Análisis complejo

16 de febrero de 2023

Índice general

Preliminares

Definición 0.1. Si $a \in \mathbb{C}$ y $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, se define la corona de centro a y radios R_1 y R_2 como:

$$A(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

Teorema 0.1. *Si $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ y f es holomorfa en $A(a, R_1, R_2)$, entonces existe una única sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que:*

- *$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge para todo $z \in A(a, R_1, R_2)$.*
- *$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ para todo $z \in A(a, R_1, R_2)$.*

Para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

siendo γ cualquiera camino que esté en $A(a, R_1, R_2)$ con $n(\gamma, a) = 1$

Además, la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ converge absoluta y uniformemente a cada subconjunto compacto de $A(a, R_1, R_2)$.

A esta serie se le llama desarrollo de Laurent de f en $A(a, R_1, R_2)$.

Definición 0.2. f tiene una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ si existe $R > 0$ tal que f está definida y es holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\} = A(a, 0, R)$.

Podemos considerar el desarrollo de Laurent de f en $D(a, R) \setminus \{a\}$. Existe una única sucesión en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, tal que:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

Como la sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ no depende de R, a este desarrollo se le puede llamar desarrollo de Laurent de f en a o en un entorno perforado de a.

Proposición 0.2. *Sea f una función con una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ y sea $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ el desarrollo de Laurent de f en a. Entonces:*

1. *a es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow a_n = 0$ si $n < 0 \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\} = \emptyset$.*

2. *a es un polo de orden N de $f \Leftrightarrow a_{-N} \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n < -N$. Luego a es un polo de $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$ es finito y no vacío.*

3. *a es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$ es infinito.*

Definición 0.3. f tiene una singularidad aislada en ∞ si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

1. Es una singularidad evitable de f si $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ existe en $\mathbb{C}$.

2. Es un polo de f si $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

3. Es una singularidad esencial en otro caso.

Si f tiene una singularidad aislada en ∞, entonces f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para un cierto $R > 0$. Entonces la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es holomorfa en $D\left(0, \frac{1}{R}\right) \setminus \{0\}$, por lo que tiene una singularidad aislada en 0.

Entonces:

1. f tiene una singularidad evitable en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene una singularidad evitable en 0.

2. f tiene un polo en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene un polo en 0.

3. f tiene una singularidad esencial en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene una singularidad esencial en 0.

Proposición 0.3. *Sea f una función con una singularidad aislada en ∞. Entonces:*

1. *∞ es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow f$ está acotada en un entorno perforado de ∞. Es decir, si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa y está acotada en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.*

2. *∞ es un polo de $f \Leftrightarrow$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^N}$ existe en $\mathbb{C}$ y es distinto de 0. En este caso, N es único y se denomina el orden de ∞ como polo de f.*

3. *∞ es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para todo $R > 0$ suficientemente grande.*

Observación. En (2), el orden de ∞ como polo de f coincide con el orden de 0 como polo de $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Si f tiene una singularidad aislada en ∞, entonces existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} = A(0, R, \infty)$. Podemos considerar el desarrollo de Laurent de f en $A(0,R,\infty)$: existe una única sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo } z\in\mathbb{C} \text{ con } |z|>R$$

Como no depende de R, se le puede llamar desarrollo de Laurent de f en ∞.

Proposición 0.4. *Sea f una función con una singularidad aislada en ∞ y sea $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo de Laurent de f en ∞. Entonces:*

1. *∞ es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow a_n = 0$ si $n > 0$.*
2. *∞ es un polo de f de orden $N \Leftrightarrow a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > N$.*
3. *∞ es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow \{n > 0 : a_n \neq 0\}$ es infinito.*

Definición 0.4. Si f tiene una singularidad aislada en $a\in\mathbb{C}$ y $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es el desarrollo de Laurent de f en a, se define $Res(f,a)=a_{-1}$.

Proposición 0.5. *Sea $a\in\mathbb{C}$ y f una función con una singularidad aislada en a. Sea $R>0$ tal que f es holomorfa en $D(a,R)\setminus\{a\}$. Entonces, para todo $r\in(0,R)$, se tiene que:*

$$Res(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz$$

Proposición 0.6. *Sea f una función con una singularidad aislada en ∞. Sea $R>0$ tal que f es holomorfa en $\{z\in\mathbb{C}:|z|>R\}$. Se define:*

$$Res(f,\infty)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz, \quad \textit{siendo } r>R$$

Proposición 0.7. *Si f tiene una singularidad aislada en ∞ y $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo de Laurent de f en ∞, entonces $Res(f,\infty)=-a_{-1}$.*

Teorema 0.8 (Teorema de los residuos)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D salvo por singularidades aisladas, es decir, existe $A\subset D$, A sin puntos de acumulación en D, tal que f es holomorfa en $D\setminus A$. Sea γ un camino cerrado en $D\setminus A$, con $n(\gamma,z)=0$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus D$. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_{a\in A} Res(f,a)n(\gamma,a)$$

Teorema 0.9 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D, con $a\in D$ tal que $f'(a)\neq 0$. Entonces existen U,V abiertos en $\mathbb{C}$ con $a\in U\subset D$, $f(a)\in V$, tales que:*

1. *f es inyectiva en U.*

2. *$f(U) = V$.*
3. *$f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.*
4. *$f^{-1} : V \to U$ es holomorfa y además:*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \forall z \in U$$

Teorema 0.10. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D no constante y $a \in D$. Sea n el orden de a como cero de $f - f(a)$, es decir, el primer natural para el que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces f es localmente una aplicación $n \to 1$ cerca de a. Es decir, existe $\alpha > 0$ con $D(a, \alpha) \subset D$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $\delta > 0$ tal que cada punto $w \in D(f(a), \delta) \backslash \{f(a)\}$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, z_2, \ldots z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. En particular, $f(D(a, \varepsilon)) \supset D(f(a), \delta)$.*

Definición 0.5. Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D salvo por polos. Si $a \in D$ es un polo de f, se tiene que $\lim_{\{} z \to a\} f(z) = \infty$. Definimos $f(a) = \infty$. Entonces $f : D \to \mathbb{C}^*$ y es continua. Se dice que f es meromorfa en D.

Teorema 0.11. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f meromorfa en D, con $a \in D$ un polo de orden n de f. Entonces f es localmente una aplicación $n \to 1$ cerca de a. Es decir, existe $\alpha > 0$ tal que $D(a, \alpha) \subset D$, f es holomorfa en $D(a, \alpha) \backslash \{a\}$ y se verifica que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $R > 0$ tal que cada punto $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, z_2, \ldots z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. En particular, $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$.*

Teorema 0.12. *Sea f una función con un polo de orden n en ∞. Entonces f es localmente una aplicación $n \to 1$ cerca de ∞. Es decir, existe $R_0 > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ y se verifica que para todo $R > R_0$ existe $R' > 0$ tal que cada punto $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R'$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, \ldots, z_n$ de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. En particular, $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$.*

Teorema 0.13 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante. Entonces f es una aplicación abierta. En particular, $f(D)$ es un dominio.*

Lema 0.14. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D.*

- *Sea $a \in D$. Entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si f es inyectiva en un entorno de a.*
- *Si f es inyectiva en D, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$.*

Aplicaciones conformes

Definición 0.6. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Sea $D' = f(D)$. Entonces:

- D' es un dominio en D.
- $f : D \to D'$ es biyectiva.
- $f^{-1} : D' \to D$ es holomorfa.

En ese caso decimos que f es una aplicación conforme de D sobre D'.

Observación.

1. Si f es una aplicación conforme de D sobre D', entonces f^{-1} es una aplicación conforme de D' sobre D.
2. Si D_1, D_2 y D_3 son dominios en $\mathbb{C}$ con f aplicación conforme de D_1 sobre D_2 y g aplicación conforme de D_2 sobre D_3, entonces $g \circ f$ es una aplicación cnforme de D_1 sobre D_3.

Definición 0.7. Si D_1 y D_2 son dominios en $\mathbb{C}$, se dice que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sobre D_2.

En el conjunto de los dominios en $\mathbb{C}$, se tiene la relación de equivalencia "ser conformemente equivalentes".

Definición 0.8. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo. Equivalentemente, D es simplemente conexo si todo camino cerrado γ en D es homólogo a cero módulo D, es decir, $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

Teorema 0.15. *Sean D_1 y D_2 dos dominios en $\mathbb{C}$ que son conformemente equivalentes. Entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.*

Definición 0.9. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el ángulo formado por z_1 y z_2 se define como:

$$\theta(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in (-\pi, \pi]$$

Observación. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces $\theta(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) = \theta(z_1, z_2)$.

Definición 0.10. Sea γ un camino con origen en un punto $a \in \mathbb{C}$. Se dice que γ es regular en a si existe una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma'(0) \neq 0$.

Definición 0.11. Sean γ_1 y γ_2 dos caminos con origen $a \in \mathbb{C}$ que son regulares en a. El ángulo que forman γ_1 y γ_2 en a, $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$, se define como sigue.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ parametrizaciones $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ_1 y γ_2 respectivamente tales que $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Entonces $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

Definición 0.12. Si γ es una curva en $\mathbb{C}$ y $f : sop(\gamma) \to \mathbb{C}$ es continua, se define la curva imagen de γ por f como la curva Γ que tiene por parametrización $f \circ \gamma$, siendo γ una parametrización de γ.

Definición 0.13. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Diremos que f preserva ángulos en a o que f es conforme en a si se verifica lo siguiente.

Si γ_1 y γ_2 son caminos con origen a, regulares en a, entonces las curvas imagen de Γ_1 y Γ_2 por f de γ_1 y γ_2 respectivamente son caminos con oriden $f(a)$, que son regulares en $f(a)$ y se tiene que:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

Teorema 0.16. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Si $f'(a) \neq 0$, entonces f es conforme en a.*

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 caminos en D, con origen en a y regulares en a. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ parametrizaciones de γ_1 y γ_2 respectivamente, ambas $\mathcal{C}^1$ a trozos con $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Consideramos las curvas imagen de γ_1 y γ_2 por f:

$$\Gamma_1 = f \circ \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$\Gamma_2 = f \circ \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$$

Γ_1 y Γ_2 son $\mathcal{C}^1$ a trozos. Además, Γ_1 y Γ_2 son caminos con origen $f(a)$, porque:

$$\Gamma_1(0) = f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(\gamma_2(0)) = \Gamma_2(0)$$

Observamos que Γ_1 y Γ_2 son regulares en a:

$$\Gamma_1'(0) = f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = f'(a)\gamma_1(0) \neq 0$$
$$\Gamma_2'(0) = f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) = f'(a)\gamma_2(0) \neq 0$$

Por tanto:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

□

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sean $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ y $a = 0$. Observamos que $f'(a) = 0$. Sea γ_1 el segmento $[0,1]$ y γ_2 el segmento $[0,i]$. Es claro que $\theta_0(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$. Si consideramos las curvas imagen de γ_1 y γ_2 por f, Γ_1 y Γ_2, podemos ver que Γ_1 es el segmento $[0,1]$ y Γ_2 el segmento $[0,-1]$, que tienen $\theta_0(\Gamma_1, \Gamma_2) = \pi \neq \frac{\pi}{2}$.

De hecho, se tiene la equivalencia. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Entonces $f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow f$ es conforme en a.

Capítulo 1

Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad

1.1. Funciones meromorfas

Definición 1.1. Sea D un abierto en $\mathbb{C}^*$. La función $f : D \to \mathbb{C}^*$ es meromorfa en D si dado $a \in D$ se verifica una de las siguientes posibilidades:

- $a \in \mathbb{C}$ y f es holomorfa en a.
- $a \in \mathbb{C}$ y f tiene un polo en a, es decir, $f(a) = \infty$..
- $a = \infty$ y f tiene una singularidad evitable en ∞, es decir, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$.
- $a = \infty$ y f tiene un polo en a, es decir, $f(\infty) = \infty$.

Entonces $f : D \to \mathbb{C}^*$ es continua.

Observación. En el caso $D \subset \mathbb{C}$, la definición es la que ya conocíamos de función meromorfa. Si además $f(D) \subset \mathbb{C}$, se tiene una función holomorfa en D.

Observación. Sea D abierto en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ continua. Supongamos que f es holomorfa en $\{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$ y que el conjunto $\{z \in D : f(z) = z\}$ no tiene puntos de acumulación en D. Entonces f es meromorfa en D.

Observación. Sea D abierto en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$, f meromorfa e inyectiva en $A = \{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$. Entonces f tiene a lo sumo un polo y tal polo es simple. Además, $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in A$, por lo que f es conforme en a para todo $a \in A$.

Teorema 1.1 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ una función meromorfa y no constante en D. Entonces f es una aplicación abierta. En particular, $f(D)$ es un dominio en $\mathbb{C}^*$.*

Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ meromorfa e inyectiva, con $D' = f(D)$. Entonces:

1. D' es un dominio en $\mathbb{C}^*$.
2. $f^{-1} : D' \to D$ es meromorfa e inyectiva.

Veamos que (2) es cierto. Como f es una aplicación abierta, se tiene que f^{-1} es continua. Sea $w \in D' \cap \mathbb{C}$ tal que $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}$, veamos que f^{-1} es holomorfa en w. Como $z \in \mathbb{C} \cap D$ y $f(z) \in \mathbb{C}$, f es holomorfa en z con $f'(z) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa, f^{-1} es holomorfa en w.

1.2. Aplicaciones conformes

Definición 1.2. Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ meromorfa e inyectiva en D. Sea $D' = f(D)$. Entonces diremos que f es una aplicación conforme de D sobre D'.

En este caso, se tiene que D' es un dominio en $\mathbb{C}^*$ y que $f^{-1} : D' \to D$ es meromorfa e inyectiva en D'. Por tanto, $f : D \to D'$ es un homeomorfismo, con f y f^{-1} meromorfas.

Observación.

1. Si f es una aplicación conforme de D sobre D', entonces f^{-1} es una aplicación conforme de D' sobre D.
2. Si D_1, D_2 y D_3 son dominios en $\mathbb{C}^*$, con f aplicación conforme de D_1 sobre D_2 y g aplicación conforme de D_2 sobre D_3, entonces $g \circ f$ es una aplicación conforme de D_1 sobre D_3.

Se puede comprobar que, sean G_1, G_2 abiertos en $\mathbb{C}^*$ y $f : G_1 \to \mathbb{C}, g : G_2 \to \mathbb{C}$ meroformas tal que $f(G_1) \subset G_2$, entonces $g \circ f : G_1 \to \mathbb{C}^*$ es meromorfa.

Definición 1.3. Sean D_1 y D_2 dominios en $\mathbb{C}^*$. Diremos que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sonre D_2.

En el conjunto de los dominios en $\mathbb{C}^*$, el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.

Definición 1.4. Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$. Diremos que D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo.

Ejemplo.

- $D = \mathbb{C}$.
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$.
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(a, R)$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$.
- $D = D(a, R)$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$.

- Un semiplano sin ∞.
- Un sector sin ∞.
- El plano menos dos semirrectas.
- $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$, no es simplemente conexo, porque $\mathbb{C}^* \setminus D = \{a, \infty\}$ no es conexo.

Lema 1.2. *Dado $a \in \mathbb{C}$, la transformación $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) = \frac{1}{z-a}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $T(a) = \infty$ y $T(\infty) = 0$, es una aplicación conforme de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$.*

Lema 1.3. *Sea H un homeomorfismo de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$. Si D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$, entonces $H(D)$ es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$.*

Demostración. Como $H : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ y D es abierto y conexo en $\mathbb{C}^*$, entonces $H(D)$ es abierto y conexo en $\mathbb{C}^*$. Luego $H(D)$ es un dominio en $\mathbb{C}^*$. Como además $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo, entonces $\mathbb{C}^* \setminus H(D) = H(\mathbb{C}^* \setminus D)$ es conexo. Por tanto, $H(D)$ es un dominio simplemente conexo. □

Teorema 1.4. *Sean D_1 y D_2 dos dominios en $\mathbb{C}^*$ que son conformemente equivalentes. Entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.*

Demostración. Sea $F : D_1 \to D_2$ aplicación conforme. Consideramos todos los posibles casos teniendo en cuenta que los papeles de D_1 y D_2 son intercambiables.

- Si $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, se cumple.
- Si $D_1 = \mathbb{C}^*$, como $\mathbb{C}^*$ es cerrado y F es un homeomorfismo, se tiene que D_2 es compacto y por tanto cerrado. Entonces D_2 es abierto y cerrado en $\mathbb{C}^*$, que es conexo. Por tanto, $D_2 = \mathbb{C}^* = D_1$, ambos simplemente conexos.
- Si $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}^*$, consideramos dos casos.
  - Supongamos que $\infty \notin D_1$ y $\infty \in D_2$. D es un dominio en $\mathbb{C}$ y D_2 es un dominio en $\mathbb{C}^*$. Sea $a \in \mathbb{C}^* \setminus D_2$, de hecho $a \in \mathbb{C} \setminus D_2$. Tomamos la aplicación conforme $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) = \frac{1}{z-a}$ si $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, $T(a) = \infty$. Tenemos el diagrama:

    $$D_1 \xrightarrow{F} D_2 \xrightarrow{T} T(D_2)$$

    $T(D_2)$ es un dominio en $\mathbb{C}^*$. Como $a \notin D_2$, entonces $T(a) = \infty \notin T(D_2)$. Así que $T(D_2)$ es un dominio en $\mathbb{C}$ conformemente equivalente a D_1. Luego D_1 es simplemente conexo si y solo si $T(D_2)$ es simplemente conexo. Por el lema anterior, esto es equivalente a que D_2 sea simplemente conexo.

- Supongamos que $\infty \in D_1, D_2$. Se sigue de un razonamiento similar usando el apartado anterior.

$\square$

1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido

Veremos que hay tres clases de equivalencia de dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}^*$: $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$ y el disco unidad $\mathbb{D} = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

$\mathbb{C}^*$ es compacto. Si D es un dominio en $\mathbb{C}^*$ que es conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$, entonces D es compacto y por tanto cerrado. Como D es abierto, entonces $D = \mathbb{C}^*$.

$\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son homeomorfos. Por ejemplo, $T : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{z}{1-|z|}$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.5. *$\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ no son conformemente equivalentes.*

Demostración. Supongamos que existe una aplicación conforme F de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{D}$. Entonces $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, F es constante. Esto contradice que F sea una aplicación conforme. $\square$

Proposición 1.6. *Sea f entera e inyectiva, entonces f es de la forma*

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$$

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, el desarrollo de Taylor de f en 0. Entonces ∞ es una singularidad aislada de f y el desarrollo anterior coincide con el desarrollo de Laurent de f en ∞.

- Si ∞ es una singularidad evitable de f, entonces $a_n = 0$ si $n \geq 1$, así que f es constante. Esto no es posible.
- Si ∞ es un polo de orden N de f, entonces $a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > N$. Luego f es un polinomio de grado N. f' es un polinomio de grado $N-1$, con $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Así que f' es constante, por tanto $N - 1 = 0 \Rightarrow N = 1$.
- Si ∞ es una singularidad esencial de f, entonces $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ es denso en $\mathbb{C}$. Por el teorema de la aplicación abierta, $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$ es abierto en $\mathbb{C}$. Estos conjuntos son disjuntos por ser f inyectiva, y esto no es posible.

$\square$

Si D es un dominio en $\mathbb{C}$ que es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, entonces $D = \mathbb{C}$. Veamos que esto es verdad. Sea $f : \mathbb{C} \to D$ aplicación conforme. f es entera e inyectiva, así que $f(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Luego $D = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Las aplicaciones conformes de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ son de la forma:

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$$

Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ que es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$.

- Si $\infty \notin D$, entonces D es un dominio en $\mathbb{C}$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ y, por tanto, $D = \mathbb{C}$.
- Si $\infty \in D$, consideramos $F : \mathbb{C} \to D$ aplicación conforme. Como sabemos que $D \neq \mathbb{C}^*$, existe $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus D$, de hecho $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Sea

  $$T : D \to T(D), \quad T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$$

  Tenemos el diagrama:

  $$\mathbb{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{T} T(D) = D'$$

  D' es un dominio en $\mathbb{C}$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, así que $D' = \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\}$. Por tanto, $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$.

Hemos probado que si D es un dominio en $\mathbb{C}^*$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, entonces $D = \mathbb{C}$ o $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Es decir, $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Los dominios en $\mathbb{C}^*$ que son conformemente equivalentes a $\mathbb{C}$ son $\mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$

Sea $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ aplicación conforme. Sea $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $T(a) = \infty$. Consideramos dos casos:

1. Si $a = \infty$, $T(\infty) = \infty$. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación conforme, así que $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.
2. Si $a \in \mathbb{C}$, $T(a) = \infty$. T es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, así que a es un polo simple de T. Consideramos el desarrollo de Laurent de T en a.

   $$T(z) = \frac{A_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\},\ A_{-1} \neq 0$$

   ∞ es una singularidad aislada de T. De hecho, es una singularidad evitable.

   Sea $F(z) = T(z) - \frac{A_{-1}}{z-a}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. a es singularidad evitable de F y $\lim_{z \to \infty} F(z) = T(\infty) \in \mathbb{C}$, así que ∞ es una singularidad evitable también. Evitando la singularidad de F en a, tenemos que F es entera y acotada. Por tanto F es constante. Así que $F(z) = a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$T(z) = F(z) + \frac{A_{-1}}{z-a} = a_0 + \frac{A_{-1}}{z-a} = \frac{a_0 z + (A_{-1} - a_0 a)}{z-a}$$

En cualquiera de los dos casos, T es de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

No todas las aplicaciones de esta forma son aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$.

Ejemplo (Contraejemplo)**.** No es una aplicación conforme si $\alpha = \beta = 0$ o (α, β) y (γ, δ) son proporcionales. Por ejemplo:

$$T(z) = \frac{3z+2}{6z+4} = \frac{1}{2}$$

Para que las aplicaciones de esa forma sean aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$, se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

En el caso (1), $T(z) = Az + B = \frac{Az+B}{0z+1}$, con $A, B \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, luego:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = A \neq 0$$

En el caso (2),

$$\begin{vmatrix} a_0 & A_{-1} - a_0 a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a_0 a - A_{-1} + a_0 a = -A_{-1} \neq 0$$

Teorema 1.7. *Las aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ son de la forma:*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Demostración. Sea $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ una aplicación de esa forma.

- Si $\gamma = 0$, entonces:

  $$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}, \quad \alpha, \delta \neq 0$$

  T es una aplicación conforme de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, con $\lim_{z \to \infty} T(z) = \infty$. Definiendo $T(\infty) = \infty$, tenemos que $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es una aplicación conforme.

- Si $\gamma \neq 0$, entonces $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$,

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$$
$$T\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty$$
$$T(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$$

  T es meromorfa en $\mathbb{C}^*$ y T es inyectiva.

  Veamos que T es sobreyectiva. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\alpha}{\gamma}\}$ y sea $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}$. Entonces:

$$T(z) = w \Leftrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w \Leftarrow \alpha z + \beta = \gamma z w + \delta w \Leftrightarrow (\alpha - \gamma w) z = \delta w - \beta \Leftarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

  Por tanto, T es una aplicación conforme de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$.

Además, hemos probado que T^{-1} es de la forma:

$$T^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}, \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Si $\gamma = 0$, también es válida esta expresión. □

1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad

Teorema 1.8 (Lema de Schwarz)**.** *Sea φ una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

1. $|\varphi(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.
2. $|\varphi'(0)| \leq 1$.

Además, se da la igualdad en (1) para algún $z \in \mathbb{D}$ con $z \neq 0$ o bien se da la igualdad en (2) si y solo si φ es una rotación de $\mathbb{D}$, es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $\varphi(z) = \lambda z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Observación. Si φ es una rotación, entonces se da la igualdad en (1) para todo $z \in \mathbb{D}$ y se da la igualdad en (2).

Observación. El teorema se puede enunciar de forma equivalente con la condición $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ en lugar de $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Es decir, si φ es holomorfa en $\mathbb{D}$ con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, entonces $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
Veamos que esto es cierto. Supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{D}$ con $|\varphi(z_0)| = 1$. Como $|\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por el principio del máximo φ es constante, luego $\varphi \equiv \varphi(0) = 0$. Esto contradice que $|\varphi(z_0)| = 1$.

Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Sea $a \in \mathbb{D}$ y $b = f(a) \in \mathbb{D}$. Definimos:

$$T_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \qquad T_a \in \mathcal{M},\ T_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D},\ T_a(0) = a$$
$$S_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, \qquad S_b \in \mathcal{M},\ S_b(\mathbb{D}) = \mathbb{D},\ S_b(b) = 0$$

Sea $\varphi = S_b \circ f \circ T_a$. φ es holomorfa en $\mathbb{D}$, con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $\varphi(0) = 0$. Por el lema de Schwarz,

1. $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
2. $|\varphi(0)| \leq 1$.

Además, se da la igualdad en (1) para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, o bien se da la igualdad en (2) si y solo si φ es una rotación.

Desarrollamos las dos expresiones:

1. Sea $z \in \mathbb{D}$. Consideramos $T_a^{-1}(z) \in \mathbb{D}$.

$$|\varphi(T_a^{-1}(z))| \leq |T_a^{-1}(z)| \Leftrightarrow |S_b(f(z))| \leq |S_a(z)| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(z)-b}{1-\bar{z}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

   Además, si se da la igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq a$, entonces φ es una rotación. Entonces, $f = S_b^{-1} \circ \varphi \circ T_a^{-1} \in \mathcal{M}$, con $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2. Por la regla de la cadena, $\varphi'(0) = T_a'(0) f'(a) S_b'(b)$.

$$T_a'(z) = \frac{1+\bar{a}z-(z+a)\bar{a}}{(1+\bar{a}z)^2}, \qquad T_a'(0) = 1-|a|^2$$
$$S_b'(z) = \frac{1-\bar{b}z+(z-b)\bar{b}}{(1-\bar{b}z)^2}, \qquad S_b'(b) = \frac{1-|b|^2}{(1-|b|^2)} = \frac{1}{1-|b|^2}$$

   Así que:

$$\varphi'(0) = (1-|a|^2) f'(a) \frac{1}{1-|b|^2}$$

   Por tanto:

$$|\varphi'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow (1-|a|^2) f'(a) \frac{1}{1-|b|^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

   Además, si se da la igualdad, entonces φ es una rotación y por tanto $f \in \mathcal{M}$, con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Por tanto, hemos probado lo siguiente:

1. Para todo $z \in \mathbb{D}$,
$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \right|$$
Si se da la igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$ con $z \neq a$ entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2. $$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$
Si se da la igualdad entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

1.5. El teorema de Schwarz-Pick

Teorema 1.9 (Teorema de Schwarz-Pick)**.** *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,
$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|$$

2. Para todo $z \in \mathbb{D}$,
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Además, se da la igualdad en (1) para algún par de puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ con $z_1 \neq z_2$ o bien se da la igualdad en (2) para algún $z \in \mathbb{D}$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, en cuyo caso se da la igualdad en (1) para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ y se da la igualdad en (2) para todo $z \in \mathbb{D}$.

Proposición 1.10. *Sea $T \in \mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Entonces:*

1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,
$$\left| \frac{T(z_2) - T(z_1)}{1 - \overline{T(z_1)} T(z_2)} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|$$

2. Para todo $z \in \mathbb{D}$,
$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Definición 1.5. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, definimos:
$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|$$

Observamos que si $1 - \overline{z_1} z_2 = 0$ entonces $\overline{z_1} z_2 = 1 \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$. Como esto no ocurre, ρ está bien definida.

La primera parte del teorema de Schwarz-Pick se puede reescribir usando ρ.

Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, se da la igualdad para algún par de puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, en cuyo caso se da la igualdad para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Vamos a ver que ρ es una distancia en $\mathbb{D}$.

$$\begin{aligned} \rho :& D \times D \to \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) \mapsto \rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| \end{aligned}$$

- $\rho(z_1, z_2) \leq 0$.
- $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$.
- $\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.
- $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$.

Lema 1.11. *Para todo $a, z \in \mathbb{D}$,*

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}$$

Observamos que si $a, z \in \mathbb{D}$, tenemos:

$$\rho(a, z) = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = |S_a(z)| < 1, \quad S_a \in \mathcal{M}, S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$$

Dados $a \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, denotamos:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

Entonces, dado $z \in \mathbb{D}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & z \in \Delta(a, r) \Leftrightarrow \rho(z, a) < r \Leftrightarrow |S_a(z)| < r \Leftrightarrow S_a(z) \in D(0, r) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow z \in S_a^{-1}(D(0, r)) \Leftrightarrow z \in T_a(D(0, r)) \end{aligned}$$

Entonces $\Delta(a, r) = T_a(D(0, r))$.

$T_a(\partial D(0, r))$ es una circunferencia C contenida en $\mathbb{D}$. Sean c y R el centro y el radio de C, con $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Entonces $T_a(D(0, r)) = D(c, R)$. Por tanto:

$$\Delta(a, r) = T_a(D(0, r)) = D(c, R)$$

Así que $\Delta(a, r)$ es un disco euclídeo. Como $T_a(0) = a$ tenemos que $a \in \Delta(a, r)$, pero a no tiene por qué ser el centro del disco.

Vamos a calcular c y R. Si $a = 0$, $T_a(z) = z$ luego $T_a(D(0,r)) = D(0,r)$. Supongamos que $a \neq 0$. Sea L la recta que pasa por 0 y a. Calculamos $S_a(L)$ hallando la imagen de tres puntos.

$$\begin{aligned} S_a(0) &= -a \\ S_a(a) &= 0 \\ S_a\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) &= \infty \end{aligned}$$

$L' = S_a(L)$ es la recta que pasa por 0 y por $-a$, luego L' coincide con L. Como L' es perpendicular a $\partial D(0,r)$ en los dos puntos de corte y T_a preserva ángulos en esos dos puntos, entonces L es perpendicular a C. Por tanto c está en L.

El diámetro $\left[-r\frac{a}{|a|}, r\frac{a}{|a|}\right]$ se aplica mediante T_a en un diámetro de C, que es:

$$\left[T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right), T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left(T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) + T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right) \\ R &= \frac{1}{2}\left|T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) - T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)\right| \end{aligned}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) &= \frac{-r\frac{a}{|a|} + a}{1 - \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{-ra + a|a|}{|a| - r|a|^2} = \frac{a(|a| - r)}{|a|(1 - r|a|)} \\ T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) &= \frac{r\frac{a}{|a|} + a}{1 + \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{ra + a|a|}{|a| + r|a|^2} = \frac{a(|a| + r)}{|a|(1 + r|a|)} \end{aligned}$$

Se llega a que:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1 - r^2}{1 - r^2|a|^2}a \\ R &= \frac{r(1 - |a|^2)}{1 - r^2|a|^2} \end{aligned}$$

Observamos que los puntos de mayor y menor módulo de C son $T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)$ y $T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)$ Veamos que, de hecho,

$$\left|T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)\right| = \frac{||a| - r|}{1 - r|a|} \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} = \left|T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right|$$

- Si $|a| \geq r$,

$$\frac{|a|-r}{1-r|a|} \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} \Leftrightarrow |a| + r|a|^2 - r - r^2|a| \leq r + |a| - r^2|a| - r|a|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2r|a|^2 \leq 2r \Leftrightarrow |a| \leq 1$$

- Si $|a| < r$ se razona de forma análoga.

Entonces, para todo $z \in \partial D(0,r)$ se tiene que:

$$\frac{||a|-r|}{1-r|a|} \leq T_a(z) \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} \Leftrightarrow \frac{||a|-r|}{1-r|a|} \leq \left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{||a|-|z||}{1-|z||a|} \leq \left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|z||a|} \leq |z|+|a|$$

Hemos probado esto para $a, z \in \mathbb{D}$, $a, z \neq 0$. Pero si $a = 0$ o $z = 0$ la desigualdad es trivial. Por tanto, esta cadena de desigualdades es cierta para todo $a, z \in \mathbb{D}$.

Cambiando a por $-a$, tenemos:

$$\frac{||a|-|z||}{1-|z||a|} \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|z||a|} \leq |z|+|a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Las desigualdades primera y segunda corresponden al último lema.

Por otro lado,
$$\rho(a,z) \leq |z| + |a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$
Como $\rho(z_1, 0) = |z_1|$ y $\rho(0, z_2) = |z_2|$, entonces:

$$\rho(a,z) \leq \rho(a,0) + \rho(0,z), \quad a, z \in \mathbb{D}$$

Esto es un caso particular de la desigualdad triangular.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$. Tenemos, usando el teorema de Schwarz-Pick,

$$\rho(z_1,z_3) = \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_3)) \leq \rho(S_{z_2}(z_1,0)) + \rho(0, S_{z_2}(z_3)) =$$
$$= \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_2)) + \rho(S_{z_2}(z_2), S_{z_2}(z_3)) = \rho(z_1,z_2) + \rho(z_2,z_3)$$

Así que ρ verifica la desigualdad triangular. Por tanto, ρ es una distancia en $\mathbb{D}$ que se denomina distancia pseudohiperbólica en $\mathbb{D}$.

$$\rho(z_1,z_2) = \left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}\right| = |S_{z_1}(z_2)| < 1$$

Si $a \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, el disco pseudohiperbólico de centro a y radio r es:

$$\Delta(a,r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z,a) < r\}$$

No consideramos $r \geq 1$ porque $\Delta(a, r) = \mathbb{D}$. Sabemos que $\Delta(a, r)$ es un disco euclídeo, en concreto un disco abierto de centro $\frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a$ y radio $\frac{r(1-|a|^2)}{1-r^2|a|^2}$. Si $a = 0$, $\Delta(a, r) = D(0, r)$.

Esta distancia es equivalente a la distancia euclídea en $\mathbb{D}$.

Si $T \in \mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, se tiene que:

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, se tiene que:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

1.6. Subordinación

Definición 1.6. Sean f, F holomorfas en $\mathbb{D}$. Diremos que f está subordinada a F, $f \prec F$, si existe w holomorfa en $\mathbb{D}$, con $w(0) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ tal que $f = F \circ w$.

Observación. w está en las condiciones del lema de Schwarz.

Veamos algunas propiedades:

- $f(0) = F(w(0)) = F(0)$.
- $f(\mathbb{D}) = F(w(\mathbb{D})) \subset F(\mathbb{D})$.
- Si $0 < r < 1$, veamos que

  $$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$

  Si $z \in D(0, r)$, $f(z) = F(w(z))$. Por el lema de Schwarz,

  $$w(z)| \leq |z| < r$$

- Si $0 < r < 1$, veamos que

  $$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

  Si $|z| = r$, como por el lema de Schwarz $|w(z)| \leq |z| = r$, entonces:

  $$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)|$$

- Si $|z| = r$, como por el lema de Schwarz $|w'(0)| \leq 1$ y $f'(0) = F'(w(0))w'(0) = F'(0)w'(0)$, entonces:

  $$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)|$$

- No se verifica para todo $r \in (0,1)$ que

$$\max_{|z|=r} |f'(z)| \leq \max_{|z|=r} |F'(z)|$$

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sean $f(z) = z^2$ y $F(z) = z$. Podemos tomar $w(z) = z^2$, que verifica $w(0) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, luego $f \prec F$. Si $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} &\max_{|z|=r} |f'(z)| = \max_{|z|=r} 2|z| = 2r \\ &\max_{|z|=r} |F'(z)| = 1 \end{aligned}$$

Observamos que no se cumple que $2r \leq 1$ para todo $r \in (0,1)$.

Por la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick,

$$\frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Entonces, si $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} &|f'(z)| = |F'(w(z))||w'(z)| \leq |F'(w(z))| \frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-|z|^2)|f'(z)| \leq (1-|w(z)|^2)|F'(w(z))| \end{aligned}$$

Entonces, si $0 < r \leq 1$, tenemos que:

$$\sup_{|z|<r} (1-|z|^2)|f'(z)| \leq \sup_{|z|<r} (1-|z|^2)|F'(z)|$$

Veamos que esto es cierto. Si $|z| < r$, como $|w(z)| \leq |z| < r$,

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leq (1-|w(z)|^2)|F'(w(z))| \leq \sup_{|z|<r} (1-|z|^2)|F'(z)|$$

Proposición 1.12. *Sean f, F holomorfas en $\mathbb{D}$, con $f \prec F$. Entonces:*

1. *$f(0) = F(0)$.*
2. *$f(\mathbb{D}) \subset F(\mathbb{D})$.*
3. *Para todo $r \in (0,1)$,*

$$f(D(0,r)) \subset F(D(0,r))$$

4. *Para todo $r \in (0,1)$,*

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

5. $|f'(0)| \leq |F'(0)|$.

6. Para todo $r \in (0,1]$,

$$\sup_{|z|<r} (1-|z|^2)|f'(z)| \leq \sup_{|z|<r} (1-|z|^2)|F'(z)|$$

La última propiedad tiene mucha relación con el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que satisfacen:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty$$

Observación. Veamos qué se puede decir sobre los coeficientes de Taylor. Sean f y F holomorfas en $\mathbb{D}$ con $f \prec F$. Consideramos los desarrollos de Taylor de f y F para $z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

Usando (1), observamos que:

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ A_0 = F(0) \end{cases} \Rightarrow a_0 = A_0$$

Con (2), vemos que:

$$\begin{cases} a_1 = f'(0) \\ A_1 = F'(0) \end{cases} \Rightarrow |a_1| \leq |A_1|$$

No podemos decir nada más. Por ejemplo, dado $N \geq 2$, podemos considerar $f(z) = z^N$ y $F(z) = z$. Observamos que $f \prec F$ con $w(z) = z^N$. Observamos que $a_N = 1$ y $A_N = 0$, luego no es cierto que $|a_n| \leq |A_n|$.

Veamos ahora un ejemplo importante de subordinación. Sea F una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre D, siendo D un dominio en $\mathbb{C}$. Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset D$ y $f(0) = F(0)$, entonces $f \prec F$.

Sea $w = F^{-1} \circ f$. w es holomorfa en $\mathbb{D}$, $w(0) = F^{-1}(f(0)) = F^{-1}(F(0)) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Además, $f = F \circ w$.

Por ejemplo:

$$P(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Esta es una transformación de Möbius que aplica $\partial\mathbb{D}$ en el eje imaginario. $P(\mathbb{D})$ es el semiplano de la derecha $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ y $P(0) = 1$. Entonces, si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, $f(\mathbb{D}) \subset \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ y $f(0) = P(0)$, entonces $f \prec P$. Es decir, si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, $Re(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 1$, entonces $f \prec F$.

Sea $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : Re(f(z)) > 0 \; \forall z \in \mathbb{D}, f(0) = 1\}$. Entonces:

- $P \in \mathcal{P}$.
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow f \prec P$. De hecho, $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f \prec P\}$.
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{P}$.

Teorema 1.13. *Si $f \in \mathcal{P}$, entonces:*

1. *Para todo $z \in \mathbb{D}$,*
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$
2. $|f'(0)| \leq 2$

Veamos cuáles son las aplicaciones conformes de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$.

Sea f una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$. Sea $a = f(0) \in \mathbb{D}$. Aplicando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick a f en 0, tenemos:

$$\frac{|f'(0)|}{1-|a|^2} \leq 1$$

y si se diera igualdad, f sería una transformación de Möbius.

Sea $g = f^{-1}$, que es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Aplicando lo mismo en el punto a tenemos:

$$|g'(a)| \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

y si se diera igualdad, g sería una transformación de Möbius.

Tenemos que:

$$|f'(0)| \leq 1-|a|^2 \leq \frac{1}{|g'(a)|} = |f'(0)|$$

Por tanto se da igualdad, así que f es una transformación de Möbius con $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. En conclusión, las aplicaciones conformes de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ son:

$$\begin{aligned}\{\lambda T_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} &= \{\lambda S_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \\ &= \{\lambda \varphi_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\}\end{aligned}$$

1.7. La métrica de Poincaré

Si γ es un camino en $\mathbb{C}$ y $f : sop(\gamma) \to \mathbb{C}$ es continua, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

siendo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ.

Veamos algunas propiedades:

1. Si f es real, entonces $\int_\gamma f(z)|dz| \in \mathbb{R}$. Si además f es no negativa, entonces $\int_\gamma f(z)|dz| \geq 0$.
2. Si $f(z) = 1$,
$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = long(\gamma)$$
3. $$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz| \leq \max_{z\in sop(\gamma)} |f(z)|long(\gamma)$$
4. Si $f, g : sop(\gamma) \to \mathbb{R}$ continuas y $f \leq g$, entonces:
$$\int_\gamma f(z)|dz| \leq \int_\gamma g(z)|dz|$$
5. $$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)|dz| = \int_{\gamma_1} f(z)|dz| + \int_{\gamma_2} f(z)|dz|$$
6. $$\int_{-\gamma} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|$$
7. $$\int_\gamma (af(z) + bg(z))|dz| = a\int_\gamma f(z)|dz| + b\int_\gamma g(z)|dz|, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Sea γ un camino en $\mathbb{D}$ con origen z_1 y extremo z_2. Podemos considerar la integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}|dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Como la función $z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1}{1-|z|^2}$ es real y positiva, entonces la integral es no negativa. Definimos:

$$\delta(z_1, z_2) = \text{ínf} \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2 \right\}$$

Entonces:

- $\delta(z_1, z_2) \geq 0$.
- $\delta(z_1, z_2) = \delta(z_2, z_1)$.
- $\delta(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$. Consideramos:

$$A_{12} = \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2 \right\}$$

Se definen de manera análoga A_{13} y A_{23}. Observamos que $A_{12} + A_{23} \subset A_{13}$. Por tanto:

$$\text{ínf}(A_{12} + A_{13}) = \text{ínf}\, A_{12} + \text{ínf}\, A_{23} \geq \text{ínf}\, A_{13} \Leftrightarrow \delta(z_1, z_3) \leq \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$$

δ es una distancia en $\mathbb{D}$, denominada distancia hiperbólica en $\mathbb{D}$.

Proposición 1.14.

1. *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, entonces:*

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \delta(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

2. *Si $T \in \mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, entonces:*

$$\delta(T(z_1), T(z_2)) = \delta(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Demostración.

1. Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

$$\delta(z_1, z_2) = \text{ínf} \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino de } z_1 \text{ a } z_2 \right\}$$
$$\delta(f(z_1), f(z_2)) = \text{ínf} \left\{ \int_\Gamma \frac{|dw|}{1-|w|^2} : \Gamma \text{ camino de } f(z_1) \text{ a } f(z_2) \right\}$$

Sea γ un camino en $\mathbb{D}$ con origen z_1 y extremo z_2, con parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Entonces $\Gamma = f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de un camino Γ en $\mathbb{D}$ con origen $f(z_1)$ y extremo $f(z_2)$. Tenemos:

$$\int_\Gamma \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_a^b \frac{|\Gamma'(t)|}{1-|\Gamma(t)|^2} dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2} dt$$

Usando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick:

$$\int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2}dt \leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Luego tenemos que:

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \quad \forall \gamma$$

Por tanto, $\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \gamma(z_1, z_2)$.

2. Se tiene aplicando (1) a T y T^{-1}.

□

Proposición 1.15. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$*, entonces:*

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{1}{2} Log \frac{1+\rho(z_1, z_2)}{1-\rho(z_1, z_2)}$$

Demostración. Si $z_1 = z_2$ es trivial. Supongamos $z_1 \neq z_2$. Consideramos:

$$S_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z}$$

Se tiene que $S_{z_1} \in \mathcal{M}$, $S_{z_1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $S_{z_1}(z_1) = 0$. Sabemos que $S_{z_1}(z_2) \neq 0$. Además,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2))$$

Tomamos $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tal que $\lambda S_{z_1}(z_2) \in (0, 1)$. Sea $r = \lambda S_{z_1}(z_2)$. Entonces:

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2)) = \delta(0, r)$$

Además, $r = |\lambda S_{z_1}(z_2)| = |S_{z_1}(z_2)| = \rho(z_1, z_2)$. Calculamos $\delta(0, r)$.

$$\delta(0, r) = \text{ínf} \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } 0 \text{ y extremo } r \right\}$$

Si $\gamma = [0, r]$,

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \left[-Log(1-t) + Log(1+t) \right]_0^r = \frac{1}{2} \left[Log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^r = \frac{1}{2} Log \frac{1+r}{1-r}$$

Luego $\delta(0, r) \leq \frac{1}{2} Log \frac{1+r}{1-r}$.

Sea γ un camino en $\mathbb{D}$ con origen 0 y extremo r. Veamos que

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} \geq \frac{1}{2} Log \frac{1+r}{1-r}$$

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ. Sean $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$, de forma que $\gamma = u + iv$. $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ a trozos.

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1+|z|^2} = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$$

Tenemos que:

$$\begin{cases} |\gamma(t)|^2 \geq u(t)^2 \Rightarrow 0 < 1 - |\gamma(t)|^2 \leq 1 - u(t)^2 \Rightarrow \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{1}{1-u(t)^2} \\ |\gamma'(t)| \geq |u'(t)| \geq 0 \end{cases}$$

Así que:

$$\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{|u'(t)|}{1-u(t)^2} \geq \frac{u'(t)}{1-u(t)^2}$$

Luego:

$$\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt \geq \int_a^b \frac{u'(t)}{1-u(t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{u'(t)}{1-u(t)} + \frac{u'(t)}{1+u(t)} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \left[-Log(1-u(t)) + Log(1+u(t)) \right]_a^b = \frac{1}{2} \left[Log \frac{1+u(t)}{1-u(t)} \right]_a^b = \frac{1}{2} Log \frac{1+r}{1-r}$$

porque $u(a) = 0$ y $u(b) = r$. Por tanto,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, r) = \frac{1}{2} Log \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2} log \frac{1+\rho(z_1,z_2)}{1-\rho(z_1,z_2)}$$

□

Observación. Sea $h(x) = \frac{1}{2} Log \frac{1+x}{1-x}$, $x \in [0,1)$. Observamos que si $x < 1$, entonces $1 + x \geq 1 - x > 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 1$, así que $h : [0,1) \to [0,\infty)$. h es creciente, con $h(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \infty$. Podemos escribir $\delta = h \circ \rho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \xrightarrow{\rho} [0,1) \xrightarrow{h} [0,\infty)$. Fijado $a \in \mathbb{D}$, si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ está en $\mathbb{D}$ con $|z_n| \to 1$, entonces:

$$\rho(a, z_n) = |S_a(z_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Por tanto, $\delta(a, z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

$\mathbb{D}$ con esta distancia δ es un modelo de la geometría hiperbólica. Si γ es un camino en $\mathbb{D}$, la longitud de γ es

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

La geodésica que une $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ es el camino γ para el que:

$$\delta(z_1, z_2) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

Las geodésicas con respecto a δ son los diámetros de $\partial\mathbb{D}$ y los arcos de circunferencia ortogonales a $\partial\mathbb{D}$.

Capítulo 2

Familias normales

2.1. Familias normales

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia de Weierstrass)**.** *Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D y $f : D \to \mathbb{C}$. Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, entonces f es holomorfa en D y $f'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f'$ uniformemente en cada subconjunto compacto. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(k)}$ uniformemente en cada compacto.*

Definición 2.1. Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Diremos que $\mathcal{F}$ es finitamente normal si para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

Observación. El límite f de tal subsucesión es una función holomorfa en D, pero no tiene por qué pertenecer a $\mathcal{F}$.

Definición 2.2. Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Diremos que $\mathcal{F}$ es compacta si para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a una función que pertenece a $\mathcal{F}$.

En el conjunto $Hol(D)$ de las funciones holomorfas en D, con D abierto en $\mathbb{C}$, se puede definir una distancia d tal que $(Hol(D), d)$ es un espacio métrico completo, y en el que:

$$f_n \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow f_n \to f \text{ uniformemente en cada subconjunto compacto de } D$$

Si $\mathcal{F} \subset Hol(D)$, $\mathcal{F}$ es finitamente normal si y solo si $\mathcal{F}$ es relativamente compacto. Los compactos coinciden con la definición de familia compacta dada.

2.2. El teorema de Montel

Teorema 2.2 (Teorema de Montel)**.** *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es finitamente normal.*
2. *$\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de D. Es decir, para cada $K \subset D$, K compacto, existe $M_k > 0$ tal que $|f(z)| \leq M_k$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in K$.*

Lema 2.3. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de D.*
2. *Para cada $a \in D$ existe $r_a > 0$ con $D(a, r_a) \subset D$ y f está uniformemente acotada en $D(a, r_a)$.*

Lema 2.4. *Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sean $f_n : D \to \mathbb{C}$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $f : D \to \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.*
2. *Para cada $a \in D$ existe $r_a > 0$ con $D(a, r_a) \subset D$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en $D(a, r_a)$.*