

Análisis complejo

Matemáticas en LaTeX

8 de mayo de 2023

# Índice general

<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
<b>1. Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad</b>	<b>8</b>
1.1. Funciones meromorfas . . . . .	8
1.2. Aplicaciones conformes . . . . .	9
1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido .	10
1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad . . . . .	13
1.5. El teorema de Schwarz-Pick . . . . .	14
1.6. Subordinación . . . . .	17
1.7. La métrica de Poincaré . . . . .	20
<b>2. Familias normales</b>	<b>24</b>
2.1. Familias normales . . . . .	24
2.2. El teorema de Montel . . . . .	24
2.3. El teorema de Stieltjes-Vitali . . . . .	29
2.4. Teoremas de Hurwitz . . . . .	31
<b>3. El teorema de Riemann de la aplicación conforme</b>	<b>33</b>
3.1. Preliminares . . . . .	33
3.2. Dominios simplemente conexos . . . . .	33
3.3. El teorema de Riemann de la aplicación conforme . . . . .	36
3.4. Clasificación de los dominios simplemente conexos . . . . .	39
3.5. El teorema de extensión de Carathéodory . . . . .	40
<b>4. Funciones armónicas</b>	<b>43</b>
4.1. Funciones armónicas y funciones holomorfas . . . . .	43
4.2. El problema de Dirichlet para el disco unidad . . . . .	48
4.3. La integral de Poisson . . . . .	50
4.4. Desigualdades de Harnack . . . . .	60
<b>5. El teorema de factorización de Weierstrass</b>	<b>63</b>
5.1. Funciones holomorfas sin ceros o con finitos ceros . . . . .	63
5.2. Productos infinitos . . . . .	64
5.3. Funciones holomorfas definidas por productos infinitos . . . . .	68
5.4. El teorema de factorización de Weierstrass . . . . .	71
5.5. Exponente de convergencia y género de una sucesión . . . . .	75
5.6. Factorización canónica de una función entera . . . . .	76
5.7. Factorización de funciones holomorfas en un dominio . . . . .	77
<b>6. Funciones enteras. Crecimiento y distribución de los ceros</b>	<b>79</b>
6.1. La fórmula de Jensen . . . . .	79
6.2. La fórmula de Poisson-Jensen . . . . .	83

6.3. Introducción a los espacios de Hardy . . . . .	83
---	----

# Preliminares

**Definición 0.1.** Si  $a \in \mathbb{C}$  y  $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ , se define la corona de centro  $a$  y radios  $R_1$  y  $R_2$  como:

$$A(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

**Teorema 0.1.** Si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$  y  $f$  es holomorfa en  $A(a, R_1, R_2)$ , entonces existe una única sucesión  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$  en  $\mathbb{C}$  tal que:

- $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  converge para todo  $z \in A(a, R_1, R_2)$ .
- $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  para todo  $z \in A(a, R_1, R_2)$ .

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

siendo  $\gamma$  cualquiera camino que esté en  $A(a, R_1, R_2)$  con  $n(\gamma, a) = 1$

Además, la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  converge absoluta y uniformemente a cada subconjunto compacto de  $A(a, R_1, R_2)$ .

A esta serie se le llama desarrollo de Laurent de  $f$  en  $A(a, R_1, R_2)$ .

**Definición 0.2.**  $f$  tiene una singularidad aislada en  $a \in \mathbb{C}$  si existe  $R > 0$  tal que  $f$  está definida y es holomorfa en  $D(a, R) \setminus \{a\} = A(a, 0, R)$ .

Podemos considerar el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $D(a, R) \setminus \{a\}$ . Existe una única sucesión en  $\mathbb{C}$ ,  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ , tal que:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n, \quad z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

Como la sucesión  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$  no depende de  $R$ , a este desarrollo se le puede llamar desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$  o en un entorno perforado de  $a$ .

**Proposición 0.2.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $a \in \mathbb{C}$  y sea  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$  el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$ . Entonces:

1.  $a$  es una singularidad evitable de  $f \Leftrightarrow a_n = 0$  si  $n < 0 \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\} = \emptyset$ .
2.  $a$  es un polo de orden  $N$  de  $f \Leftrightarrow a_{-N} \neq 0$  y  $a_n = 0$  si  $n < -N$ . Luego  $a$  es un polo de  $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$  es finito y no vacío.
3.  $a$  es una singularidad esencial de  $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$  es infinito.

**Definición 0.3.**  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$  si existe  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ .

1. Es una singularidad evitable de  $f$  si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  existe en  $\mathbb{C}$ .
2. Es un polo de  $f$  si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

3. Es una singularidad esencial en otro caso.

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  para un cierto  $R > 0$ . Entonces la función  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  es holomorfa en  $D\left(0, \frac{1}{R}\right) \setminus \{0\}$ , por lo que tiene una singularidad aislada en 0.

Entonces:

1.  $f$  tiene una singularidad evitable en  $\infty \Leftrightarrow g$  tiene una singularidad evitable en 0.
2.  $f$  tiene un polo en  $\infty \Leftrightarrow g$  tiene un polo en 0.
3.  $f$  tiene una singularidad esencial en  $\infty \Leftrightarrow g$  tiene una singularidad esencial en 0.

**Proposición 0.3.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $\infty$ . Entonces:

1.  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f \Leftrightarrow f$  está acotada en un entorno perforado de  $\infty$ . Es decir, si existe  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa y está acotada en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ .
2.  $\infty$  es un polo de  $f \Leftrightarrow$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^N}$  existe en  $\mathbb{C}$  y es distinto de 0. En este caso,  $N$  es único y se denomina el orden de  $\infty$  como polo de  $f$ .
3.  $\infty$  es una singularidad esencial de  $f \Leftrightarrow f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$  es denso en  $\mathbb{C}$  para todo  $R > 0$  suficientemente grande.

*Observación.* En (2), el orden de  $\infty$  como polo de  $f$  coincide con el orden de 0 como polo de  $f\left(\frac{1}{z}\right)$ .

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} = A(0, R, \infty)$ . Podemos considerar el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $A(0, R, \infty)$ : existe una única sucesión  $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$  en  $\mathbb{C}$  tal que:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R$$

Como no depende de  $R$ , se le puede llamar desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ .

**Proposición 0.4.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $\infty$  y sea  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ . Entonces:

1.  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f \Leftrightarrow a_n = 0$  si  $n > 0$ .
2.  $\infty$  es un polo de  $f$  de orden  $N \Leftrightarrow a_N \neq 0$  y  $a_n = 0$  si  $n > N$ .
3.  $\infty$  es una singularidad esencial de  $f \Leftrightarrow \{n > 0 : a_n \neq 0\}$  es infinito.

**Definición 0.4.** Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $a \in \mathbb{C}$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$  es el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$ , se define  $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$ .

**Proposición 0.5.** Sea  $a \in \mathbb{C}$  y  $f$  una función con una singularidad aislada en  $a$ . Sea  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $D(a, R) \setminus \{a\}$ . Entonces, para todo  $r \in (0, R)$ , se tiene que:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$$

**Proposición 0.6.** Sea  $f$  una función con una singularidad aislada en  $\infty$ . Sea  $R > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ . Se define:

$$\text{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz, \quad \text{siendo } r > R$$

**Proposición 0.7.** Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\infty$  y  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  es el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ , entonces  $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$ .

**Teorema 0.8** (Teorema de los residuos). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$  salvo por singularidades aisladas, es decir, existe  $A \subset D$ ,  $A$  sin puntos de acumulación en  $D$ , tal que  $f$  es holomorfa en  $D \setminus A$ . Sea  $\gamma$  un camino cerrado en  $D \setminus A$ , con  $n(\gamma, z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus D$ . Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) n(\gamma, a)$$

**Teorema 0.9** (Teorema de la función inversa). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$ , con  $a \in D$  tal que  $f'(a) \neq 0$ . Entonces existen  $U, V$  abiertos en  $\mathbb{C}$  con  $a \in U \subset D$ ,  $f(a) \in V$ , tales que:

1.  $f$  es inyectiva en  $U$ .
2.  $f(U) = V$ .
3.  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .
4.  $f^{-1} : V \rightarrow U$  es holomorfa y además:

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \forall z \in U$$

**Teorema 0.10.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  no constante y  $a \in D$ . Sea  $n$  el orden de  $a$  como cero de  $f - f(a)$ , es decir, el primer natural para el que  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Entonces  $f$  es localmente una aplicación  $n \rightarrow 1$  cerca de  $a$ . Es decir, existe  $\alpha > 0$  con  $D(a, \alpha) \subset D$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \alpha$  existe  $\delta > 0$  tal que cada punto  $w \in D(f(a), \delta) \setminus \{f(a)\}$  es la imagen de exactamente  $n$  puntos distintos  $z_1, z_2, \dots, z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ . En particular,  $f(D(a, \varepsilon)) \supset D(f(a), \delta)$ .

**Definición 0.5.** Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$  salvo por polos. Si  $a \in D$  es un polo de  $f$ , se tiene que  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . Definimos  $f(a) = \infty$ . Entonces  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  y es continua. Se dice que  $f$  es meromorfa en  $D$ .

**Teorema 0.11.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  meromorfa en  $D$ , con  $a \in D$  un polo de orden  $n$  de  $f$ . Entonces  $f$  es localmente una aplicación  $n \rightarrow 1$  cerca de  $a$ . Es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que  $D(a, \alpha) \subset D$ ,  $f$  es holomorfa en  $D(a, \alpha) \setminus \{a\}$  y se verifica que para todo  $0 < \varepsilon < \alpha$  existe  $R > 0$  tal que cada punto  $w \in \mathbb{C}$  con  $|w| > R$  es la imagen de exactamente  $n$  puntos distintos  $z_1, z_2, \dots, z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ . En particular,  $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$ .

**Teorema 0.12.** Sea  $f$  una función con un polo de orden  $n$  en  $\infty$ . Entonces  $f$  es localmente una aplicación  $n \rightarrow 1$  cerca de  $\infty$ . Es decir, existe  $R_0 > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$  y se verifica que para todo  $R > R_0$  existe  $R' > 0$  tal que cada punto  $w \in \mathbb{C}$  con  $|w| > R'$  es la imagen de exactamente  $n$  puntos distintos  $z_1, \dots, z_n$  de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ . En particular,  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R'\}$ .

**Teorema 0.13** (Teorema de la aplicación abierta). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y no constante. Entonces  $f$  es una aplicación abierta. En particular,  $f(D)$  es un dominio.

**Lema 0.14.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  holomorfa en  $D$ .

- Sea  $a \in D$ . Entonces  $f'(a) \neq 0$  si y solo si  $f$  es inyectiva en un entorno de  $a$ .
- Si  $f$  es inyectiva en  $D$ , entonces  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$ .

## Aplicaciones conformes

**Definición 0.6.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e inyectiva. Sea  $D' = f(D)$ . Entonces:

- $D'$  es un dominio en  $D$ .
- $f : D \rightarrow D'$  es biyectiva.

- $f^{-1} : D' \rightarrow D$  es holomorfa.

En ese caso decimos que  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ .

*Observación.*

1. Si  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ , entonces  $f^{-1}$  es una aplicación conforme de  $D'$  sobre  $D$ .
2. Si  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  son dominios en  $\mathbb{C}$  con  $f$  aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_2$  y  $g$  aplicación conforme de  $D_2$  sobre  $D_3$ , entonces  $g \circ f$  es una aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_3$ .

**Definición 0.7.** Si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios en  $\mathbb{C}$ , se dice que  $D_1$  y  $D_2$  son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme  $f$  de  $D_1$  sobre  $D_2$ .

En el conjunto de los dominios en  $\mathbb{C}$ , se tiene la relación de equivalencia "ser conformemente equivalentes".

**Definición 0.8.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ .  $D$  es simplemente conexo si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo. Equivalentemente,  $D$  es simplemente conexo si todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$  es homólogo a cero módulo  $D$ , es decir,  $n(\gamma, z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus D$ .

**Teorema 0.15.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos dominios en  $\mathbb{C}$  que son conformemente equivalentes. Entonces  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $D_2$  es simplemente conexo.

**Definición 0.9.** Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , el ángulo formado por  $z_1$  y  $z_2$  se define como:

$$\theta(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in (-\pi, \pi]$$

*Observación.* Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , entonces  $\theta(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) = \theta(z_1, z_2)$ .

**Definición 0.10.** Sea  $\gamma$  un camino con origen en un punto  $a \in \mathbb{C}$ . Se dice que  $\gamma$  es regular en  $a$  si existe una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $\gamma'(0) \neq 0$ .

**Definición 0.11.** Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos caminos con origen  $a \in \mathbb{C}$  que son regulares en  $a$ . El ángulo que forman  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $a$ ,  $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$ , se define como sigue.

Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizaciones  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma_1, \gamma_2$  respectivamente tales que  $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$ . Entonces  $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ .

**Definición 0.12.** Si  $\gamma$  es una curva en  $\mathbb{C}$  y  $f : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  es continua, se define la curva imagen de  $\gamma$  por  $f$  como la curva  $\Gamma$  que tiene por parametrización  $f \circ \gamma$ , siendo  $\gamma$  una parametrización de  $\gamma$ .

**Definición 0.13.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  y  $a \in D$ . Diremos que  $f$  preserva ángulos en  $a$  o que  $f$  es conforme en  $a$  si se verifica lo siguiente.

Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son caminos con origen  $a$ , regulares en  $a$ , entonces las curvas imagen de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por  $f$  de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente son caminos con origen  $f(a)$ , que son regulares en  $f(a)$  y se tiene que:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

**Teorema 0.16.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  y  $a \in D$ . Si  $f'(a) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $a$ .

*Demostración.* Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  caminos en  $D$ , con origen en  $a$  y regulares en  $a$ . Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizaciones de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente, ambas  $\mathcal{C}^1$  a trozos con  $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$ . Consideramos las curvas imagen de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por  $f$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= f \circ \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \Gamma_2 &= f \circ \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

$\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son  $\mathcal{C}^1$  a trozos. Además,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son caminos con origen  $f(a)$ , porque:

$$\Gamma_1(0) = f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(\gamma_2(0)) = \Gamma_2(0)$$

Observamos que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son regulares en  $a$ :

$$\Gamma'_1(0) = f'(\gamma_1(0))\gamma'_1(0) = f'(a)\gamma_1(0) \neq 0$$

$$\Gamma'_2(0) = f'(\gamma_2(0))\gamma'_2(0) = f'(a)\gamma_2(0) \neq 0$$

Por tanto:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta(\Gamma'_1(0), \Gamma'_2(0)) = \arg \frac{\Gamma'_2(0)}{\Gamma'_1(0)} = \theta(\gamma'_1(0), \gamma'_2(0)) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

□

**Ejemplo** (Contraejemplo). Sean  $D = \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  y  $a = 0$ . Observamos que  $f'(a) = 0$ . Sea  $\gamma_1$  el segmento  $[0, 1]$  y  $\gamma_2$  el segmento  $[0, i]$ . Es claro que  $\theta_0(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$ . Si consideramos las curvas imagen de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  por  $f$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , podemos ver que  $\Gamma_1$  es el segmento  $[0, 1]$  y  $\Gamma_2$  el segmento  $[0, -1]$ , que tienen  $\theta_0(\Gamma_1, \Gamma_2) = \pi \neq \frac{\pi}{2}$ .

De hecho, se tiene la equivalencia. Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $f$  holomorfa en  $D$  y  $a \in D$ . Entonces  $f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow f$  es conforme en  $a$ .



# Capítulo 1

## Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad

### 1.1. Funciones meromorfas

**Definición 1.1.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}^*$ . La función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  es meromorfa en  $D$  si dado  $a \in D$  se verifica una de las siguientes posibilidades:

- $a \in \mathbb{C}$  y  $f$  es holomorfa en  $a$ .
- $a \in \mathbb{C}$  y  $f$  tiene un polo en  $a$ , es decir,  $f(a) = \infty$ .
- $a = \infty$  y  $f$  tiene una singularidad evitable en  $\infty$ , es decir,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ .
- $a = \infty$  y  $f$  tiene un polo en  $a$ , es decir,  $f(\infty) = \infty$ .

Entonces  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  es continua.

*Observación.* En el caso  $D \subset \mathbb{C}$ , la definición es la que ya conocíamos de función meromorfa. Si además  $f(D) \subset \mathbb{C}$ , se tiene una función holomorfa en  $D$ .

*Observación.* Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  continua. Supongamos que  $f$  es holomorfa en  $\{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$  y que el conjunto  $\{z \in D : f(z) = z\}$  no tiene puntos de acumulación en  $D$ . Entonces  $f$  es meromorfa en  $D$ .

*Observación.* Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $f$  meromorfa e inyectiva en  $A = \{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$ . Entonces  $f$  tiene a lo sumo un polo y tal polo es simple. Además,  $f'(a) \neq 0$  para todo  $a \in A$ , por lo que  $f$  es conforme en  $a$  para todo  $a \in A$ .

**Teorema 1.1** (Teorema de la aplicación abierta). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  una función meromorfa y no constante en  $D$ . Entonces  $f$  es una aplicación abierta. En particular,  $f(D)$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ .*

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  meromorfa e inyectiva, con  $D' = f(D)$ . Entonces:

1.  $D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ .
2.  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  es meromorfa e inyectiva.

Veamos que (2) es cierto. Como  $f$  es una aplicación abierta, se tiene que  $f^{-1}$  es continua. Sea  $w \in D' \cap \mathbb{C}$  tal que  $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}$ , veamos que  $f^{-1}$  es holomorfa en  $w$ . Como  $z \in \mathbb{C} \cap D$  y  $f(z) \in \mathbb{C}$ ,  $f$  es holomorfa en  $z$  con  $f'(z) \neq 0$ . Por el teorema de la función inversa,  $f^{-1}$  es holomorfa en  $w$ .

## 1.2. Aplicaciones conformes

**Definición 1.2.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  meromorfa e inyectiva en  $D$ . Sea  $D' = f(D)$ . Entonces diremos que  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ .

En este caso, se tiene que  $D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$  y que  $f^{-1} : D' \rightarrow D$  es meromorfa e inyectiva en  $D'$ . Por tanto,  $f : D \rightarrow D'$  es un homeomorfismo, con  $f$  y  $f^{-1}$  meromorfas.

*Observación.*

1. Si  $f$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $D'$ , entonces  $f^{-1}$  es una aplicación conforme de  $D'$  sobre  $D$ .
2. Si  $D_1, D_2$  y  $D_3$  son dominios en  $\mathbb{C}^*$ , con  $f$  aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_2$  y  $g$  aplicación conforme de  $D_2$  sobre  $D_3$ , entonces  $g \circ f$  es una aplicación conforme de  $D_1$  sobre  $D_3$ .

Se puede comprobar que, sean  $G_1, G_2$  abiertos en  $\mathbb{C}^*$  y  $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}, g : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfas tal que  $f(G_1) \subset G_2$ , entonces  $g \circ f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  es meromorfa.

**Definición 1.3.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dominios en  $\mathbb{C}^*$ . Diremos que  $D_1$  y  $D_2$  son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme  $f$  de  $D_1$  sobre  $D_2$ .

En el conjunto de los dominios en  $\mathbb{C}^*$ , el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.

**Definición 1.4.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Diremos que  $D$  es simplemente conexo si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo.

**Ejemplo.**

- $D = \mathbb{C}$ .
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \{a\}, a \in \mathbb{C}$ .
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(a, R), a \in \mathbb{C}, R > 0$ .
- $D = D(a, R), a \in \mathbb{C}, R > 0$ .
- Un semiplano sin  $\infty$ .
- Un sector sin  $\infty$ .
- El plano menos dos semirrectas.
- $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}, a \in \mathbb{C}$ , no es simplemente conexo, porque  $\mathbb{C}^* \setminus D = \{a, \infty\}$  no es conexo.

**Lema 1.2.** Dado  $a \in \mathbb{C}$ , la transformación  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, T(z) = \frac{1}{z-a}$  si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}, T(a) = \infty$  y  $T(\infty) = 0$ , es una aplicación conforme de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ .

**Lema 1.3.** Sea  $H$  un homeomorfismo de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ . Si  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $H(D)$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ .

*Demostración.* Como  $H : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  y  $D$  es abierto y conexo en  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $H(D)$  es abierto y conexo en  $\mathbb{C}^*$ . Luego  $H(D)$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Como además  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo, entonces  $\mathbb{C}^* \setminus H(D) = H(\mathbb{C}^* \setminus D)$  es conexo. Por tanto,  $H(D)$  es un dominio simplemente conexo.  $\square$

**Teorema 1.4.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos dominios en  $\mathbb{C}^*$  que son conformemente equivalentes. Entonces  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $D_2$  es simplemente conexo.

*Demostración.* Sea  $F : D_1 \rightarrow D_2$  aplicación conforme. Consideramos todos los posibles casos teniendo en cuenta que los papeles de  $D_1$  y  $D_2$  son intercambiables.

- Si  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ , se cumple.
- Si  $D_1 = \mathbb{C}^*$ , como  $\mathbb{C}^*$  es cerrado y  $F$  es un homeomorfismo, se tiene que  $D_2$  es compacto y por tanto cerrado. Entonces  $D_2$  es abierto y cerrado en  $\mathbb{C}^*$ , que es conexo. Por tanto,  $D_2 = \mathbb{C}^* = D_1$ , ambos simplemente conexos.

- Si  $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}^*$ , consideramos dos casos.
  - Supongamos que  $\infty \notin D_1$  y  $\infty \in D_2$ .  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $D_2$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Sea  $a \in \mathbb{C}^* \setminus D_2$ , de hecho  $a \in \mathbb{C} \setminus D_2$ . Tomamos la aplicación conforme  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $T(z) = \frac{1}{z-a}$  si  $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$ ,  $T(a) = \infty$ . Tenemos el diagrama:

$$D_1 \xrightarrow{F} D_2 \xrightarrow{T} T(D_2)$$

$T(D_2)$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Como  $a \notin D_2$ , entonces  $T(a) = \infty \notin T(D_2)$ . Así que  $T(D_2)$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  conformemente equivalente a  $D_1$ . Luego  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $T(D_2)$  es simplemente conexo. Por el lema anterior, esto es equivalente a que  $D_2$  sea simplemente conexo.

- Supongamos que  $\infty \in D_1, D_2$ . Se sigue de un razonamiento similar usando el apartado anterior.

□

### 1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido

Veremos que hay tres clases de equivalencia de dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}^*$ :  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$  y el disco unidad  $\mathbb{D} = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

$\mathbb{C}^*$  es compacto. Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$  que es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $D$  es compacto y por tanto cerrado. Como  $D$  es abierto, entonces  $D = \mathbb{C}^*$ .

$\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  son homeomorfos. Por ejemplo,  $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T(z) = \frac{z}{1-|z|}$  es un homeomorfismo.

**Proposición 1.5.**  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  no son conformemente equivalentes.

*Demostración.* Supongamos que existe una aplicación conforme  $F$  de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{D}$ . Entonces  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  es entera y acotada. Por el teorema de Liouville,  $F$  es constante. Esto contradice que  $F$  sea una aplicación conforme. □

**Proposición 1.6.** Sea  $f$  entera e inyectiva, entonces  $f$  es de la forma

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

*Demostración.* Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , el desarrollo de Taylor de  $f$  en 0. Entonces  $\infty$  es una singularidad aislada de  $f$  y el desarrollo anterior coincide con el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $\infty$ .

- Si  $\infty$  es una singularidad evitable de  $f$ , entonces  $a_n = 0$  si  $n \geq 1$ , así que  $f$  es constante. Esto no es posible.
- Si  $\infty$  es un polo de orden  $N$  de  $f$ , entonces  $a_N \neq 0$  y  $a_n = 0$  si  $n > N$ . Luego  $f$  es un polinomio de grado  $N$ .  $f'$  es un polinomio de grado  $N - 1$ , con  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Así que  $f'$  es constante, por tanto  $N - 1 = 0 \Rightarrow N = 1$ .
- Si  $\infty$  es una singularidad esencial de  $f$ , entonces  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$  es denso en  $\mathbb{C}$ . Por el teorema de la aplicación abierta,  $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$  es abierto en  $\mathbb{C}$ . Estos conjuntos son disjuntos por ser  $f$  inyectiva, y esto no es posible.

□

Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  que es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , entonces  $D = \mathbb{C}$ . Veamos que esto es verdad. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow D$  aplicación conforme.  $f$  es entera e inyectiva, así que  $f(z) = \alpha z + \beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Luego  $D = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .

Las aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{C}$  son de la forma:

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$  que es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ .

- Si  $\infty \notin D$ , entonces  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  y, por tanto,  $D = \mathbb{C}$ .
- Si  $\infty \in D$ , consideramos  $F : \mathbb{C} \rightarrow D$  aplicación conforme. Como sabemos que  $D \neq \mathbb{C}^*$ , existe  $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus D$ , de hecho  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$ . Sea

$$T : D \rightarrow T(D), \quad T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$$

Tenemos el diagrama:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{T} T(D) = D'$$

$D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , así que  $D' = \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\}$ . Por tanto,  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ .

Hemos probado que si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}^*$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , entonces  $D = \mathbb{C}$  o  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Es decir,  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

Los dominios en  $\mathbb{C}^*$  que son conformemente equivalentes a  $\mathbb{C}$  son  $\mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

### Aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$

Sea  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  aplicación conforme. Sea  $a \in \mathbb{C}^*$  tal que  $T(a) = \infty$ . Consideramos dos casos:

1. Si  $a = \infty$ ,  $T(\infty) = \infty$ .  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una aplicación conforme, así que  $T(z) = \alpha z + \beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ .
2. Si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $T(a) = \infty$ .  $T$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , así que  $a$  es un polo simple de  $T$ . Consideramos el desarrollo de Laurent de  $T$  en  $a$ .

$$T(z) = \frac{A_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}, \quad A_{-1} \neq 0$$

$\infty$  es una singularidad aislada de  $T$ . De hecho, es una singularidad evitable.

Sea  $F(z) = T(z) - \frac{A_{-1}}{z - a}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ .  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .  $a$  es singularidad evitable de  $F$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = T(\infty) \in \mathbb{C}$ , así que  $\infty$  es una singularidad evitable también. Evitando la singularidad de  $F$  en  $a$ , tenemos que  $F$  es entera y acotada. Por tanto  $F$  es constante. Así que  $F(z) = a_0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces:

$$T(z) = F(z) + \frac{A_{-1}}{z - a} = a_0 + \frac{A_{-1}}{z - a} = \frac{a_0 z + (A_{-1} - a_0 a)}{z - a}$$

En cualquiera de los dos casos,  $T$  es de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

No todas las aplicaciones de esta forma son aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ .

**Ejemplo** (Contraejemplo). No es una aplicación conforme si  $\alpha = \beta = 0$  o  $(\alpha, \beta)$  y  $(\gamma, \delta)$  son proporcionales. Por ejemplo:

$$T(z) = \frac{3z + 2}{6z + 4} = \frac{1}{2}$$

Para que las aplicaciones de esa forma sean aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ , se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

En el caso (1),  $T(z) = Az + B = \frac{Az+B}{0z+1}$ , con  $A, B \in \mathbb{C}$ ,  $A \neq 0$ , luego:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = A \neq 0$$

En el caso (2),

$$\begin{vmatrix} a_0 & A_{-1} - a_0 a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a_0 a - A_{-1} + a_0 a = -A_{-1} \neq 0$$

**Teorema 1.7.** *Las aplicaciones conformes de  $\mathbb{C}^*$  en  $\mathbb{C}^*$  son de la forma:*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

*Demostración.* Sea  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  una aplicación de esa forma.

- Si  $\gamma = 0$ , entonces:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}, \quad \alpha, \delta \neq 0$$

$T$  es una aplicación conforme de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{C}$ , con  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$ . Definiendo  $T(\infty) = \infty$ , tenemos que  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  es una aplicación conforme.

- Si  $\gamma \neq 0$ , entonces  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\} \\ T\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) &= \infty \\ T(\infty) &= \frac{\alpha}{\gamma} \end{aligned}$$

$T$  es meromorfa en  $\mathbb{C}^*$  y  $T$  es inyectiva.

Veamos que  $T$  es sobreyectiva. Sea  $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$  y sea  $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$ . Entonces:

$$T(z) = w \Leftrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w \Leftrightarrow \alpha z + \beta = \gamma z w + \delta w \Leftrightarrow (\alpha - \gamma w)z = \delta w - \beta \Leftrightarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

Por tanto,  $T$  es una aplicación conforme de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^*$ .

Además, hemos probado que  $T^{-1}$  es de la forma:

$$T^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}, \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Si  $\gamma = 0$ , también es válida esta expresión. □

## 1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad

**Teorema 1.8** (Lema de Schwarz). *Sea  $\varphi$  una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Entonces:*

1.  $|\varphi(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .
2.  $|\varphi'(0)| \leq 1$ .

Además, se da la igualdad en (1) para algún  $z \in \mathbb{D}$  con  $z \neq 0$  o bien se da la igualdad en (2) si y solo si  $\varphi$  es una rotación de  $\mathbb{D}$ , es decir, si existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| = 1$  tal que  $\varphi(z) = \lambda z$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

*Observación.* Si  $\varphi$  es una rotación, entonces se da la igualdad en (1) para todo  $z \in \mathbb{D}$  y se da la igualdad en (2).

*Observación.* El teorema se puede enunciar de forma equivalente con la condición  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$  en lugar de  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Es decir, si  $\varphi$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ , entonces  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Veamos que esto es cierto. Supongamos que existe  $z_0 \in \mathbb{D}$  con  $|\varphi(z_0)| = 1$ . Como  $|\varphi(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , por el principio del máximo  $\varphi$  es constante, luego  $\varphi \equiv \varphi(0) = 0$ . Esto contradice que  $|\varphi(z_0)| = 1$ .

Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Sea  $a \in \mathbb{D}$  y  $b = f(a) \in \mathbb{D}$ . Definimos:

$$\begin{aligned} T_a(z) &= \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, & T_a \in \mathcal{M}, T_a(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, T_a(0) = a \\ S_b(z) &= \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, & S_b \in \mathcal{M}, S_b(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, S_b(b) = 0 \end{aligned}$$

Sea  $\varphi = S_b \circ f \circ T_a$ .  $\varphi$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ , con  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  y  $\varphi(0) = 0$ . Por el lema de Schwarz,

1.  $|\varphi(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .
2.  $|\varphi'(0)| \leq 1$ .

Además, se da la igualdad en (1) para algún  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq 0$ , o bien se da la igualdad en (2) si y solo si  $\varphi$  es una rotación.

Desarrollamos las dos expresiones:

1. Sea  $z \in \mathbb{D}$ . Consideramos  $T_a^{-1}(z) \in \mathbb{D}$ .

$$\begin{aligned} |\varphi(T_a^{-1}(z))| &\leq |T_a^{-1}(z)| \Leftrightarrow |S_b(f(z))| \leq |S_a(z)| \Leftrightarrow \left| \frac{f(z)-b}{1-\bar{b}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|, \quad \forall z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Además, si se da la igualdad para algún  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z \neq a$ , entonces  $\varphi$  es una rotación. Entonces,  $f = S_b^{-1} \circ \varphi \circ T_a^{-1} \in \mathcal{M}$ , con  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

2. Por la regla de la cadena,  $\varphi'(0) = T'_a(0)f'(a)S'_b(b)$ .

$$\begin{aligned} T'_a(z) &= \frac{1+\bar{a}z-(z+a)\bar{a}}{(1+\bar{a}z)^2}, & T'_a(0) &= 1-|a|^2 \\ S'_b(z) &= \frac{1-\bar{b}z+(z-b)\bar{b}}{(1-\bar{b}z)^2}, & S'_b(b) &= \frac{1-|b|^2}{(1-|b|^2)} = \frac{1}{1-|b|^2} \end{aligned}$$

Así que:

$$\varphi'(0) = (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2}$$

Por tanto:

$$|\varphi'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow (1 - |a|^2)f'(a) \frac{1}{1 - |b|^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

Además, si se da la igualdad, entonces  $\varphi$  es una rotación y por tanto  $f \in \mathcal{M}$ , con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ .

Por tanto, hemos probado lo siguiente:

1. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right|$$

Si se da la igualdad para algún  $z \in \mathbb{D}$  con  $z \neq a$  entonces  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

2.

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

Si se da la igualdad entonces  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

## 1.5. El teorema de Schwarz-Pick

**Teorema 1.9** (Teorema de Schwarz-Pick). *Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Entonces:*

1. Para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|$$

2. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Además, se da la igualdad en (1) para algún par de puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  con  $z_1 \neq z_2$  o bien se da la igualdad en (2) para algún  $z \in \mathbb{D}$  si y solo si  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , en cuyo caso se da la igualdad en (1) para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  y se da la igualdad en (2) para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

**Proposición 1.10.** *Sea  $T \in \mathcal{M}$  con  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . Entonces:*

1. Para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,

$$\left| \frac{T(z_2) - T(z_1)}{1 - \overline{T(z_1)}T(z_2)} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|$$

2. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

**Definición 1.5.** Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ , definimos:

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|$$

Observamos que si  $1 - \overline{z_1}z_2 = 0$  entonces  $\overline{z_1}z_2 = 1 \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$ . Como esto no ocurre,  $\rho$  está bien definida.

La primera parte del teorema de Schwarz-Pick se puede reescribir usando  $\rho$ .

Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Entonces:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, se da la igualdad para algún par de puntos distintos  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  si y solo si  $f \in \mathcal{M}$  y  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , en cuyo caso se da la igualdad para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ .

Vamos a ver que  $\rho$  es una distancia en  $\mathbb{D}$ .

$$\begin{aligned} \rho : D \times D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\mapsto \rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \end{aligned}$$

- $\rho(z_1, z_2) \geq 0$ .
- $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$ .
- $\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ .
- $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$ .

**Lema 1.11.** Para todo  $a, z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}$$

Observamos que si  $a, z \in \mathbb{D}$ , tenemos:

$$\rho(a, z) = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = |S_a(z)| < 1, \quad S_a \in \mathcal{M}, S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$$

Dados  $a \in \mathbb{D}$  y  $0 < r < 1$ , denotamos:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

Entonces, dado  $z \in \mathbb{D}$ , se tiene que:

$$z \in \Delta(a, r) \Leftrightarrow \rho(z, a) < r \Leftrightarrow |S_a(z)| < r \Leftrightarrow S_a(z) \in D(0, r) \Leftrightarrow z \in S_a^{-1}(D(0, r)) \Leftrightarrow z \in T_a(D(0, r))$$

Entonces  $\Delta(a, r) = T_a(D(0, r))$ .

$T_a(\partial D(0, r))$  es una circunferencia  $C$  contenida en  $\mathbb{D}$ . Sean  $c$  y  $R$  el centro y el radio de  $C$ , con  $c \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$ . Entonces  $T_a(D(0, r)) = D(c, R)$ . Por tanto:

$$\Delta(a, r) = T_a(D(0, r)) = D(c, R)$$

Así que  $\Delta(a, r)$  es un disco euclídeo. Como  $T_a(0) = a$  tenemos que  $a \in \Delta(a, r)$ , pero  $a$  no tiene por qué ser el centro del disco.

Vamos a calcular  $c$  y  $R$ . Si  $a = 0$ ,  $T_a(z) = z$  luego  $T_a(D(0, r)) = D(0, r)$ . Supongamos que  $a \neq 0$ . Sea  $L$  la recta que pasa por  $0$  y  $a$ . Calculamos  $S_a(L)$  hallando la imagen de tres puntos.

$$\begin{aligned} S_a(0) &= -a \\ S_a(a) &= 0 \\ S_a\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) &= \infty \end{aligned}$$



$L' = S_a(L)$  es la recta que pasa por 0 y por  $-a$ , luego  $L'$  coincide con  $L$ . Como  $L'$  es perpendicular a  $\partial D(0, r)$  en los dos puntos de corte y  $T_a$  preserva ángulos en esos dos puntos, entonces  $L$  es perpendicular a  $C$ . Por tanto  $c$  está en  $L$ .

El diámetro  $\left[-r\frac{a}{|a|}, r\frac{a}{|a|}\right]$  se aplica mediante  $T_a$  en un diámetro de  $C$ , que es:

$$\left[T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right), T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right]$$

Entonces:

$$c = \frac{1}{2} \left( T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) + T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) \right)$$

$$R = \frac{1}{2} \left| T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) - T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) \right|$$

Calculamos:

$$T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) = \frac{-r\frac{a}{|a|} + a}{1 - \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{-ra + a|a|}{|a| - r|a|^2} = \frac{a(|a| - r)}{|a|(1 - r|a|)}$$

$$T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) = \frac{r\frac{a}{|a|} + a}{1 + \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{ra + a|a|}{|a| + r|a|^2} = \frac{a(|a| + r)}{|a|(1 + r|a|)}$$

Se llega a que:

$$c = \frac{1 - r^2}{1 - r^2|a|^2}a$$

$$R = \frac{r(1 - |a|^2)}{1 - r^2|a|^2}$$

Observamos que los puntos de mayor y menor módulo de  $C$  son  $T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)$  y  $T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)$ . Veamos que, de hecho,

$$\left| T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) \right| = \frac{||a| - r|}{1 - r|a|} \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} = \left| T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) \right|$$

■ Si  $|a| \geq r$ ,

$$\frac{|a| - r}{1 - r|a|} \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} \Leftrightarrow |a| + r|a|^2 - r - r^2|a| \leq r + |a| - r^2|a| - r|a|^2 \Leftrightarrow 2r|a|^2 \leq 2r \Leftrightarrow |a| \leq 1$$

■ Si  $|a| < r$  se razona de forma análoga.

Entonces, para todo  $z \in \partial D(0, r)$  se tiene que:

$$\frac{||a| - r|}{1 - r|a|} \leq T_a(z) \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} \Leftrightarrow \frac{||a| - r|}{1 - r|a|} \leq \left| \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \right| \leq \frac{r + |a|}{1 + r|a|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{||a| - |z||}{1 - |z||a|} \leq \left| \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |z||a|} \leq |z| + |a|$$

Hemos probado esto para  $a, z \in \mathbb{D}$ ,  $a, z \neq 0$ . Pero si  $a = 0$  o  $z = 0$  la desigualdad es trivial. Por tanto, esta cadena de desigualdades es cierta para todo  $a, z \in \mathbb{D}$ .

Cambiando  $a$  por  $-a$ , tenemos:

$$\frac{||a| - |z||}{1 - |z||a|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |z||a|} \leq |z| + |a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Las desigualdades primera y segunda corresponden al último lema.

Por otro lado,

$$\rho(a, z) \leq |z| + |a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Como  $\rho(z_1, 0) = |z_1|$  y  $\rho(0, z_2) = |z_2|$ , entonces:

$$\rho(a, z) \leq \rho(a, 0) + \rho(0, z), \quad a, z \in \mathbb{D}$$

Esto es un caso particular de la desigualdad triangular.

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ . Tenemos, usando el teorema de Schwarz-Pick,

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_3) &= \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_3)) \leq \rho(S_{z_2}(z_1), 0) + \rho(0, S_{z_2}(z_3)) = \\ &= \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_2)) + \rho(S_{z_2}(z_2), S_{z_2}(z_3)) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \end{aligned}$$

Así que  $\rho$  verifica la desigualdad triangular. Por tanto,  $\rho$  es una distancia en  $\mathbb{D}$  que se denomina distancia pseudohiperbólica en  $\mathbb{D}$ .

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = |S_{z_1}(z_2)| < 1$$

Si  $a \in \mathbb{D}$  y  $0 < r < 1$ , el disco pseudohiperbólico de centro  $a$  y radio  $r$  es:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

No consideramos  $r \geq 1$  porque  $\Delta(a, r) = \mathbb{D}$ . Sabemos que  $\Delta(a, r)$  es un disco euclídeo, en concreto un disco abierto de centro  $\frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a$  y radio  $\frac{r(1-|a|^2)}{1-r^2|a|^2}$ . Si  $a = 0$ ,  $\Delta(a, r) = D(0, r)$ .

Esta distancia es equivalente a la distancia euclídea en  $\mathbb{D}$ .

Si  $T \in \mathcal{M}$  con  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , se tiene que:

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , se tiene que:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

## 1.6. Subordinación

**Definición 1.6.** Sean  $f, F$  holomorfas en  $\mathbb{D}$ . Diremos que  $f$  está subordinada a  $F$ ,  $f \prec F$ , si existe  $w$  holomorfa en  $\mathbb{D}$ , con  $w(0) = 0$  y  $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  tal que  $f = F \circ w$ .

*Observación.*  $w$  está en las condiciones del lema de Schwarz.

Veamos algunas propiedades:

- $f(0) = F(w(0)) = F(0)$ .
- $f(\mathbb{D}) = F(w(\mathbb{D})) \subset F(\mathbb{D})$ .
- Si  $0 < r < 1$ , veamos que

$$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$

Si  $z \in D(0, r)$ ,  $f(z) = F(w(z))$ . Por el lema de Schwarz,

$$|w(z)| \leq |z| < r$$

- Si  $0 < r < 1$ , veamos que

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

Si  $|z| = r$ , como por el lema de Schwarz  $|w(z)| \leq |z| = r$ , entonces:

$$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |F(z)|$$

- Si  $|z| = r$ , como por el lema de Schwarz  $|w'(0)| \leq 1$  y además  $f'(0) = F'(w(0))w'(0) = F'(0)w'(0)$ , entonces:

$$|f'(z)| = |F'(w(z))| \leq \max_{|z| \leq r} |F'(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |F'(z)|$$

- No se verifica para todo  $r \in (0, 1)$  que

$$\max_{|z|=r} |f'(z)| \leq \max_{|z|=r} |F'(z)|$$

**Ejemplo** (Contraejemplo). Sean  $f(z) = z^2$  y  $F(z) = z$ . Podemos tomar  $w(z) = z^2$ , que verifica  $w(0) = 0$  y  $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , luego  $f \prec F$ . Si  $0 < r < 1$ ,

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |f'(z)| &= \max_{|z|=r} 2|z| = 2r \\ \max_{|z|=r} |F'(z)| &= 1 \end{aligned}$$

Observamos que no se cumple que  $2r \leq 1$  para todo  $r \in (0, 1)$ .

Por la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick,

$$\frac{|w'(z)|}{1 - |w(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Entonces, si  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$|f'(z)| = |F'(w(z))||w'(z)| \leq |F'(w(z))| \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2} \Leftrightarrow (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |w(z)|^2)|F'(w(z))|$$

Entonces, si  $0 < r \leq 1$ , tenemos que:

$$\sup_{|z| < r} (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \sup_{|z| < r} (1 - |z|^2)|F'(z)|$$

Veamos que esto es cierto. Si  $|z| < r$ , como  $|w(z)| \leq |z| < r$ ,

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |w(z)|^2)|F'(w(z))| \leq \sup_{|z| < r} (1 - |z|^2)|F'(z)|$$

**Proposición 1.12.** Sean  $f, F$  holomorfas en  $\mathbb{D}$ , con  $f \prec F$ . Entonces:

1.  $f(0) = F(0)$ .
2.  $f(\mathbb{D}) \subset F(\mathbb{D})$ .
3. Para todo  $r \in (0, 1)$ ,

$$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$

4. Para todo  $r \in (0, 1)$ ,

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

5.  $|f'(0)| \leq |F'(0)|.$

6. Para todo  $r \in (0, 1]$ ,

$$\sup_{|z| < r} (1 - |z|^2) |f'(z)| \leq \sup_{|z| < r} (1 - |z|^2) |F'(z)|$$

La última propiedad tiene mucha relación con el espacio de Bloch  $\mathcal{B}$  de las funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$  que satisfacen:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$$

*Observación.* Veamos qué se puede decir sobre los coeficientes de Taylor. Sean  $f$  y  $F$  holomorfas en  $\mathbb{D}$  con  $f \prec F$ . Consideramos los desarrollos de Taylor de  $f$  y  $F$  para  $z \in \mathbb{D}$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \end{aligned}$$

Usando (1), observamos que:

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ A_0 = F(0) \end{cases} \Rightarrow a_0 = A_0$$

Con (2), vemos que:

$$\begin{cases} a_1 = f'(0) \\ A_1 = F'(0) \end{cases} \Rightarrow |a_1| \leq |A_1|$$

No podemos decir nada más. Por ejemplo, dado  $N \geq 2$ , podemos considerar  $f(z) = z^N$  y  $F(z) = z$ . Observamos que  $f \prec F$  con  $w(z) = z^N$ . Observamos que  $a_N = 1$  y  $A_N = 0$ , luego no es cierto que  $|a_n| \leq |A_n|$ .

Veamos ahora un ejemplo importante de subordinación. Sea  $F$  una aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ , siendo  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  tal que  $f(\mathbb{D}) \subset D$  y  $f(0) = F(0)$ , entonces  $f \prec F$ .

Sea  $w = F^{-1} \circ f$ .  $w$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ ,  $w(0) = F^{-1}(f(0)) = F^{-1}(F(0)) = 0$  y  $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Además,  $f = F \circ w$ .

Por ejemplo:

$$P(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Esta es una transformación de Möbius que aplica  $\partial\mathbb{D}$  en el eje imaginario.  $P(\mathbb{D})$  es el semiplano de la derecha  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  y  $P(0) = 1$ . Entonces, si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ ,  $f(\mathbb{D}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  y  $f(0) = P(0)$ , entonces  $f \prec P$ . Es decir, si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ ,  $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  y  $f(0) = 1$ , entonces  $f \prec P$ .

Sea  $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \forall z \in \mathbb{D}, f(0) = 1\}$ . Entonces:

- $P \in \mathcal{P}$ .
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow f \prec P$ . De hecho,  $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f \prec P\}$ .
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{P}$ .

**Teorema 1.13.** Si  $f \in \mathcal{P}$ , entonces:

1. Para todo  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

$$2. |f'(0)| \leq 2$$

Veamos cuáles son las aplicaciones conformes de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$ .

Sea  $f$  una aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$ . Sea  $a = f(0) \in \mathbb{D}$ . Aplicando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick a  $f$  en 0, tenemos:

$$\frac{|f'(0)|}{1 - |a|^2} \leq 1$$

y si se diera igualdad,  $f$  sería una transformación de Möbius.

Sea  $g = f^{-1}$ , que es holomorfa en  $\mathbb{D}$  y  $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . Aplicando lo mismo en el punto  $a$  tenemos:

$$|g'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

y si se diera igualdad,  $g$  sería una transformación de Möbius.

Tenemos que:

$$|f'(0)| \leq 1 - |a|^2 \leq \frac{1}{|g'(a)|} = |f'(0)|$$

Por tanto se da igualdad, así que  $f$  es una transformación de Möbius con  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . En conclusión, las aplicaciones conformes de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$  son:

$$\{\lambda T_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \{\lambda S_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \{\lambda \varphi_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\}$$

## 1.7. La métrica de Poincaré

Si  $\gamma$  es un camino en  $\mathbb{C}$  y  $f : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  es continua, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ \int_{\gamma} f(z) |dz| &= \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \end{aligned}$$

siendo  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma$ .

Veamos algunas propiedades:

1. Si  $f$  es real, entonces  $\int_{\gamma} f(z) |dz| \in \mathbb{R}$ . Si además  $f$  es no negativa, entonces  $\int_{\gamma} f(z) |dz| \geq 0$ .

2. Si  $f(z) = 1$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \text{long}(\gamma)$$

3.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \text{sop}(\gamma)} |f(z)| \text{long}(\gamma)$$

4. Si  $f, g : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y  $f \leq g$ , entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| \leq \int_{\gamma} g(z) |dz|$$

5.

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) |dz| = \int_{\gamma_1} f(z) |dz| + \int_{\gamma_2} f(z) |dz|$$

6.

$$\int_{-\gamma} f(z)|dz| = \int_{\gamma} f(z)|dz|$$

7.

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z))|dz| = a \int_{\gamma} f(z)|dz| + b \int_{\gamma} g(z)|dz|, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Sea  $\gamma$  un camino en  $\mathbb{D}$  con origen  $z_1$  y extremo  $z_2$ . Podemos considerar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1-|z|^2} |dz| = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Como la función  $z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1}{1-|z|^2}$  es real y positiva, entonces la integral es no negativa. Definimos:

$$\delta(z_1, z_2) = \inf \left\{ \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2 \right\}$$

Entonces:

- $\delta(z_1, z_2) \geq 0$ .
- $\delta(z_1, z_2) = \delta(z_2, z_1)$ .
- $\delta(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ .

Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ . Consideramos:

$$A_{12} = \left\{ \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2 \right\}$$

Se definen de manera análoga  $A_{13}$  y  $A_{23}$ . Observamos que  $A_{12} + A_{23} \subset A_{13}$ . Por tanto:

$$\inf(A_{12} + A_{13}) = \inf A_{12} + \inf A_{23} \geq \inf A_{13} \Leftrightarrow \delta(z_1, z_3) \leq \delta(z_1, z_2) + \delta(z_2, z_3)$$

$\delta$  es una distancia en  $\mathbb{D}$ , denominada distancia hiperbólica en  $\mathbb{D}$ .

**Proposición 1.14.**

1. Si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ , entonces:

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \delta(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

2. Si  $T \in \mathcal{M}$  con  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , entonces:

$$\delta(T(z_1), T(z_2)) = \delta(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

*Demostración.*

1. Sea  $f$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  con  $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  y sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ .

$$\begin{aligned} \delta(z_1, z_2) &= \inf \left\{ \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino de } z_1 \text{ a } z_2 \right\} \\ \delta(f(z_1), f(z_2)) &= \inf \left\{ \int_{\Gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} : \Gamma \text{ camino de } f(z_1) \text{ a } f(z_2) \right\} \end{aligned}$$

Sea  $\gamma$  un camino en  $\mathbb{D}$  con origen  $z_1$  y extremo  $z_2$ , con parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $\Gamma = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de un camino  $\Gamma$  en  $\mathbb{D}$  con origen  $f(z_1)$  y extremo  $f(z_2)$ . Tenemos:

$$\int_{\Gamma} \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_a^b \frac{|\Gamma'(t)|}{1-|\Gamma(t)|^2} dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2} dt$$

Usando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick:

$$\int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2} dt \leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Luego tenemos que:

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \quad \forall \gamma$$

Por tanto,  $\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \gamma(z_1, z_2)$ .

2. Se tiene aplicando (1) a  $T$  y  $T^{-1}$ .

□

**Proposición 1.15.** Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ , entonces:

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1 + \rho(z_1, z_2)}{1 - \rho(z_1, z_2)}$$

*Demostración.* Si  $z_1 = z_2$  es trivial. Supongamos  $z_1 \neq z_2$ . Consideramos:

$$S_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

Se tiene que  $S_{z_1} \in \mathcal{M}$ ,  $S_{z_1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $S_{z_1}(z_1) = 0$ . Sabemos que  $S_{z_1}(z_2) \neq 0$ . Además,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2))$$

Tomamos  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ , tal que  $\lambda S_{z_1}(z_2) \in (0, 1)$ . Sea  $r = \lambda S_{z_1}(z_2)$ . Entonces:

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2)) = \delta(0, r)$$

Además,  $r = |\lambda S_{z_1}(z_2)| = |S_{z_1}(z_2)| = \rho(z_1, z_2)$ . Calculamos  $\delta(0, r)$ .

$$\delta(0, r) = \inf \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } 0 \text{ y extremo } r \right\}$$

Si  $\gamma = [0, r]$ ,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} &= \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^r \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} [-\text{Log}(1-t) + \text{Log}(1+t)]_0^r = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \text{Log} \frac{1+t}{1-t} \right]_0^r = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

Luego  $\delta(0, r) \leq \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r}$ .

Sea  $\gamma$  un camino en  $\mathbb{D}$  con origen 0 y extremo  $r$ . Veamos que

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} \geq \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r}$$

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización  $\mathcal{C}^1$  a trozos de  $\gamma$ . Sean  $u = \text{Re}(f)$  y  $v = \text{Im}(f)$ , de forma que  $\gamma = u + iv$ .  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^1$  a trozos.

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$$

Tenemos que:

$$\begin{cases} |\gamma(t)|^2 \geq u(t)^2 \Rightarrow 0 < 1 - |\gamma(t)|^2 \leq 1 - u(t)^2 \Rightarrow \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{1}{1-u(t)^2} \\ |\gamma'(t)| \geq |u'(t)| \geq 0 \end{cases}$$

Así que:

$$\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{|u'(t)|}{1-u(t)^2} \geq \frac{u'(t)}{1-u(t)^2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt &\geq \int_a^b \frac{u'(t)}{1-u(t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_a^b \left( \frac{u'(t)}{1-u(t)} + \frac{u'(t)}{1+u(t)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} [-\text{Log}(1-u(t)) + \text{Log}(1+u(t))]_a^b = \frac{1}{2} \left[ \text{Log} \frac{1+u(t)}{1-u(t)} \right]_a^b = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

porque  $u(a) = 0$  y  $u(b) = r$ . Por tanto,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, r) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho(z_1, z_2)}{1-\rho(z_1, z_2)}$$

□

*Observación.* Sea  $h(x) = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$ ,  $x \in [0, 1)$ . Observamos que si  $x < 1$ , entonces  $1+x \geq 1-x > 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 1$ , así que  $h : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ .  $h$  es creciente, con  $h(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \infty$ . Podemos escribir

$\delta = h \circ \rho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \xrightarrow{\rho} [0, 1) \xrightarrow{h} [0, \infty)$ . Fijado  $a \in \mathbb{D}$ , si  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  está en  $\mathbb{D}$  con  $|z_n| \rightarrow 1$ , entonces:

$$\rho(a, z_n) = |S_a(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Por tanto,  $\delta(a, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

$\mathbb{D}$  con esta distancia  $\delta$  es un modelo de la geometría hiperbólica. Si  $\gamma$  es un camino en  $\mathbb{D}$ , la longitud de  $\gamma$  es

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

La geodésica que une  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  es el camino  $\gamma$  para el que:

$$\delta(z_1, z_2) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Las geodésicas con respecto a  $\delta$  son los diámetros de  $\partial\mathbb{D}$  y los arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{D}$ .



## Capítulo 2

# Familias normales

### 2.1. Familias normales

**Teorema 2.1** (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sean  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones holomorfas en  $D$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $D$  y  $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$  uniformemente en cada subconjunto compacto. Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)}$  uniformemente en cada compacto.*

**Definición 2.1.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal si para cada sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}$  existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

*Observación.* El límite  $f$  de tal subsucesión es una función holomorfa en  $D$ , pero no tiene por qué pertenecer a  $\mathcal{F}$ .

**Definición 2.2.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es compacta si para cada sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}$  existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$  a una función que pertenece a  $\mathcal{F}$ .

En el conjunto  $Hol(D)$  de las funciones holomorfas en  $D$ , con  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$ , se puede definir una distancia  $d$  tal que  $(Hol(D), d)$  es un espacio métrico completo, y en el que:

$$f_n \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ uniformemente en cada subconjunto compacto de } D$$

Si  $\mathcal{F} \subset Hol(D)$ ,  $\mathcal{F}$  es finitamente normal si y solo si  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto. Los compactos coinciden con la definición de familia compacta dada.

### 2.2. El teorema de Montel

**Lema 2.2.** *Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de  $D$ .
2. Para cada  $a \in D$  existe  $r_a > 0$  con  $D(a, r_a) \subset D$  y  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $D(a, r_a)$ .

**Lema 2.3.** *Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sean  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  para  $n = 1, 2, \dots$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .
2. Para cada  $a \in D$  existe  $r_a > 0$  con  $D(a, r_a) \subset D$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $D(a, r_a)$ .

**Lema 2.4.** Sean  $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ , con  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  y  $C_1, C_2 \neq \emptyset$ . Si  $C_1$  es compacto y  $C_2$  es cerrado, entonces:

$$\text{dist}(C_1, C_2) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in C_1, z_2 \in C_2\} > 0$$

*Observación.* Si  $C_1$  no es compacto no es cierto en general.

**Lema 2.5.** Sea  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $A \neq \emptyset$  y sea

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, F(z) = \text{dist}(z, A) = \inf\{|z - a| : a \in A\}$$

Entonces  $F$  es continua y  $F(z) = 0$  para todo  $z \in A$ . Si además  $A$  es cerrado, entonces  $F(z) = \min\{|z - a| : a \in A\}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Lema 2.6.** Sea  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $A \neq \emptyset$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Consideramos los conjuntos:

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, A) < \varepsilon\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, A) \leq \varepsilon\}$$

Entonces  $B$  es abierto y  $C$  es cerrado, con  $A \subset B \subset C$ . Si además  $A$  es acotado, entonces  $B$  es acotado y  $C$  es compacto.

**Proposición 2.7.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Supongamos que  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $D$ . Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $D$ . Entonces existe  $A > 0$  tal que:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|, \quad \forall z_1, z_2 \in K, \forall f \in \mathcal{F}$$

*Demostración.* Sea  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in D$  y para toda  $f \in \mathcal{F}$ . Sean  $K \subset D$ ,  $K$  compacto. Sea  $d > 0$  con  $d < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus D)$ . Si  $D = \mathbb{C}$ , tomamos  $d > 0$  cualquiera. Sea  $z_0 \in K$ . Entonces  $D(z_0, d) \subset D$ . De hecho, podemos tomar  $\varepsilon > 0$  tal que  $D(z_0, d + \varepsilon) \subset D$ . Dada  $f \in \mathcal{F}$ , por la fórmula de Cauchy,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0|=d} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad \text{si } z \in D\left(z_0, \frac{d}{2}\right)$$

Entonces:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \max_{|\xi - z_0|=d} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2}$$

Podemos acotar:

$$|\xi - z| = |(\xi - z_0) + (z_0 - z)| \geq |\xi - z_0| - |z_0 - z| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

Así que  $|\xi - z|^2 \geq \frac{d^2}{4} > 0$ . Luego:

$$|f'(z)| \leq d \frac{M}{d^2/4} = \frac{4M}{d}$$

Hemos probado que si  $z_0 \in K$ ,  $f \in \mathcal{F}$  y  $z \in D\left(z_0, \frac{d}{2}\right) \subset D$ , entonces  $|f'(z)| \leq \frac{4M}{d}$ .

Ahora, sean  $z_1, z_2 \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ . Supongamos que  $|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$ . Si  $\xi \in [z_1, z_2]$ , entonces  $z_2 \in D\left(z_1, \frac{d}{2}\right) \subset D$  y  $|\xi - z_1| \leq |z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$ ,  $\xi \in D\left(z_1, \frac{d}{2}\right)$ . Entonces  $\xi \in D$  y  $|f'(\xi)| \leq \frac{4M}{d}$ . Por tanto:

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(\xi) d\xi \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{\xi \in [z_1, z_2]} |f'(\xi)| \leq |z_2 - z_1| \frac{4M}{d}$$

Entonces, si  $z_1, z_2 \in K$ ,  $|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$  y  $f \in \mathcal{F}$ , se tiene que:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|$$

Ahora, si  $z_1, z_2 \in K$ ,  $|z_2 - z_1| \geq \frac{d}{2}$  y  $f \in \mathcal{F}$ , tenemos:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq |f(z_2)| + |f(z_1)| \leq 2M = 2M \frac{d}{2} \leq \frac{4M}{d} |z_2 - z_1| = A |z_2 - z_1|$$

□

**Teorema 2.8** (Teorema de Arzelá-Ascoli). Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos, siendo  $(X_1, d_1)$  separable y  $(X_2, d_2)$  completo. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de aplicaciones continuas de  $X_1$  en  $X_2$  que verifica:

1.  $\mathcal{F}$  es puntualmente equicontinua. Es decir, dado  $x \in X_1$  se verifica que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $y \in X_1$  con  $d_1(x, y) < \delta$ , entonces  $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$  para toda  $f \in \mathcal{F}$ .
2. Para todo  $x \in X_1$ , el conjunto  $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$  es relativamente compacto.

Entonces, si  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión en  $\mathcal{F}$ , existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $X_1$ .

**Teorema 2.9** (Teorema de Montel). Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
2.  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de  $D$ . Es decir, para cada  $K \subset D$ ,  $K$  compacto, existe  $M_K > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M_K$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  y para todo  $z \in K$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ , con  $\mathcal{F}$  finitamente normal. Supongamos por reducción al absurdo que existe  $K \subset D$ ,  $K$  compacto, tal que  $\mathcal{F}$  no está uniformemente acotada en  $K$ . Entonces existen  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  en  $K$  y  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}$  tales que  $|f_n(z_n)| \rightarrow \infty$ .

Como  $\mathcal{F}$  es una familia finitamente normal, existe  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  subsucesión de  $\{f_n\}$  tal que  $\{f_{n_k}\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$  a una función  $f$  holomorfa en  $D$ . Como  $f$  es continua en  $K$  y  $K$  es compacto, existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in K$ . Por otro lado, como  $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$  uniformemente en  $K$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq k_0$ ,  $z \in K \Rightarrow |f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$ . Entonces  $|f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z)| < 1 + M$ ,  $z \in K$ ,  $k \geq k_0$ . En particular,  $|f_{n_k}(z_{n_k})| < 1 + M$  si  $k \geq k_0$ . Esta es una contradicción.

$\Leftarrow$  Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D$ , uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de  $D$ . Tomamos  $X_1 = D$  y  $X_2 = \mathbb{C}$ .

1. Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , veamos que existe  $\delta > 0$  tal que, si  $z_1 \in D$ ,  $|z_1 - z_0| < \delta$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , entonces  $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Sea  $R > 0$  con  $\overline{D}(0, R) \subset D$ .  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $\overline{D}(z_0, R)$  y por tanto en  $D(z_0, R)$ . Sea  $K = \overline{D}(z_0, \frac{R}{2})$ , que es un subconjunto compacto de  $D(z_0, R)$ . Por la proposición anterior, existe  $A > 0$  tal que

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A |z_2 - z_1|, \quad \text{si } z_1, z_2 \in K, f \in \mathcal{F}$$

Entonces, si  $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{A}, \frac{R}{2}\right)$ ,  $z_1 \in D$ ,  $|z_1 - z_0| < \delta$  y  $f \in \mathcal{F}$ , entonces  $z_1 \in \overline{D}(z_0, \frac{R}{2}) = K$ , así que:

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leq A |z_1 - z_0| < A\delta \leq A \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

2. Sea  $z \in D$ . El conjunto  $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$  está acotado, ya que  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $\{z\}$ . Por tanto, su clausura es compacta.

Entonces, por el teorema de Arzelá-Ascoli, existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Por tanto,  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

□

*Observación.*

1. Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$ . Si  $\mathcal{F}$  es una familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D$ , entonces la familia  $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$  es finitamente normal. En general, si  $k \in \mathbb{N}$ , la familia  $\mathcal{F}^{(k)} = \{f^{(k)} : f \in \mathcal{F}\}$  es finitamente normal.  
Sea  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}'$ . Entonces  $g_n = f'_n$ ,  $f_n \in \mathcal{F}$ . Existe  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  subsucesión de  $\{f_n\}$  que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$  a una función  $f$  holomorfa en  $D$ . Entonces  $g_{n_k} = f'_{n_k} \rightarrow f'$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .
2. Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{G}$  familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D$  con  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
3. Si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  y  $K \subset D(a, R)$ ,  $K$  compacto, entonces existe  $r \in (0, R)$  tal que  $K \subset \overline{D}(a, r)$ .

**Ejemplo.**

1.  $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es entera y } |f(z)| \leq n \text{ si } |z| = n, n = 1, 2, \dots\}$ . Sea  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $K$  compacto, y sea  $f \in \mathcal{F}$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset \overline{D}(0, n_0)$ . Además,  $|f(z_0)| \leq n_0$  si  $|z| = n_0$ . Por el principio del máximo,  $|f(z)| \leq n_0$  si  $|z| \leq n_0$ . En particular,  $|f(z)| \leq n_0$  si  $z \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K$ . Por el teorema de Montel,  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
2.  $\mathcal{P} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}, f(0) = 1, \operatorname{Re}(f(z)) > 0 \forall z \in \mathbb{D}\}$ . Sea  $K \subset \mathbb{D}$ ,  $K$  compacto. Si  $f \in \mathcal{P}$  y  $z \in K$ ,

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

Existe  $R \in (0, 1)$  tal que  $K \subset \overline{D}(0, R)$ . Entonces, si  $f \in \mathcal{P}$  y  $z \in K$ ,

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \leq \frac{1 + R}{1 - R}$$

$\mathcal{P}$  está uniformemente acotada en  $K$  para todo subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{D}$ . Por el teorema de Montel,  $\mathcal{P}$  es finitamente normal.

*Observación.* Si quitamos la condición  $f(0) = 1$  en  $\mathcal{P}$ , la familia deja de ser finitamente normal. Por ejemplo,  $f_n(z) = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\{f_n : n = 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{P}$ . Si tomamos  $K = \{0\}$ ,  $\mathcal{P}$  no está uniformemente acotada en  $K$ , así que  $\mathcal{P}$  no es finitamente normal.

Recordemos que  $\mathcal{P} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}, f \prec P\}$ , con  $P(z) = \frac{1+z}{1-z}$ . Esto es un caso particular del siguiente ejemplo.

3. Sea  $F$  holomorfa en  $\mathbb{D}$  y sea

$$\mathcal{F}_F = \{f : f \text{ holomorfa en } \mathbb{D}, f \prec F\}$$

Entonces  $\mathcal{F}_F$  es finitamente normal.

4. Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D(a, R)$ . Para cada  $f \in \mathcal{F}$ , consideramos el desarrollo de Taylor de  $f$  centrado en  $a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z-a)^n, \quad z \in D(a, R)$$

Entonces  $M_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)| < \infty$  para cada  $n$  y la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$ , y por tanto define una función holomorfa en  $D(a, R)$ .

*Demostración.* Fijado  $n$ , si  $f \in \mathcal{F}$  tenemos:

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Rightarrow |a_n(f)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

La familia  $\mathcal{F}^{(n)}$  es finitamente normal y por tanto está uniformemente acotada en el conjunto  $\{a\}$ , por lo que  $\{f^{(n)}(a) : f \in \mathcal{F}\}$  está acotado. Es decir,  $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f^{(n)}(a)| < \infty$ . Entonces  $M_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)| = \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} < \infty$ . Consideramos la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n (z-a)^n$$

Si  $r \in (0, R)$ , tenemos que  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $\overline{D}(a, r)$ , y por tanto existe  $M(r) > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M(r)$  si  $z \in \overline{D}(a, r)$  y  $f \in \mathcal{F}$ . Si  $f \in \mathcal{F}$ , por la fórmula de Cauchy,

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \text{si } r \in (0, R), n = 0, 1, 2, \dots$$

Así que:

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \leq r \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}, \quad \text{si } r \in (0, R), n = 0, 1, 2, \dots, f \in \mathcal{F}$$

Tomando supremo en  $f \in \mathcal{F}$  tenemos que:

$$|M_n| = M_n \leq \frac{M(r)}{r^n} \Rightarrow \sqrt[n]{M_n} \leq \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r}, \quad \text{si } r \in (0, R), n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r} = \frac{1}{r}, \quad \text{si } r \in (0, R)$$

Haciendo  $r \rightarrow R$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} \leq \frac{1}{R}$$

Entonces el radio de convergencia es mayor o igual que  $R$ . □

5.  $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D} \text{ y } \iint_{\mathbb{D}} |f(z)| dx dy \leq M\}$ , siendo  $M > 0$ . Veamos que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

Sea  $K \subset \mathbb{D}$ ,  $K$  compacto. Tomamos  $r \in (0, 1)$  con  $K \subset D(0, r)$ . Sea  $f \in \mathcal{F}$  y  $z \in K$ , por la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta} - z} \rho d\theta, \quad r \leq \rho < 1$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - z|} \rho d\theta, \quad r \leq \rho < 1$$

$$\int_{\frac{1+r}{2}}^1 |f(z)| d\rho \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1+r}{2}}^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - z|} \rho d\theta d\rho = \frac{1}{2\pi} \iint_{\frac{1+r}{2} < |w| < 1} \frac{|f(w)|}{|w - z|} dx dy$$

Como  $|w - z| \geq |w| - |z| > \frac{1+r}{2} - r = \frac{1-r}{2} > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_{\frac{1+r}{2} < |w| < 1} \frac{|f(w)|}{|w - z|} dx dy &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1-r} \iint_{\frac{1+r}{2} < |w| < 1} |f(w)| dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi(1-r)} \iint_{\mathbb{D}} |f(w)| dx dy \leq \frac{M}{\pi(1-r)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_{\frac{1+r}{2}}^1 |f(z)| d\rho = |f(z)| \left(1 - \frac{1+r}{2}\right) = |f(z)| \frac{1-r}{2}$$

Entonces:

$$|f(z)| \frac{1-r}{2} \leq \frac{M}{\pi(1-r)} \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2M}{\pi(1-r)^2}$$

Por tanto,  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K$ .

**Teorema 2.10.** Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de funciones holomorfas en  $D(a, R)$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.
2. Existe una sucesión  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  con  $M_n \geq 0$  para todo  $n$  tal que la serie de potencias  $\sum_{n=0}^\infty M_n(z-a)^n$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$  y tal que, si para cada  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(f)(z-a)^n, \quad z \in D(a, r)$$

se tiene que  $|a_n(f)| \leq M_n$  para todo  $n$  y para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

*Demostración.*

$$\Rightarrow M_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)|.$$

$\Leftarrow$  Sea  $K \subset D(a, R)$ ,  $K$  compacto. Existe  $r \in (0, R)$  tal que  $K \subset \overline{D}(a, r)$ . Si  $z \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ , se tiene:

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^\infty a_n(f)(z-a)^n \right| \leq \sum_{n=0}^\infty |a_n(f)| |z-a|^n \leq \sum_{n=0}^\infty M_n |z-a|^n \leq \sum_{n=0}^\infty M_n r^n < \infty$$

ya que  $\sum_{n=0}^\infty M_n(z-a)^n$  converge para  $z = a + r$ .  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K$ .

□

## 2.3. El teorema de Stieltjes-Vitali

**Teorema 2.11** (Teorema de Stieltjes-Vitali). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia finitamente normal de funciones holomorfas en  $D$ . Sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $\mathcal{F}$ . Si existe  $A \subset D$  tal que  $A$  tiene algún punto de acumulación en  $D$ , para el que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \in \mathbb{C}$  para todo  $a \in A$ , entonces  $\{f_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

*Demostración.*

1. Veamos que  $\{f_n\}$  converge puntualmente en  $D$ . Sea  $z^* \in D$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\{f_n(z^*)\}$  no converge. Como  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en el conjunto  $\{z^*\}$ , tenemos que  $\{f_n(z^*)\}$  está acotado. Por tanto, existen  $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$  y  $\{f_{m_i}\}_{i=1}^\infty$  subsucesiones de  $\{f_n\}$ , y  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  distintos, tales que  $f_{n_i}(z^*) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w_1$ ,  $f_{m_i}(z^*) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} w_2$ . Como  $\mathcal{F}$  es finitamente normal, existen  $\{g_k\}_{k=1}^\infty$  y  $\{h_k\}_{k=1}^\infty$  subsucesiones de  $\{f_{n_i}\}$  y  $\{f_{m_i}\}$ , respectivamente, que convergen uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Sean  $g$  y  $h$  los respectivos límites. Entonces  $g$  y  $h$  son holomorfas en  $D$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} g_k(z^*) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} w_1, & g(z^*) &= w_1 \\ h_k(z^*) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} w_2, & h(z^*) &= w_2 \end{aligned}$$

Si  $a \in A$ , existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \in \mathbb{C}$ , así que  $g(a) = h(a)$ .  $g$  y  $h$  son holomorfas en  $D$ ,  $g = h$  en  $A$  y  $A$  tiene algún punto de acumulación en  $D$ . Por el teorema de identidad,  $g = h$  en  $D$ . Pero  $g(z^*) = w_1 \neq w_2 = h(z^*)$ . Esto contradice nuestro supuesto.

2. Sea  $K \subset D$ ,  $K$  compacto. Sea  $\alpha > 0$  tal que  $2\alpha < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus D)$ . Si  $D = \mathbb{C}$ , tomamos  $\alpha > 0$  cualquiera. Sean  $G = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, K) < \alpha\}$  y  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, K) \leq \alpha\}$ .  $G$  es abierto,  $K_1$  es compacto y  $K \subset G \subset K_1 \subset D$ .

Veamos que  $K_1 \subset D$ . Si  $z \in K_1$ ,  $\text{dist}(z, K) \leq \alpha$ . Supongamos que  $z \in D$ . Tomamos  $w \in K$  con  $|z - w| < 2\alpha$ . Entonces  $2\alpha < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus D) \leq |w - z| < 2\alpha$ . Esto contradice nuestra hipótesis.

$\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $K_1$  y por tanto en  $G$ .  $K \subset G$ ,  $K$  compacto. Por una proposición previa, existe  $A > 0$  tal que  $|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|$  si  $z_1, z_2 \in K$  y  $f \in \mathcal{F}$ . Vamos a ver que  $\{f_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $K$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $\delta = \frac{\varepsilon}{3A} > 0$ . Tenemos que si  $z_1, z_2 \in K$ ,  $|z_1 - z_2| < \delta$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq A|z_1 - z_2| < A\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Consideramos la familia  $\{D(z, \delta) : z \in K\}$ . Como  $K$  es compacto, existen  $z_1, z_2, \dots, z_N \in K$  tales que  $K \subset \bigcup_{j=1}^N D(z_j, \delta)$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, N\}$ , la sucesión  $\{f_n(z_j)\}_{n=1}^\infty$  es de Cauchy, ya que  $\{f_n\}$  converge puntualmente en  $D$ . Por tanto, existe  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq n_j \Rightarrow |f_n(z_j) - f_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Sea  $n_0 = \max\{n_j : j = 1, \dots, N\}$ . Si  $n, m \geq n_0$  y  $z \in K$ , hay que probar que  $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ . Tomamos  $j \in \{1, \dots, N\}$  con  $z \in D(z_j, \delta)$ .

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_m(z_j)| + |f_m(z_j) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

**Ejemplo.** Para  $x \geq 0$ , tenemos que  $(1 + \frac{x}{n})^n$  es una sucesión creciente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , siendo la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ .

Sea  $D = \mathbb{C}$ ,  $f_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Cada  $f_n$  es una función entera. Veamos que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

Sea  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $K$  compacto. Tomamos  $R > 0$  con  $K \subset \overline{D}(0, R)$ . Si  $k \in K$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n(z)| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n \leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{R}{n}\right)^n \leq e^R$$

Sea  $A = [0, 1]$ .  $A$  tiene puntos de acumulación en  $\mathbb{C}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^x$  para todo  $x \in A$ . Por el teorema de Stieltjes-Vitali,  $\{f_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ . Sea  $f$  el límite, entonces  $f$  es entera. Si  $x \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = e^x$ . Por el teorema de identidad,  $f(z) = e^z$  si  $z \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 2.12** (Teorema de Lindelöf). Sea  $f$  holomorfa y acotada en  $\mathbb{D}$ . Sea  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  y supongamos que existe el límite radial, es decir,  $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\xi) = L \in \mathbb{C}$ . Entonces para todo  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  existe el límite tangencial de  $f$  en  $\xi$ , es decir,

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in S_\alpha(\xi)} f(z) = L$$

siendo  $S_\alpha(\xi)$  el vector de vértice  $\xi$  y ángulo  $2\alpha$ , simétrico con respecto al segmento  $[0, \xi]$ .

**Teorema 2.13.** Sea  $f$  holomorfa y acotada en  $D(1, 1)$ . Supongamos que existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L \in \mathbb{C}$ . Entonces para todo  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  existe

$$\lim_{z \rightarrow 0, |\text{Arg}(z)| < \alpha} f(z) = L$$

*Demostración.* Sea  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  si  $z \in D(1, 1)$ . Consideramos la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $f_n(z) = f\left(\frac{z}{n}\right)$ . Cada  $f_n$  es holomorfa en  $D(1, 1)$ . La familia  $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  está uniformemente acotada en  $D$ , porque si  $z \in D$  y  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $|f_n(z)| = \left|f\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leq M$ . Así que  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

Sea  $A = (0, 1)$ . Si  $x \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = L$ . Por el teorema de Stieltjes-Vitali,  $\{f_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D(1, 1)$ . Sea  $g$  el límite, entonces  $g$  es holomorfa en  $D(1, 1)$  y  $g(x) = L$  para todo  $x \in A$ . Por el teorema de identidad,  $g(z) = L$  para todo  $z \in D(1, 1)$ . Hemos probado que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

Sea  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Sea  $K = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\cos(\alpha)}{2} \leq |z| \leq \cos(\alpha), |\text{Arg}(z)| \leq \alpha\right\}$ .  $K$  es un subconjunto compacto de  $D(1, 1)$ , así que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  uniformemente en  $K$ . Es decir, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n \geq n_0$  y  $z \in K$ , entonces  $|f_n(z) - L| < \varepsilon$ .

Sea  $\delta = \frac{\cos(\alpha)}{2n_0} > 0$ . Sea  $z$  tal que  $0 < |z| < \delta$  y  $|\text{Arg}(z)| < \alpha$ . Observamos que  $|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2n_0} \leq \frac{\cos(\alpha)}{2}$ . Tomamos  $n_z$  el primer natural para el que  $n_z|z| \geq \frac{\cos(\alpha)}{2}$ . Como  $|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2n_0} \Leftrightarrow n_0|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2}$ , entonces  $1 \leq n_0 < n_z$ . Por otro lado,

$$(n_z - 1)|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2} \Leftrightarrow n_z|z| - |z| < \frac{\cos(\alpha)}{2} \Leftrightarrow n_z|z| < |z| + \frac{\cos(\alpha)}{2} < \frac{\cos(\alpha)}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{2} = \cos(\alpha)$$

Así que  $\frac{\cos(\alpha)}{2} \leq n_z|z| = |n_z z| < \cos(\alpha)$ . Además,  $|\text{Arg}(n_z z)| = |\text{Arg}(z)| < \alpha$ . Por tanto,  $n_z z \in K$ . Entonces:

$$|f_{n_k}(n_z z) - L| = |f(z) - L| < \varepsilon$$

□

## 2.4. Teoremas de Hurwitz

**Teorema 2.14** (Teorema de Rouché). *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  y sea  $J$  un camino de Jordan en  $D$ . Sean  $f$  y  $g$  funciones holomorfas en  $D$  tales que*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{si } z \in J$$

*Entonces:*

1.  $I(J) \subset D$ .
2. Ni  $f$  ni  $g$  se anulan en  $J$ .
3.  $f$  y  $g$  tienen el mismo número de ceros en  $I(J)$ .

**Teorema 2.15** (Primer teorema de Hurwitz). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones holomorfas y nunca nulas en  $D$ , que converge uniformemente en cada subconjunto de  $D$  a una función  $f$ . Entonces  $f$  es nunca nula en  $D$  o bien  $f$  es idénticamente nula en  $D$ .*

*Demostración.* Si  $f \equiv 0$  en  $D$ , no hay nada que hacer. Supongamos que  $f \not\equiv 0$  en  $D$ . Supongamos por reducción al absurdo que existe  $a \in D$  con  $f(a) = 0$ . Entonces  $a$  es un cero aislado de  $f$ . Podemos tomar  $R > 0$  tal que  $D(a, 2R) \subset D$  y  $f$  no tiene ceros en  $D(a, 2R) \setminus \{a\}$ .

Sea  $C_R$  la circunferencia  $|z - a| = R$ . Como  $f$  no tiene ceros en  $C_R$ , existe  $\alpha > 0$  tal que  $|f(z)| > \alpha$  para todo  $z \in C_R$ . Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $C_R$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0, z \in C_R \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \alpha$ . Entonces, si  $n \geq n_0$  y  $z \in C_R$ , se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| < \alpha < |f(z)|$$

Por el teorema de Rouché,  $f_n$  y  $f$  tienen el mismo número de ceros en  $D(a, R)$ . Pero  $f_n$  es nunca nula en  $D$ , por lo que no tiene ceros en  $D(a, R)$ , mientras que  $f(a) = 0$ . Esta es una contradicción. Entonces  $f$  es nunca nula en  $D$ . □



**Teorema 2.16** (Segundo teorema de Hurwitz). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en  $D$ . Si  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  en cada subconjunto compacto de  $D$ , entonces  $f$  es inyectiva o constante.*

*Demostración.* Sabemos que  $f$  es holomorfa en  $D$ . Supongamos que  $f$  no es constante. Sean  $a, b \in D$  con  $a \neq b$ . Veamos que  $f(a) \neq f(b)$ .  $D \setminus \{a\}$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$  si  $z \in D \setminus \{a\}$ . Cada  $g_n$  es holomorfa y nunca nula en  $D \setminus \{a\}$ .  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Sea  $g(z) = f(z) - f(a)$ ,  $z \in D \setminus \{a\}$ . Entonces  $g_n \rightarrow g$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D \setminus \{a\}$ . Por el teorema anterior,  $g \equiv 0$  en  $D \setminus \{a\}$  o bien  $g$  es nunca nula en  $D \setminus \{a\}$ .

1. Si  $g \equiv 0$  en  $D \setminus \{a\}$ , entonces  $f(z) = f(a)$  si  $z \in D \setminus \{a\} \Rightarrow f(z) = f(a)$  si  $z \in D$ .  $f$  es constante, lo que contradice nuestra hipótesis.
2. Si  $g(z) \neq 0$  si  $z \in D \setminus \{a\}$ , en particular  $g(b) = f(b) - f(a) \neq 0 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ .

□

## Capítulo 3

# El teorema de Riemann de la aplicación conforme

### 3.1. Preliminares

Recordemos algunos conceptos y resultados.

**Definición 3.1.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  una función holomorfa en  $D$ .

- $g$  es una rama de  $\sqrt{f}$  en  $D$  si  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua tal que  $g(z)^2 = f(z)$  para todo  $z \in D$ .
- $g$  es una rama de  $\log(f)$  en  $D$  si  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua tal que  $e^{g(z)} = f(z)$  para todo  $z \in D$ .

**Proposición 3.1.** Sean  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función holomorfa y nunca nula en  $D$ .

1. Si  $g$  es una rama de  $\sqrt{f}$  en  $D$ , entonces  $g$  es holomorfa en  $D$  y  $g'(z) = \frac{f'(z)}{2g(z)}$  para todo  $z \in D$ .
2. Si  $g$  es una rama de  $\log(f)$  en  $D$ , entonces  $g$  es holomorfa en  $D$  y  $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$  para todo  $z \in D$ .
3. Existe una rama de  $\log(f)$  en  $D$  si y solo si  $\frac{f'}{f}$  tiene primitiva en  $D$ .

**Proposición 3.2.** Sean  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en  $D$ . Entonces  $f$  tiene primitiva en  $D$  si y solo si  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$ .

**Definición 3.2.** Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $\Gamma$  es un ciclo en  $D$ , se dice que  $\Gamma$  es homólogo a cero módulo  $D$ , y se denota  $\Gamma \sim 0(\text{mod } D)$ , si  $n(\Gamma, a) = 0$  para todo  $a \in \mathbb{C} \setminus D$ .

**Teorema 3.3** (Versión general del teorema de Cauchy). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\Gamma$  un ciclo en  $D$ . Las dos siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\Gamma \sim 0(\text{mod } D)$ .
2.  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  para toda función  $f$  holomorfa en  $D$ .

### 3.2. Dominios simplemente conexos

**Definición 3.3.** Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ , se dice que  $D$  es simplemente conexo si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  es conexo.

Hay una serie de caracterizaciones para los dominios simplemente conexos, que se pueden deducir de los resultados anteriores.

**Teorema 3.4.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $D$  es simplemente conexo.
2. Todo ciclo en  $D$  es homólogo a cero módulo  $D$ .
3. Todo camino cerrado en  $D$  es homólogo a cero módulo  $D$ .
4.  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  para toda  $f$  holomorfa en  $D$  y para todo ciclo  $\Gamma$  en  $D$ .
5.  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  para toda  $f$  holomorfa en  $D$  y para todo camino cerrado  $\gamma$  en  $D$ .
6. Toda función holomorfa en  $D$  tiene primitiva.
7. Para toda función  $f$  holomorfa y nunca nula en  $D$ , existe una rama de  $\log(f)$  en  $D$ .
8. Para toda función  $f$  holomorfa y nunca nula en  $D$ , existe una rama de  $\sqrt{f}$  en  $D$ .

Recordamos que:

- Dos dominios  $D_1$  y  $D_2$  en  $\mathbb{C}^*$  son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme  $f$  de  $D_1$  sobre  $D_2$ .
- En el conjunto de los dominios en  $\mathbb{C}^*$ , el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.
- Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos dominios en  $\mathbb{C}^*$  que son conformemente equivalentes, entonces  $D_1$  es simplemente conexo si y solo si  $D_2$  es simplemente conexo.
- $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$  y el disco unidad  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  son tres dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}^*$ , que no son conformemente equivalentes.
- El único dominio en  $\mathbb{C}^*$  conformemente equivalente a  $\mathbb{C}^*$  es  $\mathbb{C}^*$ .

Vamos a ver que, además de  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$ , no hay más dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}^*$  módulo la relación de equivalencia. Es decir, si  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ , entonces  $D$  es conformemente equivalente a uno de los tres:  $\mathbb{C}^*$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{D}$ . Por tanto se tendrá que, si  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$ , con  $D \neq \mathbb{C}$ , entonces  $D$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ .

**Definición 3.4.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}^*$ . Llamamos automorfismos de  $D$  a aquellas aplicaciones conformes de  $D$  sobre  $D$ . El conjunto de todos los automorfismos de  $D$  se denota  $Aut(D)$ , y tiene estructura de grupo con la composición.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 Aut(\mathbb{C}^*) &= \mathcal{M} \\
 Aut(\mathbb{C}) &= \{f_{\alpha, \beta} : f_{\alpha, \beta}(z) = \alpha z + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\} = \{T \in \mathcal{M} : T(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\} \\
 Aut(\mathbb{D}) &= \{\lambda T_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \{T \in \mathcal{M} : T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Veamos algunos ejemplos de dominios en  $\mathbb{C}$  para los que podemos encontrar una aplicación conforme del dominio sobre  $\mathbb{D}$ .

1. Un disco abierto,  $D(a, R)$ ,  $a \in \mathbb{C}, R > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D} &\rightarrow D(a, R) \\
 z &\mapsto a + rz
 \end{aligned}$$

2. Un semiplano.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \\
 z &\mapsto P(z)
 \end{aligned}$$

donde  $P(z) = \frac{1+z}{1-z}$ , es una aplicación conforme.

Componiendo con una rotación y una traslación, vemos que  $\mathbb{D}$  es conformemente equivalente a cualquier semiplano.

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a + e^{i\theta} P(z)\end{aligned}$$

con  $a \in \mathbb{C}$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ .

3. El exterior de un disco,  $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| > R\} \cup \{\infty\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$ .

$$\begin{aligned}D(a, R) &\rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z - a| > R\} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z}\end{aligned}$$

4. El plano menos una semirrecta,  $\mathbb{C} \setminus \{a + re^{i\theta}, r \geq 0\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\mapsto z^2\end{aligned}$$

es una aplicación conforme. Así que

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\mapsto P(z)^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\end{aligned}$$

es una aplicación conforme.

Componiendo con una rotación y una traslación, vemos que  $\mathbb{D}$  es conformemente equivalente al plano menos una semirrecta cualquiera.

5. La función exponencial no es inyectiva.

$$z = x + iy_0 \mapsto e^z = e^{x+iy_0} = e^x(\cos(y_0) + i \sin(y_0))$$

Es inyectiva en cualquier banda horizontal abierta de amplitud menor o igual que  $2\pi$ . Por ejemplo,

$$\exp : \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{H}$$

es una aplicación conforme. Como  $\mathbb{H}$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ , tenemos que esta banda es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ .

Componiendo con el producto por un número real, una rotación y una traslación, vemos que  $\mathbb{D}$  es conformemente equivalente a cualquier banda.

6. Sectores.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\alpha}{2} \right\} \xrightarrow{\exp} S$$

donde  $S$  es el sector de vértice 0 y amplitud  $\alpha$ , es una aplicación conforme.

7.  $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ .

$$\mathbb{D}^+ \xrightarrow{P} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

es una aplicación conforme. El dominio  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$  es un sector, así que es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ .

### 3.3. El teorema de Riemann de la aplicación conforme

**Teorema 3.5** (Teorema de Riemann de la aplicación conforme). *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$  y sea  $z_0 \in D$ . Entonces existe una única aplicación conforme  $f$  de  $D$  sobre  $\mathbb{D}$  tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ .*

*Observación.*

1. Existen infinitas aplicaciones conformes de  $D$  sobre  $\mathbb{D}$ . Basta cambiar el punto  $z_0$  o componer con una rotación.
2. Para la demostración, las condiciones
  - a)  $D$  simplemente conexo.
  - b)  $D \neq \mathbb{C}$ .

solo las vamos a utilizar para deducir que:

- $\mathbb{C} \setminus D$  tiene más de un punto.
- Si  $h$  es holomorfa y nunca nula en  $D$ , existe una rama de  $\sqrt{h}$  en  $D$ .

**Teorema 3.6.** *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  tal que:*

1.  $\mathbb{C} \setminus D$  tiene más de un punto.
2. Para toda función  $h$  holomorfa y nunca nula en  $D$ , existe una rama de  $\sqrt{h}$  en  $D$ .

*Sea  $z_0 \in D$ . Entonces existe una única aplicación conforme  $f$  de  $D$  sobre  $\mathbb{D}$  tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es holomorfa e inyectiva en } D, f(D) \subset \mathbb{D}, f(z_0) = 0\}$ .

1. Veamos que  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Por (1), existen  $a, b \in \mathbb{C} \setminus D$  con  $a \neq b$ . Sea  $\varphi(z) = \frac{z-a}{z-b}$ ,  $z \in D$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{vmatrix} = -b + a \neq 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{M}$$

$\varphi$  es holomorfa e inyectiva en  $D$  y  $\varphi$  es nunca nula en  $D$ , porque  $a, b \notin D$ . Por (2), existe  $\psi$  rama de  $\sqrt{\varphi}$  en  $D$ .  $\psi$  es holomorfa e inyectiva en  $D$  y  $\psi$  es nunca nula.

Además, se tiene que si  $w \in \psi(D)$ , entonces  $-w \notin \psi(D)$ . Veámoslo. Supongamos que  $w \in \psi(D)$  y  $-w \in \psi(D)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} w &= \psi(z_1), & z_1 &\in D \\ -w &= \psi(z_2), & z_2 &\in D \end{aligned}$$

$$\psi(z_1)^2 = w^2 = (-w)^2 = \psi(z_2)^2 \Leftrightarrow \varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow w = -w \Leftrightarrow w = 0 \in \psi(D)$$

Sin embargo,  $\psi$  es nunca nula en  $D$ .

Tomamos  $w_0 \in \psi(D)$ . Como  $\psi(D)$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $\overline{D}(0, r) \subset \psi(D)$ . Entonces, si  $z \in D$  se tiene que  $\psi(z) \in \psi(D)$  y por tanto  $-\psi(z) \notin \psi(D)$ , de manera que  $-\psi(z) \notin \overline{D}(w_0, r)$ . Es decir,

$$|-\psi(z) - w_0| > r \Leftrightarrow |\psi(z) + w_0| > r > 0 \Leftrightarrow \frac{r}{|\psi(z) + w_0|} < 1$$

Sea  $h(z) = \frac{r}{\psi(z) + w_0}$ ,  $z \in D$ .  $h$  es holomorfa e inyectiva en  $D$  y  $|h(z)| < 1$  para todo  $z \in D$ , luego  $h(D) \subset \mathbb{D}$ . Consideramos la transformación de Möbius  $S_{h(z_0)}(z) = \frac{z - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)}z}$ . Sabemos que  $S_{h(z_0)}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $S_{h(z_0)}(h(z_0)) = 0$ . Por tanto,  $f = S_{h(z_0)} \circ h \in \mathcal{F}$ .

2.  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada en  $D$ . Por el teorema de Montel,  $\mathcal{F}$  es finitamente normal.

3. Sea  $M = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|$ ,  $0 \leq M \leq \infty$ . Si  $f \in \mathcal{F}$ ,  $f$  es holomorfa e inyectiva en  $D$ , por lo que  $f'(z_0) \neq 0$ . Entonces  $M \neq 0$ . Como  $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$  es finitamente normal, entonces está uniformemente acotada en  $\{z_0\}$ . Entonces  $\{f'(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$  está acotado, así que  $M = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)| < \infty$ . Por tanto,  $0 < M < \infty$ .

Tomamos una sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\mathcal{F}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(z_0)| = M$ . Como  $\mathcal{F}$  es finitamente normal, existe  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  subsucesión de  $\{f_n\}$  que converge a una función  $F$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Entonces  $F$  es holomorfa en  $D$  y cada  $f_{n_k}$  es holomorfa e inyectiva en  $D$ . Por el segundo teorema de Hurwitz,  $F$  es inyectiva o constante. Como  $f'_{n_k} \rightarrow F'$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ , se tiene que  $f'_{n_k}(z_0) \rightarrow F'(z_0)$ , así que  $|f'_{n_k}(z_0)| \rightarrow |F'(z_0)| = M > 0$ . Luego  $F$  no es constante. Entonces  $F$  es inyectiva. Además,  $F(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_0) = 0$  porque  $f_{n_k}(z_0) = 0$ . Si  $z \in D$ ,  $F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z)$ , así que  $|F(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(z)| \leq 1$  porque  $|f_{n_k}(z)| < 1$ . Pero si  $|F(z)| = 1$  para algún  $z \in D$ , por el principio del máximo  $F$  sería constante, lo cual es imposible. Por tanto,  $|F(z)| < 1$  para todo  $z \in D$ , luego  $F(D) \subset \mathbb{D}$ . Entonces  $F \in \mathcal{F}$  y  $|F'(z_0)| = M$ .

4. Veamos que  $F(D) = \mathbb{D}$ . Supongamos por reducción al absurdo que existe  $\alpha \in \mathbb{D} \setminus F(D)$ . Consideramos  $S_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$  transformación de Möbius con  $S_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $S_\alpha(\alpha) = 0$ . Sea  $h = S_\alpha \circ F$ .  $h$  es holomorfa e inyectiva en  $D$ . Además,  $h$  es nunca nula en  $D$  y  $h(D) \subset \mathbb{D}$ . Por (2), existe  $g$  una rama de  $\sqrt{h}$  en  $D$ , es decir,  $g^2 = h$  en  $D$ .  $g$  es holomorfa, inyectiva y nunca nula en  $D$ , con  $g(D) \subset \mathbb{D}$ . Sea  $G = S_{g(z_0)} \circ g$ .  $G$  es holomorfa e inyectiva en  $D$ , con  $G(D) \subset \mathbb{D}$  y  $G(z_0) = 0$ . Por tanto,  $G \in \mathcal{F}$ .

Calculemos  $|G'(z_0)|$ .

$$G'(z_0) = g'(z_0)S'_{g(z_0)}(g(z_0))$$

En primer lugar, hallamos la derivada de  $S_a$ .

$$S'_a(z) = \frac{1 - \bar{a}z + (z - a)\bar{a}}{(1 - \bar{a}z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}$$

Observamos que  $S'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$  y  $S'_a(0) = 1 - |a|^2$ . Así que:

$$G'(z_0) = g'(z_0) \frac{1}{1 - |g(z_0)|^2} \Rightarrow |G'(z_0)| = \frac{|g'(z_0)|}{1 - |g(z_0)|^2}$$

Como  $g^2 = h$  en  $D$ , también tenemos que  $2gg' = h'$  en  $D$ . Luego  $|g(z_0)|^2 = |h(z_0)|$  y también  $2|g(z_0)||g'(z_0)| = |h'(z_0)|$ . Entonces:

$$|G'(z_0)| = \frac{|h'(z_0)|}{2|g(z_0)|} \frac{1}{1 - |g(z_0)|^2} = \frac{|h'(z_0)|}{2\sqrt{|h(z_0)|}} \frac{1}{1 - |h(z_0)|}$$

Calculamos también:

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= F'(z_0)S'_\alpha(F(z_0)) = F'(z_0)S'_\alpha(0) = F'(z_0)(1 - |\alpha|^2) \\ h(z_0) &= S_\alpha(F(z_0)) = S_\alpha(0) = -\alpha \Rightarrow |h(z_0)| = |\alpha| \end{aligned}$$

Por tanto:

$$|G'(z_0)| = \frac{|F'(z_0)|(1 - |\alpha|^2)}{2\sqrt{|\alpha|}(1 - |\alpha|)} = M \frac{1 - |\alpha|^2}{2\sqrt{|\alpha|}(1 - |\alpha|)} = M \frac{1 + |\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}}$$

Veamos que  $\frac{1+|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} > 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{1+|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} > 1 &\Leftrightarrow 1 + |\alpha| > 2\sqrt{|\alpha|} \Leftrightarrow 1 + \alpha - 2\sqrt{|\alpha|} > 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{|\alpha|})^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{|\alpha|} \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{|\alpha|} \neq 1 \Leftrightarrow |\alpha| \neq 1 \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in \mathbb{D}$ , la desigualdad se cumple. Por tanto, tenemos que  $|G'(z_0)| > M$ , con  $G \in \mathcal{F}$  y  $M = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|$ , luego llegamos a contradicción. Entonces,  $F(D) = \mathbb{D}$ .

5. Tenemos  $F \in \mathcal{F}$ ,  $|F'(z_0)| = M$  y  $F(D) = \mathbb{D}$ .  $F$  es una aplicación conforme de  $D$  sobre  $\mathbb{D}$  con  $F(z_0) = 0$ . Falta que  $F'(z_0) > 0$ .

Queremos encontrar  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| = 1$  tal que  $f = \lambda F$  verifique que  $f'(z_0) > 0$ .

$$f'(z_0) = \lambda F'(z_0) > 0 \Leftrightarrow f'(z_0) = |\lambda| |F'(z_0)| = |F'(z_0)| = M \Rightarrow \lambda = \frac{M}{F'(z_0)}$$

Sea  $\lambda = \frac{M}{F'(z_0)} \in \mathbb{C}$ , con  $|\lambda| = \frac{M}{|F'(z_0)|} = 1$ ,  $F'(z_0) \neq 0$ . Sea  $f = \lambda F$ .  $f$  es holomorfa e inyectiva en  $D$ , con  $f(D) = \mathbb{D}$ ,  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) = \lambda F'(z_0) = \frac{M}{F'(z_0)} F'(z_0) = M > 0$ .

6. Veamos que esta aplicación conforme es única. Supongamos  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{D}$  aplicación conforme, con  $f_j(z_0) = 0$ ,  $f'_j(z_0) > 0$ . Sea  $g = f_1 \circ f_2^{-1}$ .

$$g : \mathbb{D} \xrightarrow{f_2^{-1}} D \xrightarrow{f_1} \mathbb{D}$$

$g$  es una aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $\mathbb{D}$ , así que es de la forma

$$g(z) = \lambda T_a(z) = \lambda \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}$$

Como  $g(0) = 0$ ,

$$g(0) = \lambda a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow g(z) = \lambda z$$

Como  $g \circ f_2 = f_1$  en  $D$ ,

$$f'_2(z_0)g'(f_2(z_0)) = f'_1(z_0) \Leftrightarrow f'_2(z_0)g'(0) = f'_1(z_0) \Leftrightarrow g'(0) = \frac{f'_1(z_0)}{f'_2(z_0)} > 0$$

Como  $g'(0) = \lambda > 0$  y  $|\lambda| = 1$ , entonces  $\lambda = 1$ . Por tanto,  $g(z) = z \Leftrightarrow f_1 = f_2$ .

□

## Otros enunciados equivalentes

**Teorema 3.7** (Teorema de Riemann). *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$  y sea  $z_0 \in D$ . Entonces existe una única aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$  tal que  $f(0) = z_0$  y  $f'(0) > 0$ .*

**Teorema 3.8** (Teorema de Riemann: enunciado equivalente). *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$  y sea  $z_0 \in D$ . Entonces existe un único  $R > 0$  tal que existe una aplicación conforme  $f$  de  $D$  sobre  $D(0, R)$  con  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) = 1$ . Además, esta  $f$  es única.*

A este número  $R$  se le denomina radio conforme interior a  $D$  en  $z_0$  y se denota  $r(D, z_0)$ .

*Demostración.* Este enunciado es equivalente al teorema de Riemann. Si  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$  y  $z_0 \in D$ .

1. Si  $f : D \rightarrow \mathbb{D}$  aplicación conforme,  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ , entonces si  $R = \frac{1}{f'(z_0)} > 0$  se tiene que  $g = Rf : D \rightarrow D(0, R)$  es una aplicación conforme con  $g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) = 1$ .
2. Si  $R > 0$ ,  $g : D \rightarrow D(0, R)$  es una aplicación conforme con  $g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) = 1$ , entonces  $f = \frac{1}{R}g : D \rightarrow \mathbb{D}$  es una aplicación conforme con  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) = \frac{1}{R}g'(z_0) = \frac{1}{R} > 0$ .

□

*Observación.* Hemos visto que cualquier dominio  $D$  simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ . Entonces, si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}$  con  $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}$ ,  $D_1$  y  $D_2$  son conformemente equivalentes.

### 3.4. Clasificación de los dominios simplemente conexos

En  $\mathbb{C}^*$  tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.9.** *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$  tal que  $\mathbb{C}^* \setminus D$  tiene más de un punto. Entonces  $D$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.*

- Si  $D \subset \mathbb{C}$ , entonces  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$ , ya que  $\mathbb{C}^* \setminus D$  tiene más de un punto. Entonces  $D$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ .
- Si  $\infty \in D$ , entonces tomamos  $a, b \in \mathbb{C}^* \setminus D$  con  $a \neq b$ . Entonces  $a, b \in \mathbb{C} \setminus D$ . Sea  $T(z) = \frac{1}{z-a}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ , con  $T(a) = \infty$  y  $T(\infty) = 0$ .  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  es una aplicación conforme. Entonces  $D \xrightarrow{T} T(D) = D'$  es una aplicación conforme y  $D'$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ .

Como  $a, b \notin D$ ,  $T(a) = \infty \notin D'$ , así que  $D'$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ . Además,  $T(b) \notin D'$  con  $T(b) \in \mathbb{C}$ , luego  $D' \neq \mathbb{C}$ .  $D'$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$ , con  $D' \neq \mathbb{C}$ . Por tanto,  $D'$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ . Como  $D'$  es conformemente equivalente a  $D$ , entonces  $D$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ . □

Ya tenemos clasificados los dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}^*$  módulo la relación de equivalencia ser conformemente equivalentes.

Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}^*$ .

1. Si  $\mathbb{C}^* \setminus D = \emptyset$ , entonces  $D = \mathbb{C}^*$ , que es el único dominio conformemente equivalente a  $\mathbb{C}^*$ .
2. Si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  se reduce a un punto, entonces  $D = \mathbb{C}$  o bien  $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Estos son los dominios en  $\mathbb{C}^*$  que son conformemente equivalentes a  $\mathbb{C}$ .
3. Si  $\mathbb{C}^* \setminus D$  tiene más de un punto, entonces  $D$  es conformemente equivalente al disco unidad  $\mathbb{D}$ .

**Teorema 3.10.** *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Son equivalentes:*

1.  $D$  es simplemente conexo.
2. Para toda función  $f$  holomorfa y nunca nula en  $D$ , existe una rama de  $\sqrt{f}$  en  $D$ .

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Lo sabemos.

$\Leftarrow$  Hay tres posibilidades.

1.  $D = \mathbb{C}$ . Entonces  $D$  es simplemente conexo.
2.  $\mathbb{C} \setminus D$  se reduce a un punto. Entonces  $\mathbb{C} \setminus D = \{a\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Queremos llegar a contradicción, ya que  $D$  no es simplemente conexo.

Sea  $f(z) = \frac{1}{z-a}$ ,  $z \in D$ .  $f$  es holomorfa y nunca nula en  $D$ . Sea  $g$  una rama de  $\sqrt{f}$  en  $D$ . Entonces  $g$  es holomorfa y nunca nula en  $D$ , y  $g^2 = f$  en  $D$ .

Sea  $R > 0$  y sea  $\gamma$  la circunferencia  $|z-a| = R$ . Sea  $\Gamma$  la curva imagen de  $\gamma$  por  $g$ . Entonces  $\Gamma$  es un camino cerrado que no pasa por 0. Unas parametrizaciones de  $\gamma$  y  $\Gamma$  son:

$$\begin{array}{ll} \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} & \Gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto a + Re^{it} & t \mapsto g(a + Re^{it}) \end{array}$$



Entonces:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g'(a + Re^{it})Re^{it}}{g(a + Re^{it})} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

Como  $g^2 = f$ , entonces además  $2gg' = f'$ . Luego:

$$\frac{2gg'}{g^2} = \frac{f'}{g^2} \Leftrightarrow \frac{g'}{g} = \frac{1}{2} \frac{f'}{f}$$

Como  $f'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2}$ ,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{z-a}{(z-a)^2} = -\frac{1}{z-a}$$

Por tanto:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = -\frac{1}{2} n(\gamma, a) = -\frac{1}{2}$$

Luego  $n(\Gamma, 0) = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ . Esto es imposible.

3.  $\mathbb{C} \setminus D$  tiene más de un punto. Por el teorema que probamos para la demostración del teorema de Riemann, tenemos que  $D$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{D}$ . Por tanto  $D$  es simplemente conexo.

□

### 3.5. El teorema de extensión de Carathéodory

Recordemos que  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$  son homeomorfos, aunque no conformemente equivalentes.

**Corolario 3.11.** *Si  $D_1$  y  $D_2$  son dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}$ , entonces  $D_1$  y  $D_2$  son homeomorfos.*

*Demostración.*

- Si  $D_1 = D_2 = \mathbb{C}$ , son iguales.
- Si  $D_1 = \mathbb{C}$ ,  $D_2 \neq \mathbb{C}$ , entonces por el teorema de Riemann  $D_2$  es conformemente equivalente y por tanto homeomorfo a  $\mathbb{D}$ . Además,  $D_1 = \mathbb{C}$  es homeomorfo a  $\mathbb{D}$ . Entonces  $D_1$  y  $D_2$  son homeomorfos.
- Si  $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}$ , entonces  $D_1$  y  $D_2$  son conformemente equivalentes y por tanto homeomorfos a  $\mathbb{D}$ . Entonces  $D_1$  y  $D_2$  son homeomorfos.

□

Si  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$ , por el teorema de Riemann existe una aplicación conforme  $f$  de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ .

*Notación.* Si  $D \subset \mathbb{C}$ , denotamos  $\partial_{\infty} D$  a la frontera de  $D$  como subconjunto de  $\mathbb{C}^*$ . Es decir,

- Si  $D$  es acotado,  $\partial_{\infty} D = \partial D$ .
- Si  $D$  no es acotado,  $\partial_{\infty} D = \partial D \cup \{\infty\}$ .

**Proposición 3.12.** *Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos dominios en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  un homeomorfismo de  $D_1$  sobre  $D_2$ . Sea  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $D_1$  y supongamos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi \in \partial_{\infty} D_1$ . Entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión  $\{f(z_n)\}$  están en  $\partial_{\infty} D_2$ .*

*Demostración.* Supongamos por reducción al absurdo que existe un punto de acumulación de  $\{f(z_n)\}$  que está en  $\mathbb{C}^* \setminus \partial_\infty D_2$ . Le llamamos  $w_0$ . Existe  $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  subsucesión de  $\{z_n\}$  tal que  $f(z_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} w_0 \in D_2$ .  $f^{-1}$  es continua en  $w_0$ . Además,

$$f^{-1}(f(z_{n_k})) \rightarrow f^{-1}(w_0) \in D_1$$

Sin embargo,  $f^{-1}(f(z_{n_k})) = z_{n_k}$  y  $z_{n_k} \rightarrow \xi \in \partial_\infty D_1$ . □

**Proposición 3.13.** Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos dominios en  $\mathbb{C}$  y  $f$  un homeomorfismo de  $D_1$  sobre  $D_2$ . Supongamos que  $f$  se extiende de forma continua a  $\overline{D_1}$  y le llamamos  $f$  a la extensión  $f : \overline{D_1} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Entonces  $f(\overline{D_1}) = \overline{D_2}$ ,  $f(D_1) = D_2$  y  $f(\partial_\infty D_1) = \partial_\infty D_2$ .

*Demostración.* Sea  $\xi \in \partial_\infty D_1$ . Existe una sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  en  $D_1$  con  $z_n \rightarrow \xi$ , y podemos tomar todos los  $z_n$  distintos. Como  $f$  es continua en  $\xi$ , tenemos que  $f(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\xi) \in \mathbb{C}^*$ . Como todos los  $f(z_n)$  son distintos,  $f(\xi)$  es un punto de acumulación de  $\{f(z_n)\}$ .

Por la proposición anterior,  $f(\xi) \in \partial_\infty D_2$ . Por tanto,  $f(\partial_\infty D_1) \subset \partial_\infty D_2$ . Además, sabemos que  $f(D_1) = D_2$ . Entonces  $f(\overline{D_1}) \subset \overline{D_2}$ . Ahora tenemos que

$$D_2 = f(D_1) \subset f(\overline{D_1}) \subset \overline{D_2}$$

$\overline{D_1}$  es cerrado en  $\mathbb{C}^*$  y compacto. Como  $f : \overline{D_1} \rightarrow \mathbb{C}^*$  es continua, entonces  $f(\overline{D_1})$  es compacto y por tanto cerrado.

$$D_2 \subset f(\overline{D_1}) \subset \overline{D_2} \Rightarrow f(\overline{D_1}) = \overline{D_2}$$

Entonces también tenemos que  $f(\partial_\infty D_1) = \partial_\infty D_2$ . □

*Observación.*

1.  $f(\partial_\infty D_1) = \partial_\infty D_2$  pero no tiene por qué ser inyectiva. Lo mismo para  $f(\overline{D_1}) = \overline{D_2}$ .
2. Puede ocurrir que la extensión  $f$  no exista. Por ejemplo.

$$D = \{z = x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^i} + iy : 0 < y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$D$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$ . Entonces existe  $f : \mathbb{D} \rightarrow D$  aplicación conforme. Supongamos que  $f$  se extiende de manera continua  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{D}$  continua, con  $f(\partial \mathbb{D}) = \partial D$  y  $f(\mathbb{D}) = D$ . Como  $0 \in \partial D$ , entonces  $0 = f(\xi)$  con  $\xi \in \partial \mathbb{D}$ . Sea  $\gamma$  el segmento  $[0, \xi]$ . Sea  $\Gamma$  la curva imagen de  $\gamma$  por  $f$ . Unas parametrizaciones son:

$$\begin{array}{ll} \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} & \Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t\xi & t \mapsto f(t\xi) \end{array}$$

$\Gamma$  tiene origen en  $f(0) \in D$  y extremo 0. El soporte de  $\gamma$  está en  $D$  salvo por el extremo.

Una curva de Jordan es una curva en  $\mathbb{C}$  que tiene alguna parametrización  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  inyectiva en  $[a, b]$  con  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Si esto ocurre para una parametrización, entonces pasa para todas.

Si  $J$  es el soporte de una curva de Jordan en  $\mathbb{C}$ , entonces  $\mathbb{C} \setminus J$  tiene dos componentes conexas.

- $I(J)$  es la componente acotada y se le llama dominio interior a  $J$ .
- $E(J)$  es la componente no acotada y se le llama dominio exterior a  $J$ .

Además,  $J$  es la frontera de ambas. Observamos que  $I(J)$  y  $E(J)$  son dominios en  $\mathbb{C}$ . Como  $\mathbb{C} \setminus J$  es abierto, sus componentes conexas son abiertas.

Además,  $I(J)$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^* \setminus I(J) &= J \cup E(J) \cup \{\infty\} \\ \partial_\infty E(J) &= \partial E(J) \cup \{\infty\} = J \cup \{\infty\}\end{aligned}$$

Observamos que  $\mathbb{C}^* \setminus I(J)$  es la clausura en  $\mathbb{C}^*$  de  $E(J)$ . Como  $E(J)$  es conexo,  $\mathbb{C}^* \setminus I(J)$  también lo es. Luego  $I(J)$  es simplemente conexo. Observamos además que  $I(J) \cup J$  es compacto.

Sea  $D = I(J)$ ,  $D$  es un dominio simplemente conexo con  $D \neq \mathbb{C}$ . Por el teorema de Riemann, existe una aplicación conforme  $f$  de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ .

**Teorema 3.14** (Teorema de extensión de Carathéodory). *Sea  $J$  una curva de Jordan en  $\mathbb{C}$  y sea  $D$  el dominio interior a  $J$ . Sea  $f$  una aplicación conforme de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ . Entonces  $f$  se extiende de forma continua a  $\bar{\mathbb{D}}$ , y esta extensión es un homeomorfismo de  $\bar{\mathbb{D}}$  sobre  $\bar{D} = I(J) \cup J$ .*

*Observación.* Como consecuencia, la extensión también es un homeomorfismo de  $\partial\mathbb{D}$  sobre  $\partial D = J$ .

## Capítulo 4

# Funciones armónicas

### 4.1. Funciones armónicas y funciones holomorfas

**Definición 4.1.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es armónica en  $D$  si  $f \in \mathcal{C}^2(D)$  y

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

**Definición 4.2.** Dado  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $u \in \mathcal{C}^2(D)$ . El laplaciano de  $u$  se define como:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

**Definición 4.3.** Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{D}$  y sea  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $u \in \mathcal{C}^2(D)$ . Diremos que  $u$  es armónica en  $D$  si  $\Delta u = 0$ .

**Ejemplo.**

- Las funciones constantes.  $u(z) = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , es armónica en  $\mathbb{C}$ .
- La función parte real es armónica en  $\mathbb{C}$ .

$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$(x, y) \mapsto x$$

- La función parte imaginaria es armónica en  $\mathbb{C}$ .

$$\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$(x, y) \mapsto y$$

- Si  $D$  es un abierto en  $\mathbb{C}$  y  $u$  y  $v$  son armónicas en  $D$ , entonces  $u + v$  es armónica en  $D$ .
- Si  $D$  es un abierto en  $\mathbb{C}$ ,  $u$  es armónica en  $D$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $cu$  es armónica en  $D$ .

**Teorema 4.1.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  una función holomorfa en  $D$ . Entonces  $\operatorname{Re}(f)$  e  $\operatorname{Im}(f)$  son armónicas en  $D$ .

*Demostración.* Sean  $u = \operatorname{Re}(f)$  y  $v = \operatorname{Im}(f)$ ,  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $u, v \in \mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^2(D)$ . Se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0 \end{aligned}$$

□

El recíproco no es cierto. Es decir, dado  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$ ,  $u$  y  $v$  armónicas en  $D$  y  $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ , no se cumple en general que  $f$  sea holomorfa en  $D$ .

**Ejemplo** (Contraejemplo). Sea  $D = \mathbb{C}$  y sean  $u(z) = \operatorname{Re}(z)$  y  $v(z) = \operatorname{Im}(z)$ .  $u$  y  $v$  son armónicas en  $\mathbb{C}$ . Sin embargo,  $f(z) = u(z) + iv(z) = \bar{z}$  no es holomorfa.

**Definición 4.4.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Diremos que  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una conjugada armónica de  $u$  en  $D$  si la función  $f = u + iv$  es holomorfa en  $D$ .

**Propiedades.**

- Si existe una conjugada armónica de  $u$  en  $D$ , entonces es una función armónica en  $D$ .
- Si  $u$  es una conjugada armónica de  $u$  en  $D$ , entonces  $u + c$  es conjugada armónica de  $u$  en  $D$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .
- Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ ,  $u$  es armónica en  $D$  y  $v_1, v_2$  son conjugadas armónicas de  $u$  en  $\mathbb{C}$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $v_1 - v_2 = c$ .

*Demostración.*  $f_1 = u + iv_1$  y  $f_2 = u + iv_2$  son holomorfas en  $D$ , así que  $f_2 - f_1 = i(v_2 - v_1)$  es holomorfa en  $D$ . Como  $\operatorname{Re}(f_2 - f_1) = 0$  en  $D$  con  $D$  dominio, entonces  $f_2 - f_1$  es constante. Es decir, existe  $c \in \mathbb{R}$  con  $f_2 - f_1 = ic$ . Por tanto:

$$i(v_2 - v_1) = ic \Rightarrow v_2 - v_1 = c$$

□

No tiene por qué existir la conjugada armónica.

**Ejemplo** (Contraejemplo). Sea  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(z) = \operatorname{Log}|z|$ . Si escribimos  $z = x + iy$ ,

$$u(z) = \operatorname{Log}(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(x^2 + y^2)$$

Calculamos sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_x(z) &= \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} & u_y(z) &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ u_{xx}(z) &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & u_{yy} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$\Delta u = 0$ , así que  $u$  es armónica en  $D$ .

Supongamos que  $v$  es una conjugada armónica de  $u$  en  $D$ . Entonces  $v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f = u + iv$  holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Consideramos:

$$\begin{aligned} g &= \operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) \end{aligned}$$

$f$  y  $g$  son holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , luego  $f - g$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Como  $\operatorname{Re}(f - g) = 0$ , entonces  $f - g = ic$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . Así que  $g = f - ic$ . Sin embargo,  $g$  no se extiende de forma continua a  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Esto es una contradicción.

Hemos probado que la función  $u(z) = \operatorname{Log}|z|$  es armónica en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Lema 4.2.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $f$  una función holomorfa y nunca nula en  $D$ . Entonces la función  $u = \operatorname{Log}|f|$  es armónica en  $D$ .

*Demostración.* Sean  $z_0 \in D$  y  $R > 0$  tales que  $D(z_0, R) \subset D$ . Como  $D(z_0, R)$  es un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$ , existe  $g$  una rama de  $\log(f)$  en  $D(z_0, R)$ .  $g$  es holomorfa en  $D(z_0, R)$ , con

$$\operatorname{Re}(g(z)) = \operatorname{Log}|f(z)|, \quad z \in D(z_0, R)$$

$\operatorname{Re}(g) = \operatorname{Log}|f|$  es armónica en  $D(z_0, R)$ . □

**Proposición 4.3.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Entonces la función  $u_x - iu_y$  es holomorfa en  $D$ .

**Corolario 4.4.** Sea  $D$  abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Entonces  $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$ .

*Demostración.* Sea  $u$  armónica en  $D$ . Entonces  $f = u_x - iu_y$  es holomorfa en  $D$ . Así que  $u_x, u_y \in \mathcal{C}^\infty(D)$ . Como además  $u \in \mathcal{C}^2(D)$ , entonces  $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$ . □

**Proposición 4.5.** Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Entonces existe  $F$  holomorfa en  $D$  tal que  $\operatorname{Re}(F) = u$  en  $D$ . Además, esta  $F$  es única salvo adición de constantes imaginarias.

*Demostración.* Sea  $f = u_x - iu_y$ , que es holomorfa en  $D$ . Como  $D$  es simplemente conexo, existe  $g$  primitiva de  $f$  en  $D$ .  $g$  es holomorfa en  $D$  y  $g' = f$  en  $D$ . Escribimos  $g = U + iV$ , con  $U = \operatorname{Re}(f)$  y  $V = \operatorname{Im}(f)$ . Como  $g$  es holomorfa,  $U_x = V_y$  y  $U_y = -V_x$ . Además,  $g' = U_x + iV_x = u_x - iu_y$ , así que  $U_x = u_x$  y  $V_x = -u_y$ .

Sea  $F = u + iV$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $u \in \mathcal{C}^2(D)$ .  $V$  es armónica en  $D$ ,  $V \in \mathcal{C}^\infty(D)$ .  $F$  es diferenciable en sentido real. Además,

$$\begin{cases} u_x = U_x = V_y \\ u_y = -V_x \end{cases}$$

Luego  $F$  es holomorfa en  $D$ , con  $\operatorname{Re}(F) = u$  en  $D$ .

Veamos que  $F$  es única salvo adición de constantes imaginarias.

- Si  $c \in \mathbb{R}$ , está claro que si  $G = F + ic$ , entonces  $G$  es holomorfa en  $D$  y  $\operatorname{Re}(G) = u$  en  $D$ .
- Si  $G$  es holomorfa en  $D$  y  $\operatorname{Re}(G) = u$  en  $D$ . Entonces  $F - G$  es holomorfa y  $\operatorname{Re}(F - G) = 0$  en  $D$ . Por tanto  $F - G$  es constante, así que existe  $c \in \mathbb{R}$  con  $F - G = ic \Leftrightarrow G = F - ic$ . □

**Corolario 4.6.** Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Si  $z_0 \in D$  y  $R > 0$  con  $D(z_0, R) \subset D$ , entonces existe  $F$  holomorfa en  $D(z_0, R)$  tal que  $\operatorname{Re}(F) = u$  en  $D(z_0, R)$ .

Toda función armónica, localmente, es la parte real de una función holomorfa.

**Teorema 4.7.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Son equivalentes:

1.  $D$  es simplemente conexo.
2. Toda función armónica tiene conjugada armónica.

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Lo sabemos.

$\Leftarrow$  Sea  $f$  holomorfa y nunca nula en  $D$ . Veamos que existe un rama de  $\log(f)$  en  $D$ . Sea  $u = \text{Log}|f|$ , que es una función armónica en  $D$ . Sea  $v$  una conjugada armónica de  $u$  en  $D$ . Entonces  $F = u + iv$  es holomorfa en  $D$ . Sea  $h = fe^{-F}$  holomorfa en  $D$ . Como  $|e^F| = |e^{u+iv}| = e^u = e^{\text{Log}|f|} = |f|$ , entonces

$$|h| = \frac{|f|}{|e^F|} = 1$$

Entonces  $h$  es constante. Es decir, existe  $\xi = e^{ic}$  con  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $h(z) = \xi$  para todo  $z \in D$ .

$$h = \frac{f}{e^F} \Rightarrow f = \xi e^F = e^{ic} e^F = e^{F+ic}$$

La función  $F + ic$  es una rama de  $\log(f)$  en  $D$ .

Toda función holomorfa y nunca nula en  $D$  tiene una rama del logaritmo. Luego  $D$  es simplemente conexo. □

**Teorema 4.8** (Propiedad del valor medio). *Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Sea  $z_0 \in D$  y  $R > 0$  con  $D(z_0, R) \subset D$ . Entonces:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt, \quad 0 \leq r < R$$

*Demostración.* Si  $r = 0$  es trivial. Supongamos  $0 < r < R$ . Existe  $F$  holomorfa en  $D(z_0, R)$  con  $\text{Re}(F) = u$  en  $D(z_0, R)$ . Por la fórmula de Cauchy,

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{F(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z_0 + re^{it}) dt$$

Tomando parte real,

$$u(z_0) = \text{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z_0 + re^{it}) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}(F(z_0 + re^{it})) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

□

**Teorema 4.9** (Forma débil del principio del máximo para funciones armónicas). *Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Si  $u$  tiene un máximo local en un punto  $z_0 \in D$ , entonces existe  $r > 0$  con  $D(z_0, r) \subset D$  tal que  $u$  es constante en  $D(z_0, r)$ .*

*Demostración.* Sea  $r > 0$  con  $D(z_0, r) \subset D$ . Existe  $F$  holomorfa en  $D(z_0, r)$  tal que  $\text{Re}(F) = u$  en  $D(z_0, r)$ . Sea  $f = e^F$ , que es holomorfa en  $D(z_0, r)$ . En  $D(z_0, r)$  tenemos que:

$$|f| = |e^F| = e^{\text{Re}(F)} = e^u$$

Existe  $r_1$  con  $0 < r_1 < r$ , tal que  $u(z) \leq u(z_0)$  si  $z \in D(z_0, r_1)$ . Entonces

$$|e^{F(z)}| = e^{u(z)} \leq e^{u(z_0)} = |e^{F(z_0)}|$$

$|e^F|$  tiene un máximo local en  $z_0$ . Por el principio del máximo, tenemos que  $e^F$  es constante en  $D(z_0, r)$ . Entonces  $|e^F| = e^u$  es constante, así que  $u$  es constante en  $D(z_0, r)$ . □

Sea  $D$  dominio en  $\mathbb{C}$ , sean  $u, v$  armónicas en  $D$  y sea  $A \subset D$ ,  $A$  con puntos de acumulación en  $D$ .  $u = v$  en  $A$  no implica en general que  $u = v$  en  $D$ .

**Ejemplo** (Contraejemplo). Sea  $D = \mathbb{C}$  y sean  $u(z) = \operatorname{Re}(z)$  y  $v(z) = 0$  armónicas.  $u = v$  en el eje imaginario, que tiene puntos de acumulación en  $\mathbb{C}$ , pero  $u \neq v$  en  $\mathbb{C}$ .

*Observación.* Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Si existen  $u_x$  y  $u_y$  en  $D$  y  $u_x = u_y = 0$  en  $D$ , entonces  $u$  es constante en  $D$ .

**Teorema 4.10** (Teorema de identidad para funciones armónicas). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Si existe  $G \subset D$ ,  $G$  abierto y no vacío tal que  $u = 0$  en  $G$ , entonces  $u = 0$  en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $f = u_x - iu_y$  holomorfa en  $D$ . Como  $u = 0$  en  $G$ , tenemos que  $u_x = u_y = 0$  en  $G$ . Entonces  $f = 0$  en  $G$ . Por el teorema de identidad,  $f = 0$  en  $D$ . Entonces  $u_x = u_y = 0$  en  $D$ , luego  $u$  es constante en  $D$ . Como  $u = 0$  en  $G$ , entonces  $u = 0$  en  $D$ .  $\square$

**Corolario 4.11.** *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $u$  y  $v$  armónicas en  $D$ . Si existe  $G \subset D$ ,  $G$  abierto y no vacío tal que  $u = v$  en  $G$ , entonces  $u = v$  en  $D$ .*

**Teorema 4.12** (Principio del máximo para funciones armónicas: primera versión). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Si  $u$  tiene un máximo local en un punto  $z_0 \in D$ , entonces  $u$  es constante en  $D$ .*

*Demostración.* Existe  $R > 0$  con  $D(z_0, R) \subset D$  tal que  $u$  es constante en  $D(z_0, R)$ . Es decir,  $u(z) = c$ ,  $z \in D(z_0, R)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Sea  $v(z) = c$ ,  $z \in D$ .  $u$  y  $v$  son armónicas en  $D$  y  $u = v$  en  $D(z_0, R)$ . Entonces  $u = v$  en  $D$ , es decir,  $u(z) = c$  para todo  $z \in D$ .  $\square$

*Notación.* Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ ,  $\bar{D}$  denotará la clausura de  $D$  como subconjunto de  $\mathbb{C}^*$ .

- Si  $D$  es acotado, entonces  $\partial_\infty D = \partial D$ .

$$\bar{D} = D \cup \partial_\infty D = D \cup \partial D$$

- Si  $D$  no es acotado, entonces  $\partial_\infty D = \partial D \cup \{\infty\}$ .

$$\bar{D} = D \cup \partial_\infty D = D \cup \partial D \cup \{\infty\}$$

**Teorema 4.13** (Principio del máximo para funciones armónicas: segunda versión). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ . Si existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} u(z) \leq M, \quad \forall \xi \in \partial_\infty D$$

*entonces  $u(z) \leq M$  para todo  $z \in D$ . Además, si  $u(z_0) = M$  para algún  $z_0 \in D$ , entonces  $u$  es constante en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $K = \sup_{z \in D} u(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Hay que probar que  $K \leq M$ . Existe  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  en  $D$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = K$ . Podemos suponer, pasando si es necesario a una subsucesión, que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^* \in \mathbb{C}^*$ . Entonces  $z^* \in \bar{D} = D \cup \partial_\infty D$ .

- Si  $z^* \in \partial_\infty D$ , entonces

$$K \leq \limsup_{z \rightarrow z^*, z \in D} u(z) \leq M$$

- Si  $z^* \in D$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z^*$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = u(z^*) = K$ . Luego

$$u(z) \leq u(z^*) \quad \forall z \in D$$

Por la primera versión del principio del máximo,  $u$  es constante en  $D$ , es decir,  $u(z) = K$  para todo  $z \in D$ . Aplicando la hipótesis a un punto  $\xi$  cualquiera de  $\partial_\infty D$ , vemos que  $K \leq M$ . Observamos que  $\partial_\infty D \neq \emptyset$ . Si  $\partial_\infty D = \emptyset$ , entonces  $\bar{D} = D$ , luego  $D$  sería abierto y cerrado en  $\mathbb{C}^*$ . Por tanto,  $D = \emptyset$  o  $D = \mathbb{C}^*$ , lo que es imposible.



□

**Teorema 4.14** (Principio del mínimo para funciones armónicas). Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  armónica en  $D$ .

1. Si  $u$  tiene un mínimo local en un punto  $z_0 \in D$ , entonces  $u$  es constante en  $D$ .

2. Si existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que

$$\liminf_{z \rightarrow \xi, z \in D} u(z) \geq m, \quad \forall \xi \in \partial_{\text{int}} D$$

entonces  $u(z) \geq m$  para todo  $z \in D$ . Además, si  $u(z_0) = m$  para algún  $z_0 \in D$ , entonces  $u$  es constante en  $D$ .

**Corolario 4.15.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $D$  y continua en  $\bar{D}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \max_{z \in \bar{D}} u(z) &= \max_{z \in \partial_{\infty} D} u(z) \\ \min_{z \in \bar{D}} u(z) &= \min_{z \in \partial_{\infty} D} u(z) \end{aligned}$$

**Corolario 4.16.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $D$  y continua en  $\bar{D}$ . Si  $u = 0$  en  $\partial_{\infty} D$ , entonces  $u = 0$  en  $D$ .

**Corolario 4.17.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sean  $u, v : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  armónicas en  $D$  y continuas en  $\bar{D}$ . Si  $u = v$  en  $\partial_{\infty} D$ , entonces  $u = v$  en  $D$ .

*Observación.* Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $D$  y continua en  $\bar{D}$ . Entonces los valores de  $u$  en  $D$  están completamente determinados por los valores de  $u$  en  $\partial_{\infty} D$ .

## 4.2. El problema de Dirichlet para el disco unidad

Esto da lugar a la siguiente cuestión. Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $f : \partial_{\infty} D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Queremos estudiar si existe  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $D$  y continua en  $\bar{D}$  tal que  $u = f$  en  $D$ . Esto es el problema de Dirichlet en  $D$  con valores frontera  $f$ . Si existe una solución del problema de Dirichlet en  $D$  con valores frontera  $f$ , esta es única.

Si  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ , se dice que  $D$  es regular para el problema de Dirichlet si para toda  $f : \partial_{\infty} D \rightarrow \mathbb{R}$  continua existe la solución del problema de Dirichlet con valores frontera  $f$ . Queremos resolver el problema de Dirichlet en el disco unidad.

Sea  $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ . Vamos a expresar  $u(z)$  para  $z \in \mathbb{D}$  en función de  $u(\xi)$ , con  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ . Por la propiedad del valor medio, si  $0 < r < 1$ ,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) dt$$

Si consideramos las funciones

$$u_r(t) = u(re^{it}), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

vemos que  $u_r \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} u_1$  uniformemente porque  $u$  es uniformemente continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ . Así que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_r(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(t) dt \Rightarrow u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) dt$$

**Lema 4.18.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos abiertos en  $\mathbb{C}$ , sea  $f$  holomorfa en  $G_1$  con  $f(G_1) \subset G_2$  y sea  $u$  armónica en  $G_2$ . Entonces  $u \circ f$  es armónica en  $G_1$ .

*Demostración.*  $u \circ f \in \mathcal{C}^2(G_1)$ . Se puede comprobar que  $\Delta(u \circ f) = 0$ . De otra manera, sea  $z_0 \in G_1$ , entonces  $f(z_0) \in G_2$ . Tomamos  $R > 0$  con  $D(f(z_0), R) \subset G_2$ . Como  $f$  es continua en  $z_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $D(z_0, \delta) \subset G_1$  y  $f(D(z_0, \delta)) \subset D(f(z_0), R)$ .

Como  $u$  es armónica en  $D(f(z_0), R)$ , existe  $F$  holomorfa en  $D(f(z), R)$  tal que  $u = \operatorname{Re}(F)$  en  $D(f(z_0), R)$ .

$$D(z_0, \delta) \xrightarrow{f} D(f(z_0), R) \xrightarrow{F} \mathbb{C}$$

$F \circ f$  es holomorfa en  $D(z_0, \delta)$ , así que  $\operatorname{Re}(f \circ F)$  es armónica en  $D(z_0, \delta)$ . Si  $z \in D(z_0, \delta)$ , tenemos que  $f(z) \in D(f(z_0), R)$ .

$$\operatorname{Re}(F \circ f)(z) = \operatorname{Re}(F(f(z))) = u(f(z))$$

Entonces  $\operatorname{Re}(F \circ f) = u \circ f$ . Por tanto  $u \circ f$  es armónica en  $D(z_0, \delta)$ . Entonces  $u \circ f$  es armónica en  $D$ .

Sea  $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ . Hemos visto que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) dt$$

Sea  $a \in \mathbb{D}$ . Consideramos  $T_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ , con  $T_a(0) = a$  y  $T_a(\bar{\mathbb{D}}) = \bar{\mathbb{D}}$ . Sea  $v = u \circ T_a$ .

$$\bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{T_a} \bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

$v$  es continua en  $\bar{\mathbb{D}}$  y armónica en  $\mathbb{D}$ .

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(T_a(e^{it})) dt$$

Hacemos el cambio de variable:

$$T_a(e^{it}) = e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{it} = T_a^{-1}(e^{i\varphi}) = S_a(e^{i\varphi})$$

Derivando,

$$ie^{it} dt = ie^{i\varphi} S'_a(e^{i\varphi}) d\varphi \Leftrightarrow dt = \frac{e^{i\varphi} S'_a(e^{i\varphi})}{S_a(e^{i\varphi})} d\varphi$$

Recordamos que  $S'_a(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$ , así que  $S'_a(e^{i\varphi}) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2}$  y entonces:

$$dt = \frac{e^{i\varphi}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2} \frac{1-\bar{a}e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-a} d\varphi = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})(1-ae^{i\varphi})} d\varphi = \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2} d\varphi$$

Entonces la integral queda de la forma:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} u(e^{i\varphi}) \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-it}|^2} dt$$

□

Sea  $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ . Hemos visto que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) dt$$

Sea  $a \in \mathbb{D}$ . Consideramos  $T_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ , con  $T_a(0) = a$  y  $T(\bar{\mathbb{D}}) = \bar{\mathbb{D}}$ . Sea  $v = u \circ T_a$ .

$$\bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{T_a} \bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

$v$  es continua en  $\bar{\mathbb{D}}$  y armónica en  $\mathbb{D}$ .

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(T_a(e^{it})) dt$$

Hacemos el cambio de variable:

$$T_a(e^{it}) = e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{it} = T_a^{-1}(e^{i\varphi}) = S_a(e^{i\varphi})$$

Derivando,

$$ie^{it}dt = ie^{i\varphi}S'_a(e^{i\varphi})d\varphi \Leftrightarrow dt = \frac{e^{i\varphi}S'_a(e^{i\varphi})}{S_a(e^{i\varphi})}d\varphi$$

Recordamos que  $S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  y  $S'_a(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$ , así que  $S'_a(e^{i\varphi}) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2}$  y entonces:

$$dt = \frac{e^{i\varphi}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2} \frac{1-\bar{a}e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-a} d\varphi = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})(1-ae^{-i\varphi})} d\varphi = \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2} d\varphi$$

Entonces la integral queda de la forma:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} u(e^{i\varphi}) \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-it}|^2} dt$$

**Teorema 4.19.** Sea  $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ . Entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} dt, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Si  $f : \partial_{\infty} D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, sabemos que la solución del problema de Dirichlet en  $\mathbb{D}$  con valores frontera  $f$ , de existir, es única. Además, tendría que ser la siguiente:

$$u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} dt & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ u(z) = f(z) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

### 4.3. La integral de Poisson

Una primera expresión del núcleo de Poisson es

$$P(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Si  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$P(z, e^{it}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}e^{-it}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}$$

De esta forma llegamos a una segunda expresión del núcleo de Poisson:

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

Podemos escribir el denominador de otra forma:

$$|1-re^{it}|^2 = (1-re^{it})(1-re^{-it}) = 1-re^{-it}-re^{it}+r^2 = 1-r(e^{it}+e^{-it})+r^2 = 1-2r\cos(t)+r^2$$

Luego

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

*Observación.*

1. Si  $0 \leq r < 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $z = re^{i\theta}$ , entonces  $P(z, e^{it}) = P_r(\theta - t)$ .
2. Si  $0 \leq r < 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $z = re^{it}$ , entonces  $P_r(t) = P(z, e^{i0}) = P(z, 1)$ .

**Propiedades.**

1.  $P(z, e^{it}) > 0$  si  $z \in \mathbb{D}$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Equivalentemente,  $P_r(t) > 0$  si  $0 \leq r < 1$  y  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Fijando  $t \in \mathbb{R}$ , la función  $z \in \mathbb{D} \mapsto P(z, e^{it}) > 0$  es armónica en  $\mathbb{D}$ .

*Demostración.*

- Si  $t = 0$  y  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned} P(z, e^{i0}) &= \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \frac{1 - z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1 - z + z - z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1}{1 - \bar{z}} + \frac{z}{1 - z} = \\ &= \frac{1}{1 - \bar{z}} + \frac{z - 1 + 1}{1 - z} = \frac{1}{1 - \bar{z}} - 1 + \frac{1}{1 - z} = -1 + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - z} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( -1 + \frac{2}{1 - z} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right) \end{aligned}$$

La función  $z \in \mathbb{D} \mapsto P(z, e^{i0}) = \operatorname{Re} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$  es armónica en  $\mathbb{D}$ .

- Si  $t \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{D}$ , tomamos  $w = ze^{-it} \in \mathbb{D}$ , con  $|w| = |z|$ . Entonces:

$$P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + w}{1 - w} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right)$$

La función  $z \in \mathbb{D} \mapsto P(z, e^{it})$  es armónica en  $\mathbb{D}$ .

□

3. Si  $z \in \mathbb{D}$  y  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$P(z, e^{it}) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right)$$

Si  $0 \leq r < 1$  y  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$P_r(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right)$$

4. Fijado  $r \in [0, 1)$ , tenemos la función

$$\begin{aligned} P_r : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto P_r(t) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t)} \end{aligned}$$

que es continua, positiva, periódica de periodo  $2\pi$ , par y decreciente en  $[0, \pi]$ . Observamos que:

$$\begin{aligned} P_r(0) &= \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} = \frac{1 + r}{1 - r} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \infty \\ P_r(\pi) &= P_r(-\pi) = \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} = \frac{1 - r}{1 + r} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0 \end{aligned}$$

Tenemos entonces la desigualdad:

$$\frac{1 - r}{1 + r} \leq P_r(t) \leq \frac{1 + r}{1 - r}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

Además, si en el teorema anterior tomamos  $u \equiv 1$  y  $z = r$ , tenemos:

$$1 = u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$$

5. Para cada  $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$  se tiene que  $P_r(t) \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{} 0$ . Además, si  $\delta \in (0, \pi)$ , se tiene que  $P_r(t) \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{} 0$  uniformemente en  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ .

Si  $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ,  $\cos(t) \neq 1$ , así que:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(t) = \frac{0}{2 - 2\cos(t)} = 0$$

Si  $\delta \in [0, \pi)$ , entonces:

$$P_r(t) \leq P_r(\delta) \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{} 0$$

**Definición 4.5.** Sea  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se define la integral de Poisson de  $f$ , y se denota  $P[f]$ , como la función

$$P[f] : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto P[f](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P(z, e^{it}) dt$$

Equivalentemente, si  $z = re^{i\theta}$  con  $0 \leq r < 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$P[f](z) = P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

**Teorema 4.20.** *El disco unidad  $\mathbb{D}$  es un dominio regular para el problema de Dirichlet. En concreto, si  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces la solución del problema de Dirichlet en  $\mathbb{D}$  con valores frontera  $f$  es la función:*

$$u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u(z) = \begin{cases} P[f](z) & z \in \mathbb{D} \\ f(z) & z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

Es decir,  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , continua en  $\bar{\mathbb{D}}$  y  $u = f$  en  $\partial\mathbb{D}$ .

*Demostración.*

1.  $P[f]$  es armónica en  $\mathbb{D}$ . Si  $z \in \mathbb{D}$ , tenemos que

$$P[f](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P(z, e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \operatorname{Re} \left( \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left( f(e^{it}) \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) dt = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} dt \right)$$

Veamos que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} dt$  es una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  expresándola como serie de potencias.

Si  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{D}$ . Así que:

$$\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

con convergencia uniforme. Entonces:

$$\begin{aligned} P[f](z) &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int} \right) dt \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(e^{it}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) z^n e^{-int} \right) dt \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) z^n e^{-int} \right) dt \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt \right) z^n \right) \end{aligned}$$

Sea

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces:

$$P[f](z) = \operatorname{Re} \left( a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)$$

Esta es una serie de potencias centrada en 0 que converge para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Su radio de convergencia es mayor o igual que 1. Por tanto, define una función holomorfa en  $\mathbb{D}$ . Entonces la función  $z \in \mathbb{D} \mapsto P[f](z)$  es armónica en  $\mathbb{D}$ .

2. Veamos que:

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(1)$$

Si  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z = re^{i\theta}$  con  $0 \leq r < 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} u(z) - f(1) &= P[f](z) - f(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt - f(1) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt - f(1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(e^{i(\theta-s)}) P_r(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(1) P_r(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(e^{i(\theta-s)}) - f(e^{i0}) \right) P_r(s) ds \end{aligned}$$

Así que

$$|u(z) - f(1)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(e^{i(\theta-t)}) - f(e^{i0}) \right| P_r(t) dt$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , como la función  $t \in [-\pi, \pi] \mapsto f(e^{it})$  es uniformemente continua, existe  $\delta_1 \in (0, \pi)$  tal que si  $t, s \in [-\pi, \pi]$  con  $|t - s| < \delta_1$ , entonces  $|f(e^{it}) - f(e^{is})| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $f$  está acotada

en  $\partial\mathbb{D}$ , existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Tomamos  $\delta = \frac{\delta_1}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Como  $P_r(t) \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{} 0$  uniformemente en  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ , existe  $r_0 \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{cases} r_0 < r < 1 \\ t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \end{cases} \Rightarrow P_r(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Entonces, si  $r_0 < r < 1$  y  $|\theta| < \delta$ , vamos a ver que  $|u(z) - f(1)| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} |u(z) - f(1)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| f(e^{i(\theta-t)}) - f(e^{i0}) \right| P_r(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \left| f(e^{i(\theta-t)}) - f(e^{i0}) \right| P_r(t) dt \end{aligned}$$

Si  $t \in [-\delta, \delta]$ , tenemos que

$$|\theta - t - 0| \leq |\theta| + |t| < \delta + \delta = 2\delta = \delta_1 < \pi$$

Además,  $\theta - t, 0 \in [-\pi, \pi]$ . Así que:

$$\left| f(e^{i(\theta-t)}) - f(e^{i0}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |u(z) - f(1)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} 2M \frac{\varepsilon}{4M} dt = \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Veamos que

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(\xi), \quad \forall \xi \in \partial\mathbb{D}$$

Sea  $g : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(z) = f(\xi z)$ , es continua. Sea  $v = P[g] : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabemos que  $\lim_{z \rightarrow 1, z \in \mathbb{D}} v(z) = g(1)$ . Veamos que  $v(z) = u(\xi z)$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

Sea  $z \in \mathbb{D}$ ,  $z = re^{i\theta}$  con  $0 \leq r < 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$v(z) = P[g](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) P_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

Si escribimos  $\xi = e^{i\theta_0}$ , con  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi e^{i(\theta_0-t)}) P_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi e^{is}) P_r(\theta + \theta_0 - s) ds = P[f](re^{i(\theta-\theta_0)}) = \\ &= P[f](\xi z) = u(\xi z) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in \mathbb{D}} u(\xi z) = f(\xi) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(\xi)$$

4. Veamos que  $u$  es continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ .  $u$  es continua en  $\mathbb{D}$  porque es armónica en  $\mathbb{D}$ . Dado  $\xi \in \partial\mathbb{D}$ , hay que probar que

$$\lim_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} f(\xi)$$

Dada  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  sucesión en  $\bar{\mathbb{D}}$  con  $z_n \rightarrow \xi$ , definimos la sucesión  $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$  como sigue.

- Si  $z_n \in \mathbb{D}$ , tomamos  $w_n = z_n$ .
- Si  $z_n \in \partial\mathbb{D}$ , tomamos  $w_n \in \mathbb{D}$  con  $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$  y  $|u(z_n) - u(w_n)| < \frac{1}{n}$ . Esto se puede hacer porque  $\lim_{z \rightarrow z_n, z \in \mathbb{D}} u(z) = u(z_n)$ .

Hay que probar que  $u(z_n) \rightarrow f(\xi)$ .

$$|u(z_n) - f(\xi)| \leq |u(z_n) - u(w_n)| + |u(w_n) - f(\xi)|$$

Observamos que

$$|w_n - \xi| \leq |w_n - z_n| + |z_n - \xi| \rightarrow 0$$

Además, sabemos que  $\lim_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(\xi)$ , así que  $u(w_n) \rightarrow f(\xi)$ . Por tanto,

$$|u(z_n) - f(\xi)| \rightarrow 0$$

□

**Teorema 4.21.** Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en  $\mathbb{C}$  con  $D \neq \mathbb{C}$ . Supongamos que existe una aplicación conforme  $F$  de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$  que se puede extender a un homeomorfismo de  $\bar{\mathbb{D}}$  sobre  $\bar{D} = D \cup \partial_\infty D$ . Entonces  $D$  es regular para el problema de Dirichlet.

En concreto, si  $f : \partial_\infty D \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, la función  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \partial_\infty D \\ u(z) = P[f \circ F](F^{-1}(z)) & z \in D \end{cases}$$

es la solución del problema de Dirichlet en  $D$  con valores frontera  $f$ .

*Demostración.*  $F : \mathbb{D} \rightarrow D$  se puede extender a un homeomorfismo  $F : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{D}$ . Observamos que  $F$  es un homeomorfismo de  $\partial\mathbb{D}$  sobre  $\partial_\infty D$ . Sea  $g = f \circ F$ .

$$g : \partial\mathbb{D} \xrightarrow{F} \partial_\infty D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$g$  es continua. Sea  $v$  la solución del problema de Dirichlet en  $\mathbb{D}$  con valores frontera  $g$ .  $v : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , continua en  $\bar{\mathbb{D}}$  y con  $v = g$  en  $\partial\mathbb{D}$ .

Sea  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = v \circ F^{-1}$ .  $u$  es continua en  $\bar{D}$  y armónica en  $D$ . Si  $z \in \partial_\infty D$ ,

$$u(z) = v(F^{-1}(z)) = g(F^{-1}(z)) = f(z)$$

Luego  $u = f$  en  $\partial_\infty D$ . □

**Ejemplo.** Cualquier disco abierto es un dominio regular para el problema de Dirichlet.

Sea  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $D = D(a, R)$ . Sea  $F : \mathbb{D} \rightarrow D$ ,  $F(z) = a + Rz$ .  $D$  es regular para el problema de Dirichlet.

Si  $f : \partial D(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces la solución del problema de Dirichlet en  $D(a, R)$  con valores frontera  $f$  es  $u : \bar{D}(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$ , con

$$u(z) = f(z), \quad z \in \partial D(a, R)$$

Si  $z \in D(a, R)$ ,  $z = a + re^{i\theta}$  con  $0 \leq r < R$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} u(z) &= P[f \circ F](F^{-1}(z)) = P[f \circ F]\left(\frac{z-a}{R}\right) = P[f \circ F]\left(\frac{r}{R}e^{i\theta}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ F)(e^{it}) P_{r/R}(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\left|1 - \frac{r}{R}e^{i(\theta-t)}\right|^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{|R - re^{i(\theta-t)}|^2} dt \end{aligned}$$



Sea  $D$  el dominio interior a una curva de Jordan en  $\mathbb{C}$ . Entonces  $D$  es un dominio simplemente conexo en  $D$ , con  $D \neq \mathbb{C}$ . Por el teorema de Riemann, existe una aplicación conforme  $F$  de  $\mathbb{D}$  sobre  $D$ , que se puede extender a un homeomorfismo de  $\mathbb{D}$  sobre  $\bar{D}$  por el teorema de extensión de Carathéodory. Por el teorema anterior,  $D$  es regular para el problema de Dirichlet. Si  $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces la función  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \partial D \\ P[f \circ F](F^{-1}(z)) & z \in D \end{cases}$$

es la solución del problema de Dirichlet en  $D$  con valores frontera  $f$ .

**Teorema 4.22** (Principio del máximo para funciones armónicas: tercera versión). *Sea  $D$  un dominio acotado en  $\mathbb{C}$  y sea  $u$  una función armónica y acotada superiormente en  $D$ . Si existen  $M \in \mathbb{R}$  y  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \in \partial D$  tales que*

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} u(z) \leq M, \quad \forall \xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

entonces  $u(z) \leq M$  para todo  $z \in D$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha = \text{diam}(D) = \sup\{|z - w| : z, w \in D\}$ . Entonces  $0 < \alpha < \infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $u_\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \text{Log} \left( \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \right)$$

Si  $z \in D$  y  $j \in \{1, \dots, n\}$ , como  $|z - w| \leq \alpha$  para todo  $w \in D$ , se tiene que

$$0 < |z - \xi_j| \leq \alpha \Rightarrow 0 < \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow \text{Log} \left( \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \right) \leq 0$$

Entonces  $u_\varepsilon \leq u$  en  $D$ . Como la función  $z \mapsto \frac{z - \xi_j}{\alpha}$  es holomorfa y nunca nula en  $D$ , se tiene que  $\text{Log} \left( \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \right)$  es armónica en  $D$  para cada  $j$ . Por tanto,  $u_\varepsilon$  es armónica en  $D$ .

Sea  $\xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ . Entonces:

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} u_\varepsilon(z) \leq \limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} u(z) \leq M$$

Sea  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ .

$$\limsup_{z \rightarrow \xi_{j_0}, z \in D} u_\varepsilon(z) = \limsup_{z \rightarrow \xi_{j_0}, z \in D} \left( u(z) + \varepsilon \text{Log} \left( \frac{|z - \xi_{j_0}|}{\alpha} \right) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \text{Log} \left( \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \right) \right) = -\infty \leq M$$

Por la segunda versión del principio del máximo,  $u_\varepsilon(z) \leq M$  para todo  $z \in D$ . Entonces hemos probado que, dado  $\varepsilon > 0$ , se tiene que

$$u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^n \text{Log} \left( \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \right) \leq M, \quad \forall z \in D$$

Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos que  $u(z) \leq M$  para todo  $z \in D$ . □

**Teorema 4.23** (Principio del máximo para funciones armónicas: cuarta versión). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  con exterior no vacío y sea  $u$  una función armónica y acotada superiormente en  $D$ . Supongamos que existen  $M \in \mathbb{R}$  y  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \in \partial_\infty D$  tales que*

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} u(z) \leq M, \quad \forall \xi \in \partial_\infty D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

Entonces  $u(z) \leq M$  para todo  $z \in D$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{C}$  un punto exterior a  $D$ . Existe  $R > 0$  tal que  $D(a, R) \cap D = \emptyset$ . Entonces  $|z - a| \geq R$  para todo  $z \in D$ . Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  vamos a construir una función  $h_j$  holomorfa y nunca nula en  $D$ , con  $|h_j| \leq 1$  en  $D$  y tal que  $\lim_{z \rightarrow \xi_j, z \in D} h_j(z) = 0$  y  $\lim_{z \rightarrow \xi_i, x \in D} h_j(z)$  existe en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  si  $i \neq j$ .

- Si  $\xi_j = \infty$ ,

$$h_j(z) = \frac{R}{z - a}, \quad z \in D$$

$h_j$  es holomorfa y nunca nula en  $D$  con  $|h_j| \leq 1$  en  $D$ .

- Si  $\xi_j \in \mathbb{C}$ ,

$$\left| \frac{z - \xi_j}{z - a} \right| = \left| \frac{z - a + a - \xi_j}{z - a} \right| \leq \frac{|z - a| + |a - \xi_j|}{|z - a|} = 1 + \frac{|a - \xi_j|}{|z - a|} \leq 1 + \frac{|a - \xi_j|}{R} = K_j > 0$$

Sea

$$h_j(z) = \frac{1}{K_j} \frac{z - \xi_j}{z - a}$$

$h_j$  es holomorfa y nunca nula en  $D$ , con

$$|h_j(z)| = \frac{1}{K_j} \left| \frac{z - \xi_j}{z - a} \right| \leq \frac{1}{K_j} K_j = 1, \quad \forall z \in D$$

Además,

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \xi_j, z \in D} h_j(z) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \xi_i, z \in D} h_j(z) = \frac{1}{K_j} \frac{\xi_i - \xi_j}{\xi_i - a} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad i \neq j \end{cases}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , definimos:

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}|h_j(z)|, \quad z \in D$$

Se sigue como en la demostración del teorema anterior.

□

**Teorema 4.24** (Teorema de la singularidad evitable para funciones armónicas). *Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Si  $u$  es armónica y acotada en  $D(a, R) \setminus \{a\}$ , entonces  $u$  se puede extender a una función armónica en  $D(a, R)$ .*

*Demostración.* Sea  $f = u|_{\partial D(a, R/2)}$ ,  $f : \partial D(a, R/2) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Como  $D(a, R/2)$  es regular para el problema de Dirichlet, existe  $v : \bar{D}(a, R/2) \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $D(a, R/2)$ , continua en  $\bar{D}(a, R/2)$  y con  $v = f$  en  $\partial D(a, R/2)$ .

Sea  $D = D(a, R/2) \setminus \{a\}$ .  $u$  y  $v$  son armónicas en  $D$ ,  $u - v$  y  $v - u$  también. Aplicamos la tercera versión del principio del máximo a  $u - v$  y  $v - u$  en  $D$ .  $D$  es un dominio acotado en  $\mathbb{C}$ ,  $u$  está acotada en  $D$  y  $v$  es continua en  $\bar{D}(a, R/2)$ , así que  $v$  está acotada en  $D$ . Luego  $u - v$  y  $v - u$  están acotadas en  $D$ .

Si  $\xi \in \partial D(a, R/2) = \partial D \setminus \{a\}$ ,

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} (u(z) - v(z)) \leq u(\xi) - v(\xi) = 0$$

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} (v(z) - u(z)) \leq v(\xi) - u(\xi) = 0$$

Por tanto,  $u(z) - v(z) \leq 0$  y  $v(z) - u(z) \leq 0$  para todo  $z \in D$ . Luego  $u(z) = v(z)$  para todo  $z \in D = D(a, R/2) \setminus \{a\}$ , con  $v$  armónica en  $D(a, R/2)$ . Definiendo  $u(a) = v(a)$ , vemos que  $u$  se puede extender a una función armónica en  $D(a, R)$ . □

**Teorema 4.25.**  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  es un dominio en  $\mathbb{C}$  que no es regular para el problema de Dirichlet.

*Demostración.*  $D = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ,  $\partial D = \partial \mathbb{D} \cup \{0\}$ . Sea  $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z) = 0$  si  $|z| = 1$  y  $f(0) = 1$ .  $f$  es continua en  $\partial D$ . Supongamos que existe  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  armónica en  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ , continua en  $\mathbb{D}$  y con  $u = f$  en  $\partial D$ . Como  $u$  es armónica y acotada en  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ , por el teorema anterior  $u$  se puede extender a una función armónica en  $\mathbb{D}$ . Entonces  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\mathbb{D}$ . Por tanto,

$$\max_{z \in \mathbb{D}} u(z) = \max_{z \in \partial \mathbb{D}} u(z) = 0$$

Sin embargo, esto contradice que  $u(0) = 1 \neq 0$ . □

*Observación.* La condición de que  $u$  está acotada superiormente no se puede suprimir en la tercera versión del principio del máximo.

**Ejemplo.** Sea  $D = \mathbb{D} \setminus \{0\}$  dominio acotado en  $\mathbb{C}$  y sea  $u(z) = \text{Log} \left( \frac{1}{|z|} \right)$ ,  $z \in D$ . Como la función  $z \mapsto \frac{1}{z}$  es holomorfa y nunca nula en  $D$ , entonces  $u$  es armónica en  $D$ .  $u$  no está acotada superiormente en  $D$ .

$$\partial D = \partial \mathbb{D} \cup \{0\}$$

Si  $\xi \in \partial \mathbb{D}$ ,

$$\limsup_{z \rightarrow \xi, z \in D} u(z) = \limsup_{z \rightarrow \xi, z \in \mathbb{D}} \text{Log} \left( \frac{1}{|z|} \right) = 0 = M$$

Pero no es cierto que  $u(z) \leq 0$  para todo  $z \in D$ . De hecho,  $u(z) > 0$  para todo  $z \in D$ .

**Lema 4.26.** Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $u : \bar{D}(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, con  $u \equiv 0$  en  $\partial D(a, R)$ . Supongamos que para cada  $z_0 \in D(a, R)$  existe  $r_{z_0} > 0$  con  $D(z_0, r_{z_0}) \subset D(a, R)$  tal que

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt, \quad r \in [0, r_{z_0}]$$

Entonces  $u \equiv 0$  en  $D(a, R)$ .

*Demostración.* Sea  $M = \max\{u(z) : z \in \bar{D}(a, R)\}$  y sea  $K = \{z \in \bar{D}(a, R) : u(z) = M\}$ .  $K$  es un compacto no vacío con  $K \subset \bar{D}(a, R)$ . Como la función  $z \in \mathbb{C} \mapsto |z - a|$  es continua, alcanza el máximo en  $K$ . Tomamos  $z_0 \in K$  tal que  $|z_0 - a| = \max\{|z - a| : z \in K\}$ .

Supongamos por reducción al absurdo que  $z_0 \in D(a, R)$ . Tomamos  $r_{z_0} > 0$ , que existe por hipótesis, y fijamos  $r \in (0, r_{z_0})$ . Entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

Sean  $E_1 = \{t \in [-\pi, \pi] : |z_0 + re^{it} - a| \leq |z_0 - a|\}$  y  $E_2 = \{t \in [-\pi, \pi] : |z_0 + re^{it} - a| > |z_0 - a|\}$ . Observamos que  $E_2 \neq \emptyset$ . Si  $t \in E_2$ , se tiene que  $z_0 + re^{it} \notin K$ . Así que  $u(z_0 + re^{it}) < M$ . Entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} u(z_0 + re^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} u(z_0 + re^{it}) dt$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} u(z_0 + re^{it}) dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} M dt \\ \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} u(z_0 + re^{it}) dt &< \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} M dt \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u(z_0) < \frac{1}{2\pi} \int_{E_1} M dt + \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} M dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dt = M$$

Esto contradice que  $z_0 \in K$ . Entonces  $z_0 \in \partial D(a, R)$ , así que por hipótesis  $u(z_0) = 0$ . Es decir,

$$u(z_0) = M = \max\{u(z) : z \in \bar{D}(a, R)\} = 0$$

Por tanto,  $u(z) \leq 0$  para todo  $z \in D(a, R)$ .

Aplicando la parte del lema que acabamos de ver a la función  $-u$ , tenemos que  $-u(z) \leq 0$  para todo  $z \in D(a, R)$ . Por tanto,  $u \equiv 0$  en  $D(a, R)$ .  $\square$

**Teorema 4.27** (Caracterización de la armonicidad por la propiedad del valor medio). *Sea  $D$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y sea  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supongamos que para cada  $a \in D$  existe  $r_a > 0$  con  $D(a, r_a) \subset D$ , tal que*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) dt, \quad r \in [0, r_a]$$

*Entonces  $u$  es armónica en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $a \in D$ . Tomamos  $r_a > 0$  y  $R = \frac{r_a}{2}$ . Sea  $v$  la solución del problema de Dirichlet en  $D(a, R)$  con valores frontera  $u$ . Entonces  $v : \bar{D}(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$  es armónica en  $D(a, R)$ , continua en  $\bar{D}(a, R)$  y con  $u = v$  en  $\partial D(a, R)$ . Vamos a aplicar el lema a  $u - v$ .  $u - v : \bar{D}(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $u - v \equiv 0$  en  $\partial D(a, R)$ . Sea  $z_0 \in D(a, R)$ . Tomamos  $r_{z_0} > 0$ , que elegimos suficientemente pequeño para que  $D(z_0, r_{z_0}) \subset D(a, R)$ . Si  $r \in [0, r_{z_0}]$ , tenemos que

$$u(z_0) - v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(z_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (u - v)(z_0 + re^{it}) dt$$

Por el lema,  $u - v = 0$  en  $D(a, R)$ . Como  $v$  es armónica en  $D(a, R)$ ,  $u$  es armónica en  $D(a, R)$ . Para cada  $a \in D$  hemos encontrado  $R > 0$  con  $D(a, R) \subset D$  tal que  $u$  es armónica en  $D(a, R)$ . Entonces  $u$  es armónica en  $D$ .  $\square$

*Observación.* Esta es la forma débil de la propiedad del valor medio. Como  $u$  es armónica en  $D$ , tenemos que  $u$  verifica la propiedad del valor medio.

**Teorema 4.28.** *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones armónicas en  $D$ . Supongamos que  $\{u_n\}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Sea  $u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z)$ ,  $z \in D$ . Entonces  $u$  es armónica en  $D$ .*

*Demostración.* Tenemos  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $K \subset D$ ,  $K$  compacto, tenemos que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente en  $K$  y  $u_n$  es continua en  $K$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Así que  $u$  es continua en  $K$ , luego  $u$  es continua en  $D$ . Sea  $a \in D$  y sea  $R > 0$  con  $D(a, R) \subset D$ . Sea  $r \in [0, R]$ . Tenemos que

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + re^{it}) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$u(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + re^{it}) dt$$

Como  $u_n \rightarrow u$  uniformemente en  $\partial D(a, r)$ ,

$$u(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) dt$$

Por el teorema anterior,  $u$  es armónica en  $D$ .  $\square$

Vamos a ver qué sucede al cambiar la condición de convergencia uniforme en compactos por la condición de que  $\{u_n\}$  sea creciente.

#### 4.4. Desigualdades de Harnack

Sean  $a \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ . Sea  $u$  una función armónica y no negativa en  $D(a, R)$ . Entonces, si  $r \in (0, R)$ , se tiene que

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}, \quad \forall z \in \bar{D}(a, R)$$

Por tanto, tomando  $r = \frac{R}{2}$ , tenemos

$$\frac{1}{3}u(a) \leq u(z) \leq 3u(a), \quad z \in \bar{D}\left(a, \frac{R}{2}\right)$$

*Demostración.* Fijamos  $r \in (0, R)$ . Tomamos  $\rho$  con  $r < \rho < R$ . Sea  $v : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(z) = u(a + \rho z)$ .

$$\begin{aligned} v : \bar{\mathbb{D}} &\rightarrow D(a, R) \xrightarrow{u} \mathbb{R} \\ z &\mapsto a + \rho z \end{aligned}$$

$v$  es continua en  $\bar{\mathbb{D}}$ , armónica en  $\mathbb{D}$  y no negativa en  $\bar{\mathbb{D}}$ .

Sea  $z \in \partial D\left(0, \frac{r}{\rho}\right)$ .  $z$  es de la forma  $z = \frac{r}{\rho}e^{i\theta}$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) P_{r/\rho}(\theta - t) dt$$

Además,

$$v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt$$

Recordemos que

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

Entonces, si  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $z = \frac{r}{\rho}e^{i\theta}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) \frac{1-r/\rho}{1+r/\rho} dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) P_{r/\rho}(\theta - t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) \frac{1+r/\rho}{1-r/\rho} dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\rho-r}{\rho+r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt &\leq v(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt \Leftrightarrow \frac{\rho-r}{\rho+r} v(0) \leq v(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r} v(0) \end{aligned}$$

En términos de  $u$ ,

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(a) \leq u(a + \rho z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}u(a), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho \in (r, R), \quad z = \frac{r}{\rho}e^{i\theta}$$

Como  $u(a + \rho z) = u\left(a + \rho \frac{r}{\rho}e^{i\theta}\right) = u(a + re^{i\theta})$ , entonces

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(a) \leq u(a + \rho z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}u(a), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho \in (r, R)$$

Haciendo  $\rho \rightarrow R^-$ , tenemos que:

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a), \quad z \in \partial D(a, r)$$

Como  $u$  es continua en  $\bar{D}(a, r)$  y armónica en  $D(a, r)$ , por el principio del máximo y el principio del mínimo,

$$\begin{aligned}\max_{z \in \bar{D}(a, r)} u(z) &= \max_{z \in \partial D(a, r)} u(z) \\ \min_{z \in \bar{D}(a, r)} u(z) &= \min_{z \in \partial D(a, r)} u(z)\end{aligned}$$

Entonces tenemos la desigualdad para todo  $z \in \bar{D}(a, r)$ . □

**Proposición 4.29.** *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones armónicas y no negativas en  $D$ . Si existe  $z_0 \in D$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_0) = \infty$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = \infty, \quad \forall z \in D$$

*siendo la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de  $D$ .*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $u_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  armónica no negativa. Sea

$$A = \{z \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = \infty\}$$

$A \neq \emptyset$  porque  $z_0 \in A$ . Veamos que  $A$  es abierto y cerrado en  $D$ .

1. Probemos que  $A$  es abierto. Queremos ver que si  $a \in A$  y  $R > 0$  tal que  $D(a, R) \subset D$ , entonces  $D(a, R/2) \subset A$  y  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  uniformemente en  $D(a, R/2)$ .

Basta ver la convergencia uniforme. Sea  $M > 0$ , veamos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  y  $z \in D(a, R/2)$ , entonces  $u_n(z) > M$ . Como  $a \in A$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a) = \infty$ . Por tanto, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_n(a) > 3M$$

Entonces, si  $n \geq n_0$  y  $z \in D(a, R/2)$ , por las desigualdades de Harnack tenemos

$$u_n(z) \geq \frac{1}{3}u_n(a) > \frac{1}{3}3M = M$$

Por tanto,  $A$  es abierto.

2. Veamos que  $A$  es cerrado en  $D$ , es decir, que  $D \setminus A$  es abierto.

Sea  $a \in D \setminus A$  y sea  $R > 0$  con  $D(a, R) \subset D$ .  $D(a, R/2) \subset D \setminus A$ , ya que si  $z \in D(a, R/2)$ , entonces  $u_n(z) \leq 3u_n(a)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in D$ . Si  $z \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a) = \infty$ , pero  $a \notin A$ . Así que  $D \setminus A$  es abierto.

$A$  es abierto y cerrado en  $D$ , que es conexo. Como  $A \neq \emptyset$ , tenemos que  $A = D$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = \infty$  para todo  $z \in D$ . Sabemos que, dado  $a \in D$  y  $R > 0$  con  $D(a, R) \subset D$ , se tiene que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  uniformemente en  $D(a, R/2)$ . Entonces  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . □

**Teorema 4.30** (Teorema de Harnack). *Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión creciente de funciones armónicas en  $D$ . Para cada  $z \in D$ , sea  $u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Entonces se da una de las dos siguientes posibilidades:*

1.  $u \equiv \infty$ . En este caso,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .
2.  $u(z) \in \mathbb{R}$  para todo  $z \in D$ . En este caso,  $u$  es armónica en  $D$  y  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $u_n$  es no negativa para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Hay dos posibilidades:

- Existe  $z_0 \in D$  tal que  $u(z_0) = \infty$ . Entonces  $u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = \infty$  y  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Se verifica (1).
- $u(z) \in \mathbb{R}$  para todo  $z \in D$ . Entonces  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $a \in D$  y  $R > 0$  con  $D(a, R) \subset D$ . Veamos que  $\{u_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $D(a, R/2)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{u_n(a)\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy por ser convergente, tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq m > n_0 \Rightarrow 0 \leq u_n(a) - u_m(a) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ya que  $u_n - u_m$  es armónica en  $D(a, R)$  y no negativa. Por tanto,  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  converge uniformemente en  $D(a, R/2)$ .

Entonces, dado  $a \in D$  y  $R > 0$  con  $D(a, R) \subset D$ , hemos visto que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  uniformemente en  $D(a, R/2)$ . Por tanto,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Entonces  $u$  es armónica en  $D$ , así que se verifica (2).

Consideramos ahora el caso general. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $v_n = u_n - u_1$ . Entonces  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión creciente de funciones armónicas no negativas. Para cada  $z \in D$ , sea

$$v(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Si  $z \in D$ ,

$$v(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(z) - u_1(z)) = \begin{cases} \infty & \text{si } u(z) = \infty \\ u(z) - u_1(z) & \text{si } u(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por el caso anterior se da una de las dos siguientes posibilidades:

- $v \equiv \infty$ . Veamos que  $v_n \rightarrow \infty$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .  
Sea  $K \subset D$ ,  $K$  compacto. Sea  $A = \min_{z \in K} u_1(z)$ . Como  $v_n \rightarrow \infty$  uniformemente en  $D$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  y  $z \in K$ , entonces  $v(z) > M - A$ , con  $M \in \mathbb{R}$ . Entonces, si  $n \geq n_0$  y  $z \in K$ ,  $u_n(z) = u_1(z) + v_n(z) > A + M - A = M$ . Por tanto, se verifica (1).
- $v(z) \in \mathbb{R}$  para todo  $z \in D$ . Veamos que  $u$  es armónica y  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ .

Sabemos que

$$v(z) = u(z) - u_1(z) \Leftrightarrow u(z) = u_1(z) + v(z), \quad z \in D$$

Entonces  $u(z) \in \mathbb{R}$  para todo  $z \in D$  y  $u$  es armónica en  $D$ . Además,  $u_n - u_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u - u_1$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Por tanto,  $u_n \rightarrow u$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ , así que se verifica (2).

□

## Capítulo 5

# El teorema de factorización de Weierstrass

Si  $P(z)$  es un polinomio con ceros  $z_1, \dots, z_n$ , entonces podemos factorizar  $P(z)$  como

$$P(z) = c \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

El objetivo es factorizar una función holomorfa usando sus ceros.

### 5.1. Funciones holomorfas sin ceros o con finitos ceros

**Teorema 5.1.** *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo y sea  $f$  una función holomorfa en  $D$  sin ceros. Entonces existe  $g$  holomorfa en  $D$  tal que  $f = e^g$ .*

**Teorema 5.2.** *Sea  $D$  un dominio simplemente conexo y sea  $f$  una función holomorfa en  $D$  con un número finito de ceros  $z_1, \dots, z_n$ . Entonces existe  $g$  holomorfa en  $D$  tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^N (z - z_n)$$

*Demostración.* Sea

$$h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_N)}$$

Solucionando las singularidades evitables,  $h$  es holomorfa en  $D$  y sin ceros. Entonces por el teorema anterior existe  $g$  holomorfa en  $D$  tal que

$$e^{g(z)} = h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_N)} \Rightarrow f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^N (z - z_n)$$

□

Desde otro punto de vista, sea  $D$  un dominio simplemente conexo y  $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}} \subset D$ , podemos plantearnos si existe  $f$  holomorfa en  $D$  tal que  $f$  tiene ceros  $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ .

Si  $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$  tiene un punto de acumulación en  $D$  entonces, por el teorema de identidad de Weierstrass,  $f \equiv 0$ . Nos interesa el caso en el que  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  es numerable y sin puntos de acumulación en  $D$ .



Sea  $D = \mathbb{C}$  y sea  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  numerable y sin puntos de acumulación. Habría que definir  $\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n)$ , por ejemplo de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (z - z_n)$$

Como  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  es infinito, entonces necesariamente  $|z_n| \rightarrow \infty$ . En caso contrario,  $\{z_n\}$  tendría un punto de acumulación en  $\mathbb{C}$ . Si fijamos  $z \in \mathbb{C}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $|z - z_n| > 2$ , así que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^{\infty} |z - z_n| = \infty$$

## 5.2. Productos infinitos

Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de números complejos. Queremos darle sentido a  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ . Por ejemplo, si  $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$ , podemos definir

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

Sin embargo, esta definición plantea algunos problemas.

1. Si tenemos una multiplicación de números complejos cuyo resultado es 0, queremos que uno de ellos sea cero. Sin embargo, si  $a_n = \frac{1}{n}$ , entonces  $P_N = \prod_{n=1}^N \frac{1}{n} = \frac{1}{N!}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_N = 0$ , con  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Queremos que la convergencia depende de la cola. Sin embargo, con esta definición depende de un número finito de términos.  
Sea  $a_1 = a$  y  $a_n = n$  para  $n \geq 2$ , entonces  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$  porque  $P_N = 0$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Sin embargo, si  $a_n = n + 1$  para todo  $n \geq 2$ , entonces  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \infty$ .

**Definición 5.1.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de números complejos. Diremos que el producto infinito asociado a  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , que denotamos por  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ , converge si:

1. Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$ .
2. Existe  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$  y además es distinto de cero.

Si converge, entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$ .

**Ejemplo.**

1. Sea  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Observamos que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sin embargo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} = 0$$

Por tanto,  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge.

2. Sea  $a_1 = 0$  y  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 2$ . Se verifica que  $a_n \neq 0$  para  $n \geq 2$ . Ahora bien,

$$\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \cdots \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Por tanto,  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  no converge.

3. Sea  $a_1 = 0$  y  $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 2$ . Es claro que  $a_n \neq 0$  para  $n \geq 2$ . Además,

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \prod_{n=2}^N \frac{n^2 - 1}{n^2} = \prod_{n=2}^N \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \left(\prod_{n=2}^N \frac{n-1}{n}\right) \left(\prod_{n=2}^N \frac{n+1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{N} \frac{N+1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

**Teorema 5.3.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de números complejos. Entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si ocurre lo siguiente.

1. El conjunto  $\{a_n : a_n = 0\}$  es finito.
2. Si existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq M$ , entonces existe  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=M}^N a_n$  y es distinto de 0.

**Teorema 5.4.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. Entonces:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .
2.  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$  si y solo si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{n_0} = 0$ .
3. Sea  $N \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} a_{n+N}$  converge y además

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\prod_{n=1}^N a_n\right) \left(\prod_{n=1}^{\infty} a_{n+N}\right)$$

4. Sea  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$  converge. Entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  converge y además

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right) \left(\prod_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

*Demostración.*

1. Como  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$  y  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^N a_n = q$ , con  $q > 0$ . Si  $M > n_0$ ,

$$a_M = \frac{\prod_{n=n_0}^M a_n}{\prod_{n=n_0}^{M-1} a_n} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{q}{q} = 1$$

2. Supongamos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{n_0} = 0$ . Como  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N \rightarrow 0$$

Si  $N > n_0$ , entonces  $P_N = a_1 \dots a_{n_0-1} 0 a_{n_0+1} \dots a_N = 0$ .

Recíprocamente, si  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$  y  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

3. Tomemos  $N \in \mathbb{N}$ . Si  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$  y  $\lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^M a_n = q$  con  $q \neq 0$ . Entonces  $a_{n+N} \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$  y además

$$\prod_{n=n_0}^M a_{n+N} = \prod_{n=n_0+N}^{M+N} a_n = \frac{\prod_{n=n_0}^{M+N} a_n}{a_{n_0} \dots a_{n_0+N-1}} \rightarrow \frac{q}{a_{n_0} \dots a_{n_0+N-1}} \neq 0$$

Por tanto,  $\prod_{n=1}^{\infty} a_{n+N}$  converge.

4.  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$  convergen. Entonces:

- Existe  $n_a \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_a$  y  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_a}^N a_n = l_a \neq 0$ .
- Existe  $n_b \in \mathbb{N}$  tal que  $b_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_b$  y  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_b}^N b_n = l_b \neq 0$ .

Sea  $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$ . Entonces  $a_n b_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^N a_n b_n \rightarrow c \neq 0$$

Como los productos convergen,

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{n=1}^N a_n \right) \left( \prod_{n=1}^N b_n \right) = \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n \right) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N b_n \right) = \left( \prod_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

□

**Teorema 5.5.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ , entonces son equivalentes:

1.  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
2. Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$  y  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \text{Log}(a_n)$  converge.

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Como  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$  y además  $\prod_{n=n_0}^N a_n \rightarrow q$  con  $q \neq 0$ . Sea  $S_N = \sum_{n=n_0}^N \text{Log}(a_n)$ . Entonces:

$$e^{S_N} = e^{\sum_{n=n_0}^N \text{Log}(a_n)} = \prod_{n=n_0}^N a_n = q_N \Rightarrow S_N \in \log(q_N) \Rightarrow S_N = \text{Log}(q_N) + 2\pi k_N i, \quad k_N \in \mathbb{Z}$$

Distinguiamos dos casos:

1. Supongamos que  $q \notin (-\infty, 0)$ . Como  $q_N \rightarrow q$ , entonces existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $q_N \notin (-\infty, 0]$  para todo  $N \geq N_0$ . Así que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Log}(q_N) = \text{Log}(q)$ .

$$\begin{cases} S_{N+1} - S_N = \text{Log}(q_{N+1}) - \text{Log}(q_N) + 2\pi(k_{N+1} - k_N)i \\ S_{N+1} - S_N = \text{Log}(a_{N+1}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} (k_{N+1} - k_N) = 0$$

Como  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $k_N = k$  para todo  $N \geq j$ .

2. Supongamos que  $q \in (-\infty, 0)$ . Definimos una nueva sucesión  $\tilde{a}_{n_0} = -a_{n_0}$  y  $\tilde{a}_n = a_n$  para  $n > n_0$ .

$$\tilde{q}_N = \prod_{n=n_0}^N \tilde{a}_n = - \prod_{n=n_0}^N a_n \rightarrow -q > 0$$

Por el caso anterior.  $\tilde{S}_N = \sum_{n=n_0}^N \text{Log}(\tilde{a}_n)$  converge. Equivalentemente,  $S_N$  converge.

$\Leftarrow$  Falta ver que  $\prod_{n=n_0}^N a_n \rightarrow q \neq 0$ . Sabemos que  $S_N = \sum_{n=n_0}^N \text{Log}(a_n) \rightarrow p$  y  $q_N = e^{S_N}$ . Tomando límites,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{S_N} = e^{\lim_{N \rightarrow \infty} S_N} = e^p = q \neq 0$$

□

**Corolario 5.6.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces son equivalentes:

1.  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(a_n)$  converge.

Además,

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(a_n)}$$

Queremos encontrar una noción de convergencia absoluta. Para las series sabemos lo siguiente.

**Teorema 5.7.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ , entonces son equivalentes:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.
2. Dada  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutación,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  converge y es igual a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
3. Sea  $\{A_n\}$  una partición de  $\mathbb{N}$  con infinitos elementos. Entonces  $\sum_{k \in A_n} a_k$  converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k \in A_n} a_k \right)$$

Como consecuencia, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente, en particular converge.

Uniendo los teoremas anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.8.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(a_n)$  converge absolutamente.
2. Dada  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutación,  $\prod_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  converge y su valor es

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(a_n)}$$

3. Sea  $\{A_n\}$  una partición de  $\mathbb{N}$  con infinitos elementos. Entonces  $\prod_{k \in A_n} a_k$  converge y además

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{k \in A_n} a_k \right)$$

**Lema 5.9.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces son equivalentes:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(a_n)$  converge absolutamente.
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  converge absolutamente.

*Demostración.* Empecemos por  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , entonces

$$\text{Log}(1-z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

Además,

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$$

Queremos analizar

$$\left| \frac{\text{Log}(1+z)}{z} - 1 \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|}$$

Si  $|z| < \frac{1}{2}$ , entonces

$$\left| \frac{\text{Log}(1+z)}{z} - 1 \right| = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2}$$

Así que

$$\left| \left| \frac{\text{Log}(1+z)}{z} \right| - 1 \right| \leq \left| \frac{\text{Log}(1+z)}{z} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left| \frac{\text{Log}(1+z)}{z} \right| \leq \frac{3}{2}$$

Por último, sea  $z = w - 1$ , entonces si  $|w - 1| = |z| \leq \frac{1}{2}$ ,

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{\text{Log}(w)}{1-w} \right| \leq \frac{3}{2}$$

Basta ver que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|1 - a_n| < \frac{1}{2}$ .

$\Leftarrow$  Como  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  converge absolutamente,  $a_n \rightarrow 1$ . Por tanto, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|1 - a_n| \leq \frac{1}{2}$  para todo  $n \geq n_0$ .

$\Rightarrow$  Análogo.

□

**Teorema 5.10.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ , entonces son equivalentes:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  converge absolutamente.
2. Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene que  $|1 - a_n| \leq \frac{1}{2}$  y  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \text{Log}(a_n)$  converge uniformemente.
3. Para cada permutación  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  se tiene que  $\prod_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  converge y además

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

4. Sea  $\{A_n\}$  una partición de  $\mathbb{N}$  con infinitos elementos. Entonces  $\prod_{k \in A_n} a_k$  converge y además

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{k \in A_n} a_k \right)$$

**Definición 5.2** (Convergencia absoluta). Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ , su producto infinito asociado converge absolutamente si  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$  converge absolutamente.

*Observación.*

1. Si  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente, entonces converge.
2. Si  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente, entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |1 - a_n|)$  converge absolutamente.

*Demostración.*  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |1 - a_n|)$  converge absolutamente si y solo si  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1 - |1 - a_n|) = - \prod_{n=1}^{\infty} |1 - a_n|$  converge absolutamente. □

### 5.3. Funciones holomorfas definidas por productos infinitos

**Teorema 5.11.** Sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones holomorfas en un dominio  $D$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - f_n)$  es absoluta y uniformemente convergente en compactos de  $D$ .

2. Para cada compacto  $K$  en  $D$  existe  $n_K \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_K$  se tiene que  $|1 - f_n(z)| \leq \frac{1}{2}$  y  $\sum_{n=n_K}^{\infty} \text{Log}(f_n)$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ .

**Lema 5.12.** Sea  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ . Entonces

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + u_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |u_k|) - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Demostración.* Razonamos por inducción.

- Para  $n = 1$ ,

$$|1 + u - 1 - 1| = |u_1| \leq |u_1|$$

- Supongamos que es cierto para  $n$  y veamos para el caso  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (1 + u_k) - 1 \right| &= \left| (1 + u_{n+1}) \prod_{k=1}^n (1 + u_k) - 1 \right| = \left| (1 + u_{n+1}) \left( \prod_{k=1}^n (1 + u_k) - 1 \right) + u_{n+1} \right| \leq \\ &\leq |1 + u_{n+1}| \left| \prod_{k=1}^n (1 + u_k) - 1 \right| + |u_{n+1}| \leq |1 + u_{n+1}| \left| \prod_{k=1}^{\infty} (1 + |u_k|) - 1 \right| + |u_{n+1}| \leq \\ &\leq (1 + |u_{n+1}|) \left| \prod_{k=1}^{\infty} (1 + |u_k|) - 1 \right| + |u_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |u_k|) - 1 \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.13.** Sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones holomorfas en  $D$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - f_n)$  converge absoluta y uniformemente en compactos de  $D$ , entonces:

1.  $\prod_{k=1}^n$  converge uniformemente en cada compacto de  $D$  a una función holomorfa  $P$  que denotamos por  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ .
2. La convergencia de  $\prod_{k=1}^n f_k$  no depende de reordenaciones.
3. Para cada  $z_0 \in D$  tenemos que  $\text{ord}(z_0, P) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{ord}(z_0, f_k)$ , donde  $\text{ord}(z_0, f)$  es el orden de  $z_0$  como cero de  $f$ .
4. Las derivadas logarítmicas  $\frac{P'}{P}$  y  $\frac{f'_n}{f_n}$  existen como funciones meromorfas. Además,

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k}{f_k}$$

Si  $R > 0$  y  $\overline{D(z_0, R)} \subset D$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_n$  no tiene ceros en  $\overline{D(z_0, R)}$  para todo  $n \geq n_0$  y  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}$  converge absoluta y uniformemente en  $\overline{D(z_0, R)}$ .

*Demostración.*

1. Sea  $K$  compacto de  $D$  y sea  $P_n = \prod_{k=1}^n f_k$ . Basta ver que  $P_n$  es uniformemente de Cauchy.

En primer lugar, veamos que  $P_n$  es uniformemente acotado en  $K$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - f_n)$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ , entonces existe  $c_K$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| < c_K$ . Entonces:

$$\begin{aligned} |P_n| &= \left| \prod_{k=1}^n f_k \right| = \left| \prod_{k=1}^n (1 + f_k - 1) \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |1 - f_k|) \leq \prod_{k=1}^n e^{|1 - f_k|} = e^{\sum_{k=1}^n |1 - f_k|} \leq \\ &\leq e^{\sum_{k=1}^{\infty} |1 - f_k|} < e^{c_K} \end{aligned}$$

Ahora, veamos que  $\{f_n\}$  es uniformemente de Cauchy en  $K$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de modo que si  $|x| < \delta$  entonces  $e^{c_K}|e^x - 1| < \varepsilon$ . Como  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - f_n)$  es de Cauchy uniformemente en  $K$ , existe  $n_K$  tal que si  $m \leq n \leq n_K$ , entonces  $\sum_{k=n}^m |1 - f_k| < \delta$ . Por tanto, si  $m \geq n \geq n_K$ ,

$$\begin{aligned} |P_m - P_n| &= \left| \prod_{k=1}^m f_k - \prod_{k=1}^n f_k \right| = |P_n| \left| \left( \prod_{k=n+1}^m f_k \right) - 1 \right| \leq e^{c_K} \left| \prod_{k=n+1}^m (1 + f_k - 1) - 1 \right| \leq \\ &\leq e^{c_K} \left( \prod_{k=n+1}^m (1 + |1 - f_k|) - 1 \right) \leq e^{c_K} \left( e^{\sum_{k=n+1}^m |1 - f_k|} - 1 \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

2. Es consecuencia de (1).

3. Sabemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |1 - f_n(z)| < \frac{1}{2}$  para todo  $z \in \overline{D(z_0, R')}$ , con  $\overline{D(z_0, R)} \subset D(z_0, R')$ . Entonces, en particular  $|1 - f_n(z)| < \frac{1}{2}$  para todo  $n \geq n_0 + 1$ . Así que  $f_n$  no se anula en  $\overline{D(z_0, R')}$  para todo  $n \geq n_0 + 1$ . Sea entonces  $g_n = \prod_{k=n_0+1}^n f_k$ . Sabemos que  $g_n$  converge uniformemente en  $\overline{D(z_0, R')}$  a una función  $g$ .

$$\begin{aligned} |g_n(z) - 1| &= \left| \left( \prod_{k=n_0+1}^n f_k(z) \right) - 1 \right| = \left| \prod_{k=n_0+1}^n (1 + f_k(z) - 1) - 1 \right| \leq \\ &\leq \prod_{k=n_0+1}^n (1 + |f_k(z) - 1|) - 1 \leq e^{\sum_{k=n_0+1}^n |1 - f_k(z)|} - 1 \leq e^{1/2} - 1, \quad \forall z \in \overline{D(z_0, R')} \end{aligned}$$

Por tanto,  $g$  no tiene ceros en  $\overline{D(z_0, R')}$ . Entonces

$$P = f_1 \dots f_{n_0} \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n = f_1 \dots f_{n_0} g$$

Como  $g$  es no nula,

$$\text{ord}(z_0, P) = \sum_{n=1}^{n_0} \text{ord}(z_0, f_n) + \text{ord}(z_0, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{ord}(z_0, f_n)$$

4. De la expresión anterior tenemos que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f'_n}{f_n} + \frac{g'}{g}$$

Falta ver que  $\sum_{n=n_0+1}^N \frac{f'_n}{f_n} \rightarrow \frac{g'}{g}$ . Como  $\sum_{n=n_0+1}^N f_k = \frac{g'_N}{g_N}$ , podemos ver equivalentemente que  $\frac{g'_N}{g_N} \rightarrow \frac{g'}{g}$  uniformemente en  $\overline{D(0, R')}$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{g'_N(z)}{g_N(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right| &= \left| \frac{g'_N(z)g(z) - g'(z)g_N(z)}{g_N(z)g(z)} \right| = \\ &= \left| \frac{g'_N(z)g(z) - g(z)g'(z) + g(z)g'(z) - g'(z)g_N(z)}{g_N(z)g(z)} \right| \leq \\ &\leq \frac{|g(z)||g'_N(z) - g'(z)| + |g'(z)||g_N(z) - g(z)|}{|g_N(z)||g(z)|} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} ||g_n(z)| - 1| &\leq |g_n(z) - 1| < e^{1/2} - 1 \Leftrightarrow 2 - e^{1/2} < |g_n(z)| < e^{1/2} \\ |g(z)| - 1 &\leq |g(z) - 1| < e^{1/2} - 1 \Leftrightarrow 2 - e^{1/2} < |g(z)| < e^{1/2} \end{aligned}$$

Además, existe  $c_K = \max_{z \in \overline{D(z_0, R')}} (|g(z)| + |g'(z)|)$ . Por tanto,

$$\left| \frac{g'_N(z)}{g_N(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \rightarrow 0$$

uniformemente en  $\overline{D(z_0, R')}$ .

□

### Ejemplo.

1.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ . Veamos que converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ .

Sea  $K$  compacto de  $\mathbb{C}$ . Entonces existe  $R > 0$  tal que  $K \subset \overline{D(0, R)}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{n^2} \leq R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq Rc$$

Por el teorema anterior, el producto converge uniformemente en  $K$ . Además,  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$  se anula en  $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ .

2. Busquemos una función entera que se anule en  $\mathbb{Z}$  y cuyos ceros tengan orden 1. Consideramos  $P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ . Sea  $K$  un compacto en  $\mathbb{C}$ , existe  $R > 0$  tal que  $K \subset \overline{D(0, R)}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{n^2} \leq R^2 c$$

Por tanto, converge uniformemente en  $K$ .

La función  $z \mapsto \sin(\pi z)$  tiene las mismas características que buscábamos en  $P$ . Por tanto, la función

$$z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{P(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

es una función holomorfa sin ceros y se puede factorizar de la forma

$$\frac{\sin(\pi z)}{z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = e^{\varphi(z)}$$

## 5.4. El teorema de factorización de Weierstrass

Sea  $\{z_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$  una colección de puntos de  $\mathbb{C}$ . Nuestro objetivo era encontrar una función entera que se anule en  $\{z_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ .

- Si  $\{z_k\}_{k=1}^N$  es finita, esta función es  $\prod_{n=1}^N (z - z_n)$ .
- Si  $\{z_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$  tiene un punto de acumulación, entonces la función tiene que ser nula.

En el caso restante,  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  tiene  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$ . Consideramos la expresión

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$$

Si  $z \in \overline{D(0, R)}$  con  $R > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|}{|z_k|} \leq R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|}$$



**Teorema 5.14.** Sea  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|}$  converge y  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$ . Entonces  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$  converge absoluta y uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$  y además tiene como ceros  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

*Observación.* La función  $z^N \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$  tiene como ceros  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  y además el 0 es un cero de multiplicidad  $N$ .

Falta por ver qué ocurre cuando  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|}$  no converge, donde  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  con  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$ . Consideramos

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{q_k\left(\frac{z}{z_k}\right)}$$

Veamos un razonamiento intuitivo. Que el producto absoluto converja absoluta y uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$  es análogo a que converja la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Log} \left( \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{q_k\left(\frac{z}{z_k}\right)} \right) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + q_k \left(\frac{z}{z_k}\right) \right|$$

Si conseguimos que

$$\sup_{|z| \leq R} \left| \operatorname{Log} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + q_k \left(\frac{z}{z_k}\right) \right| < M_K(R)$$

y además  $\sum_{k=1}^{\infty} M_K(R) < \infty$ , por el criterio de la mayorante de Weierstrass se tiene la convergencia. Para  $k \geq k_0$ , tenemos que

$$\frac{|z|}{|z_k|} \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} < 1$$

Sea  $w = \frac{z}{z_k}$ ,

$$|\operatorname{Log}(1 - w) + q_k(w)| = \left| -\operatorname{Log} \left( \frac{1}{1 - w} \right) + q_k(w) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} - q_k(w) \right|$$

Entonces, si  $q_k(w) = \sum_{n=1}^k \frac{w^n}{n}$ ,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} - q_k(w) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{w^n}{n} \right| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} |w|^n = \frac{|w|^{k+1}}{k+1} \frac{1}{1 - |w|}$$

Tenemos que  $\frac{1}{1 - |w|} < 2$ . Por tanto, queremos que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{|w|^{k+1}}{k+1} < \infty$$

Esta serie siempre converge. En lugar de considerar  $q_k$  podemos tomar  $q_{p_k}$ , donde  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Basta tomar  $p_k$  tal que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{|w|^{p_k+1}}{p_k+1} < \infty$$

**Definición 5.3** (Factores primos de Weierstrass). Los factores primos de Weierstrass son

$$E_0(z) = 1 - z$$

$$E_p(z) = (1 - z) \exp \left( \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \right), \quad p \in \mathbb{N}$$

donde  $\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}$  es el polinomio de Taylor de orden  $p$  de  $\log \left( \frac{1}{1-z} \right)$ .

*Observación.* Para todo  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $E_p(0) = 1$ ,  $E_p(1) = 0$  y  $E_p$  es entera.

**Lema 5.15.** Sea  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $|z| < 1$ , entonces  $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ .

*Demostración.* Si  $p = 0$ ,

$$|1 - E_0(z)| = |1 - (1 - z)| = |z|$$

Si  $p \in \mathbb{N}$ , como  $E_p$  es una función entera,

$$E_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Como  $E_p(0) = 1$ , entonces  $a_0 = 1$ . Así que

$$E_p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Además, como  $E_p(1) = 0$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1$ . De la expresión anterior,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 1 - E_p(z) = 1 - (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right)$$

Derivando,

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} &= \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right) - (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right) \left(\sum_{k=1}^p z^{k-1}\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right) \left(1 - (1 - z) \sum_{k=0}^{p-1} z^k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right) z^p = \\ &= z^p \left(1 + \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} + \frac{\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right)^2}{2!} + \dots\right) = z^p + A_{p+1} z^{p+1} + A_{p+2} z^{p+2} + \dots \end{aligned}$$

Por tanto,  $a_n = 0$  para todo  $1 \leq n \leq p$ . Además,

$$-(p+1)a_{p+1} = 1 \Rightarrow a_{p+1} = -\frac{1}{p+1}$$

En general, para todo  $n > p+1$ ,

$$n a_n = -A_{n-1} < 0 \Rightarrow a_n < 0$$

Así que

$$\begin{aligned} |1 - E_p(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^{n-(p+1)} \right| \leq \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| |z|^{n-(p+1)} \leq |z|^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| = |z|^{p+1} \left( -\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \right) = \\ &= |z|^{p+1} \left( -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = |z|^{p+1} \end{aligned}$$

□

*Observación.* Hemos visto que

$$E_p(z) = 1 - \frac{z^{p+1}}{p+1} + \sum_{n=p+2}^{\infty} a_n z^n$$

**Teorema 5.16** (Teorema de factorización de Weierstrass: primera versión). *Sea  $\{a_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Entonces existe una sucesión de números  $\{p_n\} \subset \mathbb{N} \cup 0$  de modo que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

*converge absoluta y uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$  y además define una función entera cuyos ceros son  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  compacto de  $\mathbb{C}$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $K \subset \overline{D(0, R)}$ . Como  $\{a_n\} \rightarrow \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene que  $\frac{|z|}{|a_n|} \leq \frac{R}{2R} < 1$ . Por el lema anterior,

$$\left| 1 - E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{p_n+1}$$

Si consideramos  $p_n = n$ , por el criterio de la mayorante de Weierstrass tenemos que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| 1 - E_n \left( \frac{z}{a_n} \right) \right|$$

converge uniformemente en  $K$ . Además,

$$E_n \left( \frac{a_n}{a_n} \right) = E_n(1) = 0$$

□

**Teorema 5.17** (Teorema de factorización de Weierstrass: segunda versión). *Sea  $f$  una función entera tal que en  $z = 0$  tiene un cero de orden  $N$  y los demás ceros de  $f$  son  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Entonces existe  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$  y una función entera  $g$  tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

*Demostración.* Suponemos  $\{a_n\}$  conjunto infinito. Por el teorema anterior, existe una función entera que se anula en  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Entonces

$$\frac{f(z)}{z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)}$$

es entera y no se anula en  $\mathbb{C}$ . Por tanto, existe  $g$  entera tal que

$$\frac{f(z)}{z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)} = e^{g(z)}$$

□

*Observación.*

1. La factorización no es única. Si la sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  da una descomposición, entonces una sucesión  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $p_n \leq q_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  también sirve.

2. Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y existe  $p$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$  converge, entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_p \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

converge absoluta y uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ .

*Demostración.* Sea  $K$  compacto de  $\mathbb{C}$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $K \subset \overline{D(0, R)}$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  se tiene que

$$|a_n| \geq 2R \Rightarrow \left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

Por el lema anterior,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| 1 - E_p \left( \frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p+1} \leq R^{p+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$$

□

## 5.5. Exponente de convergencia y género de una sucesión

A partir de las observaciones anteriores, introducimos la siguiente definición.

**Definición 5.4.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Definimos el exponente de convergencia de la sucesión como

$$\sigma = \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty \right\}$$

*Observación.*

1. Si  $s \in \mathbb{R}$  satisface que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty$ , entonces si  $t > s$  se cumple que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^t} < \infty$ .
2. Diremos que  $\inf \emptyset = +\infty$ , es decir,  $\sigma = +\infty$  cuando ningún  $s \in \mathbb{R}$  satisface que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty$ .
3. Si  $\sigma < \infty$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty \text{ si } s \in (\sigma, +\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} = \infty \text{ si } s \in (-\infty, \sigma)$$

**Definición 5.5.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  y  $\sigma < \infty$ . Entonces el género de la sucesión es el menor entero  $p$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$$

*Observación.*

1.  $\sigma > 0$  siempre. Además,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^0} = \infty$  así que  $p \geq 0$ .
2.  $p \leq \sigma \leq p+1$ .

Si  $\{a_n\}$  es finita entonces diremos que  $\sigma = p = 0$ .

### Ejemplo.

1. Sea  $a_n = n + 1$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} < \infty \Leftrightarrow s < 1 \Rightarrow \sigma = 1, p = 1$$

2. Sea  $a_n = (n+1)^2$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2s}} < \infty \Leftrightarrow s > \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2}, p = 0$$

3. Sea  $a_n = (n+1) \log^2(n+1)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s \log^{2s}(n+1)} < \infty \Leftrightarrow s \geq 1 \Rightarrow \sigma = 1, p = 0$$

Para el caso  $s = 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log^2(n+1)} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1) \log^2(x+1)} dx = -\frac{1}{\log(x+1)} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\log(2)}$$

4. Sea  $a_n = \log(n+1)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n+1)} = \infty \quad \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma = \infty$$

5. Sea  $a_n = 2^n$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^s)^n} < \infty \quad \forall s > 0 \Rightarrow \sigma = 0, p = 0$$

## 5.6. Factorización canónica de una función entera

Con las definiciones anteriores vamos a tener el siguiente teorema.

**Teorema 5.18** (Teorema de factorización canónica). *Sea  $f$  una función entera con  $z = 0$  un cero de orden  $N$  y  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  los demás ceros de  $f$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  y  $\sigma < \infty$ , entonces*

$$f(z) = e^{g(z)} z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_p \left( \frac{z}{a_n} \right)$$

donde  $p$  es el género de  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Demostración.* Sea  $K$  compacto de  $\mathbb{C}$ , entonces existe  $R > 0$  tal que  $K \subset \overline{D(0, R)}$ . Queremos ver que  $\prod_{n=1}^{\infty} E_p \left( \frac{z}{a_n} \right)$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ . Basta ver que  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_p \left( \frac{z}{a_n} \right) \right|$  converge uniformemente en  $K$ . Como  $|a_n| \rightarrow \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n| \geq 2R$  para todo  $n \geq n_0$ . Entonces, como  $p$  es el género de  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| 1 - E_p \left( \frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|z|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} \leq R^{p+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$$

□

## 5.7. Factorización de funciones holomorfas en un dominio

**Teorema 5.19.** Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{0\}$  sin puntos de acumulación en  $D$ . Entonces existe una función holomorfa en  $D$  que se anula en  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Demostración.* Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es finito, entonces dicha función es  $\prod_{n=1}^N (z - a_n)$ . Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , entonces definimos  $\delta_n = \text{dist}(a_n, \mathbb{C} \setminus D)$ . Consideramos primero dos casos.

1. Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n|\delta_n \geq 1$  para todo  $n \geq N_0$ . Veamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq \infty$ . Entonces existe una subsucesión  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  acotada. Así que existe una subsucesión  $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$  de  $\{a_{n_k}\}$  convergente a  $a_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ . Si  $D = \mathbb{C}$ , esto es imposible. En otro caso,

$$1 \leq |a_m|\delta_m \leq |a_m||a_m - w|, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus D$$

Tomando límites,

$$1 \leq |a_0||a_0 - w|, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus D$$

Como necesariamente  $|a_0| \neq 0$ , entonces

$$|a_0 - w| \geq \frac{1}{|a_0|} \Rightarrow a_0 \notin \mathbb{C} \setminus D \Rightarrow a_0 \in D$$

Esto es una contradicción.

2. Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n|\delta_n \leq 1$  para todo  $n \geq N_0$ . Veamos por reducción al absurdo que  $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Supongamos que existen una subsucesión  $\{\delta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $\delta_{n_k} \geq \varepsilon > 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces existe una subsucesión  $\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$  de  $\{\delta_{n_k}\}$  que converge a un cierto  $\delta_0 \geq \varepsilon$ . Como además  $|a_m| < \frac{1}{\varepsilon}$ , existe una subsucesión  $\{a_l\}_{l=1}^{\infty}$  de  $\{a_m\}$  que converge a  $a_0$ . Así que

$$\varepsilon \leq \delta_l \leq |a_l - w|, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Tomando límites,

$$\varepsilon \leq \delta_0 \leq |a_0 - w|, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow a_0 \in D$$

Esto contradice que  $\{a_n\}$  no tenga puntos de acumulación.

Construyamos ahora una función holomorfa  $f$  con ceros en  $\{a_n\}$ . Para cada  $a_n$  existe un  $b_n \in \mathbb{C} \setminus D$  de modo que  $|a_n - b_n| \leq \frac{3}{2}\delta_n$ . Entonces definimos

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n \left( \frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right)$$

cuyos ceros son  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Sea  $K$  un compacto de  $D$  y sea  $d = \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus D)$ . Observamos que  $d > 0$ . Como  $\delta_n \rightarrow 0$ , podemos tomar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta_n < \frac{d}{2}$  para todo  $n \geq n_0$ .

$$|a_n - b_n| \leq \frac{3}{2}\delta_n < \frac{3}{4}d \leq \frac{3}{4}|z - b_n|, \quad \forall z \in K$$

Así que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| 1 - E_n \left( \frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right|^{n+1} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} < \infty$$

Por tanto,

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n \left( \frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right)$$

converge absoluta y uniformemente en compactos de  $D$ .

En general, la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  se puede separar en  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ , con  $\{b_n\}$  en el caso 1 y  $\{c_n\}$  en el caso 2. Por el caso 1, existe  $f$  holomorfa en  $D$  con ceros  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ . De igual forma, por el caso 2 existe  $g$  holomorfa en  $D$  con ceros  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ . Consideramos  $h = fg$ .  $h$  es holomorfa en  $D$  con ceros  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ .  $\square$

## Capítulo 6

# Funciones enteras. Crecimiento y distribución de los ceros

**Teorema 6.1** (Teorema de Liouville). *Si  $f$  es una función entera y acotada, entonces  $f$  es constante.*

**Teorema 6.2** (Generalización del teorema de Liouville). *Sea  $f$  entera tal que existen  $\alpha > 0$ ,  $c > 0$  y  $R_0 > 0$  con  $|f(z)| \leq c|z|^\alpha$  para todo  $|z| \geq R_0$ . Entonces  $f$  es un polinomio de grado  $E(\alpha)$  y por tanto tiene  $E(\alpha)$  ceros.*

*Demostración.* Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Sea  $R > 0$ ,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \leq \max_{|z|=R} |f(z)| \frac{1}{R^n} \leq c \frac{|z|^\alpha}{R} = cR^{\alpha-n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty, n > E(\alpha)} 0$$

Por tanto,  $a_n = 0$  para todo  $n > E(\alpha)$ . □

*Observación.*

1. Parece que si el crecimiento está controlado, el número de ceros también lo está.
2. Al revés esto no ocurre. Por ejemplo, con la exponencial.

### 6.1. La fórmula de Jensen

La fórmula de Jensen permite controlar el número de ceros de una función holomorfa sabiendo restricciones sobre su crecimiento.

**Lema 6.3.** *Sea  $s > 0$ . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 + se^{i\theta}| d\theta = \log^+(s)$$

donde

$$\log^+(s) = \begin{cases} \log(s) & \text{si } s \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 < s < 1 \end{cases}$$

*Demostración.* Sabemos que  $\text{Log}(1 - z)$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ .

- Si  $s < 1$ , entonces por el teorema del valor medio

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Log}|1 - se^{i\theta}| d\theta = 0$$



- Si  $s > 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - se^{i\theta}| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| se^{i\theta} \left( \frac{1}{s} e^{-i\theta} - 1 \right) \right| d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(s) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 1 - \frac{1}{s} e^{-i\theta} \right| d\theta = \log(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 1 - \frac{1}{s} e^{i\varphi} \right| d\varphi = \log(s) \end{aligned}$$

- Sea  $s = 1$ .

$$|1 - e^{i\theta}|^2 = (1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta}) = 2 - 2\cos(\theta)$$

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Luego  $|1 - e^{i\theta}|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \right) d\theta = \log(2) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta = \\ &= \log(2) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left( \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta = \log(2) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log(\sin(\varphi)) d\varphi \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \log(\sin(\theta)) d\theta &= \int_0^{\pi/2} \log \left( 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \log(2) + \int_0^{\pi/2} \log \left( \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta + \int_0^{\pi/2} \log \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \log(2) + \int_0^{\pi/2} \log \left( \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta + \int_0^{\pi/2} \log \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2} \log(2) + 2 \int_0^{\pi/2} \log(\sin(\varphi)) d\varphi - 2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} \log(\sin(\varphi)) d\varphi = \frac{\pi}{2} \log(2) + 2 \int_0^{\pi/2} \log(\sin(\varphi)) d\varphi \end{aligned}$$

Así que

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin(\theta)) d\theta = -\frac{\pi}{2} \log(2)$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$$

□

**Teorema 6.4** (Fórmula de Jensen). *Sea  $f$  una función holomorfa en  $D(0, R)$  con  $f(0) \neq 0$  y tal que tiene ceros  $\{a_n\}$  de modo que*

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

*Sea  $\rho \in (0, R)$  y  $n(\rho, f) = \#\{a_n : |a_n| \leq \rho\}$ . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \log \left( \frac{\rho}{|a_k|} \right)$$

*Demostración.* Si  $\rho = 0$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(0)| d\theta = \log |f(0)|$$

Sea ahora  $\rho \in (0, R)$ . Supongamos que  $f$  no tiene ceros en  $\overline{D(0, \rho)}$ . Entonces existe  $\rho'$  con  $0 < \rho < \rho' < R$  tal que  $f$  es holomorfa en  $D(0, \rho')$  y  $f$  no tiene ceros en  $D(0, \rho')$ . Así, como  $\text{Log}(f(z))$  es holomorfa en  $D(0, \rho')$ , tenemos que  $\log |f(z)|$  es armónica en  $D(0, \rho')$ . Por el teorema del valor medio,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)|$$

En general, consideramos

$$F(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{n(\rho, f)} (z - a_k)}$$

Es holomorfa en  $D(0, R)$  y no se anula en  $\overline{D(0, \rho)}$ . Por el caso anterior,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{\prod_{k=1}^{n(\rho, f)} |\rho e^{i\theta} - a_k|} \right) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left( \prod_{k=1}^{n(\rho, f)} |\rho e^{i\theta} - a_k| \right) d\theta = \\ &= \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \log \left( \frac{1}{|a_k|} \right) \end{aligned}$$

Sin embargo, para dar este paso es necesario que las integrales converjan por separado. Sea  $a_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\rho e^{i\theta} - \rho_k e^{i\theta_k}| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \rho e^{i\theta} \left( 1 - \frac{\rho_k}{\rho} e^{i(\theta_k - \theta)} \right) \right| d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\rho e^{i\theta}| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 1 - \frac{\rho_k}{\rho} e^{i(\theta_k - \theta)} \right| d\theta = \\ &= \log(\rho) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| 1 - \frac{\rho_k}{\rho} e^{i\varphi} \right| d\varphi = \log(\rho) \end{aligned}$$

□

**Definición 6.1.** Se llama función contadora de Nevanlinna a la cantidad

$$N(\rho, f) = \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho\}} \log \left( \frac{\rho}{|a_n|} \right)$$

*Observación.*

1.

$$N(\rho, f) = \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho\}} \log \left( \frac{\rho}{|a_n|} \right) = \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \frac{\rho}{|a_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \log^+ \left( \frac{\rho}{|a_k|} \right)$$

2.

$$N(\rho, f) = \int_0^{\rho} \frac{n(t, f)}{t} dt$$

*Demostración.* Sean  $f$  y  $\rho$ . Por simplicidad, llamamos  $n(\rho) = n(\rho, f)$ . Existen  $a_1, \dots, a_{n(\rho)}$  ceros de  $f$  de modo que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_{n(\rho)}|$$

Van a existir  $p$  radios  $\rho_1 < \dots < \rho_p$  tal que cada cero  $a_k$  va a tener asociado un único  $\rho_j$  de la forma  $|a_k| = \rho_j$ . Entenderemos que  $n(\rho_0) = 0$ .

$$\begin{aligned}
N(\rho, f) &= \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho\}} \log \left( \frac{\rho}{|a_n|} \right) = \sum_{j=1}^p \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho_j\}} \log \left( \frac{\rho}{|a_n|} \right) = \sum_{j=1}^p \log \left( \frac{\rho}{\rho_j} \right) \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho_j\}} 1 = \\
&= \sum_{j=1}^p \log \left( \frac{\rho}{\rho_j} \right) (n(\rho_j) - n(\rho_{j-1})) = \\
&= \log \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) (n(\rho_1) - n(\rho_0)) + \log \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right) (n(\rho_2) - n(\rho_1)) + \dots + \log \left( \frac{\rho}{\rho_p} \right) (n(\rho_p) - n(\rho_{p-1})) = \\
&= n(\rho_1) \left( \log \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) - \log \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right) \right) + n(\rho_2) \left( \log \left( \frac{\rho}{\rho_2} \right) - \log \left( \frac{\rho}{\rho_3} \right) \right) + \dots + n(\rho_p) \log \left( \frac{\rho}{\rho_p} \right) = \\
&= n(\rho_1) \log \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + n(\rho_2) \log \left( \frac{\rho_3}{\rho_2} \right) + \dots + n(\rho_{p-1}) \log \left( \frac{\rho_p}{\rho_{p-1}} \right) + n(\rho_p) \log \left( \frac{\rho}{\rho_p} \right) = \\
&= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{\rho_2}^{\rho_3} \frac{n(t)}{t} dt + \dots + \int_{\rho_{p-1}}^{\rho_p} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{\rho_p}^{\rho} \frac{n(t)}{t} dt = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{n(t)}{t} dt = \int_0^{\rho} \frac{n(t)}{t} dt
\end{aligned}$$

□

Existen diversas generalizaciones de la fórmula de Jensen.

**Teorema 6.5.** Sea  $f(z) = c_N z^N + c_{N+1} z^{N+1} + \dots$  una función holomorfa en  $D(0, R)$  y sea  $\rho \in [0, R)$  tal que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  son los ceros de  $f$  en  $D(0, R)$  y además están ordenados respetando la multiplicidad. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta = \log |c_N \rho^N| + \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \log \left( \frac{\rho}{|a_k|} \right)$$

*Demostración.* Consideramos

$$F(z) = \frac{f(z)}{c_N z^N}$$

$F$  es holomorfa en  $D(0, R)$ ,  $F(0) = 1$  y los ceros de  $F$  son los mismos que los de  $f$ .

Aplicando la fórmula de Jensen,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta &= \log |F(0)| + \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \log \left( \frac{\rho}{|a_k|} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |c_N \rho^N| d\theta &= \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \log \left( \frac{\rho}{|a_k|} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta &= \log |c_N \rho^N| + \sum_{k=1}^{n(\rho, f)} \log \left( \frac{\rho}{|a_k|} \right)
\end{aligned}$$

□

Vamos a ver cómo aplicar la fórmula de Jensen para ver que si el crecimiento de  $f$  está controlado entonces sus ceros también lo están.

**Definición 6.2.** Llamamos módulo máximo de  $f$  a

$$M_{\infty}(\rho, f) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$$

*Observación.* Si  $f$  es holomorfa,

$$M_\infty(\rho, f) = \max_{|z|=\rho} |f(z)| = \max_{|z|\leq\rho} |f(z)|$$

**Teorema 6.6.** Sea  $f$  holomorfa en  $D(0, R)$  tal que  $f(0) \neq 0$  y  $0 \leq s \leq \rho < R$ . Entonces:

$$n(s, f) \log \left( \frac{\rho}{s} \right) \leq \log(M_\infty(\rho, f)) - \log |f(0)|$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} n(s, f) \log \left( \frac{\rho}{s} \right) &= n(s, f) \int_s^\rho \frac{1}{t} dt \leq \int_s^\rho \frac{n(t, f)}{t} dt \leq \int_0^\rho \frac{n(t, f)}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| \leq \log(M_\infty(\rho, f)) - \log |f(0)| \end{aligned}$$

□

**Ejemplo.** Sea  $f$  entera con  $|f(0)| = 1$  y sea  $\rho = es$ . Entonces:

$$n(s, f) \leq \log(M_\infty(es, f))$$

*Observación.* Si  $f(z) = c_N z^N + \dots$ , el teorema anterior se puede escribir de la forma:

$$n(s, f) \log \left( \frac{\rho}{s} \right) \leq \log(M_\infty(\rho, f)) - \log |c_N \rho^N|$$

## 6.2. La fórmula de Poisson-Jensen

**Teorema 6.7.** Sea  $0 < R \leq \infty$  y sea  $f$  holomorfa en  $D(0, R)$ . Sean  $s \in (0, R)$  y  $z \in D(0, s)$ , entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \log |f(se^{i\theta})| \frac{s^2 - |z|^2}{|s - ze^{-i\theta}|^2} d\theta = \log |f(z)| + \sum_{\{|a_n| \leq s, a_n \text{ cero de } f\}} \log^+ \left| \frac{s^2 - \bar{a}_n z}{s(z - a_n)} \right|$$

*Observación.*

1. Sea  $|z| < s$ . Entonces:

$$\frac{|s^2 - a_n z|}{|s(z - a_n)|} = \frac{1}{|\psi^{-1}(a_n)|} \geq 1 \Rightarrow \log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \log |f(se^{i\theta})| \frac{s^2 - |z|^2}{|s - ze^{-i\theta}|^2} d\theta$$

2. Sea  $z = \rho e^{i\varphi}$  con  $0 < \varphi < s$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| &\leq \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \int_{-\pi}^\pi \log |f(se^{i\theta})| \frac{s^2 - \rho^2}{|s - \rho e^{i\varphi} e^{-i\theta}|^2} d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \log(M_\infty(s, f)) \frac{s + \rho}{s - \rho} d\theta = \log(M_\infty(s, f)) \frac{s + \rho}{s - \rho} \leq \log^+(M_\infty(s, f)) \frac{s + \rho}{s - \rho} \end{aligned}$$

## 6.3. Introducción a los espacios de Hardy

**Teorema 6.8** (Condición de Blaschke). Sea  $f$  una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  con la sucesión de ceros ordenados  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ . Entonces son equivalentes:

1.

$$\sup_{0 < \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta < \infty$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

*Demostración.* Si  $f(z) = c_N z^N + \dots$ , por la fórmula de Jensen generalizada

$$\log |c_N \rho^N| + \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho\}} \log \left( \frac{\rho}{|a_n|} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

$\Rightarrow$

$$\log |c_N \rho^N| + \sum_{\{n: |a_n| \leq \rho\}} \log \left( \frac{\rho}{|a_n|} \right) \leq \sup_{0 < \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta < \infty$$

Tomando límite  $\rho \rightarrow 1$  a la izquierda,

$$\log |c_N| + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( \frac{1}{|a_n|} \right) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

$\Leftarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \log |c_N| + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( \frac{1}{|a_n|} \right) < \infty$$

Por tanto,

$$\sup_{0 < \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta < \infty$$

□

**Definición 6.3.** Se define la función característica de Nevanlinna como

$$T(\rho, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\theta})| d\theta$$

**Definición 6.4.** Sea  $0 < p < \infty$ , se define la media integral de orden  $p$  como

$$M_p(\rho, f) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$$

**Definición 6.5.** Se define el módulo máximo de  $f$  como

$$M_{\infty}(\rho, f) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\rho e^{i\theta})|$$

**Definición 6.6.** Se define la clase de Nevanlinna como

$$\mathcal{N} = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0 < \rho < 1} T(\rho, f) < \infty\}$$

**Definición 6.7.** Sea  $0 < p \leq \infty$ , se define el espacio de Hardy como

$$H^p = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0 < \rho < 1} M_p(\rho, f) < \infty\}$$