Ecuaciones diferenciales II

15 de octubre de 2022

Índice general

Capítulo 1

Teoremas de existencia y unicidad global

Teorema 1.1. *Consideramos el problema de Cauchy:*

$$(P)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$ *es continua en* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$ *y* $(t_0, x^0) \in D$*. Sea* I *un intervalo en* $\mathbb{R}$ *tal que* $t_0 \in I$ *y* $x : I \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ *una función cuya gráfica está contenida en* D*:*

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $x : I \to \mathbb{R}^n$ *es solución de* (P)*.*
- x *es una función continua en* I *que verifica:*

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \forall t \in I$$

Definición 1.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es lipschitziana en D respecto de la segunda variable x cuando existe una constante $L > 0$ tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

En tal caso se escribe $f \in Lip(x, D)$ y se dice que L es una constante de Lipschitz para f en D respecto a la segunda variable.

Definición 1.2. Sean $n > 1$, $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

- Una función $f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es lipschitziana en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una constante $L > 0$ tal que:

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

- Una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es lipschitziana en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una constante $L > 0$ tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L||x - y||, \quad (t,x),(t,y) \in D$$

Proposición 1.2. *Sean $n > 1$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Se verifica:*

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow f_k \in Lip(x, D), \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

Proposición 1.3 (Caracterización de la condición de Lipschitz)**.** *Si D es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$ y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$, entonces:*

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ es acotada en } D$$

Observación. Si K es un conjunto convexo y compacto en $\mathbb{R}^2$ y existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ y es continua sobre K, entonces $f \in Lip(x, K)$.

Definición 1.3. Sea I cualquier intervalo en $\mathbb{R}$. Se dice que una función $f : D = I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, satisface una condición de Lipschitz generalizada en D respecto de la segunda variable x cuando existe una función $L : I \to \mathbb{R}$ continua en I y no negativa tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)|x - y|, \quad \forall (t,x),(t,y) \in D$$

En tal caso se escribe $f \in LipG(x, D)$.

Definición 1.4. Sean $n > 1$, $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $D = I \times \mathbb{R}n$.

- Se dice que la función vectorial $f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, satisface una condición de Lipschitz generalizada en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una función $L : I \to \mathbb{R}^+$ continua en I tal que:

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L(t)||x - y||, \quad (t,x),(t,y) \in D$$

- Se dice que la función vectorial $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, satisface una condición de Lipschitz generalizada en D respecto de la variable vectorial $x \in \mathbb{R}^n$ cuando existe una función $L : I \to \mathbb{R}^+$ continua en I tal que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)||x - y||, \quad (t,x),(t,y) \in D$$

Proposición 1.4. *Sean $n > 1$, I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : D = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Se verifica:*

$$f \in LipG(x, D) \Leftrightarrow f_k \in LipG(x, D), \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

Proposición 1.5 (Caracterización de la condición de Lipschitz generalizada). *Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : D = I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$. Las dos siguientes condiciones son equivalentes:*

- $f \in LipG(x, D)$.
- *Existe una función $L : I \to \mathbb{R}^+$ continua en I tal que:*

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq L(t), \quad \forall (t,x) \in D$$

Teorema 1.6 (Teorema de existencia y unicidad global). *Sea $n \geq 1$ y supongamos las tres siguientes condiciones:*

1. $D = I \times \mathbb{R}^n$ *donde I es un intervalo no degenerado en $\mathbb{R}$.*
2. *La función $f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$, es continua en D.*
3. $f \in LipG(x, D)$.

En tal situación, para cada $(t_0, x^0) \in D$ el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo I.

Capítulo 2

Teoremas de existencia y unicidad local

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad local)**.** *Sean* $n \geq 1$ *y* $||.||$ *una norma en* $\mathbb{R}^n$*. Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$*,* $(t, x) \mapsto f(t, x)$*,* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *y* $(t_0, x^0) \in D$*.*

Supongamos que existen $a > 0$ *y* $b > 0$ *tales que:*

$$Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

y la función f *verifica las dos siguientes condiciones:*

1. f *es continua en* Q*.*
2. $f \in Lip(x, Q)$*.*

Entonces, existen intervalos $I = [t_0 - h, t_0 + h]$*, siendo* $0 < h \leq a$*, tales que* (P) *posee una única solución* $x : I \to \mathbb{R}^n$*. Esto sucede si:*

$$0 < h \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad \textit{siendo } M \geq \max_{(t,x)\in Q} ||f(t, x)||$$

Observación. Existen versiones laterales del teorema local:

- Tomando $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b)$, para obtener una única solución $x : [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ del problema (P) (solución lateral a la derecha).
- Tomando $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b)$, para obtener una única solución $x : [t_0 - h, t_0] \to \mathbb{R}^n$ del problema (P) (solución lateral a la izquierda).

Corolario 2.2. *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

- *D es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con interior $\dot{D}$ no vacío.*
- *La función $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, es continua en D.*
- *Existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$ y es continua en D.*

En tal situación, para cualquier punto $(t_0, x^0) \in \dot{D}$ existen intervalos $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, siendo $h > 0$, tales que el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene una única solución $x : I \to \mathbb{R}$.

Observación. Si D es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, entonces f satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

Capítulo 3

Resultados de unicidad

Definición 3.1 (Propiedad de unicidad global)**.** Sean $n \geq 1$, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se dice que la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ tiene la propiedad de unicidad global en una región $D \subset \Omega$ cuando, dadas dos soluciones $x : I \to \mathbb{R}^n$, $y : J \to \mathbb{R}^n$ con gráficas contenidas en D, sucede que si existe $t_0 \in I \cap J$ tal que $x(t_0) = y(t_0)$ entonces $x(t) = y(t)$ para cada $t \in I \cap J$.

Definición 3.2. Sean $n \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es localmente lipschitziana en la región $D \subset \Omega$ respecto de la variable x cuando para cada punto $(t_0, x^0) \in D$ existe un entorno U de (t_0, x^0) tal que $f \in Lip(x, U \cap D)$. Cuando esto sucede escribiremos $f \in Lip_{Loc}(x, D)$.

Definición 3.3. Sean $n > 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, se dice que es localmente lipschitziana en la región $D \subset \Omega$ respecto de la variable x cuando para cada punto $(t_0, x^0) \in D$ existe un entorno U de (t_0, x^0) tal que $f \in Lip(x, U \cap D)$.

Proposición 3.1. *Sean $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Sea $D \subset \Omega$. Se verifica:*

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f_i \in Lip_{Loc}(x, D), \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Proposición 3.2 (Condición suficiente para la condición de Lipschitz local)**.** *Supongamos:*

- *$n \geq 1$ y A un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*
- *$f : A \to \mathbb{R}$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \ldots, x_n)$, una función tal que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \to \mathbb{R}$ y es continua en A.*

Entonces $f \in Lip_{Loc}(x, A)$, siendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Teorema 3.3 (Caracterización de la condición de Lipschitz local)**.** *Sean $n \geq 1$, D un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ continua en D. Entonces:*

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f \in Lip(x, K), \quad \forall K \subset D \text{ compacto}$$

Proposición 3.4 (Lema de Gronwall)**.** *Sean k una constante no negativa, $u, v : I \to \mathbb{R}^+$ dos funciones continuas en el intervalo I y $t_0 \in I$ tales que:*

$$u(t) \leq k + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Entonces, se verifica:

$$u(t) \leq k \exp \left| \int_{t_0}^{t} v(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Teorema 3.5 (Estimación de la diferencia entre dos soluciones)**.** *Sean $n \geq 1$, $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$, $x : I \to \mathbb{R}^n$ e $y : I \to \mathbb{R}^n$ dos soluciones de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ con gráficas contenidas en una región $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea $t_0 \in I$.*

1. *Si $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, D)$ con constante de Lipschitz L, se tiene la siguiente estimación:*

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x(t_0) - y(t_0)||e^{L|t-t_0|}, \quad \forall t \in I$$

2. *Si $D = J \times \mathbb{R}^n$, donde J es un intervalo en $\mathbb{R}$, y $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap LipG(x, D)$ con función de Lipschitz $L : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto L(t)$, entonces:*

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x(t_0) - y(t_0)|| \exp \left| \int_{t_0}^{t} L(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Teorema 3.6 (Teorema de unicidad global)**.** *Sean $n \geq 1$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $D \subset \Omega$ tal que:*

$$f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip_{Loc}(x, D)$$

Entonces, la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ tiene la propiedad de unicidad global en D.

Observación. Si D es abierto y $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, entonces f satisface las condiciones del teorema de unicidad global. Recordamos que satisface además las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

Proposición 3.7 (Criterio de unicidad de Peano)**.** *Sean J y K intervalos en $\mathbb{R}$ y consideramos el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D = J \times K \to \mathbb{R}$ y $(t_0, x^0) \in D$.

Por otra parte, sea I un intervalo tal que $t_0 \in I \subset J$ y consideramos:

$$I^- = \{t \in I : t \leq t_0\}, \quad I^+ = \{t \in I : t \geq t_0\}$$

suponiendo que los intervalos I^- e I^+ no sean degenerados.

1. *Unicidad a la izquierda. Si para cada* $t \in I^-$ *la función* $f_t : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_t(x) = f(t,x)$ *es creciente, entonces* (P) *tiene a lo sumo una solución definida en* I^-.

2. *Unicidad a la derecha. Si para cada* $t \in I^+$ *la función* $f_t : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_t(x) = f(t,x)$ *es decreciente, entonces* (P) *tiene a lo sumo una solución definida en* I^+.

Teorema 3.8 (Teorema de dependencia continua)**.** *Sean* I *un intervalo acotado en* $\mathbb{R}$, $n \geq 1$ *y* $||.||$ *una norma en* $\mathbb{R}^n$. *Consideramos el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x^0) \in D$ *y* $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, D)$.

Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ *la solución de* (P) *y para cada* $v \in \mathbb{R}^n$ *sea:*

$$(P_v) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = v \end{cases}$$

Se verifica lo siguiente:

1. *Dado cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que, si* $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *verifica que* $||x^0 - y^0|| < \delta$, *entonces la solución* $y : I \to \mathbb{R}^n$ *del problema* (P_{y^0}) *verifica que:*
$$||x(t) - y(t)|| < \varepsilon, \quad \forall t \in I$$

2. *Si* (v_m) *es una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $v_m \to x^0$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\phi_m : I \to \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *es la solución del problema* (P_{v_m}), *entonces la sucesión* (ϕ_m) *converge uniformemente hacia la solución del problema* (P) *en el intervalo* I.

Capítulo 4

Teoremas de existencia

Teorema 4.1 (Versión lateral a la derecha del teorema de existencia local de Peano)**.** *Sean $n \geq 1$ y $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $(t_0, x^0) \in D$.
Supongamos que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ y f es continua en Q.

Entonces, (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo $I = [t_0, t_0 + h]$, donde:

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M \geq \max_{(t,x)\in Q} ||f(t, x)||$$

Observación. La versión lateral a la izquierda del teorema de existencia local de Peano consiste en tomar

$$Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

De esta forma, el problema (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo $I = [t_0 - h, t_0]$.

Corolario 4.2 (Versión centrada del teorema de existencia local de Peano)**.** *Sean $n \geq 1$ y $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $(t_0, x^0) \in D$. Supongamos que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ y f es continua en Q.

Entonces, (P) tiene al menos una solución definida en el intervalo $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, donde:

$$h = \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M \geq \max_{(t,x)\in Q} ||f(t,x)||$$

Teorema 4.3 (Teorema de existencia global de Peano)**.** *Sean I un intervalo compacto en $\mathbb{R}$, $n \geq 1$ y $f : D = I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua y acotada en D. Entonces, para cada $(t_0, x^0) \in D$, el problema*

$$(P)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución definida en I.

Capítulo 5

Prolongaciones de soluciones y soluciones maximales

Definición 5.1 (Soluciones estrictamente prolongables y soluciones maximales)**.** Una solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ de una ecuación diferencial o de un problema de Cauchy se dice que es estrictamente prolongable cuando existe otra solución $y : J \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$I \subsetneq J, \quad y_{|_I} = x$$

Cuando esto sucede, se dice que $y : J \to \mathbb{R}^n$ es una prolongación estricta de $x : I \to \mathbb{R}^n$. Una solución que no admite prolongación estricta se dice que es no prolongable o que es maximal.

Teorema 5.1 (Existencia y unicidad de soluciones no prolongables)**.** *Si f es continua en D se verifica:*

1. *Si (t_0, x^0) es un punto interior a D, entonces (P) tiene al menos una solución que no es prolongable definida en un intervalo que contiene al punto t_0 en el interior. Si además $f \in Lip_{Loc}(x, D)$, esta solución maximal es única.*

2. *Si existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$, entonces (P) posee al menos una solución lateral a la derecha que no es prolongable a la derecha.*

3. *Si existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$, entonces (P) posee al menos una solución lateral a la izquierda que no es prolongable a la izquierda.*

Observación. Si D es abierto y f es de clase $\mathcal{C}^1$ en D, entonces (P) tiene una única solución maximal, que está definida en un intervalo que contiene a t_0 en su interior.

Teorema 5.2 (Soluciones maximales con gráficas contenidas en conjuntos compactos)**.** *Sea el problema de valor inicial:*

$$(P)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ y $(t_0, x^0) \in D$. Sea $x : I \to \mathbb{R}^n$ una solución maximal de (P) y sea Γ su gráfica.

Supongamos que existe un conjunto K compacto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma \subset K \subset D$ y f es continua en K. Entonces:

1. *I es un intervalo compacto, es decir, $I = [a, b]$.*

2. *Los puntos $(a, x(a))$ y $(b, x(b))$ están en la frontera de K.*

Definición 5.2 (Puntos límite)**.** Sean $n \geq 1$ y $x : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $t_1 < \infty$. Sea $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que (t_1, x^1) es un punto límite de la gráfica de x para $t \to t_1$ cuando existe una sucesión (s_m) en el intervalo $[t_0, t_1)$ tal que $(s_m, x(s_m)) \to (t_1, x^1)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.3. *Sean $n \geq 1$, $t_1 < \infty$, $x : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ una función, Γ su gráfica y $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Se verifica una y solamente una de las dos siguientes situaciones:*

- $\lim\limits_{t \to t_1} ||x(t)|| = \infty$

- *Γ tiene al menos un punto límite para $t \to t_1$.*

Teorema 5.4 (Lema de Wintner)**.** *Sea $x : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$, siendo $t_1 < \infty$, una solución de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$, con gráfica Γ contenida en $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función continua en D. Sea (t_1, x^1) un punto límite de Γ para $t \to t_1$ y supongamos que se verifica la siguiente condición:*

Existe un entorno U de (t_1, x^1) tal que f es acotada de $U \cap D$.

Entonces $\lim\limits_{t \to t_1} x(t) = x^1$.

Teorema 5.5 (Soluciones maximales con gráficas contenidas en conjuntos abiertos)**.** *Sean A un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función continua en A y $||.||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución no prolongable de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ con gráfica Γ contenida en A, se verifica:*

1. *El intervalo I es abierto.*

2. *Si I tiene un extremo finito α, entonces $\lim\limits_{t \to \alpha} ||x(t)|| = \infty$ o bien cualquier punto límite de Γ para $t \to \alpha$ está en la frontera de A.*

Teorema 5.6 (Teorema fundamental de las ecuaciones autónomas)**.** *Supongamos que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sea $x : I \to \mathbb{R}$ una solución no prolongable de la ecuación $X' = g(x)$ y sea $t_0 \in \dot{I}$. Se verifica lo siguiente:*

1. *El intervalo* I *es abierto.*
2. *Si* x *es acotada en* $I^+ = [t_0, \infty)$, *existe* $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = a$, *siendo* $a \in \mathbb{R}$, *y la función constante dada por* $y(t) \equiv a$ *es solución de la ecuación* $x' = g(x)$.
3. *Si* x *es acotada en* $I^- = (-\infty, t_0]$, *existe* $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = b$, *siendo* $b \in \mathbb{R}$, *y la función constante dada por* $y(t) \equiv b$ *es solución de la ecuación* $x' = g(x)$.