Optimización

Matemáticas en LaTeX

3 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Optimización lineal

1.1. Planteamiento de un problema de programación lineal

En su forma estándar, un problema de este tipo se escribe:

$$\text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

La función a minimizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ se llama función objetivo y el sistema de condiciones se llama conjunto de restricciones. Este último se puede representar matricialmente con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad rang(A) = m \leq n$$

Observación.

1. Max $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = -$Min $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.
2. Las restricciones pueden ser desigualdades. En este caso, se introducen variables de holgura.
3. Las variables de holgura del problema pueden ser negativas. En este caso, se expresan como diferencia de variables no negativas.

$$x_j \in \mathbb{R},\ x_j^*, x_j^{**} \geq 0 \rightarrow x_j = x_j^* - x_j^{**}$$

1.2. Método geométrico de resolución

Los problemas de optimización lineal se pueden resolver representando el área en el que pueden estar las variables y evaluar sus vértices. Los valores máximo y mínimo siempre se alcanzan en los vértices.

1.3. Soluciones de un problema de programación lineal

Definición 1.1 (Solución posible)**.** Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución posible del problema si $Ax = b$, $x \geq 0$. El conjunto de soluciones posibles es $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

Como $rang(A) = m$, hay m columnas de A linealmente independientes. Podemos escribir $A = (a_1, \dots, a_n)$, con $a_1, \dots, a_n$ columnas de A. Entonces, podemos considerar $B = (a_1, \dots, a_m)$ submatriz de A con rango no nulo.

$$Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b \in \mathbb{R}^n$$

Llamaremos solución básica a $x = (x_B, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.2 (Solución básica)**.** Una solución básica es un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$, $x \geq 0$ y las componentes no nulas de x llevan asociadas columnas de A que constituyen un sistema linealmente independiente.

Observación. En general, las soluciones básicas no son soluciones posibles.

Definición 1.3 (Solución posible básica)**.** Una solución posible básica es un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que sea solución básica tal que $x \geq 0$.

Definición 1.4. Sea $x = (X_B, 0) =\in \mathbb{R}^n$ una solución posible básica.

- x es no degenerada si $x_B > 0$.
- x es degenerada si alguna componente de x_B es nula.

Definición 1.5 (Solución óptima)**.** Un vector $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es solución óptima si x^0 es solución posible y $c'x^0 \leq c'x$ para toda solución posible x.

Definición 1.6 (Solución óptima básica)**.** Un vector $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es solución óptima básica si x^0 es solución básica y solución óptima.

1.4. Teorema fundamental de la programación lineal

Teorema 1.1 (Teorema fundamental de la programación lineal)**.** *Dado el problema:*

$$Min\ c'x$$
$$\begin{cases} Ax = b, \quad rang(A) = m < n \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces:

1. *Si el problema tiene solución posible, entonces tiene solución posible básica.*
2. *Si el problema tiene solución óptima, entonces tiene solución óptima básica.*

Demostración.

1. Sea $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ solución posible. Veamos que el problema tiene solución posible básica.

   Sean $\{a_1, \dots, a_n\}$ las columnas de A, entonces:

   $$\begin{cases} Ax^0 = b \Leftrightarrow a_1x_1^0 + \cdots + a_nx_n^0 = b \\ x^0 \geq 0 \Leftrightarrow x_i^0 \geq 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \end{cases}$$

   Supongamos que $x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, con $p \leq n$. Entonces:

   $$a_1x_1^0 + \cdots + a_px_p^0 = b, \quad x_i^0 > 0,\ \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

   Tenemos dos posibles casos:

   a) Supongamos que $\{a_1, \dots, a_p\}$ es un sistema linealmente independiente. Entonces $p \leq m$, luego x^0 es solución posible básica. Además,

   - Si $p = m$, x^0 es no degenerada.

- Si $p < m$, x^0 es degenerada.

b) Supongamos que $\{a_1, \dots, a_p\}$ es un sistema linealmente dependiente. Entonces existen $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$, alguno de ellos positivo, tales que:

$$a_1 y_1 + \cdots + a_p y_p = 0$$

Sea $y = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$, consideramos:

$$x^0 - \varepsilon y = (x_1^0 - \varepsilon y_1, \dots, x_p^0 - \varepsilon y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Veamos si $x^0 - \varepsilon y$ es solución posible del problema.

$$\begin{aligned} A(x^0 - \varepsilon y) &= a_1(x_1^0 - \varepsilon y_1) + \cdots + a_p(x_p^0 - \varepsilon y_p) = \\ &= a_1 x_1^0 + \cdots + a_p x_p^0 - \varepsilon(a_1 y_1 + \cdots + a_p y_p) = b - \varepsilon 0 = b \\ x^0 - \varepsilon y \geq 0 &\Leftrightarrow x_i^0 - \varepsilon y_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \end{aligned}$$

- Si $y_i \leq 0$, entonces $x_i^0 - \varepsilon y_i \geq x_i^0 > 0$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.
- Si $y_i > 0$, entonces $x_i^0 - \varepsilon y_i \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{x_i^0}{y_i}$.

Si tomamos ε tal que $0 < \varepsilon \leq \min_{y_i > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\}$, entonces $x^0 - \varepsilon y$ es solución posible. En particular, podemos tomar $\varepsilon = \min_{y_i > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\}$, de forma que $x^0 - \varepsilon y$ es solución posible con $p - 1$ componentes positivas como máximo.

Ahora procedemos de forma análoga al razonamiento para x^0. Esto es:

1) Si las columnas de A correspondientes a las $p - 1$ componentes positivas como máximo de $x^0 - \varepsilon y$ constituyen un sistema linealmente independiente, entonces $x^0 - \varepsilon y$ es una solución posible básica.
2) Si las columnas de A consideradas constituyen un sistema linealmente dependiente, construimos de forma análoga una nueva solución posible con $p - 2$ componentes positivas como máximo.

Razonando reiteradamente de esta forma, eventualmente se consigue hallar una solución posible básica.

2. Sea $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ solución óptima. Veamos que el problema tiene solución óptima básica.

Como x^0 es solución óptima, verifica que $Ax^0 = b$, $x^0 \geq 0$ y $x^0 \leq c'x$, para todo $x \in K$. Supongamos que $x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, con $p \leq n$. Tenemos dos posibles casos:

a) Supongamos que $\{a_1, \dots, a_p\}$ es un sistema linealmente independiente. Entonces $p \leq m$, luego x^0 es solución óptima básica.

b) Supongamos que $\{a_1, \dots, a_p\}$ es un sistema linealmente dependiente. Entonces existen $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$, alguno de ellos positivo, tales que:

$$a_1 y_1 + \cdots + a_p y_p = 0$$

Sea $y = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$, consideramos:

$$x^0 - \varepsilon y = (x_1^0 - \varepsilon y_1, \dots, x_p^0 - \varepsilon y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Sabemos que $x^0 - \varepsilon y$ es solución posible del problema si tomamos $0 < \varepsilon \leq \min_{y_i > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\}$. Si en particular, tomamos $\varepsilon = \min_{y_i > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\}$, entonces $x^0 - \varepsilon y$ es solución posible del problema con $p - 1$ componentes positivas como máximo.

Veamos que $x^0 - \varepsilon y$ es solución óptima.

$$c'x^0 = c'(x^0 - \varepsilon y) \Leftrightarrow \varepsilon c'y = 0 \Leftrightarrow c'y = 0$$

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos pues que $c'y \neq 0$, de forma que $c'y > 0$ o $c'y < 0$. Veamos que existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $x^0 - \delta y$ es solución posible y $c'(x^0 - \delta y) < c'x^0$.

$$c'(x^0 - \delta y) < c'x^0 \Leftrightarrow -\delta c'y < 0 \Leftrightarrow \delta c'y > 0$$

- Si $c'y > 0$, elegimos $\delta > 0$.
- Si $c'y < 0$, elegimos $\delta < 0$.

Para que sea solución posible,

$$A(x^0 - \delta y) = Ax^0 - \delta Ay = Ax^0 = b$$

$$x^0 - \delta y \geq 0 \Leftrightarrow x_i^0 - \delta y_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, p\} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \delta \leq \text{mín}_{y_i > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\} & \text{si } \delta > 0 \\ \text{máx}_{y_i < 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\} \leq \delta < 0 & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

Esto es una contradicción. Luego $x^0 - \varepsilon y$ es solución óptima. Repetimos el razonamiento con $x^0 - \varepsilon y$.

□

1.5. Equivalencia de puntos extremos y solución posible básica

Teorema 1.2. *El conjunto K es convexo.*

Definición 1.7 (Punto extremo)**.** Sea $C \neq \emptyset$ un conjunto convexo y sea $x \in C$. x es un punto extremo de C si y solo si no lo podemos expresar como combinación lineal convexa de dos puntos distintos de C, es decir,

$$x = \alpha y + (1 - \alpha) z, \quad y, z \in C, \ \alpha \in (0, 1) \Rightarrow y = z = x$$

Teorema 1.3. *x^0 es un punto extremo de K $\Leftrightarrow$ x^0 es una solución posible básica.*

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que x^0 es un punto extremo de K de la forma:

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_p^0, 0, \dots, 0), \quad p \leq n$$

Sean $a_1, \dots, a_n$ las columnas de A,

$$\begin{cases} Ax = b \leftrightarrow a_1 x_1^0 + \dots a_p x_p^0 = b \\ x^0 \geq 0 \Leftrightarrow x_i^0 \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$$

Veamos que x^0 es solución posible básica, esto es, que $\{a_1, \dots, a_p\}$ es un sistema linealmente independiente.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\{a_1, \dots, a_p\}$ es un sistema linealmente dependiente. Entonces existen $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$, con algunos de ellos positivo, tales que:

$$a_1 y_1 + \dots + a_p y_p = 0$$

Sea $y = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$ y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que $x^0 - \varepsilon y, x^0 + \varepsilon y \in K$. Sabemos que esto se verifica si y solo si:

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon \leq \text{mín}_{y_i > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{y_i} \right\} & \text{para } x^0 - \varepsilon y \\ 0 < \varepsilon \leq \text{mín}_{y_i < 0} \left\{ \frac{x_i^0}{-y_i} \right\} & \text{para } x^0 + \varepsilon y \end{cases}$$

Luego podemos tomar $0 < \varepsilon \leq \text{mín}_{y_i>0}\left\{\frac{x_i^0}{|y_i|}\right\}$, de forma que $x^0-\varepsilon y, x^0+\varepsilon y \in K$, con $x^0-\varepsilon y \neq x^0+\varepsilon y$. De esta forma, podemos escribir:

$$x^0 = \frac{1}{2}(x^0 - \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x^0 + \varepsilon y)$$

Esto contradice la hipótesis de que x^0 es punto extremo de K.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que x^0 es solución posible básica. Veamos que x^0 es punto extremo de K.

Supongamos que la base $\{a_1, \dots, a_m\}$ es un sistema linealmente independiente. Entonces:

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} Ax^0 = b \Leftrightarrow a_1x_1^0 + \cdots + a_mx_m^0 = b \\ x_i^0 \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Expresamos x^0 de la forma:

$$x^0 = \alpha y + (1-\alpha)z, \quad \alpha \in (0,1),\ y, z \in K$$

Veamos que $y = z$.

Se verifica que:

$$\begin{array}{lll} y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, & y_i \geq 0,\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, & Ay = b \\ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, & z_i \geq 0,\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, & Az = b \end{array}$$

Luego:

$$(x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0) = \alpha(y_1, \dots, y_n) + (1-\alpha)(z_1, \dots, z_n)$$

Observamos que, si $i > m$, entonces:

$$0 = \alpha y_i + (1-\alpha)z_i \Leftrightarrow y_i = z_i = 0$$

Así pues, $y = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$ y $z = (z_1, \dots, z_m, 0, \dots, 0)$. Como además $\{a_1, \dots, a_m\}$ es un sistema linealmente independiente,

$$\begin{cases} a_1y_1 + \cdots + a_my_m = b \\ a_1z_1 + \cdots + a_my_m = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ \vdots \\ y_m = z_m \end{cases} \Leftrightarrow y = z$$

Por tanto, $x^0 = y = z$. Luego x^0 es punto extremo de K. $\square$

Corolario 1.4. *Si $K \neq \emptyset$, entonces K tiene algún punto extremo.*

Corolario 1.5. *Si el problema tiene solución óptima entonces tiene alguna solución óptima que es punto extremo de K.*

Corolario 1.6. *K tiene como máximo $\binom{n}{m}$ puntos extremos.*

Capítulo 2

El método símplex

2.1. Pivotes

Consideramos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sabemos que $(b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica y $\{a_1, \dots, a_m\}$ es un sistema linealmente independiente.

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} a_j &= a_{1j}a_1 + \dots + a_{mj}a_m \\ b &= b_1a_1 + \dots b_ma_m \end{aligned}$$

Reemplazamos a_p por a_q en la base, con $1 \leq p \leq m$, $m+1 \leq q \leq n$. Veamos cuándo

$$\{a_1,\ \dots,\ a_{p-1},\ a_q,\ a_{p+1},\ \dots,\ a_m\}$$

es un sistema linealmente independiente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_{1q} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2q} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{pq} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mq} & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{pq}$$

Luego la base es linealmente independiente si y solo si $a_{pq} \neq 0$.

Supongamos entonces que $a_{pq} \neq 0$. Entonces:

$$a_q = a_{1q}a_1 + \dots + a_{pq}a_p + \dots + a_{mq}a_m = \sum_{i=1, i\neq p}^{m} a_{iq}a_i + a_{pq}a_p \Leftrightarrow a_p = \frac{a_q}{a_{pq}} - \sum_{i=1, i\neq p}^{m} \frac{a_{iq}}{a_{pq}} a_i$$

Sea $j \in \{1, \dots, m\}$ con $j \neq p$. Entonces:

$$\begin{aligned}a_j &= \sum_{i=1, i\neq p}^{m} a_{ij} a_i + a_{pj} a_p = \sum_{i=1, i\neq p}^{m} a_{ij} a_i + a_{pj} \left(\frac{a_q}{a_{pq}} - \sum_{i=1, i\neq p}^{m} \frac{a_{iq}}{a_{pq}} a_i \right) = \\ &= \frac{a_{pj}}{a_{pq}} a_q + \sum_{i=1, i\neq p}^{m} \left(a_{ij} - \frac{a_{pj} a_{iq}}{a_{pq}} \right) a_i\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}b_j &= \sum_{i=1}^{m} b_i a_i = \sum_{i=1, i\neq p}^{m} b_i a_i + b_p a_p = \sum_{i=1, i\neq p}^{m} b_i a_i + b_p \left(\frac{a_q}{a_{pq}} - \sum_{i=1, i\neq p}^{m} \frac{a_{iq}}{a_{pq}} a_i \right) = \\ &= \frac{b_p}{a_{pq}} a_q + \sum_{i=1, i\neq p}^{m} \left(b_i - \frac{b_p a_{iq}}{a_{pq}} \right) a_i\end{aligned}$$

Entonces

$$\left(b_1 - \frac{b_p a_{1q}}{a_{pq}}, \dots, b_{p-1} - \frac{b_p a_{(p-1)q}}{a_{pq}}, 0, b_{p+1} - \frac{b_p a_{(p+1)q}}{a_{pq}}, \dots, b_m - \frac{b_p a_{1q}}{a_{mq}}, 0, \dots, 0, \frac{b_p}{a_{pq}}, 0, \dots, 0 \right)$$

es solución básica.

2.2. Teoremas y algoritmo del símplex

Definición 2.1 (Costos indirectos)**.** Sea x^0 una solución posible básica y supongamos que su base asociada es $\{a_1, \dots, a_m\}$. Sea $j \in \{1, \dots, n\}$ y sean c_i los costos del problema,

$$\begin{aligned}a_j &= a_{1j} a_1 + \cdots + a_{mj} a_m \in \mathbb{R}^n \\ z_j &= a_{1j} c_1 + \cdots + a_{mj} c_m \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Llamamos costo indirecto j-ésimo a $z_j - c_j$. El vector $(z_1 - c_1, \dots, z_n - c_n) \in \mathbb{R}^n$ se llama vector de costos indirectos.

Observación. Los costos indirectos correspondientes a los vectores de la base son nulos.

Teorema 2.1. *Sea x^0 una solución posible básica no degenerada con valor en la función objetivo z^0. Si existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z_j - c_j > 0$, entonces existe un subconjunto de K de forma que el valor de la función objetivo en cualquier punto sea menor que z_0.*

Demostración. Sea x^0 solución posible básica no degenerada, supongamos que la base asociada a x^0 es $\{a_1, \dots, a_m\}$, de forma que $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}Ax^0 = b &\Leftrightarrow a_1 x_1^0 + \cdots + a_m x_m^0 = b \\ x_i^0 &> 0;\ \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ z^0 &= c_1 x_1^0 + \cdots + c_m x_m^0\end{aligned}$$

Supongamos que existe $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $z_j - c_j > 0$.

$$\begin{aligned}a_j &= a_{1j} a_1 + \cdots + a_{mj} a_m \\ z_j &= a_{1j} c_1 + \cdots + a_{mj} c_m\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, definimos:

$$x_\varepsilon^0 = (x_1^0 - \varepsilon a_{1j}, \dots, x_m^0 - \varepsilon a_{mj}, 0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0)$$

Veamos que x_ε^0 es solución posible.

1. Veamos que $Ax^0_\epsilon = b$.

$$\begin{aligned}Ax^0_\varepsilon &= a_1(x^0_1 - \varepsilon a_{1j}) + \cdots + a_m(x^0_m - \varepsilon a_{mj}) + \varepsilon a_j = \\ &= a_1x^0_1 + \cdots + a_m x^0_0 - \varepsilon(a_1 a_{1j} + \cdots + a_m a_{mj}) + \varepsilon a_j = b - \varepsilon a_j + \varepsilon a_j = b\end{aligned}$$

2. Veamos que $x^0_\varepsilon \geq 0$.

$$x^0_\varepsilon \geq 0 \Leftrightarrow x^0_i - \varepsilon a_{ij} \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

- Si $a_{ij} \leq 0$, $x^0_i - \varepsilon a_{ij} \geq 0$.
- Si $a_{ij} > 0$, $x^0_i - \varepsilon a_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow x^0_i \geq \varepsilon a_{ij} \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{x^0_i}{a_{ij}}$.

El valor de la función objetivo en x^0_ε es:

$$\begin{aligned}&c_1(x^0_1 - \varepsilon a_{1j}) + \cdots + c_m(x^0_m - \varepsilon a_{mj}) + \varepsilon c_j = c_1x^0_1 + \cdots + c_m x^0_m - \varepsilon(c_1 a_{1j} + \cdots + c_m a_{mj}) + \varepsilon c_j = \\ &= z_0 - \varepsilon z_j + \varepsilon c_j = z_0 - \varepsilon(z_j - c_j) < z_0\end{aligned}$$

Tenemos dos posibles casos:

1. Supongamos que existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a_{ij} > 0$. Entonces $\varepsilon \leq \frac{x^0_i}{a_{ij}}$ para que $x^0_i - \varepsilon a_{ij} \geq 0$. Podemos tomar:

$$0 < \varepsilon \leq \min_{a_{ij}>0} \left\{ \frac{x^0_i}{a_{ij}} \right\}$$

   De esta forma x^0_ε es solución posible, siendo el valor de la función objetivo en x^0_ε menor que z_0.

2. Supongamos que $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

$$x^0_i - \varepsilon a_{ij} \geq x^0_i > 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

   Para cualquier $\varepsilon > 0$, x^0_ε es solución posible con valor de la función objetivo menor que z_0.

   x^0_ε tiene $m+1$ componentes positivas. El valor de la función objetivo en x^0_ε es $z_0 - \varepsilon(z_j - c_j) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{} -\infty$. Luego es un problema ilimitado.

□

Teorema 2.2. *Sea x^0 una solución posible básica no degenerada. Si $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, entonces x^0 es solución óptima.*

Demostración. Supongamos que $\{a_1, \ldots, a_m\}$ es el sistema linealmente independiente asociado a $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}Ax^0 = b &\Leftrightarrow a_1x^0_1 + \cdots + a_m x^0_m = b \\ x^0_i &> 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ z_0 &= c_1x^0_1 + \cdots + c_m x^0_m\end{aligned}$$

Supongamos que $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}a_j &= a_{1j}a_1 + \cdots + a_{mj}a_m \\ z_j &= a_{1j}c_1 + \cdots + a_{mj}c_m\end{aligned}$$

Tenemos que probar que x^0 es solución óptima, esto es, que se verifica:

$$c_1y_1 + \cdots + c_ny_n \geq z_0$$

para todo $y = (y_1, \ldots, y_n)$ solución posible.

Sabemos que:

$$z_j \leq c_j \ \forall j \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow z_j y_j \leq c_j y_j \ \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 y_1 + \cdots + z_n y_n \leq c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

Luego basta con ver que $z_1 y_1 + \cdots + z_n y_n = z_0$.

Tenemos que:+

$$b = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} a_i \right) y_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} a_i \right) y_n =$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} a y_j \right) a_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} a y_j \right) a_m$$

Como por hipótesis $b = a_1 x_1^0 + \cdots + a_m x_m^0$, con $\{a_1, \dots, a_m\}$ sistema linealmente independiente, entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = x_i^0$.

Por otro lado,

$$z_1 y_1 + \cdots + z_n y_n = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} c_i \right) y_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} c_i \right) y_n = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j \right) c_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \right) c_m$$

Por la igualdad anterior tenemos que:

$$z_1 y_1 + \cdots + z_n y_n = x_1^0 c_1 + \cdots + x_m^0 c_m = z_0$$

□

Algoritmo del símplex

Formamos la tabla correspondiente a una solución posible básica no degenerada de la forma $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$.

1.
   - Si $z_j - c_j \leq 0 \ \forall j = 1, \dots, n$, entonces x^0 es solución óptima y termina el algoritmo.
   - Si existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z_j - c_j > 0$, tomamos:

     $$z_q - c_q = \max_{z_j - c_j > 0} \{z_j - c_j\}$$

2.
   - Si $a_{iq} \leq 0 \ \forall i = 1, \dots, m$, entonces se trata de un problema ilimitado y termina el algoritmo.
   - Si existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a_{iq} > 0$, tomamos:

     $$\frac{x_p^0}{a_{pq}} = \min \left\{ \frac{x_i^0}{a_{iq}} : a_{iq} > 0 \right\}$$

3. Pivotamos sobre a_{pq} y pasamos a una tabla correspondiente a una solución posible básica, así que volvemos a empezar. Comprobaremos más adelante que esta solución posible básica es no degenerada.

Casos especiales del símplex

Sea x^0 solución óptima básica, con $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$, $z_0 = c_1 x_1^0 + \cdots + c_m x_m^0$ y $\{a_1, \dots, a_m\}$ sistema linealmente independiente. Entonces $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Supongamos que existe $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $z_j - c - j = 0$. Sabemos que $a_j = a_{1j} a_1 + \cdots + a_{mj} a_m$.

Sea $\varepsilon > 0$, $x_\varepsilon^0 = (x_1^0 - \varepsilon a_{1j}, \dots, x_m^0 - \varepsilon a_{mj}, 0, \dots, 0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0)$, con $Ax_\varepsilon^0 = b$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

- Si $a_{ij} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, entonces x_ε^0 es solución posible para todo $\varepsilon > 0$. Además, el valor de la función objetivo en x_ε^0 es $z_0 - \varepsilon(z_j - c_j) = z_0$. Por tanto, x_ε^0 es solución óptima para todo $\varepsilon > 0$.
- Si existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a_{ij} > 0$ y tomamos $\varepsilon = \text{mín}_{a_{ij} > 0} \left\{ \frac{x_i^0}{a_{ij}} \right\}$, entonces x_ε^0 es solución posible básica. Además, el valor de la función objetivo en x_ε^0 es $z_0 - \varepsilon(z_j - c_j) = z_0$ Por tanto, x_ε^0 es solución óptima básica.

Interpretación geométrica de los costos indirectos

Sea x^0 una solución posible básica, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$, con $\{a_1, \dots, a_m\}$ sistema linealmente independiente. Supongamos que existe $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $z_j - c_j > 0$. Sabemos que $a_j = a_{1j} a_1 + \cdots + a_{mj} a_m$.

Sea $\varepsilon > 0$,

$$x_\varepsilon^0 = (x_1^0 - \varepsilon a_{1j}, \dots, x_m^0 - \varepsilon a_{mj}, 0, \dots, 0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0)$$

Consideramos

$$\vec{d} = (-a_{ij}, -a_{2j}, \dots, -a_{mj}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Tenemos que:

$$z_j = a_{1j} c_1 + \cdots + a_{mj} c_m \Rightarrow z_j - c_j = a_{1j} c_1 + \cdots + a_{mj} c_m - c_j = -\vec{c}' \vec{d}$$

donde $\vec{c}' = (c_1, \dots, c_n)$.

Luego $z_j - c_j > 0 \Leftrightarrow \vec{c}' \vec{d} < 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{c}', \vec{d}}) < 0$.

2.3. Variables artificales

Para conseguir tener la identidad en la matriz A, a veces necesitamos transformar el problema añadiendo variables artificales.

Partimos de un problema P de la forma:

$$\text{Min } c'x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

y queremos llegar a un nuevo problema:

$$\text{Min } c'x$$
$$\begin{cases} Ax = b & \\ x \geq 0 & x \in \mathbb{R}^n \\ x_a \geq 0 & x_a \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Primera fase

Consideramos el problema P_{F_1}:

$$\text{Min } \vec{1}' x_a$$
$$\begin{cases} Ax = b & \\ x \geq 0 & x \in \mathbb{R}^n \\ x_a \geq 0 & x_a \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Observamos que:

- P_{F_1} no es imposible, porque $(0, b) \in \mathbb{R}^n$ es solución posible.
- P_{F_1} no es ilimitado, puesto que el mínimo de la función objetivo es 0.

Luego P_{F_1} tiene solución óptima, así que también tiene solución óptima básica.

Hay dos posibles casos:

1. Supongamos que $x_a^* \neq 0 \in \mathbb{R}^m$. Entonces P es imposible.
2. Supongamos que $x_a^* = 0$. Entonces x^* es solución posible de P. Hay dos posibilidades:
   - Supongamos que todas las variables artificales han salido de la base. Entonces x^* es solución posible básica.
   - Supongamos que alguna variable artifical permanece en la base. Esto es, P_{F_1} es degenerado. Podemos conseguir una base que representa a x^* y no tenga ninguna componente en la base correspondiente a x_a^*. Esto fuerza a que salgan de la base las componentes correspondientes a x_a^*. Luego x^* es solución posible básica de P.

   Pasamos a la segunda fase.

Segunda fase

En la primera fase conseguido tener la identidad en la matriz A, así que partimos de la última tabla para resolver el problema original mediante el algoritmo del símplex.

Técnica adicional a la base artifical

Partimos de un problema de la forma:

$$\text{Min } c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n \geq b_s \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Pasamos el problema a forma estándar:

$$
\text{Min } c_1x_1 + \cdots + c_nx_n
$$
$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \equiv E_1 \\
\vdots \\
a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n - x_{n+s} = b_s \equiv E_s \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \equiv E_m \\
x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0
\end{cases}
$$

Para evitar añadir variables artificales, hacemos el cambio de ecuaciones:

$$
\{E_1, \ldots, Em\} \to \{E_1', \ldots, E_m'\}
$$

Tomamos $b_s = \text{máx}\{b_i\}_{i=1}^m$. Entonces, definimos las nuevas ecuaciones como:

$$
\begin{cases}
E_s' = E_s \\
E_i' = E_s - E_i \quad i = 1, \ldots, m,\ i \neq s
\end{cases}
$$

De esta forma, llegamos a un problema equivalente con restricciones:

$$
\begin{cases}
(a_{s1} - a_{11})x_1 + \cdots + (a_{sn} - a_{1n})x_n - x_{n+s} + x_{n+1} = b_s - b_1 \\
\vdots \\
a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n - x_{n+s} = b_s \\
\vdots \\
(a_{s1} - a_{m1})x_1 + \cdots + (a_{sn} - a_{mn})x_n - x_{n+s} + x_{n+m} = b_s - b_m \\
x_1, \ldots, x_{n+m} \geq 0
\end{cases}
$$

Observamos que hemos conseguido tener la identidad en la matriz A sin necesidad de añadir variables artificiales.