Análisis complejo

25 de abril de 2023

Índice general

Preliminares

Definición 0.1. Si $a \in \mathbb{C}$ y $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, se define la corona de centro a y radios R_1 y R_2 como:

$$A(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$$

Teorema 0.1. *Si $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ y f es holomorfa en $A(a, R_1, R_2)$, entonces existe una única sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que:*

- *$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ converge para todo $z \in A(a, R_1, R_2)$.*
- *$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ para todo $z \in A(a, R_1, R_2)$.*

Para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

siendo γ cualquiera camino que esté en $A(a, R_1, R_2)$ con $n(\gamma, a) = 1$

Además, la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ converge absoluta y uniformemente a cada subconjunto compacto de $A(a, R_1, R_2)$.

A esta serie se le llama desarrollo de Laurent de f en $A(a, R_1, R_2)$.

Definición 0.2. f tiene una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ si existe $R > 0$ tal que f está definida y es holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\} = A(a, 0, R)$.

Podemos considerar el desarrollo de Laurent de f en $D(a, R) \setminus \{a\}$. Existe una única sucesión en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, tal que:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

Como la sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ no depende de R, a este desarrollo se le puede llamar desarrollo de Laurent de f en a o en un entorno perforado de a.

Proposición 0.2. *Sea f una función con una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ y sea $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ el desarrollo de Laurent de f en a. Entonces:*

1. *a es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow a_n = 0$ si $n < 0 \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\} = \emptyset$.*
2. *a es un polo de orden N de $f \Leftrightarrow a_{-N} \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n < -N$. Luego a es un polo de $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$ es finito y no vacío.*
3. *a es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow \{n < 0 : a_n \neq 0\}$ es infinito.*

Definición 0.3. f tiene una singularidad aislada en ∞ si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

1. Es una singularidad evitable de f si $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ existe en $\mathbb{C}$.
2. Es un polo de f si $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

3. Es una singularidad esencial en otro caso.

Si f tiene una singularidad aislada en ∞, entonces f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para un cierto $R > 0$. Entonces la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es holomorfa en $D\left(0, \frac{1}{R}\right) \setminus \{0\}$, por lo que tiene una singularidad aislada en 0.

Entonces:

1. f tiene una singularidad evitable en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene una singularidad evitable en 0.
2. f tiene un polo en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene un polo en 0.
3. f tiene una singularidad esencial en $\infty \Leftrightarrow g$ tiene una singularidad esencial en 0.

Proposición 0.3. *Sea f una función con una singularidad aislada en ∞. Entonces:*

1. *∞ es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow f$ está acotada en un entorno perforado de ∞. Es decir, si existe $R > 0$ tal que f es holomorfa y está acotada en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.*
2. *∞ es un polo de $f \Leftrightarrow$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^N}$ existe en $\mathbb{C}$ y es distinto de 0. En este caso, N es único y se denomina el orden de ∞ como polo de f.*
3. *∞ es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para todo $R > 0$ suficientemente grande.*

Observación. En (2), el orden de ∞ como polo de f coincide con el orden de 0 como polo de $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Si f tiene una singularidad aislada en ∞, entonces existe $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} = A(0, R, \infty)$. Podemos considerar el desarrollo de Laurent de f en $A(0, R, \infty)$: existe una única sucesión $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| > R$$

Como no depende de R, se le puede llamar desarrollo de Laurent de f en ∞.

Proposición 0.4. *Sea f una función con una singularidad aislada en ∞ y sea $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ el desarrollo de Laurent de f en ∞. Entonces:*

1. *∞ es una singularidad evitable de $f \Leftrightarrow a_n = 0$ si $n > 0$.*
2. *∞ es un polo de f de orden $N \Leftrightarrow a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > N$.*
3. *∞ es una singularidad esencial de $f \Leftrightarrow \{n > 0 : a_n \neq 0\}$ es infinito.*

Definición 0.4. Si f tiene una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ y $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ es el desarrollo de Laurent de f en a, se define $Res(f, a) = a_{-1}$.

Proposición 0.5. *Sea $a \in \mathbb{C}$ y f una función con una singularidad aislada en a. Sea $R > 0$ tal que f es holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\}$. Entonces, para todo $r \in (0, R)$, se tiene que:*

$$Res(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)dz$$

Proposición 0.6. *Sea f una función con una singularidad aislada en ∞. Sea $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Se define:*

$$Res(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z)dz, \quad \textit{siendo } r > R$$

Proposición 0.7. *Si f tiene una singularidad aislada en ∞ y $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo de Laurent de f en ∞, entonces $Res(f, \infty) = -a_{-1}$.*

Teorema 0.8 (Teorema de los residuos)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D salvo por singularidades aisladas, es decir, existe $A \subset D$, A sin puntos de acumulación en D, tal que f es holomorfa en $D \setminus A$. Sea γ un camino cerrado en $D \setminus A$, con $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{a \in A} Res(f, a) n(\gamma, a)$$

Teorema 0.9 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D, con $a \in D$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existen U, V abiertos en $\mathbb{C}$ con $a \in U \subset D$, $f(a) \in V$, tales que:*

1. *f es inyectiva en U.*
2. *$f(U) = V$.*
3. *$f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.*
4. *$f^{-1} : V \to U$ es holomorfa y además:*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad \forall z \in U$$

Teorema 0.10. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D no constante y $a \in D$. Sea n el orden de a como cero de $f - f(a)$, es decir, el primer natural para el que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces f es localmente una aplicación $n \to 1$ cerca de a. Es decir, existe $\alpha > 0$ con $D(a, \alpha) \subset D$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $\delta > 0$ tal que cada punto $w \in D(f(a), \delta) \setminus \{f(a)\}$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, z_2, \dots z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. En particular, $f(D(a, \varepsilon)) \supset D(f(a), \delta)$.*

Definición 0.5. Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D salvo por polos. Si $a \in D$ es un polo de f, se tiene que $\lim_{\{} z \to a\} f(z) = \infty$. Definimos $f(a) = \infty$. Entonces $f : D \to \mathbb{C}^*$ y es continua. Se dice que f es meromorfa en D.

Teorema 0.11. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f meromorfa en D, con $a \in D$ un polo de orden n de f. Entonces f es localmente una aplicación $n \to 1$ cerca de a. Es decir, existe $\alpha > 0$ tal que $D(a, \alpha) \subset D$, f es holomorfa en $D(a, \alpha) \setminus \{a\}$ y se verifica que para todo $0 < \varepsilon < \alpha$ existe $R > 0$ tal que cada punto $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, z_2, \dots z_n \in D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. En particular, $f(D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$.*

Teorema 0.12. *Sea f una función con un polo de orden n en ∞. Entonces f es localmente una aplicación $n \to 1$ cerca de ∞. Es decir, existe $R_0 > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ y se verifica que para todo $R > R_0$ existe $R' > 0$ tal que cada punto $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R'$ es la imagen de exactamente n puntos distintos $z_1, \dots, z_n$ de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. En particular, $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$.*

Teorema 0.13 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante. Entonces f es una aplicación abierta. En particular, $f(D)$ es un dominio.*

Lema 0.14. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f holomorfa en D.*

- *Sea $a \in D$. Entonces $f'(a) \neq 0$ si y solo si f es inyectiva en un entorno de a.*
- *Si f es inyectiva en D, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$.*

Aplicaciones conformes

Definición 0.6. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Sea $D' = f(D)$. Entonces:

- D' es un dominio en D.
- $f : D \to D'$ es biyectiva.

- $f^{-1} : D' \to D$ es holomorfa.

En ese caso decimos que f es una aplicación conforme de D sobre D'.

Observación.

1. Si f es una aplicación conforme de D sobre D', entonces f^{-1} es una aplicación conforme de D' sobre D.
2. Si D_1, D_2 y D_3 son dominios en $\mathbb{C}$ con f aplicación conforme de D_1 sobre D_2 y g aplicación conforme de D_2 sobre D_3, entonces $g \circ f$ es una aplicación cnforme de D_1 sobre D_3.

Definición 0.7. Si D_1 y D_2 son dominios en $\mathbb{C}$, se dice que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sobre D_2.

En el conjunto de los dominios en $\mathbb{C}$, se tiene la relación de equivalencia ”ser conformemente equivalentes”.

Definición 0.8. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo. Equivalentemente, D es simplemente conexo si todo camino cerrado γ en D es homólogo a cero módulo D, es decir, $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

Teorema 0.15. *Sean D_1 y D_2 dos dominios en $\mathbb{C}$ que son conformemente equivalentes. Entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.*

Definición 0.9. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el ángulo formado por z_1 y z_2 se define como:

$$\theta(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in (-\pi, \pi]$$

Observación. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, entonces $\theta(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) = \theta(z_1, z_2)$.

Definición 0.10. Sea γ un camino con origen en un punto $a \in \mathbb{C}$. Se dice que γ es regular en a si existe una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma'(0) \neq 0$.

Definición 0.11. Sean γ_1 y γ_2 dos caminos con origen $a \in \mathbb{C}$ que son regulares en a. El ángulo que forman γ_1 y γ_2 en a, $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$, se define como sigue.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ parametrizaciones $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ_1, γ_2 respectivamente tales que $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Entonces $\theta_a(\gamma_1, \gamma_2) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$.

Definición 0.12. Si γ es una curva en $\mathbb{C}$ y $f : sop(\gamma) \to \mathbb{C}$ es continua, se define la curva imagen de γ por f como la curva Γ que tiene por parametrización $f \circ \gamma$, siendo γ una parametrización de γ.

Definición 0.13. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Diremos que f preserva ángulos en a o que f es conforme en a si se verifica lo siguiente.

Si γ_1 y γ_2 son caminos con origen a, regulares en a, entonces las curvas imagen de Γ_1 y Γ_2 por f de γ_1 y γ_2 respectivamente son caminos con oriden $f(a)$, que son regulares en $f(a)$ y se tiene que:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

Teorema 0.16. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Si $f'(a) \neq 0$, entonces f es conforme en a.*

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 caminos en D, con origen en a y regulares en a. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ parametrizaciones de γ_1 y γ_2 respectivamente, ambas $\mathcal{C}^1$ a trozos con $\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \neq 0$. Consideramos las curvas imagen de γ_1 y γ_2 por f:

$$\Gamma_1 = f \circ \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$$
$$\Gamma_2 = f \circ \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$$

Γ_1 y Γ_2 son $\mathcal{C}^1$ a trozos. Además, Γ_1 y Γ_2 son caminos con origen $f(a)$, porque:

$$\Gamma_1(0) = f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(\gamma_2(0)) = \Gamma_2(0)$$

Observamos que Γ_1 y Γ_2 son regulares en a:

$$\Gamma_1'(0) = f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = f'(a)\gamma_1(0) \neq 0$$
$$\Gamma_2'(0) = f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) = f'(a)\gamma_2(0) \neq 0$$

Por tanto:

$$\theta_{f(a)}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \theta(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0)) = \arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \theta_a(\gamma_1, \gamma_2)$$

□

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sean $D = \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ y $a = 0$. Observamos que $f'(a) = 0$. Sea γ_1 el segmento $[0, 1]$ y γ_2 el segmento $[0, i]$. Es claro que $\theta_0(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$. Si consideramos las curvas imagen de γ_1 y γ_2 por f, Γ_1 y Γ_2, podemos ver que Γ_1 es el segmento $[0, 1]$ y Γ_2 el segmento $[0, -1]$, que tienen $\theta_0(\Gamma_1, \Gamma_2) = \pi \neq \frac{\pi}{2}$.

De hecho, se tiene la equivalencia. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean f holomorfa en D y $a \in D$. Entonces $f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow f$ es conforme en a.

Capítulo 1

Conformalidad y funciones abiertas en el disco unidad

1.1. Funciones meromorfas

Definición 1.1. Sea D un abierto en $\mathbb{C}^*$. La función $f : D \to \mathbb{C}^*$ es meromorfa en D si dado $a \in D$ se verifica una de las siguientes posibilidades:

- $a \in \mathbb{C}$ y f es holomorfa en a.
- $a \in \mathbb{C}$ y f tiene un polo en a, es decir, $f(a) = \infty$..
- $a = \infty$ y f tiene una singularidad evitable en ∞, es decir, $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$.
- $a = \infty$ y f tiene un polo en a, es decir, $f(\infty) = \infty$.

Entonces $f : D \to \mathbb{C}^*$ es continua.

Observación. En el caso $D \subset \mathbb{C}$, la definición es la que ya conocíamos de función meromorfa. Si además $f(D) \subset \mathbb{C}$, se tiene una función holomorfa en D.

Observación. Sea D abierto en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ continua. Supongamos que f es holomorfa en $\{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$ y que el conjunto $\{z \in D : f(z) = z\}$ no tiene puntos de acumulación en D. Entonces f es meromorfa en D.

Observación. Sea D abierto en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$, f meromorfa e inyectiva en $A = \{z \in D \cap \mathbb{C} : f(z) \in \mathbb{C}\}$. Entonces f tiene a lo sumo un polo y tal polo es simple. Además, $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in A$, por lo que f es conforme en a para todo $a \in A$.

Teorema 1.1 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ una función meromorfa y no constante en D. Entonces f es una aplicación abierta. En particular, $f(D)$ es un dominio en $\mathbb{C}^*$.*

Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ meromorfa e inyectiva, con $D' = f(D)$. Entonces:

1. D' es un dominio en $\mathbb{C}^*$.
2. $f^{-1} : D' \to D$ es meromorfa e inyectiva.

Veamos que (2) es cierto. Como f es una aplicación abierta, se tiene que f^{-1} es continua. Sea $w \in D' \cap \mathbb{C}$ tal que $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}$, veamos que f^{-1} es holomorfa en w. Como $z \in \mathbb{C} \cap D$ y $f(z) \in \mathbb{C}$, f es holomorfa en z con $f'(z) \neq 0$. Por el teorema de la función inversa, f^{-1} es holomorfa en w.

1.2. Aplicaciones conformes

Definición 1.2. Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ y sea $f : D \to \mathbb{C}^*$ meromorfa e inyectiva en D. Sea $D' = f(D)$. Entonces diremos que f es una aplicación conforme de D sobre D'.

En este caso, se tiene que D' es un dominio en $\mathbb{C}^*$ y que $f^{-1} : D' \to D$ es meromorfa e inyectiva en D'. Por tanto, $f : D \to D'$ es un homeomorfismo, con f y f^{-1} meromorfas.

Observación.

1. Si f es una aplicación conforme de D sobre D', entonces f^{-1} es una aplicación conforme de D' sobre D.
2. Si D_1, D_2 y D_3 son dominios en $\mathbb{C}^*$, con f aplicación conforme de D_1 sobre D_2 y g aplicación conforme de D_2 sobre D_3, entonces $g \circ f$ es una aplicación conforme de D_1 sobre D_3.

Se puede comprobar que, sean G_1, G_2 abiertos en $\mathbb{C}^*$ y $f : G_1 \to \mathbb{C}, g : G_2 \to \mathbb{C}$ meroformas tal que $f(G_1) \subset G_2$, entonces $g \circ f : G_1 \to \mathbb{C}^*$ es meromorfa.

Definición 1.3. Sean D_1 y D_2 dominios en $\mathbb{C}^*$. Diremos que D_1 y D_2 son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sobre D_2.

En el conjunto de los dominios en $\mathbb{C}^*$, el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.

Definición 1.4. Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$. Diremos que D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo.

Ejemplo.

- $D = \mathbb{C}$.
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$.
- $D = \mathbb{C}^* \setminus \overline{D}(a, R)$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$.
- $D = D(a, R)$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$.
- Un semiplano sin ∞.
- Un sector sin ∞.
- El plano menos dos semirrectas.
- $D = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$, no es simplemente conexo, porque $\mathbb{C}^* \setminus D = \{a, \infty\}$ no es conexo.

Lema 1.2. *Dado $a \in \mathbb{C}$, la transformación $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) = \frac{1}{z-a}$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $T(a) = \infty$ y $T(\infty) = 0$, es una aplicación conforme de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$.*

Lema 1.3. *Sea H un homeomorfismo de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$. Si D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$, entonces $H(D)$ es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$.*

Demostración. Como $H : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ y D es abierto y conexo en $\mathbb{C}^*$, entonces $H(D)$ es abierto y conexo en $\mathbb{C}^*$. Luego $H(D)$ es un dominio en $\mathbb{C}^*$. Como además $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo, entonces $\mathbb{C}^* \setminus H(D) = H(\mathbb{C}^* \setminus D)$ es conexo. Por tanto, $H(D)$ es un dominio simplemente conexo. □

Teorema 1.4. *Sean D_1 y D_2 dos dominios en $\mathbb{C}^*$ que son conformemente equivalentes. Entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.*

Demostración. Sea $F : D_1 \to D_2$ aplicación conforme. Consideramos todos los posibles casos teniendo en cuenta que los papeles de D_1 y D_2 son intercambiables.

- Si $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, se cumple.
- Si $D_1 = \mathbb{C}^*$, como $\mathbb{C}^*$ es cerrado y F es un homeomorfismo, se tiene que D_2 es compacto y por tanto cerrado. Entonces D_2 es abierto y cerrado en $\mathbb{C}^*$, que es conexo. Por tanto, $D_2 = \mathbb{C}^* = D_1$, ambos simplemente conexos.

- Si $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}^*$, consideramos dos casos.
    - Supongamos que $\infty \notin D_1$ y $\infty \in D_2$. D es un dominio en $\mathbb{C}$ y D_2 es un dominio en $\mathbb{C}^*$. Sea $a \in \mathbb{C}^* \setminus D_2$, de hecho $a \in \mathbb{C} \setminus D_2$. Tomamos la aplicación conforme $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) = \frac{1}{z-a}$ si $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{a\}$, $T(a) = \infty$. Tenemos el diagrama:

    $$D_1 \xrightarrow{F} D_2 \xrightarrow{T} T(D_2)$$

    $T(D_2)$ es un dominio en $\mathbb{C}^*$. Como $a \notin D_2$, entonces $T(a) = \infty \notin T(D_2)$. Así que $T(D_2)$ es un dominio en $\mathbb{C}$ conformemente equivalente a D_1. Luego D_1 es simplemente conexo si y solo si $T(D_2)$ es simplemente conexo. Por el lema anterior, esto es equivalente a que D_2 sea simplemente conexo.
    - Supongamos que $\infty \in D_1, D_2$. Se sigue de un razonamiento similar usando el apartado anterior.

$\square$

1.3. Dominios conformemente equivalentes al plano complejo y al plano complejo extendido

Veremos que hay tres clases de equivalencia de dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}^*$: $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$ y el disco unidad $\mathbb{D} = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

$\mathbb{C}^*$ es compacto. Si D es un dominio en $\mathbb{C}^*$ que es conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$, entonces D es compacto y por tanto cerrado. Como D es abierto, entonces $D = \mathbb{C}^*$.

$\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son homeomorfos. Por ejemplo, $T : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{z}{1-|z|}$ es un homeomorfismo.

Proposición 1.5. *$\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ no son conformemente equivalentes.*

Demostración. Supongamos que existe una aplicación conforme F de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{D}$. Entonces $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, F es constante. Esto contradice que F sea una aplicación conforme. $\square$

Proposición 1.6. *Sea f entera e inyectiva, entonces f es de la forma*

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$$

Demostración. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, el desarrollo de Taylor de f en 0. Entonces ∞ es una singularidad aislada de f y el desarrollo anterior coincide con el desarrollo de Laurent de f en ∞.

- Si ∞ es una singularidad evitable de f, entonces $a_n = 0$ si $n \geq 1$, así que f es constante. Esto no es posible.
- Si ∞ es un polo de orden N de f, entonces $a_N \neq 0$ y $a_n = 0$ si $n > N$. Luego f es un polinomio de grado N. f' es un polinomio de grado $N-1$, con $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Así que f' es constante, por tanto $N - 1 = 0 \Rightarrow N = 1$.
- Si ∞ es una singularidad esencial de f, entonces $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ es denso en $\mathbb{C}$. Por el teorema de la aplicación abierta, $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$ es abierto en $\mathbb{C}$. Estos conjuntos son disjuntos por ser f inyectiva, y esto no es posible.

$\square$

Si D es un dominio en $\mathbb{C}$ que es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, entonces $D = \mathbb{C}$. Veamos que esto es verdad. Sea $f : \mathbb{C} \to D$ aplicación conforme. f es entera e inyectiva, así que $f(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Luego $D = f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Las aplicaciones conformes de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$ son de la forma:

$$f(z) = \alpha z + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0$$

Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$ que es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$.

- Si $\infty \notin D$, entonces D es un dominio en $\mathbb{C}$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ y, por tanto, $D = \mathbb{C}$.
- Si $\infty \in D$, consideramos $F : \mathbb{C} \to D$ aplicación conforme. Como sabemos que $D \neq \mathbb{C}^*$, existe $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus D$, de hecho $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Sea

  $$T : D \to T(D), \quad T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$$

  Tenemos el diagrama:

  $$\mathbb{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{T} T(D) = D'$$

  D' es un dominio en $\mathbb{C}$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, así que $D' = \mathbb{C} = \mathbb{C}^* \setminus \{\infty\}$. Por tanto, $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$.

Hemos probado que si D es un dominio en $\mathbb{C}^*$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, entonces $D = \mathbb{C}$ o $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Es decir, $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Los dominios en $\mathbb{C}^*$ que son conformemente equivalentes a $\mathbb{C}$ son $\mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$

Sea $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ aplicación conforme. Sea $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $T(a) = \infty$. Consideramos dos casos:

1. Si $a = \infty$, $T(\infty) = \infty$. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación conforme, así que $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.
2. Si $a \in \mathbb{C}$, $T(a) = \infty$. T es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, así que a es un polo simple de T. Consideramos el desarrollo de Laurent de T en a.

   $$T(z) = \frac{A_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - a)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\},\ A_{-1} \neq 0$$

   ∞ es una singularidad aislada de T. De hecho, es una singularidad evitable.

   Sea $F(z) = T(z) - \frac{A_{-1}}{z-a}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. a es singularidad evitable de F y $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = T(\infty) \in \mathbb{C}$, así que ∞ es una singularidad evitable también. Evitando la singularidad de F en a, tenemos que F es entera y acotada. Por tanto F es constante. Así que $F(z) = a_0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

   $$T(z) = F(z) + \frac{A_{-1}}{z - a} = a_0 + \frac{A_{-1}}{z - a} = \frac{a_0 z + (A_{-1} - a_0 a)}{z - a}$$

En cualquiera de los dos casos, T es de la forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

No todas las aplicaciones de esta forma son aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$.

Ejemplo (Contraejemplo)**.** No es una aplicación conforme si $\alpha = \beta = 0$ o (α, β) y (γ, δ) son proporcionales. Por ejemplo:

$$T(z) = \frac{3z + 2}{6z + 4} = \frac{1}{2}$$

Para que las aplicaciones de esa forma sean aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$, se tiene que verificar que:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

En el caso (1), $T(z) = Az + B = \frac{Az+B}{0z+1}$, con $A, B \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$, luego:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = A \neq 0$$

En el caso (2),

$$\begin{vmatrix} a_0 & A_{-1} - a_0 a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a_0 a - A_{-1} + a_0 a = -A_{-1} \neq 0$$

Teorema 1.7. *Las aplicaciones conformes de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ son de la forma:*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Demostración. Sea $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ una aplicación de esa forma.

- Si $\gamma = 0$, entonces:

  $$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}, \quad \alpha, \delta \neq 0$$

  T es una aplicación conforme de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, con $\lim\limits_{z \to \infty} T(z) = \infty$. Definiendo $T(\infty) = \infty$, tenemos que $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es una aplicación conforme.

- Si $\gamma \neq 0$, entonces $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$,

  $$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\} \\ T\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) &= \infty \\ T(\infty) &= \frac{\alpha}{\gamma} \end{aligned}$$

  T es meromorfa en $\mathbb{C}^*$ y T es inyectiva.

  Veamos que T es sobreyectiva. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\alpha}{\gamma}\}$ y sea $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}$. Entonces:

  $$T(z) = w \Leftrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w \Leftarrow \alpha z + \beta = \gamma z w + \delta w \Leftrightarrow (\alpha - \gamma w) z = \delta w - \beta \Leftrightarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

  Por tanto, T es una aplicación conforme de $\mathbb{C}^*$ sobre $\mathbb{C}^*$.

Además, hemos probado que T^{-1} es de la forma:

$$T^{-1}(z) = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha}, \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Si $\gamma = 0$, también es válida esta expresión. $\square$

1.4. Funciones holomorfas en el disco unidad

Teorema 1.8 (Lema de Schwarz)**.** *Sea φ una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

1. $|\varphi(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.
2. $|\varphi'(0)| \leq 1$.

Además, se da la igualdad en (1) para algún $z \in \mathbb{D}$ con $z \neq 0$ o bien se da la igualdad en (2) si y solo si φ es una rotación de $\mathbb{D}$, es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $\varphi(z) = \lambda z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Observación. Si φ es una rotación, entonces se da la igualdad en (1) para todo $z \in \mathbb{D}$ y se da la igualdad en (2).

Observación. El teorema se puede enunciar de forma equivalente con la condición $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ en lugar de $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Es decir, si φ es holomorfa en $\mathbb{D}$ con $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, entonces $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.
Veamos que esto es cierto. Supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{D}$ con $|\varphi(z_0)| = 1$. Como $|\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por el principio del máximo φ es constante, luego $\varphi \equiv \varphi(0) = 0$. Esto contradice que $|\varphi(z_0)| = 1$.

Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Sea $a \in \mathbb{D}$ y $b = f(a) \in \mathbb{D}$. Definimos:

$$T_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \qquad T_a \in \mathcal{M},\ T_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D},\ T_a(0) = a$$
$$S_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, \qquad S_b \in \mathcal{M},\ S_b(\mathbb{D}) = \mathbb{D},\ S_b(b) = 0$$

Sea $\varphi = S_b \circ f \circ T_a$. φ es holomorfa en $\mathbb{D}$, con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $\varphi(0) = 0$. Por el lema de Schwarz,

1. $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
2. $|\varphi(0)| \leq 1$.

Además, se da la igualdad en (1) para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, o bien se da la igualdad en (2) si y solo si φ es una rotación.

Desarrollamos las dos expresiones:

1. Sea $z \in \mathbb{D}$. Consideramos $T_a^{-1}(z) \in \mathbb{D}$.

$$|\varphi(T_a^{-1}(z))| \leq |T_a^{-1}(z)| \Leftrightarrow |S_b(f(z))| \leq |S_a(z)| \Leftrightarrow \left|\frac{f(z)-b}{1-\bar{z}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Además, si se da la igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$, $z \neq a$, entonces φ es una rotación. Entonces, $f = S_b^{-1} \circ \varphi \circ T_a^{-1} \in \mathcal{M}$, con $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

2. Por la regla de la cadena, $\varphi'(0) = T_a'(0) f'(a) S_b'(b)$.

$$T_a'(z) = \frac{1+\bar{a}z-(z+a)\bar{a}}{(1+\bar{a}z)^2}, \qquad T_a'(0) = 1-|a|^2$$
$$S_b'(z) = \frac{1-\bar{b}z+(z-b)\bar{b}}{(1-\bar{b}z)^2}, \qquad S_b'(b) = \frac{1-|b|^2}{(1-|b|^2)} = \frac{1}{1-|b|^2}$$

Así que:

$$\varphi'(0) = (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2}$$

Por tanto:

$$|\varphi'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow (1-|a|^2)f'(a)\frac{1}{1-|b|^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

Además, si se da la igualdad, entonces φ es una rotación y por tanto $f \in \mathcal{M}$, con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Por tanto, hemos probado lo siguiente:

1. Para todo $z \in \mathbb{D}$,
$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$$
Si se da la igualdad para algún $z \in \mathbb{D}$ con $z \neq a$ entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
2. $$\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$
Si se da la igualdad entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

1.5. El teorema de Schwarz-Pick

Teorema 1.9 (Teorema de Schwarz-Pick)**.** *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

1. *Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,*
$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}\right|$$
2. *Para todo $z \in \mathbb{D}$,*
$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

Además, se da la igualdad en (1) para algún par de puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ con $z_1 \neq z_2$ o bien se da la igualdad en (2) para algún $z \in \mathbb{D}$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, en cuyo caso se da la igualdad en (1) para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ y se da la igualdad en (2) para todo $z \in \mathbb{D}$.

Proposición 1.10. *Sea $T \in \mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Entonces:*

1. *Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,*
$$\left|\frac{T(z_2)-T(z_1)}{1-\overline{T(z_1)}T(z_2)}\right| = \left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}\right|$$
2. *Para todo $z \in \mathbb{D}$,*
$$\frac{|T'(z)|}{1-|T(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

Definición 1.5. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, definimos:

$$\rho(z_1, z_2) = \left|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}\right|$$

Observamos que si $1-\overline{z_1}z_2 = 0$ entonces $\overline{z_1}z_2 = 1 \Rightarrow |z_1||z_2| = 1$. Como esto no ocurre, ρ está bien definida.

La primera parte del teorema de Schwarz-Pick se puede reescribir usando ρ.

Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, se da la igualdad para algún par de puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ y $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, en cuyo caso se da la igualdad para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Vamos a ver que ρ es una distancia en $\mathbb{D}$.

$$\begin{aligned} \rho :& D \times D \to \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) \mapsto \rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| \end{aligned}$$

- $\rho(z_1, z_2) \leq 0$.
- $\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1)$.
- $\rho(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.
- $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$.

Lema 1.11. *Para todo $a, z \in \mathbb{D}$,*

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|}$$

Observamos que si $a, z \in \mathbb{D}$, tenemos:

$$\rho(a, z) = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \right| = |S_a(z)| < 1, \quad S_a \in \mathcal{M}, S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$$

Dados $a \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, denotamos:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

Entonces, dado $z \in \mathbb{D}$, se tiene que:

$$z \in \Delta(a, r) \Leftrightarrow \rho(z, a) < r \Leftrightarrow |S_a(z)| < r \Leftrightarrow S_a(z) \in D(0, r) \Leftrightarrow z \in S_a^{-1}(D(0, r)) \Leftrightarrow z \in T_a(D(0, r))$$

Entonces $\Delta(a, r) = T_a(D(0, r))$.

$T_a(\partial D(0, r))$ es una circunferencia C contenida en $\mathbb{D}$. Sean c y R el centro y el radio de C, con $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Entonces $T_a(D(0, r)) = D(c, R)$. Por tanto:

$$\Delta(a, r) = T_a(D(0, r)) = D(c, R)$$

Así que $\Delta(a, r)$ es un disco euclídeo. Como $T_a(0) = a$ tenemos que $a \in \Delta(a, r)$, pero a no tiene por qué ser el centro del disco.

Vamos a calcular c y R. Si $a = 0$, $T_a(z) = z$ luego $T_a(D(0, r)) = D(0, r)$. Supongamos que $a \neq 0$. Sea L la recta que pasa por 0 y a. Calculamos $S_a(L)$ hallando la imagen de tres puntos.

$$\begin{aligned} S_a(0) &= -a \\ S_a(a) &= 0 \\ S_a\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) &= \infty \end{aligned}$$

$L' = S_a(L)$ es la recta que pasa por 0 y por $-a$, luego L' coincide con L. Como L' es perpendicular a $\partial D(0,r)$ en los dos puntos de corte y T_a preserva ángulos en esos dos puntos, entonces L es perpendicular a C. Por tanto c está en L.

El diámetro $\left[-r\frac{a}{|a|}, r\frac{a}{|a|}\right]$ se aplica mediante T_a en un diámetro de C, que es:

$$\left[T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right), T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right]$$

Entonces:

$$c = \frac{1}{2}\left(T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) + T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right)$$
$$R = \frac{1}{2}\left|T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) - T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)\right|$$

Calculamos:

$$T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right) = \frac{-r\frac{a}{|a|} + a}{1 - \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{-ra + a|a|}{|a| - r|a|^2} = \frac{a(|a|-r)}{|a|(1-r|a|)}$$
$$T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right) = \frac{r\frac{a}{|a|} + a}{1 + \bar{a}r\frac{a}{|a|}} = \frac{ra + a|a|}{|a| + r|a|^2} = \frac{a(|a|+r)}{|a|(1+r|a|)}$$

Se llega a que:

$$c = \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a$$
$$R = \frac{r(1-|a|^2)}{1-r^2|a|^2}$$

Observamos que los puntos de mayor y menor módulo de C son $T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)$ y $T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)$ Veamos que, de hecho,

$$\left|T_a\left(-r\frac{a}{|a|}\right)\right| = \frac{||a|-r|}{1-r|a|} \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} = \left|T_a\left(r\frac{a}{|a|}\right)\right|$$

- Si $|a| \geq r$,

$$\frac{|a|-r}{1-r|a|} \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} \Leftrightarrow |a| + r|a|^2 - r - r^2|a| \leq r + |a| - r^2|a| - r|a|^2 \Leftrightarrow 2r|a|^2 \leq 2r \Leftrightarrow |a| \leq 1$$

- Si $|a| < r$ se razona de forma análoga.

Entonces, para todo $z \in \partial D(0,r)$ se tiene que:

$$\frac{||a|-r|}{1-r|a|} \leq T_a(z) \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} \Leftrightarrow \frac{||a|-r|}{1-r|a|} \leq \left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| \leq \frac{r+|a|}{1+r|a|} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{||a|-|z||}{1-|z||a|} \leq \left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|z||a|} \leq |z|+|a|$$

Hemos probado esto para $a, z \in \mathbb{D}$, $a, z \neq 0$. Pero si $a = 0$ o $z = 0$ la desigualdad es trivial. Por tanto, esta cadena de desigualdades es cierta para todo $a, z \in \mathbb{D}$.

Cambiando a por $-a$, tenemos:

$$\frac{||a|-|z||}{1-|z||a|} \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|z||a|} \leq |z|+|a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Las desigualdades primera y segunda corresponden al último lema.

Por otro lado,

$$\rho(a,z) \le |z| + |a|, \quad z, a \in \mathbb{D}$$

Como $\rho(z_1, 0) = |z_1|$ y $\rho(0, z_2) = |z_2|$, entonces:

$$\rho(a,z) \le \rho(a,0) + \rho(0,z), \quad a, z \in \mathbb{D}$$

Esto es un caso particular de la desigualdad triangular.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$. Tenemos, usando el teorema de Schwarz-Pick,

$$\begin{aligned}\rho(z_1, z_3) = \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_3)) \le \rho(S_{z_2}(z_1, 0)) + \rho(0, S_{z_2}(z_3)) = \\ = \rho(S_{z_2}(z_1), S_{z_2}(z_2)) + \rho(S_{z_2}(z_2), S_{z_2}(z_3)) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)\end{aligned}$$

Así que ρ verifica la desigualdad triangular. Por tanto, ρ es una distancia en $\mathbb{D}$ que se denomina distancia pseudohiperbólica en $\mathbb{D}$.

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2} \right| = |S_{z_1}(z_2)| < 1$$

Si $a \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, el disco pseudohiperbólico de centro a y radio r es:

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) < r\}$$

No consideramos $r \ge 1$ porque $\Delta(a, r) = \mathbb{D}$. Sabemos que $\Delta(a, r)$ es un disco euclídeo, en concreto un disco abierto de centro $\frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2} a$ y radio $\frac{r(1-|a|^2)}{1-r^2|a|^2}$. Si $a = 0$, $\Delta(a, r) = D(0, r)$.

Esta distancia es equivalente a la distancia euclídea en $\mathbb{D}$.

Si $T \in \mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, se tiene que:

$$\rho(T(z_1), T(z_2)) = \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

Además, si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, se tiene que:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \le \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

1.6. Subordinación

Definición 1.6. Sean f, F holomorfas en $\mathbb{D}$. Diremos que f está subordinada a F, $f \prec F$, si existe w holomorfa en $\mathbb{D}$, con $w(0) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ tal que $f = F \circ w$.

Observación. w está en las condiciones del lema de Schwarz.

Veamos algunas propiedades:

- $f(0) = F(w(0)) = F(0)$.
- $f(\mathbb{D}) = F(w(\mathbb{D})) \subset F(\mathbb{D})$.
- Si $0 < r < 1$, veamos que

  $$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$

  Si $z \in D(0, r)$, $f(z) = F(w(z))$. Por el lema de Schwarz,

  $$|w(z)| \le |z| < r$$

- Si $0 < r < 1$, veamos que
$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$
Si $|z| = r$, como por el lema de Schwarz $|w(z)| \leq |z| = r$, entonces:
$$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z|\leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|\leq r} |F(z)|$$

- Si $|z| = r$, como por el lema de Schwarz $|w'(0)| \leq 1$ y además $f'(0) = F'(w(0))w'(0) = F'(0)w'(0)$, entonces:
$$|f(z)| = |F(w(z))| \leq \max_{|z|\leq r} |F(z)| \Rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|\leq r} |F(z)|$$

- No se verifica para todo $r \in (0, 1)$ que
$$\max_{|z|=r} |f'(z)| \leq \max_{|z|=r} |F'(z)|$$

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sean $f(z) = z^2$ y $F(z) = z$. Podemos tomar $w(z) = z^2$, que verifica $w(0) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, luego $f \prec F$. Si $0 < r < 1$,
$$\max_{|z|=r} |f'(z)| = \max_{|z|=r} 2|z| = 2r$$
$$\max_{|z|=r} |F'(z)| = 1$$

Observamos que no se cumple que $2r \leq 1$ para todo $r \in (0, 1)$.

Por la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick,
$$\frac{|w'(z)|}{1 - |w(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

Entonces, si $z \in \mathbb{D}$,
$$|f'(z)| = |F'(w(z))||w'(z)| \leq |F'(w(z))| \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2} \Leftrightarrow (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |w(z)|^2)|F'(w(z))|$$

Entonces, si $0 < r \leq 1$, tenemos que:
$$\sup_{|z|<r} (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq \sup_{|z|<r} (1 - |z|^2)|F'(z)|$$

Veamos que esto es cierto. Si $|z| < r$, como $|w(z)| \leq |z| < r$,
$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |w(z)|^2)|F'(w(z))| \leq \sup_{|z|<r} (1 - |z|^2)|F'(z)|$$

Proposición 1.12. *Sean f, F holomorfas en $\mathbb{D}$, con $f \prec F$. Entonces:*

1. $f(0) = F(0)$.
2. $f(\mathbb{D}) \subset F(\mathbb{D})$.
3. *Para todo $r \in (0, 1)$,*
$$f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$$
4. *Para todo $r \in (0, 1)$,*
$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |F(z)|$$

5. $|f'(0)| \leq |F'(0)|$.
6. *Para todo* $r \in (0,1]$,
$$\sup_{|z|<r}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq \sup_{|z|<r}(1-|z|^2)|F'(z)|$$

La última propiedad tiene mucha relación con el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que satisfacen:
$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty$$

Observación. Veamos qué se puede decir sobre los coeficientes de Taylor. Sean f y F holomorfas en $\mathbb{D}$ con $f \prec F$. Consideramos los desarrollos de Taylor de f y F para $z \in \mathbb{D}$:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

Usando (1), observamos que:
$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ A_0 = F(0) \end{cases} \Rightarrow a_0 = A_0$$

Con (2), vemos que:
$$\begin{cases} a_1 = f'(0) \\ A_1 = F'(0) \end{cases} \Rightarrow |a_1| \leq |A_1|$$

No podemos decir nada más. Por ejemplo, dado $N \geq 2$, podemos considerar $f(z) = z^N$ y $F(z) = z$. Observamos que $f \prec F$ con $w(z) = z^N$. Observamos que $a_N = 1$ y $A_N = 0$, luego no es cierto que $|a_n| \leq |A_n|$.

Veamos ahora un ejemplo importante de subordinación. Sea F una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre D, siendo D un dominio en $\mathbb{C}$. Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset D$ y $f(0) = F(0)$, entonces $f \prec F$.

Sea $w = F^{-1} \circ f$. w es holomorfa en $\mathbb{D}$, $w(0) = F^{-1}(f(0)) = F^{-1}(F(0)) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Además, $f = F \circ w$.

Por ejemplo:
$$P(z) = \frac{1+z}{1-z}$$
Esta es una transformación de Möbius que aplica $\partial\mathbb{D}$ en el eje imaginario. $P(\mathbb{D})$ es el semiplano de la derecha $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ y $P(0) = 1$. Entonces, si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, $f(\mathbb{D}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ y $f(0) = P(0)$, entonces $f \prec P$. Es decir, si f es holomorfa en $\mathbb{D}$, $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 1$, entonces $f \prec F$.

Sea $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : \mathrm{Re}(f(z)) > 0\ \forall z \in \mathbb{D}, f(0) = 1\}$. Entonces:

- $P \in \mathcal{P}$.
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow f \prec P$. De hecho, $\mathcal{P} = \{f \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : f \prec P\}$.
- $f \in \mathcal{P} \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{P}$.

Teorema 1.13. *Si* $f \in \mathcal{P}$, *entonces:*

1. *Para todo* $z \in \mathbb{D}$,
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

2. $|f'(0)| \leq 2$

Veamos cuáles son las aplicaciones conformes de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$.

Sea f una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$. Sea $a = f(0) \in \mathbb{D}$. Aplicando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick a f en 0, tenemos:

$$\frac{|f'(0)|}{1 - |a|^2} \leq 1$$

y si se diera igualdad, f sería una transformación de Möbius.

Sea $g = f^{-1}$, que es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Aplicando lo mismo en el punto a tenemos:

$$|g'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$$

y si se diera igualdad, g sería una transformación de Möbius.

Tenemos que:

$$|f'(0)| \leq 1 - |a|^2 \leq \frac{1}{|g'(a)|} = |f'(0)|$$

Por tanto se da igualdad, así que f es una transformación de Möbius con $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. En conclusión, las aplicaciones conformes de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ son:

$$\{\lambda T_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \{\lambda S_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \{\lambda \varphi_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\}$$

1.7. La métrica de Poincaré

Si γ es un camino en $\mathbb{C}$ y $f : sop(\gamma) \to \mathbb{C}$ es continua, entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

siendo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ.

Veamos algunas propiedades:

1. Si f es real, entonces $\int_\gamma f(z)|dz| \in \mathbb{R}$. Si además f es no negativa, entonces $\int_\gamma f(z)|dz| \geq 0$.
2. Si $f(z) = 1$,

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = long(\gamma)$$

3.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz| \leq \max_{z \in sop(\gamma)} |f(z)| long(\gamma)$$

4. Si $f, g : sop(\gamma) \to \mathbb{R}$ continuas y $f \leq g$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)|dz| \leq \int_\gamma g(z)|dz|$$

5.

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z)|dz| = \int_{\gamma_1} f(z)|dz| + \int_{\gamma_2} f(z)|dz|$$

6.
$$\int_{-\gamma} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|$$

7.
$$\int_\gamma (af(z)+bg(z))|dz| = a\int_\gamma f(z)|dz| + b\int_\gamma g(z)|dz|, \quad a,b\in\mathbb{C}$$

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Sea γ un camino en $\mathbb{D}$ con origen z_1 y extremo z_2. Podemos considerar la integral

$$\int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}|dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Como la función $z\in\mathbb{D}\mapsto \frac{1}{1-|z|^2}$ es real y positiva, entonces la integral es no negativa. Definimos:

$$\delta(z_1,z_2) = \text{ínf}\left\{\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2\right\}$$

Entonces:

- $\delta(z_1,z_2)\geq 0$.
- $\delta(z_1,z_2)=\delta(z_2,z_1)$.
- $\delta(z_1,z_2)=0 \Leftrightarrow z_1=z_2$.

Sean $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{D}$. Consideramos:

$$A_{12} = \left\{\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } z_1 \text{ y extremo } z_2\right\}$$

Se definen de manera análoga A_{13} y A_{23}. Observamos que $A_{12}+A_{23}\subset A_{13}$. Por tanto:

$$\text{ínf}(A_{12}+A_{13}) = \text{ínf}\, A_{12} + \text{ínf}\, A_{23} \geq \text{ínf}\, A_{13} \Leftrightarrow \delta(z_1,z_3)\leq\delta(z_1,z_2)+\delta(z_2,z_3)$$

δ es una distancia en $\mathbb{D}$, denominada distancia hiperbólica en $\mathbb{D}$.

Proposición 1.14.

1. *Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, entonces:*

$$\delta(f(z_1),f(z_2))\leq\delta(z_1,z_2), \quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{D}$$

2. *Si $T\in\mathcal{M}$ con $T(\mathbb{D})=\mathbb{D}$, entonces:*

$$\delta(T(z_1),T(z_2))=\delta(z_1,z_2), \quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{D}$$

Demostración.

1. Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ con $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ y sean $z_1,z_2\in\mathbb{D}$.

$$\delta(z_1,z_2) = \text{ínf}\left\{\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino de } z_1 \text{ a } z_2\right\}$$
$$\delta(f(z_1),f(z_2)) = \text{ínf}\left\{\int_\Gamma \frac{|dw|}{1-|w|^2} : \Gamma \text{ camino de } f(z_1) \text{ a } f(z_2)\right\}$$

Sea γ un camino en $\mathbb{D}$ con origen z_1 y extremo z_2, con parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. Entonces $\Gamma=f\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de un camino Γ en $\mathbb{D}$ con origen $f(z_1)$ y extremo $f(z_2)$. Tenemos:

$$\int_\Gamma \frac{|dw|}{1-|w|^2} = \int_a^b \frac{|\Gamma'(t)|}{1-|\Gamma(t)|^2}dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2}dt$$

Usando la segunda parte del teorema de Schwarz-Pick:

$$\int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{1-|f(\gamma(t))|^2}dt \leq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Luego tenemos que:

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \quad \forall\gamma$$

Por tanto, $\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq \gamma(z_1, z_2)$.

2. Se tiene aplicando (1) a T y T^{-1}.

□

Proposición 1.15. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$*, entonces:*

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+\rho(z_1,z_2)}{1-\rho(z_1,z_2)}$$

Demostración. Si $z_1 = z_2$ es trivial. Supongamos $z_1 \neq z_2$. Consideramos:

$$S_{z_1}(z) = \frac{z-z_1}{1-\overline{z_1}z}$$

Se tiene que $S_{z_1} \in \mathcal{M}$, $S_{z_1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $S_{z_1}(z_1) = 0$. Sabemos que $S_{z_1}(z_2) \neq 0$. Además,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2))$$

Tomamos $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tal que $\lambda S_{z_1}(z_2) \in (0,1)$. Sea $r = \lambda S_{z_1}(z_2)$. Entonces:

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, S_{z_1}(z_2)) = \delta(0, r)$$

Además, $r = |\lambda S_{z_1}(z_2)| = |S_{z_1}(z_2)| = \rho(z_1, z_2)$. Calculamos $\delta(0, r)$.

$$\delta(0,r) = \mathrm{ínf}\left\{\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} : \gamma \text{ camino en } \mathbb{D} \text{ con origen } 0 \text{ y extremo } r\right\}$$

Si $\gamma = [0, r]$,

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^r \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt == \frac{1}{2}\left[-\mathrm{Log}(1-t) + \mathrm{Log}(1+t)\right]_0^r =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}\frac{1+t}{1-t}\right]_0^r = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+r}{1-r}$$

Luego $\delta(0,r) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+r}{1-r}$.

Sea γ un camino en $\mathbb{D}$ con origen 0 y extremo r. Veamos que

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} \geq \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+r}{1-r}$$

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización $\mathcal{C}^1$ a trozos de γ. Sean $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$, de forma que $\gamma = u + iv$. $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ a trozos.

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1+|z|^2} = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt$$

Tenemos que:

$$\begin{cases} |\gamma(t)|^2 \geq u(t)^2 \Rightarrow 0 < 1 - |\gamma(t)|^2 \leq 1 - u(t)^2 \Rightarrow \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{1}{1-u(t)^2} \\ |\gamma'(t)| \geq |u'(t)| \geq 0 \end{cases}$$

Así que:

$$\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} \geq \frac{|u'(t)|}{1-u(t)^2} \geq \frac{u'(t)}{1-u(t)^2}$$

Luego:

$$\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geq \int_a^b \frac{u'(t)}{1-u(t)^2}dt = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{u'(t)}{1-u(t)} + \frac{u'(t)}{1+u(t)}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\mathrm{Log}(1-u(t)) + \mathrm{Log}(1+u(t))\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}\frac{1+u(t)}{1-u(t)}\right]_a^b = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+r}{1-r}$$

porque $u(a) = 0$ y $u(b) = r$. Por tanto,

$$\delta(z_1, z_2) = \delta(0, r) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z_1,z_2)}{1-\rho(z_1,z_2)}$$

$\square$

Observación. Sea $h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+x}{1-x}$, $x \in [0,1)$. Observamos que si $x < 1$, entonces $1+x \geq 1-x > 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 1$, así que $h : [0,1) \to [0,\infty)$. h es creciente, con $h(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \infty$. Podemos escribir $\delta = h \circ \rho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \xrightarrow{\rho} [0,1) \xrightarrow{h} [0,\infty)$. Fijado $a \in \mathbb{D}$, si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ está en $\mathbb{D}$ con $|z_n| \to 1$, entonces:

$$\rho(a, z_n) = |S_a(z_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Por tanto, $\delta(a, z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

$\mathbb{D}$ con esta distancia δ es un modelo de la geometría hiperbólica. Si γ es un camino en $\mathbb{D}$, la longitud de γ es

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

La geodésica que une $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ es el camino γ para el que:

$$\delta(z_1, z_2) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

Las geodésicas con respecto a δ son los diámetros de $\partial\mathbb{D}$ y los arcos de circunferencia ortogonales a $\partial\mathbb{D}$.

Capítulo 2

Familias normales

2.1. Familias normales

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D y $f : D \to \mathbb{C}$. Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, entonces f es holomorfa en D y $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} f'$ uniformemente en cada subconjunto compacto. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(k)}$ uniformemente en cada compacto.*

Definición 2.1. Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Diremos que $\mathcal{F}$ es finitamente normal si para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

Observación. El límite f de tal subsucesión es una función holomorfa en D, pero no tiene por qué pertenecer a $\mathcal{F}$.

Definición 2.2. Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Diremos que $\mathcal{F}$ es compacta si para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a una función que pertenece a $\mathcal{F}$.

En el conjunto $Hol(D)$ de las funciones holomorfas en D, con D abierto en $\mathbb{C}$, se puede definir una distancia d tal que $(Hol(D), d)$ es un espacio métrico completo, y en el que:

$$f_n \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow f_n \to f \text{ uniformemente en cada subconjunto compacto de } D$$

Si $\mathcal{F} \subset Hol(D)$, $\mathcal{F}$ es finitamente normal si y solo si $\mathcal{F}$ es relativamente compacto. Los compactos coinciden con la definición de familia compacta dada.

2.2. El teorema de Montel

Lema 2.2. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de D.*
2. *Para cada $a \in D$ existe $r_a > 0$ con $D(a, r_a) \subset D$ y f está uniformemente acotada en $D(a, r_a)$.*

Lema 2.3. *Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sean $f_n : D \to \mathbb{C}$ para $n = 1, 2, \dots$ y $f : D \to \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.*
2. *Para cada $a \in D$ existe $r_a > 0$ con $D(a, r_a) \subset D$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en $D(a, r_a)$.*

Lema 2.4. *Sean $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y $C_1, C_2 \neq \emptyset$. Si C_1 es compacto y C_2 es cerrado, entonces:*

$$dist(C_1, C_2) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in C_1, z_2 \in C_2\} > 0$$

Observación. Si C_1 no es compacto no es cierto en general.

Lema 2.5. *Sea $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$ y sea*

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ F(z) = dist(z, A) = \inf\{|z - a| : a \in A\}$$

Entonces F es continua y $F(z) = 0$ para todo $z \in A$. Si además A es cerrado, entonces $F(z) = \min\{|z - a| : a \in A\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Lema 2.6. *Sea $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideramos los conjuntos:*

$$B = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, A) < \varepsilon\}$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, A) \leq \varepsilon\}$$

Entonces B es abierto y C es cerrado, con $A \subset B \subset C$. Si además A es acotado, entonces B es acotado y C es compacto.

Proposición 2.7. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Supongamos que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en D. Sea K un subconjunto compacto de D. Entonces existe $A > 0$ tal que:*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|, \quad \forall z_1, z_2 \in K,\ \forall f \in \mathcal{F}$$

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D$ y para toda $f \in \mathcal{F}$. Sean $K \subset D$, K compacto. Sea $d > 0$ con $d < dist(K, \mathbb{C} \setminus D)$. Si $D = \mathbb{C}$, tomamos $d > 0$ cualquiera. Sea $z_0 \in K$. Entonces $D(z_0, d) \subset D$. De hecho, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $D(z_0, d + \varepsilon) \subset D$. Dada $f \in \mathcal{F}$, por la fórmula de Cauchy,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = d} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad \text{si } z \in D\left(z_0, \frac{d}{2}\right)$$

Entonces:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \max_{|\xi - z_0| = d} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2}$$

Podemos acotar:

$$|\xi - z| = |(\xi - z_0) + (z_0 - z)| \geq |\xi - z_0| - |z_0 - z| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

Así que $|\xi - z|^2 \geq \frac{d^2}{4} > 0$. Luego:

$$|f'(z)| \leq d \frac{M}{d^2/4} = \frac{4M}{d}$$

Hemos probado que si $z_0 \in K$, $f \in \mathcal{F}$ y $z \in D\left(z_0, \frac{d}{2}\right) \subset D$, entonces $|f'(z)| \leq \frac{4M}{d}$.

Ahora, sean $z_1, z_2 \in K$ y $f \in \mathcal{F}$. Supongamos que $|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$. Si $\xi \in [z_1, z_2]$, entonces $z_2 \in D\left(z_1, \frac{d}{2}\right) \subset D$ y $|\xi - z_1| \leq |z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$, $\xi \in D\left(z_1, \frac{d}{2}\right)$. Entonces $\xi \in D$ y $|f'(\xi)| \leq \frac{4M}{d}$. Por tanto:

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(\xi) d\xi \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{\xi \in [z_1, z_2]} |f'(\xi)| \leq |z_2 - z_1| \frac{4M}{d}$$

Entonces, si $z_1, z_2 \in K$, $|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$ y $f \in \mathcal{F}$, se tiene que:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|$$

Ahora, si $z_1, z_2 \in K$, $|z_2 - z_1| \geq \frac{d}{2}$ y $f \in \mathcal{F}$, tenemos:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq |f(z_2)| + |f(z_1)| \leq 2M = 2M\frac{d}{2}\frac{2}{d} \leq \frac{4M}{d}|z_2 - z_1| = A|z_2 - z_1|$$

□

Teorema 2.8 (Teorema de Arzelá-Ascoli)**.** *Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos, siendo (X_1, d_1) separable y (X_2, d_2) completo. Sea $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones continuas de X_1 en X_2 que verifica:*

1. *$\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua. Es decir, dado $x \in X_1$ se verifica que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X_1$ con $d_1(x, y) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*
2. *Para todo $x \in X_1$, el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto.*

Entonces, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{F}$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de X_1.

Teorema 2.9 (Teorema de Montel)**.** *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es finitamente normal.*
2. *$\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de D. Es decir, para cada $K \subset D$, K compacto, existe $M_K > 0$ tal que $|f(z)| \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in K$.*

Demostración.

- $\Rightarrow$ Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D, con $\mathcal{F}$ finitamente normal. Supongamos por reducción al absurdo que existe $K \subset D$, K compacto, tal que $\mathcal{F}$ no está uniformemente acotada en K. Entonces existen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en K y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ tales que $|f_n(z_n)| \to \infty$.

  Como $\mathcal{F}$ es una familia finitamente normal, existe $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{f_n\}$ tal que $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a una función f holomorfa en D. Como f es continua en K y K es compacto, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in K$. Por otro lado, como $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ uniformemente en K, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$, $z \in K \Rightarrow |f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$. Entonces $|f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z)| < 1 + M$, $z \in K$, $k \geq k_0$. En particular, $|f_{n_k}(z_{n_k})| < 1 + M$ si $k \geq k_0$. Esta es una contradicción.

- $\Leftarrow$ Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en D, uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de D. Tomamos $X_1 = D$ y $X_2 = \mathbb{C}$.

  1. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $\varepsilon > 0$, veamos que existe $\delta > 0$ tal que, si $z_1 \in D$, $|z_1 - z_0| < \delta$, $f \in \mathcal{F}$, entonces $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon$. Sea $R > 0$ con $\overline{D}(0, R) \subset D$. $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en $\overline{D}(z_0, R)$ y por tanto en $D(z_0, R)$. Sea $K = \overline{D}(z_0, \frac{R}{2})$, que es un subconjunto compacto de $D(z_0, R)$. Por la proposición anterior, existe $A > 0$ tal que

     $$|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|, \quad \text{si } z_1, z_2 \in K, f \in \mathcal{F}$$

     Entonces, si $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{A}, \frac{R}{2}\right)$, $z_1 \in D$, $|z_1 - z_0| < \delta$ y $f \in \mathcal{F}$, entonces $z_1 \in \overline{D}(z_0, \frac{R}{2}) = K$, así que:

     $$|f(z_1) - f(z_0)| \leq A|z_1 - z_0| < A\delta \leq A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

  2. Sea $z \in D$. El conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado, ya que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en $\{z\}$. Por tanto, su clausura es compacta.

  Entonces, por el teorema de Arzelá-Ascoli, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Por tanto, $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

□

Observación.

1. Sea D un abierto en $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{F}$ es una familia finitamente normal de funciones holomorfas en D, entonces la familia $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es finitamente normal. En general, si $k \in \mathbb{N}$, la familia $\mathcal{F}^{(k)} = \{f^{(k)} : f \in \mathcal{F}\}$ es finitamente normal.

   Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}'$. Entonces $g_n = f_n'$, $f_n \in \mathcal{F}$. Existe $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D a una función f holomorfa en D. Entonces $g_{n_k} = f_{n_k}' \to f'$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

2. Sea D abierto en $\mathcal{C}$ y sea $\mathcal{G}$ familia finitamente normal de funciones holomorfas en D con $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

3. Si $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y $K \subset D(a, R)$, K compacto, entonces existe $r \in (0, R)$ tal que $K \subset \overline{D}(a, r)$.

Ejemplo.

1. $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es entera y } |f(z)| \leq n \text{ si } |z| = n, n = 1, 2, \dots\}$. Sea $K \subset \mathbb{C}$, K compacto, y sea $f \in \mathcal{F}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \overline{D}(0, n_0)$. Además, $|f(z_0)| \leq n_0$ si $|z| = n_0$. Por el principio del máximo, $|f(z)| \leq n_0$ si $|z| \leq n_0$. En particular, $|f(z)| \leq n_0$ si $z \in K$ y $f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en K. Por el teorema de Montel, $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

2. $\mathcal{P} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}, f(0) = 1, \operatorname{Re}(f(z)) > 0\ \forall z \in \mathbb{D}\}$. Sea $K \subset \mathbb{D}$, K compacto. Si $f \in \mathcal{P}$ y $z \in K$,

   $$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

   Existe $R \in (0, 1)$ tal que $K \subset \overline{D}(0, R)$. Entonces, si $f \in \mathcal{P}$ y $z \in K$,

   $$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \leq \frac{1 + R}{1 - R}$$

   $\mathcal{P}$ está uniformemente acotada en K para todo subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Por el teorema de Montel, $\mathcal{P}$ es finitamente normal.

   Observación. Si quitamos la condición $f(0) = 1$ en $\mathcal{P}$, la familia deja de ser finitamente normal. Por ejemplo, $f_n(z) = n$, $n = 1, 2, \dots$, $\{f_n : n = 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{P}$. Si tomamos $K = \{0\}$, $\mathcal{P}$ no está uniformemente acotada en K, así que $\mathcal{P}$ no es finitamente normal.

   Recordemos que $\mathcal{P} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}, f \prec P\}$, con $P(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Esto es un caso particular del siguiente ejemplo.

3. Sea F holomorfa en $\mathbb{D}$ y sea

   $$\mathcal{F}_F = \{f : f \text{ holomorfa en } \mathbb{D}, f \prec F\}$$

   Entonces $\mathcal{F}_F$ es finitamente normal.

4. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Sea $\mathcal{F}$ una familia finitamente normal de funciones holomorfas en $D(a, R)$. Para cada $f \in \mathcal{F}$, consideramos el desarrollo de Taylor de f centrado en a

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z - a)^n, \quad z \in D(a, R)$$

   Entonces $M_n = \sup_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)| < \infty$ para cada n y la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z - a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R, y por tanto define una función holomorfa en $D(a, R)$.

Demostración. Fijado n, si $f \in \mathcal{F}$ tenemos:

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Rightarrow |a_n(f)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

La familia $\mathcal{F}^{(n)}$ es finitamente normal y por tanto está uniformemente acotada en el conjunto $\{a\}$, por lo que $\{f^{(n)}(a) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado. Es decir, $\sup_{f\in\mathcal{F}} |f^{(n)}(a)| < \infty$. Entonces $M_n = \sup_{f\in\mathcal{F}} |a_n(f)| = \sup_{f\in\mathcal{F}} \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} < \infty$. Consideramos la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$$

Si $r \in (0, R)$, tenemos que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en $\overline{D}(a, r)$, y por tanto existe $M(r) > 0$ tal que $|f(z)| \leq M(r)$ si $z \in \overline{D}(a, r)$ y $f \in \mathcal{F}$. Si $f \in \mathcal{F}$, por la fórmula de Cauchy,

$$a_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad \text{si } r \in (0, R), n = 0, 1, 2, \ldots$$

Así que:

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \leq r\frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}, \quad \text{si } r \in (0, R), n = 0, 1, 2, \ldots, f \in \mathcal{F}$$

Tomando supremo en $f \in \mathcal{F}$ tenemos que:

$$|M_n| = M_n \leq \frac{M(r)}{r^n} \Rightarrow \sqrt[n]{M_n} \leq \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r}, \quad \text{si } r \in (0, R), n = 0, 1, 2, \ldots$$

Por tanto:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r} = \frac{1}{r}, \quad \text{si } r \in (0, R)$$

Haciendo $r \to R$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} \leq \frac{1}{R}$$

Entonces el radio de convergencia es mayor o igual que R. □

5. $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D} \text{ y } \iint_{\mathbb{D}} |f(z)|dxdy \leq M\}$, siendo $M > 0$. Veamos que $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

   Sea $K \subset \mathbb{D}$, K compacto. Tomamos $r \in (0, 1)$ con $K \subset D(0, r)$. Sea $f \in \mathcal{F}$ y $z \in K$, por la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta} - z}\rho d\rho, \quad r \leq \rho < 1$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - z|}\rho d\rho, \quad r \leq \rho < 1$$

$$\int_{\frac{1+r}{2}}^{1} |f(z)|d\rho \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1+r}{2}}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - z|}\rho d\theta d\rho = \frac{1}{2\pi}\iint_{\frac{1+r}{2}<|w|<1} \frac{|f(w)|}{|w-z|}dxdy$$

   Como $|w - z| \geq |w| - |z| > \frac{1+r}{2} - r = \frac{1-r}{2} > 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\frac{1+r}{2}<|w|<1} \frac{|f(w)|}{|w-z|}dxdy \leq \frac{1}{2\pi}\frac{2}{1-r}\iint_{\frac{1+r}{2}<|w|<1} |f(w)|dxdy \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi(1-r)}\iint_{\mathbb{D}} |f(w)|dxdy \leq \frac{M}{\pi(1-r)}$$

Por otro lado,

$$\int_{\frac{1+r}{2}}^{1} |f(z)|d\rho = |f(z)|\left(1 - \frac{1+r}{2}\right) = |f(z)|\frac{1-r}{2}$$

Entonces:

$$|f(z)|\frac{1-r}{2} \leq \frac{M}{\pi(1-r)} \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2M}{\pi(1-r)^2}$$

Por tanto, $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en K.

Teorema 2.10. *Sean $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en $D(a,R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es finitamente normal.*
2. *Existe una sucesión $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $M_n \geq 0$ para todo n tal que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R y tal que, si para cada $f \in \mathcal{F}$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z-a)^n, \quad z \in D(a,r)$$

se tiene que $|a_n(f)| \leq M_n$ para todo n y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Demostración.

- $\Rightarrow$ $M_n = \sup_{f\in\mathcal{F}} |a_n(f)|$.
- $\Leftarrow$ Sea $K \subset D(a,R)$, K compacto. Existe $r \in (0,R)$ tal que $K \subset \overline{D}(a,r)$. Si $z \in K$ y $f \in \mathcal{F}$, se tiene:

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)(z-a)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)||z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n|z-a|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n r^n < \infty$$

ya que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n(z-a)^n$ converge para $z = a + r$. $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en K.

□

2.3. El teorema de Stieltjes-Vitali

Teorema 2.11 (Teorema de Stieltjes-Vitali)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ una familia finitamente normal de funciones holomorfas en D. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Si existe $A \subset D$ tal que A tiene algún punto de acumulación en D, para el que existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) \in \mathbb{C}$ para todo $a \in A$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D.*

Demostración.

1. Veamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en D. Sea $z^* \in D$. Supongamos por reducción al absurdo que $\{f_n(z^*)\}$ no converge. Como $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en el conjunto $\{z^*\}$, tenemos que $\{f_n(z^*)\}$ está acotado. Por tanto, existen $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{f_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ subsucesiones de $\{f_n\}$, y $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ distintos, tales que $f_{n_i}(z^*) \xrightarrow[i\to\infty]{} w_1$, $f_{m_i}(z^*) \xrightarrow[i\to\infty]{} w_2$. Como $\mathcal{F}$ es finitamente normal, existen $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesiones de $\{f_{n_i}\}$ y $\{f_{m_i}\}$, respectivamente, que convergen uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Sean g y h los respectivos límites. Entonces g y h son holomorfas en D. Tenemos que:

$$g_k(z^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} w_1, \qquad g(z^*) = w_1$$
$$h_k(z^*) \xrightarrow[k\to\infty]{} w_2, \qquad h(z^*) = w_2$$

Si $a \in A$, existe $\lim_{n\to\infty} f_n(a) \in \mathbb{C}$, así que $g(a) = h(a)$. g y h son holomorfas en D, $g = h$ en A y A tiene algún punto de acumulación en D. Por el teorema de identidad, $g = h$ en D. Pero $g(z^*) = w_1 \neq w_2 = h(z^*)$. Esto contradice nuestro supuesto.

2. Sea $K \subset D$, K compacto. Sea $\alpha > 0$ tal que $2\alpha < dist(K, \mathbb{C} \setminus D)$. Si $D = \mathbb{C}$, tomamos $\alpha > 0$ cualquiera. Sean $G = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, K) < \alpha\}$ y $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, K) \leq \alpha\}$. G es abierto, K_1 es compacto y $K \subset G \subset K_1 \subset D$.

   Veamos que $K_1 \subset D$. Si $z \in K_1$, $dist(z, K) \leq \alpha$. Supongamos que $z \in D$. Tomamos $w \in K$ con $|z - w| < 2\alpha$. Entonces $2\alpha < dist(K, \mathbb{C} \setminus D) \leq |w - z| < 2\alpha$. Esto contradice nuestra hipótesis.

   $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en K_1 y por tanto en G. $K \subset G$, K compacto. Por una proposición previa, existe $A > 0$ tal que $|f(z_2) - f(z_1)| \leq A|z_2 - z_1|$ si $z_1, z_2 \in K$ y $f \in \mathcal{F}$. Vamos a ver que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en K. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \frac{\varepsilon}{3A} > 0$. Tenemos que si $z_1, z_2 \in K$, $|z_1 - z_2| < \delta$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq A|z_1 - z_2| < A\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Consideramos la familia $\{D(z, \delta) : z \in K\}$. Como K es compacto, existen $z_1, z_2, \ldots, z_N \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} D(z_j, \delta)$. Para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$, la sucesión $\{f_n(z_j)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, ya que $\{f_n\}$ converge puntualmente en D. Por tanto, exsite $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_j \Rightarrow |f_n(z_j) - f_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $n_0 = \max\{n_j : j = 1, \ldots, N\}$. Si $n, n \geq n_j$ y $z \in K$, hay que probar que $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$. Tomamos $j \in \{1, \ldots, N\}$ con $z \in D(z_j, \delta)$.

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_m(z_j)| + |f_m(z_j) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Ejemplo. Para $x \geq 0$, tenemos que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ es una sucesión creciente y

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Veamos que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, siendo la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Sea $D = \mathbb{C}$, $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Cada f_n es una función entera. Veamos que $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

Sea $K \subset \mathbb{C}$, K compacto. Tomamos $R > 0$ con $K \subset \overline{D}(0, R)$. Si $k \in K$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(z)| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n \leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{R}{n}\right)^n \leq e^R$$

Sea $A = [0, 1]$. A tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ para todo $x \in A$. Por el teorema de Stieltjes-Vitali, $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Sea f el límite, entonces f es entera. Si $x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = e^x$. Por el teorema de identidad, $f(z) = e^z$ si $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.12 (Teorema de Lindelöf)**.** *Sea f holomorfa y acotada en $\mathbb{D}$. Sea $\xi \in \partial\mathbb{D}$ y supongamos que existe el límite radial, es decir, $\lim_{r\to 1^-} f(r\xi) = L \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ existe el límite tangencial de f en ξ, es decir,*

$$\lim_{z\to\xi, z\in S_\alpha(\xi)} f(z) = L$$

siendo $S_\alpha(\xi)$ el vector de vértice ξ y ángulo 2α, simétrico con respecto al segmento $[0, \xi]$.

Teorema 2.13. *Sea f holomorfa y acotada en $D(1, 1)$. Supongamos que existe $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ existe*

$$\lim_{z\to 0, |\mathrm{Arg}(z)|<\alpha} f(z) = L$$

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ si $z \in D(1,1)$. Consideramos la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(z) = f\left(\frac{z}{n}\right)$. Cada f_n es holomorfa en $D(1,1)$. La familia $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está uniformemente acotada en D, porque si $z \in D$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(z)| = \left|f\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leq M$. Así que $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

Sea $A = (0,1)$. Si $x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = L$. Por el teorema de Stieltjes-Vitali, $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $D(1,1)$. Sea g el límite, entonces g es holomorfa en $D(1,1)$ y $g(x) = L$ para todo $x \in A$. Por el teorema de identidad, $g(z) = L$ para todo $z \in D(1,1)$. Hemos probado que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

Sea $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sea $K = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\cos(\alpha)}{2} \leq |z| \leq \cos(\alpha), |\operatorname{Arg}(z)| \leq \alpha\right\}$. K es un subconjunto compacto de $D(1,1)$, así que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ uniformemente en K. Es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ y $z \in K$, entonces $|f_n(z) - L| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \frac{\cos(\alpha)}{2n_0} > 0$. Sea z tal que $0 < |z| < \delta$ y $|\operatorname{Arg}(z)| < \alpha$. Observamos que $|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2n_0} \leq \frac{\cos(\alpha)}{2}$. Tomamos n_z el primer natural para el que $n_z|z| \geq \frac{\cos(\alpha)}{2}$. Como $|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2n_0} \Leftrightarrow n_0|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2}$, entonces $1 \leq n_0 < n_z$. Por otro lado,

$$(n_z - 1)|z| < \frac{\cos(\alpha)}{2} \Leftrightarrow n_z|z| - |z| < \frac{\cos(\alpha)}{2} \Leftrightarrow n_z|z| < |z| + \frac{\cos(\alpha)}{2} < \frac{\cos(\alpha)}{2} + \frac{\cos(\alpha)}{2} = \cos(\alpha)$$

Así que $\frac{\cos(\alpha)}{2} \leq n_z|z| = |n_z z| < \cos(\alpha)$. Además, $|\operatorname{Arg}(n_z z)| = |\operatorname{Arg}(z)| < \alpha$. Por tanto, $n_z z \in K$. Entonces:

$$|f_{n_k}(n_z z) - L| = |f(z) - L| < \varepsilon$$

□

2.4. Teoremas de Hurwitz

Teorema 2.14 (Teorema de Rouché)**.** *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y sea J un camino de Jordan en D. Sean f y g funciones holomorfas en D tales que*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{si } z \in J$$

Entonces:

1. *$I(J) \subset D$.*
2. *Ni f ni g se anulan en J.*
3. *f y g tienen el mismo número de ceros en $I(J)$.*

Teorema 2.15 (Primer teorema de Hurwitz)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas y nunca nulas en D, que converge uniformemente en cada subconjunto de D a una función f. Entonces f es nunca nula en D o bien f es idénticamente nula en D.*

Demostración. Si $f \equiv 0$ en D, no hay nada que hacer. Supongamos que $f \not\equiv 0$ en D. Supongamos por reducción al absurdo que existe $a \in D$ con $f(a) = 0$. Entonces a es un cero aislado de f. Podemos tomar $R > 0$ tal que $D(a, 2R) \subset D$ y f no tiene ceros en $D(a, 2R) \setminus \{a\}$.

Sea C_R la circunferencia $|z - a| = R$. Como f no tiene ceros en C_R, existe $\alpha > 0$ tal que $|f(z)| > \alpha$ para todo $z \in C_R$. Como $f_n \to f$ uniformemente en C_R, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0, z \in C_R \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \alpha$. Entonces, si $n \geq n_0$ y $z \in C_R$, se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| < \alpha < |f(z)|$$

Por el teorema de Rouché, f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, R)$. Pero f_n es nunca nula en D, por lo que no tiene ceros en $D(a, R)$, mientras que $f(a) = 0$. Esta es una contradicción. Entonces f es nunca nula en D. □

Teorema 2.16 (Segundo teorema de Hurwitz)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en D. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de D, entonces f es inyectiva o constante.*

Demostración. Sabemos que f es holomorfa en D. Supongamos que f no es constante. Sean $a, b \in D$ con $a \neq b$. Veamos que $f(a) \neq f(b)$. $D \setminus \{a\}$ es un dominio en $\mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$ si $z \in D \setminus \{a\}$. Cada g_n es holomorfa y nunca nula en $D \setminus \{a\}$. $f_n \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Sea $g(z) = f(z) - f(a)$, $z \in D \setminus \{a\}$. Entonces $g_n \to g$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $D \setminus \{a\}$. Por el teorema anterior, $g \equiv 0$ en $D \setminus \{a\}$ o bien g es nunca nula en $D \setminus \{a\}$.

1. Si $g \equiv 0$ en $D \setminus \{a\}$, entonces $f(z) = f(a)$ si $z \in D \setminus \{a\} \Rightarrow f(z) = f(a)$ si $z \in D$. f es constante, lo que contradice nuestra hipótesis.
2. Si $g(z) \neq 0$ si $z \in D \setminus \{a\}$, en particular $g(b) = f(b) - f(a) \neq 0 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

$\square$

Capítulo 3

El teorema de Riemann de la aplicación conforme

3.1. Preliminares

Recordemos algunos conceptos y resultados.

Definición 3.1. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa en D.

- g es una rama de $\sqrt{f}$ en D si $g : D \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $g(z)^2 = f(z)$ para todo $z \in D$.
- g es una rama de $\log(f)$ en D si $g : D \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in D$.

Proposición 3.1. *Sean D un dominio en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa y nunca nula en D.*

1. *Si g es una rama de $\sqrt{f}$ en D, entonces g es holomorfa en D y $g'(z) = \frac{f'(z)}{2g(z)}$ para todo $z \in D$.*
2. *Si g es un rama de $\log(f)$ en D, entonces g es holomorfa en D y $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in D$.*
3. *Existe una rama de $\log(f)$ en D si y solo si $\frac{f'}{f}$ tiene primitiva en D.*

Proposición 3.2. *Sean D un dominio en $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una función continua en D. Entonces f tiene primitiva en D si y solo si $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ en D.*

Definición 3.2. Si D es un dominio en $\mathbb{C}$ y Γ es un ciclo en D, se dice que Γ es homólogo a cero módulo D, y se denota $\Gamma \sim 0(modD)$, si $n(\Gamma, a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{C} \setminus D$.

Teorema 3.3 (Versión general del teorema de Cauchy)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea Γ un ciclo en D. Las dos siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\Gamma \sim 0(modD)$.
2. *$\int_\Gamma f(z)dz = 0$ para toda función f holomorfa en D.*

3.2. Dominios simplemente conexos

Definición 3.3. Si D es un dominio en $\mathbb{C}$, se dice que D es simplemente conexo si $\mathbb{C}^* \setminus D$ es conexo.

Hay una serie de caracterizaciones para los dominios simplemente conexos, que se pueden deducir de los resultados anteriores.

Teorema 3.4. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *D es simplemente conexo.*
2. *Todo ciclo en D es homólogo a cero módulo D.*
3. *Todo camino cerrado en D es homólogo a cero módulo D.*
4. *$\int_\Gamma f(z)dz = 0$ para toda f holomorfa en D y para todo ciclo Γ en D.*
5. *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda f holomorfa en D y para todo camino cerrado γ en D.*
6. *Toda función holomorfa en D tiene primitiva.*
7. *Para toda función f holomorfa y nunca nula en D, existe una rama de $\log(f)$ en D.*
8. *Para toda función f holomorfa y nunca nula en D, existe una rama de $\sqrt{f}$ en D.*

Recordamos que:

- Dos dominios D_1 y D_2 en $\mathbb{C}^*$ son conformemente equivalentes si existe una aplicación conforme f de D_1 sobre D_2.
- En el conjunto de los dominios en $\mathbb{C}^*$, el ser conformemente equivalentes es una relación de equivalencia.
- Si D_1 y D_2 son dos dominios en $\mathbb{C}^*$ que son conformemente equivalentes, entonces D_1 es simplemente conexo si y solo si D_2 es simplemente conexo.
- $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$ y el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ son tres dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}^*$, que no son conformemente equivalentes.
- El único dominio en $\mathbb{C}^*$ conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$ es $\mathbb{C}^*$.

Vamos a ver que, además de $\mathbb{C}*$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$, no hay más dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}^*$ módulo la relación de equivalencia. Es decir, si D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$, entonces D es conformemente equivalente a uno de los tres: $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{D}$. Por tanto se tendrá que, si D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$, con $D \neq \mathbb{C}$, entonces D es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.

Definición 3.4. Sea D un dominio en $\mathbb{C}^*$. Llamamos automorfismos de D a aquellas aplicaciones conformes de D sobre D. El conjunto de todos los automorfismos de D se denota $Aut(D)$, y tiene estructura de grupo con la composición.

Tenemos que

$$\begin{aligned} Aut(\mathbb{C}^*) &= \mathcal{M} \\ Aut(\mathbb{C}) &= \{f_{\alpha,\beta} : f_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\} = \{T \in \mathcal{M} : T(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\} \\ Aut(\mathbb{D}) &= \{\lambda T_a : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, a \in \mathbb{D}\} = \{T \in \mathcal{M} : T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\} \end{aligned}$$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de dominios en $\mathbb{C}$ para los que podemos encontrar una aplicación conforme del dominio sobre $\mathbb{D}$.

1. Un disco abierto, $D(a, R)$, $a \in \mathbb{C}, R > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\to D(a, R) \\ z &\mapsto a + rz \end{aligned}$$

2. Un semiplano.

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\to \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ z &\mapsto P(z) \end{aligned}$$

donde $P(z) = \frac{1+z}{1-z}$, es una aplicación conforme.

Componiendo con una rotación y una traslación, vemos que $\mathbb{D}$ es conformemente equivalente a cualquier semiplano.

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a + e^{i\theta}P(z) \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{C}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

3. El exterior de un disco, $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > R\} \cup \{\infty\}$, $a \in \mathbb{C}, R > 0$.

$$\begin{aligned} D(a,R) &\to \{z \in \mathbb{C} : |z-a| > R\} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

4. El plano menos una semirrecta, $\mathbb{C} \setminus \{a + re^{i\theta}, r \geq 0\}$, $a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

es una aplicación conforme. Así que

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\mapsto P(z)^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \end{aligned}$$

es una aplicación conforme.

Componiendo con una rotación y una traslación, vemos que $\mathbb{D}$ es conformemente equivalente al plano menos una semirrecta cualquiera.

5. La función exponencial no es inyectiva.

$$z = x + iy_0 \mapsto e^z = e^{x+iy_0} = e^x(\cos(y_0) + i\sin(y_0))$$

Es inyectiva en cualquier banda horizontal abierta de amplitud menor o igual que 2π. Por ejemplo,

$$\exp : \left\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{H}$$

es una aplicación conforme. Como $\mathbb{H}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$, tenemos que esta banda es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.

Componiendo con el producto por un número real, una rotación y una traslación, vemos que $\mathbb{D}$ es conformemente equivalente a cualquier banda.

6. Sectores.

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\alpha}{2}\right\} \xrightarrow{\exp} S$$

donde S es el sector de vértice 0 y amplitud α, es una aplicación conforme.

7. $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{D} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

$$\mathbb{D}^+ \xrightarrow{P} \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

es una aplicación conforme. El dominio $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ es un sector, así que es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.

3.3. El teorema de Riemann de la aplicación conforme

Teorema 3.5 (Teorema de Riemann de la aplicación conforme)**.** *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$. Entonces existe una única aplicación conforme f de D sobre $\mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$.*

Observación.

1. Existen infinitas aplicaciones conformes de D sobre $\mathbb{D}$. Basta cambiar el punto z_0 o componer con una rotación.
2. Para la demostración, las condiciones
   a) D simplemente conexo.
   b) $D \neq \mathbb{C}$.

   solo las vamos a utilizar para deducir que:
   - $\mathbb{C} \setminus D$ tiene más de un punto.
   - Si h es holomorfa y nunca nula en D, existe una rama de $\sqrt{h}$ en D.

Teorema 3.6. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ tal que:*

1. *$\mathbb{C} \setminus D$ tiene más de un punto.*
2. *Para toda función h holomorfa y nunca nula en D, existe una rama de $\sqrt{h}$ en D.*

Sea $z_0 \in D$. Entonces existe una única aplicación conforme f de D sobre $\mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{f : f \text{ es holomorfa e inyectiva en } D, f(D) \subset \mathbb{D}, f(z_0) = 0\}$.

1. Veamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Por (1), existen $a, b \in \mathbb{C} \setminus D$ con $a \neq b$. Sea $\varphi(z) = \frac{z-a}{z-b}$, $z \in D$.

   $$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{vmatrix} = -b + a \neq 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{M}$$

   φ es holomorfa e inyectiva en D y φ es nunca nula en D, porque $a, b \notin D$. Por (2), existe ψ rama de $\sqrt{\varphi}$ en D. ψ es holomorfa e inyectiva en D y ψ es nunca nula.

   Además, se tiene que si $w \in \psi(D)$, entonces $-w \notin \psi(D)$. Veámoslo. Supongamos que $w \in \psi(D)$ y $-w \in \psi(D)$. Entonces:

   $$\begin{aligned} w &= \psi(z_1), \quad z_1 \in D \\ -w &= \psi(z_2), \quad z_2 \in D \end{aligned}$$

   $$\psi(z_1)^2 = w^2 = (-w)^2 = \psi(z_2)^2 \Leftrightarrow \varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow w = -w \Leftrightarrow w = 0 \in \psi(D)$$

   Sin embargo, ψ es nunca nula en D.

   Tomamos $w_0 \in \psi(D)$. Como $\psi(D)$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(0, r) \subset \psi(D)$. Entonces, si $z \in D$ se tiene que $\psi(z) \in \psi(D)$ y por tanto $-\psi(z) \notin \psi(D)$, de manera que $-\psi(z) \notin \overline{D}(w_0, r)$. Es decir,

   $$|-\psi(z) - w_0| > r \Leftrightarrow |\psi(z) + w_0| > r > 0 \Leftrightarrow \frac{r}{|\psi(z) + w_0} < 1$$

   Sea $h(z) = \frac{r}{\psi(z)+w_0}$, $z \in D$. h es holomorfa e inyectiva en D y $|h(z)| < 1$ para todo $z \in D$, luego $h(D) \subset \mathbb{D}$. Consideramos la transformación de Möbius $S_{h(z_0)}(z) = \frac{z-h(z_0)}{1-\overline{h(z_0)}z}$. Sabemos que $S_{h(z_0)}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $S_{h(z_0)}(h(z_0)) = 0$. Por tanto, $f = S_{h(z_0)} \circ h \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en D. Por el teorema de Montel, $\mathcal{F}$ es finitamente normal.

3. Sea $M = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)|$, $0 \leq M \leq \infty$. Si $f \in \mathcal{F}$, f es holomorfa e inyectiva en D, por lo que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $M \neq 0$. Como $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es finitamente normal, entonces está uniformemente acotada en $\{z_0\}$. Entonces $\{f'(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado, así que $M = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)| < \infty$. Por tanto, $0 < M < \infty$.

   Tomamos una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = M$. Como $\mathcal{F}$ es finitamente normal, existe $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a una función F uniformemente en cada subconjunto comapcto de D. Entonces F es holomorfa en D y cada f_{n_k} es holomorfa e inyectiva en D. Por el segundo teorema de Hurwitz, F es inyectiva o constante. Como $f_{n_k}' \to F'$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, se tiene que $f_{n_k}'(z_0) \to F'(z_0)$, así que $|f_{n_k}'(z_0)| \to |F'(z_0)| = M > 0$. Luego F no es constante. Entonces F es inyectiva. Además, $F(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = 0$ porque $f_{n_z}(z_0) = 0$. Si $z \in D$, $F(z) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z)$, así que $|F(z)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_{n_z}(z)| \leq 1$ porque $|f_{n_z}(z)| < 1$. Pero si $|F(z)| = 1$ para algún $z \in D$, por el principio del máximo F sería constante, lo cual es imposible. Por tanto, $|F(z)| < 1$ para todo $z \in D$, luego $F(D) \subset \mathbb{D}$. Entonces $F \in \mathcal{F}$ y $|F'(z_0)| = M$.

4. Veamos que $F(D) = \mathbb{D}$. Supongamos por reducción al absurdo que existe $\alpha \in \mathbb{D} \setminus F(D)$. Consideramos $S_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ transformación de Möbius con $S_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y $S_\alpha(\alpha) = 0$. Sea $h = S_\alpha \circ F$. h es holomorfa e inyectiva en D. Además, h es nunca nula en D y $h(D) \subset \mathbb{D}$. Por (2), existe g una rama de $\sqrt{h}$ en D, es decir, $g^2 = h$ en D. g es holomorfa, inyectiva y nunca nula en D, con $g(D) \subset \mathbb{D}$. Sea $G = S_{g(z_0)} \circ g$. G es holomorfa e inyectiva en D, con $G(D) \subset \mathbb{D}$ y $G(z_0) = 0$. Por tanto, $G \in \mathcal{F}$.

   Calculemos $|G'(z_0)|$.
   $$G'(z_0) = g'(z_0)S_{g(z_0)}'(g(z_0))$$
   En primer lugar, hallamos la derivada de S_a.
   $$S_a'(z) = \frac{1-\bar{a}z + (z-a)\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$
   Observamos que $S_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$ y $S_a'(0) = 1-|a|^2$. Así que:
   $$G'(z_0) = g'(z_0)\frac{1}{1-|g(z_0)|^2} \Rightarrow |G'(z_0)| = \frac{|g'(z_0)|}{1-|g(z_0)|^2}$$
   Como $g^2 = h$ en D, también tenemos que $2gg' = h$ en D. Luego $|g(z_0)|^2 = |h(z_0)|$ y también $2|g(z_0)||g'(z_0)| = |h'(z_0)|$. Entonces:
   $$|G'(z_0)| = \frac{|h'(z_0)|}{2|g(z_0)|}\frac{1}{1-|g(z_0)|^2} = \frac{|h'(z_0)|}{2\sqrt{|h(z)|}}\frac{1}{1-|h(z_0)|}$$
   Calculamos también:
   $$h'(z_0) = F'(z_0)S_\alpha'(F(z_0)) = F'(z_0)S_\alpha'(0) = F'(z_0)(1-|\alpha|^2)$$
   $$h(z_0) = S_\alpha(F(z_0)) = S_\alpha(0) = -\alpha \Rightarrow |h(z_0)| = |\alpha|$$
   Por tanto:
   $$|G'(z_0)| = \frac{|F'(z_0)|(1-|\alpha|^2)}{2\sqrt{|\alpha|}(1-|\alpha|)} = M\frac{1-|\alpha|^2}{2\sqrt{|\alpha|}(1-|\alpha|)} = M\frac{1+|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}}$$
   Veamos que $\frac{1+|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} > 1$.
   $$\frac{1+|\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} > 1 \Leftrightarrow 1+|\alpha| > 2\sqrt{|\alpha|} \Leftrightarrow 1+\alpha-2\sqrt{|\alpha|} > 0 \Leftrightarrow (1-\sqrt{|\alpha|})^2 > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{|\alpha|} \neq 0 \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \sqrt{|\alpha|} \neq 1 \Leftrightarrow |\alpha| \neq 1$$
   Como $\alpha \in \mathbb{D}$, la desigualdad se cumple. Por tanto, tenemos que $|G'(z_0)| > M$, con $G \in \mathcal{F}$ y $M = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)|$, luego llegamos a contradicción. Entonces, $F(D) = \mathbb{D}$.

5. Tenemos $F \in \mathcal{F}$, $|F'(z_0)| = M$ y $F(D) = \mathbb{D}$. F es una aplicación conforme de D sobre $\mathbb{D}$ con $F(z_0) = 0$. Falta que $F'(z_0) > 0$.

   Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f = \lambda F$ verifique que $f'(z_0) > 0$.

   $$f'(z_0) = \lambda F'(z_0) > 0 \Leftrightarrow f'(z_0) = |\lambda||F'(z_0)| = |F'(z_0)| = M \Rightarrow \lambda = \frac{M}{F'(z_0)}$$

   Sea $\lambda = \frac{M}{F'(z_0)} \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = \frac{M}{|F'(z_0)|} = 1$, $F'(z_0) \neq 0$. Sea $f = \lambda F$. f es holomorfa e inyectiva en D, con $f(D) = \mathbb{D}$, $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) = \lambda F'(z_0) = \frac{M}{F'(z_0)} F'(z_0) = M > 0$.

6. Veamos que esta aplicación conforme es única. Supongamos $f_1, f_2 : D \to \mathbb{D}$ aplicación conforme, con $f_j(z_0) = 0$, $f_j'(z_0) > 0$. Sea $g = f_1 \circ f_2^{-1}$.

   $$g : \mathbb{D} \xrightarrow{f_2^{-1}} D \xrightarrow{f_1} \mathbb{D}$$

   g es una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$, así que es de la forma

   $$g(z) = \lambda T_a(z) = \lambda \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1,\ a \in \mathbb{D}$$

   Como $g(0) = 0$,

   $$g(0) = \lambda a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow g(z) = \lambda z$$

   Como $g \circ f_2 = f_1$ en D,

   $$f_2'(z_0) g'(f_2(z_0)) = f_1'(z_0) \Leftrightarrow f_2'(z_0) g'(0) = f_1'(z_0) \Leftrightarrow g'(0) = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)} > 0$$

   Como $g'(0) = \lambda > 0$ y $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda = 1$. Por tanto, $g(z) = z \Leftrightarrow f_1 = f_2$.

□

Otros enunciados equivalentes

Teorema 3.7 (Teorema de Riemann)**.** *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$. Entonces existe una única aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre D tal que $f(0) = z_0$ y $f'(0) > 0$.*

Teorema 3.8 (Teorema de Riemann: enunciado equivalente)**.** *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$. Entonces existe un único $R > 0$ tal que existe una aplicación conforme f de D sobre $D(0, R)$ con $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) = 1$. Además, esta f es única.*

A este número R se le denomina radio conforme interior a D en z_0 y se denota $r(D, z_0)$.

Demostración. Este enunciado es equivalente al teorema de Riemann. Si D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$ y $z_0 \in D$.

1. Si $f : D \to \mathbb{D}$ aplicación conforme, $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$, entonces si $R = \frac{1}{f'(z_0)} > 0$ se tiene que $g = Rf : D \to D(0, R)$ es una aplicación conforme con $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) = 1$.
2. Si $R > 0$, $g : D \to D(0, R)$ es una aplicación conforme con $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) = 1$, entonces $f = \frac{1}{R} g : D \to \mathbb{D}$ es una aplicación conforme con $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) = \frac{1}{R} g'(z_0) = \frac{1}{R} > 0$.

□

Observación. Hemos visto que cualquier dominio D simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$. Entonces, si D_1 y D_2 son dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}$ con $D_1, D_2 \neq \mathbb{C}$, D_1 y D_2 son conformemente equivalentes.

3.4. Clasificación de los dominios simplemente conexos

En $\mathbb{C}^*$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.9. *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$ tal que $\mathbb{C}^* \setminus D$ tiene más de un punto. Entonces D es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.*

Demostración.

- Si $D \subset \mathbb{C}$, entonces D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}^* \setminus D$ tiene más de un punto. Entonces D es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.
- Si $\infty \in D$, entonces tomamos $a, b \in \mathbb{C}^* \setminus D$ con $a \neq b$. Entonces $a, b \in \mathbb{C} \setminus D$. Sea $T(z) = \frac{1}{z-a}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, con $T(a) = \infty$ y $T(\infty) = 0$. $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}*$ es una aplicación conforme. Entonces $D \xrightarrow{T} T(D) = D'$ es una aplicación conforme y D' es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$.

  Como $a, b \notin D$, $T(a) = \infty \notin D'$, así que D' es un dominio en $\mathbb{C}$. Además, $T(b) \notin D'$ con $T(b) \in \mathbb{C}$, luego $D \neq \mathbb{C}$. D' es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$, con $D' \neq \mathbb{C}$. Por tanto, D' es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$. Como D' es conformemente equivalente a D, entonces D es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.

$\square$

Ya tenemos clasificados los dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}^*$ módulo la relación de equivalencia ser conformemente equivalentes.

Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}^*$.

1. Si $\mathbb{C}^* \setminus D = \emptyset$, entonces $D = \mathbb{C}^*$, que es el único dominio conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$.
2. Si $\mathbb{C}^* \setminus D$ se reduce a un punto, entonces $D = \mathbb{C}$ o bien $D = \mathbb{C}^* \setminus \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Estos son los dominios en $\mathbb{C}^*$ que son conformemente equivalentes a $\mathbb{C}$.
3. Si $\mathbb{C}^* \setminus D$ tiene más de un punto, entonces D es conformemente equivalente al disco unidad $\mathbb{D}$.

Teorema 3.10. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Son equivalentes:*

1. *D es simplemente conexo.*
2. *Para toda función f holomorfa y nunca nula en D, existe una rama de $\sqrt{f}$ en D.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Lo sabemos.

$\Leftarrow$ Hay tres posibilidades.

1. $D = \mathbb{C}$. Entonces D es simplemente conexo.
2. $\mathbb{C} \setminus D$ se reduce a un punto. Entonces $\mathbb{C} \setminus D = \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$. Queremos llegar a contradicción, ya que D no es simplemente conexo.

   Sea $f(z) = \frac{1}{z-a}$, $z \in D$. f es holomorfa y nunca nula en D. Sea g una rama de $\sqrt{f}$ en D. Entonces g es holomorfa y nunca nula en D, y $g^2 = f$ en D.

   Sea $R > 0$ y sea γ la circunferencia $|z - a| = R$. Sea Γ la curva imagen de γ por g. Entonces Γ es un camino cerrado que no pasa por 0. Unas parametrizaciones de γ y Γ son:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto a + Re^{it} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \Gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto g(a + Re^{it}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$n(\Gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{g'(a+Re^{it})Rie^{it}}{g(a+Re^{it})}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

Como $g^2=f$, entonces además $2gg'=f'$. Luego:

$$\frac{2gg'}{g^2}=\frac{f'}{g^2}\Leftrightarrow \frac{g'}{g}=\frac{1}{2}\frac{f'}{f}$$

Como $f'(z)=-\frac{1}{(z-a)^2}$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{z-a}{(z-a)^2}=-\frac{1}{z-a}$$

Por tanto:

$$n(\Gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz=-\frac{1}{2}n(\gamma,a)=-\frac{1}{2}$$

Luego $n(\Gamma,0)=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$. Esto es imposible.

3. $\mathbb{C}\setminus D$ tiene más de un punto. Por el teorema que probamos para la demostración del teorema de Riemann, tenemos que D es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$. Por tanto D es simplemente conexo.

□

3.5. El teorema de extensión de Carathéodory

Recordemos que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son homeomorfos, aunque no conformemente equivalentes.

Corolario 3.11. *Si D_1 y D_2 son dominios simplemente conexos en $\mathbb{C}$, entonces D_1 y D_2 son homeomorfos.*

Demostración.

- Si $D_1=D_2=\mathbb{C}$, son iguales.
- Si $D_1=\mathbb{C}$, $D_2\neq\mathbb{C}$, entonces por el teorema de Riemann D_2 es conformemente equivalente y por tanto homeomorfo a $\mathbb{D}$. Además, $D_1=\mathbb{C}$ es homeomorfo a $\mathbb{D}$. Entonces D_1 y D_2 son homeomorfos.
- Si $D_1,D_2\neq\mathbb{C}$, entonces D_1 y D_2 son conformemente equivalentes y por tanto homeomorfos a $\mathbb{D}$. Entonces D_1 y D_2 son homeomorfos.

□

Si D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D\neq\mathbb{C}$, por el teorema de Riemann existe una aplicación conforme f de $\mathbb{D}$ sobre D.

Notación. Si $D\subset\mathbb{C}$, denotamos $\partial_\infty D$ a la frontera de D como subconjunto de $\mathbb{C}^*$. Es decir,

- Si D es acotado, $\partial_\infty D=\partial D$.
- Si D no es acotado, $\partial_\infty D=\partial D\cup\{\infty\}$.

Proposición 3.12. *Sean D_1 y D_2 dos dominios en $\mathbb{C}$ y sea f un homeomorfismo de D_1 sobre D_2. Sea $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en D_1 y supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} z_n=\xi\in\partial_\infty D_1$. Entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{f(z_n)\}$ están en $\partial_\infty D_2$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe un punto de acumulación de $\{f(z_n)\}$ que está en $\mathbb{C}^* \setminus \partial_\infty D_2$. Le llamamos w_0. Existe $\{z_{n_k}\}_{k=1}\infty$ subsucesión de $\{z_n\}$ tal que $f(z_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} w_0 \in D_2$. f^{-1} es continua en w_0. Además,

$$f^{-1}(f(z_{n_k})) \to f^{-1}(w_0) \in D_1$$

Sin embargo, $f^{-1}(f(z_{n_k})) = z_{n_k}$ y $z_{n_k} \to \xi \in \partial_\infty D_1$. □

Proposición 3.13. *Sean D_1 y D_2 dos dominios en $\mathbb{C}$ y f un homeomorfismo de D_1 sobre D_2. Supongamos que f se extiende de forma continua a $\overline{D_1}$ y le llamamos f a la extensión $f : \overline{D_1} \to \mathbb{C}^*$. Entonces $f(\overline{D_1}) = \overline{D_2}$, $f(D_1) = D_2$ y $f(\partial_\infty D_1) = \partial_\infty D_2$.*

Demostración. Sea $\xi \in \partial_\infty D_1$. Existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ en D_1 con $z_n \to \xi$, y podemos tomar todos los z_n distintos. Como f es continua en ξ, tenemos que $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\xi) \in \mathbb{C}^*$. Como todos los $f(z_n)$ son distintos, $f(\xi)$ es un punto de acumulación de $\{f(z_n)\}$.

Por la proposición anterior, $f(\xi) \in \partial_\infty D_2$. Por tanto, $f(\partial_\infty D_1) \subset \partial_\infty D_2$. Además, sabemos que $f(D_1) = D_2$. Entonces $f(\overline{D_1}) \subset \overline{D_2}$. Ahora tenemos que

$$D_2 = f(D_1) \subset f(\overline{D_1}) \subset \overline{D_2}$$

$\overline{D_1}$ es cerrado en $\mathbb{C}^*$ y compacto. Como $f : \overline{D_1} \to \mathbb{C}^*$ es continua, entonces $f(\overline{D_1})$ es compacto y por tanto cerrado.

$$D_2 \subset f(\overline{D_1}) \subset \overline{D_2} \Rightarrow f(\overline{D_1}) = \overline{D_2}$$

Entonces también tenemos que $f(\partial_\infty D_1) = \partial_\infty D_2$. □

Observación.

1. $f(\partial_\infty D_1) = \partial_\infty D_2$ pero no tiene por qué ser inyectiva. Lo mismo para $f(\overline{D_1}) = \overline{D_2}$.
2. Puede ocurrir que la extensión f no exista. Por ejemplo.

$$D = \{z = x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} + iy : 0 < y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

   D es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$. Entonces existe $f : \mathbb{D} \to D$ aplicación conforme. Supongamos que f se extiende de manera continua $f : \bar{\mathbb{D}} \to \bar{D}$ continua, con $f(\partial\mathbb{D}) = \partial D$ y $f(\bar{\mathbb{D}}) = \bar{D}$. Como $0 \in \partial D$, entonces $0 = f(\xi)$ con $\xi \in \partial\partial\mathbb{D}$. Sea γ el segmento $[0, \xi]$. Sea Γ la curva imagen de γ por f. Unas parametrizaciones son:

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto t\xi \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} \Gamma : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(t\xi) \end{aligned}$$

   Γ tiene origen en $f(0) \in D$ y extremo 0. El soporte de γ está en D salvo por el extremo.

Una curva de Jordan es una curva en $\mathbb{C}$ que tiene alguna parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ inyectiva en $[a, b)$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si esto ocurre para una parametrización, entonces pasa para todas.

Si J es el soporte de una curva de Jordan en $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C} \setminus J$ tiene dos componentes conexas.

- $I(J)$ es la componente acotada y se le llama dominio interior a J.
- $E(J)$ es la componente no acotada y se le llama dominio exterior a J.

Además, J es la frontera de ambas. Observamos que $I(J)$ y $E(J)$ son dominios en $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C} \setminus J$ es abierto, sus componentes conexas son abiertas.

Además, $I(J)$ es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \setminus I(J) &= J \cup E(J) \cup \{\infty\} \\ \partial_\infty E(J) &= \partial E(J) \cup \{\infty\} = J \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

Observamos que $\mathbb{C}^* \setminus I(J)$ es la clausura en $\mathbb{C}^*$ de $E(J)$. Como $E(J)$ es conexo, $\mathbb{C}^* \setminus I(J)$ también lo es. Luego $I(J)$ es simplemente conexo. Observamos además que $I(J) \cup J$ es compacto.

Sea $D = I(J)$, D es un dominio simplemente conexo con $D \neq \mathbb{C}$. Por el teorema de Riemann, existe una aplicación conforme f de $\mathbb{D}$ sobre D.

Teorema 3.14 (Teorema de extensión de Carathéodory)**.** *Sea J una curva de Jordan en $\mathbb{C}$ y sea D el dominio interior a J. Sea f una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre D. Entonces f se extiende de forma continua a $\bar{\mathbb{D}}$, y esta extensión es un homeomorfismo de $\bar{\mathbb{D}}$ sobre $\bar{D} = I(J) \cup J$.*

Observación. Como consecuencia, la extensión también es un homeomorfismo de $\partial\mathbb{D}$ sobre $\partial D = J$.

Capítulo 4

Funciones armónicas

4.1. Funciones armónicas y funciones holomorfas

Definición 4.1. Sea D un abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$. Decimos que f es armónica en D si $f \in \mathcal{C}^2(D)$ y

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Definición 4.2. Dado D abierto en $\mathbb{C}$ y $u : D \to \mathbb{R}$, con $u \in \mathcal{C}^2(D)$. El laplaciano de u se define como:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Definición 4.3. Sea D abierto en $\mathbb{D}$ y sea $u : D \to \mathbb{R}$, con $u \in \mathcal{C}^2(D)$. Diremos que u es armónica en D si $\Delta u = 0$.

Ejemplo.

- Las funciones constantes. $u(z) = a$, $a \in \mathbb{R}$, es armónica en $\mathbb{C}$.
- La función parte real es armónica en $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

- La función parte imaginaria es armónica en $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

- Si D es un abierto en $\mathbb{C}$ y u y v son armónicas en D, entonces $u + v$ es armónica en D.
- Si D es un abierto en $\mathbb{C}$, u es armónica en D y $c \in \mathbb{R}$, entonces cu es armónica en D.

Teorema 4.1. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa en D. Entonces* $\mathrm{Re}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$ *son armónicas en D.*

Demostración. Sean $u = \text{Re}(f)$ y $v = \text{Im}(f)$, $u, v : D \to \mathbb{R}$, con $u, v \in \mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^2(D)$. Se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Por tanto:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$
$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

□

El recíproco no es cierto. Es decir, dado D abierto en $\mathbb{C}$, u y v armónicas en D y $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$, no se cumple en general que f sea holomorfa en D.

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sea $D = \mathbb{C}$ y sean $u(z) = \text{Re}(z)$ y $v(z) = \text{Im}(z)$. u y v son armónicas en $\mathbb{C}$. Sin embargo, $f(z) = u(z) + iv(z) = \bar{z}$ no es holomorfa.

Definición 4.4. Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Diremos que $v : D \to \mathbb{R}$ es una conjugada armónica de u en D si la función $f = u + iv$ es holomorfa en D.

Propiedades.

- Si existe una conjugada armónica de u en D, entonces es una función armónica en D.
- Si u es una conjugada armónica de u en D, entonces $u + c$ es conjugada armónica de u en D para todo $c \in \mathbb{R}$.
- Si D es un dominio en $\mathbb{C}$, u es armónica en D y v_1, v_2 son conjugadas armónicas de u en $\mathbb{C}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 - v_2 = c$.

  Demostración. $f_1 = u + iv_1$ y $f_2 = u + iv_2$ son holomorfas en D, así que $f_2 - f_1 = i(v_2 - v_1)$ es holomorfa en D. Como $\text{Re}(f_2 - f_1) = 0$ en D con D dominio, entonces $f_2 - f_1$ es constante. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ con $f_2 - f_1 = ic$. Por tanto:

  $$i(v_2 - v_1) = ic \Rightarrow v_2 - v_1 = c$$

  □

No tiene por qué existir la conjugada armónica.

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sea $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ abierto en $\mathbb{C}$ y sea $u : D \to \mathbb{R}$, $u(z) = \text{Log}|z|$. Si escribimos $z = x + iy$,

$$u(z) = \text{Log}(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\text{Log}(x^2 + y^2)$$

Calculamos sus derivadas parciales:

$$u_x(z) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad u_y(z) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$u_{xx}(z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\Delta u = 0$, así que u es armónica en D.

Supongamos que v es una conjugada armónica de u en D. Entonces $v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, con $f = u + iv$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideramos:

$$\begin{aligned} g = \text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \text{Log}(z) = \log|z| + i\text{Arg}(z) \end{aligned}$$

f y g son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, luego $f-g$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Como $\mathrm{Re}(f-g) = 0$, entonces $f - g = ic$, con $c \in \mathbb{R}$. Así que $g = f - ic$. Sin embargo, g no se extiende de forma continua a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esto es una contradicción.

Hemos probado que la función $u(z) = \mathrm{Log}|z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lema 4.2. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa y nunca nula en D. Entonces la función $u = \mathrm{Log}|f|$ es armónica en D.*

Demostración. Sean $z_0 \in D$ y $R > 0$ tales que $D(z_0, R) \subset D$. Como $D(z_0, R)$ es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$, existe g una rama de $\log(f)$ en $D(z_0, R)$. g es holomorfa en $D(z_0, R)$, con

$$\mathrm{Re}(g(z)) = \mathrm{Log}|f(z)|, \quad z \in D(z_0, R)$$

$Re(g) = \mathrm{Log}|f|$ es armónica en $D(z_0, R)$. □

Proposición 4.3. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Entonces la función $u_x - iu_y$ es holomorfa en D.*

Corolario 4.4. *Sea D abierto en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Entonces $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$.*

Demostración. Sea u armónica en D. Entonces $f = u_x - iu_y$ es holomorfa en D. Así que $u_x, u_y \in \mathcal{C}^\infty(D)$. Como además $u \in \mathcal{C}^2(D)$, entonces $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$. □

Proposición 4.5. *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Entonces existe F holomorfa en D tal que $\mathrm{Re}(F) = u$ en D. Además, esta F es única salvo adición de constantes imaginarias.*

Demostración. Sea $f = u_x - iu_y$, que es holomorfa en D. Como D es simplemente conexo, existe g primitiva de f en D. g es holomorfa en D y $g' = f$ en D. Escribimos $g = U + iV$, con $U = \mathrm{Re}(f)$ y $V = \mathrm{Im}(f)$. Como g es holomorfa, $U_x = V_y$ y $U_y = -V_x$. Además, $g' = U_x + iV_x = u_x - iu_y$, así que $U_x = u_x$ y $V_x = -u_y$.

Sea $F = u + iV$, $F : D \to \mathbb{C}$, con $u \in \mathcal{C}^2(D)$. V es armónica en D, $V \in \mathcal{C}^\infty(D)$. F es diferenciable en sentido real. Además,

$$\begin{cases} u_x = U_x = V_y \\ u_y = -V_x \end{cases}$$

Luego F es holomorfa en D, con $\mathrm{Re}(F) = u$ en D.

Veamos que F es única salvo adición de constantes imaginarias.

- Si $c \in \mathbb{R}$, está claro que si $G = F + ic$, entonces G es holomorfa en D y $\mathrm{Re}(G) = u$ en D.
- Si G es holomorfa en D y $\mathrm{Re}(G) = u$ en D. Entonces $F - G$ es holomorfa y $\mathrm{Re}(F - G) = 0$ en D. Por tanto $F - G$ es constante, así que existe $c \in \mathbb{R}$ con $F - G = ic \Leftrightarrow G = F - ic$.

□

Corolario 4.6. *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Si $z_0 \in D$ y $R > 0$ con $D(z_0, R) \subset D$, entonces existe F holomorfa en $D(z_0, R)$ tal que $\mathrm{Re}(F) = u$ en $D(z_0, R)$.*

Toda función armónica, localmente, es la parte real de una función holomorfa.

Teorema 4.7. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Son equivalentes:*

1. *D es simplemente conexo.*
2. *Toda función armónica tiene conjugada armónica.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Lo sabemos.

$\Leftarrow$ Sea f holomorfa y nunca nula en D. Veamos que existe un rama de $\log(f)$ en D. Sea $u = \mathrm{Log}|f|$, que es una función armónica en D. Sea v una conjugada armónica de u en D. Entonces $F = u+iv$ es holomorfa en D. Sea $h = fe^{-F}$ holomorfa en D. Como $|e^F| = |e^{u+iv}| = e^u = e^{\mathrm{Log}|f|} = |f|$, entonces

$$|h| = \frac{|f|}{|e^F|} = 1$$

Entonces h es constante. Es decir, existe $\xi = e^{ic}$ con $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(z) = \xi$ para todo $z \in D$.

$$h = \frac{f}{e^F} \Rightarrow f = \xi e^F = e^{ic}e^F = e^{F+ic}$$

La función $F + ic$ es una rama de $\log(f)$ en D.

Toda función holomorfa y nunca nula en D tiene una rama del logaritmo. Luego D es simplemente conexo.

$\square$

Teorema 4.8 (Propiedad del valor medio)**.** *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Sea $z_0 \in D$ y $R > 0$ con $D(z_0, R) \subset D$. Entonces:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})dt, \quad 0 \leq 0 < R$$

Demostración. Si $r = 0$ es trivial. Supongamos $0 < r < R$. Existe F holomorfa en $D(z_0, R)$ con $\mathrm{Re}(F) = u$ en $D(z_0, R)$. Por la fórmula de Cauchy,

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{F(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0}rie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z_0 + re^{it})dt$$

Tomando parte real,

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z_0 + re^{it})dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(F(z_0 + re^{it}))dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + Re^{it})dt$$

$\square$

Teorema 4.9 (Forma débil del principio del máximo para funciones armónicas)**.** *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Si u tiene un máximo local en un punto $z_0 \in D$, entonces existe $r > 0$ con $D(z_0, R) \subset D$ tal que u es constante en $D(z_0, R)$.*

Demostración. Sea $r > 0$ con $D(z_0, r) \subset D$. Existe F holomorfa en $D(z_0, r)$ tal que $\mathrm{Re}(F) = u$ en $D(z_0, r)$. Sea $f = e^F$, que es holomorfa en $D(z_0, r)$. En $D(z_0, r)$ tenemos que:

$$|f| = |e^F| = e^{\mathrm{Re}(F)} = e^u$$

Existe r_1 con $0 < r_1 < r$, tal que $u(z) \leq u(z_0)$ si $z \in D(z_0, r_1)$. Entonces

$$|e^{F(z)}| = e^{u(z)} \leq e^{u(z_0)} = |e^{F(z_0)}|$$

$|e^F|$ tiene un máximo local en z_0. Por el principio del máximo, tenemos que e^F es constante en $D(z_0, r)$. Entonces $|e^F| = e^u$ es constante, así que u es constante en $D(z_0, r)$. $\square$

Sea D dominio en $\mathbb{C}$, sean u, v armónicas en D y sea $A \subset D$, A con puntos de acumulación en D. $u = v$ en A no implica en general que $u = v$ en D.

Ejemplo (Contraejemplo)**.** Sea $D = \mathbb{C}$ y sean $u(z) = \text{Re}(z)$ y $v(z) = 0$ armónicas. $u = v$ en el eje imaginario, que tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$, pero $u \neq v$ en $\mathbb{C}$.

Observación. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $u : D \to \mathbb{R}$. Si existen u_x y u_y en D y $u_x = u_y = 0$ en D, entonces u es constante en D.

Teorema 4.10 (Teorema de identidad para funciones armónicas)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Si existe $G \subset D$, G abierto y no vacío tal que $u = 0$ en G, entonces $u = 0$ en D.*

Demostración. Sea $f = u_x - iu_y$ holomorfa en D. Como $u = 0$ en G, tenemos que $u_x = u_y = 0$ en G. Entonces $f = 0$ en G. Por el teorema de identidad, $f = 0$ en D. Entonces $u_x = u_y = 0$ en D, luego u es constante en D. Como $u = 0$ en G, entonces $u = 0$ en D. □

Corolario 4.11. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean u y v armónicas en D. Si existe $G \subset D$, G abierto y no vacío tal que $u = v$ en G, entonces $u = v$ en D.*

Teorema 4.12 (Principio del máximo para funciones armónicas: primera versión)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Si u tiene un máximo local en un punto $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.*

Demostración. Existe $R > 0$ con $D(z_0, R) \subset D$ tal que u es constante en $D(z_0, R)$. Es decir, $u(z) = c$, $z \in D(z_0, R)$, $c \in \mathbb{R}$. Sea $v(z) = c$, $z \in D$. u y v son armónicas en D y $u = v$ en $D(z_0, R)$. Entonces $u = v$ en D, es decir, $u(z) = c$ para todo $z \in D$. □

Notación. Si D es un dominio en $\mathbb{C}$, $\bar{D}$ denotará la clausura de D como subconjunto de $\mathbb{C}^*$.

- Si D es acotado, entonces $\partial_\infty D = \partial D$.
$$\bar{D} = D \cup \partial_\infty D = D \cup \partial D$$
- Si D no es acotado, entonces $\partial_\infty D = \partial D \cup \{\infty\}$.
$$\bar{D} = D \cup \partial_\infty D = D \cup \partial D \cup \{\infty\}$$

Teorema 4.13 (Principio del máximo para funciones armónicas: segunda versión)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D. Si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\limsup_{z \to \xi, z \in D} u(z) \leq M, \quad \forall \xi \in \partial_\infty D$$
entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$. Además, si $u(z_0) = M$ para algún $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.

Demostración. Sea $K = \sup_{z \in D} u(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Hay que probar que $K \leq M$. Existe $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ en D tal que $\lim_{n \to \infty} u(z_n) = K$. Podemos suponer, pasando si es necesario a una subsucesión, que existe $\lim_{n \to \infty} z_n = z^* \in \mathbb{C}^*$. Entonces $z^* \in \bar{D} = D \cup \partial_\infty D$.

- Si $z^* \in \partial_\infty D$, entonces
$$K \leq \limsup_{z \to z^* . z \in D} u(z) \leq M$$
- Si $z^* \in D$, como $\lim_{n \to \infty} z_n = z^*$, se tiene que $\lim_{n \to \infty} u(z_n) = u(z^*) = K$. Luego
$$u(z) \leq u(z^*) \quad \forall z \in D$$
Por la primera versión del principio del máximo, u es constante en D, es decir, $u(z) = K$ para todo $z \in D$. Aplicando la hipótesis a un punto ξ cualquiera de $\partial_\infty D$, vemos que $K \leq M$. Observamos que $\partial_\infty D \neq \emptyset$. Si $\partial_\infty D = \emptyset$, entonces $\bar{D} = D$, luego D sería abierto y cerrado en $\mathbb{C}^*$. Por tanto, $D = \emptyset$ o $D = \mathbb{C}^*$, lo que es imposible.

$\square$

Teorema 4.14 (Principio del mínimo para funciones armónicas)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea u armónica en D.*

1. *Si u tiene un mínimo local en un punto $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.*
2. *Si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\liminf_{z\to\xi, z\in D} u(z) \geq m, \quad \forall \xi \in \partial_i nftyD$$
entonces $u(z) \geq m$ para todo $z \in D$. Además, si $u(z_0) = m$ para algún $z_0 \in D$, entonces u es constante en D.

Corolario 4.15. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ armónica en D y continua en $\bar{D}$. Entonces:*

$$\max_{z\in\bar{D}} u(z) = \max_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$
$$\min_{z\in\bar{D}} u(z) = \min_{z\in\partial_\infty D} u(z)$$

Corolario 4.16. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ armónica en D y continua en $\bar{D}$. Si $u = 0$ en $\partial_\infty D$, entonces $u = 0$ en D.*

Corolario 4.17. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sean $u, v : \bar{D} \to \mathbb{R}$ armónicas en D y continuas en $\bar{D}$. Si $u = v$ en $\partial_\infty D$, entonces $u = v$ en D.*

Observación. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ armónica en D y continua en $\bar{D}$. Entonces los valores de u en D están completamente determinados por los valores de u en $\partial_\infty D$.

4.2. El problema de Dirichlet para el disco unidad

Esto da lugar a la siguiente cuestión. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $f : \partial_\infty D \to \mathbb{R}$ continua. Queremos estudiar si existe $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ armónica en D y continua en $\bar{D}$ tal que $u = f$ en D. Esto es el problema de Dirichlet en D con valores frontera f. Si existe una solución del problema de Dirichlet en D con valores frontera f, esta es única.

Si D es un dominio en $\mathbb{C}$, se dice que D es regular para el problema de Dirichlet si para toda $f : \partial_\infty D \to \mathbb{R}$ continua existe la solución del problema de Dirichlet con valores frontera f. Queremos resolver el problema de Dirichlet en el disco unidad.

Sea $u : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ armónica en $\mathbb{D}$ y continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Vamos a expresar $u(z)$ para $z \in \mathbb{D}$ en función de $u(\xi)$, con $\xi \in \partial\mathbb{D}$. Por la propiedad del valor medio, si $0 < r < 1$,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it})dt$$

Si consideramos las funciones

$$u_r(t) = u(re^{it}), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

vemos que $u_r \xrightarrow[r\to 1^-]{} u_1$ uniformemente porque u es uniformemente continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Así que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_r(t)dt \xrightarrow[r\to 1^-]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(t)dt \Rightarrow u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})dt$$

Lema 4.18. *Sean G_1 y G_2 dos abiertos en $\mathbb{C}$, sea f holomorfa en G_1 con $f(G_1) \subset G_2$ y sea u armónica en G_2. Entonces $u \circ f$ es armónica en G_1.*

Demostración. $u \circ f \in \mathcal{C}^2(G_1)$. Se puede comprobar que $\Delta(u \circ f) = 0$. De otra manera, sea $z_0 \in G_1$, entonces $f(z_0) \in G_2$. Tomamos $R > 0$ con $D(f(z_0), R) \subset G_2$. Como f es continua en z_0, existe $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset G_1$ y $f(D(z_0, \delta)) \subset D(f(z_0), R)$.

Como u es armónica en $D(f(z_0), R)$, existe F holomorfa en $D(f(z), R)$ tal que $u = \text{Re}(F)$ en $D(f(z_0), R)$.

$$D(z_0, \delta) \xrightarrow{f} D(f(z_0), R) \xrightarrow{F} \mathbb{C}$$

$F \circ f$ es holomorfa en $D(z_0, \delta)$, así que $\text{Re}(f \circ F)$ es armónica en $D(z_0, \delta)$. Si $z \in D(z_0, \delta)$, tenemos que $f(z) \in D(f(z_0), R)$.

$$\text{Re}(F \circ f)(z) = \text{Re}(F(f(z))) = u(f(z))$$

Entonces $\text{Re}(F \circ f) = u \circ f$. Por tanto $u \circ f$ es armónica en $D(z_0, \delta)$. Entonces $u \circ f$ es armónica en D.

Sea $u : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ armónica en $\mathbb{D}$ y continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Hemos visto que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) dt$$

Sea $a \in \mathbb{D}$. Consideramos $T_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$, con $T_a(0) = a$ y $T_a(\bar{\mathbb{D}}) = \bar{\mathbb{D}}$. Sea $v = u \circ T_a$.

$$\bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{T_a} \bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

v es continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y armónica en $\mathbb{D}$.

$$u(a) = v(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(T_a(e^{it})) dt$$

Hacemos el cambio de variable:

$$T_a(e^{it}) = e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{it} = T_a^{-1}(e^{i\varphi}) = S_a(e^{i\varphi})$$

Derivando,

$$ie^{it} dt = ie^{i\varphi} S_a'(e^{i\varphi}) d\varphi \Leftrightarrow dt = \frac{e^{i\varphi} S_a'(e^{i\varphi})}{S_a(e^{i\varphi})} d\varphi$$

Recordamos que $S_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$, así que $S_a'(e^{i\varphi}) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2}$ y entonces:

$$dt = \frac{e^{i\varphi}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2} \frac{1-\bar{a}e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-a} d\varphi = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})(1-ae^{i\varphi})} d\varphi = \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2} d\varphi$$

Entonces la integral queda de la forma:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} u(e^{i\varphi}) \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-it}|^2} dt$$

□

Sea $u : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ armónica en $\mathbb{D}$ y continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Hemos visto que:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) dt$$

Sea $a \in \mathbb{D}$. Consideramos $T_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$, con $T_a(0) = a$ y $T(\bar{\mathbb{D}}) = \bar{\mathbb{D}}$. Sea $v = u \circ T_a$.

$$\bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{T_a} \bar{\mathbb{D}} \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

v es continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y armónica en $\mathbb{D}$.

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(T_a(e^{it})) dt$$

Hacemos el cambio de variable:

$$T_a(e^{it}) = e^{i\varphi} \Leftrightarrow e^{it} = T_a^{-1}(e^{i\varphi}) = S_a(e^{i\varphi})$$

Derivando,

$$ie^{it}dt = ie^{i\varphi}S_a'(e^{i\varphi})d\varphi \Leftrightarrow dt = \frac{e^{i\varphi}S_a'(e^{i\varphi})}{S_a(e^{i\varphi})}d\varphi$$

Recordamos que $S_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ y $S_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$, así que $S_a'(e^{i\varphi}) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2}$ y entonces:

$$dt = \frac{e^{i\varphi}(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})^2}\frac{1-\bar{a}e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-a}d\varphi = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}e^{i\varphi})(1-ae^{-i\varphi})}d\varphi = \frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2}d\varphi$$

Entonces la integral queda de la forma:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} u(e^{i\varphi})\frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-i\varphi}|^2}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{1-|a|^2}{|1-ae^{-it}|^2}dt$$

Teorema 4.19. *Sea $u : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ armónica en $\mathbb{D}$ y continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Entonces*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}dt, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Si $f : \partial_\infty D \to \mathbb{R}$ es una función continua, sabemos que la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$ con valores frontera f, de existir, es única. Además, tendría que ser la siguiente:

$$u : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}, \quad u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}dt & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ u(z) = f(z) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

4.3. La integral de Poisson

Una primera expresión del núcleo de Poisson es

$$P(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}, \quad z \in \mathbb{D},\ t \in \mathbb{R}$$

Si $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$P(z, e^{it}) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}e^{-it}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}$$

De esta forma llegamos a una segunda expresión del núcleo de Poisson:

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}, \quad 0 \leq r < 1,\ t \in \mathbb{R}$$

Podemos escribir el denominador de otra forma:

$$|1-re^{it}|^2 = (1-re^{it})(1-re^{-it}) = 1-re^{-it}-re^{it}+r^2 = 1-r(e^{it}+e^{-it})+r^2 = 1-2r\cos(t)+r^2$$

Luego

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}, \quad 0 \leq< 1,\ t \in \mathbb{R}$$

Observación.

1. Si $0 \le r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ y $z = re^{i\theta}$, entonces $P(z, e^{it}) = P_r(\theta - t)$.
2. Si $0 \le r < 1$, $t \in \mathbb{R}$ y $z = re^{it}$, entonces $P_r(t) = P(z, e^{i0}) = P(z, 1)$.

Propiedades.

1. $P(z, e^{it}) > 0$ si $z \in \mathbb{D}$ y $t \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, $P_r(t) > 0$ si $0 \le r < 1$ y $t \in \mathbb{R}$.
2. Fijando $t \in \mathbb{R}$, la función $z \in \mathbb{D} \mapsto P(z, e^{it}) > 0$ es armónica en $\mathbb{D}$.

   Demostración.

   - Si $t = 0$ y $z \in \mathbb{D}$,

   $$\begin{aligned} P(z, e^{i0}) &= \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \frac{1 - z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1 - z + z - z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1}{1 - \bar{z}} + \frac{z}{1 - z} = \\ &= \frac{1}{1 - \bar{z}} + \frac{z - 1 + 1}{1 - z} = \frac{1}{1 - \bar{z}} - 1 + \frac{1}{1 - z} = -1 + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(-1 + \frac{2}{1 - z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \end{aligned}$$

     La función $z \in \mathbb{D} \mapsto P(z, e^{i0}) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ es armónica en $\mathbb{D}$.

   - Si $t \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{D}$, tomamos $w = ze^{-it} \in \mathbb{D}$, con $|w| = |z|$. Entonces:

   $$P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right)$$

     La función $z \in \mathbb{D} \mapsto P(z, e^{it})$ es armónica en $\mathbb{D}$.

   $\square$

3. Si $z \in \mathbb{D}$ y $t \in \mathbb{R}$,

   $$P(z, e^{it}) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right)$$

   Si $0 \le r < 1$ y $t \in \mathbb{R}$,

   $$P_r(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right)$$

4. Fijado $r \in [0, 1)$, tenemos la función

   $$\begin{aligned} P_r &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto P_r(t) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t)} \end{aligned}$$

   que es continua, positiva, periódica de periodo 2π, par y decreciente en $[0, \pi]$. Observamos que:

   $$\begin{aligned} P_r(0) &= \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} = \frac{1 + r}{1 - r} \xrightarrow[r \to 1^-]{} \infty \\ P_r(\pi) = P_r(-\pi) &= \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} = \frac{1 - r}{1 + r} \xrightarrow[r \to 1^-]{} 0 \end{aligned}$$

   Tenemos entonces la desigualdad:

   $$\frac{1 - r}{1 + r} \le P_r(t) \le \frac{1 + r}{1 - r}, \quad 0 \le r < 1,\ t \in \mathbb{R}$$

Además, si en el teorema anterior tomamos $u \equiv 1$ y $z = r$, tenemos:

$$1 = u(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) = 1$$

5. Para cada $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ se tiene que $P_r(t) \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$. Además, si $\delta \in (0, \pi)$, se tiene que $P_r(t) \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

   Si $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$, $\cos(t) \neq 1$, así que:

$$\lim_{r\to 1^-} P_r(t) = \frac{0}{2 - 2\cos(t)} = 0$$

   Si $\delta \in [0, \pi)$, entonces:

$$P_r(t) \leq P_r(\delta) \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$$

Definición 4.5. Sea $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continua. Se define la integral de Poisson de f, y se denota $P[f]$, como la función

$$\begin{aligned} P[f] &: \mathbb{D} \to \mathbb{R} \\ z &\mapsto P[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P(z, e^{it})dt \end{aligned}$$

Equivalentemente, si $z = re^{i\theta}$ con $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$P[f](z) = P[f](re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)dt$$

Teorema 4.20. *El disco unidad $\mathbb{D}$ es un dominio regular para el problema de Dirichlet. En concreto, si $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$ con valores frontera f es la función:*

$$\begin{aligned} u &: \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R} \\ u(z) &= \begin{cases} P[f](z) & z \in \mathbb{D} \\ f(z) & z \in \partial\mathbb{D} \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, u es armónica en $\mathbb{D}$, continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y $u = f$ en $\partial\mathbb{D}$.

Demostración.

1. $P[f]$ es armónica en $\mathbb{D}$. Si $z \in \mathbb{D}$, tenemos que

$$\begin{aligned} P[f](z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P(z, e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\mathrm{Re}\left(\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(f(e^{it})\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right)dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}dt\right) \end{aligned}$$

   Veamos que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}dt$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ expresándola como serie de potencias.

Si $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

converge uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Así que:

$$\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

con convergencia uniforme. Entonces:

$$\begin{aligned} P[f](z) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int}\right) dt\right) = \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(e^{it}) + 2\sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) z^n e^{-int}\right) dt\right) = \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\sum_{n=1}^{\infty} f(e^{it}) z^n e^{-int}\right) dt\right) = \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt\right) z^n\right) \end{aligned}$$

Sea

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces:

$$P[f](z) = \mathrm{Re}\left(a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)$$

Esta es una serie de potencias centrada en 0 que converge para todo $z \in \mathbb{D}$. Su radio de convergencia es mayor o igual que 1. Por tanto, define una función holomorfa en $\mathbb{D}$. Entonces la función $z \in \mathbb{D} \mapsto P[f](z)$ es armónica en $\mathbb{D}$.

2. Veamos que:

$$\lim_{z\to 1, z\in\mathbb{D}} u(z) = f(1)$$

Si $z \in \mathbb{D}$, $z = re^{i\theta}$ con $0 \le r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(z) - f(1) = P[f](z) - f(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)dt - f(1) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)dt - f(1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} f(e^{i(\theta-s)})P_r(s)ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(1)P_r(s)ds = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(e^{i(\theta-s)}) - f(e^{i0})\right)P_r(s)ds \end{aligned}$$

Así que

$$|u(z) - f(1)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i(\theta-t)}\right) - f\left(e^{i0}\right)\right| P_r(t)dt$$

Sea $\varepsilon > 0$, como la función $t \in [-\pi, \pi] \mapsto f(e^{it})$ es uniformemente continua, existe $\delta_1 \in (0, \pi)$ tal que si $t, s \in [-\pi, \pi]$ con $|t - s| < \delta_1$, entonces $|f(e^{it}) - f(e^{is})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como f está acotada en $\partial\mathbb{D}$, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Tomamos $\delta = \frac{\delta_1}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Como $P_r(t) \xrightarrow[r \to 1^-]{} 0$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$\begin{cases} r_0 < r < 1 \\ t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \end{cases} \Rightarrow P_r(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Entonces, si $r_0 < r < 1$ y $|\theta| < \delta$, vamos a ver que $|u(z) - f(1)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |u(z) - f(1)| \leq & \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| f\left(e^{i(\theta - t)}\right) - f\left(e^{i0}\right) \right| P_r(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi] \setminus [-\delta,\delta]} \left| f\left(e^{i(\theta - t)}\right) - f\left(e^{i0}\right) \right| P_r(t) dt \end{aligned}$$

Si $t \in [-\delta, \delta]$, tenemos que

$$|\theta - t - 0| \leq |\theta| + |t| < \delta + \delta = 2\delta = \delta_1 < \pi$$

Además, $\theta - t, 0 \in [-\pi, \pi]$. Así que:

$$\left| f\left(e^{i(\theta - t)}\right) - f\left(e^{i0}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} |u(z) - f(1)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi] \setminus [-\delta,\delta]} 2M \frac{\varepsilon}{4M} dt = \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2} dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Veamos que

$$\lim_{z \to \xi, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(\xi), \quad \forall \xi \in \partial\mathbb{D}$$

Sea $g : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $g(z) = f(\xi z)$, es continua. Sea $v = P[g] : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Sabemos que $\lim\limits_{z \to 1, z \in \mathbb{D}} v(z) = g(1)$. Veamos que $v(z) = u(\xi z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Sea $z \in \mathbb{D}$, $z = re^{i\theta}$ con $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

$$v(z) = P[g](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it}) P_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} f(\xi e^{it}) P_r(\theta - t) dt$$

Si escribimos $\xi = e^{i\theta_0}$, con $\theta_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} f(\xi e^{i(\theta_0 - t)}) P_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} f(\xi e^{is}) P_r(\theta + \theta_0 - s) ds = P[f](re^{i(\theta - \theta_0)}) = \\ &= P[f](\xi z) = u(\xi z) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{z \to 1, z \in \mathbb{D}} u(\xi z) = f(\xi) \Rightarrow \lim_{z \to \xi, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(\xi)$$

4. Veamos que u es continua en $\bar{\mathbb{D}}$. u es continua en $\mathbb{D}$ porque es armónica en $\mathbb{D}$. Dado $\xi \in \partial\mathbb{D}$, hay que probar que

$$\lim_{z \to \xi, z \in \bar{\mathbb{D}}} f(\xi)$$

Dada $\{z_n\}_{n=1}\infty$ sucesión en $\bar{\mathbb{D}}$ con $z_n \to \xi$, definimos la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ como sigue.

- Si $z_n \in \mathbb{D}$, tomamos $w_n = z_n$.
- Si $z_n \in \partial\mathbb{D}$, tomamos $w_n \in \mathbb{D}$ con $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ y $|u(z_n) - u(w_n)| < \frac{1}{n}$. Esto se puede hacer porque $\lim\limits_{z \to z_n, z \in \mathbb{D}} u(z) = u(z_n)$.

  Hay que probar que $u(z_n) \to f(\xi)$.

  $$|u(z_n) - f(\xi)| \leq |u(z_n) - u(w_n)| + |u(w_n) - f(\xi)|$$

  Observamos que
  $$|w_n - \xi| \leq |w_n - z_n| + |z_n - \xi| \to 0$$
  Además, sabemos que $\lim\limits_{z \to \xi, z \in \mathbb{D}} u(z) = f(\xi)$, así que $u(w_n) \to f(\xi)$. Por tanto,

  $$|u(z_n) - f(\xi)| \to 0$$

$\square$

Teorema 4.21. *Sea D un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ con $D \neq \mathbb{C}$. Supongamos que existe una aplicación conforme F de $\mathbb{D}$ sobre D que se puede extender a un homeomorfismo de $\bar{\mathbb{D}}$ sobre $\bar{D} = D \cup \partial_\infty D$. Entonces D es regular para el problema de Dirichlet.*

En concreto, si $f : \partial_\infty D \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, la función $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \partial_\infty D \\ u(z) = P[f \circ F](F^{-1}(z)) & z \in D \end{cases}$$

es la solución del problema de Dirichlet en D con valores frontera f.

Demostración. $F : \mathbb{D} \to D$ se puede extender a una homeomorfismo $F : \bar{\mathbb{D}} \to \bar{D}$. Observamos que F es un homeomorfismo de $\partial\mathbb{D}$ sobre $\partial_\infty D$. Sea $g = f \circ F$.

$$g : \partial\mathbb{D} \xrightarrow{F} \partial_\infty D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

g es continua. Sea v la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$ con valores frontera g. $v : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ es armónica en $\mathbb{D}$, continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y con $v = g$ en $\partial\mathbb{D}$.

Sea $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$, $u = v \circ F^{-1}$. u es continua en $\bar{D}$ y armónica en D. Si $z \in \partial_\infty D$,

$$u(z) = v(F^{-1}(z)) = g(F^{-1}(z)) = f(z)$$

Luego $u = f$ en $\partial_\infty D$. $\square$

Ejemplo. Cualquier disco abierto es un dominio regular para el problema de Dirichlet.

Sea $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Sea $D = D(a, R)$. Sea $F : \mathbb{D} \to D$, $F(z) = a + Rz$. D es regular para el problema de Dirichlet.

Si $f : \partial D(a, R) \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la solución del problema de Dirichlet en $D(a, R)$ con valores frontera f es $u : \bar{D}(a, R) \to \mathbb{R}$, con

$$u(z) = f(z), \quad z \in \partial D(a, R)$$

Si $z \in D(a, R)$, $z = a + re^{i\theta}$ con $0 \leq r < R$ y $\theta \in \mathbb{R}$,

$$u(z) = P[f \circ F](F^{-1}(z)) = P[f \circ F]\left(\frac{z-a}{R}\right) = P[f \circ F]\left(\frac{r}{R}e^{i\theta}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f \circ F)(e^{it}) P_{r/R}(\theta - t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{\left|1 - \frac{r}{R}e^{i(\theta - t)}\right|^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{|R - re^{i(\theta - t)}|^2} dt$$

Sea D el dominio interior a una curva de Jordan en $\mathbb{C}$. Entonces D es un dominio simplemente conexo en D, con $D \neq \mathbb{C}$. Por el teorema de Riemann, existe una aplicación conforme F de $\mathbb{D}$ sobre D, que se puede extender a un homeomorfismo de $\bar{\mathbb{D}}$ sobre $\bar{D}$ por el teorema de extensión de Carathéodory. Por el teorema anterior, D es regular para el problema de Dirichlet. Si $f : \partial D \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la función $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \partial D \\ P[f \circ F](F^{-1}(z)) & z \in D \end{cases}$$

es la solución del problema de Dirichlet en D con valores frontera f.

Teorema 4.22 (Principio del máximo para funciones armónicas: tercera versión)**.** *Sea D un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y sea u una función armónica y acotada superiormente en D. Si existen $M \in \mathbb{R}$ y $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in \partial D$ tales que*

$$\limsup_{z \to \xi, z \in D} u(z) \leq M, \quad \forall \xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$$

entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$.

Demostración. Sea $\alpha = diam(D) = \sup\{|z - w| : z, w \in D\}$. Entonces $0 < \alpha < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $u_\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Log}\left(\frac{|z - \xi_j|}{\alpha}\right)$$

Si $z \in D$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, como $|z - w| \leq \alpha$ para todo $w \in D$, se tiene que

$$0 < |z - \xi_j| \leq \alpha \Rightarrow 0 < \frac{|z - \xi_j|}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Log}\left(\frac{|z - \xi_j|}{\alpha}\right) \leq 0$$

Entonces $u_\varepsilon \leq u$ en D. Como la función $z \mapsto \frac{z - \xi_j}{\alpha}$ es holomorfa y nunca nula en D, se tiene que $\operatorname{Log}\left(\frac{|z-\xi_j|}{\alpha}\right)$ es armónica en D para cada j. Por tanto, u_ε es armónica en D.

Sea $\xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Entonces:

$$\limsup_{z \to \xi, z \in D} u_\varepsilon(z) \leq \limsup_{z \to \xi, z \in D} u(z) \leq M$$

Sea $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\limsup_{z \to \xi_{j_0}, z \in D} u_\varepsilon(z) = \limsup_{z \to \xi_{j_0}, z \in D} \left(u(z) + \varepsilon \operatorname{Log}\left(\frac{|z - \xi_{j_0}|}{\alpha}\right) + \varepsilon \sum_{j=1, j \neq j_0}^{n} \operatorname{Log}\left(\frac{|z - \xi_j|}{\alpha}\right) \right) = -\infty \leq M$$

Por la segunda versión del principio del máximo, $u_\varepsilon(z) \leq M$ para todo $z \in D$. Entonces hemos probado que, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Log}\left(\frac{|z - \xi_j|}{\alpha}\right) \leq M, \quad \forall z \in D$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos que $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$. □

Teorema 4.23 (Principio del máximo para funciones armónicas: cuarta versión)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ con exterior no vacío y sea u una función armónica y acotada superiormente en D. Supongamos que existen $M \in \mathbb{R}$ y $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in \partial_\infty D$ tales que*

$$\limsup_{z \to \xi, z \in D} u(z) \leq M, \quad \forall \xi \in \partial_\infty D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\}$$

Entonces $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{C}$ un punto exterior a D. Existe $R > 0$ tal que $D(a, R) \cap D = \emptyset$. Entonces $|z - a| \geq R$ para todo $z \in D$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ vamos a construir una función h_j holomorfa y nunca nula en D, con $|h_j| \leq 1$ en D y tal que $\lim\limits_{z \to \xi_j, z \in D} h_j(z) = 0$ y $\lim\limits_{z \to \xi_i, x \in D} h_j(z)$ existe en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $i \neq j$.

- Si $\xi_j = \infty$,

$$h_j(z) = \frac{R}{z - a}, \quad z \in D$$

  h_j es holomorfa y nunca nula en D con $|h_j| \leq 1$ en D.

- Si $\xi_j \in \mathbb{C}$,

$$\left|\frac{z - \xi_j}{z - a}\right| = \left|\frac{z - a + a - \xi_j}{z - a}\right| \leq \frac{|z - a| + |a - \xi_j|}{|z - a|} = 1 + \frac{|a - \xi_j|}{|z - a|} \leq 1 + \frac{|a - \xi_j|}{R} = K_j > 0$$

  Sea

$$h_j(z) = \frac{1}{K_j} \frac{z - \xi_j}{z - a}$$

  h_j es holomorfa y nunca nula en D, con

$$|h_j(z)| = \frac{1}{K_j} \left|\frac{z - \xi_j}{z - a}\right| \leq \frac{1}{K_j} K_j = 1, \quad \forall z \in D$$

  Además,

$$\begin{cases} \lim_{z \to \xi_j, z \in D} h_j(z) = 0 \\ \lim_{z \to \xi_i, z \in D} h_j(z) = \frac{1}{K_j} \frac{\xi_i - \xi_j}{\xi_i - a} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad i \neq j \end{cases}$$

  Sea $\varepsilon > 0$, definimos:

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}|h_j(z)|, \quad z \in D$$

  Se sigue como en la demostración del teorema anterior.

□

Teorema 4.24 (Teorema de la singularidad evitable para funciones armónicas)**.** *Sean $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Si u es armónica y acotada en $D(a, R) \setminus \{a\}$, entonces u se puede extender a una función armónica en $D(a, R)$.*

Demostración. Sea $f = u|_{\partial D(a,R/2)}$, $f : \partial D(a, R/2) \to \mathbb{R}$ es continua. Como $D(a, R/2)$ es regular para el problema de Dirichlet, existe $v : \bar{D}(a, R/2) \to \mathbb{R}$ armónica en $D(a, R/2)$, continua en $\bar{D}(a, R/2)$ y con $v = f$ en $\partial D(a, R/2)$.

Sea $D = D(a, R/2) \setminus \{a\}$. u y v son armónicas en D, $u - v$ y $v - u$ también. Aplicamos la tercera versión del principio del máximo a $u - v$ y $v - u$ en D. D es un dominio acotado en $\mathbb{C}$, u está acotada en D y v es continua en $\bar{D}(a, R/2)$, así que v está acotada en D. Luego $u - v$ y $v - u$ están acotadas en D.

Si $\xi \in \partial D(a, R/2) = \partial D \setminus \{a\}$,

$$\limsup_{z \to \xi, z \in D} (u(z) - v(z)) \leq u(\xi) - v(\xi) = 0$$
$$\limsup_{z \to \xi, z \in D} (v(z) - u(z)) \leq v(\xi) - u(\xi) = 0$$

Por tanto, $u(z) - v(z) \leq 0$ y $v(z) - u(z) \leq 0$ para todo $z \in D$. Luego $u(z) = v(z)$ para todo $z \in D = D(a, R/2) \setminus \{a\}$, con v armónica en $D(a, R/2)$. Definiendo $u(a) = v(a)$, vemos que u se puede extender a una función armónica en $D(a, R)$. □

Teorema 4.25. *$\mathbb{D}\setminus\{0\}$ es un dominio en $\mathbb{C}$ que no es regular para el problema de Dirichlet.*

Demostración. $D=\mathbb{D}\setminus\{0\}$, $\partial D=\partial\mathbb{D}\cup\{0\}$. Sea $f:\partial D\to\mathbb{R}$, $f(z)=0$ si $|z|=1$ y $f(0)=1$. f es continua en ∂D. Supongamos que existe $u:\bar{\mathbb{D}}\to\mathbb{R}$ armónica en $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y con $u=f$ en ∂D. Como u es armónica y acotada en $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, por el teorema anterior u se puede extender a una función armónica en $\mathbb{D}$. Entonces u es armónica en $\mathbb{D}$ y continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Por tanto,

$$\max_{z\in\bar{\mathbb{D}}} u(z)=\max_{z\in\partial\mathbb{D}} u(z)=0$$

Sin embargo, esto contradice que $u(0)=1\neq 0$. □

Observación. La condición de que u está acotada superiormente no se puede suprimir en la tercera versión del principio del máximo.

Ejemplo. Sea $D=\mathbb{D}\setminus\{0\}$ dominio acotado en $\mathbb{C}$ y sea $u(z)=\operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z|}\right)$, $z\in D$. Como la función $z\mapsto\frac{1}{z}$ es holomorfa y nunca nula en D, entonces u es armónica en D. u no está acotada superiormente en D.

$$\partial D=\partial\mathbb{D}\cup\{0\}$$

Si $\xi\in\partial\mathbb{D}$,

$$\limsup_{z\to\xi,z\in D} u(z)=\limsup_{z\to\xi,z\in\mathbb{D}}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z|}\right)=0=M$$

Pero no es cierto que $u(z)\leq 0$ para todo $z\in D$. De hecho, $u(z)>0$ para todo $z\in D$.

Lema 4.26. *Sean $a\in\mathbb{C}$ y $R>0$. Sea $u:\bar{D}(a,R)\to\mathbb{R}$ una función continua, con $u\equiv 0$ en $\partial D(a,R)$. Supongamos que para cada $z_0\in D(a,R)$ existe $r_{z_0}>0$ con $D(z_0,r_{z_0})\subset D(a,R)$ tal que*

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{it})dt,\quad r\in[0,r_{z_0}]$$

Entonces $u\equiv 0$ en $D(a,R)$.

Demostración. Sea $M=\max\{u(z):z\in\bar{D}(a,R)\}$ y sea $K=\{z\in\bar{D}(a,R):u(z)=M\}$. K es un compacto no vacío con $K\subset\bar{D}(a,R)$. Como la función $z\in\mathbb{C}\mapsto|z-a|$ es continua, alcanza el máximo en K. Tomamos $z_0\in K$ tal que $|z_0-a|=\max\{|z-a|:z\in K\}$.

Supongamos por reducción al absurdo que $z_0\in D(a,R)$. Tomamos $r_{z_0}>0$, que existe por hipótesis, y fijamos $r\in(0,r_{z_0})$. Entonces

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+re^{it})dt$$

Sean $E_1=\{t\in[-\pi,\pi]:|z_0+re^{it}-a|\leq|z_0-a|\}$ y $E_2=\{t\in[-\pi,\pi]:|z_0+re^{it}-a|>|z_0-a|\}$. Observamos que $E_2\neq\emptyset$. Si $t\in E_2$, se tiene que $z_0+re^{it}\notin K$. Así que $u(z_0+re^{it})<M$. Entonces

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}u(z_0+re^{it})dt+\frac{1}{2\pi}\int_{E_2}u(z_0+re^{it})dt$$

Observamos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}u(z_0+re^{it})dt\leq\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}Mdt$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}u(z_0+re^{it})dt<\frac{1}{2\pi}\int_{E_2}Mdt$$

Por tanto,

$$u(z_0)<\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}Mdt+\frac{1}{2\pi}\int_{E_2}Mdt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Mdt=M$$

Esto contradice que $z_0 \in K$. Entonces $z_0 \in \partial D(a, R)$, así que por hipótesis $u(z_0) = 0$. Es decir,

$$u(z_0) = M = \text{máx}\{u(z) : z \in \bar{D}(a, R)\} = 0$$

Por tanto, $u(z) \leq 0$ para todo $z \in D(a, R)$.

Aplicando la parte del lema que acabamos de ver a la función $-u$, tenemos que $-u(z) \leq 0$ para todo $z \in D(a, R)$. Por tanto, $u \equiv 0$ en $D(a, R)$. □

Teorema 4.27 (Caracterización de la armonicidad por la propiedad del valor medio)**.** *Sea D un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $u : D \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $a \in D$ existe $r_a > 0$ con $D(a, r_a) \subset D$, tal que*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) dt, \quad r \in [0, r_a]$$

Entonces u es armónica en D.

Demostración. Sea $a \in D$. Tomamos $r_a > 0$ y $R = \frac{r_a}{2}$. Sea v la solución del problema de Dirichlet en $D(a, R)$ con valores frontera u. Entonces $v : \bar{D}(a, R) \to \mathbb{R}$ es armónica en $D(a, R)$, continua en $\bar{D}(a, R)$ y con $u = v$ en $\partial D(a, R)$. Vamos a aplicar el lema a $u - v$. $u - v : \bar{D}(a, R) \to \mathbb{R}$ es continua y $u - v \equiv 0$ en $\partial D(a, R)$. Sea $z_0 \in D(a, R)$. Tomamos $r_{z_0} > 0$, que elegimos suficientemente pequeño para que $D(z_0, r_{z_0}) \subset D(a, R)$. Si $r \in [0, r_{z_0})$, tenemos que

$$u(z_0) - v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt - frac12\pi \int_{-\pi}^{\pi} v(z_0 + re^{it}) dt = frac12\pi \int_{-\pi}^{\pi} (u - v)(z_0 + re^{it}) dt$$

Por el lema, $u - v = 0$ en $D(a, R)$. Como v es armónica en $D(a, R)$, u es armónica en $D(a, R)$. Para cada $a \in D$ hemos encontrado $R > 0$ con $D(a, R) \subset D$ tal que u es armónica en $D(a, R)$. Entonces u es armónica en D. □

Observación. Esta es la forma débil de la propiedad del valor medio. Como u es armónica en D, tenemos que u verifica la propiedad del valor medio.

Teorema 4.28. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas en D. Supongamos que $\{u_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Sea $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$, $z \in D$. Entonces u es armónica en D.*

Demostración. Tenemos $u : D \to \mathbb{R}$. Si $K \subset D$, K compacto, tenemos que $u_n \to u$ uniformemente en K y u_n es continua en K para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que u es continua en K, luego u es continua en D. Sea $a \in D$ y sea $R > 0$ con $D(a, R) \subset D$. Sea $r \in [0, R)$. Tenemos que

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + re^{it}) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Haciendo $n \to \infty$,

$$u(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + re^{it}) dt$$

Como $u_n \to u$ uniformemente en $\partial D(a, r)$,

$$u(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} u_n(a + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it}) dt$$

Por el teorema anterior, u es armónica en D. □

Vamos a ver qué sucede al cambiar la condición de convergencia uniforme en compactos por la condición de que $\{u_n\}$ sea creciente.

4.4. Desigualdades de Harnack

Sean $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Sea u una función armónica y no negativa en $D(a,R)$. Entonces, si $r \in (0,R)$, se tiene que

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}, \quad \forall z \in \bar{D}(a,R)$$

Por tanto, tomando $r = \frac{R}{2}$, tenemos

$$\frac{1}{3}u(a) \leq u(z) \leq 3u(a), \quad z \in \bar{D}\left(a, \frac{R}{2}\right)$$

Demostración. Fijamos $r \in (0,R)$. Tomamos ρ con $r < \rho < R$. Sea $v : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$, $v(z) = u(a+\rho z)$.

$$\begin{aligned} v : \mathbb{D} \to D(a,R) &\xrightarrow{u} \mathbb{R} \\ z \mapsto a + \rho z & \end{aligned}$$

v es continua en $\bar{\mathbb{D}}$, armónica en $\mathbb{D}$ y no negativa en $\bar{\mathbb{D}}$.

Sea $z \in \partial D\left(0, \frac{r}{\rho}\right)$. z es de la forma $z = \frac{r}{\rho}e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})P_{r/\rho}(\theta - t)dt$$

Además,

$$v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})dt$$

Recordemos que

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(t) \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad 0 \leq r < 1, \ t \in \mathbb{R}$$

Entonces, si $\theta \in \mathbb{R}$ y $z = \frac{r}{\rho}e^{i\theta}$, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})\frac{1-r/\rho}{1+r/\rho}dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})P_{r/\rho}(\theta-t)dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})\frac{1+r/\rho}{1-r/\rho}dt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\rho-r}{\rho+r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})dt \leq v(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})dt \Leftrightarrow \frac{\rho-r}{\rho+r}v(0) \leq v(z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}v(0)$$

En términos de u,

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(a) \leq u(a+\rho z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}u(a), \quad \theta \in \mathbb{R}, \ \rho \in (r,R), \ z = \frac{r}{\rho}e^{i\theta}$$

Como $u(a+\rho z) = u\left(a + \rho\frac{r}{\rho}e^{i\theta}\right) = u(a+re^{i\theta})$, entonces

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(a) \leq u(a+\rho z) \leq \frac{\rho+r}{\rho-r}u(a), \quad \theta \in \mathbb{R}, \ \rho \in (r,R)$$

Haciendo $\rho \to R^-$, tenemos que:

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a), \quad z \in \partial D(a,r)$$

Como u es continua en $\bar{D}(a,r)$ y armónica en $D(a,r)$, por el principio del máximo y el principio del mínimo,

$$\max_{z\in\bar{D}(a,r)} u(z) = \max_{z\in\partial D(a,r)} u(z)$$
$$\min_{z\in\bar{D}(a,r)} u(z) = \min_{z\in\partial D(a,r)} u(z)$$

Entonces tenemos la desigualdad para todo $z \in \bar{D}(a,r)$. □

Proposición 4.29. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas y no negativas en D. Si existe $z_0 \in D$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \infty$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty, \quad \forall z \in D$$

siendo la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de D.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $u_n : D \to \mathbb{R}$ armónica no negativa. Sea

$$A = \{z \in D : \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty\}$$

$A \neq \emptyset$ porque $z_0 \in A$. Veamos que A es abierto y cerrado en D.

1. Probemos que A es abierto. Queremos ver que si $a \in A$ y $R > 0$ tal que $D(a,R) \subset D$, entonces $D(a,R/2) \subset A$ y $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ uniformemente en $D(a,R/2)$.

   Basta ver la convergencia uniforme. Sea $M > 0$, veamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $z \in D(a,R/2)$, entonces $u_n(z) > M$. Como $a \in A$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = \infty$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
   $$n \geq n_0 \Rightarrow u_n(a) > 3M$$
   Entonces, si $n \geq n_0$ y $z \in D(a,R/2)$, por las desigualdades de Harnack tenemos
   $$u_n(z) \geq \frac{1}{3}u_n(a) > \frac{1}{3}3M = M$$
   Por tanto, A es abierto.

2. Veamos que A es cerrado en D, es decir, que $D \setminus A$ es abierto.

   Sea $a \in D \setminus A$ y sea $R > 0$ con $D(a,R) \subset D$. $D(a,R/2) \subset D \setminus A$, ya que si $z \in D(a,R/2)$, entonces $u_n(z) \leq 3u_n(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in D$. Si $z \in A$, $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = \infty$, pero $a \notin A$. Así que $D \setminus A$ es abierto.

A es abierto y cerrado en D, que es conexo. Como $A \neq \emptyset$, tenemos que $A = D$. Entonces $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty$ para todo $z \in D$. Sabemos que, dado $a \in D$ y $R > 0$ con $D(a,R) \subset D$, se tiene que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ uniformemente en $D(a,R/2)$. Entonces $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D. □

Teorema 4.30 (Teorema de Harnack)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de funciones armónicas en D. Para cada $z \in D$, sea $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces se da una de las dos siguientes posibilidades:*

1. *$u \equiv \infty$. En este caso, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.*
2. *$u(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$. En este caso, u es armónica en D y $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que u_n es no negativa para cada $n \in \mathbb{N}$. Hay dos posibilidades:

- Existe $z_0 \in D$ tal que $u(z_0) = \infty$. Entonces $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty$ y $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Se verifica (1).
- $u(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$. Entonces $u : D \to \mathbb{R}$. Sea $a \in D$ y $R > 0$ con $D(a, R) \subset D$. Veamos que $\{u_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $D(a, R/2)$.

  Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{u_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy por ser convergente, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
  $$n \geq m > n_0 \Rightarrow 0 \leq u_n(a) - u_m(a) < \frac{\varepsilon}{3}$$
  ya que $u_n - u_m$ es armónica en $D(a, R)$ y no negativa. Por tanto, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $D(a, R/2)$.

  Entonces, dado $a \in D$ y $R > 0$ con $D(a, R) \subset D$, hemos visto que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformemente en $D(a, R/2)$. Por tanto, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Entonces u es armónica en D, así que se verifica (2).

Consideramos ahora el caso general. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $v_n = u_n - u_1$. Entonces $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones armónicas no negativas. Para cada $z \in D$, sea

$$v(z) = \lim_{n\to\infty} v_n(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Si $z \in D$,

$$v(z) = \lim_{n\to\infty} (u_n(z) - u_1(z)) = \begin{cases} \infty & \text{si } u(z) = \infty \\ u(z) - u_1(z) & \text{si } u(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por el caso anterior se da una de las dos siguientes posibilidades:

- $v \equiv \infty$. Veamos que $v_n \to \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

  Sea $K \subset D$, K compacto. Sea $A = \min_{z\in K} u_1(z)$. Como $v_n \to \infty$ uniformemente en D, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $z \in K$, entonces $v(z) > M - A$, con $M \in \mathbb{R}$. Entonces, si $n \geq n_0$ y $z \in K$, $u_n(z) = u_1(z) + v_n(z) > A + M - A = M$. Por tanto, se verifica (1).
- $v(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$. Veamos que u es armónica y $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

  Sabemos que
  $$v(z) = u(z) - u_1(z) \Leftrightarrow u(z) = u_1(z) + v(z), \quad z \in D$$
  Entonces $u(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ y u es armónica en D. Además, $u_n - u_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} u - u_1$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D. Por tanto, $u_n \to u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, así que se verifica (2).

$\square$

Capítulo 5

El teorema de factorización de Weierstrass

Si $P(z)$ es un polinomio con ceros $z_1, \ldots, z_n$, entonces podemos factorizar $P(z)$ como

$$P(z) = c \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

El objetivo es factorizar una función holomorfa usando sus ceros.

5.1. Funciones holomorfas sin ceros o con finitos ceros

Teorema 5.1. *Sea D un dominio simplemente conexo y sea f una función holomorfa en D sin ceros. Entonces existe g holomorfa en D tal que $f = e^g$.*

Teorema 5.2. *Sea D un dominio simplemente conexo y sea f una función holomorfa en D con un número finito de ceros $z_1, \ldots, z_n$. Entonces existe g holomorfa en D tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} (z - z_n)$$

Demostración. Sea

$$h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1) \ldots (z - z_N)}$$

Solucionando las singularidades evitables, h es holomorfa en D y sin ceros. Entonces por el teorema anterior existe g holomorfa en D tal que

$$e^{g(z)} = h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1) \ldots (z - z_N)} \Rightarrow f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} (z - z_n)$$

□

Desde otro punto de vista, sea D un dominio simplemente conexo y $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}} \subset D$, podemos plantearnos si existe f holomorfa en D tal que f tiene ceros $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$.

Si $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ tiene un punto de acumulación en D entonces, por el teorema de identidad de Weierstrass, $f \equiv 0$. Nos interesa el caso en el que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es numerable y sin puntos de acumulación en D.

Sea $D = \mathbb{C}$ y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ numerable y sin puntos de acumulación. Habría que definir $\prod_{n=1}^{\infty}(z - z_n)$, por ejemplo de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty}(z - z_n) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(z - z_n)$$

Como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es infinito, entonces necesariamente $|z_n| \to \infty$. En caso contrario, $\{z_n\}$ tendría un punto de acumulación en $\mathbb{C}$. Si fijamos $z \in \mathbb{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|z - z_n| > 2$, así que

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0}^{\infty} |z - z_n| = \infty$$

5.2. Productos infinitos

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Queremos darle sentido a $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$. Por ejemplo, si $P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n$, podemos definir

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$$

Sin embargo, esta definición plantea algunos problemas.

1. Si tenemos una multiplicación de números complejos cuyo resultado es 0, queremos que uno de ellos sea cero. Sin embargo, si $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $P_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{N!}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} P_N = 0$, con $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Queremos que la convergencia depende de la cola. Sin embargo, con esta definición depende de un número finito de términos.

   Sea $a_1 = a$ y $a_n = n$ para $n \geq 2$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = 0$ porque $P_N = 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Sin embargo, si $a_n = n + 1$ para todo $n \geq 2$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = \infty$.

Definición 5.1. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Diremos que el producto infinito asociado a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, que denotamos por $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, converge si:

1. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.
2. Existe $\lim\limits_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$ y además es distinto de cero.

Si converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$.

Ejemplo.

1. Sea $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo,

   $$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N!} = 0$$

   Por tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.
2. Sea $a_1 = 0$ y $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$. Se verifica que $a_n \neq 0$ para $n \geq 2$. Ahora bien,

   $$\prod_{n=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

   Por tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

3. Sea $a_1 = 0$ y $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$, $n \geq 2$. Es claro que $a_n \neq 0$ para $n \geq 2$. Además,

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{n=2}^{N} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n}\right)\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{N}\frac{N+1}{2} \to \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Teorema 5.3. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si ocurre lo siguiente.*

1. *El conjunto $\{a_n : a_n = 0\}$ es finito.*
2. *Si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq M$, entonces existe $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=M}^{N} a_n$ y es distinto de 0.*

Teorema 5.4. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Entonces:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
2. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ *si y solo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 0$.*
3. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} a_{n+N}$ converge y además*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty} a_{n+N}\right)$$

4. *Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge y además*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

Demostración.

1. Como $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0}^{N} a_n = q$, con $q > 0$. Si $M > n_0$,

$$a_M = \frac{\prod_{n=n_0}^{M} a_n}{\prod_{n=n_0}^{M-1} a_n} \xrightarrow[M\to\infty]{} \frac{q}{q} = 1$$

2. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 0$. Como $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} P_N \to 0$$

Si $N > n_0$, entonces $P_N = a_1 \dots a_{n_0-1} 0 a_{n_0+1} \dots a_N = 0$.

Recíprocamente, si $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$ y $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3. Tomemos $N \in \mathbb{N}$. Si $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y $\lim_{M\to\infty} \prod_{n=n_0}^{M} a_n = q$ con $q \neq 0$. Entonces $a_{n+N} \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y además

$$\prod_{n=n_0}^{M} a_{n+N} = \prod_{n=n_0+N}^{M+N} a_n = \frac{\prod_{n=n_0}^{M+N} a_n}{a_{n_0} \dots a_{n_0+N-1}} \to \frac{q}{a_{n_0} \dots a_{n_0+N-1}} \neq 0$$

Por tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} a_{n+N}$ converge.

4. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen. Entonces:

   - Existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_a$ y $\lim\limits_{N\to\infty} \prod_{n=n_a}^{N} a_n = l_a \neq 0$.
   - Existe $n_b \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \geq n_b$ y $\lim\limits_{N\to\infty} \prod_{n=n_b}^{N} b_n = l_b \neq 0$.

   Sea $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$. Entonces $a_n b_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0}^{N} a_n b_n \to c \neq 0$$

   Como los productos convergen,

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\prod_{n=1}^{N} b_n\right) = \left(\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n\right)\left(\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} b_n\right) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

□

Teorema 5.5. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, entonces son equivalentes:*

1. *$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
2. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{Log}(a_n)$ converge.*

Demostración.

$\Rightarrow$ Como $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$ y además $\prod_{n=n_0}^{N} \to q$ con $q \neq 0$. Sea $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} \operatorname{Log}(a_n)$. Entonces:

$$e^{S_N} = e^{\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(a_n)} = \prod_{n=n_0}^{N} a_n = q_N \Rightarrow S_N \in \log(q_n) \Rightarrow S_N = \operatorname{Log}(a_n) + 2\pi k_N i, \quad k_N \in \mathbb{Z}$$

Distinguimos dos casos:

1. Supongamos que $q \notin (-\infty, 0)$. Como $q_N \to q$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_N \notin (-\infty, 0]$ para todo $N \geq N_0$. Así que $\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{Log}(q_N) = \operatorname{Log}(q)$.

$$\begin{cases} S_{N+1} - S_N = \operatorname{Log}(q_{N+1}) - \operatorname{Log}(q_N) + 2\pi(k_{N+1} - k_N)i \\ S_{N+1} - S_N = \operatorname{Log}(a_{N+1}) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} (k_{N+1} - k_N) = 0$$

   Como $k \in \mathbb{Z}$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $k_N = k$ para todo $N \geq j$.

2. Supongamos que $q \in (-\infty, 0)$. Definimos una nueva sucesión $\tilde{a}_{n_0} = -a_{n_0}$ y $\tilde{a}_n = a_n$ para $n > n_0$.

$$\tilde{q}_N = \prod_{n=n_0}^{N} \tilde{a}_n = -\prod_{n=n_0}^{N} a_n \to -q > 0$$

   Por el caso anterior. $\tilde{S}_N = \sum_{n=n_0}^{N} \operatorname{Log}(\tilde{a}_n)$ converge. Equivalentemente, S_N converge.

$\Leftarrow$ Falta ver que $\prod_{n=n_0}^{N} a_n \to q \neq 0$. Sabemos que $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} \operatorname{Log}(a_n) \to p$ y $q_N = e^{S_N}$. Tomando límites,

$$\lim_{N\to\infty} q_N = \lim_{N\to\infty} e^{S_N} = e^{\lim_{N\to\infty} S_N} = e^p = q \neq 0$$

□

Corolario 5.6. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces son equivalentes:*

1. *$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(a_n)$ converge.*

Además,

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(a_n)}$$

Queremos encontrar una noción de convergencia absoluta. Para las series sabemos lo siguiente.

Teorema 5.7. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, entonces son equivalentes:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*
2. *Dada $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge y es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
3. *Sea $\{A_n\}$ una partición de $\mathbb{N}$ con infinitos elementos. Entonces $\sum_{k\in A_n} a_k$ converge y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k\in A_n} a_n \right)$$

Como consecuencia, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, en particular converge.

Uniendo los teoremas anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.8. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces son equivalentes:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(a_n)$ converge absolutamente.*
2. *Dada $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutación, $\prod_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge y su valor es*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(a_n)}$$

3. *Sea $\{A_n\}$ una partición de $\mathbb{N}$ con infinitos elementos. Entonces $\prod_{k\in A_n} a_k$ converge y además*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k\in A_n} a_n \right)$$

Lema 5.9. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces son equivalentes:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(a_n)$ converge absolutamente.*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ converge absolutamente.*

Demostración. Empecemos por $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, entonces

$$\operatorname{Log}(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

Además,

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$$

Queremos analizar

$$\left| \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} - 1 \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|}$$

Si $|z| < \frac{1}{2}$, entonces

$$\left|\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z} - 1\right| = \frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2}$$

Así que

$$\left|\left|\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}\right| - 1\right| \leq \left|\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z} - 1\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left|\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z}\right| \leq \frac{3}{2}$$

Por último, sea $z = w - 1$, entonces si $|w-1| = |z| \leq \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} \leq \left|\frac{\mathrm{Log}(w)}{1-w}\right| \leq \frac{3}{2}$$

Basta ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|1 - a_n| < \frac{1}{2}$.

- $\Leftarrow$ Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ converge absolutamente, $a_n \to 1$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|1-a_n| \leq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0$.
- $\Rightarrow$ Análogo.

□

Teorema 5.10. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, entonces son equivalentes:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ converge absolutamente.*
2. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|1-a_n| \leq \frac{1}{2}$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{Log}(a_n)$ converge uniformemente.*
3. *Para cada permutación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se tiene que $\prod_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge y además*
$$\prod_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$
4. *Sea $\{A_n\}$ una partición de $\mathbb{N}$ con infinitos elementos. Entonces $\prod_{k\in A_n} a_k$ converge y además*
$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k\in A_n} a_n\right)$$

Definición 5.2 (Convergencia absoluta)**.** Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, su producto infinito asociado converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ converge absolutamente.

Observación.

1. Si $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces converge.
2. Si $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |1-a_n|)$ converge absolutamente.

   Demostración. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|1-a_n|)$ converge absolutamente si y solo si $\prod_{n=1}^{\infty}(1-1-|1-a_n|) = -\prod_{n=1}^{\infty}|1-a_n|$ converge absolutamente. □

5.3. Funciones holomorfas definidas por productos infinitos

Teorema 5.11. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio D. Entonces son equivalentes:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty}(1-f_n)$ es absoluta y uniformemente convergente en compactos de D.*

2. *Para cada compacto K en D existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_K$ se tiene que $|1-f_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ y $\sum_{n=n_K}^{\infty} \operatorname{Log}(f_n)$ converge absoluta y uniformemente en K.*

Lema 5.12. *Sea $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Entonces*

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)-1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Razonamos por inducción.

- Para $n=1$,
$$|1+u-1-1| = |u_1| \leq |u_1|$$
- Supongamos que es cierto para n y veamos para el caso $n+1$.
$$\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+u_k)-1\right| = \left|(1+u_{n+1})\prod_{k=1}^{n+1}(1+u_k)-1\right| = \left|(1+u_{n+1})\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)-1\right)+u_{n+1}\right| \leq$$
$$\leq |1+u_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)-1\right| + |u_{n+1}| \leq |1+u_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_k|)-1\right| + |u_{n+1}| \leq$$
$$\leq (1+|u_{n+1}|)\left|\prod_{k=1}^{\infty}(1+|u_k|)-1\right| + |u_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n+1}(1+|u_k|)-1$$

□

Teorema 5.13. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en D. Si $\sum_{n=1}^{\infty}(1-f_n)$ converge absoluta y uniformemente en compactos de D, entonces:*

1. *$\prod_{k=1}^{n}$ converge uniformemente en cada compacto de D a una función holomorfa P que denotamos por $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$.*
2. *La convergencia de $\prod_{k=1}^{n} f_k$ no depende de reordenaciones.*
3. *Para cada $z_0 \in D$ tenemos que $ord(z_0, P) = \sum_{k=1}^{\infty} ord(z_0, f_k)$, donde $ord(z_0, f)$ es el orden de z_0 como cero de f.*
4. *Las derivadas logarítmicas $\frac{P'}{P}$ y $\frac{f_n'}{f_n}$ existen como funciones meromorfas. Además,*
$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k'}{f_k}$$
Si $R>0$ y $\overline{D(z_0,R)} \subset D$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_n no tiene ceros en $\overline{D(z_0,R)}$ para todo $n \geq n_0$ y $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{f_n'}{f_n}$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D(z_0,R)}$.

Demostración.

1. Sea K compacto de D y sea $P_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$. Basta ver que P_n es uniformemente de Cauchy.

   En primer lugar, veamos que P_n es uniformemente acotado en K. Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1-f_n)$ converge absoluta y uniformemente en K, entonces existe c_K tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|1-f_n(z)| < c_K$. Entonces:
$$|P_n| = \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\right| = \left|\prod_{k=1}^{n}(1+f_k-1)\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|1-f_k|) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{|1-f_k|} = e^{\sum_{k=1}^{n}|1-f_k|} \leq$$
$$\leq e^{\sum_{k=1}^{\infty}|1-f_k|} < e^{c_K}$$

Ahora, veamos que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en K. Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que si $|x| < \delta$ entonces $e^{c_K}|e^x - 1| < \varepsilon$. Como $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - f_n)$ es de Cauchy uniformemente en K, existe n_K tal que si $m \leq n \leq n_K$, entonces $\sum_{k=n}^{m}|1 - f_k| < \delta$. Por tanto, si $m \geq n \geq n_K$,

$$|P_m - P_n| = \left|\prod_{k=1}^{m} f_k - \prod_{k=1}^{n} f_k\right| = |P_n|\left|\left(\prod_{k=n+1}^{m} f_k\right) - 1\right| \leq e^{c_K}\left|\prod_{k=n+1}^{m}(1 + f_k - 1) - 1\right| \leq$$
$$\leq e^{c_K}\left(\prod_{k=n+1}^{m}(1 + |1 - f_k|) - 1\right) \leq e^{c_K}\left(e^{\sum_{k=n+1}^{m}|1-f_k|} - 1\right) < \varepsilon$$

2. Es consecuencia de (1).

3. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty}|1 - f_n(z)| < \frac{1}{2}$ para todo $z \in \overline{D(z_0, R')}$, con $\overline{D(z_0, R)} \subset D(z_0, R')$. Entonces, en particular $|1 - f_n(z)| < \frac{1}{2}$ para todo $n \geq n_0 + 1$. Así que f_n no se anula en $\overline{D(z_0, R')}$ para todo $n \geq n_0 + 1$. Sea entonces $g_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} f_k$. Sabemos que g_n converge uniformemente en $\overline{D(z_0, R')}$ a una función g.

$$|g_n(z) - 1| = \left|\left(\prod_{k=n_0+1}^{n} f_k(z)\right) - 1\right| = \left|\prod_{k=n_0+1}^{n}(1 + f_k(z) - 1) - 1\right| \leq$$
$$\leq \prod_{k=n_0+1}^{n}(1 + |f_k(z) - 1|) - 1 \leq e^{\sum_{k=n_0}^{n}|1-f_k(z)|} - 1 \leq e^{1/2} - 1, \quad \forall z \in \overline{D(z_0, R')}$$

Por tanto, g no tiene ceros en $\overline{D(z_0, R')}$. Entonces

$$P = f_1 \dots f_{n_0} \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n = f_1 \dots f_{n_0} g$$

Como g es no nula,

$$ord(z_0, P) = \sum_{n=1}^{n_0} ord(z_0, f_n) + ord(z_0, g) = \sum_{n=1}^{\infty} ord(z_0, f_n)$$

4. De la expresión anterior tenemos que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{n=1}^{n_0}\frac{f_n'}{f_n} + \frac{g'}{g}$$

Falta ver que $\sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{f_n'}{f_n} \to \frac{g'}{g}$. Como $\sum_{n=n_0+1}^{N} f_k = \frac{g_N'}{g_N}$, podemos ver equivalentemente que $\frac{g_N'}{g_N} \to \frac{g'}{g}$ uniformemente en $\overline{D(0, R')}$.

$$\left|\frac{g_N'(z)}{g_N(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right| = \left|\frac{g_N'(z)g(z) - g'(z)g_N(z)}{g_N(z)g(z)}\right| =$$
$$= \left|\frac{g_N'(z)g(z) - g(z)g'(z) + g(z)g'(z) - g'(z)g_N(z)}{g_N(z)g(z)}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|g(z)||g_N'(z) - g'(z)| + |g'(z)||g_N(z) - g(z)|}{|g_N(z)||g(z)|}$$

Sabemos que

$$||g_n(z)| - 1| \leq |g_n(z) - 1| < e^{1/2} - 1 \Leftrightarrow 2 - e^{1/2} < |g_n(z)| < e^{1/2}$$
$$||g(z)| - 1| \leq |g(z) - 1| < e^{1/2} - 1 \Leftrightarrow 2 - e^{1/2} < |g(z)| < e^{1/2}$$

Además, existe $c_K = \max_{z\in\overline{D(z_0,R')}}(|g(z)| + |g'(z)|)$. Por tanto,

$$\left|\frac{g_N'(z)}{g_N(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right| \to 0$$

uniformemente en $\overline{D(z_0, R')}$.

$\square$

Ejemplo.

1. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$. Veamos que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$.

   Sea K compacto de $\mathbb{C}$. Entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0, R)}$.

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\left(1-\frac{z}{n^2}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|}{n^2} \leq R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq Rc$$

   Por el teorema anterior, el producto converge uniformemente en K. Además, $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$ se anula en $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Busquemos una función entera que se anule en $\mathbb{Z}$ y cuyos ceros tengan orden 1. Consideramos $P(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$. Sea K un compacto en $\mathbb{C}$, existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0, R)}$.

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{n^2} \leq R^2 c$$

   Por tanto, converge uniformemente en K.

   La función $z \mapsto \sin(\pi z)$ tiene las mismas características que buscábamos en P. Por tanto, la función

   $$z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{P(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}$$

   es una función holomorfa sin ceros y se puede factorizar de la forma

   $$\frac{\sin(\pi z)}{z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} = e^{\varphi(z)}$$

5.4. El teorema de factorización de Weierstrass

Sea $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ una colección de puntos de $\mathbb{C}$. Nuestro objetivo era encontrar una función entera que se anule en $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$.

- Si $\{z_k\}_{k=1}^{N}$ es finita, esta función es $\prod_{n=1}^{N}(z - z_n)$.
- Si $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{F}}$ tiene un punto de acumulación, entonces la función tiene que ser nula.

En el caso restante, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene $\lim_{k\to\infty}|z_k| = \infty$. Consideramos la expresión

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)$$

Si $z \in \overline{D(0, R)}$ con $R > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|1-\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|}{|z_k|} \leq R\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|}$$

Teorema 5.14. *Sea* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tal que* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|}$ *converge y* $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$. *Entonces* $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$ *converge absoluta y uniformemente en compactos de* $\mathbb{C}$ *y además tiene como ceros* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Observación. La función $z^N \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ tiene como ceros $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y además el 0 es un cero de multiplicidad N.

Falta por ver qué ocurre cuando $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|}$ no converge, donde $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$. Consideramos

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{q_k\left(\frac{z}{z_k}\right)}$$

Veamos un razonamiento intuitivo. Que el producto absoluto converja absoluta y uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ es análogo a que converja la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Log}\left(\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{q_k\left(\frac{z}{z_k}\right)}\right)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + q_k\left(\frac{z}{z_k}\right)\right|$$

Si conseguimos que

$$\sup_{|z|\le R} \left|\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + q_k\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| < M_K(R)$$

y además $\sum_{k=1}^{\infty} M_K(R) < \infty$, por el criterio de la mayorante de Weierstrass se tiene la convergencia. Para $k \ge k_0$, tenemos que

$$\frac{|z|}{|z_k|} \le \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} < 1$$

Sea $w = \frac{z}{z_k}$,

$$|\operatorname{Log}(1-w) + q_k(w)| = \left|-\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-w}\right) + q_k(w)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} - q_k(w)\right|$$

Entonces, si $q_k(w) = \sum_{n=1}^{k} \frac{w^n}{n}$,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} - q_k(w)\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{w^n}{n}\right| \le \frac{1}{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} |w|^n = \frac{|w|^{k+1}}{k+1} \frac{1}{1-|w|}$$

Tenemos que $\frac{1}{1-|w|} < 2$. Por tanto, queremos que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{|w|^{k+1}}{k+1} < \infty$$

Esta serie siempre converge. En lugar de considerar q_k podemos tomar q_{p_k}, donde $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$. Basta tomar p_k tal que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{|w|^{p_k+1}}{p_k+1} < \infty$$

Definición 5.3 (Factores primos de Weierstrass)**.** Los factores primos de Weierstrass son

$$E_0(z) = 1 - z$$
$$E_p(z) = (1-z) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right), \quad p \in \mathbb{N}$$

donde $\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}$ es el polinomio de Taylor de orden p de $\log\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

Observación. Para todo $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $E_p(0) = 1$, $E_p(1) = 0$ y E_p es entera.

Lema 5.15. *Sea $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $|z| < 1$, entonces $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.*

Demostración. Si $p = 0$,

$$|1 - E_0(z)| = |1 - (1 - z)| = |z|$$

Si $p \in \mathbb{N}$, como E_p es una función entera,

$$E_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Como $E_p(0) = 1$, entonces $a_0 = 1$. Así que

$$E_p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Además, como $E_p(1) = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1$. De la expresión anterior,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 1 - E_p(z) = 1 - (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)$$

Derivando,

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\right) - (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{p} z^{k-1}\right) = \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)\left(1 - (1 - z)\sum_{k=0}^{p-1} z^k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) z^p = \\
&= z^p \left(1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k} + \frac{\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)^2}{2!} + \dots\right) = z^p + A_{p+1} z^{p+1} + A_{p+2} z^{p+2} + \dots
\end{aligned}$$

Por tanto, $a_n = 0$ para todo $1 \leq n \leq p$. Además,

$$-(p + 1) a_{p+1} = 1 \Rightarrow a_{p+1} = -\frac{1}{p + 1}$$

En general, para todo $n > p + 1$,

$$n a_n = -A_{n-1} < 0 \Rightarrow a_n < 0$$

Así que

$$\begin{aligned}
|1 - E_p(z)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right| = \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n\right| = |z|^{p+1}\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^{n-(p+1)}\right| \leq \\
&\leq |z|^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| |z|^{n-(p+1)} \leq |z|^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| = |z|^{p+1}\left(-\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right) = \\
&= |z|^{p+1}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = |z|^{p+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Observación. Hemos visto que

$$E_p(z) = 1 - \frac{z^{p+1}}{p+1} + \sum_{n=p+2}^{\infty} a_n z^n$$

Teorema 5.16 (Teorema de factorización de Weierstrass: primera versión)**.** *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *con* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$*. Entonces existe una sucesión de números* $\{p_n\} \subset \mathbb{N} \cup 0$ *de modo que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge absoluta y uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ *y además define una función entera cuyos ceros son* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*.*

Demostración. Sea K compacto de $\mathbb{C}$, entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0,R)}$. Como $\{a_n\} \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $\frac{|z|}{|a_n|} \leq \frac{R}{2R} < 1$. Por el lema anterior,

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p_n+1}$$

Si consideramos $p_n = n$, por el criterio de la mayorante de Weierstrass tenemos que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|1 - E_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|$$

converge uniformemente en K. Además,

$$E_n\left(\frac{a_n}{a_n}\right) = E_n(1) = 0$$

□

Teorema 5.17 (Teorema de factorización de Weierstrass: segunda versión)**.** *Sea* f *una función entera tal que en* $z = 0$ *tiene un cero de orden* N *y los demás ceros de* f *son* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Entonces existe* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y una función entera* g *tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

Demostración. Suponemos $\{a_n\}$ conjunto infinito. Por el teorema anterior, existe una función entera que se anula en $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces

$$\frac{f(z)}{z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)}$$

es entera y no se anula en $\mathbb{C}$. Por tanto, existe g entera tal que

$$\frac{f(z)}{z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)} = e^{g(z)}$$

□

Observación.

1. La factorización no es única. Si la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ da una descomposición, entonces una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $p_n \leq q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ también sirve.

2. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y existe p tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a|^{p+1}}$ converge, entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge absoluta y uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea K compacto de $\mathbb{C}$, entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0,R)}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$|a_n| \geq 2R \Rightarrow \left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

Por el lema anterior,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|1 - E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p+1} \leq R^{p+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$$

□

5.5. Exponente de convergencia y género de una sucesión

A partir de las observaciones anteriores, introducimos la siguiente definición.

Definición 5.4. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Definimos el exponente de convergencia de la sucesión como

$$\sigma = \inf\left\{s \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty\right\}$$

Observación.

1. Si $s \in \mathbb{R}$ satisface que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty$, entonces si $t > s$ se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^t} < \infty$.
2. Diremos que $\inf \emptyset = +\infty$, es decir, $\sigma = +\infty$ cuando ningún $s \in \mathbb{R}$ satisface que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty$.
3. Si $\sigma < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \infty \text{ si } s \in (\sigma, +\infty)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} = \infty \text{ si } s \in (-\infty, \sigma)$$

Definición 5.5. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ y $\sigma < \infty$. Entonces el género de la sucesión es el menor entero p tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$$

Observación.

1. $\sigma > 0$ siempre. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^0} = \infty$ así que $p \geq 0$.
2. $p \leq \sigma \leq p + 1$.

Si $\{a_n\}$ es finita entonces diremos que $\sigma = p = 0$.

Ejemplo.

1. Sea $a_n = n+1$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} < \infty \Leftrightarrow s < 1 \Rightarrow \sigma = 1, p = 1$$

2. Sea $a_n = (n+1)^2$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2s}} < \infty \Leftrightarrow s > \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2}, p = 0$$

3. Sea $a_n = (n+1)\log^2(n+1)$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s \log^{2s}(n+1)} < \infty \Leftrightarrow s \geq 1 \Rightarrow \sigma = 1, p = 0$$
Para el caso $s = 1$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log^2(n+1)} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\log^2(x+1)} dx = -\frac{1}{\log(x+1)}\Big]_1^{\infty} = \frac{1}{\log(2)}$$

4. Sea $a_n = \log(n+1)$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^s(n+1)} = \infty \ \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma = \infty$$

5. Sea $a_n = 2^n$.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^s)^n} < \infty \ \forall s > 0 \Rightarrow \sigma = 0, p = 0$$

5.6. Factorización canónica de una función entera

Con las definiciones anteriores vamos a tener el siguiente teorema.

Teorema 5.18 (Teorema de factorización canónica)**.** *Sea f una función entera con $z = 0$ un cero de orden N y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ los demás ceros de f. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ y $\sigma < \infty$, entonces*
$$f(z) = e^{g(z)} z^N \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)$$
donde p es el género de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. Sea K compacto de $\mathbb{C}$, entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0,R)}$. Queremos ver que $\prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)$ converge absoluta y uniformemente en K. Basta ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|$ converge uniformemente en K. Como $|a_n| \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \geq 2R$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, como p es el género de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|1 - E_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|z|^{p+1}}{|a_n|^{p+1}} \leq R^{p+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$$
□

5.7. Factorización de funciones holomorfas en un dominio

Teorema 5.19. *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{0\}$ sin puntos de acumulación en D. Entonces existe una función holomorfa en D que se anula en $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*