

Ampliación de teoría de la probabilidad

7 de octubre de 2022

Índice general

1. Función de distribución	2
1.1. Introducción	2
1.2. Propiedades	2
1.3. Convolución en funciones de distribución	5
1.4. Convergencia en distribución	9

Capítulo 1

Función de distribución

1.1. Introducción

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ -álgebra y $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad.

Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

para todo $B \in \mathcal{B}$ σ -álgebra de Borel. X induce una medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$:

$$P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

Definición 1.1. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad. Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) y P_X la medida de probabilidad inducida por X en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. La función de distribución asociada a X es:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F(a) = P_X((-\infty, a]) = P(X \leq a)$$

Nota. Variables aleatorias distintas pueden tener la misma función de distribución.

1.2. Propiedades

Sea F la función de distribución asociada a una variable aleatoria X . Entonces:

- F es creciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$
- F es continua por la derecha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Existe $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-) = F(x) - P_X(\{x\})$

Teorema 1.1 (Teorema de correspondencia). Si $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ es una función que verifica:

- F es creciente.
- $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$
- F es continua por la derecha.

Entonces existe una única medida de probabilidad P_F en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que F es su función de distribución. Es decir, tal que $F(a) = P_F((-\infty, a])$.

Definición 1.2. Sea F función de distribución. El conjunto de discontinuidad de F se define como:

$$C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x^-)\}$$

También se puede definir el conjunto de puntos de discontinuidad de F como:

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Observación. $D(F) = C(\bar{F})$.

Proposición 1.2. $D(F)$ es a lo sumo numerable.

Corolario 1.3. $C(F)$ es denso en \mathbb{R} .

Proposición 1.4. Sean F y G funciones de distribución tales que $F(x) = G(x)$ para todo $x \in E \subset \mathbb{R}$, con E denso en \mathbb{R} . Entonces $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3. La función de masa de probabilidad se define como:

$$p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad p(x) = P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$$

Definición 1.4. Sea X variable aleatoria con función de distribución F y función de masa p . Entonces:

- X es discreta cuando $\sum_{x \in D(F)} p(x) = 1$.
- X es continua cuando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En otro caso, X es mixta.

Definición 1.5. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ variable aleatoria. X es singular si existe $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ tal que $P_X(B) = 1$.

Observación. Las variables aleatorias discretas son singulares.

Definición 1.6. Sea X variable aleatoria. X es absolutamente continua si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ se tiene que $P_X(B) = 0$.

Teorema 1.5. Sea F función de distribución. F es absolutamente continua si y solo si existe una función medible f no negativa y finita tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b$$

La función f se llama función de densidad.

Observación. F es continua cuando no hay saltos y absolutamente continua cuando tiene una densidad.

Teorema 1.6 (Mixtura de distribuciones). Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma:

$$F = \alpha F_d + (1 - \alpha)F_c, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

donde F_d es la función de distribución de una variable aleatoria discreta y F_c de una continua.

Ejemplo. Consideramos la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{5}{8} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{4x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Estudiamos sus puntos de discontinuidad y la probabilidad en ellos.

$$D(F) = \{4, 5\}, \quad \begin{cases} p(4) = F(4) - F(4^-) = \frac{1}{8} \\ p(5) = F(5) - F(5^-) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

Luego la función de distribución discreta es:

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Por último podemos calcular la función de distribución continua:

$$F_c(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \left(F(x) - \frac{1}{4}F_d(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{5x}{24} - \frac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{5}{3x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Lema 1.7. Sea F función de distribución. Entonces:

- Existe F' en casi todo punto y es no negativa y finita.
- $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a), \quad a < b$
- Siendo $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'(t)dt$ y $F_s(x) = F(x) - F_{ac}(x)$, entonces $F'_{ac}(x) = F'(x)$ en casi todo punto y $F'_s(x) = 0$.

Teorema 1.8 (Descomposición de Lebesgue). *Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma:*

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)F_s$$

con F_{ac} función de distribución absolutamente continua y F_s singular.

Observación. Se pueden aplicar ambas descomposiciones (continua-discreta y Lebesgue) a una función de distribución F .

$$F = \beta F_{ac} + (1 - \beta)(\alpha F_d + (1 - \alpha)F_{cs})$$

Definición 1.7 (Esperanza). Sea X variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) . La esperanza de X se define como:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

Observación.

- Si F es absolutamente continua,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

- Si F es discreta,

$$E(X) = \sum_{x \in D(F)} x p(x)$$

1.3. Convolución en funciones de distribución

Definición 1.8. Sean F y G funciones de distribución. Definimos la convolución de F y G como la función definida por:

$$(F * G)(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z - y) dG(y), \quad z \in \mathbb{R}$$

Nota. La convolución es conmutativa con funciones medibles no negativas.

Proposición 1.9. $F * G$ es una función de distribución.

Teorema 1.10. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_X y F_Y respectivamente. Entonces $F_X * F_Y$ es la función de distribución de la variable aleatoria $X + Y$.

Teorema 1.11. Si F es absolutamente continua con densidad f , entonces $F * G$ es absolutamente continua con densidad

$$(f * G)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y) dG(y)$$

Teorema 1.12. Si F y G son absolutamente continuas con densidades f y g respectivamente, entonces $F * G$ es absolutamente continua con densidad $f * g$.

Ejemplo. Sean $X, Y \sim U([0, 1])$. Sus funciones de distribución son:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$ y $z \in \mathbb{R}$. Como X e Y son absolutamente continuas, Z es absolutamente continua. Queremos calcular:

$$F_Z(z) = (F_X * F_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z - y) f_Y(y) dy$$

Consideramos todos los casos:

- Si $z < 0$ entonces $z - y < 0$ para todo $y \in [0, 1]$. Luego $F_X(z - y) = 0$, así que $F_Z(z) = 0$.
- Si $0 \leq z < 1$ distinguimos dos casos:
 - Si $0 \leq y < z$ entonces $0 < z - y < 1$, así que $F_X(z - y) = z - y$.
 - Si $z \leq y < 1$ entonces $z - y < 0$, luego $F_X(z - y) = 0$.

$$F_Z(z) = \int_0^z (z - y) dy + \int_z^1 0 dy = \frac{z^2}{2}$$

- Si $1 \leq z < 2$ de nuevo distinguimos dos casos:
 - Si $0 \leq y < z - 1$ entonces $z - y \geq 1$, luego $F_X(z - y) = 1$.
 - Si $z - 1 \leq y < 1$ entonces $0 \leq z - y < 1$, así que $F_X(z - y) = z - y$.

$$F_Z(z) = \int_0^{z-1} 1 dy + \int_{z-1}^1 (z - y) dy = 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

- Si $z \geq 2$ entonces $z - y \geq 1$ para todo $y \in [0, 1]$. Luego $F_X(z - y) = 1$, de forma que $F_Z(z) = \int_0^1 1 dx = 1$.

Por tanto:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 2z - \frac{z^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea $X \sim U([-1, 1])$ y sea Y absolutamente continua con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{4} & \text{si } -2 \leq y < 0 \\ \frac{2-y}{4} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabemos que X es absolutamente continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea $Z = X + Y$. Como X e Y son absolutamente continuas, Z es absolutamente continua con función de densidad $f * g$.

$$(f_X * f_Y)(z) = (f_Y * f_X)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx$$

Sabemos que $S_X = [-1, 1]$ y $S_Y = [-2, 2]$, así que $S_Z = [-3, 3]$. Consideramos los casos:

- Si $z < -3$ entonces $z-x < 2$ para todo $x \in [-1, 1]$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
- Si $-3 \leq z < -1$ distinguimos dos casos:
 - Si $-1 \leq x < z+2$ entonces $-2 \leq z-x < 0$, así que $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$.
 - Si $z+2 \leq x < 1$ entonces $z-x < -2$, luego $f_Y(z-x) = 0$.

$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z+2} \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z+3)^2}{16}$$

- Si $-1 \leq z < 1$ distinguimos dos casos:
 - Si $-1 \leq x < z$ entonces $0 \leq z-x < 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$.
 - Si $z \leq x < 1$ entonces $-2 \leq z-x < 0$, luego $f_Y(z-x) = \frac{z-x+2}{4}$.

$$f_Z = \int_{-1}^z \frac{2-z+x}{4} \frac{1}{2} dx + \int_z^1 \frac{z-x+2}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{3-z^2}{8}$$

- Si $1 \leq z < 3$ distinguimos dos casos:
 - Si $-1 \leq x < z-2$ entonces $z-x \geq 2$, luego $f_Y(z-x) = 0$.
 - Si $z-2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z-x < 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{2-z+x}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{2-z+x}{4} \frac{1}{2} dx = \frac{(z-3)^2}{16}$$

- Si $z \geq 3$ entonces $z-x \geq 2$ para todo $x \in [-1, 1]$, así que $f_Z(z) = 0$.

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{(z+3)^2}{16} & \text{si } -3 \leq z < -1 \\ \frac{3-z^2}{8} & \text{si } -1 \leq z < 1 \\ \frac{(z-3)^2}{16} & \text{si } 1 \leq z < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejemplo. Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{y}{2} & \text{si } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que Y es absolutamente continua y X es mixta, así que $Z = X + Y$ es absolutamente continua. Queremos calcular la función de densidad de Z . Como F_X es discontinua en 1,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) dF_X(x) = \int_{-2}^1 f_Y(z-x) f_X(x) dx + f_Y(z-1) p_X(1)$$

Nota. Para no lidiar con discontinuidades, también se podría calcular:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

Calculamos las funciones de densidad, pseudodensidad y masa:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \quad p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$S_X = [-2, 1]$ y $S_Y = [0, 2]$, así que $S_Z = [-2, 3]$. Consideramos los casos:

- Si $z < -2$ entonces $z-x < 0$ para todo $x \in [-2, 1]$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.
- Si $-2 \leq z < 0$ entonces $0 \leq z-x \leq 2$, así que $f_Y(z-x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx = \frac{z+2}{8}$$

- Si $0 \leq z \leq 1$, $f_Y(z-1) = 0$. Distinguimos tres casos:
 - Si $-2 \leq x < z-2$ entonces $z-x > 2$. Luego $f_Y(z-x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

- Si $z - 2 \leq x < z$ entonces $0 \leq z - x < 2$. Así que $f_Y(z - x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.
- Si $z \leq x \leq 1$ entonces $z - x \leq 0$. Luego $f_Y(z - x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

$$f_Z(z) = \int_{-2}^{z-2} 0dx + \int_{z-2}^z \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \int_z^1 0dx + 0p_x(1) = \frac{1}{4}$$

- Si $1 < z \leq 3$, $f_Y(z - 1) = \frac{1}{2}$ y $p_X(1) = \frac{1}{4}$. Distinguimos dos casos:
 - Si $-2 \leq x < z - 2$ entonces $z - x \geq 2$, así que $f_Y(z - x) = 0$.
 - Si $z - 2 \leq x < 1$ entonces $0 \leq z - x < 2$, luego $f_Y(z - x) = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{1}{4}$.

$$f_Z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{4 - z}{8}$$

- Si $z \geq 3$ entonces $f_Y(z - x) = 0$, así que $f_Z(z) = 0$.

Por tanto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z+2}{8} & \text{si } -2 \leq z < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{4-z}{8} & \text{si } 1 < z \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

1.4. Convergencia en distribución

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea X_n una variable aleatoria en $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$. $\{X_n\}_n$ tiene una sucesión asociada $\{F_n\}_n$ de funciones de distribución.

Definición 1.9. Sean F y F_n funciones de distribución. Decimos que la sucesión $\{F_n\}_n$ converge a F débilmente cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe $F_n \xrightarrow{d} F$.

Ejemplo. Sea $X_n \sim \delta(\frac{1}{n})$, es decir, $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$. Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculamos el límite puntual de la sucesión:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aunque $\{F_n\}_n$ converge puntualmente a F , observamos que F no es continua por la derecha. Así que F no es función de distribución y no puede ser el límite débil de la sucesión. Definimos:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es función de distribución y además $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$ para todo $x \in C(G) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego $F_n \xrightarrow{d} G$. Es función de distribución de una variable aleatoria $\delta(0)$.

Ejemplo. Sea $Y_n \sim \delta(-\frac{1}{n})$. Procedemos de forma análoga al ejemplo anterior. Su función de distribución es:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } y \geq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

y su límite puntual es:

$$F_Y(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

En este caso el límite puntual F_Y sí es función de distribución, así que el límite puntual coincide con el límite débil.

$$F_{Y_n} \xrightarrow{d} F_Y$$

Teorema 1.13. *El límite débil de una sucesión de funciones de distribución es único en caso de existir.*

Ejemplo. Sea $X_n \sim U(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Su función de distribución es:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \\ \frac{nx+1}{2} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

El límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

F no es función de distribución porque no es continua por la derecha en $x = 0$. Definimos entonces:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es función de distribución y $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$ para todo $x \in C(G)$, así que $F_n \xrightarrow{d} G$.

Ejemplo. Consideramos la sucesión de funciones de distribución $\{F_n\}_n$, con

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos descomponer F_n como mixtura de distribuciones de la forma $F_n = \alpha F_n^d + (1 - \alpha)F_n^c$. Calculamos el valor de α :

$$\alpha = \sum_{x \in D(F_n)} p(x) = p(0) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, las funciones de distribución son:

$$F_n^d(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{t \leq x, t \in D(F_n)} p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^d(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_n^c(x) = \frac{1}{1 - \alpha} (F_n(x) - \alpha F_n^d(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F^c(x) = 0$$

Observamos que $F = \alpha F^d + (1 - \alpha)F^c$.

Definición 1.10. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_n$ converge en distribución a otra variable aleatoria X cuando $F_n \xrightarrow{d} F$, siendo F_n y F las funciones de distribución asociadas a X_n y X , respectivamente. Se escribe $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ejercicio. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) espacio de probabilidad, donde:

$$\Omega = [0, 3], \quad \mathcal{A} = \{B \cap [0, 3] : B \in \mathcal{B}\}$$

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad P(A) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A = \{0\} \\ 0 & \text{si } A \subset (0, 1) \\ \frac{m(A)}{6} & \text{si } A \subset [1, 3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } A = \{3\} \end{cases}$$

Sobre este espacio definimos para $n \in \mathbb{N}$ las variables aleatorias:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega-1}{n\omega+1} & \text{si } 0 \leq \omega < 1 - \frac{1}{n} \\ 2 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq \omega < 3 - \frac{1}{n} \\ n(\omega - 3) & \text{si } 3 - \frac{1}{n} \leq \omega \leq 3 \end{cases}$$

$\{X_n\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias.

1. **Determinar los puntos de discontinuidad y sus masas.** Sabemos que x es punto de discontinuidad de F_n si $F_n(x) - F_n(x^-) > 0$, es decir, $P_{X_n}(\{x\}) > 0$. En primer lugar estudiamos las imágenes por X_n de los puntos con masa en la definición de P . En este caso, estos puntos son 0 y 3, con imágenes $X_n(0) = -1$ y $X_n(3) = 0$.

$$P_{X_n}(-1) = P(X_n^{-1}(-1)) = P(\{0\} \cup \{3 - \frac{1}{n}\}) = \frac{1}{6}$$

$$P_{X_n}(0) = P(X_n^{-1}(0)) = P(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

Además, estudiamos los puntos cuya imagen inversa es un intervalo, es decir, donde X_n es constante.

$$P_{X_n}(2) = P([1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})) = P([1, 3 - \frac{1}{n})) = \frac{2n-1}{6n}$$

Así que $D = \{-1, 0, 2\}$.

2. **Calcular la función de distribución F_n asociada a X_n .** Recordamos que la función de distribución F_n asociada a una variable aleatoria X_n se define como:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Distinguimos varios casos:

- Si $x < -1$, $F_n(x) = P(\emptyset) = 0$.
- Si $-1 \leq x < -\frac{1}{n^2}$,

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P([0, \alpha] \cup [3 - \frac{1}{n}, \beta])$$

donde:

$$X_n(\alpha) = x \Leftrightarrow \frac{\alpha - 1}{n\alpha + 1} = x \Leftrightarrow \alpha = \frac{x + 1}{1 - nx}$$

$$X_n(\beta) = x \Leftrightarrow n(\beta - 3) = x \Leftrightarrow \beta = \frac{x + 3n}{n}$$

Así que

$$F_n(x) = P([0, \frac{x+1}{1-nx}] \cup [3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si $-\frac{1}{n^2} \leq x < 0$,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n})) + P([3 - \frac{1}{n}, \frac{x+3n}{n}]) = \frac{x+1+n}{6}$$

- Si $0 \leq x < 2$,

$$F_n(x) = P(\{0\}) + P([0, 1 - \frac{1}{n})) + P([3 - \frac{1}{n}, 3]) + P(\{3\}) = \frac{4n+1}{6n}$$

- Si $X \geq 2$, $F_n(x) = 1$.

Por tanto,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1+n}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{4n+1}{6n} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. **Analizar la convergencia en distribución de $\{X_n\}$** Sabemos que $X_n \xrightarrow{d} X$ cuando $F_n \xrightarrow{d} F$. Tomamos el límite puntual en $\{F_n\}$.

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F es continua por la derecha y $D(F) = \{-1, 0, 2\}$ con $p_X(-1) = \frac{1}{6}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ y $p_X(2) = \frac{1}{3}$. Observamos que estas masas coinciden con los límites cuando $n \rightarrow \infty$ de las masas de los puntos de discontinuidad de X_n . Por tanto, $F_n \xrightarrow{d} F$.

Lema 1.14. Sean F_n y F funciones de distribución. $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x) \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \geq F(x^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.15 (Helly-Bray). Sean F_n y F funciones de distribución. $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

para toda función g real, continua y acotada.

Observación. En general, el teorema de Helly-Bray no implica que $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X)$ porque $g(x) = x$ no siempre está acotada.

Ejemplo. Sean $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{n} \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su límite puntual es:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que G no es función de distribución. Definimos entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

F es función de distribución así que $F_n \xrightarrow{d} F$.

Sea $g(x) = I_{(0,2]}(x)$, veamos si $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$.

$$\begin{aligned} E(g(X_n)) &= E(I_{(0,2]}(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} I_{(0,2]}(x) dF_n(x) = \int_0^2 dF_n(x) = \\ &= F_n(2) - F_n(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \\ E(g(X)) &= \int_0^2 dF(x) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Observamos que $E(g(X_n))$ no tiende a $E(g(X))$ con $n \rightarrow \infty$. No se cumplen las hipótesis del teorema de Helly-Bray porque g no es continua.

Sea ahora $g(x) = x$. Queremos calcular $E(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} x dF_n(x)$. Como F_n es mixta, hallamos primero las masas de sus puntos de discontinuidad y su función de pseudodensidad:

$$\begin{aligned} D(F_n) &= \{0, \frac{2}{n}\}, \quad p(0) = \frac{1}{4}, \quad p(\frac{2}{n}) = \frac{1}{4} \\ f_n(x) &= F'_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{2}{n} \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \\ E(g(X_n)) &= 0 \frac{1}{4} + \frac{2}{n} \frac{1}{4} + \int_{-1}^0 \frac{x}{2n} dx + \int_{\frac{2}{n}}^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Procedemos de forma análoga para F .

$$\begin{aligned} D(F) &= \{0\}, \quad p(0) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \\ E(g(X)) &= 0 \frac{1}{2} + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego en este caso $E(g(X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(g(X))$. Se verifica el teorema de Helly-Bray porque $g(x) = x$ está acotada en los soportes de f_n y f , que son acotados.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{R}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Es claro que:

$$F_n \xrightarrow{d} \delta(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea $g(x) = x$, procedemos igual que en el ejemplo anterior.

$$D(F_n) = \{0, n\}, \quad p(0) = \frac{n-1}{n}, \quad p(n) = \frac{1}{n}$$

$$E(g(X_n)) = 0 \frac{n-1}{n} + n \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$E(g(X)) = E(\delta(0)) = 0 \neq 1$$

No se cumplen las hipótesis del teorema porque g no está acotada en el soporte, ya que no está acotado.

Definición 1.11. Una función F es función de distribución impropia si verifica:

- F es creciente.
- F es continua por la derecha.
- Existe $\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x+h) = F(x^-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $F(-\infty) > 0$ o $F(\infty) < 1$.

Definición 1.12. Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución y sea F una función de distribución impropia. Decimos que $\{F_n\}$ converge de forma vaga o vagamente a F si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

Se escribe $F_n \xrightarrow{v} F$.

Ejemplo. Sea $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{n} & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

El límite puntual de $\{F_n\}$ es:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

G es una función de distribución impropia. Por tanto, $F_n \xrightarrow{v} G$.