, \quad \begin{cases} p(4) = F(4) - F(4^-) = \frac{1}{8} \\ p(5) = F(5) - F(5^-) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

Luego la función de distribución discreta es:

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Por último podemos calcular la función de distribución continua:

$$F_c(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \left(F(x) - \frac{1}{4} F_d(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{5x}{24} - \frac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{3x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Lema 1.7. Sea F función de distribución. Entonces:

- Existe F' en casi todo punto y es no negativa y finita.
- $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a), \quad a < b$
- Siendo $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$ y $F_s(x) = F(x) - F_{ac}(x)$, entonces $F'_{ac}(x) = F'(x)$ en casi todo punto y $F'_s(x) = 0$.

Teorema 1.8 (Descomposición de Lebesgue). Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma:

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)F_s$$

con F_{ac} función de distribución absolutamente continua y F_s singular.

Observación. Se pueden aplicar ambas descomposiciones (continua-discreta y Lebesgue) a una función de distribución F .

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)(\alpha F_d + (1 - \alpha)F_{cs})$$

Definición 1.7 (Esperanza). Sea X variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) . La esperanza de X se define como:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

Observación.

- Si F es absolutamente continua,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

- Si F es discreta,

$$E(X) = \sum_{x \in D(F)} xp(x)$$

1.3. Convolución en funciones de distribución

Definición 1.8. Sean F y G funciones de distribución. Definimos la convolución de F y G como la función definida por:

$$(F * G)(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z - y) dG(y), \quad z \in \mathbb{R}$$

Nota. La convolución es conmutativa con funciones medibles no negativas.

Proposición 1.9. $F * G$ es una función de distribución.

Teorema 1.10. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_X y F_Y respectivamente. Entonces $F_X * F_Y$ es la función de distribución de la variable aleatoria $X + Y$.

Teorema 1.11. Si F es absolutamente continua con densidad f , entonces $F * G$ es absolutamente continua con densidad

$$(f * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y) dG(y)$$

Teorema 1.12. Si F y G son absolutamente continuas con densidades f y g respectivamente, entonces $F * G$ es absolutamente continua con densidad $f * g$.

Ejemplo. Sean $X, Y \sim U([0, 1])$. Sus funciones de distribución son:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$ y $z \in \mathbb{R}$. Como X e Y son absolutamente continuas, Z es absolutamente continua. Queremos calcular:

$$F_Z(z) = (F_X * F_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Consideramos todos los casos:

- Si $z < 0$ entonces $z - y < 0$ para todo $y \in [0, 1]$. Luego $F_X(z - y) = 0$, así que $F_Z(z) = 0$.
- Si $0 \leq z < 1$ distinguimos dos casos:
 - Si $0 \leq y < z$ entonces $0 < z - y < 1$, así que $F_X(z - y) = z - y$.
 - Si $z \leq y < 1$ entonces $z - y < 0$, luego $F_X(z - y) = 0$.

$$F_Z(z) = \int_0^z (z - y) dy + \int_z^1 0 dy = \frac{z^2}{2}$$

- Si $1 \leq z < 2$ de nuevo distinguimos dos casos:
 - Si $0 \leq y < z - 1$ entonces $z - y \geq 1$, luego $F_X(z - y) = 1$.
 - Si $z - 1 \leq y < 1$ entonces $0 \leq z - 1 < 1$, así que $F_X(z - y) = z - y$.

$$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1 dy + \int_{z-1}^1 (z - y) dy = 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

- Si $z \geq 2$ entonces $z - y \geq 1$ para todo $y \in [0, 1]$. Luego $F_X(z - y) = 1$, de forma que $F_Z(z) = \int_0^1 1 dx = 1$.

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 2z - \frac{z^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea $X \sim U([-1, 1])$ y sea Y absolutamente continua con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{4} & \text{si } -2 \leq y < 0 \\ \frac{2-y}{4} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabemos que X es absolutamente continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$. Como X e Y son absolutamente continuas, Z es absolutamente continua con función de densidad $f * g$.

$$(f_X * f_Y)(z) = (f_Y * f_X)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx$$

Sabemos que $S_X = [-1, 1]$ y $S_Y = [-2, 2]$, así que $S_Z = [-3, 3]$. Consideramos los casos:

- Si $z < -3$ entonces $z-x < 2$ para todo $x \in [-1, 1]$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
- Si $-3 \leq z < -1$ distinguimos dos casos:
 - Si $-1 \leq x < z+2$ entonces $-2 \leq z-x < 0$, así que $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$.
 - Si $z+2 \leq x < 1$ entonces $z-x < -2$, luego $f_Z(z) = 0$.

$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z+2} \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z+3)^2}{16}$$

- Si $-1 \leq z < 1$ distinguimos dos casos:
 - Si $-1 \leq x < z$ entonces $0 \leq z-x < 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$.
 - Si $z \leq x < 1$ entonces $-2 \leq z-x < 0$, luego $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$.

$$f_Z = \int_{-1}^z \frac{2-z+x}{4} \frac{1}{2} dx + \int_z^1 \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{3-z^2}{8}$$

- Si $1 \leq z < 3$ distinguimos dos casos:
 - Si $-1 \leq x < z-2$ entonces $z-x \geq 2$, luego $f_Z(z) = 0$.

- Si $z - 2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z - x < 2$, así que $f_Y(z - x) = \frac{2 - z + x}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{2 - z + x}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z - 3)^2}{16}$$

- Si $z \geq 3$ entonces $z - x \geq 2$ para todo $x \in [-1, 1]$, así que $f_Z(z) = 0$.

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{(z+3)^2}{16} & \text{si } -3 \leq z < -1 \\ \frac{3-z^2}{8} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{(z-3)^2}{16} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejemplo. Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que Y es absolutamente continua y X es mixta, así que $Z = X + Y$ es absolutamente continua. Queremos calcular la función de densidad de Z . Como F_X es discontinua en 1,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - x) dF_X(x) = \int_{-2}^1 f_Y(z - x) f_X(x) dx + f_Y(z - 1) p_X(1)$$

Nota. Para no lidiar con discontinuidades, también se podría calcular:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Calculamos las funciones de densidad, pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$S_X = [-2, 1]$ y $S_Y = [0, 2]$, así que $S_Z = [-2, 3]$. Consideramos los casos:

- Si $z < -2$ entonces $z - x < 0$ para todo $x \in [-2, 1]$. Luego $f_Y(z - x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
- Si $-2 \leq z < 0$ entonces $0 \leq z - x \leq 2$, así que $f_Y(z - x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx = \frac{z + 2}{8}$$

- Si $0 \leq z \leq 1$, $f_Y(z-1) = 0$. Distinguimos tres casos:
 - Si $-2 \leq x < z-2$ entonces $z-x > 2$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
 - Si $z-2 \leq x < z$ entonces $0 \leq z-x < 2$. Así que $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.
 - Si $z \leq x \leq 1$ entonces $z-x \leq 0$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

$$f_Z(z) = \int_{-2}^{z-2} 0 dx + \int_{z-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \int_z^1 0 dx + 0 p_x(1) = \frac{1}{4}$$

- Si $1 < z \leq 3$, $f_Y(z-1) = \frac{1}{2}$ y $p_X(1) = \frac{1}{4}$. Distinguimos dos casos:
 - Si $-2 \leq x < z-2$ entonces $z-x \geq 2$, así que $f_Y(z-x) = 0$.
 - Si $z-2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z-x < 2$, luego $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{4-z}{8}$$

- Si $z \geq 3$ entonces $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z+2}{8} & \text{si } -2 \leq z < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{4-z}{8} & \text{si } 1 < z \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio. Sean X y Y variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2y}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ \frac{5}{7} & \text{si } 2 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$$

Observamos que X es una variable aleatoria mixta con funciones de pseudodensidad y de masa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Y también es mixta con pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } y = 2 \\ \frac{2}{7} & \text{si } y = 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$, queremos calcular F_Z . Observamos que $S_X = [-1, 1) \cup \{1\} = [-1, 1]$ y $S_Y = [0, 2) \cup \{2\} \cup \{4\} = [0, 2] \cup \{4\}$. Por tanto, $S_Z = [-1, 5]$. Calculamos:

$$F_Z = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) dF_X(x) = \int_{-1}^1 F_Y(z-x) f_X(x) dx + F_Y(z-1) p_X(1)$$

Consideramos los casos:

- Si $z < -1$, $F_Z(z) = 0$.
- Si $-1 \leq z < 1$, consideramos tres casos:
 - Si $-1 \leq x < z$ entonces $0 \leq z-x < 2$, luego $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$.
 - Si $z \leq x < 1$ entonces $z-x < 0$, así que $F_Z(z) = 0$.
 - Si $x = 1$ entonces $z-1 < 0$, luego $F_Z(z) = 0$.

$$F_Z(z) = \int_{-1}^z \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx = \frac{(z+1)^2}{21}$$

- Si $1 \leq z < 3$, consideramos tres casos:
 - Si $-1 \leq x < z-2$ entonces $2 \leq z-x < 4$, así que $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$.
 - Si $z-2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z-x < 2$, luego $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$.
 - Si $x = 1$ entonces $0 \leq z-1 < 2$, así que $F_Y(z-1) = \frac{2(z-1)}{7}$.

$$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-2} \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \int_{z-2}^1 \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{2(z-1)}{7} \frac{1}{3} = \frac{-z^2 + 9z - 4}{21}$$

- Si $3 \leq z < 5$, consideramos tres casos:
 - Si $-1 \leq x < z-4$ entonces $z-x \geq 4$, luego $F_Y(z-x) = 1$.
 - Si $z-4 \leq x < 1$ entonces $2 \leq z-x < 4$, así que $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$.
 - Si $x = 1$ entonces $2 \leq z-1 < 4$, luego $F_Y(z-1) = \frac{5}{7}$.

$$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-4} 1 \frac{1}{3} dx + \int_{z-4}^1 \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{5}{7} \frac{1}{3} = \frac{2z+9}{21}$$

- Si $z \geq 5$, $F_Z(z) = 1$.

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \\ \frac{(z+1)^2}{21} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{-z^2+9z-4}{21} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ \frac{2z+9}{21} & \text{si } 3 \leq z < 5 \\ 1 & \text{si } z \geq 5 \end{cases}$$

1.4. Convergencia en distribución

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea X_n una variable aleatoria en $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$. $\{X_n\}_n$ tiene una sucesión asociada $\{F_n\}_n$ de funciones de distribución.

Definición 1.9. Sean F y F_n funciones de distribución. Decimos que la sucesión $\{F_n\}_n$ converge a F débilmente cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe $F_n \xrightarrow{d} F$.

Ejemplo. Sea $X_n \sim \delta(\frac{1}{n})$, es decir, $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$. Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculamos el límite puntual de la sucesión:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aunque $\{F_n\}_n$ converge puntualmente a F , observamos que F no es continua por la derecha. Así que F no es función de distribución y no puede ser el límite débil de la sucesión. Definimos:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es función de distribución y además $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$ para todo $x \in C(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego $F_n \xrightarrow{d} G$. Es función de distribución de una variable aleatoria $\delta(0)$.

Ejemplo. Sea $Y_n \sim \delta(-\frac{1}{n})$. Procedemos de forma análoga al ejemplo anterior. Su función de distribución es:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } y \geq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

y su límite puntual es:

$$F_Y(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

En este caso el límite puntual F_Y sí es función de distribución, así que el límite puntual coincide con el límite débil.

$$F_{Y_n} \xrightarrow{d} F_Y$$

Teorema 1.13. *El límite débil de una sucesión de funciones de distribución es único en caso de existir.*

Ejemplo. Sea $X_n \sim U([-1/n, 1/n])$. Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{nx+1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

El límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

F no es función de distribución porque no es continua por la derecha en $x = 0$. Definimos entonces:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es función de distribución y $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$ para todo $x \in C(G)$, así que $F_n \xrightarrow{d} G$.

Ejemplo. Consideramos la sucesión de funciones de distribución $\{F_n\}_n$, con

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos descomponer F_n como mixtura de distribuciones de la forma $F_n = \alpha F_n^d + (1 - \alpha) F_n^c$. Calculamos el valor de α :

$$\alpha = \sum_{x \in D(F_n)} p(x) = p(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, las funciones de distribución son:

$$F_n^d(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{t \leq x, t \in D(F_n)} p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_n^c(x) = \frac{1}{1 - \alpha} (F_n(x) - \alpha F_n^d(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^c(x) = 0$$

Observamos que $F = \alpha F^d + (1 - \alpha) F^c$.

Definición 1.10. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_n$ converge en distribución a otra variable aleatoria X cuando $F_n \xrightarrow{d} F$, siendo F_n y F las funciones de distribución asociadas a X_n y X , respectivamente. Se escribe $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ejercicio. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad, donde:

$$\Omega = [0, 3], \quad \mathcal{A} = \{B \cap [0, 3] : B \in \mathcal{B}\}$$

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad P(A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A = \{0\} \\ 0 & \text{si } A \subset (0, 1) \\ \frac{m(A)}{6} & \text{si } A \subset [1, 3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } A = \{3\} \end{cases}$$

Sobre este espacio definimos para $n \in \mathbb{N}$ las variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega-1}{n\omega+1} & \text{si } 0 \leq \omega < 1 - \frac{1}{n} \\ 2 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq \omega < 3 - \frac{1}{n} \\ n(\omega - 3) & \text{si } 3 - \frac{1}{n} \leq \omega \leq 3 \end{cases}$$

$\{X_n\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias.

1. **Determinar los puntos de discontinuidad y sus masas.** Sabemos que x es punto de discontinuidad de F_n si $F_n(x) - F_n(x^-) > 0$, es decir, $P_{X_n}(\{x\}) > 0$. En primer lugar estudiamos las imágenes por X_n de los puntos con masa en la definición de P . En este caso, estos puntos son 0 y 3, con imágenes $X_n(0) = -1$ y $X_n(3) = 0$.

$$P_{X_n}(-1) = P(X_n^{-1}(-1)) = P(\{0\} \cup \{3 - \frac{1}{n}\}) = \frac{1}{6}$$

$$P_{X_n}(0) = P(X_n^{-1}(0)) = P(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

Además, estudiamos los puntos cuya imagen inversa es un intervalo, es decir, donde X_n es constante.

$$P_{X_n}(2) = P([1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})) = P([1, 3 - \frac{1}{n})) = \frac{2n-1}{6n}$$

Así que $D = \{-1, 0, 2\}$.

2. **Calcular la función de distribución F_n asociada a X_n .** Recordamos que la función de distribución F_n asociada a una variable aleatoria X_n se define como:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Distinguimos varios casos:

- Si $x < -1$, $F_n(x) = P(\emptyset) = 0$.

- Si $-1 \leq x < -\frac{1}{n^2}$,

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P([0, \alpha] \cup [3 - \frac{1}{n}, \beta])$$

donde:

$$X_n(\alpha) = x \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{n\alpha + 1} = x \Leftrightarrow \alpha = \frac{x + 1}{1 - nx}$$

$$X_n(\beta) = x \Leftrightarrow n(\beta - 3) = x \Leftrightarrow \beta = \frac{x + 3n}{n}$$

Así que

$$F_n(x) = P([0, \frac{x+1}{1-nx}] \cup [3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si $-\frac{1}{n^2} \leq x < 0$,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n}]) + P([3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si $0 \leq x < 2$,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n}]) + P([3 - \frac{1}{n}, 3]) + P(\{3\}) = \frac{4n+1}{6n}$$

- Si $X \geq 2$, $F_n(x) = 1$.

Por tanto,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1+n}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{4n+1}{6n} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. **Analizar la convergencia en distribución de $\{X_n\}$** Sabemos que $X_n \xrightarrow{d} X$ cuando $F_n \xrightarrow{d} F$. Tomamos el límite puntual en $\{F_n\}$.

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F es continua por la derecha y $D(F) = \{-1, 0, 2\}$ con $p_X(-1) = \frac{1}{6}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ y $p_X(2) = \frac{1}{3}$. Observamos que estas masas coinciden con los límites cuando $n \rightarrow \infty$ de las masas de los puntos de discontinuidad de X_n . Por tanto, $F_n \xrightarrow{d} F$.

Lema 1.14. Sean F_n y F funciones de distribución. $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x) \quad y \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \geq F(x^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.15 (Helly-Bray). Sean F_n y F funciones de distribución. $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

para toda función g real, continua y acotada.

Observación. En general, el teorema de Helly-Bray no implica que $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X)$ porque $g(x) = x$ no siempre está acotada.

Ejemplo. Sean $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que G no es función de distribución. Definimos entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F es función de distribución así que $F_n \xrightarrow{d} F$.

Sea $g(x) = I_{(0,2]}(x)$, veamos si $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$.

$$\begin{aligned} E(g(X_n)) &= E(I_{(0,2]}(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} I_{(0,2]}(x) dF_n(x) = \int_0^2 dF_n(x) = \\ &= F_n(2) - F_n(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \\ E(g(X)) &= \int_0^2 dF(x) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Observamos que $E(g(X_n))$ no tiende a $E(g(X))$ con $n \rightarrow \infty$. No se cumplen las hipótesis del teorema de Helly-Bray porque g no es continua.

Sea ahora $g(x) = x$. Queremos calcular $E(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$. Como F_n es mixta, hallamos primero las masas de sus puntos de discontinuidad y su función de pseudodensidad:

$$D(F_n) = \{0, \frac{2}{n}\}, \quad p(0) = \frac{1}{4}, \quad p(\frac{2}{n}) = \frac{1}{4}$$

$$f_n(x) = F'_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{1}{4} + \frac{2}{n} \frac{1}{4} + \int_{-1}^0 \frac{x}{2n} dx + \int_{\frac{2}{n}}^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Procedemos de forma análoga para F .

$$D(F) = \{0\}, \quad p(0) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = 0 \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2}$$

Luego en este caso $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$. Se verifica el teorema de Helly-Bray porque $g(x) = x$ está acotada en los soportes de f_n y f , que son acotados.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{R}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Es claro que:

$$F_n \xrightarrow{d} \delta(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea $g(x) = x$, procedemos igual que en el ejemplo anterior.

$$D(F_n) = \{0, n\}, \quad p(0) = \frac{n-1}{n}, \quad p(n) = \frac{1}{n}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{n-1}{n} + n \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$E(g(X)) = E(\delta(0)) = 0 \neq 1$$

No se cumplen las hipótesis del teorema porque g no está acotada en el soporte, ya que no está acotado.

Definición 1.11. Una función F es función de distribución impropia si verifica:

- F es creciente.
- F es continua por la derecha.
- Existe $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $F(-\infty) > 0$ o $F(\infty) < 1$.

Definición 1.12. Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución y sea F una función de distribución propia o impropia. Decimos que $\{F_n\}$ converge de forma vaga o vagamente a F si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe $F_n \xrightarrow{v} F$.

Observación. Convergencia débil implica convergencia vaga.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

El límite puntual de $\{F_n\}$ es:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es una función de distribución impropia. Por tanto, $F_n \xrightarrow{v} G$.

Ejemplo. Consideramos la función de distribución:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Definimos:

$$F_n(x) = F_0(x+n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x+n < 2 \\ 1 & \text{si } x+n \geq 2 \end{cases}$$

El límite puntual de $F_n(x)$ es $F(x) = 1$, que es una función de distribución impropia. Por tanto, $F_n \xrightarrow{v} F$.

Ejercicio. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad con:

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\omega) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!}, \quad \omega \in \mathbb{N}, \lambda > 0$$

Consideramos la sucesión de variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = e^{n\omega}$$

Observamos que $x = e^{n\omega} \Leftrightarrow \omega = -\frac{\log(x)}{n}$, con $x > 0$.

$$P(X_n^{-1}(x)) = P\left(-\frac{\log(x)}{n}\right) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{-\frac{\log(x)}{n}}}{\left(-\frac{\log(x)}{n}\right)!} & \text{si } -\frac{\log(x)}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calculamos la función de distribución de X_n :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n^{-1}((-\infty, x])) = P(X_n^{-1}([0, x])) = P(X_n^{-1}([0, e^{-nk}])) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega \geq k\}) = 1 - P(\{\omega \in \Omega : \omega < k\}) = 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} & \text{si } e^{-nk} \leq x < e^{-n(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \vdots & \\ 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) & \text{si } e^{-2n} \leq x < e^{-n} \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } e^{-n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que $F_n(x)$ tiene como límite puntual:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

G no es función de distribución. Podemos definir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como F sí es función de distribución, $F_n \xrightarrow{d} F$.

Teorema 1.16. *Supongamos que $F_n \xrightarrow{v} F$ con F función de distribución impropia. Sea g real y continua en $[a, b]$, con $a, b \in C(F)$. Entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} g(x) dF_n(x) = \int_{[a, b]} g(x) dF(x)$$

Teorema 1.17. *Supongamos que $F_n \xrightarrow{v} F$ con F función de distribución impropia. Sea g real y continua con $g(\infty) = g(-\infty) = 0$. Entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

Lema 1.18. *Una sucesión $\{F_n\}_n$ converge vagamente si y solo si converge en algún conjunto denso $D \subset \mathbb{R}$.*

Teorema 1.19 (Principio de selección de Helly). *Toda sucesión $\{F_n\}_n$ de funciones de distribución tiene una subsucesión que converge vagamente.*

Definición 1.13. Sea \mathcal{H} una familia de funciones de distribución. \mathcal{H} es ajustada si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a > 0$ tal que:

$$P_F((-a, a]) > 1 - \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

Equivalentemente,

$$P_F((-\infty, -a] \cup (a, \infty)) < \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

Definición 1.14. \mathcal{H} es relativamente compacta si cada $\{F_n\}_n$ con $F_n \in \mathcal{H}$ tiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.20 (Prokhorov). *\mathcal{H} es relativamente compacta si y solo si es ajustada.*

Teorema 1.21. *Sea $\{F_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión ajustada. Si todas sus subsucesiones convergentes tienen el mismo límite F , entonces $F_n \xrightarrow{d} F$.*

Capítulo 2

Función característica

Definición 2.1. Sea X variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) con función de distribución F . La función característica asociada a X es:

$$\begin{aligned}\varphi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)\end{aligned}$$

Observación. Usando que $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, podemos escribir:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) dF(x)$$

Ejemplo. Sea $X \sim \delta(a)$, con $a \in \mathbb{R}$. Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{ita} P(X = a) = e^{ita}$$

Ejemplo. Sea $X \sim Bi(n, p)$, con $n \geq 0$ y $0 \leq p \leq 1$. Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $X \sim Po(\lambda)$. Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}\end{aligned}$$

Observación.

$$\varphi_{Bi}(x) = (pe^{it} + 1 - p)^n = \left(1 + \frac{np(e^{it} - 1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{np \rightarrow \lambda} e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi_{Po}(t)$$

Ejemplo. Sea $X \sim U([0, 1])$. Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

Ejemplo. Sea $X \sim N(0, 1)$. Su función característica es:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x^2 - 2itx)}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{x^2 - t^2 - 2it}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Nota. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

2.1. Propiedades

Veamos las propiedades más importantes de las funciones características. Sea φ la función característica de una variable aleatoria X . Entonces:

1. $\varphi(0) = 1$.

$$E(e^{i0X}) = E(1) = 1$$

2. $|\varphi(t)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$|\varphi(t)| = |E(e^{itX})| \leq E|e^{itX}| = E|\cos(tx) + i\sin(tx)| = 1$$

3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.

$$\begin{aligned} \varphi(-t) &= E(e^{itX}) = E(\cos(-tx) + i\sin(-tx)) = \\ &= E(\cos(tx)) - iE(\sin(tx)) = \overline{E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))} = \\ &= \overline{E(\cos(tx) + i\sin(tx))} = \overline{\varphi(t)} \end{aligned}$$

4. φ es función definida positiva, es decir,

$$\sum_{k,j=1}^n z_k \varphi(t_j - t_k) \overline{z_j} \geq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

Además,

- $\varphi \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$ es simétrica.

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} = \varphi(t)$$

- Sea $Y = a + bX$. Entonces:

$$\varphi_Y(t) = E(e^{it(a+bX)}) = e^{ita} E(e^{itbX}) = e^{ita} \varphi_X(bt)$$

Teorema 2.1. φ es uniformemente continua en \mathbb{R} .

2.2. Teorema de inversión

Teorema 2.2 (Teorema de inversión). Sea X variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) con función de distribución F y función característica φ . Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces:

$$\frac{F(b) + F(b^-)}{2} - \frac{F(a) + F(a^-)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$$

Corolario 2.3. Sea X variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) con función de distribución F y función característica φ . Sean $a, b \in C(F)$ con $a < b$, entonces:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$$

Teorema 2.4 (Unicidad). Sean X_1 y X_2 variables aleatorias, con funciones de distribución F_1 y F_2 y funciones características φ_1 y φ_2 respectivamente. Entonces:

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Teorema 2.5. Existe $k \in (0, \infty)$ tal que para todo $a > 0$ y toda medida de probabilidad P_F se tiene que:

$$P_F \left(\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right]^c \right) \leq \frac{k}{a} \int_0^a (1 - \operatorname{Re}(\varphi_F(t))) dt$$

donde φ_F es la función característica asociada a P_F .

Corolario 2.6. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias X_n con F_n , P_{F_n} y φ_{F_n} . Supongamos que:

1. Existe $\delta > 0$ tal que $\varphi_{F_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t)$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$, siendo φ una función.
2. φ es continua en 0.

Entonces $\{X_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión ajustada. Es decir, $\{F_n\}$ forma una familia ajustada.

Ejercicio. Sea X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{si } |x| \leq a, a > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos su función característica φ .

Como f es simétrica, sabemos que $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = \\ &= \int_{-a}^a \cos(tx) f(x) dx + \int_{-a}^a \sin(tx) f(x) dx = 2 \int_0^a \cos(tx) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{2(1 - \cos(at))}{a^2 t^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)}{\left(\frac{at}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$.

Ejercicio. Sea X con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

Calculemos su función característica φ_X .

Para facilitar los cálculos, consideramos la variable estandarizada $Y = \frac{X-\alpha}{\beta}$ y calculamos φ_Y . Para ello, hallamos primero F_Y y f_Y :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-\alpha}{\beta} \leq y\right) = P(X \leq \beta y + \alpha) = F_X(\beta y + \alpha) \\ f_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\beta y + \alpha)\beta = f_X(\beta y + \alpha)\beta = \frac{1}{2} e^{-|y|} \end{aligned}$$

Observamos que f_Y es simétrica, así que $\varphi_Y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \int_{\mathbb{R}} (\cos(ty) + i \sin(ty)) \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \\ &= \int_0^\infty \cos(ty) e^{-y} dy = \frac{1}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\varphi_X(t) = e^{it\alpha} \varphi_Y(\beta t) = \frac{e^{it\alpha}}{1 + \beta^2 t^2}$$

También se puede ver que $Y = Y_1 - Y_2$, con $Y_i \sim \text{Exp}(1)$ independientes. De esta forma:

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) = E(e^{it(Y_1 - Y_2)}) = E(e^{itY_1})E(e^{-itY_2}) = \varphi_{Y_1}(t)\varphi_{Y_2}(-t) = \\ &= \varphi_{Y_1}(t)\overline{\varphi_{Y_2}(t)} = \frac{1}{1 - it} \frac{1}{1 + it} = \frac{1}{1 + t^2}\end{aligned}$$

2.3. Teorema de continuidad

Teorema 2.7 (Teorema de continuidad de Lévy). *Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ y sean φ_n las funciones características asociadas. Supongamos que existe una función φ tal que:*

1. $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. φ es continua en 0.

Entonces $X_n \xrightarrow{d} X$, donde X es la variable aleatoria con función característica φ .

Teorema 2.8. *Una sucesión $\{F_n\}_{n \geq 1}$ es ajustada si y solo si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(1 - \varphi_n(t)) \right) = 0$$

Observación (Teorema central del límite de De Moivre). Sean $X_n \sim \text{Bi}(n, p)$. Sabemos que $E(X_n) = np$ y $V(X_n) = npq$, con $q = 1 - p$. Consideramos:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X_n - np}{\sigma_n}$$

Veamos que $Z_n \xrightarrow{d} Z$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= E(e^{itZ_n}) = E(e^{it \frac{X_n - np}{\sigma_n}}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} E(e^{\frac{it}{\sigma_n} X_n}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) = \\ &= e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} (pe^{i \frac{t}{\sigma_n}} + q)^n = (pe^{i \frac{t}{\sigma_n} q} + qe^{-i \frac{t}{\sigma_n} p})^n\end{aligned}$$

Se puede comprobar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (pe^{i \frac{t}{\sigma_n} q} + qe^{-i \frac{t}{\sigma_n} p})^n = e^{-\frac{t^2}{n}} = \varphi_Z(t)$$

con $Z \sim N(0, 1)$.

Por el teorema de continuidad de Lévy, $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$.

2.4. Momentos

Recordamos los momentos de una variable aleatoria X .

- Momento de orden n : $E(X^n)$.
- Momento central de orden n : $E((X - E(X))^n)$.
- Momento absoluto de orden n : $E(|X|^n)$.
- Momento central absoluto de orden n : $E(|X - E(X)|^n)$.

Proposición 2.9. Si $E(|X|^p) < \infty$ para algún $n \geq 1$, entonces:

$$E(X^r), E(|X|^r) < \infty, \quad 0 < r \leq n$$

Definición 2.2. El espacio L^p es el conjunto de las variables X tales que $E(|X|^p) < \infty$.

$$L^p = \left\{ X \text{ variable aleatoria} : \int |X|^p dF(x) < \infty \right\}$$

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado, con $\|X\|_p = (E(|X|^p))^{1/p}$, $X \in L^p$.

Teorema 2.10. Sea $X \in L^n$ para algún $n \geq 1$ y con función característica φ . Entonces existen las derivadas $\varphi^{(k)}$ con $k = 1, \dots, n$ y son uniformemente continuas. Además,

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} dF(x)$$

y $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$. Así que φ se puede expresar como:

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + O(t^{n+1})$$

Proposición 2.11. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones características φ_X y φ_Y respectivamente. Entonces la función característica de $S = X + Y$ es $\varphi_S(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

En general, si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, la función característica de $S = X_1 + \dots + X_n$ es:

$$\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

Si además X_1, \dots, X_n son igualmente distribuidas, entonces $\varphi_S(t) = \varphi_{X_k}(t)^n$ para cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$.

Ejercicio. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con función característica:

$$\varphi_{X_n}(t) = \left(\frac{1 - (1 - \alpha)it}{1 - it} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

1. **Determinar la distribución de X_n .**

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(t) &= \left(\frac{1 - \alpha + \alpha - (1 - \alpha)it}{1 - it} \right)^n = \left(\frac{\alpha}{1 - it} + \frac{(1 - \alpha)(1 - it)}{1 - it} \right)^n = \\ &= \left(\alpha \frac{1}{1 - it} + (1 - \alpha) \right)^n = \varphi_W(t)^n \end{aligned}$$

donde $\varphi_W(t) = \alpha \frac{1}{1 - it} + (1 - \alpha)$. Luego $X_n = \sum_{i=1}^n W$.

Observamos que $\frac{1}{1 - it}$ es función característica de $Exp(1)$ y 1 es función característica de $\delta(0)$, así que W es mixtura de estas dos distribuciones. Por tanto, X_n es la suma de n variables aleatorias con distribuciones mixtura de $Exp(1)$ y $\delta(0)$.

2. **Calcular $E(X_n)$ y $V(X_n)$.**

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E\left(\sum_{i=1}^n W\right) = nE(W) = n(\alpha E(Exp(1)) + (1 - \alpha)E(\delta(0))) \\ &= n\alpha \\ V(X_n) &= nV(W) = n(E(W^2) - E(W)^2) = \\ &= n(\alpha E(Exp(1)^2) + (1 - \alpha)E(\delta(0)^2) - \alpha^2) = \\ &= n(\alpha(V(Exp(1)) + E(Exp(1))^2) - \alpha^2) = \\ &= n(2\alpha - \alpha^2) = n\alpha(2 - \alpha) \end{aligned}$$

También se podría haber usado que $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.

$$\varphi'_W(t) = \frac{i\alpha}{(1 - it)^2} \quad \varphi''_W(t) = \frac{-2\alpha}{(1 - it)^3}$$

De esta forma podemos calcular:

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{i} \varphi'_W(0) = \alpha \\ E(W^2) &= \frac{1}{i^2} \varphi''_W(0) = 2\alpha \end{aligned}$$

3. **Determinar el límite en distribución de la sucesión $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ con:**

$$Y_n = \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n}}$$

Por el teorema de continuidad de Lévy, basta hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_n}(t) &= E(e^{itY_n}) = E(e^{it \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n}}}) = e^{-it\sqrt{n}\alpha} \varphi_{X_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= e^{-it\sqrt{n}\alpha} \left(\frac{\alpha}{1 - i \frac{t}{\sqrt{n}}} + 1 - \alpha \right)\end{aligned}$$

Como este límite es difícil de resolver podemos proceder de otra forma. Podemos escribir $X_n - n\alpha = \sum_{i=1}^n (W_i - \alpha) = \sum_{i=1}^n U_i$, con $U_i = W_i - \alpha$. Entonces:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n - n\alpha} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_{\sum_{i=1}^n U_i} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_U \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n$$

Nota. Hemos usado que $\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at)$.

Sabemos que $E(U) = 0$ y $E(U^2) = V(U) = V(W) = \alpha(2 - \alpha)$. También sabemos que:

$$\varphi_U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi_U^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(U^k) = 1 + itE(U) - \frac{t^2}{2} E(U^2) + O(t^2)$$

Luego:

$$\varphi_U \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left(\frac{t^2}{n} \right)$$

Así que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_U \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left(1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left(\frac{t^2}{n} \right) - 1 \right)} = e^{-\frac{t^2}{2} \alpha(2 - \alpha)}\end{aligned}$$

Por tanto, $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \alpha(2 - \alpha))$.

Observación (Teorema central del límite de Lévy-Lindeberg). Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con $\mu = E(X_n) < \infty$ y $\sigma^2 = V(X_n) < \infty$.

Consideramos $Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$, con $E(Y_n) = 0$, $V(Y_n) = 1$ y $\varphi_{Y_n}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^2)$.

Sea $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$. Veamos que $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + O \left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n \rightarrow e^{-t^2/2}$$

Lema 2.12.

$$\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \min \left\{ 2 \frac{|y|^n}{n!}, \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$

Teorema 2.13. Si φ es absolutamente integrable, entonces F es absolutamente continua con densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

Teorema 2.14 (Lema de Riemman-Lebesgue). Si F es absolutamente continua, entonces:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$$

Definición 2.3. Sea X una variable aleatoria con función característica φ . Definimos su función generatriz de cumulantes como:

$$K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad K(t) = \log(\varphi(t))$$

Proposición 2.15. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con funciones características $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ y sea $S = X_1 + \dots + X_n$. Entonces:

$$K_S(t) = \sum_{i=1}^n K_{x_i}(t)$$

Teorema 2.16. Sea X una variable aleatoria. Supongámslo que $E(|X|^n) < \infty$ para algún $n \geq 1$. Entonces:

$$K_X(t) = \sum_{j=0}^n \frac{(it)^j}{j!} c_j + O(t^n)$$

donde $c_j = \frac{K^{(j)}(0)}{i^j}$ es el cumulante de orden j .

Nota.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{K'(0)}{i} = \frac{1}{i} \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \frac{1}{i} \varphi'(0) = E(X) \\ c_2 &= \frac{K''(0)}{i^2} = -K''(0) = - \left(\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} - \left(\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} \right)^2 \right) = (E(X^2) - E(X)^2) = \\ &= V(X) \end{aligned}$$

Definición 2.4. Sea X una variable aleatoria y $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

- Definimos el sesgo de X como $\frac{c_3}{\sigma^3}$.

- Definimos la curtosis de X como $\frac{c_4}{\sigma^4}$.

Definición 2.5. Sea X una variable aleatoria con función característica φ . Definimos la función de generatriz de momentos de X como:

$$\psi(t) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF(x)$$

ψ está definida en un entorno del 0.

Observación. Si existe ψ entonces $E(|X|^n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Definición 2.6. Sea X una variable aleatoria con valores en $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. La función generatriz de probabilidad de X es:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n), \quad |t| < 1$$

Observación.

$$G_x^{(k)}(0) = k!P(X = k) \Rightarrow P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Sea $X = Y_1 + \dots + Y_N$, con Y_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y N una variable aleatoria en \mathbb{Z}_+ . X sigue una distribución compuesta.

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = E(E(e^{itX}|N)) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{itX}|N = n)P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{it \sum_{i=1}^n X_i})P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_Y(t)^n P(N = n) = G_N(\varphi_Y(t)) \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $X = Y_1 + \dots + Y_N$, con Y_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y $N \sim Po(\lambda)$ una variable aleatoria en \mathbb{Z}_+ .

$$\varphi_X(t) = G_N(\varphi_Y(t)) = e^{\lambda(\varphi_Y(t)-1)}$$

donde

$$G_N(t) = E(t^N) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$$

Además,

$$K_X(t) = \log(\varphi_X(t)) = \lambda(\varphi_Y(t) - 1)$$

Luego podemos calcular:

$$E(X) = c_1 = \frac{K'(0)}{i} = \frac{1}{i} \lambda \varphi_Y'(0) = \lambda E(Y)$$

2.5. Reconocimiento de funciones características

Para identificar funciones características usamos alguna de las siguientes estrategias:

- Reconocer la función característica de alguna distribución conocida.
- Encontrar una variable aleatoria cuya función característica sea la que busquemos.
- Usar otros resultados.

Ejercicio. Supongamos que φ_X es una función característica. Veamos que $|\varphi_X|^2$ también lo es.

$$|\varphi_X(t)|^2 = \varphi_X(t) \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t) \varphi_{-X}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Definimos X' como una copia independiente de $-X$. Entonces, la variable $Y = X + X'$ tiene como función característica a $|\varphi_X|^2$.

Lema 2.17. Sean μ_1, \dots, μ_n medidas de probabilidad con funciones características $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ respectivamente. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Entonces la función característica asociada a la medida $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$ es:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t)$$

Es decir, toda combinación lineal convexa de funciones características es una función característica.

Ejercicio. Supongamos que φ_X es una función característica. Veamos que $\operatorname{Re}(\varphi_X)$ también lo es.

$$\operatorname{Re}(\varphi_X) = \frac{\varphi_X + \overline{\varphi_X}}{2} = \frac{1}{2} \varphi_X + \frac{1}{2} \varphi_{X'}$$

donde X' es una copia independiente de $-X$.

Definimos la variable aleatoria Y cuya distribución de probabilidad es una mixta de las distribuciones X y X' con pesos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Entonces, Y tiene como función característica $\varphi_Y(t) = \operatorname{Re}(\varphi_X(t))$.

Definición 2.7. Una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es definida positiva si:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0$$

para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Observación. La función característica es definida positiva.

Teorema 2.18. Sea g una función definida positiva. Si g es continua en 0 entonces es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Lema 2.19 (Herglotz). Sea $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida positiva con $\phi(0) = 1$. Entonces existe μ distribución de probabilidad en $[-\pi, \pi]$ tal que ϕ es su función característica asociada, es decir,

$$\phi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} \mu(dx), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Teorema 2.20 (Bochner). Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

1. φ es definida positiva.
2. φ es continua en 0.
3. $\varphi(0) = 1$.

Entonces φ es una función característica.

Proposición 2.21. La función φ_T dada por:

$$\varphi(t) = \max \left\{ 1 - \frac{|t|}{T}, 0 \right\} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$

es una función característica.

Lema 2.22. Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\varphi(0) = 1$.
2. $\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
3. φ es par.
4. φ es una poligonal convexa no creciente en \mathbb{R}_+ .

Entonces φ es una función característica.

Teorema 2.23 (Criterio de Pólya). Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\varphi(0) = 1$.
2. φ es no negativa, par y continua.
3. φ es convexa y no creciente en \mathbb{R}_+ .

Entonces φ es función característica.

Ejercicio. Sea φ la función dada por:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - 0,025|t| & \text{si } |t| < 2 \\ 0,9 - 0,2|t| & \text{si } 2 \leq |t| < 3 \\ 0,6 - 0,1|t| & \text{si } 3 \leq |t| < 4 \\ 0,2 & \text{si } |t| \geq 4 \end{cases}$$

Veamos que φ es función característica.

Para ello expresamos φ como combinación lineal convexa de funciones características de la forma $1 - \frac{|t|}{T}$ en $|t| < T$. Escribimos φ como:

$$\varphi(t) = \alpha_1\varphi_2(t) + \alpha_2\varphi_3(t) + \alpha_3\varphi_4(t) + \alpha_4, \quad \varphi_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$

Ahora encontramos los α_i .

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \varphi(2) = \alpha_2\varphi_3(2) + \alpha_3\varphi_4(2) + \alpha_4 = \alpha_2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \alpha_3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \alpha_4 \\ \varphi(3) = \alpha_3\varphi_4(2) + \alpha_1 = \alpha_3 \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \alpha_4 \\ \varphi(4) = \alpha_4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$\alpha_1 = 0,1, \quad \alpha_2 = 0,3, \quad \alpha_3 = 0,4, \quad \alpha_4 = 0,2$$

Por tanto,

$$\varphi(t) = 0,1\varphi_2(t) + 0,3\varphi_3(t) + 0,4\varphi_4(t) + 0,2$$

Como cada φ_a es función característica, φ es función característica por ser combinación lineal convexa de ellas.

Capítulo 3

Convergencia

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad, con $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Estudiaremos las sucesiones $\{A_n\}_{n \geq 1}$ con $A_i \in \mathcal{A}$ para todo $i \geq 1$.

Definición 3.1. Sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$.

- Definimos el límite superior de la sucesión como:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}$$

- Definimos el límite inferior de la sucesión como:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}$$

Observación.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

La sucesión $\{A_n\}_n$ converge si:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Definición 3.2. Sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$. $\{A_n\}_n$ es monótona creciente si:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

En ese caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

Definición 3.3. Sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$. $\{A_n\}_n$ es monótona decreciente si:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

En ese caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

Teorema 3.1. Sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ monótona. Entonces:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Teorema 3.2. Sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$. Entonces:

1.

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right)$$

2.

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{m \geq n} A_m\right)$$

Teorema 3.3. Sean $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ y $\omega \in \Omega$. Entonces:

1. $\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ si y solo si existe una sucesión de índices

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

tal que $\omega \in A_{n_k}$, para $k = 1, 2, \dots$.

2. $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ si y solo si existe $n_0 \geq 1$ tal que $\omega \in A_m$ para todo $m \geq n_0$.

Teorema 3.4 (Primer lema de Borel-Cantelli). Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ tal que $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$. Entonces:

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

Veamos que el recíproco del primer lema de Borel-Cantelli no es cierto.

Ejemplo. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) el espacio de probabilidad dado por $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\Omega$ y P la medida de Lebesgue. Consideramos la sucesión $\{A_n\}_n$ con $A_n = \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$. Observamos que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \left(0, \frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \emptyset \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

Sin embargo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

Observación.

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) &= I_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}(\omega) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) &= I_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}(\omega)\end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Segundo lema de Borel-Cantelli). *Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ con A_i independientes tal que $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty$. Entonces:*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

Observación.

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

Ejemplo. Un mono pulsando teclas al azar sobre un teclado durante un periodo de tiempo infinito escribirá el Quijote y cualquier texto un número infinito de veces.

Corolario 3.6 (Ley 0-1 de Borel-Cantelli). *Sea $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ con A_i independientes. Entonces:*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0 \quad \text{o} \quad P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

3.1. Tipos de convergencia

Sea X variable aleatoria en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , definimos:

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\}$$

Recordamos que:

- Sean $X : \Omega \rightarrow S$ y $f : S \rightarrow T$ dos funciones medibles. Entonces $f(X)$ es medible.
- Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces $f(X_1, \dots, X_n)$ es variable aleatoria.
- Toda función continua es medible Borel.

Teorema 3.7. *Sea X_n una sucesión de variables aleatorias en (Ω, \mathcal{A}, P) . Entonces son variables aleatorias:*

- $\inf X_n$
- $\sup X_n$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$

$$\blacksquare \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$$

Corolario 3.8. Ω_1 es medible.

Definición 3.4. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en (Ω, \mathcal{A}, P) . Decimos que X_n converge casi seguro si $P(\Omega_1) = 1$.

En tal caso escribimos $X_n \xrightarrow{cs} X$, con $X = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$.

Teorema 3.9. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes en (Ω, \mathcal{A}, P) . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $X_n \xrightarrow{cs} X$.
2. $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_{n,k}) = 1$ para todo $k \geq 1$.
3. $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_{n,k}^c) = 0$ para todo $k \geq 1$.

donde

$$Y_{n,k} = \left\{ \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Ejemplo. Veamos un contraejemplo para el caso en el que no hay independencia.

Sea $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ y $P = m$ la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que las variables aleatorias no son independientes dos a dos:

$$\begin{aligned} P(X_n = 1 | X_{n-1} = 0) &= \frac{P((X_n = 1) \cap (X_{n-1} = 0))}{P(X_{n-1} = 0)} = \\ &= \frac{m\left([0, \frac{1}{n}] \cap (\frac{1}{n-1}, 1]\right)}{1 - \frac{1}{n-1}} = 0 \\ P(X_n = 1) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Calculamos el límite de la sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Sea $X(\omega) = 0$, $X_n \xrightarrow{cs} X$ porque:

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X\}) = P(\{0\}) = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$,

$$Y_{n,1/\varepsilon}^c = \{\omega \in [0, 1] : |X_n(\omega) - 0| \geq \varepsilon\}$$

Sin embargo, observamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_{n,1/\varepsilon}^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Definición 3.5. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en (Ω, \mathcal{A}, P) . Decimos que X_n converge en probabilidad a X si para todo $\varepsilon > 0$

$$P(Y_{n,\varepsilon}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

En tal caso escribimos $X_n \xrightarrow{p} X$.

Teorema 3.10. *El límite en probabilidad es único en casi todo punto.*

Teorema 3.11. *Si $X_n \xrightarrow{cs} X$, entonces $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Ejemplo. Sea $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ y $P = m$ la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = \omega^n$$

Calculamos el límite de la sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \omega < 1 \\ 1 & \text{si } \omega = 1 \end{cases}$$

Sea $X(\omega) = 0$, $X_n \xrightarrow{cs} X$ porque:

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X\}) = P(\{1\}) = 0$$

Como X_n converge casi seguro, sabemos que X_n converge en probabilidad. Veamos que esto es cierto.

Sea $\varepsilon > 0$,

$$Y_{n,\varepsilon} = \{|X_n - X| < \varepsilon\} = \{X_n < \varepsilon\}$$

Observamos que:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt[n]{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Por tanto, si tomamos $\varepsilon \leq 1$,

$$P(Y_{n,\varepsilon}) = F_n(\varepsilon^-) = \sqrt[n]{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Ejemplo. Sean X_n variables aleatorias independientes de Bernoulli en un espacio de medida (Ω, \mathcal{A}, P) .

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si hay éxito en la prueba } n \\ 0 & \text{si no hay éxito en la prueba } n \end{cases}$$

Observamos que:

$$P(X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $X = 0$, veamos que X_n no converge casi seguro a X . Sea $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_{n,\varepsilon}^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Veamos que aún así X_n converge en probabilidad a X .

$$P(Y_{n,\varepsilon}^c) = P(X_n \geq \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 0 < \varepsilon \leq 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{n,\varepsilon}^c) = 0 \quad \forall \varepsilon$$

Por tanto, $X_n \xrightarrow{p} X$.

Teorema 3.12. Si $X_n \xrightarrow{p} X$, entonces existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}$ tal que $X_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{cs} X$.

Teorema 3.13. $X_n \xrightarrow{p} X$ si y solo si toda subsucesión contiene una subsucesión convergente casi seguro.

Teorema 3.14. La convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución.

Teorema 3.15. Sean X_n y X en (Ω, \mathcal{A}, P) con $X \sim \delta(c)$ y c constante. Entonces la convergencia en probabilidad es equivalente a la convergencia en distribución.

Convergencia en L^p

Dado $0 < p < \infty$, definimos:

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : E(|X|^p) < \infty\}$$

Nota. Los elementos de L^p son en realidad clases de equivalencia, con la relación de equivalencia dada por:

$$X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \text{ en casi todo punto}$$

Nota. Si X es una variable aleatoria que verifica $E(|X|^p) < \infty$, se dice que es p -integrable. Esta condición es equivalente a que:

$$\int_{\Omega} |X|^p dP < \infty$$

Para $1 \leq p < \infty$ podemos definir la norma:

$$\|X\|_p = \left(\int_{\Omega} |X|^p dP \right)^{1/p}$$

Si $0 < p < 1$, $\|\cdot\|$ es una pseudonorma.

Esta norma induce una métrica:

$$\begin{aligned} d : L^p \times L^p &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ d(X, Y) &= \|X - Y\|_p \end{aligned}$$

Definición 3.6. Sean $X_n, X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Decimos que X_n converge a X en L^p si:

$$\|X_n - X\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Equivalentemente, si:

$$E(|X_n - X|^p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En tal caso escribimos $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Ejemplo. Sean $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ y $P = m$ la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = nI_{[0, \frac{1}{n}]}(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Veamos si X_n converge a X en L^p .

$$\begin{aligned} E(|X_n - X|^p) &= E(|X_n|^p) = 0^p P(X_n = 0) + n^p P(X_n = n) = \\ &= n^p m \left(\left[0, \frac{1}{n} \right] \right) = \frac{n^p}{n} = n^{p-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1 \\ 1 & \text{si } p = 1 \\ \infty & \text{si } p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego X_n converge a X en L^p si $p < 1$.

Ejemplo. Sean $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ y $P = m$ la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = 2^n I_{[0, \frac{1}{2^n}]}(\omega) = \begin{cases} 2^n & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2^n} < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Sea $X \sim \delta(0)$, se puede comprobar que $X_n \xrightarrow{p} X$. Veamos si X_n converge a X en L^p .

$$\begin{aligned} E(|X_n - X|^p) &= E(|X_n|^p) = 0^p P(X_n = 0) + 2^{np} P(X_n = 2^n) = \\ &= 2^{np} P\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{2^{np}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Luego X_n no converge a X en L^p .

Proposición 3.16 (Desigualdad de Márkov). *Sean X no negativa y $a > 0$. Entonces:*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Si $X \in L^p$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X^p)}{a^p}$$

Observación. Si $X \in L^p$ cualquiera, $|X|$ es no negativa luego:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^p)}{a^p}$$

Teorema 3.17. *Sean $X_n, X \in L^p$, con $0 < p < \infty$. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, entonces $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Teorema 3.18. *El límite en L^p es único.*

Teorema 3.19. *Si $X_n \xrightarrow{p} X$ con $X_n, X \in L^p$ y existe $Y \in L^p$ tal que $|X_n| \leq Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $X_n \xrightarrow{L^p} X$.*

3.2. Leyes de los grandes números

Ley débil de los grandes números

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias en (Ω, \mathcal{A}, P) y sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$. La sucesión $\{X_n\}_{n \geq 1}$ verifica la ley débil de los grandes números si existen sucesiones numéricas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $b_n \uparrow \infty$ tales que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$$

Nota. Escribir $X_n \rightarrow c$ con $c \in \mathbb{R}$ es equivalente a $X_n \rightarrow X$ con $X \sim \delta(c)$.

Teorema 3.20 (Bernoulli). *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con $X_i \sim \text{Ber}(p)$, donde $0 < p < 1$. Entonces:*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$$

Es decir, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ verifica la ley débil de los grandes números para $a_n = np$ y $b_n = n$.

Ejemplo (Ciclos de permutaciones aleatorias). Sea Ω_n el conjunto de permutaciones de n elementos, consideramos la permutación $\pi \in \Omega_9$ dada por:

$$\begin{array}{c|cccccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \pi(i) & 3 & 9 & 6 & 8 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{array}$$

Observamos que π tiene tres ciclos y se puede escribir como $(1\ 3\ 6)(2\ 9\ 7\ 5)(4\ 8)$.

Tomando una permutación al azar de Ω_n , queremos estudiar cuántos ciclos tendrá. Definimos las variables:

$$X_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si se cierra un ciclo tras el número en la posición } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso de π tenemos que $x_{9,3} = x_{9,7} = x_{9,9} = 1$, con $x_{9,m} = 0$ en el resto.

Observamos que $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ es el número de ciclos. Se puede demostrar que $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ son variables aleatorias independientes y que:

$$P(X_{n,k} = 1) = \frac{1}{n - k + 1}$$

Calculemos su esperanza:

$$E(S_n) = E(X_{n,1}) + \dots + E(X_{n,n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Podemos aproximar:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log(n)$$

Por tanto, sean $b_n = \log(n)$ y $a_n = E(S_n) = \log(n)$, entonces:

$$\frac{S_n - \log(n)}{\log(n)} \xrightarrow{p} 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{\log(n)} \xrightarrow{p} 1$$

Ejemplo (Polinomios de Bernstein). Sea f continua en $[0, 1]$. Para cada $x \in [0, 1]$, el polinomio de Bernstein de grado n asociado a f es:

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} f\left(\frac{m}{n}\right)$$

Sean $X_i \sim \text{Ber}(p)$ para $i \geq 1$ con $0 < p < 1$. Entonces $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bi}(n, p)$, con:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Por la ley débil de los grandes números de Bernoulli:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} - p \xrightarrow{p} 0$$

Teorema 3.21 (Chebyshev). Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con media μ y varianza σ^2 constantes. Entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

Teorema 3.22 (Chebyshev). Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con varianza acotada por una constante c . Entonces:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0$$

Teorema 3.23 (Márkov). Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias con $V\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Entonces:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0$$

Teorema 3.24 (Khinchin). Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media $\mu < \infty$. Entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

Ejemplo. Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $X_j \sim U([0, 1])$ para todo j . Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible en $[0, 1]$ tal que:

$$\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$$

Consideramos las variables aleatorias $f(X_1), f(X_2), \dots$. Observamos que:

$$E(f(X_j)) = \int_0^1 f(x) dx < \infty$$

Por la ley débil de los grandes números:

$$\frac{1}{n}(f(X_1) + \dots + f(X_n)) \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x) dx$$

Ejemplo. Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en $\{1, \dots, n\}$ con n fijo, donde X_i es el valor del dato i -ésimo. Definimos la variable $\tau_k^n = \inf\{m \leq n : \#\{X_1, \dots, X_m\} = k\}$, que representa el instante en el cual obtenemos k datos distintos. Es claro que $\tau_1^n = 1$ y asumimos $\tau_0^n = 0$.

Definimos también $X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$, para $1 \leq k \leq n$, que indica el tiempo en conseguir el k -ésimo dato distinto. Observamos que:

$$X_{n,k} \sim Ge\left(\frac{n - (k-1)}{n}\right)$$

Por tanto:

$$E(X_{n,k}) = \frac{n}{n - (k-1)}, \quad V(X_{n,k}) = \left(\frac{n}{n - (k-1)}\right)^2$$

Por último, definimos $T_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k} = \tau_n^n$, que es el tiempo en completar la colección.

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{n - (k-1)} = n \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \sim n \log(n) \\ V(T_n) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n - (k-1)}\right)^2 = n^2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \leq n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = n^2 \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Tomamos $a_n = E(T_n)$ y $b_n = n \log(n)$. Como $\frac{V(T_n)}{b_n} \rightarrow 0$ y se verifica la ley débil de los grandes números, entonces:

$$\frac{T_n - n \log(n)}{n \log(n)} \xrightarrow{p} 0, \text{ es decir, } \frac{T_n}{n \log(n)} \xrightarrow{p} 1$$

Si $n = 365$, entonces el tiempo en completar la colección será aproximadamente $T_n \sim 365 \log(365) > 2153$.

Ley fuerte de los grandes números

Definición 3.7. Una sucesión $\{X_n\}_{n \geq 1}$ de una variable aleatoria verifica la ley fuerte de los grandes números si existen sucesiones numéricas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $b_n \uparrow \infty$ tales que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{cs} 0$$

donde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Observación. Estudiaremos el caso $a_n = E(S_n)$, $b_n = n$. Queremos estudiar la convergencia de series de variables aleatorias, como $\sum_{i=1}^{\infty} X_n$ y $\sum_{i=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$. Diremos que una serie $\sum_{i=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguro para indicar que $\sum_{i=1}^{\infty} X_n < \infty$ en casi todo punto.

Lema 3.25. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguro si y solo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq m} |S_j - S_n| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Teorema 3.26 (Criterio de convergencia de Kolmogórov). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) < \infty$ casi seguro.*

Observación. Si $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) < \infty$ casi seguro, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \text{ casi seguro} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) < \infty$$

Teorema 3.27 (Recíproco del criterio de convergencia de Kolmogórov). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Si existe una constante $c > 0$ tal que $\{X_n\} \leq c$ casi seguro para todo $n \geq 1$, entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) < \infty \text{ casi seguro} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$$

Corolario 3.28. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $\{X_n\} \leq c$ para alguna constante $c > 0$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ casi seguro, entonces también convergen casi seguro las series:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n)$$

Teorema 3.29 (Condición suficiente de Kolmogórov). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con varianza finita. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < \infty$ entonces $\{X_n\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números, es decir,*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{cs} 0$$

Lema 3.30 (Kronecker). *Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con $a_n \uparrow \infty$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n} < \infty$ casi seguro, entonces:*

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{cs} 0$$

Definición 3.8. Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{c_n\}$ una sucesión de reales no negativos. Se define la sucesión de las variables aleatorias truncadas como $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, donde:

$$Y_n = X_n I_{\{|X_n| < c_n\}}$$

Definición 3.9. Dos sucesiones de variables aleatorias $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ son equivalentes en convergencia cuando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty$$

Teorema 3.31. Si $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ son equivalentes en convergencia, entonces se verifican:

1. $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \neq Y_n\}) = 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ casi seguro $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Y_n < \infty$ casi seguro
3. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - Y_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cs} 0$

Observación. Si elegimos $c_n = c$ constante para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = X_n I_{\{|X_n| < c\}} = \begin{cases} X_n & \text{si } |X_n| < c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq c)$$

Si existe c tal que esa serie es finita, tenemos equivalencia entre $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$.

Ejemplo. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con medida de probabilidad inducida:

$$P_{X_n}(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & \text{si } a = -1, 1 \\ \frac{1}{2n^2} & \text{si } a = -e^n, e^n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Observamos que X_n es discreta, con $\text{sop}(X_n) = \{-e^n, -1, 1, e^n\}$.

Queremos ver que $\{X_n\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números. Sin embargo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{e^{2n}}{n^4} \right) = \infty$$

El problema es que las variables no tienen $E(X_n^2) < \infty$. Para solucionarlo, consideramos las variables truncadas:

$$Y_n = X_n I_{\{-1, 1\}} = X_n I_{\{|X_n| < 1+\varepsilon\}}$$

Observamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq -1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = e^n, X_n = -e^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Teorema 3.32 (Tres series de Kolmogórov). Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y $\{X_n^c\}$ la sucesión de variables aleatorias truncadas por alguna constante $c > 0$. Supongamos que las tres siguientes series convergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq X_n^c), \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^c), \quad \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n^c)$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguro.

Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ casi seguro, entonces las tres series convergen para todo $c > 0$.

Lema 3.33. Sea X una variable aleatoria. Entonces:

$$E(|X|) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$$

Además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

Teorema 3.34 (Ley fuerte de los grandes números). Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E(X_i) = \mu < \infty$ para todo i . Sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{cs} \mu$$

Recíprocamente, si $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{cs} c$, con c constante, entonces $E(X_i) = c$ para todo i .

3.3. Teorema central del límite

Teorema 3.35 (Teorema central del límite de Lindeberg-Lévy). Sean variables aleatorias X_1, X_2, \dots independientes e idénticamente distribuidas con media $E(X_i) = \mu < \infty$ y varianza $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ para todo i . Sean $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Entonces:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

Observación. En particular, si $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, entonces:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

Ejercicio. Sean $X_n \sim U([0, \pi])$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n \sin(X_j)$. Queremos encontrar sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

Definimos $Y_j = \sin(X_j)$, de forma que $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$. Veamos si $E(Y_j)$ y $V(Y_j)$ son constantes para aplicar el teorema central del límite de Lindeberg-Lévy.

$$E(Y_j) = \int_0^\pi \sin(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi}$$

$$E(Y_j^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}$$

Como $E(Y_j) = \frac{2}{\pi}$ y $V(Y_j) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$ son constantes, los X_n verifican el teorema central del límite de Lindeberg-Lévy para:

$$a_n = n\mu = \frac{2n}{\pi}, \quad b_n = \sqrt{n \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right)}$$

Teorema 3.36 (Teorema central del límite de Lindeberg-Feller). *Sean variables aleatorias X_1, X_2, \dots independientes con $E(X_n) = \mu_n < \infty$ y $V(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$. Sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$ y sea $s_n = V(S_n) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$. Entonces:*

1. $\frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$
2. $\max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sigma_j^2}{s_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

es equivalente a:

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x - \mu_j| > \varepsilon s_n} (x - \mu_j)^2 dF_j(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$