

Análisis complejo

11 de febrero de 2023

Índice general

Preliminares	2
1. Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad	8
1.1. Funciones meromorfas	8
1.2. Aplicaciones conformes	9
1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido	11
1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad	14

Preliminares

Definición 0.1. Si $a \in \mathbb{C}$ y $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, se define la corona de centro a y radios R_1 y R_2 como:

$$A(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

Teorema 0.1. Si $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ y f es holomorfa en $A(a, R_1, R_2)$, entonces existe una única sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en \mathbb{C} tal que:

- $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$ converge para todo $z \in A(a, R_1, R_2)$.
- $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$ para todo $z \in A(a, R_1, R_2)$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

siendo γ cualquiera camino que esté en $A(a, R_1, R_2)$ con $n(\gamma, a) = 1$

Además, la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$ converge absoluta y uniformemente a cada subconjunto compacto de $A(a, R_1, R_2)$.

A esta serie se le llama desarrollo de Laurent de f en $A(a, R_1, R_2)$.

Definición 0.2. f tiene una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ si existe $R > 0$ tal que f está definida y es holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\} = A(a, 0, R)$.

Podemos considerar el desarrollo de Laurent de f en $D(a, R) \setminus \{a\}$. Existe una única sucesión en \mathbb{C} , $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, tal que:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n, \quad z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

Como la sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ no depende de R , a este desarrollo se le puede llamar desarrollo de Laurent de f en a o en un entorno perforado de a .

Proposición 0.2. Sea f una función con una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ y sea $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n$ el desarrollo de Laurent de f en a . Entonces:

1. a es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow a_n = 0$ si $n < 0 \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\} = \emptyset$.
2. a es un polo de orden N de $f \Leftrightarrow a_{-N} \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n < -N$. Luego a es un polo de $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$ es finito y no vacío.
3. a es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$ es infinito.

Definición 0.3. f tiene una singularidad aislada en ∞ si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

1. Es una singularidad evitable de f si $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ existe en \mathbb{C} .
2. Es un polo de f si $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
3. Es una singularidad esencial en otro caso.

Si f tiene una singularidad aislada en ∞ , entonces f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para un cierto $R > 0$. Entonces la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es holomorfa en $D\left(0, \frac{1}{R}\right) \setminus \{0\}$, por lo que tiene una singularidad aislada en 0.

Entonces:

1. f tiene una singularidad evitable en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene una singularidad evitable en 0.
2. f tiene un polo en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene un polo en 0.
3. f tiene una singularidad esencial en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene una singularidad esencial en 0.

Proposición 0.3. Sea f una función con una singularidad aislada en ∞ . Entonces:

1. ∞ es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow f$ está acotada en un entorno perforado de ∞ . Es decir, si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa y está acotada en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.
2. ∞ es un polo de $f \Leftrightarrow$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^N}$ existe en \mathbb{C} y es distinto de 0. En este caso, N es único y se denomina el orden de ∞ como polo de f .
3. ∞ es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$ es denso en \mathbb{C} para todo $R > 0$ suficientemente grande.

Observación. En (2), el orden de ∞ como polo de f coincide con el orden de 0 como polo de $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Si f tiene una singularidad aislada en ∞ , entonces existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} = A(0, R, \infty)$. Podemos considerar el desarrollo

de Laurent de f en $A(0, R, \infty)$: existe una única sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en \mathbb{C} tal que:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R$$

Como no depende de R , se le puede llamar desarrollo de Laurent de f en ∞ .

Proposición 0.4. Sea f una función con una singularidad aislada en ∞ y sea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo de Laurent de f en ∞ . Entonces:

1. ∞ es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow a_n = 0$ si $n > 0$.
2. ∞ es un polo de f de orden $N \Leftrightarrow a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > N$.
3. ∞ es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow \{n > 0 : a_n \neq 0\}$ es infinito.

Definición 0.4. Si f tiene una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ es el desarrollo de Laurent de f en a , se define $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$.

Proposición 0.5. Sea $a \in \mathbb{C}$ y f una función con una singularidad aislada en a . Sea $R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\}$. Entonces, para todo $r \in (0, R)$, se tiene que:

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$$

Proposición 0.6. Sea f una función con una singularidad aislada en ∞ . Sea $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Se define:

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz, \quad \text{siendo } r > R$$

Proposición 0.7. Si f tiene una singularidad aislada en ∞ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo de Laurent de f en ∞ , entonces $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$.

Teorema 0.8 (Teorema de los residuos). Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea f holomorfa en D salvo por singularidades aisladas, es decir, existe $A \subset D$, A sin puntos de acumulación en D , tal que f es holomorfa en $D \setminus A$. Sea γ un camino cerrado en $D \setminus A$, con $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) n(\gamma, a)$$

Teorema 0.9 (Teorema de la función inversa). Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea f holomorfa en D , con $a \in D$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existen U, V abiertos en \mathbb{C} con $a \in U \subset D$, $f(a) \in V$, tales que:

1. f es inyectiva en U .

2. $f(U) = V$.
3. $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.
4. $f^{-1} : V \rightarrow U$ es holomorfa y además:

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \forall z \in U$$

Teorema 0.10. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sean f holomorfa en D no constante y $a \in D$. Sea n el orden de a como cero de $f - f(a)$, es decir, el primer natural para el que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces f es localmente una aplicación $n \rightarrow 1$ cerca de a . Es decir, existe $\alpha > 0$ con $D(a, \alpha) \subset D$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $\delta > 0$ tal que cada punto $w \in D(f(a), \delta) \setminus \{f(a)\}$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, z_2, \dots, z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. En particular, $f(D(a, \varepsilon)) \supset D(f(a), \delta)$.

Definición 0.5. Sea D abierto en \mathbb{C} y sea f holomorfa en D salvo por polos. Si $a \in D$ es un polo de f , se tiene que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Definimos $f(a) = \infty$. Entonces $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ y es continua. Se dice que f es meromorfa en D .

Teorema 0.11. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea f meromorfa en D , con $a \in D$ un polo de orden n de f . Entonces f es localmente una aplicación $n \rightarrow 1$ cerca de a . Es decir, existe $\alpha > 0$ tal que $D(a, \alpha) \subset D$, f es holomorfa en $D(a, \alpha) \setminus \{a\}$ y se verifica que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $R > 0$ tal que cada punto $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, z_2, \dots, z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. En particular, $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$.

Teorema 0.12. Sea f una función con un polo de orden n en ∞ . Entonces f es localmente una aplicación $n \rightarrow 1$ cerca de ∞ . Es decir, existe $R_0 > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ y se verifica que para todo $R > R_0$ existe $R' > 0$ tal que cada punto $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R'$ es la imagen de exactamente n puntos distintos z_1, \dots, z_n de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. En particular, $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R'\}$.

Teorema 0.13 (Teorema de la aplicación abierta). Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y no constante. Entonces f es una aplicación abierta. En particular, $f(D)$ es un dominio.

Lema 0.14. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea f holomorfa en D .

- Sea $a \in D$. Entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si f es inyectiva en un entorno de a .
- Si f es inyectiva en D , entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$.

Aplicaciones conformes

Definición 0.6. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Sea $D' = f(D)$. Entonces:

- D' es un dominio en D .
- $f : D \rightarrow D'$ es biyectiva.
- $f^{-1} : D' \rightarrow D$ es holomorfa.

En ese caso decimos que f es una aplicación conforme de D sobre D' .

Observación.

1. Si f es una aplicación conforme de D sobre D' , entonces f^{-1} es una aplicación conforme de D' sobre D .
2. Si D_1, D_2 y D_3 son dominios en \mathbb{C} con f aplicación conforme de D_1 sobre D_2 y g aplicación conforme de D_2 sobre D_3 , entonces $g \circ f$ es una aplicación conforme de D_1 sobre D_3 .

Definición 0.7. Si D_1 y D_2 son dominios en \mathbb{C} , se dice que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sobre D_2 .

En el conjunto de los dominios en \mathbb{C} , se tiene la relación de equivalencia "ser conformemente equivalentes".

Definición 0.8. Sea D un dominio en \mathbb{C} . D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo. Equivalentemente, D es simplemente conexo si todo camino cerrado γ en D es homólogo a cero módulo D , es decir, $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

Teorema 0.15. Sean D_1 y D_2 dos dominios en \mathbb{C} que son conformemente equivalentes. Entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.

Definición 0.9. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el ángulo formado por z_1 y z_2 se define como:

$$\theta(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in (-\pi, \pi]$$

Observación. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces $\theta(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) = \theta(z_1, z_2)$.

Definición 0.10. Sea γ un camino con origen en un punto $a \in \mathbb{C}$. Se dice que γ es regular en a si existe una parametrización \mathcal{C}^1 a trozos de γ , $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\gamma'(0) \neq 0$.

Definición 0.11. Sean γ_1 y γ_2 dos caminos con origen $a \in \mathbb{C}$ que son regulares en a . El ángulo que forman γ_1 y γ_2 en a , $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$, se define como sigue.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizaciones \mathcal{C}^1 a trozos de γ_1 y γ_2 respectivamente tales que $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Entonces $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

Definición 0.12. Si γ es una curva en \mathbb{C} y $f : \text{sop}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, se define la curva imagen de γ por f como la curva Γ que tiene por parametrización $f \circ \gamma$, siendo γ una parametrización de γ .

Definición 0.13. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Diremos que f preserva ángulos en a o que f es conforme en a si se verifica lo siguiente.

Si γ_1 y γ_2 son caminos con origen a , regulares en a , entonces las curvas imagen de Γ_1 y Γ_2 por f de γ_1 y γ_2 respectivamente son caminos con origen $f(a)$, que son regulares en $f(a)$ y se tiene que:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

Teorema 0.16. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Si $f'(a) \neq 0$, entonces f es conforme en a .

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 caminos en D , con origen en a y regulares en a . Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizaciones de γ_1 y γ_2 respectivamente, ambas \mathcal{C}^1 a trozos con $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Consideramos las curvas imagen de γ_1 y γ_2 por f :

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= f \circ \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \Gamma_2 &= f \circ \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

Γ_1 y Γ_2 son \mathcal{C}^1 a trozos. Además, Γ_1 y Γ_2 son caminos con origen $f(a)$, porque:

$$\Gamma_1(0) = f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(\gamma_2(0)) = \Gamma_2(0)$$

Observamos que Γ_1 y Γ_2 son regulares en a :

$$\begin{aligned}\Gamma_1'(0) &= f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = f'(a)\gamma_1(0) \neq 0 \\ \Gamma_2'(0) &= f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) = f'(a)\gamma_2(0) \neq 0\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

□

Ejemplo (Contraejemplo). Sean $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ y $a = 0$. Observamos que $f'(a) = 0$. Sea γ_1 el segmento $[0, 1]$ y γ_2 el segmento $[0, i]$. Es claro que $\theta_0(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$. Si consideramos las curvas imagen de γ_1 y γ_2 por f , Γ_1 y Γ_2 , podemos ver que Γ_1 es el segmento $[0, 1]$ y Γ_2 el segmento $[0, -1]$, que tienen $\theta_0(\Gamma_1, \Gamma_2) = \pi \neq \frac{\pi}{2}$.

De hecho, se tiene la equivalencia. Sea D un dominio en \mathbb{C} y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Entonces $f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow f$ es conforme en a .

Capítulo 1

Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad

1.1. Funciones meromorfas

Definición 1.1. Sea D un abierto en \mathbb{C}^* . La función $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ es meromorfa en D si dado $a \in D$ se verifica una de las siguientes posibilidades:

- $a \in \mathbb{C}$ y f es holomorfa en a .
- $a \in \mathbb{C}$ y f tiene un polo en a , es decir, $f(a) = \infty$.
- $a = \infty$ y f tiene una singularidad evitable en ∞ , es decir, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$.
- $a = \infty$ y f tiene un polo en a , es decir, $f(\infty) = \infty$.

Entonces $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ es continua.

Observación. En el caso $D \subset \mathbb{C}$, la definición es la que ya conocíamos de función meromorfa. Si además $f(D) \subset \mathbb{C}$, se tiene una función holomorfa en D .

Observación. Sea D abierto en \mathbb{C}^* y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ continua. Supongamos que f es holomorfa en $\{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$ y que el conjunto $\{z \in D : f(z) = z\}$ no tiene puntos de acumulación en D . Entonces f es meromorfa en D .

Observación. Sea D abierto en \mathbb{C}^* y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$, f meromorfa e inyectiva en $A = \{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$. Entonces f tiene a lo sumo un polo y tal polo es simple. Además, $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in A$, por lo que f es conforme en a para todo $a \in A$.

Teorema 1.1 (Teorema de la aplicación abierta). *Sea D un dominio en \mathbb{C}^* y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ una función meromorfa y no constante en D . Entonces f es una aplicación abierta. En particular, $f(D)$ es un dominio en \mathbb{C}^* .*

Sea D un dominio en \mathbb{C}^* y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa e inyectiva, con $D' = f(D)$. Entonces:

1. D' es un dominio en \mathbb{C}^* .
2. $f^{-1} : D' \rightarrow D$ es meromorfa e inyectiva.

Veamos que (2) es cierto. Como f es una aplicación abierta, se tiene que f^{-1} es continua. Sea $w \in D' \cap \mathbb{C}$ tal que $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}$, veamos que f^{-1} es holomorfa en w . Como $z \in \mathbb{C} \cap D$ y $f(z) \in \mathbb{C}$, f es holomorfa en z con $f'(z) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa, f^{-1} es holomorfa en w .

1.2. Aplicaciones conformes

Definición 1.2. Sea D un dominio en \mathbb{C}^* y sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa e inyectiva en D . Sea $D' = f(D)$. Entonces diremos que f es una aplicación conforme de D sobre D' .

En este caso, se tiene que D' es un dominio en \mathbb{C}^* y que $f^{-1} : D' \rightarrow D$ es meromorfa e inyectiva en D' . Por tanto, $f : D \rightarrow D'$ es un homeomorfismo, con f y f^{-1} meromorfas.

Observación.

1. Si f es una aplicación conforme de D sobre D' , entonces f^{-1} es una aplicación conforme de D' sobre D .
2. Si D_1, D_2 y D_3 son dominios en \mathbb{C}^* , con f aplicación conforme de D_1 sobre D_2 y g aplicación conforme de D_2 sobre D_3 , entonces $g \circ f$ es una aplicación conforme de D_1 sobre D_3 .

Se puede comprobar que, sean G_1, G_2 abiertos en \mathbb{C}^* y $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}, g : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfas tal que $f(G_1) \subset G_2$, entonces $g \circ f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa.

Definición 1.3. Sean D_1 y D_2 dominios en \mathbb{C}^* . Diremos que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sobre D_2 .

En el conjunto de los dominios en \mathbb{C}^* , el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.

Definición 1.4. Sea D un dominio en \mathbb{C}^* . Diremos que D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo.

Ejemplo.

- $D = \mathbb{C}$.
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \{a\}, a \in \mathbb{C}$.
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(a, R), a \in \mathbb{C}, R > 0$.
- $D = D(a, R), a \in \mathbb{C}, R > 0$.

- Un semiplano sin ∞ .
- Un sector sin ∞ .
- El plano menos dos semirrectas.
- $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$, no es simplemente conexo, porque $\mathbb{C}^* \setminus D = \{a, \infty\}$ no es conexo.

Lema 1.2. Dado $a \in \mathbb{C}$, la transformación $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $T(z) = \frac{1}{z-a}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $T(a) = \infty$ y $T(\infty) = 0$, es una aplicación conforme de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^* .

Lema 1.3. Sea H un homeomorfismo de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^* . Si D es un dominio simplemente conexo en \mathbb{C}^* , entonces $H(D)$ es un dominio simplemente conexo en \mathbb{C}^* .

Demostración. Como $H : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ y D es abierto y conexo en \mathbb{C}^* , entonces $H(D)$ es abierto y conexo en \mathbb{C}^* . Luego $H(D)$ es un dominio en \mathbb{C}^* . Como además $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo, entonces $\mathbb{C}^* \setminus H(D) = H(\mathbb{C}^* \setminus D)$ es conexo. Por tanto, $H(D)$ es un dominio simplemente conexo. \square

Teorema 1.4. Sean D_1 y D_2 dos dominios en \mathbb{C}^* que son conformemente equivalentes. Entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.

Demostración. Sea $F : D_1 \rightarrow D_2$ aplicación conforme. Consideramos todos los posibles casos teniendo en cuenta que los papeles de D_1 y D_2 son intercambiables.

- Si $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, se cumple.
- Si $D_1 = \mathbb{C}^*$, como \mathbb{C}^* es cerrado y F es un homeomorfismo, se tiene que D_2 es compacto y por tanto cerrado. Entonces D_2 es abierto y cerrado en \mathbb{C}^* , que es conexo. Por tanto, $D_2 = \mathbb{C}^* = D_1$, ambos simplemente conexos.
- Si $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}^*$, consideramos dos casos.
 - Supongamos que $\infty \notin D_1$ y $\infty \in D_2$. D es un dominio en \mathbb{C} y D_2 es un dominio en \mathbb{C}^* . Sea $a \in \mathbb{C}^* \setminus D_2$, de hecho $a \in \mathbb{C} \setminus D_2$. Tomamos la aplicación conforme $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $T(z) = \frac{1}{z-a}$ si $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, $T(a) = \infty$. Tenemos el diagrama:

$$D_1 \xrightarrow{F} D_2 \xrightarrow{T} T(D_2)$$

$T(D_2)$ es un dominio en \mathbb{C}^* . Como $a \notin D_2$, entonces $T(a) = \infty \notin T(D_2)$. Así que $T(D_2)$ es un dominio en \mathbb{C} conformemente equivalente a D_1 . Luego D_1 es simplemente conexo si y solo si $T(D_2)$ es simplemente conexo. Por el lema anterior, esto es equivalente a que D_2 sea simplemente conexo.

- Supongamos que $\infty \in D_1, D_2$. Se sigue de un razonamiento similar usando el apartado anterior.

□

1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido

Veremos que hay tres clases de equivalencia de dominios simplemente conexos en \mathbb{C}^* : \mathbb{C}^* , \mathbb{C} y el disco unidad $\mathbb{D} = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

\mathbb{C}^* es compacto. Si D es un dominio en \mathbb{C}^* que es conformemente equivalente a \mathbb{C}^* , entonces D es compacto y por tanto cerrado. Como D es abierto, entonces $D = \mathbb{C}^*$.

\mathbb{C} y \mathbb{D} son homeomorfos. Por ejemplo, $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{z}{1-|z|}$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.5. \mathbb{C} y \mathbb{D} no son conformemente equivalentes.

Demostración. Supongamos que existe una aplicación conforme F de \mathbb{C} sobre \mathbb{D} . Entonces $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, F es constante. Esto contradice que F sea una aplicación conforme. □

Proposición 1.6. Sea f entera e inyectiva, entonces f es de la forma

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, el desarrollo de Taylor de f en 0. Entonces ∞ es una singularidad aislada de f y el desarrollo anterior coincide con el desarrollo de Laurent de f en ∞ .

- Si ∞ es una singularidad evitable de f , entonces $a_n = 0$ si $n \geq 1$, así que f es constante. Esto no es posible.
- Si ∞ es un polo de orden N de f , entonces $a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > N$. Luego f es un polinomio de grado N . f' es un polinomio de grado $N-1$, con $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Así que f' es constante, por tanto $N-1 = 0 \Rightarrow N = 1$.
- Si ∞ es una singularidad esencial de f , entonces $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ es denso en \mathbb{C} . Por el teorema de la aplicación abierta, $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$ es abierto en \mathbb{C} . Estos conjuntos son disjuntos por ser f inyectiva, y esto no es posible.

□

Si D es un dominio en \mathbb{C} que es conformemente equivalente a \mathbb{C} , entonces $D = \mathbb{C}$. Veamos que esto es verdad. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ aplicación conforme. f es entera e inyectiva, así que $f(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Luego $D = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Las aplicaciones conformes de \mathbb{C} sobre \mathbb{C} son de la forma:

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0$$

Sea D un dominio en \mathbb{C}^* que es conformemente equivalente a \mathbb{C} .

- Si $\infty \notin D$, entonces D es un dominio en \mathbb{C} conformemente equivalente a \mathbb{C} y, por tanto, $D = \mathbb{C}$.
- Si $\infty \in D$, consideramos $F : \mathbb{C} \rightarrow D$ aplicación conforme. Como sabemos que $D \neq \mathbb{C}^*$, existe $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus D$, de hecho $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Sea

$$T : D \rightarrow T(D), \quad T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$$

Tenemos el diagrama:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{T} T(D) = D'$$

D' es un dominio en \mathbb{C} conformemente equivalente a \mathbb{C} , así que $D' = \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\}$. Por tanto, $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$.

Hemos probado que si D es un dominio en \mathbb{C}^* conformemente equivalente a \mathbb{C} , entonces $D = \mathbb{C}$ o $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Es decir, $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Los dominios en \mathbb{C}^* que son conformemente equivalentes a \mathbb{C} son $\mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Aplicaciones conformes de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^*

Sea $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ aplicación conforme. Sea $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $T(a) = \infty$. Consideramos dos casos:

1. Si $a = \infty$, $T(\infty) = \infty$. $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación conforme, así que $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.
2. Si $a \in \mathbb{C}$, $T(a) = \infty$. T es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, así que a es un polo simple de T . Consideramos el desarrollo de Laurent de T en a .

$$T(z) = \frac{A_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}, \quad A_{-1} \neq 0$$

∞ es una singularidad aislada de T . De hecho, es una singularidad evitable.

Sea $F(z) = T(z) - \frac{A_{-1}}{z - a}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. a es singularidad evitable de F y $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = T(\infty) \in \mathbb{C}$, así que ∞ es una singularidad evitable también. Evitando la singularidad de F en a ,

tenemos que F es entera y acotada. Por tanto F es constante. Así que $F(z) = a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$T(z) = F(z) + \frac{A_{-1}}{z-a} = a_0 + \frac{A_{-1}}{z-a} = \frac{a_0 z + (A_{-1} - a_0 a)}{z-a}$$

En cualquiera de los dos casos, T es de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

No todas las aplicaciones de esta forma son aplicaciones conformes de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^* .

Ejemplo (Contraejemplo). No es una aplicación conforme si $\alpha = \beta = 0$ o (α, β) y (γ, δ) son proporcionales. Por ejemplo:

$$T(z) = \frac{3z+2}{6z+4} = \frac{1}{2}$$

Para que las aplicaciones de esa forma sean aplicaciones conformes de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^* , se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

En el caso (1), $T(z) = Az + B = \frac{Az+B}{0z+1}$, con $A, B \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, luego:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = A \neq 0$$

En el caso (2),

$$\begin{vmatrix} a_0 & A_{-1} - a_0 a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a_0 a - A_{-1} + a_0 a = -A_{-1} \neq 0$$

Teorema 1.7. Las aplicaciones conformes de \mathbb{C}^* en \mathbb{C}^* son de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Demostración. Sea $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ una aplicación de esa forma.

■ Si $\gamma = 0$, entonces:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}, \quad \alpha, \delta \neq 0$$

T es una aplicación conforme de \mathbb{C} sobre \mathbb{C} , con $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$. Definiendo $T(\infty) = \infty$, tenemos que $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una aplicación conforme.

- Si $\gamma \neq 0$, entonces $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\} \\ T\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) &= \infty \\ T(\infty) &= \frac{\alpha}{\gamma} \end{aligned}$$

T es meromorfa en \mathbb{C}^* y T es inyectiva.

Veamos que T es sobreyectiva. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$ y sea $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$.

Entonces:

$$T(z) = w \Leftrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w \Leftrightarrow \alpha z + \beta = \gamma z w + \delta w \Leftrightarrow (\alpha - \gamma w)z = \delta w - \beta \Leftrightarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

Por tanto, T es una aplicación conforme de \mathbb{C}^* sobre \mathbb{C}^* .

Además, hemos probado que T^{-1} es de la forma:

$$T^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}, \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Si $\gamma = 0$, también es válida esta expresión. □

1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad

Teorema 1.8 (Lema de Schwarz). *Sea φ una función holomorfa en \mathbb{D} tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

1. $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
2. $|\varphi'(0)| \leq 1$.

Además, se da la igualdad en (1) para algún $z \in \mathbb{D}$ con $z \neq 0$ o bien se da la igualdad en (2) si y solo si φ es una rotación de \mathbb{D} , es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $\varphi(z) = \lambda z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Observación. Si φ es una rotación, entonces se da la igualdad en (1) para todo $z \in \mathbb{D}$ y se da la igualdad en (2).

Observación. El teorema se puede enunciar de forma equivalente con la condición $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ en lugar de $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Es decir, si φ es holomorfa en \mathbb{D} con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, entonces $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Veamos que esto es cierto. Supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{D}$ con $|\varphi(z_0)| = 1$. Como $|\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por el principio del máximo φ es constante, luego $\varphi \equiv \varphi(0) = 0$. Esto contradice que $|\varphi(z_0)| = 1$.

Sea f holomorfa en \mathbb{D} con $(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Sea $a \in \mathbb{D}$ y $b = f(a) \in \mathbb{D}$. Definimos:

$$\begin{aligned} T_a(z) &= \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, & T_a \in \mathcal{M}, T_a(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, T_a(0) = a \\ S_b(z) &= \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, & S_b \in \mathcal{M}, S_b(\mathbb{D}) &= \mathbb{D}, S_b(b) = 0 \end{aligned}$$

Sea $\varphi = S_b \circ f \circ T_a$. φ es holomorfa en \mathbb{D} , con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $\varphi(0) = 0$. Por el lema de Schwarz,

1. $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
2. $|\varphi(0)| \leq 1$.

Además, se da la igualdad en (1) para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, o bien se da la igualdad en (2) si y solo si φ es una rotación.

Desarrollamos las dos expresiones:

1. Sea $z \in \mathbb{D}$. Consideramos $T_a^{-1}(z) \in \mathbb{D}$.

$$\begin{aligned} |\varphi(T_a^{-1}(z))| &\leq |T_a^{-1}(z)| \Leftrightarrow |S_b(f(z))| \leq |S_a(z)| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left| \frac{f(z)-b}{1-\bar{b}f(z)} \right| &\leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{f(z)-f(a)}{1-\bar{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|, \quad \forall z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Además, si se da la igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq a$, entonces φ es una rotación. Entonces, $f = S_b^{-1} \circ \varphi \circ T_a^{-1} \in \mathcal{M}$, con $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2. Por la regla de la cadena, $\varphi'(0) = T'_a(0)f'(a)S'_b(b)$.

$$\begin{aligned} T'_a(z) &= \frac{1+\bar{a}z-(z+a)\bar{a}}{(1+\bar{a}z)^2}, & T'_a(0) &= 1-|a|^2 \\ S'_b(z) &= \frac{1-\bar{b}z+(z-b)\bar{b}}{(1-\bar{b}z)^2}, & S'_b(b) &= \frac{1-|b|^2}{(1-|b|^2)} = \frac{1}{1-|b|^2} \end{aligned}$$

Así que:

$$\varphi'(0) = (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2}$$

Por tanto:

$$|\varphi'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

Además, si se da la igualdad, entonces φ es una rotación y por tanto $f \in \mathcal{M}$, con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Por tanto, hemos probado lo siguiente:

1. Para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|$$

Si se da la igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$ con $z \neq a$ entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2.

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

Si se da la igualdad entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Teorema 1.9 (Teorema de Schwarz-Pick). *Sea f holomorfa en \mathbb{D} con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

2. Para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Además, se da la igualdad en (1) para algún par de puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ con $z_1 \neq z_2$ o bien se da la igualdad en (2) para algún $z \in \mathbb{D}$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, en cuyo caso se da la igualdad en (1) para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ y se da la igualdad en (2) para todo $z \in \mathbb{D}$.

Proposición 1.10. *Sea $T \in \mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Entonces:*

1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{T(z_2) - T(z_1)}{1 - \overline{T(z_1)}T(z_2)} \right| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

2. Para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Definición 1.5. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, definimos:

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

Observamos que si $1 - \bar{z}_1 z_2 = 0$ entonces $\bar{z}_1 z_2 = 1 \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$. Como esto no ocurre, ρ está bien definida.

La primera parte del teorema de Schwarz-Pick se puede reescribir usando ρ .

Sea f holomorfa en \mathbb{D} con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, se da la igualdad para algún par de puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, en cuyo caso se da la igualdad para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Vamos a ver que ρ es una distancia en \mathbb{D} .

$$\rho : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

- $\rho(z_1, z_2) \geq 0$.
- $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$.
- $\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.
- $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$.

Lema 1.11. Para todo $a, z \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{|z| - |a|}{1 - |a||z|} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}$$

Observamos que si $a, z \in \mathbb{D}$, tenemos:

$$\rho(a, z) = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = |S_a(z)| < 1, \quad S_a \in \mathcal{M}, S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$$

Dados $a \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, denotamos:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

Entonces, dado $z \in \mathbb{D}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} z \in \Delta(a, r) &\Leftrightarrow \rho(z, a) < r \Leftrightarrow |S_a(z)| < r \Leftrightarrow S_a(z) \in D(0, r) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z \in S_a^{-1}(D(0, r)) \Leftrightarrow z \in T_a(D(0, r)) \end{aligned}$$

Entonces $\Delta(a, r) = T_a(D(0, r))$.