

# Ampliación de teoría de la probabilidad

3 de noviembre de 2022

# Índice general

<b>1. Función de distribución</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Propiedades . . . . .	2
1.3. Convolución en funciones de distribución . . . . .	5
1.4. Convergencia en distribución . . . . .	11
<b>2. Función característica</b>	<b>20</b>
2.1. Propiedades . . . . .	21
2.2. Teorema de inversión . . . . .	22
2.3. Momentos . . . . .	25

# Capítulo 1

## Función de distribución

### 1.1. Introducción

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad, donde  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad.

Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

para todo  $B \in \mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel.  $X$  induce una medida en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ :

$$P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

**Definición 1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad. Sean  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  y  $P_X$  la medida de probabilidad inducida por  $X$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . La función de distribución asociada a  $X$  es:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F(a) = P_X((-\infty, a]) = P(X \leq a)$$

*Nota.* Variables aleatorias distintas pueden tener la misma función de distribución.

### 1.2. Propiedades

Sea  $F$  la función de distribución asociada a una variable aleatoria  $X$ . Entonces:

- $F$  es creciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

- $F$  es continua por la derecha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Existe  $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-) = F(x) - P_X(\{x\})$

**Teorema 1.1** (Teorema de correspondencia). *Si  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es una función que verifica:*

- $F$  es creciente.
- $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$
- $F$  es continua por la derecha.

*Entonces existe una única medida de probabilidad  $P_F$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tal que  $F$  es su función de distribución. Es decir, tal que  $F(a) = P_F((-\infty, a])$ .*

**Definición 1.2.** Sea  $F$  función de distribución. El conjunto de discontinuidad de  $F$  se define como:

$$C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq F(x^-)\}$$

También se puede definir el conjunto de puntos de discontinuidad de  $F$  como:

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

*Observación.*  $D(F) = C(\bar{F})$ .

**Proposición 1.2.**  $D(F)$  es a lo sumo numerable.

**Corolario 1.3.**  $C(F)$  es denso en  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 1.4.** Sean  $F$  y  $G$  funciones de distribución tales que  $F(x) = G(x)$  para todo  $x \in E \subset \mathbb{R}$ , con  $E$  denso en  $\mathbb{R}$ . Entonces  $F(x) = G(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.3.** La función de masa de probabilidad se define como:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad p(x) = P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$$

**Definición 1.4.** Sea  $X$  variable aleatoria con función de distribución  $F$  y función de masa  $p$ . Entonces:

- $X$  es discreta cuando  $\sum_{x \in D(F)} p(x) = 1$ .
- $X$  es continua cuando  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

En otro caso,  $X$  es mixta.

**Definición 1.5.** Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  variable aleatoria.  $X$  es singular si existe  $B \in \mathcal{B}$  con  $m(B) = 0$  tal que  $P_X(B) = 1$ .

*Observación.* Las variables aleatorias discretas son singulares.

**Definición 1.6.** Sea  $X$  variable aleatoria.  $X$  es absolutamente continua si para cualquier  $B \in \mathcal{B}$  con  $m(B) = 0$  se tiene que  $P_X(B) = 0$ .

**Teorema 1.5.** Sea  $F$  función de distribución.  $F$  es absolutamente continua si y solo si existe una función medible  $f$  no negativa y finita tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b$$

La función  $f$  se llama función de densidad.

*Observación.*  $F$  es continua cuando no hay saltos y absolutamente continua cuando tiene una densidad.

**Teorema 1.6** (Mixtura de distribuciones). Toda función de distribución  $F$  se puede descomponer de la forma:

$$F = \alpha F_d + (1 - \alpha) F_c, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

donde  $F_d$  es la función de distribución de una variable aleatoria discreta y  $F_c$  de una continua.

**Ejemplo.** Consideramos la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{5}{8} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{4x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Estudiamos sus puntos de discontinuidad y la probabilidad en ellos.

$$D(F) = \{4, 5\}, \quad \begin{cases} p(4) = F(4) - F(4^-) = \frac{1}{8} \\ p(5) = F(5) - F(5^-) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

Luego la función de distribución discreta es:

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Por último podemos calcular la función de distribución continua:

$$F_c(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \left( F(x) - \frac{1}{4} F_d(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{5x}{24} - \frac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{3x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

**Lema 1.7.** Sea  $F$  función de distribución. Entonces:

- Existe  $F'$  en casi todo punto y es no negativa y finita.
- $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a), \quad a < b$
- Siendo  $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$  y  $F_s(x) = F(x) - F_{ac}(x)$ , entonces  $F'_{ac}(x) = F'(x)$  en casi todo punto y  $F'_s(x) = 0$ .

**Teorema 1.8** (Descomposición de Lebesgue). Toda función de distribución  $F$  se puede descomponer de la forma:

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)F_s$$

con  $F_{ac}$  función de distribución absolutamente continua y  $F_s$  singular.

*Observación.* Se pueden aplicar ambas descomposiciones (continua-discreta y Lebesgue) a una función de distribución  $F$ .

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)(\alpha F_d + (1 - \alpha)F_{cs})$$

**Definición 1.7** (Esperanza). Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . La esperanza de  $X$  se define como:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

*Observación.*

- Si  $F$  es absolutamente continua,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

- Si  $F$  es discreta,

$$E(X) = \sum_{x \in D(F)} x p(x)$$

### 1.3. Convolución en funciones de distribución

**Definición 1.8.** Sean  $F$  y  $G$  funciones de distribución. Definimos la convolución de  $F$  y  $G$  como la función definida por:

$$(F * G)(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z - y) dG(y), \quad z \in \mathbb{R}$$

*Nota.* La convolución es conmutativa con funciones medibles no negativas.

**Proposición 1.9.**  $F * G$  es una función de distribución.

**Teorema 1.10.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes con funciones de distribución  $F_X$  y  $F_Y$  respectivamente. Entonces  $F_X * F_Y$  es la función de distribución de la variable aleatoria  $X + Y$ .

**Teorema 1.11.** Si  $F$  es absolutamente continua con densidad  $f$ , entonces  $F * G$  es absolutamente continua con densidad

$$(f * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y) dG(y)$$

**Teorema 1.12.** Si  $F$  y  $G$  son absolutamente continuas con densidades  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces  $F * G$  es absolutamente continua con densidad  $f * g$ .

**Ejemplo.** Sean  $X, Y \sim U([0, 1])$ . Sus funciones de distribución son:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Sea  $Z = X + Y$  y  $z \in \mathbb{R}$ . Como  $X$  e  $Y$  son absolutamente continuas,  $Z$  es absolutamente continua. Queremos calcular:

$$F_Z(z) = (F_X * F_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Consideramos todos los casos:

- Si  $z < 0$  entonces  $z - y < 0$  para todo  $y \in [0, 1]$ . Luego  $F_X(z - y) = 0$ , así que  $F_Z(z) = 0$ .
- Si  $0 \leq z < 1$  distinguimos dos casos:
  - Si  $0 \leq y < z$  entonces  $0 < z - y < 1$ , así que  $F_X(z - y) = z - y$ .
  - Si  $z \leq y < 1$  entonces  $z - y < 0$ , luego  $F_X(z - y) = 0$ .

$$F_Z(z) = \int_0^z (z - y) dy + \int_z^1 0 dy = \frac{z^2}{2}$$

- Si  $1 \leq z < 2$  de nuevo distinguimos dos casos:
  - Si  $0 \leq y < z - 1$  entonces  $z - y \geq 1$ , luego  $F_X(z - y) = 1$ .
  - Si  $z - 1 \leq y < 1$  entonces  $0 \leq z - 1 < 1$ , así que  $F_X(z - y) = z - y$ .

$$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1 dy + \int_{z-1}^1 (z - y) dy = 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

- Si  $z \geq 2$  entonces  $z - y \geq 1$  para todo  $y \in [0, 1]$ . Luego  $F_X(z - y) = 1$ , de forma que  $F_Z(z) = \int_0^1 1 dx = 1$ .

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 2z - \frac{z^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim U([-1, 1])$  y sea  $Y$  absolutamente continua con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{4} & \text{si } -2 \leq y < 0 \\ \frac{2-y}{4} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabemos que  $X$  es absolutamente continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea  $Z = X + Y$ . Como  $X$  e  $Y$  son absolutamente continuas,  $Z$  es absolutamente continua con función de densidad  $f * g$ .

$$(f_X * f_Y)(z) = (f_Y * f_X)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx$$

Sabemos que  $S_X = [-1, 1]$  y  $S_Y = [-2, 2]$ , así que  $S_Z = [-3, 3]$ . Consideramos los casos:

- Si  $z < -3$  entonces  $z-x < 2$  para todo  $x \in [-1, 1]$ . Luego  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .
- Si  $-3 \leq z < -1$  distinguimos dos casos:
  - Si  $-1 \leq x < z+2$  entonces  $-2 \leq z-x < 0$ , así que  $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$ .
  - Si  $z+2 \leq x < 1$  entonces  $z-x < -2$ , luego  $f_Y(z-x) = 0$ .

$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z+2} \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z+3)^2}{16}$$

- Si  $-1 \leq z < 1$  distinguimos dos casos:
  - Si  $-1 \leq x < z$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , así que  $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$ .
  - Si  $z \leq x < 1$  entonces  $-2 \leq z-x < 0$ , luego  $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$ .

$$f_Z = \int_{-1}^z \frac{2-z+x}{4} \frac{1}{2} dx + \int_z^1 \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{3-z^2}{8}$$

- Si  $1 \leq z < 3$  distinguimos dos casos:
  - Si  $-1 \leq x < z-2$  entonces  $z-x \geq 2$ , luego  $f_Y(z-x) = 0$ .



- Si  $z - 2 \leq x < 1$  entonces  $0 \leq z - x < 2$ , así que  $f_Y(z - x) = \frac{2 - z + x}{4}$ .

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{2 - z + x}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z - 3)^2}{16}$$

- Si  $z \geq 3$  entonces  $z - x \geq 2$  para todo  $x \in [-1, 1]$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{(z+3)^2}{16} & \text{si } -3 \leq z < -1 \\ \frac{3-z^2}{8} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{(z-3)^2}{16} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

**Ejemplo.** Sean  $X, Y$  variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que  $Y$  es absolutamente continua y  $X$  es mixta, así que  $Z = X + Y$  es absolutamente continua. Queremos calcular la función de densidad de  $Z$ . Como  $F_X$  es discontinua en 1,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - x) dF_X(x) = \int_{-2}^1 f_Y(z - x) f_X(x) dx + f_Y(z - 1) p_X(1)$$

*Nota.* Para no lidiar con discontinuidades, también se podría calcular:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Calculamos las funciones de densidad, pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$S_X = [-2, 1]$  y  $S_Y = [0, 2]$ , así que  $S_Z = [-2, 3]$ . Consideramos los casos:

- Si  $z < -2$  entonces  $z - x < 0$  para todo  $x \in [-2, 1]$ . Luego  $f_Y(z - x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .
- Si  $-2 \leq z < 0$  entonces  $0 \leq z - x \leq 2$ , así que  $f_Y(z - x) = \frac{1}{2}$  y  $f_X(x) = \frac{1}{4}$ .

$$f_Z(z) = \int_{-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx = \frac{z + 2}{8}$$

- Si  $0 \leq z \leq 1$ ,  $f_Y(z-1) = 0$ . Distinguimos tres casos:
  - Si  $-2 \leq x < z-2$  entonces  $z-x > 2$ . Luego  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .
  - Si  $z-2 \leq x < z$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ . Así que  $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$  y  $f_X(x) = \frac{1}{4}$ .
  - Si  $z \leq x \leq 1$  entonces  $z-x \leq 0$ . Luego  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .

$$f_Z(z) = \int_{-2}^{z-2} 0dx + \int_{z-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \int_z^1 0dx + 0p_x(1) = \frac{1}{4}$$

- Si  $1 < z \leq 3$ ,  $f_Y(z-1) = \frac{1}{2}$  y  $p_X(1) = \frac{1}{4}$ . Distinguimos dos casos:
  - Si  $-2 \leq x < z-2$  entonces  $z-x \geq 2$ , así que  $f_Y(z-x) = 0$ .
  - Si  $z-2 \leq x < 1$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , luego  $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$  y  $f_X(x) = \frac{1}{4}$ .

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{4-z}{8}$$

- Si  $z \geq 3$  entonces  $f_Y(z-x) = 0$ , así que  $f_Z(z) = 0$ .

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z+2}{8} & \text{si } -2 \leq z < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{4-z}{8} & \text{si } 1 < z \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

**Ejercicio.** Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2y}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ \frac{5}{7} & \text{si } 2 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$$

Observamos que  $X$  es una variable aleatoria mixta con funciones de pseudodensidad y de masa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$Y$  también es mixta con pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } y = 2 \\ \frac{2}{7} & \text{si } y = 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea  $Z = X + Y$ , queremos calcular  $F_Z$ . Observamos que  $S_X = [-1, 1) \cup \{1\} = [-1, 1]$  y  $S_Y = [0, 2) \cup \{2\} \cup \{4\} = [0, 2] \cup \{4\}$ . Por tanto,  $S_Z = [-1, 5]$ . Calculamos:

$$F_Z = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) dF_X(x) = \int_{-1}^1 F_Y(z-x) f_X(x) dx + F_Y(z-1) p_X(1)$$

Consideramos los casos:

- Si  $z < -1$ ,  $F_Z(z) = 0$ .
- Si  $-1 \leq z < 1$ , consideramos tres casos:
  - Si  $-1 \leq x < z$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , luego  $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$ .
  - Si  $z \leq x < 1$  entonces  $z-x < 0$ , así que  $F_Z(z) = 0$ .
  - Si  $x = 1$  entonces  $z-1 < 0$ , luego  $F_Z(z) = 0$ .

$$F_Z(z) = \int_{-1}^z \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx = \frac{(z+1)^2}{21}$$

- Si  $1 \leq z < 3$ , consideramos tres casos:
  - Si  $-1 \leq x < z-2$  entonces  $2 \leq z-x < 4$ , así que  $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$ .
  - Si  $z-2 \leq x < 1$  entonces  $0 \leq z-x < 2$ , luego  $F_Y(z-x) = \frac{2(z-x)}{7}$ .
  - Si  $x = 1$  entonces  $0 \leq z-1 < 2$ , así que  $F_Y(z-1) = \frac{2(z-1)}{7}$ .

$$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-2} \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \int_{z-2}^1 \frac{2(z-x)}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{2(z-1)}{7} \frac{1}{3} = \frac{-z^2 + 9z - 4}{21}$$

- Si  $3 \leq z < 5$ , consideramos tres casos:
  - Si  $-1 \leq x < z-4$  entonces  $z-x \geq 4$ , luego  $F_Y(z-x) = 1$ .
  - Si  $z-4 \leq x < 1$  entonces  $2 \leq z-x < 4$ , así que  $F_Y(z-x) = \frac{5}{7}$ .
  - Si  $x = 1$  entonces  $2 \leq z-1 < 4$ , luego  $F_Y(z-1) = \frac{5}{7}$ .

$$F_Z(z) = \int_{-1}^{z-4} 1 \frac{1}{3} dx + \int_{z-4}^1 \frac{5}{7} \frac{1}{3} dx + \frac{5}{7} \frac{1}{3} = \frac{2z+9}{21}$$

- Si  $z \geq 5$ ,  $F_Z(z) = 1$ .

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \\ \frac{(z+1)^2}{21} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{-z^2+9z-4}{21} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ \frac{2z+9}{21} & \text{si } 3 \leq z < 5 \\ 1 & \text{si } z \geq 5 \end{cases}$$

## 1.4. Convergencia en distribución

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $X_n$  una variable aleatoria en  $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ .  $\{X_n\}_n$  tiene una sucesión asociada  $\{F_n\}_n$  de funciones de distribución.

**Definición 1.9.** Sean  $F$  y  $F_n$  funciones de distribución. Decimos que la sucesión  $\{F_n\}_n$  converge a  $F$  débilmente cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

**Ejemplo.** Sea  $X_n \sim \delta(\frac{1}{n})$ , es decir,  $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ . Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculamos el límite puntual de la sucesión:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aunque  $\{F_n\}_n$  converge puntualmente a  $F$ , observamos que  $F$  no es continua por la derecha. Así que  $F$  no es función de distribución y no puede ser el límite débil de la sucesión. Definimos:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$G$  es función de distribución y además  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$  para todo  $x \in C(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , luego  $F_n \xrightarrow{d} G$ . Es función de distribución de una variable aleatoria  $\delta(0)$ .

**Ejemplo.** Sea  $Y_n \sim \delta(-\frac{1}{n})$ . Procedemos de forma análoga al ejemplo anterior. Su función de distribución es:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } y \geq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

y su límite puntual es:

$$F_Y(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

En este caso el límite puntual  $F_Y$  sí es función de distribución, así que el límite puntual coincide con el límite débil.

$$F_{Y_n} \xrightarrow{d} F_Y$$

**Teorema 1.13.** *El límite débil de una sucesión de funciones de distribución es único en caso de existir.*

**Ejemplo.** Sea  $X_n \sim U([-1/n, 1/n])$ . Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{nx+1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

El límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$F$  no es función de distribución porque no es continua por la derecha en  $x = 0$ . Definimos entonces:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$G$  es función de distribución y  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$  para todo  $x \in C(G)$ , así que  $F_n \xrightarrow{d} G$ .

**Ejemplo.** Consideramos la sucesión de funciones de distribución  $\{F_n\}_n$ , con

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos descomponer  $F_n$  como mixtura de distribuciones de la forma  $F_n = \alpha F_n^d + (1 - \alpha) F_n^c$ . Calculamos el valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = \sum_{x \in D(F_n)} p(x) = p(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, las funciones de distribución son:

$$F_n^d(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{t \leq x, t \in D(F_n)} p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_n^c(x) = \frac{1}{1 - \alpha} (F_n(x) - \alpha F_n^d(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^c(x) = 0$$

Observamos que  $F = \alpha F^d + (1 - \alpha) F^c$ .

**Definición 1.10.** La sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_n$  converge en distribución a otra variable aleatoria  $X$  cuando  $F_n \xrightarrow{d} F$ , siendo  $F_n$  y  $F$  las funciones de distribución asociadas a  $X_n$  y  $X$ , respectivamente. Se escribe  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

**Ejercicio.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad, donde:

$$\Omega = [0, 3], \quad \mathcal{A} = \{B \cap [0, 3] : B \in \mathcal{B}\}$$

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad P(A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A = \{0\} \\ 0 & \text{si } A \subset (0, 1) \\ \frac{m(A)}{6} & \text{si } A \subset [1, 3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } A = \{3\} \end{cases}$$

Sobre este espacio definimos para  $n \in \mathbb{N}$  las variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega-1}{n\omega+1} & \text{si } 0 \leq \omega < 1 - \frac{1}{n} \\ 2 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq \omega < 3 - \frac{1}{n} \\ n(\omega - 3) & \text{si } 3 - \frac{1}{n} \leq \omega \leq 3 \end{cases}$$

$\{X_n\}_n$  es una sucesión de variables aleatorias.

1. **Determinar los puntos de discontinuidad y sus masas.** Sabemos que  $x$  es punto de discontinuidad de  $F_n$  si  $F_n(x) - F_n(x^-) > 0$ , es decir,  $P_{X_n}(\{x\}) > 0$ . En primer lugar estudiamos las imágenes por  $X_n$  de los puntos con masa en la definición de  $P$ . En este caso, estos puntos son 0 y 3, con imágenes  $X_n(0) = -1$  y  $X_n(3) = 0$ .

$$P_{X_n}(-1) = P(X_n^{-1}(-1)) = P(\{0\} \cup \{3 - \frac{1}{n}\}) = \frac{1}{6}$$

$$P_{X_n}(0) = P(X_n^{-1}(0)) = P(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

Además, estudiamos los puntos cuya imagen inversa es un intervalo, es decir, donde  $X_n$  es constante.

$$P_{X_n}(2) = P([1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})) = P([1, 3 - \frac{1}{n})) = \frac{2n-1}{6n}$$

Así que  $D = \{-1, 0, 2\}$ .

2. **Calcular la función de distribución  $F_n$  asociada a  $X_n$ .** Recordamos que la función de distribución  $F_n$  asociada a una variable aleatoria  $X_n$  se define como:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Distinguimos varios casos:

- Si  $x < -1$ ,  $F_n(x) = P(\emptyset) = 0$ .

- Si  $-1 \leq x < -\frac{1}{n^2}$ ,

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P([0, \alpha] \cup [3 - \frac{1}{n}, \beta])$$

donde:

$$X_n(\alpha) = x \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{n\alpha + 1} = x \Leftrightarrow \alpha = \frac{x + 1}{1 - nx}$$

$$X_n(\beta) = x \Leftrightarrow n(\beta - 3) = x \Leftrightarrow \beta = \frac{x + 3n}{n}$$

Así que

$$F_n(x) = P([0, \frac{x+1}{1-nx}] \cup [3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si  $-\frac{1}{n^2} \leq x < 0$ ,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n}]) + P([3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si  $0 \leq x < 2$ ,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n}]) + P([3 - \frac{1}{n}, 3]) + P(\{3\}) = \frac{4n+1}{6n}$$

- Si  $X \geq 2$ ,  $F_n(x) = 1$ .

Por tanto,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1+n}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{4n+1}{6n} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. **Analizar la convergencia en distribución de  $\{X_n\}$**  Sabemos que  $X_n \xrightarrow{d} X$  cuando  $F_n \xrightarrow{d} F$ . Tomamos el límite puntual en  $\{F_n\}$ .

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$F$  es continua por la derecha y  $D(F) = \{-1, 0, 2\}$  con  $p_X(-1) = \frac{1}{6}$ ,  $p_X(0) = \frac{1}{2}$  y  $p_X(2) = \frac{1}{3}$ . Observamos que estas masas coinciden con los límites cuando  $n \rightarrow \infty$  de las masas de los puntos de discontinuidad de  $X_n$ . Por tanto,  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

**Lema 1.14.** Sean  $F_n$  y  $F$  funciones de distribución.  $F_n \xrightarrow{d} F$  si y solo si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x) \quad y \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \geq F(x^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Teorema 1.15** (Helly-Bray). Sean  $F_n$  y  $F$  funciones de distribución.  $F_n \xrightarrow{d} F$  si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

para toda función  $g$  real, continua y acotada.

*Observación.* En general, el teorema de Helly-Bray no implica que  $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X)$  porque  $g(x) = x$  no siempre está acotada.

**Ejemplo.** Sean  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que  $G$  no es función de distribución. Definimos entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$F$  es función de distribución así que  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

Sea  $g(x) = I_{(0,2]}(x)$ , veamos si  $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$ .

$$\begin{aligned} E(g(X_n)) &= E(I_{(0,2]}(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} I_{(0,2]}(x) dF_n(x) = \int_0^2 dF_n(x) = \\ &= F_n(2) - F_n(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \\ E(g(X)) &= \int_0^2 dF(x) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Observamos que  $E(g(X_n))$  no tiende a  $E(g(X))$  con  $n \rightarrow \infty$ . No se cumplen las hipótesis del teorema de Helly-Bray porque  $g$  no es continua.

Sea ahora  $g(x) = x$ . Queremos calcular  $E(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$ . Como  $F_n$  es mixta, hallamos primero las masas de sus puntos de discontinuidad y su función de pseudodensidad:

$$D(F_n) = \{0, \frac{2}{n}\}, \quad p(0) = \frac{1}{4}, \quad p(\frac{2}{n}) = \frac{1}{4}$$

$$f_n(x) = F'_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{1}{4} + \frac{2}{n} \frac{1}{4} + \int_{-1}^0 \frac{x}{2n} dx + \int_{\frac{2}{n}}^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Procedemos de forma análoga para  $F$ .

$$D(F) = \{0\}, \quad p(0) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(g(X)) = 0 \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2}$$

Luego en este caso  $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$ . Se verifica el teorema de Helly-Bray porque  $g(x) = x$  está acotada en los soportes de  $f_n$  y  $f$ , que son acotados.

**Ejemplo.** Sea  $n \in \mathbb{R}$ , consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Es claro que:

$$F_n \xrightarrow{d} \delta(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea  $g(x) = x$ , procedemos igual que en el ejemplo anterior.

$$D(F_n) = \{0, n\}, \quad p(0) = \frac{n-1}{n}, \quad p(n) = \frac{1}{n}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{n-1}{n} + n \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$E(g(X)) = E(\delta(0)) = 0 \neq 1$$

No se cumplen las hipótesis del teorema porque  $g$  no está acotada en el soporte, ya que no está acotado.

**Definición 1.11.** Una función  $F$  es función de distribución impropia si verifica:

- $F$  es creciente.
- $F$  es continua por la derecha.
- Existe  $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- $F(-\infty) > 0$  o  $F(\infty) < 1$ .

**Definición 1.12.** Sea  $\{F_n\}$  una sucesión de funciones de distribución y sea  $F$  una función de distribución propia o impropia. Decimos que  $\{F_n\}$  converge de forma vaga o vagamente a  $F$  si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe  $F_n \xrightarrow{v} F$ .

*Observación.* Convergencia débil implica convergencia vaga.

**Ejemplo.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

El límite puntual de  $\{F_n\}$  es:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$G$  es una función de distribución impropia. Por tanto,  $F_n \xrightarrow{v} G$ .

**Ejemplo.** Consideramos la función de distribución:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Definimos:

$$F_n(x) = F_0(x+n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x+n < 2 \\ 1 & \text{si } x+n \geq 2 \end{cases}$$

El límite puntual de  $F_n(x)$  es  $F(x) = 1$ , que es una función de distribución impropia. Por tanto,  $F_n \xrightarrow{v} F$ .

**Ejercicio.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espacio de probabilidad con:

$$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\omega) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!}, \quad \omega \in \mathbb{N}, \lambda > 0$$

Consideramos la sucesión de variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = e^{n\omega}$$

Observamos que  $x = e^{n\omega} \Leftrightarrow \omega = -\frac{\log(x)}{n}$ , con  $x > 0$ .

$$P(X_n^{-1}(x)) = P\left(-\frac{\log(x)}{n}\right) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{-\frac{\log(x)}{n}}}{\left(-\frac{\log(x)}{n}\right)!} & \text{si } -\frac{\log(x)}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calculamos la función de distribución de  $X_n$ :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n^{-1}((-\infty, x])) = P(X_n^{-1}([0, x])) = P(X_n^{-1}([0, e^{-nk}])) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \omega \geq k\}) = 1 - P(\{\omega \in \Omega : \omega < k\}) = 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sum_{\omega=0}^{k-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\omega}{\omega!} & \text{si } e^{-nk} \leq x < e^{-n(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \vdots & \\ 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda) & \text{si } e^{-2n} \leq x < e^{-n} \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } e^{-n} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Observamos que  $F_n(x)$  tiene como límite puntual:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$G$  no es función de distribución. Podemos definir:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como  $F$  sí es función de distribución,  $F_n \xrightarrow{d} F$ .

**Teorema 1.16.** *Supongamos que  $F_n \xrightarrow{v} F$  con  $F$  función de distribución impropia. Sea  $g$  real y continua en  $[a, b]$ , con  $a, b \in C(F)$ . Entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} g(x) dF_n(x) = \int_{[a, b]} g(x) dF(x)$$

**Teorema 1.17.** *Supongamos que  $F_n \xrightarrow{v} F$  con  $F$  función de distribución impropia. Sea  $g$  real y continua con  $g(\infty) = g(-\infty) = 0$ . Entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

**Lema 1.18.** *Una sucesión  $\{F_n\}_n$  converge vagamente si y solo si converge en algún conjunto denso  $D \subset \mathbb{R}$ .*

**Teorema 1.19** (Principio de selección de Helly). *Toda sucesión  $\{F_n\}_n$  de funciones de distribución tiene una subsucesión que converge vagamente.*

**Definición 1.13.** Sea  $\mathcal{H}$  una familia de funciones de distribución.  $\mathcal{H}$  es ajustada si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a > 0$  tal que:

$$P_F((-a, a]) > 1 - \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

Equivalentemente,

$$P_F((-\infty, -a] \cup (a, \infty)) < \varepsilon, \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

**Definición 1.14.**  $\mathcal{H}$  es relativamente compacta si cada  $\{F_n\}_n$  con  $F_n \in \mathcal{H}$  tiene una subsucesión convergente.

**Teorema 1.20** (Prokhorov).  *$\mathcal{H}$  es relativamente compacta si y solo si es ajustada.*

**Teorema 1.21.** *Sea  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión ajustada. Si todas sus subsucesiones convergentes tienen el mismo límite  $F$ , entonces  $F_n \xrightarrow{d} F$ .*

## Capítulo 2

# Función característica

**Definición 2.1.** Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de distribución  $F$ . La función característica asociada a  $X$  es:

$$\begin{aligned}\varphi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)\end{aligned}$$

*Observación.* Usando que  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ , podemos escribir:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) dF(x)$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim \delta(a)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{ita} P(X = a) = e^{ita}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim Bi(n, p)$ , con  $n \geq 0$  y  $0 \leq p \leq 1$ . Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim Po(\lambda)$ . Su función característica es:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}\end{aligned}$$

*Observación.*

$$\varphi_{Bi}(x) = (pe^{it} + 1 - p)^n = \left(1 + \frac{np(e^{it} - 1)}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{np \rightarrow \lambda} e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi_{Po}(t)$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim U([0, 1])$ . Su función característica es:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

**Ejemplo.** Sea  $X \sim N(0, 1)$ . Su función característica es:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x^2 - 2itx)}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{x^2 - t^2 - 2it}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

*Nota.*  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

## 2.1. Propiedades

Veamos las propiedades más importantes de las funciones características. Sea  $\varphi$  la función característica de una variable aleatoria  $X$ . Entonces:

1.  $\varphi(0) = 1$ .

$$E(e^{i0X}) = E(1) = 1$$

2.  $|\varphi(t)| \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

$$|\varphi(t)| = |E(e^{itX})| \leq E|e^{itX}| = E|\cos(tx) + i\sin(tx)| = 1$$

3.  $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(-t) &= E(e^{itX}) = E(\cos(-tx) + i\sin(-tx)) = \\ &= E(\cos(tx)) - iE(\sin(tx)) = \overline{E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))} = \\ &= \overline{E(\cos(tx) + i\sin(tx))} = \overline{\varphi(t)} \end{aligned}$$

4.  $\varphi$  es función definida positiva, es decir,

$$\sum_{k,j=1}^n z_k \varphi(t_j - t_k) \overline{z_j} \geq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

Además,

- $\varphi \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$  es simétrica.

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} = \varphi(t)$$

- Sea  $Y = a + bX$ . Entonces:

$$\varphi_Y(t) = E(e^{it(a+bX)}) = e^{ita} E(e^{itbX}) = e^{ita} \varphi_X(bt)$$

**Teorema 2.1.**  $\varphi$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

## 2.2. Teorema de inversión

**Teorema 2.2** (Teorema de inversión). Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de distribución  $F$  y función característica  $\varphi$ . Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , entonces:

$$\frac{F(b) + F(b^-)}{2} - \frac{F(a) + F(a^-)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$$

**Corolario 2.3.** Sea  $X$  variable aleatoria en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  con función de distribución  $F$  y función característica  $\varphi$ . Sean  $a, b \in C(F)$  con  $a < b$ , entonces:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt$$

**Teorema 2.4** (Unicidad). Sean  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias, con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  y funciones características  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  respectivamente. Entonces:

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

**Teorema 2.5.** Existe  $k \in (0, \infty)$  tal que para todo  $a > 0$  y toda medida de probabilidad  $P_F$  se tiene que:

$$P_F \left( \left[ -\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right]^c \right) \leq \frac{k}{a} \int_0^a (1 - \operatorname{Re}(\varphi_F(t))) dt$$

donde  $\varphi_F$  es la función característica asociada a  $P_F$ .

**Corolario 2.6.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias  $X_n$  con  $F_n$ ,  $P_{F_n}$  y  $\varphi_{F_n}$ . Supongamos que:

1. Existe  $\delta > 0$  tal que  $\varphi_{F_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t)$  para todo  $t \in [-\delta, \delta]$ , siendo  $\varphi$  una función.
2.  $\varphi$  es continua en 0.

Entonces  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión ajustada. Es decir,  $\{F_n\}$  forma una familia ajustada.

**Ejercicio.** Sea  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{si } |x| \leq a, a > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos su función característica  $\varphi$ .

Como  $f$  es simétrica, sabemos que  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = \\ &= \int_{-a}^a \cos(tx) f(x) dx + \int_{-a}^a \sin(tx) f(x) dx = 2 \int_0^a \cos(tx) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{2(1 - \cos(at))}{a^2 t^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{at}{2}\right)}{\left(\frac{at}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que  $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$ .

**Ejercicio.** Sea  $X$  con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

Calculemos su función característica  $\varphi_X$ .

Para facilitar los cálculos, consideramos la variable estandarizada  $Y = \frac{X-\alpha}{\beta}$  y calculamos  $\varphi_Y$ . Para ello, hallamos primero  $F_Y$  y  $f_Y$ :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-\alpha}{\beta} \leq y\right) = P(X \leq \beta y + \alpha) = F_X(\beta y + \alpha) \\ f_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\beta y + \alpha) \beta = f_X(\beta y + \alpha) \beta = \frac{1}{2} e^{-|y|} \end{aligned}$$

Observamos que  $f_Y$  es simétrica, así que  $\varphi_Y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \int_{\mathbb{R}} (\cos(ty) + i \sin(ty)) \frac{1}{2} e^{-|y|} dy = \\ &= \int_0^\infty \cos(ty) e^{-y} dy = \frac{1}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\varphi_X(t) = e^{it\alpha} \varphi_Y(\beta t) = \frac{e^{it\alpha}}{1 + \beta^2 t^2}$$



También se puede ver que  $Y = Y_1 - Y_2$ , con  $Y_i \sim \text{Exp}(1)$  independientes. De esta forma:

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= E(e^{itY}) = E(e^{it(Y_1 - Y_2)}) = E(e^{itY_1})E(e^{-itY_2}) = \varphi_{Y_1}(t)\varphi_{Y_2}(-t) = \\ &= \varphi_{Y_1}(t)\overline{\varphi_{Y_2}(t)} = \frac{1}{1 - it} \frac{1}{1 + it} = \frac{1}{1 + t^2}\end{aligned}$$

**Teorema 2.7** (Teorema de continuidad de Lévy). *Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  y sean  $\varphi_n$  las funciones de distribución asociadas. Supongamos que existe una función  $\varphi$  tal que:*

1.  $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\varphi$  es continua en 0.

Entonces  $X_n \xrightarrow{d} X$ , donde  $X$  es la variable aleatoria con función característica  $\varphi$ .

**Teorema 2.8.** *Una sucesión  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  es ajustada si y solo si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Re}(1 - \varphi_n(t)) \right) = 0$$

*Observación* (Teorema central del límite de De Moivre). Sean  $X_n \sim \text{Bi}(n, p)$ . Sabemos que  $E(X_n) = np$  y  $V(X_n) = npq$ , con  $q = 1 - p$ . Consideramos:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X_n - np}{\sigma_n}$$

Veamos que  $Z_n \xrightarrow{d} Z$ .

Calculamos:

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= E(e^{itZ_n}) = E(e^{it \frac{X_n - np}{\sigma_n}}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} E(e^{\frac{it}{\sigma_n} X_n}) = e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) = \\ &= e^{-\frac{itnp}{\sigma_n}} (pe^{i \frac{t}{\sigma_n}} + q)^n = (pe^{i \frac{t}{\sigma_n} q} + qe^{-i \frac{t}{\sigma_n} p})^n\end{aligned}$$

Se puede comprobar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (pe^{i \frac{t}{\sigma_n} q} + qe^{-i \frac{t}{\sigma_n} p})^n = e^{-\frac{t^2}{n}} = \varphi_Z(t)$$

con  $Z \sim N(0, 1)$ .

Por el teorema de continuidad de Lévy,  $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$ .

## 2.3. Momentos

Recordamos los momentos de una variable aleatoria  $X$ .

- Momento de orden  $n$ :  $E(X^n)$ .
- Momento central de orden  $n$ :  $E((X - E(X))^n)$ .
- Momento absoluto de orden  $n$ :  $E(|X|^n)$ .
- Momento central absoluto de orden  $n$ :  $E(|X - E(X)|^n)$ .

**Proposición 2.9.** Si  $E(|X|^p) < \infty$  para algún  $n \geq 1$ , entonces:

$$E(X^r), E(|X|^r) < \infty, \quad 0 < r \leq n$$

**Definición 2.2.** El espacio  $L^p$  es el conjunto de las variables  $X$  tales que  $E(|X|^p) < \infty$ .

$$L^p = \left\{ X \text{ variable aleatoria} : \int |X|^p dF(x) < \infty \right\}$$

$(L^p, \|\cdot\|_p)$  es un espacio normado, con  $\|X\|_p = (E(|X|^p))^{1/p}$ ,  $X \in L^p$ .

**Teorema 2.10.** Sea  $X \in L^n$  para algún  $n \geq 1$  y con función característica  $\varphi$ . Entonces existen las derivadas  $\varphi^{(k)}$  con  $k = 1, \dots, n$  y son uniformemente continuas. Además,

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} dF(x)$$

y  $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$ . Así que  $\varphi$  se puede expresar como:

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + O(t^{n+1})$$

**Proposición 2.11.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes con funciones de distribución  $\varphi_X$  y  $\varphi_Y$  respectivamente. Entonces la función característica de  $S = X + Y$  es  $\varphi_S(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ .

En general, si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes, la función característica de  $S = X_1 + \dots + X_n$  es:

$$\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

Si además  $X_1, \dots, X_n$  son igualmente distribuidas, entonces  $\varphi_S(t) = \varphi_{X_k}(t)^n$  para cualquier  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

**Ejercicio.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con función característica:

$$\varphi_{X_n}(t) = \left( \frac{1 - (1 - \alpha)it}{1 - it} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

1. **Determinar la distribución de  $X_n$ .**

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(t) &= \left( \frac{1 - \alpha + \alpha - (1 - \alpha)it}{1 - it} \right)^n = \left( \frac{\alpha}{1 - it} + \frac{(1 - \alpha)(1 - it)}{1 - it} \right)^n = \\ &= \left( \alpha \frac{1}{1 - it} + (1 - \alpha) \right)^n = \varphi_W(t)^n \end{aligned}$$

donde  $\varphi_W(t) = \alpha \frac{1}{1 - it} + (1 - \alpha)$ . Luego  $X_n = \sum_{i=1}^n W$ .

Observamos que  $\frac{1}{1 - it}$  es función característica de  $Exp(1)$  y 1 es función característica de  $\delta(0)$ , así que  $W$  es mixtura de estas dos distribuciones. Por tanto,  $X_n$  es la suma de  $n$  variables aleatorias con distribuciones mixtura de  $Exp(1)$  y  $\delta(0)$ .

2. **Calcular  $E(X_n)$  y  $V(X_n)$ .**

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E\left(\sum_{i=1}^n W\right) = nE(W) = n(\alpha E(Exp(1)) + (1 - \alpha)E(\delta(0))) \\ &= n\alpha \\ V(X_n) &= nV(W) = n(E(W^2) - E(W)^2) = \\ &= n(\alpha E(Exp(1)^2) + (1 - \alpha)E(\delta(0)^2) - \alpha^2) = \\ &= n(\alpha(V(Exp(1)) + E(Exp(1))^2) - \alpha^2) = \\ &= n(2\alpha - \alpha^2) = n\alpha(2 - \alpha) \end{aligned}$$

También se podría haber usado que  $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$ .

$$\varphi'_W(t) = \frac{i\alpha}{(1 - it)^2} \quad \varphi''_W(t) = \frac{-2\alpha}{(1 - it)^3}$$

De esta forma podemos calcular:

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{i} \varphi'_W(0) = \alpha \\ E(W^2) &= \frac{1}{i^2} \varphi''_W(0) = 2\alpha \end{aligned}$$

3. **Determinar el límite en distribución de la sucesión  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  con:**

$$Y_n = \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n}}$$

Por el teorema de continuidad de Lévy, basta hallar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= E(e^{itY_n}) = E(e^{it \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n}}}) = e^{-it\sqrt{n}\alpha} \varphi_{X_n} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= e^{-it\sqrt{n}\alpha} \left( \frac{\alpha}{1 - i \frac{t}{\sqrt{n}}} + 1 - \alpha \right) \end{aligned}$$

Como este límite es difícil de resolver podemos proceder de otra forma. Podemos escribir  $X_n - n\alpha = \sum_{i=1}^n (W_i - \alpha) = \sum_{i=1}^n U_i$ , con  $U_i = W_i - \alpha$ . Entonces:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n - n\alpha} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_{\sum_{i=1}^n U_i} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_U \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n$$

*Nota.* Hemos usado que  $\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at)$ .

Sabemos que  $E(U) = 0$  y  $E(U^2) = V(U) = V(W) = \alpha(2 - \alpha)$ . También sabemos que:

$$\varphi_U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi_U^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(U^k) = 1 + itE(U) - \frac{t^2}{2} E(U^2) + O(t^2)$$

Luego:

$$\varphi_U \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left( \frac{t^2}{n} \right)$$

Así que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_U \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left( \frac{t^2}{n} \right) \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left( 1 - \frac{t^2}{2n} \alpha(2 - \alpha) + O \left( \frac{t^2}{n} \right) - 1 \right)} = e^{-\frac{t^2}{2} \alpha(2 - \alpha)} \end{aligned}$$

Por tanto,  $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \alpha(2 - \alpha))$ .

*Observación* (Teorema central del límite de Lévy-Lindeberg). Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con  $\mu = E(X_n) < \infty$  y  $\sigma^2 = V(X_n) < \infty$ .

Consideramos  $Y_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$ , con  $E(Y_n) = 0$ ,  $V(Y_n) = 1$  y  $\varphi_{Y_n}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^2)$ .

Sea  $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$ . Veamos que  $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi_{Y_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + O \left( \frac{t^2}{n} \right) \right)^n \rightarrow e^{-t^2/2}$$

**Lema 2.12.**

$$\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \min \left\{ 2 \frac{|y|^n}{n!}, \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$