

# Ampliación de teoría de la probabilidad

5 de diciembre de 2022

# Índice general

<b>1. Función de distribución</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Propiedades . . . . .	2
1.3. Convolución en funciones de distribución . . . . .	5
1.4. Convergencia en distribución . . . . .	11
<b>2. Función característica</b>	<b>20</b>
2.1. Propiedades . . . . .	21
2.2. Teorema de inversión . . . . .	22
2.3. Teorema de continuidad . . . . .	24
2.4. Momentos . . . . .	25
2.5. Reconocimiento de funciones características . . . . .	30
<b>3. Convergencia</b>	<b>33</b>
3.1. Tipos de convergencia . . . . .	35
3.2. Leyes de los grandes números . . . . .	40
3.3. Teorema central del límite . . . . .	46

# Capítulo 1

## Función de distribución

### 1.1. Introducción

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad, donde  $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad.

Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

para todo  $B \in \mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel.  $X$  induce una medida en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ :

$$P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

**Definición 1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad. Sean  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y  $P_X$  la medida de probabilidad inducida por  $X$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . La función de distribución asociada a  $X$  es:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F(a) = P_X((-\infty, a]) = P(X \leq a)$$

*Nota.* Variables aleatorias distintas pueden tener la misma función de distribución.

### 1.2. Propiedades

Sea  $F$  la función de distribución asociada a una variable aleatoria  $X$ . Entonces:

- $F$  es creciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

- $F$  es continua por la derecha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Existe  $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-) = F(x) - P_X(\{x\})$

**Teorema 1.1** (Teorema de correspondencia). Si  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es una función que verifica:

- $F$  es creciente.
- $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$
- $F$  es continua por la derecha.

Entonces existe una única medida de probabilidad  $P_F$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tal que  $F$  es su función de distribución. Es decir, tal que  $F(a) = P_F((-\infty, a])$ .

**Definición 1.2.** Sea  $F$  función de distribución. El conjunto de discontinuidad de  $F$  se define como:

$$C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x^-)\}$$

También se puede definir el conjunto de puntos de discontinuidad de  $F$  como:

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

*Observación.*  $D(F) = C(\bar{F})$ .

**Proposición 1.2.**  $D(F)$  es a lo sumo numerable.

**Corolario 1.3.**  $C(F)$  es denso en  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 1.4.** Sean  $F$  y  $G$  funciones de distribución tales que  $F(x) = G(x)$  para todo  $x \in E \subset \mathbb{R}$ , con  $E$  denso en  $\mathbb{R}$ . Entonces  $F(x) = G(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.3.** La función de masa de probabilidad se define como:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad p(x) = P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$$

**Definición 1.4.** Sea  $X$  variable aleatoria con función de distribución  $F$  y función de masa  $p$ . Entonces:

- $X$  es discreta cuando  $\sum_{x \in D(F)} p(x) = 1$ .
- $X$  es continua cuando  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

En otro caso,  $X$  es mixta.

**Definición 1.5.** Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  variable aleatoria.  $X$  es singular si existe  $B \in \mathcal{B}$  con  $m(B) = 0$  tal que  $P_X(B) = 1$ .

*Observación.* Las variables aleatorias discretas son singulares.

**Definición 1.6.** Sea  $X$  variable aleatoria.  $X$  es absolutamente continua si para cualquier  $B \in \mathcal{B}$  con  $m(B) = 0$  se tiene que  $P_X(B) = 0$ .

**Teorema 1.5.** Sea  $F$  función de distribución.  $F$  es absolutamente continua si y solo si existe una función medible  $f$  no negativa y finita tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b$$

La función  $f$  se llama función de densidad.

*Observación.*  $F$  es continua cuando no hay saltos y absolutamente continua cuando tiene una densidad.

**Teorema 1.6** (Mixtura de distribuciones). Toda función de distribución  $F$  se puede descomponer de la forma:

$$F = \alpha F_d + (1 - \alpha) F_c, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

donde  $F_d$  es la función de distribución de una variable aleatoria discreta y  $F_c$  de una continua.

**Ejemplo.** Consideramos la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{5}{8} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{4x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Estudiamos sus puntos de discontinuidad y la probabilidad en ellos.

$$D(F) = \{4, 5\}, \quad \begin{cases} p(4) = F(4) - F(4^-) = \frac{1}{8} \\ p(5) = F(5) - F(5^-) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

Luego la función de distribución discreta es:

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Por último podemos calcular la función de distribución continua:

$$F_c(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \left( F(x) - \frac{1}{4} F_d(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{5x}{24} - \frac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{3x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

**Lema 1.7.** Sea  $F$  función de distribución. Entonces:

- Existe  $F'$  en casi todo punto y es no negativa y finita.
- $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a), \quad a < b$
- Siendo  $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$  y  $F_s(x) = F(x) - F_{ac}(x)$ , entonces  $F'_{ac}(x) = F'(x)$  en casi todo punto y  $F'_s(x) = 0$ .

**Teorema 1.8** (Descomposición de Lebesgue). Toda función de distribución  $F$  se puede descomponer de la forma:

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)F_s$$

con  $F_{ac}$  función de distribución absolutamente continua y  $F_s$  singular.

*Observación.* Se pueden aplicar ambas descomposiciones (continua-discreta y Lebesgue) a una función de distribución  $F$ .

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)(\alpha F_d + (1 - \alpha)F_{cs})$$

**Definición 1.7** (Esperanza). Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . La esperanza de  $X$  se define como:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

*Observación.*

- Si  $F$  es absolutamente continua,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

- Si  $F$  es discreta,

$$E(X) = \sum_{x \in D(F)} x p(x)$$

### 1.3. Convolución en funciones de distribución

**Definición 1.8.** Sean  $F$  y  $G$  funciones de distribución. Definimos la convolución de  $F$  y  $G$  como la función definida por:

$$(F * G)(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z - y) dG(y), \quad z \in \mathbb{R}$$

*Nota.* La convolución es conmutativa con funciones medibles no negativas.

**Proposición 1.9.**  $F * G$  es una función de distribución.

**Teorema 1.10.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes con funciones de distribución  $F_X$  y  $F_Y$  respectivamente. Entonces  $F_X * F_Y$  es la función de distribución de la variable aleatoria  $X + Y$ .

**Teorema 1.11.** Si  $F$  es absolutamente continua con densidad  $f$ , entonces  $F * G$  es absolutamente continua con densidad

$$(f * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y) dG(y)$$

**Teorema 1.12.** Si  $F$  y  $G$  son absolutamente continuas con densidades  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces  $F * G$  es absolutamente continua con densidad  $f * g$ .

**Ejemplo.** Sean  $X, Y \sim U([0, 1])$ . Sus funciones de distribución son:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Sea  $Z = X + Y$  y  $z \in \mathbb{R}$ . Como  $X$  e  $Y$  son absolutamente continuas,  $Z$  es absolutamente continua. Queremos calcular:

$$F_Z(z) = (F_X * F_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Consideramos todos los casos:

- Si  $z < 0$  entonces  $z - y < 0$  para todo  $y \in [0, 1]$ . Luego  $F_X(z - y) = 0$ , así que  $F_Z(z) = 0$ .
- Si  $0 \leq z < 1$  distinguimos dos casos:
  - Si  $0 \leq y < z$  entonces  $0 < z - y < 1$ , así que  $F_X(z - y) = z - y$ .
  - Si  $z \leq y < 1$  entonces  $z - y < 0$ , luego  $F_X(z - y) = 0$ .

$$F_Z(z) = \int_0^z (z - y) dy + \int_z^1 0 dy = \frac{z^2}{2}$$

- Si  $1 \leq z < 2$  de nuevo distinguimos dos casos:
  - Si  $0 \leq y < z - 1$  entonces  $z - y \geq 1$ , luego  $F_X(z - y) = 1$ .
  - Si  $z - 1 \leq y < 1$  entonces  $0 \leq z - 1 < 1$ , así que  $F_X(z - y) = z - y$ .

$$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1 dy + \int_{z-1}^1 (z - y) dy = 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

- Si  $z \geq 2$  entonces  $z - y \geq 1$  para todo  $y \in [0, 1]$ . Luego  $F_X(z - y) = 1$ , de forma que  $F_Z(z) = \int_0^1 1 dx = 1$ .

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 2z - \frac{z^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim U([-1, 1])$  y sea  $Y$  absolutamente continua con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{4} & \text{si } -2 \leq y < 0 \\ \frac{2-y}{4} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabemos que  $X$  es absolutamente continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea  $Z = X + Y$ . Como  $X$  e  $Y$  son absolutamente continuas,  $Z$  es absolutamente continua con función de densidad  $f * g$ .

$$(f_X * f_Y)(z) = (f_Y * f_X)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx$$

Sabemos que  $S_X = [-1, 1]$  y  $S_Y = [-2, 2]$ , así que  $S_Z = [-3, 3]$ . Consideramos los casos:

- Si  $z < -3$  entonces  $z-x < 2$  para todo  $x \in [-1, 1]$ . Luego  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .
- Si  $-3 \leq z < -1$  distinguimos dos casos:
  - Si  $-1 \leq x < z+2$  entonces  $-2 \leq z-x < 0$ , así que  $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$ .
  - Si  $z+2 \leq x < 1$  entonces  $z-x < -2$ , luego  $f_Y(z-x) = 0$ .

$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z+2} \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z+3)^2}{16}$$

- Si  $-1 \leq z < 1$  distinguimos dos casos:
  - Si  $-1 \leq x < z$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , así que  $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$ .
  - Si  $z \leq x < 1$  entonces  $-2 \leq z-x < 0$ , luego  $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$ .

$$f_Z = \int_{-1}^z \frac{2-z+x}{4} \frac{1}{2} dx + \int_z^1 \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{3-z^2}{8}$$

- Si  $1 \leq z < 3$  distinguimos dos casos:
  - Si  $-1 \leq x < z-2$  entonces  $z-x \geq 2$ , luego  $f_Y(z-x) = 0$ .



- Si  $z - 2 \leq x < 1$  entonces  $0 \leq z - x < 2$ , así que  $f_Y(z - x) = \frac{2 - z + x}{4}$ .

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{2 - z + x}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z - 3)^2}{16}$$

- Si  $z \geq 3$  entonces  $z - x \geq 2$  para todo  $x \in [-1, 1]$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{(z+3)^2}{16} & \text{si } -3 \leq z < -1 \\ \frac{3-z^2}{8} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{(z-3)^2}{16} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

**Ejemplo.** Sean  $X, Y$  variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que  $Y$  es absolutamente continua y  $X$  es mixta, así que  $Z = X + Y$  es absolutamente continua. Queremos calcular la función de densidad de  $Z$ . Como  $F_X$  es discontinua en 1,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - x) dF_X(x) = \int_{-2}^1 f_Y(z - x) f_X(x) dx + f_Y(z - 1) p_X(1)$$

*Nota.* Para no lidiar con discontinuidades, también se podría calcular:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Calculamos las funciones de densidad, pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$S_X = [-2, 1]$  y  $S_Y = [0, 2]$ , así que  $S_Z = [-2, 3]$ . Consideramos los casos:

- Si  $z < -2$  entonces  $z - x < 0$  para todo  $x \in [-2, 1]$ . Luego  $f_Y(z - x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .
- Si  $-2 \leq z < 0$  entonces  $0 \leq z - x \leq 2$ , así que  $f_Y(z - x) = \frac{1}{2}$  y  $f_X(x) = \frac{1}{4}$ .

$$f_Z(z) = \int_{-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx = \frac{z + 2}{8}$$

- Si  $0 \leq z \leq 1$ ,  $f_Y(z-1) = 0$ . Distinguimos tres casos:
  - Si  $-2 \leq x < z-2$  entonces  $z-x > 2$ . Luego  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .
  - Si  $z-2 \leq x < z$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ . Así que  $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$  y  $f_X(x) = \frac{1}{4}$ .
  - Si  $z \leq x \leq 1$  entonces  $z-x \leq 0$ . Luego  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .

$$f_Z(z) = \int_{-2}^{z-2} 0dx + \int_{z-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \int_z^1 0dx + 0p_x(1) = \frac{1}{4}$$

- Si  $1 < z \leq 3$ ,  $f_Y(z-1) = \frac{1}{2}$  y  $p_X(1) = \frac{1}{4}$ . Distinguimos dos casos:
  - Si  $-2 \leq x < z-2$  entonces  $z-x \geq 2$ , así que  $f_Y(z-x) = 0$ .
  - Si  $z-2 \leq x < 1$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , luego  $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$  y  $f_X(x) = \frac{1}{4}$ .

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{4-z}{8}$$

- Si  $z \geq 3$  entonces  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z+2}{8} & \text{si } -2 \leq z < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{4-z}{8} & \text{si } 1 < z \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

**Ejercicio.** Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2y}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ \frac{5}{7} & \text{si } 2 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$$

Observamos que  $X$  es una variable aleatoria mixta con funciones de pseudodensidad y de masa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$Y$  también es mixta con pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } y = 2 \\ \frac{2}{7} & \text{si } y = 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea  $Z = X + Y$ , queremos calcular  $F_Z$ . Observamos que  $S_X = [-1, 1) \cup \{1\} = [-1, 1]$  y  $S_Y = [0, 2) \cup \{2\} \cup \{4\} = [0, 2] \cup \{4\}$ . Por tanto,  $S_Z = [-1, 5]$ . Calculamos:

$$F_Z = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) dF_X(x) = \int_{-1}^1 F_Y(z-x) f_X(x) dx + F_Y(z-1) p_X(1)$$

Consideramos los casos:

- Si  $z < -1$ ,  $F_Z(z) = 0$ .
- Si  $-1 \leq z < 1$ , consideramos tres casos:
  - Si  $-1 \leq x < z$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , luego  $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$ .
  - Si  $z \leq x < 1$  entonces  $z-x < 0$ , así que  $F_Z(z) = 0$ .
  - Si  $x = 1$  entonces  $z-1 < 0$ , luego  $F_Z(z) = 0$ .

$$F_Z(z) = \int_{-1}^z \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx = \frac{(z+1)^2}{21}$$

- Si  $1 \leq z < 3$ , consideramos tres casos:
  - Si  $-1 \leq x < z-2$  entonces  $2 \leq z-x < 4$ , así que  $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$ .
  - Si  $z-2 \leq x < 1$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , luego  $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$ .
  - Si  $x = 1$  entonces  $0 \leq z-1 < 2$ , así que  $F_Y(z-1) = \frac{2(z-1)}{7}$ .

$$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-2} \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \int_{z-2}^1 \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{2(z-1)}{7} \frac{1}{3} = \frac{-z^2 + 9z - 4}{21}$$

- Si  $3 \leq z < 5$ , consideramos tres casos:
  - Si  $-1 \leq x < z-4$  entonces  $z-x \geq 4$ , luego  $F_Y(z-x) = 1$ .
  - Si  $z-4 \leq x < 1$  entonces  $2 \leq z-x < 4$ , así que  $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$ .
  - Si  $x = 1$  entonces  $2 \leq z-1 < 4$ , luego  $F_Y(z-1) = \frac{5}{7}$ .

$$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-4} 1 \frac{1}{3} dx + \int_{z-4}^1 \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{5}{7} \frac{1}{3} = \frac{2z+9}{21}$$

- Si  $z \geq 5$ ,  $F_Z(z) = 1$ .

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \\ \frac{(z+1)^2}{21} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{-z^2+9z-4}{21} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ \frac{2z+9}{21} & \text{si } 3 \leq z < 5 \\ 1 & \text{si } z \geq 5 \end{cases}$$

## 1.4. Convergencia en distribución

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $X_n$  una variable aleatoria en  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ .  $\{X_n\}_n$  tiene una sucesión asociada  $\{F_n\}_n$  de funciones de distribución.

**Definición 1.9.** Sean  $F$  y  $F_n$  funciones de distribución. Decimos que la sucesión  $\{F_n\}_n$  converge a  $F$  débilmente cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

**Ejemplo.** Sea  $X_n \sim \delta(\frac{1}{n})$ , es decir,  $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ . Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculamos el límite puntual de la sucesión:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aunque  $\{F_n\}_n$  converge puntualmente a  $F$ , observamos que  $F$  no es continua por la derecha. Así que  $F$  no es función de distribución y no puede ser el límite débil de la sucesión. Definimos:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$G$  es función de distribución y además  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$  para todo  $x \in C(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , luego  $F_n \xrightarrow{d} G$ . Es función de distribución de una variable aleatoria  $\delta(0)$ .

**Ejemplo.** Sea  $Y_n \sim \delta(-\frac{1}{n})$ . Procedemos de forma análoga al ejemplo anterior. Su función de distribución es:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } y \geq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

y su límite puntual es:

$$F_Y(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

En este caso el límite puntual  $F_Y$  sí es función de distribución, así que el límite puntual coincide con el límite débil.

$$F_{Y_n} \xrightarrow{d} F_Y$$

**Teorema 1.13.** *El límite débil de una sucesión de funciones de distribución es único en caso de existir.*

**Ejemplo.** Sea  $X_n \sim U([-1/n, 1/n])$ . Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{nx+1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

El límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$F$  no es función de distribución porque no es continua por la derecha en  $x = 0$ . Definimos entonces:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$G$  es función de distribución y  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$  para todo  $x \in C(G)$ , así que  $F_n \xrightarrow{d} G$ .

**Ejemplo.** Consideramos la sucesión de funciones de distribución  $\{F_n\}_n$ , con

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos descomponer  $F_n$  como mixtura de distribuciones de la forma  $F_n = \alpha F_n^d + (1 - \alpha) F_n^c$ . Calculamos el valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = \sum_{x \in D(F_n)} p(x) = p(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, las funciones de distribución son:

$$F_n^d(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{t \leq x, t \in D(F_n)} p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_n^c(x) = \frac{1}{1 - \alpha} (F_n(x) - \alpha F_n^d(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^c(x) = 0$$

Observamos que  $F = \alpha F^d + (1 - \alpha) F^c$ .

**Definición 1.10.** La sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_n$  converge en distribución a otra variable aleatoria  $X$  cuando  $F_n \xrightarrow{d} F$ , siendo  $F_n$  y  $F$  las funciones de distribución asociadas a  $X_n$  y  $X$ , respectivamente. Se escribe  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

**Ejercicio.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad, donde:

$$\Omega = [0, 3], \quad \mathcal{A} = \{B \cap [0, 3] : B \in \mathcal{B}\}$$

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad P(A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A = \{0\} \\ 0 & \text{si } A \subset (0, 1) \\ \frac{m(A)}{6} & \text{si } A \subset [1, 3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } A = \{3\} \end{cases}$$

Sobre este espacio definimos para  $n \in \mathbb{N}$  las variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega-1}{n\omega+1} & \text{si } 0 \leq \omega < 1 - \frac{1}{n} \\ 2 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq \omega < 3 - \frac{1}{n} \\ n(\omega - 3) & \text{si } 3 - \frac{1}{n} \leq \omega \leq 3 \end{cases}$$

$\{X_n\}_n$  es una sucesión de variables aleatorias.

1. **Determinar los puntos de discontinuidad y sus masas.** Sabemos que  $x$  es punto de discontinuidad de  $F_n$  si  $F_n(x) - F_n(x^-) > 0$ , es decir,  $P_{X_n}(\{x\}) > 0$ . En primer lugar estudiamos las imágenes por  $X_n$  de los puntos con masa en la definición de  $P$ . En este caso, estos puntos son 0 y 3, con imágenes  $X_n(0) = -1$  y  $X_n(3) = 0$ .

$$P_{X_n}(-1) = P(X_n^{-1}(-1)) = P(\{0\} \cup \{3 - \frac{1}{n}\}) = \frac{1}{6}$$

$$P_{X_n}(0) = P(X_n^{-1}(0)) = P(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

Además, estudiamos los puntos cuya imagen inversa es un intervalo, es decir, donde  $X_n$  es constante.

$$P_{X_n}(2) = P([1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})) = P([1, 3 - \frac{1}{n})) = \frac{2n-1}{6n}$$

Así que  $D = \{-1, 0, 2\}$ .

2. **Calcular la función de distribución  $F_n$  asociada a  $X_n$ .** Recordamos que la función de distribución  $F_n$  asociada a una variable aleatoria  $X_n$  se define como:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Distinguimos varios casos:

- Si  $x < -1$ ,  $F_n(x) = P(\emptyset) = 0$ .

- Si  $-1 \leq x < -\frac{1}{n^2}$ ,

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P([0, \alpha] \cup [3 - \frac{1}{n}, \beta])$$

donde:

$$X_n(\alpha) = x \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{n\alpha + 1} = x \Leftrightarrow \alpha = \frac{x + 1}{1 - nx}$$

$$X_n(\beta) = x \Leftrightarrow n(\beta - 3) = x \Leftrightarrow \beta = \frac{x + 3n}{n}$$

Así que

$$F_n(x) = P([0, \frac{x+1}{1-nx}] \cup [3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si  $-\frac{1}{n^2} \leq x < 0$ ,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n}]) + P([3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si  $0 \leq x < 2$ ,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n}]) + P([3 - \frac{1}{n}, 3]) + P(\{3\}) = \frac{4n+1}{6n}$$

- Si  $X \geq 2$ ,  $F_n(x) = 1$ .

Por tanto,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1+n}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{4n+1}{6n} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. **Analizar la convergencia en distribución de  $\{X_n\}$**  Sabemos que  $X_n \xrightarrow{d} X$  cuando  $F_n \xrightarrow{d} F$ . Tomamos el límite puntual en  $\{F_n\}$ .

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$F$  es continua por la derecha y  $D(F) = \{-1, 0, 2\}$  con  $p_X(-1) = \frac{1}{6}$ ,  $p_X(0) = \frac{1}{2}$  y  $p_X(2) = \frac{1}{3}$ . Observamos que estas masas coinciden con los límites cuando  $n \rightarrow \infty$  de las masas de los puntos de discontinuidad de  $X_n$ . Por tanto,  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

**Lema 1.14.** Sean  $F_n$  y  $F$  funciones de distribución.  $F_n \xrightarrow{d} F$  si y solo si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x) \quad y \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \geq F(x^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Teorema 1.15** (Helly-Bray). Sean  $F_n$  y  $F$  funciones de distribución.  $F_n \xrightarrow{d} F$  si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

para toda función  $g$  real, continua y acotada.

*Observación.* En general, el teorema de Helly-Bray no implica que  $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X)$  porque  $g(x) = x$  no siempre está acotada.

**Ejemplo.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que  $G$  no es función de distribución. Definimos entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$F$  es función de distribución así que  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

Sea  $g(x) = I_{(0,2]}(x)$ , veamos si  $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$ .

$$\begin{aligned} E(g(X_n)) &= E(I_{(0,2]}(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} I_{(0,2]}(x) dF_n(x) = \int_0^2 dF_n(x) = \\ &= F_n(2) - F_n(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \\ E(g(X)) &= \int_0^2 dF(x) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Observamos que  $E(g(X_n))$  no tiende a  $E(g(X))$  con  $n \rightarrow \infty$ . No se cumplen las hipótesis del teorema de Helly-Bray porque  $g$  no es continua.

Sea ahora  $g(x) = x$ . Queremos calcular  $E(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$ . Como  $F_n$  es mixta, hallamos primero las masas de sus puntos de discontinuidad y su función de pseudodensidad:

$$D(F_n) = \{0, \frac{2}{n}\}, \quad p(0) = \frac{1}{4}, \quad p(\frac{2}{n}) = \frac{1}{4}$$

$$f_n(x) = F'_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{1}{4} + \frac{2}{n} \frac{1}{4} + \int_{-1}^0 \frac{x}{2n} dx + \int_{\frac{2}{n}}^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Procedemos de forma análoga para  $F$ .

$$D(F) = \{0\}, \quad p(0) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = 0 \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2}$$

Luego en este caso  $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$ . Se verifica el teorema de Helly-Bray porque  $g(x) = x$  está acotada en los soportes de  $f_n$  y  $f$ , que son acotados.

**Ejemplo.** Sea  $n \in \mathbb{R}$ , consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Es claro que:

$$F_n \xrightarrow{d} \delta(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea  $g(x) = x$ , procedemos igual que en el ejemplo anterior.

$$D(F_n) = \{0, n\}, \quad p(0) = \frac{n-1}{n}, \quad p(n) = \frac{1}{n}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{n-1}{n} + n \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$E(g(X)) = E(\delta(0)) = 0 \neq 1$$

No se cumplen las hipótesis del teorema porque  $g$  no está acotada en el soporte, ya que no está acotado.

**Definición 1.11.** Una función  $F$  es función de distribución impropia si verifica:

- $F$  es creciente.
- $F$  es continua por la derecha.
- Existe  $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- $F(-\infty) > 0$  o  $F(\infty) < 1$ .

**Definición 1.12.** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de funciones de distribución y sea  $F$  una función de distribución propia o impropia. Decimos que  $\{F_n\}$  converge de forma vaga o vagamente a  $F$  si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe  $F_n \xrightarrow{v} F$ .

*Observación.* Convergencia débil implica convergencia vaga.

**Ejemplo.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

El límite puntual de  $\{F_n\}$  es:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$G$  es una función de distribución impropia. Por tanto,  $F_n \xrightarrow{v} G$ .

**Ejemplo.** Consideramos la función de distribución:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Definimos:

$$F_n(x) = F_0(x+n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x+n < 2 \\ 1 & \text{si } x+n \geq 2 \end{cases}$$

El límite puntual de  $F_n(x)$  es  $F(x) = 1$ , que es una función de distribución impropia. Por tanto,  $F_n \xrightarrow{v} F$ .

**Ejercicio.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad con:

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\omega) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!}, \quad \omega \in \mathbb{N}, \lambda > 0$$

Consideramos la sucesión de variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = e^{n\omega}$$

Observamos que  $x = e^{n\omega} \Leftrightarrow \omega = -\frac{\log(x)}{n}$ , con  $x > 0$ .

$$P(X_n^{-1}(x)) = P\left(-\frac{\log(x)}{n}\right) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{-\frac{\log(x)}{n}}}{\left(-\frac{\log(x)}{n}\right)!} & \text{si } -\frac{\log(x)}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calculamos la función de distribución de  $X_n$ :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n^{-1}((-\infty, x])) = P(X_n^{-1}([0, x])) = P(X_n^{-1}([0, e^{-nk}])) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega \geq k\}) = 1 - P(\{\omega \in \Omega : \omega < k\}) = 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} & \text{si } e^{-nk} \leq x < e^{-n(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \vdots & \\ 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) & \text{si } e^{-2n} \leq x < e^{-n} \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } e^{-n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que  $F_n(x)$  tiene como límite puntual:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$G$  no es función de distribución. Podemos definir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como  $F$  sí es función de distribución,  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

**Teorema 1.16.** *Supongamos que  $F_n \xrightarrow{v} F$  con  $F$  función de distribución impropia. Sea  $g$  real y continua en  $[a, b]$ , con  $a, b \in C(F)$ . Entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} g(x) dF_n(x) = \int_{[a, b]} g(x) dF(x)$$

**Teorema 1.17.** *Supongamos que  $F_n \xrightarrow{v} F$  con  $F$  función de distribución impropia. Sea  $g$  real y continua con  $g(\infty) = g(-\infty) = 0$ . Entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

**Lema 1.18.** *Una sucesión  $\{F_n\}_n$  converge vagamente si y solo si converge en algún conjunto denso  $D \subset \mathbb{R}$ .*

**Teorema 1.19** (Principio de selección de Helly). *Toda sucesión  $\{F_n\}_n$  de funciones de distribución tiene una subsucesión que converge vagamente.*

**Definición 1.13.** Sea  $\mathcal{H}$  una familia de funciones de distribución.  $\mathcal{H}$  es ajustada si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a > 0$  tal que:

$$P_F((-a, a]) > 1 - \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

Equivalentemente,

$$P_F((-\infty, -a] \cup (a, \infty)) < \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

**Definición 1.14.**  $\mathcal{H}$  es relativamente compacta si cada  $\{F_n\}_n$  con  $F_n \in \mathcal{H}$  tiene una subsucesión convergente.

**Teorema 1.20** (Prokhorov).  *$\mathcal{H}$  es relativamente compacta si y solo si es ajustada.*

**Teorema 1.21.** *Sea  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión ajustada. Si todas sus subsucesiones convergentes tienen el mismo límite  $F$ , entonces  $F_n \xrightarrow{d} F$ .*

## Capítulo 2

# Función característica

**Definición 2.1.** Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de distribución  $F$ . La función característica asociada a  $X$  es:

$$\begin{aligned}\varphi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)\end{aligned}$$

*Observación.* Usando que  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ , podemos escribir:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) dF(x)$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim \delta(a)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{ita} P(X = a) = e^{ita}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim Bi(n, p)$ , con  $n \geq 0$  y  $0 \leq p \leq 1$ . Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim Po(\lambda)$ . Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}\end{aligned}$$

*Observación.*

$$\varphi_{Bi}(x) = (pe^{it} + 1 - p)^n = \left(1 + \frac{np(e^{it} - 1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{np \rightarrow \lambda} e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi_{Po}(t)$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim U([0, 1])$ . Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim N(0, 1)$ . Su función característica es:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x^2 - 2itx)}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{x^2 - t^2 - 2it}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

*Nota.*  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

## 2.1. Propiedades

Veamos las propiedades más importantes de las funciones características. Sea  $\varphi$  la función característica de una variable aleatoria  $X$ . Entonces:

1.  $\varphi(0) = 1$ .

$$E(e^{i0X}) = E(1) = 1$$

2.  $|\varphi(t)| \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

$$|\varphi(t)| = |E(e^{itX})| \leq E|e^{itX}| = E|\cos(tx) + i\sin(tx)| = 1$$

3.  $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(-t) &= E(e^{itX}) = E(\cos(-tx) + i\sin(-tx)) = \\ &= E(\cos(tx)) - iE(\sin(tx)) = \overline{E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))} = \\ &= \overline{E(\cos(tx) + i\sin(tx))} = \overline{\varphi(t)} \end{aligned}$$

4.  $\varphi$  es función definida positiva, es decir,

$$\sum_{k,j=1}^n z_k \varphi(t_j - t_k) \overline{z_j} \geq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

Además,

- $\varphi \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$  es simétrica.

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} = \varphi(t)$$

- Sea  $Y = a + bX$ . Entonces:

$$\varphi_Y(t) = E(e^{it(a+bX)}) = e^{ita} E(e^{itbX}) = e^{ita} \varphi_X(bt)$$

**Teorema 2.1.**  $\varphi$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

## 2.2. Teorema de inversión

**Teorema 2.2** (Teorema de inversión). Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de distribución  $F$  y función característica  $\varphi$ . Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , entonces:

$$\frac{F(b) + F(b^-)}{2} - \frac{F(a) + F(a^-)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$$

**Corolario 2.3.** Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de distribución  $F$  y función característica  $\varphi$ . Sean  $a, b \in C(F)$  con  $a < b$ , entonces:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$$

**Teorema 2.4** (Unicidad). Sean  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias, con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  y funciones características  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  respectivamente. Entonces:

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

**Teorema 2.5.** Existe  $k \in (0, \infty)$  tal que para todo  $a > 0$  y toda medida de probabilidad  $P_F$  se tiene que:

$$P_F \left( \left[ -\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right]^c \right) \leq \frac{k}{a} \int_0^a (1 - \operatorname{Re}(\varphi_F(t))) dt$$

donde  $\varphi_F$  es la función característica asociada a  $P_F$ .

**Corolario 2.6.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias  $X_n$  con  $F_n$ ,  $P_{F_n}$  y  $\varphi_{F_n}$ . Supongamos que:

1. Existe  $\delta > 0$  tal que  $\varphi_{F_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t)$  para todo  $t \in [-\delta, \delta]$ , siendo  $\varphi$  una función.
2.  $\varphi$  es continua en 0.

Entonces  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión ajustada. Es decir,  $\{F_n\}$  forma una familia ajustada.

**Ejercicio.** Sea  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{si } |x| \leq a, a > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos su función característica  $\varphi$ .

Como  $f$  es simétrica, sabemos que  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = \\ &= \int_{-a}^a \cos(tx) f(x) dx + \int_{-a}^a \sin(tx) f(x) dx = 2 \int_0^a \cos(tx) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{2(1 - \cos(at))}{a^2 t^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)}{\left(\frac{at}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que  $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$ .

**Ejercicio.** Sea  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

Calculemos su función característica  $\varphi_X$ .

Para facilitar los cálculos, consideramos la variable estandarizada  $Y = \frac{X-\alpha}{\beta}$  y calculamos  $\varphi_Y$ . Para ello, hallamos primero  $F_Y$  y  $f_Y$ :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-\alpha}{\beta} \leq y\right) = P(X \leq \beta y + \alpha) = F_X(\beta y + \alpha) \\ f_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\beta y + \alpha)\beta = f_X(\beta y + \alpha)\beta = \frac{1}{2} e^{-|y|} \end{aligned}$$

Observamos que  $f_Y$  es simétrica, así que  $\varphi_Y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \int_{\mathbb{R}} (\cos(ty) + i \sin(ty)) \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \\ &= \int_0^\infty \cos(ty) e^{-y} dy = \frac{1}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\varphi_X(t) = e^{it\alpha} \varphi_Y(\beta t) = \frac{e^{it\alpha}}{1 + \beta^2 t^2}$$



También se puede ver que  $Y = Y_1 - Y_2$ , con  $Y_i \sim \text{Exp}(1)$  independientes. De esta forma:

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) = E(e^{it(Y_1 - Y_2)}) = E(e^{itY_1})E(e^{-itY_2}) = \varphi_{Y_1}(t)\varphi_{Y_2}(-t) = \\ &= \varphi_{Y_1}(t)\overline{\varphi_{Y_2}(t)} = \frac{1}{1 - it} \frac{1}{1 + it} = \frac{1}{1 + t^2}\end{aligned}$$

### 2.3. Teorema de continuidad

**Teorema 2.7** (Teorema de continuidad de Lévy). *Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  y sean  $\varphi_n$  las funciones características asociadas. Supongamos que existe una función  $\varphi$  tal que:*

1.  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\varphi$  es continua en 0.

Entonces  $X_n \xrightarrow{d} X$ , donde  $X$  es la variable aleatoria con función característica  $\varphi$ .

**Teorema 2.8.** *Una sucesión  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  es ajustada si y solo si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(1 - \varphi_n(t)) \right) = 0$$

*Observación* (Teorema central del límite de De Moivre). Sean  $X_n \sim \text{Bi}(n, p)$ . Sabemos que  $E(X_n) = np$  y  $V(X_n) = npq$ , con  $q = 1 - p$ . Consideramos:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X_n - np}{\sigma_n}$$

Veamos que  $Z_n \xrightarrow{d} Z$ .

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= E(e^{itZ_n}) = E(e^{it \frac{X_n - np}{\sigma_n}}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} E(e^{\frac{it}{\sigma_n} X_n}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) = \\ &= e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} (pe^{i \frac{t}{\sigma_n}} + q)^n = (pe^{i \frac{t}{\sigma_n} q} + qe^{-i \frac{t}{\sigma_n} p})^n\end{aligned}$$

Se puede comprobar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (pe^{i \frac{t}{\sigma_n} q} + qe^{-i \frac{t}{\sigma_n} p})^n = e^{-\frac{t^2}{n}} = \varphi_Z(t)$$

con  $Z \sim N(0, 1)$ .

Por el teorema de continuidad de Lévy,  $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$ .

## 2.4. Momentos

Recordamos los momentos de una variable aleatoria  $X$ .

- Momento de orden  $n$ :  $E(X^n)$ .
- Momento central de orden  $n$ :  $E((X - E(X))^n)$ .
- Momento absoluto de orden  $n$ :  $E(|X|^n)$ .
- Momento central absoluto de orden  $n$ :  $E(|X - E(X)|^n)$ .

**Proposición 2.9.** Si  $E(|X|^p) < \infty$  para algún  $n \geq 1$ , entonces:

$$E(X^r), E(|X|^r) < \infty, \quad 0 < r \leq n$$

**Definición 2.2.** El espacio  $L^p$  es el conjunto de las variables  $X$  tales que  $E(|X|^p) < \infty$ .

$$L^p = \left\{ X \text{ variable aleatoria} : \int |X|^p dF(x) < \infty \right\}$$

$(L^p, \|\cdot\|_p)$  es un espacio normado, con  $\|X\|_p = (E(|X|^p))^{1/p}$ ,  $X \in L^p$ .

**Teorema 2.10.** Sea  $X \in L^n$  para algún  $n \geq 1$  y con función característica  $\varphi$ . Entonces existen las derivadas  $\varphi^{(k)}$  con  $k = 1, \dots, n$  y son uniformemente continuas. Además,

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} dF(x)$$

y  $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$ . Así que  $\varphi$  se puede expresar como:

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + O(t^{n+1})$$

**Proposición 2.11.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes con funciones características  $\varphi_X$  y  $\varphi_Y$  respectivamente. Entonces la función característica de  $S = X + Y$  es  $\varphi_S(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ .

En general, si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes, la función característica de  $S = X_1 + \dots + X_n$  es:

$$\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

Si además  $X_1, \dots, X_n$  son igualmente distribuidas, entonces  $\varphi_S(t) = \varphi_{X_k}(t)^n$  para cualquier  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Ejercicio.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con función característica:

$$\varphi_{X_n}(t) = \left( \frac{1 - (1 - \alpha)it}{1 - it} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

1. **Determinar la distribución de  $X_n$ .**

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(t) &= \left( \frac{1 - \alpha + \alpha - (1 - \alpha)it}{1 - it} \right)^n = \left( \frac{\alpha}{1 - it} + \frac{(1 - \alpha)(1 - it)}{1 - it} \right)^n = \\ &= \left( \alpha \frac{1}{1 - it} + (1 - \alpha) \right)^n = \varphi_W(t)^n \end{aligned}$$

donde  $\varphi_W(t) = \alpha \frac{1}{1 - it} + (1 - \alpha)$ . Luego  $X_n = \sum_{i=1}^n W$ .

Observamos que  $\frac{1}{1 - it}$  es función característica de  $Exp(1)$  y 1 es función característica de  $\delta(0)$ , así que  $W$  es mixtura de estas dos distribuciones. Por tanto,  $X_n$  es la suma de  $n$  variables aleatorias con distribuciones mixtura de  $Exp(1)$  y  $\delta(0)$ .

2. **Calcular  $E(X_n)$  y  $V(X_n)$ .**

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E\left(\sum_{i=1}^n W\right) = nE(W) = n(\alpha E(Exp(1)) + (1 - \alpha)E(\delta(0))) \\ &= n\alpha \\ V(X_n) &= nV(W) = n(E(W^2) - E(W)^2) = \\ &= n(\alpha E(Exp(1)^2) + (1 - \alpha)E(\delta(0)^2) - \alpha^2) = \\ &= n(\alpha(V(Exp(1)) + E(Exp(1))^2) - \alpha^2) = \\ &= n(2\alpha - \alpha^2) = n\alpha(2 - \alpha) \end{aligned}$$

También se podría haber usado que  $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$ .

$$\varphi'_W(t) = \frac{i\alpha}{(1 - it)^2} \quad \varphi''_W(t) = \frac{-2\alpha}{(1 - it)^3}$$

De esta forma podemos calcular:

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{i} \varphi'_W(0) = \alpha \\ E(W^2) &= \frac{1}{i^2} \varphi''_W(0) = 2\alpha \end{aligned}$$

3. **Determinar el límite en distribución de la sucesión  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  con:**

$$Y_n = \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n}}$$

Por el teorema de continuidad de Lévy, basta hallar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_n}(t) &= E(e^{itY_n}) = E(e^{it \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n}}}) = e^{-it\sqrt{n}\alpha} \varphi_{X_n} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= e^{-it\sqrt{n}\alpha} \left( \frac{\alpha}{1 - i \frac{t}{\sqrt{n}}} + 1 - \alpha \right)\end{aligned}$$

Como este límite es difícil de resolver podemos proceder de otra forma. Podemos escribir  $X_n - n\alpha = \sum_{i=1}^n (W_i - \alpha) = \sum_{i=1}^n U_i$ , con  $U_i = W_i - \alpha$ . Entonces:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n - n\alpha} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_{\sum_{i=1}^n U_i} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_U \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n$$

*Nota.* Hemos usado que  $\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at)$ .

Sabemos que  $E(U) = 0$  y  $E(U^2) = V(U) = V(W) = \alpha(2 - \alpha)$ . También sabemos que:

$$\varphi_U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi_U^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(U^k) = 1 + itE(U) - \frac{t^2}{2} E(U^2) + O(t^2)$$

Luego:

$$\varphi_U \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left( \frac{t^2}{n} \right)$$

Así que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_U \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left( \frac{t^2}{n} \right) \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left( 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left( \frac{t^2}{n} \right) - 1 \right)} = e^{-\frac{t^2}{2} \alpha(2 - \alpha)}\end{aligned}$$

Por tanto,  $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \alpha(2 - \alpha))$ .

*Observación* (Teorema central del límite de Lévy-Lindeberg). Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con  $\mu = E(X_n) < \infty$  y  $\sigma^2 = V(X_n) < \infty$ .

Consideramos  $Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ , con  $E(Y_n) = 0$ ,  $V(Y_n) = 1$  y  $\varphi_{Y_n}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^2)$ .

Sea  $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$ . Veamos que  $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_{Y_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + O \left( \frac{t^2}{n} \right) \right)^n \rightarrow e^{-t^2/2}$$

**Lema 2.12.**

$$\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \min \left\{ 2 \frac{|y|^n}{n!}, \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$

**Teorema 2.13.** Si  $\varphi$  es absolutamente integrable, entonces  $F$  es absolutamente continua con densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

**Teorema 2.14** (Lema de Riemman-Lebesgue). Si  $F$  es absolutamente continua, entonces:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$$

**Definición 2.3.** Sea  $X$  una variable aleatoria con función característica  $\varphi$ . Definimos su función generatriz de cumulantes como:

$$K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad K(t) = \log(\varphi(t))$$

**Proposición 2.15.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias con funciones características  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  y sea  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Entonces:

$$K_S(t) = \sum_{i=1}^n K_{x_i}(t)$$

**Teorema 2.16.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Supongamos que  $E(|X|^n) < \infty$  para algún  $n \geq 1$ . Entonces:

$$K_X(t) = \sum_{j=0}^n \frac{(it)^j}{j!} c_j + O(t^n)$$

donde  $c_j = \frac{K^{(j)}(0)}{i^j}$  es el cumulante de orden  $j$ .

Nota.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{K'(0)}{i} = \frac{1}{i} \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \frac{1}{i} \varphi'(0) = E(X) \\ c_2 &= \frac{K''(0)}{i^2} = -K''(0) = - \left( \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} - \left( \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} \right)^2 \right) = (E(X^2) - E(X)^2) = \\ &= V(X) \end{aligned}$$

**Definición 2.4.** Sea  $X$  una variable aleatoria y  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

- Definimos el sesgo de  $X$  como  $\frac{c_3}{\sigma^3}$ .

- Definimos la curtosis de  $X$  como  $\frac{c_4}{\sigma^4}$ .

**Definición 2.5.** Sea  $X$  una variable aleatoria con función característica  $\varphi$ . Definimos la función de generatriz de momentos de  $X$  como:

$$\psi(t) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF(x)$$

$\psi$  está definida en un entorno del 0.

*Observación.* Si existe  $\psi$  entonces  $E(|X|^n) < \infty$  para todo  $n \geq 1$ .

**Definición 2.6.** Sea  $X$  una variable aleatoria con valores en  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ . La función generatriz de probabilidad de  $X$  es:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n), \quad |t| < 1$$

*Observación.*

$$G_x^{(k)}(0) = k!P(X = k) \Rightarrow P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Sea  $X = Y_1 + \dots + Y_N$ , con  $Y_i$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y  $N$  una variable aleatoria en  $\mathbb{Z}_+$ .  $X$  sigue una distribución compuesta.

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = E(E(e^{itX}|N)) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{itX}|N = n)P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{it \sum_{i=1}^n X_i})P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_Y(t)^n P(N = n) = G_N(\varphi_Y(t)) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Sea  $X = Y_1 + \dots + Y_N$ , con  $Y_i$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y  $N \sim Po(\lambda)$  una variable aleatoria en  $\mathbb{Z}_+$ .

$$\varphi_X(t) = G_N(\varphi_Y(t)) = e^{\lambda(\varphi_Y(t)-1)}$$

donde

$$G_N(t) = E(t^N) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$$

Además,

$$K_X(t) = \log(\varphi_X(t)) = \lambda(\varphi_Y(t) - 1)$$

Luego podemos calcular:

$$E(X) = c_1 = \frac{K'(0)}{i} = \frac{1}{i} \lambda \varphi_Y'(0) = \lambda E(Y)$$

## 2.5. Reconocimiento de funciones características

Para identificar funciones características usamos alguna de las siguientes estrategias:

- Reconocer la función característica de alguna distribución conocida.
- Encontrar una variable aleatoria cuya función característica sea la que busquemos.
- Usar otros resultados.

**Ejercicio.** Supongamos que  $\varphi_X$  es una función característica. Veamos que  $|\varphi_X|^2$  también lo es.

$$|\varphi_X(t)|^2 = \varphi_X(t) \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t) \varphi_{-X}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Definimos  $X'$  como una copia independiente de  $-X$ . Entonces, la variable  $Y = X + X'$  tiene como función característica a  $|\varphi_X|^2$ .

**Lema 2.17.** Sean  $\mu_1, \dots, \mu_n$  medidas de probabilidad con funciones características  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  respectivamente. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$  tales que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Entonces la función característica asociada a la medida  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$  es:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t)$$

*Es decir, toda combinación lineal convexa de funciones características es una función característica.*

**Ejercicio.** Supongamos que  $\varphi_X$  es una función característica. Veamos que  $\operatorname{Re}(\varphi_X)$  también lo es.

$$\operatorname{Re}(\varphi_X) = \frac{\varphi_X + \overline{\varphi_X}}{2} = \frac{1}{2} \varphi_X + \frac{1}{2} \varphi_{X'}$$

donde  $X'$  es una copia independiente de  $-X$ .

Definimos la variable aleatoria  $Y$  cuya distribución de probabilidad es una mixta de las distribuciones  $X$  y  $X'$  con pesos  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2}$ . Entonces,  $Y$  tiene como función característica  $\varphi_Y(t) = \operatorname{Re}(\varphi_X(t))$ .

**Definición 2.7.** Una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es definida positiva si:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0$$

para todo  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  y  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ .

*Observación.* La función característica es definida positiva.

**Teorema 2.18.** Sea  $g$  una función definida positiva. Si  $g$  es continua en 0 entonces es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

**Lema 2.19** (Herglotz). Sea  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  definida positiva con  $\phi(0) = 1$ . Entonces existe  $\mu$  distribución de probabilidad en  $[-\pi, \pi]$  tal que  $\phi$  es su función característica asociada, es decir,

$$\phi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} \mu(dx), \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

**Teorema 2.20** (Bochner). Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:

1.  $\varphi$  es definida positiva.
2.  $\varphi$  es continua en 0.
3.  $\varphi(0) = 1$ .

Entonces  $\varphi$  es una función característica.

**Proposición 2.21.** La función  $\varphi_T$  dada por:

$$\varphi(t) = \max \left\{ 1 - \frac{|t|}{T}, 0 \right\} = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$

es una función característica.

**Lema 2.22.** Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\varphi(0) = 1$ .
2.  $\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .
3.  $\varphi$  es par.
4.  $\varphi$  es una poligonal convexa no creciente en  $\mathbb{R}_+$ .

Entonces  $\varphi$  es una función característica.

**Teorema 2.23** (Criterio de Pólya). Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\varphi(0) = 1$ .
2.  $\varphi$  es no negativa, par y continua.
3.  $\varphi$  es convexa y no creciente en  $\mathbb{R}_+$ .

Entonces  $\varphi$  es función característica.

**Ejercicio.** Sea  $\varphi$  la función dada por:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - 0,025|t| & \text{si } |t| < 2 \\ 0,9 - 0,2|t| & \text{si } 2 \leq |t| < 3 \\ 0,6 - 0,1|t| & \text{si } 3 \leq |t| < 4 \\ 0,2 & \text{si } |t| \geq 4 \end{cases}$$



Veamos que  $\varphi$  es función característica.

Para ello expresamos  $\varphi$  como combinación lineal convexa de funciones características de la forma  $1 - \frac{|t|}{T}$  en  $|t| < T$ . Escribimos  $\varphi$  como:

$$\varphi(t) = \alpha_1\varphi_2(t) + \alpha_2\varphi_3(t) + \alpha_3\varphi_4(t) + \alpha_4, \quad \varphi_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$

Ahora encontramos los  $\alpha_i$ .

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \varphi(2) = \alpha_2\varphi_3(2) + \alpha_3\varphi_4(2) + \alpha_4 = \alpha_2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \alpha_3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \alpha_4 \\ \varphi(3) = \alpha_3\varphi_4(2) + \alpha_1 = \alpha_3 \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \alpha_4 \\ \varphi(4) = \alpha_4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$\alpha_1 = 0,1, \quad \alpha_2 = 0,3, \quad \alpha_3 = 0,4, \quad \alpha_4 = 0,2$$

Por tanto,

$$\varphi(t) = 0,1\varphi_2(t) + 0,3\varphi_3(t) + 0,4\varphi_4(t) + 0,2$$

Como cada  $\varphi_a$  es función característica,  $\varphi$  es función característica por ser combinación lineal convexa de ellas.

## Capítulo 3

# Convergencia

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad, con  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ . Estudiaremos las sucesiones  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  con  $A_i \in \mathcal{A}$  para todo  $i \geq 1$ .

**Definición 3.1.** Sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ .

- Definimos el límite superior de la sucesión como:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}$$

- Definimos el límite inferior de la sucesión como:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m \in \mathcal{A}$$

*Observación.*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

La sucesión  $\{A_n\}_n$  converge si:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

**Definición 3.2.** Sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ .  $\{A_n\}_n$  es monótona creciente si:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

En ese caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

**Definición 3.3.** Sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ .  $\{A_n\}_n$  es monótona decreciente si:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

En ese caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

**Teorema 3.1.** Sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$  monótona. Entonces:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

**Teorema 3.2.** Sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ . Entonces:

1.

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right)$$

2.

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{m \geq n} A_m\right)$$

**Teorema 3.3.** Sean  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$  y  $\omega \in \Omega$ . Entonces:

1.  $\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  si y solo si existe una sucesión de índices

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

tal que  $\omega \in A_{n_k}$ , para  $k = 1, 2, \dots$ .

2.  $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  si y solo si existe  $n_0 \geq 1$  tal que  $\omega \in A_m$  para todo  $m \geq n_0$ .

**Teorema 3.4** (Primer lema de Borel-Cantelli). Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$  tal que  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$ . Entonces:

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

Veamos que el recíproco del primer lema de Borel-Cantelli no es cierto.

**Ejemplo.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  el espacio de probabilidad dado por  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\Omega$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Consideramos la sucesión  $\{A_n\}_n$  con  $A_n = \left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ . Observamos que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \left(0, \frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \emptyset \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

Sin embargo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

*Observación.*

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) &= I_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}(\omega) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(\omega) &= I_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}(\omega)\end{aligned}$$

**Teorema 3.5** (Segundo lema de Borel-Cantelli). *Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$  con  $A_i$  independientes tal que  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty$ . Entonces:*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

*Observación.*

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

**Ejemplo.** Un mono pulsando teclas al azar sobre un teclado durante un periodo de tiempo infinito escribirá el Quijote y cualquier texto un número infinito de veces.

**Corolario 3.6** (Ley 0-1 de Borel-Cantelli). *Sea  $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$  con  $A_i$  independientes. Entonces:*

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0 \quad \text{o} \quad P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

### 3.1. Tipos de convergencia

Sea  $X$  variable aleatoria en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , definimos:

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)\}$$

Recordamos que:

- Sean  $X : \Omega \rightarrow S$  y  $f : S \rightarrow T$  dos funciones medibles. Entonces  $f(X)$  es medible.
- Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Entonces  $f(X_1, \dots, X_n)$  es variable aleatoria.
- Toda función continua es medible Borel.

**Teorema 3.7.** *Sea  $X_n$  una sucesión de variables aleatorias en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Entonces son variables aleatorias:*

- $\inf X_n$
- $\sup X_n$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$

$$\blacksquare \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$$

**Corolario 3.8.**  $\Omega_1$  es medible.

**Definición 3.4.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Decimos que  $X_n$  converge casi seguro si  $P(\Omega_1) = 1$ .

En tal caso escribimos  $X_n \xrightarrow{cs} X$ , con  $X = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ .

**Teorema 3.9.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $X_n \xrightarrow{cs} X$ .
2.  $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_{n,k}) = 1$  para todo  $k \geq 1$ .
3.  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_{n,k}^c) = 0$  para todo  $k \geq 1$ .

donde

$$Y_{n,k} = \left\{ \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}$$

**Ejemplo.** Veamos un contraejemplo para el caso en el que no hay independencia.

Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$  y  $P = m$  la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que las variables aleatorias no son independientes dos a dos:

$$\begin{aligned} P(X_n = 1 | X_{n-1} = 0) &= \frac{P((X_n = 1) \cap (X_{n-1} = 0))}{P(X_{n-1} = 0)} = \\ &= \frac{m\left([0, \frac{1}{n}] \cap (\frac{1}{n-1}, 1]\right)}{1 - \frac{1}{n-1}} = 0 \\ P(X_n = 1) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Calculamos el límite de la sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Sea  $X(\omega) = 0$ ,  $X_n \xrightarrow{cs} X$  porque:

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X\}) = P(\{0\}) = 0$$

Sea  $\varepsilon > 0$ ,

$$Y_{n,1/\varepsilon}^c = \{\omega \in [0, 1] : |X_n(\omega) - 0| \geq \varepsilon\}$$

Sin embargo, observamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_{n,1/\varepsilon}^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

**Definición 3.5.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Decimos que  $X_n$  converge en probabilidad a  $X$  si para todo  $\varepsilon > 0$

$$P(Y_{n,\varepsilon}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

En tal caso escribimos  $X_n \xrightarrow{p} X$ .

**Teorema 3.10.** *El límite en probabilidad es único en casi todo punto.*

**Teorema 3.11.** *Si  $X_n \xrightarrow{cs} X$ , entonces  $X_n \xrightarrow{p} X$ .*

**Ejemplo.** Sea  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$  y  $P = m$  la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = \omega^n$$

Calculamos el límite de la sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \omega < 1 \\ 1 & \text{si } \omega = 1 \end{cases}$$

Sea  $X(\omega) = 0$ ,  $X_n \xrightarrow{cs} X$  porque:

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \neq X\}) = P(\{1\}) = 0$$

Como  $X_n$  converge casi seguro, sabemos que  $X_n$  converge en probabilidad. Veamos que esto es cierto.

Sea  $\varepsilon > 0$ ,

$$Y_{n,\varepsilon} = \{|X_n - X| < \varepsilon\} = \{X_n < \varepsilon\}$$

Observamos que:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt[n]{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Por tanto, si tomamos  $\varepsilon \leq 1$ ,

$$P(Y_{n,\varepsilon}) = F_n(\varepsilon^-) = \sqrt[n]{\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

**Ejemplo.** Sean  $X_n$  variables aleatorias independientes de Bernoulli en un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si hay éxito en la prueba } n \\ 0 & \text{si no hay éxito en la prueba } n \end{cases}$$

Observamos que:

$$P(X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea  $X = 0$ , veamos que  $X_n$  no converge casi seguro a  $X$ . Sea  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_{n,\varepsilon}^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Veamos que aún así  $X_n$  converge en probabilidad a  $X$ .

$$P(Y_{n,\varepsilon}^c) = P(X_n \geq \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 0 < \varepsilon \leq 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{n,\varepsilon}^c) = 0 \quad \forall \varepsilon$$

Por tanto,  $X_n \xrightarrow{p} X$ .

**Teorema 3.12.** Si  $X_n \xrightarrow{p} X$ , entonces existe una subsucesión  $\{X_{n_k}\}$  tal que  $X_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{cs} X$ .

**Teorema 3.13.**  $X_n \xrightarrow{p} X$  si y solo si toda subsucesión contiene una subsucesión convergente casi seguro.

**Teorema 3.14.** La convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución.

**Teorema 3.15.** Sean  $X_n$  y  $X$  en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con  $X \sim \delta(c)$  y  $c$  constante. Entonces la convergencia en probabilidad es equivalente a la convergencia en distribución.

## Convergencia en $L^p$

Dado  $0 < p < \infty$ , definimos:

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : E(|X|^p) < \infty\}$$

*Nota.* Los elementos de  $L^p$  son en realidad clases de equivalencia, con la relación de equivalencia dada por:

$$X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \text{ en casi todo punto}$$

*Nota.* Si  $X$  es una variable aleatoria que verifica  $E(|X|^p) < \infty$ , se dice que es  $p$ -integrable. Esta condición es equivalente a que:

$$\int_{\Omega} |X|^p dP < \infty$$

Para  $1 \leq p < \infty$  podemos definir la norma:

$$\|X\|_p = \left( \int_{\Omega} |X|^p dP \right)^{1/p}$$

Si  $0 < p < 1$ ,  $\|\cdot\|$  es una pseudonorma.

Esta norma induce una métrica:

$$\begin{aligned} d : L^p \times L^p &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ d(X, Y) &= \|X - Y\|_p \end{aligned}$$

**Definición 3.6.** Sean  $X_n, X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Decimos que  $X_n$  converge a  $X$  en  $L^p$  si:

$$\|X_n - X\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Equivalentemente, si:

$$E(|X_n - X|^p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En tal caso escribimos  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ .

**Ejemplo.** Sean  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$  y  $P = m$  la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = nI_{[0, \frac{1}{n}]}(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < \omega \leq 1 \end{cases}$$

Veamos si  $X_n$  converge a  $X$  en  $L^p$ .

$$\begin{aligned} E(|X_n - X|^p) &= E(|X_n|^p) = 0^p P(X_n = 0) + n^p P(X_n = n) = \\ &= n^p m \left( \left[ 0, \frac{1}{n} \right] \right) = \frac{n^p}{n} = n^{p-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1 \\ 1 & \text{si } p = 1 \\ \infty & \text{si } p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego  $X_n$  converge a  $X$  en  $L^p$  si  $p < 1$ .

**Ejemplo.** Sean  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$  y  $P = m$  la medida de Lebesgue. Consideramos:

$$X_n(\omega) = 2^n I_{[0, \frac{1}{2^n}]}(\omega) = \begin{cases} 2^n & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2^n} < \omega \leq 1 \end{cases}$$



Sea  $X \sim \delta(0)$ , se puede comprobar que  $X_n \xrightarrow{p} X$ . Veamos si  $X_n$  converge a  $X$  en  $L^p$ .

$$\begin{aligned} E(|X_n - X|^p) &= E(|X_n|^p) = 0^p P(X_n = 0) + 2^{np} P(X_n = 2^n) = \\ &= 2^{np} m\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{2^{np}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Luego  $X_n$  no converge a  $X$  en  $L^p$ .

**Proposición 3.16** (Desigualdad de Márkov). *Sean  $X$  no negativa y  $a > 0$ . Entonces:*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Si  $X \in L^p$ ,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X^p)}{a^p}$$

*Observación.* Si  $X \in L^p$  cualquiera,  $|X|$  es no negativa luego:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|^p)}{a^p}$$

**Teorema 3.17.** *Sean  $X_n, X \in L^p$ , con  $0 < p < \infty$ . Si  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ , entonces  $X_n \xrightarrow{p} X$ .*

**Teorema 3.18.** *El límite en  $L^p$  es único.*

**Teorema 3.19.** *Si  $X_n \xrightarrow{p} X$  con  $X_n, X \in L^p$  y existe  $Y \in L^p$  tal que  $|X_n| \leq Y$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ .*

## 3.2. Leyes de los grandes números

### Ley débil de los grandes números

Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y sea  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . La sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  verifica la ley débil de los grandes números si existen sucesiones numéricas  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  con  $b_n \uparrow \infty$  tales que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0$$

*Nota.* Escribir  $X_n \rightarrow c$  con  $c \in \mathbb{R}$  es equivalente a  $X_n \rightarrow X$  con  $X \sim \delta(c)$ .

**Teorema 3.20** (Bernoulli). *Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con  $X_i \sim \text{Ber}(p)$ , donde  $0 < p < 1$ . Entonces:*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$$

*Es decir,  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  verifica la ley débil de los grandes números para  $a_n = np$  y  $b_n = n$ .*

**Ejemplo** (Ciclos de permutaciones aleatorias). Sea  $\Omega_n$  el conjunto de permutaciones de  $n$  elementos, consideramos la permutación  $\pi \in \Omega_9$  dada por:

$$\begin{array}{c|cccccccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \pi(i) & 3 & 9 & 6 & 8 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{array}$$

Observamos que  $\pi$  tiene tres ciclos y se puede escribir como  $(1\ 3\ 6)(2\ 9\ 7\ 5)(4\ 8)$ .

Tomando una permutación al azar de  $\Omega_n$ , queremos estudiar cuántos ciclos tendrá. Definimos las variables:

$$X_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si se cierra un ciclo tras el número en la posición } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso de  $\pi$  tenemos que  $x_{9,3} = x_{9,7} = x_{9,9} = 1$ , con  $x_{9,m} = 0$  en el resto.

Observamos que  $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$  es el número de ciclos. Se puede demostrar que  $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$  son variables aleatorias independientes y que:

$$P(X_{n,k} = 1) = \frac{1}{n - k + 1}$$

Calculemos su esperanza:

$$E(S_n) = E(X_{n,1}) + \dots + E(X_{n,n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Podemos aproximar:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log(n)$$

Por tanto, sean  $b_n = \log(n)$  y  $a_n = E(S_n) = \log(n)$ , entonces:

$$\frac{S_n - \log(n)}{\log(n)} \xrightarrow{p} 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{\log(n)} \xrightarrow{p} 1$$

**Ejemplo** (Polinomios de Bernstein). Sea  $f$  continua en  $[0, 1]$ . Para cada  $x \in [0, 1]$ , el polinomio de Bernstein de grado  $n$  asociado a  $f$  es:

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} f\left(\frac{m}{n}\right)$$

Sean  $X_i \sim \text{Ber}(p)$  para  $i \geq 1$  con  $0 < p < 1$ . Entonces  $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bi}(n, p)$ , con:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Por la ley débil de los grandes números de Bernoulli:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} - p \xrightarrow{p} 0$$

**Teorema 3.21** (Chebyshev). Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  constantes. Entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

**Teorema 3.22** (Chebyshev). Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con varianza acotada por una constante  $c$ . Entonces:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0$$

**Teorema 3.23** (Márkov). Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias con  $V\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Entonces:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0$$

**Teorema 3.24** (Khinchin). Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mu < \infty$ . Entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

**Ejemplo.** Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con  $X_j \sim U([0, 1])$  para todo  $j$ . Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible en  $[0, 1]$  tal que:

$$\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$$

Consideramos las variables aleatorias  $f(X_1), f(X_2), \dots$ . Observamos que:

$$E(f(X_j)) = \int_0^1 f(x) dx < \infty$$

Por la ley débil de los grandes números:

$$\frac{1}{n}(f(X_1) + \dots + f(X_n)) \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x) dx$$

**Ejemplo.** Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en  $\{1, \dots, n\}$  con  $n$  fijo, donde  $X_i$  es el valor del dato  $i$ -ésimo. Definimos la variable  $\tau_k^n = \inf\{m \leq n : \#\{X_1, \dots, X_m\} = k\}$ , que representa el instante en el cual obtenemos  $k$  datos distintos. Es claro que  $\tau_1^n = 1$  y asumimos  $\tau_0^n = 0$ .

Definimos también  $X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$ , para  $1 \leq k \leq n$ , que indica el tiempo en conseguir el  $k$ -ésimo dato distinto. Observamos que:

$$X_{n,k} \sim Ge\left(\frac{n-(k-1)}{n}\right)$$

Por tanto:

$$E(X_{n,k}) = \frac{n}{n-(k-1)}, \quad V(X_{n,k}) = \left(\frac{n}{n-(k-1)}\right)^2$$

Por último, definimos  $T_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k} = \tau_n^n$ , que es el tiempo en completar la colección.

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-(k-1)} = n \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \sim n \log(n) \\ V(T_n) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n-(k-1)}\right)^2 = n^2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \leq n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = n^2 \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Tomamos  $a_n = E(T_n)$  y  $b_n = n \log(n)$ . Como  $\frac{V(T_n)}{b_n} \rightarrow 0$  y se verifica la ley débil de los grandes números, entonces:

$$\frac{T_n - n \log(n)}{n \log(n)} \xrightarrow{p} 0, \text{ es decir, } \frac{T_n}{n \log(n)} \xrightarrow{p} 1$$

Si  $n = 365$ , entonces el tiempo en completar la colección será aproximadamente  $T_n \sim 365 \log(365) > 2153$ .

## Ley fuerte de los grandes números

**Definición 3.7.** Una sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  de una variable aleatoria verifica la ley fuerte de los grandes números si existen sucesiones numéricas  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  con  $b_n \uparrow \infty$  tales que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{cs} 0$$

donde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

*Observación.* Estudiaremos el caso  $a_n = E(S_n)$ ,  $b_n = n$ . Queremos estudiar la convergencia de series de variables aleatorias, como  $\sum_{i=1}^{\infty} X_n$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ . Diremos que una serie  $\sum_{i=1}^{\infty} X_n$  converge casi seguro para indicar que  $\sum_{i=1}^{\infty} X_n < \infty$  en casi todo punto.

**Lema 3.25.** Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias. Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$  converge casi seguro si y solo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq m} |S_j - S_n| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Teorema 3.26** (Criterio de convergencia de Kolmogórov). *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con  $\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$ . Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) < \infty$  casi seguro.*

*Observación.* Si  $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) < \infty$  casi seguro, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \text{ casi seguro} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) < \infty$$

**Teorema 3.27** (Recíproco del criterio de convergencia de Kolmogórov). *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes. Si existe una constante  $c > 0$  tal que  $\{X_n\} \leq c$  casi seguro para todo  $n \geq 1$ , entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)) < \infty \text{ casi seguro} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$$

**Corolario 3.28.** *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes tales que  $\{X_n\} \leq c$  para alguna constante  $c > 0$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$  casi seguro, entonces también convergen casi segura las series:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n)$$

**Teorema 3.29** (Condición suficiente de Kolmogórov). *Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con varianza finita. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < \infty$  entonces  $\{X_n\}$  verifica la ley fuerte de los grandes números, es decir,*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{cs} 0$$

**Lema 3.30** (Kronecker). *Sean  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias y  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales con  $a_n \uparrow \infty$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n} < \infty$  casi seguro, entonces:*

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{cs} 0$$

**Definición 3.8.** Sean  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias y  $\{c_n\}$  una sucesión de reales no negativos. Se define la sucesión de las variables aleatorias truncadas como  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ , donde:

$$Y_n = X_n I_{\{|X_n| < c_n\}}$$

**Definición 3.9.** Dos sucesiones de variables aleatorias  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$  son equivalentes en convergencia cuando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty$$

**Teorema 3.31.** Si  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$  son equivalentes en convergencia, entonces se verifican:

1.  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \neq Y_n\}) = 0$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$  casi seguro  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Y_n < \infty$  casi seguro
3.  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - Y_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cs} 0$

*Observación.* Si elegimos  $c_n = c$  constante para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Y_n = X_n I_{\{|X_n| < c\}} = \begin{cases} X_n & \text{si } |X_n| < c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq c)$$

Si existe  $c$  tal que esa serie es finita, tenemos equivalencia entre  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$ .

**Ejemplo.** Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con medida de probabilidad inducida:

$$P_{X_n}(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & \text{si } a = -1, 1 \\ \frac{1}{2n^2} & \text{si } a = -e^n, e^n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Observamos que  $X_n$  es discreta, con  $\text{sop}(X_n) = \{-e^n, -1, 1, e^n\}$ .

Queremos ver que  $\{X_n\}$  verifica la ley fuerte de los grandes números. Sin embargo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{e^{2n}}{n^4} \right) = \infty$$

El problema es que las variables no tienen  $E(X_n^2) < \infty$ . Para solucionarlo, consideramos las variables truncadas:

$$Y_n = X_n I_{\{-1, 1\}} = X_n I_{\{|X_n| < 1+\varepsilon\}}$$

Observamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq -1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = e^n, X_n = -e^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

**Teorema 3.32** (Tres series de Kolmogórov). Sean  $\{X_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes y  $\{X_n^c\}$  la sucesión de variables aleatorias truncadas por alguna constante  $c > 0$ . Supongamos que las tres siguientes series convergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq X_n^c), \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^c), \quad \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n^c)$$

Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty}$  converge casi seguro.

Recíprocamente, si  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$  casi seguro, entonces las tres series convergen para todo  $c > 0$ .

**Lema 3.33.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Entonces:

$$E|X| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$$

Además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$$

**Teorema 3.34** (Ley fuerte de los grandes números). Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con  $E(X_i) = \mu < \infty$  para todo  $i$ . Sea  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Entonces:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{cs} \mu$$

Recíprocamente, si  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{cs} c$ , con  $c$  constante, entonces  $E(X_i) = c$  para todo  $i$ .

### 3.3. Teorema central del límite

**Teorema 3.35** (Teorema central del límite de Lindeberg-Lévy). Sean variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$  independientes e idénticamente distribuidas con media  $E(X_i) = \mu < \infty$  y varianza  $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$  para todo  $i$ . Sean  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Entonces:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left( \frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

*Observación.* En particular, si  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , entonces:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

**Ejercicio.** Sean  $X_n \sim U([0, \pi])$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sea  $S_n = \sum_{j=1}^n \sin(X_j)$ . Queremos encontrar sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  tales que:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

Definimos  $Y_j = \sin(X_j)$ , de forma que  $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ . Veamos si  $E(Y_j)$  y  $V(Y_j)$  son constantes para aplicar el teorema central del límite de Lindeberg-Lévy.

$$E(Y_j) = \int_0^\pi \sin(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi}$$

$$E(Y_j^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}$$

Como  $E(Y_j) = \frac{2}{\pi}$  y  $V(Y_j) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$  son constantes, los  $X_n$  verifican el teorema central del límite de Lindeberg-Lévy para:

$$a_n = n\mu = \frac{2n}{\pi}, \quad b_n = \sqrt{n \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right)}$$

**Teorema 3.36** (Teorema central del límite de Lindeberg-Feller). *Sean variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$  independientes con  $E(X_n) = \mu_n < \infty$  y  $V(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ . Sea  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  y sea  $s_n = V(S_n) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$ . Entonces:*

1.  $\frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_j) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$
2.  $\max_{1 \leq j \leq n} \frac{\sigma_j^2}{s_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

es equivalente a:

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x - \mu_j| > \varepsilon s_n} (x - \mu_j)^2 dF_j(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$