

# Ecuaciones diferenciales II

29 de diciembre de 2022

# Índice general

<b>1. Teoremas de existencia y unicidad global para problemas de valores iniciales</b>	<b>3</b>
1.1. Ecuación integral equivalente a un problema de Cauchy . . . . .	3
1.2. Condiciones de Lipschitz . . . . .	4
1.3. El teorema de existencia y unicidad global . . . . .	5
<b>2. Teoremas de existencia y unicidad local para problemas de valores iniciales</b>	<b>6</b>
<b>3. Resultados de unicidad para ecuaciones diferenciales</b>	<b>8</b>
3.1. La propiedad de unicidad global . . . . .	8
3.2. Funciones localmente lipschitzianas . . . . .	8
3.3. Comparación de soluciones . . . . .	9
3.4. El teorema de unicidad global . . . . .	9
3.5. El criterio de unicidad de Peano . . . . .	10
3.6. Dependencia continua de las soluciones . . . . .	10
<b>4. Teoremas de existencia de soluciones para problemas de valores iniciales</b>	<b>12</b>
4.1. Teoremas de existencia local de Peano . . . . .	12
4.2. El teorema de existencia global de Peano . . . . .	13
<b>5. Prolongaciones de soluciones y soluciones maximales</b>	<b>14</b>
5.1. Existencia y unicidad de soluciones no prolongables . . . . .	15
5.2. Soluciones maximales con gráficas contenidas en compactos . . .	15
5.3. Puntos límites y el lema de Wintner . . . . .	16
5.4. Soluciones maximales con gráficas contenidas en abiertos . . . .	16
5.5. Soluciones maximales de las ecuaciones diferenciales autónomas .	16
<b>6. Espacios de soluciones de los sistemas y ecuaciones diferenciales lineales</b>	<b>18</b>
6.1. Matrices soluciones y matrices fundamentales . . . . .	18
6.2. Fórmula de Abel-Liouville . . . . .	20

6.3. Soluciones de un sistema diferencial no homogéneo . . . . .	20
<b>7. Resolución de sistemas y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes</b>	<b>21</b>
7.1. Exponencial de una matriz cuadrada . . . . .	21
7.2. Determinación de una matriz fundamental . . . . .	21
7.3. Cálculo de la exponencial de una matriz . . . . .	22
7.4. Formas canónicas de Jordan . . . . .	23
7.5. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior . . . . .	26

# Capítulo 1

## Teoremas de existencia y unicidad global para problemas de valores iniciales

### 1.1. Ecuación integral equivalente a un problema de Cauchy

**Teorema 1.1.** *Consideramos el problema de Cauchy:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  y  $(t_0, x^0) \in D$ . Sea  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  tal que  $t_0 \in I$  y  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función cuya gráfica está contenida en  $D$ :

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución de  $(P)$ .
- $x$  es una función continua en  $I$  que verifica:

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \forall t \in I$$

## 1.2. Condiciones de Lipschitz

**Definición 1.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es lipschitziana en  $D$  respecto de la segunda variable  $x$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

En tal caso se escribe  $f \in Lip(x, D)$  y se dice que  $L$  es una constante de Lipschitz para  $f$  en  $D$  respecto a la segunda variable.

**Definición 1.2.** Sean  $n > 1$ ,  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$  y  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

- Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es lipschitziana en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

- Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es lipschitziana en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una constante  $L > 0$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

**Proposición 1.2.** Sean  $n > 1$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Se verifica:

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow f_k \in Lip(x, D), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

**Proposición 1.3** (Caracterización de la condición de Lipschitz). Si  $D$  es un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^2$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que existe  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$f \in Lip(x, D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ es acotada en } D$$

*Observación.* Si  $K$  es un conjunto convexo y compacto en  $\mathbb{R}^2$  y existe  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y es continua sobre  $K$ , entonces  $f \in Lip(x, K)$ .

**Definición 1.3.** Sea  $I$  cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$ . Se dice que una función  $f : D = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , satisface una condición de Lipschitz generalizada en  $D$  respecto de la segunda variable  $x$  cuando existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $I$  y no negativa tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in D$$

En tal caso se escribe  $f \in LipG(x, D)$ .

**Definición 1.4.** Sean  $n > 1$ ,  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $D = I \times \mathbb{R}^n$ .

- Se dice que la función vectorial  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , satisface una condición de Lipschitz generalizada en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua en  $I$  tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

- Se dice que la función vectorial  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , satisface una condición de Lipschitz generalizada en  $D$  respecto de la variable vectorial  $x \in \mathbb{R}^n$  cuando existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua en  $I$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)\|x - y\|, \quad (t, x), (t, y) \in D$$

**Proposición 1.4.** Sean  $n > 1$ ,  $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$  y  $f : D = I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Se verifica:

$$f \in \text{LipG}(x, D) \Leftrightarrow f_k \in \text{LipG}(x, D), \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

**Proposición 1.5** (Caracterización de la condición de Lipschitz generalizada). Sean  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $f : D = I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que existe la función derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Las dos siguientes condiciones son equivalentes:

- $f \in \text{LipG}(x, D)$ .
- Existe una función  $L : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua en  $I$  tal que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L(t), \quad \forall (t, x) \in D$$

### 1.3. El teorema de existencia y unicidad global

**Teorema 1.6** (Teorema de existencia y unicidad global). Sea  $n \geq 1$  y supongamos las tres siguientes condiciones:

1.  $D = I \times \mathbb{R}^n$  donde  $I$  es un intervalo no degenerado en  $\mathbb{R}$ .
2. La función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , es continua en  $D$ .
3.  $f \in \text{LipG}(x, D)$ .

En tal situación, para cada  $(t_0, x^0) \in D$  el problema de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo  $I$ .

## Capítulo 2

# Teoremas de existencia y unicidad local para problemas de valores iniciales

**Teorema 2.1** (Teorema de existencia y unicidad local). Sean  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Sea el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $(t_0, x^0) \in D$ .

Supongamos que existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que:

$$Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

y la función  $f$  verifica las dos siguientes condiciones:

1.  $f$  es continua en  $Q$ .
2.  $f \in \text{Lip}(x, Q)$ .

Entonces, existen intervalos  $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ , siendo  $0 < h \leq a$ , tales que  $(P)$  posee una única solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Esto sucede si:

$$0 < h \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad \text{siendo } M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

*Observación.* Existen versiones laterales del teorema local:

- Tomando  $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b)$ , para obtener una única solución  $x : [t_0, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema (P) (solución lateral a la derecha).
- Tomando  $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b)$ , para obtener una única solución  $x : [t_0 - h, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema (P) (solución lateral a la izquierda).

**Corolario 2.2.** *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

- $D$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  con interior  $\dot{D}$  no vacío.
- La función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , es continua en  $D$ .
- Existe la función derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$  y es continua en  $D$ .

*En tal situación, para cualquier punto  $(t_0, x^0) \in \dot{D}$  existen intervalos  $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ , siendo  $h > 0$ , tales que el problema de Cauchy:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

*tiene una única solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Observación.* Si  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ , entonces  $f$  satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.



## Capítulo 3

# Resultados de unicidad para ecuaciones diferenciales

### 3.1. La propiedad de unicidad global

**Definición 3.1** (Propiedad de unicidad global). Sean  $n \geq 1$ , y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Se dice que la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  tiene la propiedad de unicidad global en una región  $D \subset \Omega$  cuando, dadas dos soluciones  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  con gráficas contenidas en  $D$ , sucede que si existe  $t_0 \in I \cap J$  tal que  $x(t_0) = y(t_0)$  entonces  $x(t) = y(t)$  para cada  $t \in I \cap J$ .

### 3.2. Funciones localmente lipschitzianas

**Definición 3.2.** Sean  $n \geq 1$  y  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es localmente lipschitziana en la región  $D \subset \Omega$  respecto de la variable  $x$  cuando para cada punto  $(t_0, x^0) \in D$  existe un entorno  $U$  de  $(t_0, x^0)$  tal que  $f \in Lip(x, U \cap D)$ . Cuando esto sucede escribiremos  $f \in Lip_{Loc}(x, D)$ .

**Definición 3.3.** Sean  $n > 1$  y  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , se dice que es localmente lipschitziana en la región  $D \subset \Omega$  respecto de la variable  $x$  cuando para cada punto  $(t_0, x^0) \in D$  existe un entorno  $U$  de  $(t_0, x^0)$  tal que  $f \in Lip(x, U \cap D)$ .

**Proposición 3.1.** Sean  $n > 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Sea  $D \subset \Omega$ . Se verifica:

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f_i \in Lip_{Loc}(x, D), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

**Proposición 3.2** (Condición suficiente para la condición de Lipschitz local). Supongamos:

- $n \geq 1$  y  $A$  un abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \dots, x_n)$ , una función tal que, para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$ , existe la función derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_k} : A \rightarrow \mathbb{R}$  y es continua en  $A$ .

Entonces  $f \in Lip_{Loc}(x, A)$ , siendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Teorema 3.3** (Caracterización de la condición de Lipschitz local). Sean  $n \geq 1$ ,  $D$  un abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en  $D$ . Entonces:

$$f \in Lip_{Loc}(x, D) \Leftrightarrow f \in Lip(x, K), \quad \forall K \subset D \text{ compacto}$$

### 3.3. Comparación de soluciones

**Proposición 3.4** (Lema de Gronwall). Sean  $k$  una constante no negativa,  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  dos funciones continuas en el intervalo  $I$  y  $t_0 \in I$  tales que:

$$u(t) \leq k + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

Entonces, se verifica:

$$u(t) \leq k \exp \left| \int_{t_0}^t v(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

**Teorema 3.5** (Estimación de la diferencia entre dos soluciones). Sean  $n \geq 1$ ,  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos soluciones de la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  con gráficas contenidas en una región  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y sea  $t_0 \in I$ .

1. Si  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip(x, D)$  con constante de Lipschitz  $L$ , se tiene la siguiente estimación:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{L|t-t_0|}, \quad \forall t \in I$$

2. Si  $D = J \times \mathbb{R}^n$ , donde  $J$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap LipG(x, D)$  con función de Lipschitz  $L : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto L(t)$ , entonces:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp \left| \int_{t_0}^t L(s)ds \right|, \quad \forall t \in I$$

### 3.4. El teorema de unicidad global

**Teorema 3.6** (Teorema de unicidad global). Sean  $n \geq 1$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Supongamos que existe  $D \subset \Omega$  tal que:

$$f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap Lip_{Loc}(x, D)$$

Entonces, la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  tiene la propiedad de unicidad global en  $D$ .

*Observación.* Si  $D$  es abierto y  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ , entonces  $f$  satisface las condiciones del teorema de unicidad global. Recordamos que satisface además las condiciones del teorema de existencia y unicidad local.

### 3.5. El criterio de unicidad de Peano

**Proposición 3.7** (Criterio de unicidad de Peano). Sean  $J$  y  $K$  intervalos en  $\mathbb{R}$  y consideramos el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D = J \times K \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(t_0, x^0) \in D$ .

Por otra parte, sea  $I$  un intervalo tal que  $t_0 \in I \subset J$  y consideramos:

$$I^- = \{t \in I : t \leq t_0\}, \quad I^+ = \{t \in I : t \geq t_0\}$$

suponiendo que los intervalos  $I^-$  e  $I^+$  no sean degenerados.

1. *Unicidad a la izquierda.* Si para cada  $t \in I^-$  la función  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f_t(x) = f(t, x)$  es creciente, entonces  $(P)$  tiene a lo sumo una solución definida en  $I^-$ .
2. *Unicidad a la derecha.* Si para cada  $t \in I^+$  la función  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f_t(x) = f(t, x)$  es decreciente, entonces  $(P)$  tiene a lo sumo una solución definida en  $I^+$ .

### 3.6. Dependencia continua de las soluciones

**Teorema 3.8** (Teorema de dependencia continua). Sean  $I$  un intervalo acotado en  $\mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D = I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x^0) \in D$  y  $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n) \cap \text{Lip}(x, D)$ .

Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución de  $(P)$  y para cada  $v \in \mathbb{R}^n$  sea:

$$(P_v) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = v \end{cases}$$

Se verifica lo siguiente:

1. Dado cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que, si  $y^0 \in \mathbb{R}^n$  verifica que  $\|x^0 - y^0\| < \delta$ , entonces la solución  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema  $(P_{y^0})$  verifica que:

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in I$$

2. Si  $(v_m)$  es una sucesión en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $v_m \rightarrow x^0$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\phi_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , es la solución del problema  $(P_{v_m})$ , entonces la sucesión  $(\phi_m)$  converge uniformemente hacia la solución del problema  $(P)$  en el intervalo  $I$ .

## Capítulo 4

# Teoremas de existencia de soluciones para problemas de valores iniciales

### 4.1. Teoremas de existencia local de Peano

**Teorema 4.1** (Versión lateral a la derecha del teorema de existencia local de Peano). Sean  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Sea el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $(t_0, x^0) \in D$ .

Supongamos que existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$  y  $f$  es continua en  $Q$ .

Entonces,  $(P)$  tiene al menos una solución definida en el intervalo  $I = [t_0, t_0 + h]$ , donde:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

*Observación.* La versión lateral a la izquierda del teorema de existencia local de Peano consiste en tomar

$$Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$$

De esta forma, el problema  $(P)$  tiene al menos una solución definida en el intervalo  $I = [t_0 - h, t_0]$ .

**Corolario 4.2** (Versión centrada del teorema de existencia local de Peano). Sean  $n \geq 1$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Sea el problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $(t_0, x^0) \in D$ . Supongamos que existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$  y  $f$  es continua en  $Q$ .

Entonces,  $(P)$  tiene al menos una solución definida en el intervalo  $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ , donde:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M \geq \max_{(t,x) \in Q} \|f(t, x)\|$$

## 4.2. El teorema de existencia global de Peano

**Teorema 4.3** (Teorema de existencia global de Peano). Sean  $I$  un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$  y  $f : D = I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y acotada en  $D$ . Entonces, para cada  $(t_0, x^0) \in D$ , el problema

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene al menos una solución definida en  $I$ .

## Capítulo 5

# Prolongaciones de soluciones y soluciones maximales

**Definición 5.1** (Soluciones estrictamente prolongables y soluciones maximales). Una solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de una ecuación diferencial o de un problema de Cauchy se dice que es estrictamente prolongable cuando existe otra solución  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$I \subsetneq J, \quad y|_I = x$$

Cuando esto sucede, se dice que  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una prolongación estricta de  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Una solución que no admite prolongación estricta se dice que es no prolongable o que es maximal.

**Definición 5.2** (Soluciones estrictamente prolongables lateralmente).

- Una solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $(P)$  se dice que es estrictamente prolongable a la derecha cuando existe otra solución  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $(P)$  con  $I \subset J$  tal que:

$$I^+ = \{t \in I : t \geq t_0\} \subsetneq J^+ = \{t \in J : t \geq t_0\} \quad \text{y} \quad y|_I = x$$

Cuando esto sucede, se dice que  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una prolongación estricta a la derecha de  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Una solución de  $(P)$  que no admite prolongación estricta a la derecha se dice que no es prolongable a la derecha.

- Una solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $(P)$  se dice que es estrictamente prolongable a la izquierda cuando existe otra solución  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $(P)$  con  $I \subset J$  tal que:

$$I^- = \{t \in I : t \leq t_0\} \subsetneq J^- = \{t \in J : t \leq t_0\} \quad \text{y} \quad y|_I = x$$

Cuando esto sucede, se dice que  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una prolongación estricta a la izquierda de  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Una solución de  $(P)$  que no admite prolongación estricta a la izquierda se dice que no es prolongable a la izquierda.

## 5.1. Existencia y unicidad de soluciones no prolongables

**Teorema 5.1** (Existencia y unicidad de soluciones no prolongables). *Si  $f$  es continua en  $D$  se verifica:*

1. Si  $(t_0, x^0)$  es un punto interior a  $D$ , entonces  $(P)$  tiene al menos una solución que no es prolongable definida en un intervalo que contiene al punto  $t_0$  en el interior. Si además  $f \in \text{Lip}_{\text{Loc}}(x, D)$ , esta solución maximal es única.
2. Si existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0, t_0 + a] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ , entonces  $(P)$  posee al menos una solución lateral a la derecha que no es prolongable a la derecha.
3. Si existen  $a > 0$  y  $b > 0$  tales que  $Q = [t_0 - a, t_0] \times \bar{B}(x^0; b) \subset D$ , entonces  $(P)$  posee al menos una solución lateral a la izquierda que no es prolongable a la izquierda.

*Observación.* Si  $D$  es abierto y  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $D$ , entonces  $(P)$  tiene una única solución maximal, que está definida en un intervalo que contiene a  $t_0$  en su interior.

## 5.2. Soluciones maximales con gráficas contenidas en compactos

**Teorema 5.2.** *Sea el problema de valor inicial:*

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  y  $(t_0, x^0) \in D$ . Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una solución maximal de  $(P)$  y sea  $\Gamma$  su gráfica.

Supongamos que existe un conjunto  $K$  compacto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tal que  $\Gamma \subset K \subset D$  y  $f$  es continua en  $K$ . Entonces:

1.  $I$  es un intervalo compacto, es decir,  $I = [a, b]$ .
2. Los puntos  $(a, x(a))$  y  $(b, x(b))$  están en la frontera de  $K$ .



### 5.3. Puntos límites y el lema de Wintner

**Definición 5.3** (Puntos límites). Sean  $n \geq 1$  y  $x : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función tal que  $t_1 < \infty$ . Sea  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $(t_1, x^1)$  es un punto límite de la gráfica de  $x$  para  $t \rightarrow t_1$  cuando existe una sucesión  $(s_m)$  en el intervalo  $[t_0, t_1)$  tal que  $(s_m, x(s_m)) \rightarrow (t_1, x^1)$  en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

**Proposición 5.3.** Sean  $n \geq 1$ ,  $t_1 < \infty$ ,  $x : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función,  $\Gamma$  su gráfica y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Se verifica una y solamente una de las dos siguientes situaciones:

- $\lim_{t \rightarrow t_1} \|x(t)\| = \infty$
- $\Gamma$  tiene al menos un punto límite para  $t \rightarrow t_1$ .

**Teorema 5.4** (Lema de Wintner). Sea  $x : [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $t_1 < \infty$ , una solución de la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$ , con gráfica  $\Gamma$  contenida en  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $D$ . Sea  $(t_1, x^1)$  un punto límite de  $\Gamma$  para  $t \rightarrow t_1$  y supongamos que se verifica la siguiente condición:

Existe un entorno  $U$  de  $(t_1, x^1)$  tal que  $f$  es acotada de  $U \cap D$ .

Entonces  $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = x^1$ .

### 5.4. Soluciones maximales con gráficas contenidas en abiertos

**Teorema 5.5.** Sean  $A$  un abierto en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $A$  y  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución no prolongable de la ecuación diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  con gráfica  $\Gamma$  contenida en  $A$ , se verifica:

1. El intervalo  $I$  es abierto.
2. Si  $I$  tiene un extremo finito  $\alpha$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \|x(t)\| = \infty$  o bien cualquier punto límite de  $\Gamma$  para  $t \rightarrow \alpha$  está en la frontera de  $A$ .

### 5.5. Soluciones maximales de las ecuaciones diferenciales autónomas

**Teorema 5.6** (Teorema fundamental de las ecuaciones autónomas). Supongamos que  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  una solución no prolongable de la ecuación  $X' = g(x)$  y sea  $t_0 \in \dot{I}$ . Se verifica lo siguiente:

1. El intervalo  $I$  es abierto.
2. Si  $x$  es acotada en  $I^+ = [t_0, \infty)$ , existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$ , siendo  $a \in \mathbb{R}$ , y la función constante dada por  $y(t) \equiv a$  es solución de la ecuación  $x' = g(x)$ .

3. Si  $x$  es acotada en  $I^- = (-\infty, t_0]$ , existe  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = b$ , siendo  $b \in \mathbb{R}$ , y la función constante dada por  $y(t) \equiv b$  es solución de la ecuación  $x' = g(x)$ .

## Capítulo 6

# Espacios de soluciones de los sistemas y ecuaciones diferenciales lineales

**Teorema 6.1.** *Si  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es continua en el intervalo  $I$ , el conjunto de soluciones del sistema diferencial lineal homogéneo  $x' = A(t)x$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$  de dimensión finita igual a  $n$ .*

### 6.1. Matrices soluciones y matrices fundamentales

**Definición 6.1** (Matrices soluciones y matrices fundamentales). Sea el sistema diferencial homogéneo  $x' = A(t)x$ , donde  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es continua en  $I$ .

- Una matriz solución del sistema es una función matricial  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  cuyas  $n$  columnas son soluciones del sistema.
- Una matriz fundamental del sistema es una función matricial  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  cuyas  $n$  columnas forman un sistema fundamental de soluciones del sistema.

Si  $\Phi$  es matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$ , el conjunto de soluciones del sistema viene dado por:

$$\{x : I \rightarrow \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi(t)c, \ c \in \mathbb{R}\}$$

**Teorema 6.2** (Caracterización de las matrices solución). *Una función matricial  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , derivable en  $I$ , es matriz solución del sistema  $x' = A(t)x$  si y solo si verifica:*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad \forall t \in I$$

**Teorema 6.3** (Caracterización de las matrices fundamentales). *Si  $\Phi$  es matriz solución del sistema diferencial lineal  $x' = A(t)x$ , las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\Phi$  es matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ .
2.  $\det(\Phi(t)) \neq 0$  para cada  $t \in I$ .
3. Existe  $t_0 \in I$  tal que  $\det(\Phi(t_0)) \neq 0$ .

**Corolario 6.4.** *Para una matriz solución  $\Phi$  solo caben las dos siguientes posibilidades:*

1.  $\det(\Phi(t)) \neq 0$  para cada  $t \in I$ .
2.  $\det(\Phi(t)) = 0$  para cada  $t \in I$ .

*En la primera situación la matriz  $\Phi$  es fundamental.*

**Proposición 6.5.** *Sea  $\Phi$  una matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$ . Una función matricial  $\Psi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es matriz fundamental de  $x' = A(t)x$  si y solo si:*

$$\Psi(t) = \Phi(t)C, \quad \forall t \in I$$

donde  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $\det(C) \neq 0$ .

**Proposición 6.6.** *Si  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es continua en el intervalo  $I$ , entonces para cada  $t_0 \in I$  existe una única matriz fundamental  $\Phi$  del sistema  $x' = A(t)x$  tal que  $\Phi(t_0) = I_n$ . Tal función matricial se conoce como matriz fundamental canónica del sistema  $x' = A(t)x$  en el punto  $t_0 \in I$ .*

*Observación.* Consideramos el problema de Cauchy:

$$(P) : \begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

con  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  continua en  $I$ ,  $t_0 \in I$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Sabemos que  $(P)$  tiene una única solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

1. Supongamos que  $\Phi$  es una matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$ . Entonces, la solución del problema  $(P)$  es:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0$$

2. Supongamos que  $\Phi$  es una matriz fundamental canónica del sistema  $x' = A(t)x$ . Entonces, la solución del problema  $(P)$  es:

$$x(t) = \Phi(t)x^0$$

## 6.2. Fórmula de Abel-Liouville

**Teorema 6.7.** Sea  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  continua en el intervalo  $I$  y sea  $t_0 \in I$ . Si  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es matriz solución del sistema homogéneo  $x' = A(t)x$ , se verifica:

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \right), \quad \forall t \in I$$

## 6.3. Soluciones de un sistema diferencial no homogéneo

**Proposición 6.8.** Si  $V_H$  es el espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo  $(S_H)$ , con  $\dim V_H = n < \infty$ , y  $x_p : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución del sistema no homogéneo  $(S)$ , el conjunto de soluciones de  $(S)$  viene dado por:

$$\{x : I \rightarrow \mathbb{R}^n : x = x_h + x_p, x_h \in V_H\}$$

**Corolario 6.9.** Si  $\Phi$  es una matriz fundamental de  $x' = A(t)x$  y  $x_p$  es una solución de  $x' = A(t)x + b(t)$ , entonces las soluciones del sistema no homogéneo son de la forma:

$$x(t) = \Phi(t)c + x_p(t), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

**Proposición 6.10** (Conjetura de Lagrange). Si  $\Phi$  es una matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ , existen soluciones del sistema  $x' = A(t)x + b(t)$  que son de la forma:

$$x_p(t) = \Phi(t)c(t)$$

donde la función  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es derivable y viene dada por:

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

## Capítulo 7

# Resolución de sistemas y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

### 7.1. Exponencial de una matriz cuadrada

**Definición 7.1.** Dada  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , se llama matriz exponencial de  $A$  y se escribe  $e^A$  a la matriz de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  definida por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

**Proposición 7.1** (Propiedades de la exponencial).

1. Si  $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es la matriz nula, entonces  $e^{\Theta} = I_n$ .
2. Si  $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es la matriz identidad,  $e^I = eI$ .
3. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $A$  y  $B$  conmutan, entonces  $Ae^B = e^B A$
4. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $A$  y  $B$  conmutan, entonces  $e^{A+B} = e^A e^B$
5. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , entonces  $e^A$  es invertible y su inversa es  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

### 7.2. Determinación de una matriz fundamental

**Teorema 7.2.** Supongamos que  $I \subset \mathbb{R}$  es intervalo no degenerado, que  $B \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  y que  $B$  y  $B'$  conmutan para todo  $t \in I$ . Entonces, fijado  $t_0 \in I$ ,

la aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi_{t_0} : I &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t_0 &\mapsto \Phi_{t_0}(t) = e^{B(t)-B(t_0)}\end{aligned}$$

es la matriz fundamental canónica de  $x' = B'(t)x$  en  $t_0$ .

**Corolario 7.3.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$  entonces, para cada  $t_0 \in I$  y cada  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , el problema de Cauchy

$$(P) : \begin{cases} x' = Ax + b \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene solución única en  $I$ .

Además, esta solución viene dada por:

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x^0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds, \quad t \in I$$

### 7.3. Cálculo de la exponencial de una matriz

1. Si  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , entonces:

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$$

2. Si  $A$  es semejante a una matriz diagonal  $D$ , es decir, existe  $P$  invertible tal que  $A = PDP^{-1}$ , entonces:

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

3. Si  $A$  es diagonal por bloques, es decir,  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_l)$  siendo cada  $A_j \in \mathcal{M}_{r_j}(\mathbb{R})$  con  $r_1 + \dots + r_l = n$ , entonces:

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tA_1}, \dots, e^{tA_l})$$

4. Si  $A$  es un bloque de Jordan real del tipo

$$A = D_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces:

$$e^{tA} = e^{t\lambda}I_r \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} N_r^k = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si  $A$  es un bloque de Jordan complejo del tipo

$$A = E_r(\mu) = \begin{pmatrix} \vec{\mu} & \vec{1} & \dots & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{\mu} & \dots & \vec{0} & \vec{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{\mu} & \vec{1} \\ \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{0} & \vec{\mu} \end{pmatrix}$$

con  $\mu = \alpha + i\beta$ ,  $\beta > 0$ , y donde:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$e^{tA} = e^{t\vec{\mu}} \begin{pmatrix} \vec{1} & t\vec{1} & \frac{t^2}{2!}\vec{1} & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\vec{1} \\ \vec{0} & \vec{1} & t\vec{1} & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\vec{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \dots & t\vec{1} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{1} \end{pmatrix}$$

donde

$$e^{t\mu} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos(t\beta) & \sin(t\beta) \\ -\sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{pmatrix}$$

**Teorema 7.4** (Forma canónica de Jordan real). *Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , entonces existen una matriz de Jordan  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y una matriz  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  invertible tales que:*

$$AP = PJ \Leftrightarrow A = PJP^{-1}$$

Más concretamente,

- Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  autovalor de  $A$  con multiplicidad  $m(\lambda)$ ,  $J$  contiene tantas cajas de Jordan del tipo  $D_r(\lambda)$  como indique  $\dim(\ker(A - \lambda I))$  y la suma de los tamaños de estas cajas es  $m(\lambda)$ .
- Para cada  $\mu \in \mathbb{C}$  autovalor de  $A$  con multiplicidad  $m(\mu)$ ,  $J$  contiene tantas cajas de Jordan del tipo  $E_r(\mu)$  como indique  $\dim(\ker(A - \lambda I))$  y la suma de los tamaños de estas cajas es  $m(\mu)$ .

## 7.4. Formas canónicas de Jordan

### Formas canónicas de Jordan reales asociadas a matrices $2 \times 2$

Sea  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Su polinomio característico es  $p(\lambda) = (A - \lambda I)$ , que tiene coeficientes reales y es de grado 2, así que tiene dos raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .



1. Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Sean  $P^1$  y  $P^2$  autovectores asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente, entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2)$$

2. Supongamos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\dim(\ker(A - \lambda I)) \in \{1, 2\}$ .

- a) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 2$ . Sean  $P^1$  y  $P^2$  autovectores linealmente independientes asociados a  $\lambda$ , entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2)$$

- b) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 1$ . Entonces solo hay un bloque de Jordan asociado a  $\lambda$  de tamaño 2, es decir,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2)$$

donde:

- $P^1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$ .
  - $(A - \lambda I)P^2 = P^1$ , es decir,  $P^2$  es solución de  $(A - \lambda I)X = P^1$ .
3. Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , es decir, son de la forma  $\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Sea  $W = P^1 + iP^2$  un autovector complejo de  $A$  asociado a  $\lambda$ , entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2)$$

### Formas canónicas de Jordan reales asociadas a matrices $3 \times 3$

Sea  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Su polinomio característico es  $p(\lambda) = (A - \lambda I)$ , que tiene coeficientes reales y es de grado 3, así que tiene tres raíces  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ .

1. Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  distintos. Sean  $P^1, P^2$  y  $P^3$  autovectores asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  respectivamente, entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

2. Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  con  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  y  $\lambda_1 \neq \lambda$ . Entonces  $\dim(\ker(A - \lambda I)) \in \{1, 2\}$ .

- a) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 2$ . Sea  $P^1$  autovector asociado a  $\lambda_1$  y sean  $P^2$  y  $P^3$  autovectores linealmente independientes asociados a  $\lambda$ , entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

- b) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 1$ . Entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

donde:

- $P^1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda_1$ .
  - $P^2$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$ .
  - $(A - \lambda I)P^3 = P^2$ , es decir,  $P^3$  es solución de  $(A - \lambda I)X = P^2$ .
3. Supongamos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\dim(\ker(A - \lambda I)) \in \{1, 2, 3\}$ .

- a) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 3$ . Sean  $P^1$ ,  $P^2$  y  $P^3$  autovectores linealmente independientes asociados a  $\lambda$ , entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

- b) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 2$ . Entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

donde:

- $P^1$  y  $P^2$  son autovectores linealmente independientes asociados a  $\lambda$ .
  - $(A - \lambda I)P^3 = P^2$ , es decir,  $P^3$  es solución de  $(A - \lambda I)X = P^2$ .
- c) Supongamos que  $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 1$ . Entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

donde:

- $P^1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$ .
  - $(A - \lambda I)P^2 = P^1$ , es decir,  $P^2$  es solución de  $(A - \lambda I)X = P^1$ .
  - $(A - \lambda I)P^3 = P^2$ , es decir,  $P^3$  es solución de  $(A - \lambda I)X = P^2$ .
4. Supongamos que  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ , es decir, son de la forma  $\lambda_2 = \lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_3 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Entonces:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad P = (P^1 | P^2 | P^3)$$

donde:

- $P^1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda_1$ .
- $P^2 + iP^3$  es autovector complejo de  $A$  asociado a  $\lambda$ .

## 7.5. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes de orden  $n$  son de la forma:

$$(E) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = a_0(t)$$

donde  $a_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

El sistema asociado es  $(S) : x' = Ax + b$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0(t) \end{pmatrix}$$

La solución de  $(E)$  con dato inicial  $y(t_0) = y_1^0$ ,  $y'(t_0) = y_2^0$  viene dada por la primera componente de la solución de  $(S)$ .

El polinomio característico de  $A$  es

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n)$$

luego su ecuación característica es:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Ha de verificarse que

$$rg(A - \lambda I) + \dim(\ker(A - \lambda I)) = n$$

Como  $rg(A - \lambda I) = n - 1$ , entonces  $\dim(Ker(A - \lambda I)) = 1$ . Es decir, hay una caja de Jordan asociada a  $\lambda$ .

- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la caja tiene tamaño  $m(\lambda)$  y es de la forma:

$$D_{m(\lambda)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Si  $\lambda = \mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  con  $\beta > 0$ , la caja tiene tamaño  $2m(\mu)$  y es de la forma:

$$E_{m(\mu)}(\mu) = \begin{pmatrix} \vec{\mu} & \vec{1} & \dots & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{\mu} & \dots & \vec{0} & \vec{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{\mu} & \vec{1} \\ \vec{0} & \vec{0} & \dots & \vec{0} & \vec{\mu} \end{pmatrix}$$

donde:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  son los autovalores reales de  $A$  con multiplicidades respectivas  $m_1, \dots, m_n$  y que  $\mu_1, \dots, \mu_s$  son los autovalores complejos de  $A$  con parte imaginaria positiva y con multiplicidades respectivas  $v_1, \dots, v_s$ . Entonces la forma canónica de Jordan real asociada a  $A$  es:

$$J = \text{diag}(D_{m_1}(\lambda_1), \dots, D_{m_l}(\lambda_l), E_{v_1}(\mu_1), \dots, E_{v_s}(\mu_s))$$

Además, existe una matriz  $P$  invertible tal que  $A = PJP^{-1}$ . Por tanto:

$$e^{tA} = P \text{diag}(e^{tD_{m_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{tD_{m_l}(\lambda_l)}, e^{tE_{v_1}(\mu_1)}, \dots, e^{tE_{v_s}(\mu_s)}) P^{-1}$$

Observamos que los elementos de  $e^{tA}$  son combinaciones lineales de los elementos de la colección:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \{t^k e^{\lambda_j t}, 1 \leq j \leq l, 0 \leq k \leq m_j - 1\} \\ & \cup \{t^k e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t), 1 \leq j \leq s, 0 \leq k \leq v_j - 1\} \\ & \cup \{t^k e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t), 1 \leq j \leq s, 0 \leq k \leq v_j - 1\} \end{aligned}$$

**Teorema 7.5.**  $\mathcal{F}$  es sistema fundamental de soluciones de:

$$(E_H) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

**Teorema 7.6** (Método de los coeficientes indeterminados). *Consideremos:*

$$(E_H) : y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = a_0(t)$$

con  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  y  $a_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ .

- **Caso complejo.** Supongamos que  $a_0(t) = g(t)e^{\lambda t}$ , siendo  $g$  un polinomio complejo de grado a lo sumo  $d$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Entonces, una solución particular de  $(E)$  es del tipo:

$$\varphi_p(t) = t^{m(\lambda)}Q(t)e^{\lambda t}$$

donde  $Q$  es un polinomio de grado a lo sumo  $d$  y  $m(\lambda)$  es la multiplicidad de  $\lambda$  como autovalor del polinomio característico de  $(E_H)$ .

- **Caso real.** Supongamos que  $a_0(t) = e^{\alpha t}(q_1(t)\cos(\beta t) + q_2(t)\sin(\beta t))$ , siendo  $q_1$  y  $q_2$  polinomios reales de grado a lo sumo  $d$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces, una solución particular de  $(E)$  es del tipo:

$$\varphi_p(t) = t^{m(\mu)}e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son polinomios reales de grado a lo sumo  $d$  y  $m(\mu)$  es la multiplicidad de  $\mu = \alpha + i\beta$  como autovalor de  $(E_H)$ .