Teoría de la Medida e Integración

Basado en las clases y apuntes de Francisco Javier Martín Reyes

Autor:

Jorge Rodríguez Domínguez

Índice general

Capítulo 1

Medidas

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tal que $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la sucesón $\{f_n\}$ converge puntualmente si para todo x $\in$ [a,b] existe el límite de la sucesión $\{f_n(x)\}$. En tal caso, la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ se llama límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$.

Ejemplo 1.1.2. Demos un ejemplo de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ integrables-Riemann en [a,b] y cuyo límite puntual no sea integrable-Riemann en [a,b].

Sabemos que los números racionales son numerables, luego exite una sucesión de números naturales tal que $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $f_n : [0,1] \cap \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, ..., r_n\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{r_1, ..., r_n\} \end{cases}$$

que es integrable-Riemann en [0,1] para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

que es la función de Dirichlet, la cual no es integrable-Riemann.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Arzelá)**.** *Supongamos*

1. $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones que converge puntualmente a* f *en* $[a,b]$.
2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, f_n *es integrable-Riemann en* $[a,b]$.
3. f *es integrable-Riemann en* $[a,b]$.
4. *Existe* M *tal que* $|f_n(x)| \leq M$ *para todo* $x \in [a,b]$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

1.2. Idea vaga de la medida y de la integral de Lebesgue

Teorema 1.2.1. *No existe ninguna aplicación* $m_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ *tal que:*

(i) $m_n([0,1) \times ... \times [0,1)) = m_n([0,1)^n) = 1$.

(ii) $m_n \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m_n(A_i)$.

(iii) $m_n(A) = m_n(A + a)$, *donde* $A + a = \{x + a : x \in A\}$.

Demostración. En primer lugar, señalamos que si m cumple esas tres propiedades entonces también verifica

(iv) $A \subset B \Longrightarrow m(A) \leq m(B)$.

En efecto, si aplicamos (i) con $E_1 = A, E_2 = B \backslash A, E_i = \emptyset$ para $i \geq 2$, obtenemos

$$m(B) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \geq m(E_1) = m(A)$$

Una vez hecha esta observación, comenzamos la demostración propiamente dicha. Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe m con las propiedades (i), (ii) y (iii). Definimos en [0,1) la relación binaria $\sim$: $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Esta relación binaria es una relación de equivalencia. Veamoslo:

(a) Reflexiva.Sea $x \in [0,1)$, $x \sim x$ si $x - x \in \mathbb{Q}$ pero $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, luego $x \sim x$.

(b) Simétrica. Supongamos que $x \sim y$. Veamos que $y \sim x$. Como $x \sim y$, entonces $x - y \in \mathbb{Q}$ por tanto $-(x - y) \in \mathbb{Q}$, esto es, $y - x \in \mathbb{Q}$ lo que nos dice que $y \sim x$.

(c) Transitiva. Supongamos que $x \sim y$ e $y \sim z$. Veamos que $x \sim z$.

   (*) Como $x \sim y$ entonces $x - y \in \mathbb{Q}$.

   (**) Como $y \sim z$ entonces $y - z \in \mathbb{Q}$.

Sumando (*) y (**) nos dice que $x - y + y - z \in \mathbb{Q}$, es decir, $x - z \in \mathbb{Q}$, luego $x \sim z$. Entonces $\sim$ es un relación de equivalencia.

Sea E un conjunto que tenga un elemento y solamente uno de cada clase de equivalencia de $\sim$ (este conjunto se denomina conjunto de Vitali). Sea $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$, es decir, $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$ entonces para todo $r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r = r_n$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ definimos $E_k = E + r_k = \{x + r_k : x \in E\}$. Onsérvese que se cumplen las dos propiedades siguientes

(I) Si $j \neq k$ entonces $E_j \cap E_k = \emptyset$.

(II) $[0,1) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset [-1,2)$.

Con lo que tenemos lo siguiente

$$m([0,1)) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \leq m([-1,2))$$

Aplicando las propiedades (ii) y (iii), obtenemos

$$1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \leq 3$$

De nuevo, por (iii), $m(E_j) = m(E) = \lambda \in [0, \infty]$ para todo j. Luego

$$1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda \leq 3$$

Esto es un contradicción pues ningún $\lambda \in [0, \infty]$ cumple dicha desigualdad. $\square$

1.3. Álgebras y σ-álgberas

Definición 1.3.1. Un álgebra $\mathcal{A}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$) tal que

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $E \in \mathcal{A}$ entonces $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Algunas propiedades inmediatas para un álgebra $\mathcal{A}$:

(iv) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(v) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

(vi) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

(vii) Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Definición 1.3.2. Una σ-álgebra $\mathcal{M}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X ($\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$) tal que

(i) $X \in \mathcal{M}$.

(ii) Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E^c = X \backslash E \in \mathcal{M}$.

(iii) Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es tal que $E_i \in \mathcal{M}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$.

Algunas propiedades inmediatas para un σ-álgebra $\mathcal{M}$:

(iv) $\mathcal{M}$ es un álgebra.

(v) Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es tal que $E_i \in \mathcal{M}$ entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$.

Definición 1.3.3. Si $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X, la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$, denotada por $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{E}$ (siempre hay una por lo menos ya que $\mathcal{P}(X)$ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}$).

Por consiguiente, si $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es un σ-álgebra entonces $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}$, dicho de otro modo, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E}$.

Definición 1.3.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_X$ es la σ-álgebra generada por los abiertos de la topología.

1.4. La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^n$

Proposición 1.4.1. *La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$ está generada por cada una de las siguientes familias de intervalos siguientes:*

(a) $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : \infty \leq a < b \leq +\infty\}$.

(b) $\mathcal{E}_2 = \{(a,b) : a.b \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\mathcal{E}_3 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\mathcal{E}_4 = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$.

(e) $\mathcal{E}_5 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$.

(f) $\mathcal{E}_6 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

(g) $\mathcal{E}_7 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

(h) $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\}$.

(i) $\mathcal{E}_9 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 1.4.2. *La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ sobre $\mathbb{R}^n$ está generada por cada una de las familias siguientes de intervalos:*

(a) $\mathcal{E}_2 = \{(a_1,b_1) \times ... \times (a_n,b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\mathcal{E}_3 = \{[a_1,b_1) \times ... \times [a_n,b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\mathcal{E}_4 = \{(a_1,b_1] \times ... \times (a_n,b_n] : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\mathcal{E}_5 = \{[a_1,b_1] \times ... \times [a_n,b_n] : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$.

(e) $\mathcal{E}_6 = \{S_i(a) : a \in \mathbb{R}, i = 1,...,n\}$, *donde :*

$$S_i(a) = \{x = (x_1,...,x_n) : x_i > a\}.$$

(f) $\mathcal{E}_7 = \{S_i(a) : a \in \mathbb{R}, i = 1,...,n\}$, *donde :*

$$S_i(a) = \{x = (x_1,...,x_n) : x_i \leq a\}.$$

(g) $\mathcal{E}_8 = \{S_i(a) : a \in \mathbb{R}, i = 1,...,n\}$, *donde :*

$$S_i(a) = \{x = (x_1,...,x_n) : x_i < a\}.$$

(h) $\mathcal{E}_9 = \{S_i(a) : a \in \mathbb{R}, i = 1,...,n\}$, *donde :*

$$S_i(a) = \{x = (x_1,...,x_n) : x_i \geq a\}.$$

1.5. Medidas

1.5.1. Medidas finitamente aditivas

Definición 1.5.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra sobre X. Una medida finitamente aditiva sobre $(X,\mathcal{A})$ (o, simplemente, sobre $\mathcal{A}$) es una aplicación $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ tal que

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Proposición 1.5.2. *Sea μ una medida finitamente aditiva. Entonces μ tiene las propiedades siguientes:*

(a) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu(E_i)$ *para cualquier* $\{E_i\}_{i=1}^N$ *finita y disjunta de subconjuntos de* $\mathcal{A}$.

(b) $A, B \in \mathcal{A}$ *tales que* $A \subset B$ *entonces* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) $A, B \in \mathcal{A}$ *tales que* $A \subset B$ *y* $\mu(A) < +\infty$ *entonces* $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(d) $A, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Demostración. (a) Se demuestra por inducción.

(b) Es claro que $B = A \cup (B \backslash A)$ y que A y $B \backslash A$ son disjuntos. Por ser μ finitamente aditiva, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$ y puesto que $\mu(B \backslash A) \geq 0$ tenemos

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$$

(c) Como antes, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$, y, ya que $\mu(A) < +\infty$, se deduce que $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(d) Hágase como ejercicio.

□

1.5.2. Medidas (o medidas numerablemente aditivas)

Definición 1.5.3. Si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X, decimos que $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible y a los conjuntos $E \in \mathcal{M}$ se les llama conjuntos medibles.

Definición 1.5.4. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medibe. Una medida sobre $(X, \mathcal{M})$ es una aplicación $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para cualquier $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ numerable y disjunta de subconjuntos de $\mathcal{M}$.

En este caso diremos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida y que μ es una medida sobre X o sobre $\mathcal{M}$.

Ejemplo 1.5.5. (i) Sea X cualquier conjunto y $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E & si \quad E \text{ es finito} \\ +\infty & si \quad E \text{ es infinito} \end{cases}$$

μ es una medida que se denomina **medida contadora**.

(ii) Sea X cualquier conjunto y $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Fijamos $a \in X$. Definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & si \quad a \in E \\ 0 & si \quad a \notin E \end{cases}$$

μ es una medida que se denomina **delta de Dirac en el punto a** y se denota por δ_a.

(iii) Sea X cualquier conjunto y

$$\mathcal{M} = \{E \subset X : E \text{ es numerable o } E^c \text{ es numerable}\}$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & si \quad E \text{ es numerable} \\ 1 & si \quad E \text{ no es numerable} \end{cases}$$

Se tiene que μ es una medida.

(iv) Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definimos

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & si \quad E \text{ es finito} \\ +\infty & si \quad E \text{ es infinito} \end{cases}$$

μ no es una medida pero es una medida finitamente aditiva.

Proposición 1.5.6. *Sea μ una medida sobre $\mathcal{M}$, es decir, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida. Se verifican las propiedades siguientes:*

(a) *μ es finitamente aditiva sobre $\mathcal{M}$.*

(b) *Si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(c) *Si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$ y $\mu(A) < +\infty$ entonces $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(d) *Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colecciónn numerable en $\mathcal{M}$ tal que $E_i \subset E_{i+1}$, para todo i entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$$

Demostración. □

Definición 1.5.7. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

(a) Decimos que el espacio de medida es finito o que μ es finita si $\mu(X) < \infty$.

(b) Decimos que el espacio de medida es de probabilidad o que μ es una probabilidad si $\mu(X) = 1$.

(c) Decimos que el espacio e medida es σ-finito o que μ es σ-finita si existe una sucesión $\{X_n\}$ de conjuntos mediables ($X_n \in \mathcal{M}$) tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ y $\mu(X_n) < \infty$ para todo n.

Definición 1.5.8. Decimos que un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es completo si son medibles todos los subconjuntos de los conjuntos de medida cero, es decir, si $F \subset N \in \mathcal{M}$ y $\mu(N) = 0$ implica $F \in \mathcal{M}$.

Los espacios de medida se pueden completar.

Teorema 1.5.9. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos*

$$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0\}$$

y $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow [0, +\infty]$ mediante

$$\overline{\mu}(A) = \mu(E), \text{ donde } A \in \overline{\mathcal{M}}$$

Entonces

(a) *$\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}}$ es un σ-álgebra y $\overline{\mu}$ está bien definida.*

(b) *$(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ es un espacio de medida completo y $\overline{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$.*

(c) *Si $(X, \mathcal{N}, \mu)$ es otro espacio completo tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ y $\nu|_{\mathcal{M}} = \mu$ entonces $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{N}$ y $\nu|_{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mu}$.*

Demostración. □

1.6. Introducción a la medida de Lebesgue

1.6.1. Preliminares

Vamos a considerar en $\mathbb{R}$ intervalos acotados con la notación habitual: (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si I es uno de esos intervalos la longitud de I es $b - a$ y escribimos $l(I) = b - a$. Los intervalos (a, a), $[a, a)$ y $(a, a]$ son el conjunto vacío. Observamos que, en consecuencia, $l(\emptyset) = 0$ cualquiera que sea la representación elegida.

Un intervalo (acotado) I en $\mathbb{R}^n$ es un producto de n intervalos acotados de $\mathbb{R}$: $I = I_1 \times ... \times I_n$. El volumen de I se define como $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_1) \cdot ... \cdot \mathcal{V}(I_n)$. Como antes, $l(\emptyset) = 0$. Decimos que I es un cubo si todos los intervalos I_i tienen la misma longitud. Algunas propiedades de los intervalos y del volumen son las siguientes:

(a) Si $\emptyset \neq I_1 \times ... \times I_n \subset J_1 \times ... \times J_n$ entonces $I_i \subset J_i$ para todo i.

(b) Si I y J son intervalos con $I \subset J$ entonces $\mathcal{V}(I) \leq \mathcal{V}(J)$.

  (i) Sea $A \neq \emptyset$ un intervalo. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo cerrado $J \subset A$ tal que $\mathcal{V}(A) - \mathcal{V}(J) < \varepsilon$.

  (ii) Sea A un intervalo. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo abierto J tal que $A \subset J$ y $\mathcal{V}(J) - \mathcal{V}(A) < \varepsilon$.

(c) Si $A, B_1, ..., B_s$ son intervalos de $\mathbb{R}^n$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^s B_i$ entonces $\mathcal{V}(A) \leq \sum_{i=1}^s \mathcal{V}(B_i)$.

(d) Si $A, B_1, ..., B_s$ son intervalos de $\mathbb{R}^n$ y $A = \bigcup_{i=1}^s B_i$ y los intervalos B_i son disjuntos entonces $\mathcal{V}(A) = \sum_{i=1}^s \mathcal{V}(B_i)$.

(e) La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ está generada por los intervalos de $\mathbb{R}^n$.

1.6.2. La medida exterior de Lebesgue

Pretendemos definir una medida m sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^n$ de forma que los intervalos pertenezcan a $\mathcal{M}$ y que $m(I) = \mathcal{V}(I)$.

Definición 1.6.1. Definimos la medida exterior de Lebesgue $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ como

$$m^*(A) = \text{ínf}(H_A)$$

donde

$$H_A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ \textit{es un intervalo de} } \mathbb{R}^n \right\}$$

Observación 1.6.2. $m^*(A) = 0$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i) < \varepsilon$$

Proposición 1.6.3. *Algunas propiedades de m^**

(a) Si $A \subset B$ entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.

(b) $m^*(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) $m^*(\emptyset) = 0$.

(d) La medida exterior de Lebesgue de un conjunto numerable es cero.

(e) La medida exterior de Lebesgue de un intervalo I es su volumen.

(f) La medida exterior de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ es $+\infty$.

(g) La medida exterior de Lebesgue es invariante a traslaciones: si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$ entonces $m^*(A + b) = m^*(A)$.

(h) La medida exterior de Lebesgue no es una medida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. (a) Se sigue fácilmente porque $A \subset B \Longrightarrow H_B \subset H_A$.

(b) Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $\varepsilon > 0$. Sean

$$I_1 = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \times ... \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon), I_i = \emptyset \text{ para todo } i \geq 2$$

Entonces

$$\{x\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i) = (2\varepsilon)^n$$

Por lo tanto, $m^*(\{x\}) \leq (2\varepsilon)^n$ para todo $\varepsilon > 0$, lo que implica $m^*(\{x\}) = 0$.

(c) Se sigue de (a) y (b).

(d) Escribimos $A = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ y sea $\varepsilon > 0$. Por lo ya demostrado en (b), para casa $j \in \mathbb{N}$, existe un intervalo abierto I_j con $a_j \in I_j$ y $\mathcal{V}(I_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$, de donde,

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$$

y por lo tanto, $m^*(A) = 0$.

(e) Es claro que $m^*(I) = \mathcal{V}(I)$ para intervalos abiertos I.

Sea ahora I un intervalo cualquiera no vacío. Dado $\varepsilon > 0$ existen dos intervalos abiertos I_1 e I_2 tales que $I_1 \subset I \subset I_2$, $\mathcal{V}(I) - \varepsilon \leq \mathcal{V}(I_1)$ y $\mathcal{V}(I_2) \leq \mathcal{V}(I) + \varepsilon$. Entonces, aplicando que m^* es una medida exterior y lo ya demostrado para intervalos abiertos,

$$\mathcal{V}(I) - \varepsilon \leq \mathcal{V}(I_1) = m^*(I_1) \leq m * (I_2) = \mathcal{V}(I_2) \leq \mathcal{V}(I) + \varepsilon$$

Tomando limites cuando ε tiende a cero, concluimos $m^*(I) = \mathcal{V}(I)$.

(f) Para cada natural k tenemos $I_k = (-k, k) \times ... \times (-k, k) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces

$$m^*(I_k) = \mathcal{V}(I_k) \leq m^*(\mathbb{R}^n)$$

es decir, $(2k)^n \leq m^*(\mathbb{R})^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $m^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

(g) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Consideramos $A + b = \{a + b : a \in A\}$. Sean

$$S = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \text{ intervalo abierto} \right\} \text{ y}$$

$$T = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(H_j) : A + b \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j, H_j \text{ intervalo abierto} \right\}$$

Así, $m^*(A) = \text{ínf}(S)$ y $m^*(A + b) = \text{ínf}(T)$. Bastará ver que $S = T$.

Comenzamos probando $S \subset T$. Sea $\lambda \in S$. Entonces, existe $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, con I_j intervalo abierto y $\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_j)$. Entonces,

$$A + b \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) + b = \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j + b)$$

Así, si $H_j = I_j + b$ se tiene que H_j es un intervalo abierto, $\mathcal{V}(H_j) = \mathcal{V}(I_j)$, $A + b \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(H_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_j) = \lambda$$

por lo que $\lambda \in T$. La otra inclusión es análoga (basta restar b).

(h) Se sigue de las propiedades (c), (e) y (g) y del teorema 1.2.1.

$\square$

1.6.3. La medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue restringida a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ es una medida. Enunciamos el teorema pero posponemos la demostración para más adelante.

Teorema 1.6.4. *La medida exterior de Lebesgue m^* restringida a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ es una medida, denotada por m, sobre la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ y verifica que $m(I) = \mathcal{V}(I)$ para todo intervalo I. A la medida m se le denomina medida Lebesgue.*

Teorema 1.6.5. *La medida de Lebesgue $m = m^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ es la única medida μ definida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $\mu(I) = \mathcal{V}(I)$ para todo intervalo abierto I de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow [0, +\infty]$ otra medida tal que $\mu(I) = \mathcal{V}(I)$ para todo intervalo I abierto de $\mathbb{R}^n$. Tenemos que probar que $m(E) = \mu(E)$ para todo $E \in B_{\mathbb{R}^n}$. Sea $E \in B_{\mathbb{R}^n}$, por definición $m(E) = \text{ínf}(H_E)$ donde

$$H_E = \left\{ \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ es un intervalo de } \mathbb{R}^n \right\}$$

(i) Veamos que $\mu(E) \leq m(E)$. Sea $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia numerable tal que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Como μ es medida

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i)$$

Luego $\mu(E) \leq \lambda$ para todo $\lambda \in H_E$, esto es, $\mu(E)$ es cota inferior de H_E, por tanto, $\mu(E) \leq \text{ínf}(H_E) = m^*(E) = m(E)$. Por tanto

$$\mu(E) \leq m(E) \forall E \in B_{\mathbb{R}^n}$$

(ii) Veamos que $m(E) \leq \mu(E)$. Nótese que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, donde $I_k = (-k, k) \times ... \times (-k, k) = (-k, k)^n$. Además $I_k \subset I_{k+1}$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ donde $E_k = E \cap I_k$ y $E_k \subset E_{k+1}$. Por (i), sabemos que

$$\mu(I_k \backslash E_k) \leq m(I_k \backslash E_k)$$

Entonces

$$\begin{aligned} m(E_k) + m(I_k \backslash E_k) &= m(E_k \cup (I_k \backslash E_k)) \\ &= m(I_k) = \mathcal{V}(I_k) = \mu(I_k) \\ &= \mu(E_k \cup (I_k \backslash E_k)) = \mu(E_k) + \mu(I_k \backslash E_k) \\ &\leq \mu(E_k) + m(I_k \backslash E_k) \end{aligned}$$

Como $\mu(I_k \backslash E_k) < +\infty$, obtenemos que

$$m(E_k) \leq \mu(E_k)$$

y, consecuentemente,

$$m(E) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) \leq \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_k\right) = \mu(E)$$

es decir

$$m(E) \leq \mu(E), \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$$

Luego $m = \mu$, como queríamos probar. □

Teorema 1.6.6. *La medida de Lebesgue m es la única medida sobre la σ-álgebra de Borel, invariante frente a traslaciones y tal que la medida del cubo unidad $[0, 1) \times ... \times [0, 1)$ es 1.*

1.6.4. El conjunto de Cantor

No es difícil ver que en $\mathbb{R}^2$ existen conjuntos de medida cero que no son numerables. Por ejemplo, el intervalo $\{(x, y) : x \in [0, 1], y = 0\} = [0, 1] \times \{0\}$. En esta sección vamos a estudiar un conjunto muy interesante, el conjunto de Cantor que, además de otras propiedades, tiene medida cero y es no numerable.

Partimos del intervalo $I = [0, 1]$ y suprimimos el tercio central. Llamemos H_1 a lo que suprimimos y C_1 a lo que queda, es decir,

$$H_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ y } C_1 = I \backslash H_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Repetimos este proceso que cada uno de los intervalos cerrados que forman C_1. Llamemos H_2 a lo que quitamos y C_2 a lo que queda. Así obtenemos

$$H_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \text{ y } C_2 = C_1 \backslash H_2$$

Repitiendo este proceso sucesivamente, en el paso n quitamos H_n que es una unión disjunta de 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{3^n}$ y obtenemos C_n que es una unión disjunta de 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$.

El **conjunto de Cantor** es lo que queda después de este proceso, esto es,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = I \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

Algunas propiedades del conjunto de Cantor son:

(1) $0 \in C$. De hecho, pertenecen a C los extremos de todos los intervalos cerrados que forman C_n cualquiera que sea n.

(2) C es compacto.

Es claro que es acotado y es cerrado pues es la intersección de cerrados (cada C_n es cerrado).

(3) $m(C) = 0$

En efecto, $m(C) \leq m(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando límites, $m(C) = 0$.

(4) C no contiene intervalos ([0,1] $\backslash C$ es denso en [0,1]).

(5) C no tiene puntos aislados.

(6) C no es numerable ($\#C = \#\mathbb{R}$).

Sea $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}\} = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n = 0 \text{ ó } a_n = 1\}$ Ahora

$$\begin{aligned} \sigma : C &\longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ x \in C &\longmapsto \{0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ...\} \end{aligned}$$

donde 0 si x está en el ntervalo de la izquierda y 1 si x está en el intervalo de la derecha. σ es biyectiva.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0, 1] \\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} &\longmapsto t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \end{aligned}$$

y $\bar{\sigma}$ es sobreyectiva.

$$\bar{\sigma} \circ \sigma : C \longrightarrow [0, 1]$$

es sobreyectiva

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} : C &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

es inyectiva, luego $\#C = \#[0,1] = \#\mathbb{R}$.

(7) Del punto anterior se sigue que $\#(\mathcal{P}(C)) = \#(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Por otra parte, se sabe que $\#\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \#\mathbb{R}$. Luego $\#\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} < \#(\mathcal{P}(C))$. Esto implica que existe algún conjunto $F \subset C$ tal que $F \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ y sabemos que $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ y $m(C) = 0$. Por consiguiente, el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$ no es completo.

Ejemplo 1.6.7. El conjunto de Cantor generalizado. Sea $0 < \alpha < 1$. Como antes, partimos del intervalo $I = [0,1]$ y suprimimos el intervalo central de longitud $\frac{\alpha}{3}$ y nos quedamos con un conjunto $C_{2,\alpha}$, que es unión de dos intervalos. En el segundo paso, de cada uno de los dos intervalos centrales suprimimos los intervalos centrales de longitud $\frac{\alpha}{3^2}$ y el conjunto que nos queda es $C_{2,\alpha}$. Seguimos así y consideramos el conjunto de Cantor generalizado $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{n,\alpha}$ (si $\alpha = 1$, C_α es el conjunto de Cantor). ¿Qué propiedades tiene C_α? ¿Qué medida tiene?

1.6.5. Completación de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$

El espacio $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$ no es completo. Si hacemos su completación se obtiene un nuevo espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}, \overline{m})$ que verifica las propiedades del Teorema 1.5.9

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$

(b) $\overline{m}|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} = m = m^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$

(c) Si $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \mu)$ es otro espacio completo tal que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{N}$ y $\nu|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} = m$ entonces $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} \subset \mathcal{N}$ y $\nu|_{\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}} = \overline{m}$.

A la σ-álgebra $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ se le denomina σ-álgebra de Lesbesgue u se denota $\mathcal{L}_n$, es decir,

$$\mathcal{L}_n := \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$$

Recuérdese que, por definición

$$A \in \mathcal{L}_n \iff \text{ existen } E, N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \text{ y } F \in N \text{ tales que } A = E \cup F \text{ y } m(N) = 0$$

y que

$$m(A) = m(E)$$

En realidad

(d) $\overline{m}(A) = m^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{L}_n$, es decir, $\overline{m} = m^*|_{\mathcal{L}_n}$. En efecto, supongamos que

$$A = E \cup F, \text{ siendo } A, N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \text{ y } F \subset N \text{ y } m(N) = 0$$

Entonces $A \subset E \cup N$. Por ser $\overline{m}$ una medida se sigue que

$$\overline{m}(A) = m(E) = m^*(E)$$

Puesto que $E \subset A$, tenemos que $m^*(E) \leq m^*(A)$ y, por lo tanto,

$$\overline{m}(A) \leq m^*(E) \leq m^*(A)$$

Por otra parte, usando de nuevo que $A \subset E \cup N$,

$$m^*(A) \leq m^*(E \cup N) = m(E \cup N) \leq m(E) + m(N) = m(E) = \overline{m}(A)$$

donde la última desigualdad se ha aplicado la definición de $\overline{m}$. De ambas desigualdades se sigue que la afirmación contenida enn (d) es cierta. $\square$

Observación 1.6.8. (a) $A \in \mathcal{L}_n$ si y sólo si existen $B, C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tales que $B \subset A \subset C$ y $m(C \backslash B) = 0$. A los conjuntos de $\mathcal{L}_n$ se les llama conjuntos medibles-Lebesgue.

(b) Por lo que acabamos de enunciar, se puede decir que son casi-borelianos.

(c) Abusando de la notación, a la medida $\overline{m} = m^*|_{\mathcal{L}_n}$ la denotaremos también por m y la llamaremos medida de Lebesgue (por supuesto, deberíamos escribir m_n puesto que hay una para cada dimensión).

Capítulo 2

Funciones medibles

2.1. Funciones medibles

Definición 2.1.1. Consideremos dos espacios medibles $(X, \mathcal{M}_X)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y)$. Sea $f : X \longrightarrow Y$. Decimos que f es medible (o $(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Y) -$ *medible*) si

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X \text{ para todo } A \in \mathcal{M}_Y.$$

Ejemplo 2.1.2. (a) Si $\mathcal{M}_X = \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{M}_Y$ es una σ-álgebra sobre Y, entonces toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es medible.

(b) Si $\mathcal{M}_X$ es una σ-álgebra sobre X y $\mathcal{M}_Y = \{\emptyset, Y\}$, entonces toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es medible.

Definición 2.1.3. Consideremos dos espacios medibles $(X, \mathcal{M}_X)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y)$. Sean $E \in \mathcal{M}_X$ y $f : E \longrightarrow Y$. Decimos que f es medible si es $(\mathcal{M}_E, \mathcal{M}_Y) -$ *medible*, donde

$$\mathcal{M}_E = \{B = D \cap\ E : D \in \mathcal{M}_X\} = \{B \subset E : B \in \mathcal{M}_X\}.$$

Es claro que f es medible si

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_E \text{ para todo } A \in \mathcal{M}_Y.$$

Observación 2.1.4. Si $f : X \longrightarrow Y$ es medible y $E \in \mathcal{M}_X$ entonces $f|_E : E \longrightarrow Y$ es medible. En efecto, basta tener en cuennta que

$$(f|_E)^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\} = f^{-1}(A) \cap E, \text{ para todo } A \in \mathcal{M}_Y.$$

Teorema 2.1.5. *Consideremos dos espacios medibles $(X, \mathcal{M}_X)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y)$. Sean $E \in \mathcal{M}_X$ y $f : E \longrightarrow Y$. Sea $\mathcal{E}$ una colección de conjuntos que genera la σ-álgebra $\mathcal{M}_Y$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) f es medible.

(b) $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X$ para todo $E \in \mathcal{E}$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$. Es evidente pues $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_Y$.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Sea $F = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X\}$. Por (b) tenemos que $\mathcal{E} \subset F$, lo que implica que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(F)$. Nótese que $\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y $\mathcal{M}(F) = F$, luego, $\mathcal{M}_Y \subset F$. Por tanto, si $A \in \mathcal{M}_Y$, entonces $A \in \mathcal{M}(F)$, luego $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X$. $\square$

Definición 2.1.6. Consideremos un espacio medibles $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es medible o ($\mathcal{M}_X - $ *medible*) si es $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-medible, es decir, si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X, \text{ para todo } B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}.$$

Proposición 2.1.7. *Consideremos un espacio medibles $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) f es medible.

(b) $f^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}_X$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}([a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}_X$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(d) $f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}_X$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(e) $f^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}_X$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(f) $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$ para todo intervalo acotado I.

(g) $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$ para todo intervalo acotado y abierto I.

(h) $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$ para todo intervalo acotado y cerrado I.

(i) $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$ para todo intervalo acotado $I = [c, d)$.

(j) $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$ para todo intervalo acotado $I = (c, d]$.

(f) $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\} \in \mathcal{M}_X$ para todo abierto $G \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.1.8. Consideremos un espacio medibles $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que f es medible si es $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$-medible, es decir, si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X, \text{ para todo } B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Proposición 2.1.9. *Consideremos un espacio medibles $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) f es medible.

(b) $f^{-1}(I) = \{x \in X : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$ para todo intervalo I de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.1.10. *Consideremos un espacio medible $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y sean $(f_1, ..., f_n)$ las componentes de f. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) f es medible.

(b) Todas las funciones componentes f_i son medibles.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$. Supongamos que f es medible, veamos que cada f_i es medible. Por comodidad en la notación, supongamos que $i = 1$.

$$(f_1)^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, b] \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R})$$

Nótese que $F = [a, b] \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y como f es medible, entonces

$$f^{-1}([a, b] \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}) = f^{-1}(F) \in \mathcal{M}_X$$

luego $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible (análogo para el resto de componentes).

$(b) \Longrightarrow (a)$. Supongamos que todas las funciones componentes f_i son medibles, veamos que f es medible. Sea $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ intervalo de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(I) &= \{x \in X : f(x) \in I\} \\ &= \{x \in X : f_1(x) \in I\} \cap \{x \in X : f_2(x) \in I\} \cap ... \cap \{x \in X : f_n(x) \in I\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : f_i(x) \in I\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} f_1^{-1}(I_i) \end{aligned}$$

Como I_i es intervalo de $\mathbb{R}$ y f_i es medible, entonces $f_1^{-1}(I_i)\mathcal{M}_X$ luego $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : f_i(x) \in I\} \in \mathcal{M}_X$, es decir, f es medible. □

Ejemplo 2.1.11.

Funciones características. Sea $(X\mathcal{M})$ un espacio medible y sea $A \subset X$. La función característica de A, $\mathcal{X}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Veamos que $\mathcal{X}_A$ es medible si y solo si $A \in \mathcal{M}_X$. Sea $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = \{x \in X : \mathcal{X}_A(x) \in B\}$:

(a) Si $0 \notin B$ y $1 \notin B$ entonces $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{M}_X$.

(b) Si $0 \in B$ y $1 \notin B$ entonces $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = A^c$.

(c) Si $0 \notin B$ y $1 \in B$ entonces $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = A$.

(d) Si $0 \in B$ y $1 \in B$ entonces $\mathcal{X}_A^{-1}(B) = X \in \mathcal{M}_X$.

Por tanto $\mathcal{X}_A$ es medible si y solo si $A, A^c \in \mathcal{M}_X$, es decir, si y solo si A es medible, esto es, si y solo si $A \in \mathcal{M}_X$

Proposición 2.1.12. *Supongamos que E y F son conjuntos medibles disjuntosx y sean $X = E \cup F$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles. Entonces la función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dafinida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in E \\ g(x) & si \quad x \in F \end{cases}$$

es un función medible.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h^{-1}(B) &= \{x \in X : h(x) \in B\} = \{x \in E : h(x) \in B\} \cup \{x \in F : h(x) \in B\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in B\} \cup \{x \in X : g(x) \in B\} = A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

pues $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$. Por tanto, h es medible. □

Observación 2.1.13. Si $f : X \longrightarrow Y$ es medible y $E \in \mathcal{M}_X$ entonces $f|_E : E \longrightarrow Y$ es medible.

2.1.1. El caso de $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1.14. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si es medible cuando consideramos en $\mathbb{R}^n$ la σ-álgebra de Lebesgue, es decir, si para todo conjunto de Borel $B \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible-Lebesgue o, equivalentemente, por ejemplo, si

$$\{x : f(x) < a\} \text{ es medible Lebesgue para todo } a \in \mathbb{R}.$$

De la misma forma, dceimos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible Borel cuando en $\mathbb{R}^n$ consideramos la σ-álgebra de Borel, es decir, si para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible Borel o, equivalentemente, por ejemplo si

$$\{x : f(x) < a\} \text{ es medible Borel para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Como la σ-álgebra de Borel está contenida en la σ-álgebra de Lebesgue, se sigue que si f es medible Borel entonces f es medible Lebesgue.

Proposición 2.1.15. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces f es medible-Borel y, por lo tanto, medible-Lebesgue.*

Demostración. La demostración es inmediata puesto que la imagen inversa de un abierto mediante una aplicación continua es un abierto. □

Proposición 2.1.16. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ medible y $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua (o, más generalmente, medible Borel). Entonces $\Phi \circ f$ es medible.*

Demostración. Sea G un abierto de $\mathbb{R}$. Sabemos que

$$(\Phi \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\Phi^{-1}(G))$$

Como Φ es medible Borel y G es abierto entonces $H = \Phi^{-1}(G)$ es un medible Borel. Por ser f medible, $f^{-1}(H)$ es medible. □

2.2. Operaciones con funciones medibles

Proposición 2.2.1. *Sean $f, g : X \in \mathbb{R}$ dos funciones medibles y sea $c \in \mathbb{R}$.*

(a) $f + g$, fg, cf están definidas en X y son medibles.

(b) Si $F = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ entonces F es medible, $\frac{f}{g}$ está bien definida en F y es medible.

(c) Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $f^k : X \in \mathbb{R}$ es medible.

(d) Si $p \geq 0$ entonces la función $|f|^p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible.

Demostración. (a) Para $f + g$ consideramos $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(s, t) = s + t$ y $H : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H(x) = (f(x), g(x))$. Es claro que

$$f + g = \Phi \circ H$$

Aplicando la Proposición 2.1.16 se sigue que $f + g$ es medible. La demostración es análoga para fg y cf.

(b) El conjunto F es medible por ser g medible. Sea $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\})$. Es claro que G es abierto. Por otra parte, si $H : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es $H(x) = (f(x), g(x))$ y $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\Phi(s, t) = \frac{s}{t}$ se tiene que $H(\mathbb{R}^2) \subset G$ y

$$\frac{f}{g} = \Phi \circ H$$

Aplicando una pequeña variante de la Proposión 2.1.16 se tiene que $\frac{f}{g}$ es medible.

(c) Consideramos $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(s) = s^k$, es claro que

$$f^k = \Phi \circ f$$

Aplicando la Proposición 2.1.16 se sigue que f^k es medible.

(d)

□

2.3. Conjuntos medibles determinados por funciones medibles

Proposición 2.3.1. *Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles entonces los conjuntos $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ y $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ son medibles.*

Demostración. Para el primer conjunto basta observar lo siguiente:

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < g(x)\})$$

Los conjuntos $\{x \in X : f(x) < r\}$ y $\{x \in X : r < g(x)\}$ son medibles, por serlo las funciones f y g. Por lo tanto, la intersección es medible y, en consecuencia, $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

El segundo conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es medible por ser diferencia de conjuntos medibles:

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\} = X \backslash \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

(el segundo conjunto es medible por lo demostrado anteriormente).

Por último

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \backslash \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

Luego es es medible por ser diferencia de dos conjuntos medibles. □

2.4. Límite de sucesiones de funciones medibles

Proposición 2.4.1. *Sea $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in X$ existe en $\mathbb{R}$ el límite de $\{f_n(x)\}$. Entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ es medible.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos $A = \{x \in X : f(x) > a\}$.

$$\begin{aligned} x \in A \Longleftrightarrow f(x) > a \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) > a \Longleftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} : f_n(x) > a + \frac{1}{j} \\ \Longleftrightarrow \exists j, n_0 \in \mathbb{N} : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) > a + \frac{1}{j} \ \forall n \geq n_o \\ \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \right) \right) \end{aligned}$$

Por tanto

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \right) \right)$$

Como $\{x \in X : f_n(x) > a\}$ es medible, entonces la intersección de un número infinito numerable de conjuntos medible es medible, por lo que, la unión de un número infinito numerable vuelve a ser numerable, con lo que tenemos que A es medible. □

Ejemplo 2.4.2. Sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

2.5. Funciones medibles con valores en $[-\infty, +\infty]$

Necesitaremos trabajar con funciones $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, donde $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Para ellos necesitaremos tener una σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ y también debemos tener definido un orden y operaciones en este conjunto.

2.5.1. $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$: orden y operaciones

Consideramos $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (denotado también por $\overline{\mathbb{R}}$) con su orden natural, es decir, el orden de $\mathbb{R}$ con $-\infty \leq a \leq +\infty$ para todo $a \in [-\infty, +\infty]$.

Definición 2.5.1. (a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b$ y ab son la suma y producto naturales.

(b) $(+\infty) + \mathrm{c} = \mathrm{c} + (+\infty) = +\infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

(c) $(-\infty) + \mathrm{c} = \mathrm{c} + (-\infty) = -\infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

(d) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

(e) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

(f) $c(+\infty) = (+\infty)c = +\infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

(g) $c(-\infty) = (-\infty)c = -\infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

(h) $c(+\infty) = (+\infty)c = -\infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$.

(i) $c(-\infty) = (-\infty)c = +\infty$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$.

(j) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$.

(k) $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.

(l) $(-\infty)(-\infty) = +\infty$.

(m) $0(+\infty) = (+\infty)0 = 0$.

(n) $0(-\infty) = (-\infty)0 = 0$.

2.5.2. Límites en $\overline{\mathbb{R}}$

Definición 2.5.2. Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elemetos en $\overline{\mathbb{R}}$. Si $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$ las definiciones son como antes. Por otra parte, $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ si para todo $K < 0$, $K \neq -\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $a_n < K$.

Observación 2.5.3. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente (o decreciente) de elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ siempre tiene un límite en $\overline{\mathbb{R}}$.

2.5.3. Topología y σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$

En $\overline{\mathbb{R}}$ se puede introducir una topología natural de forma que las definiciones de $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ que conocemos coinciden con la definición de límite asociada a la topología.

Definición 2.5.4. Para cada $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definimos un sistema (fundamental) de entornos $\{E_\varepsilon(a) : \varepsilon > 0\}$:

(a) Si $a \in \mathbb{R}$, $E_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

(b) Si $a = +\infty$, $E_\varepsilon(a) = (\varepsilon, +\infty]$.

(c) Si $a = -\infty$, $E_\varepsilon(a) = [-\infty, \varepsilon)$.

Decimos que un subconjunto $G \subset \overline{\mathbb{R}}$ es abierto de $\overline{\mathbb{R}}$ si para cada $a \in G$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $E_{\varepsilon(a)} \subset G$. La familia de los abiertos de $\overline{\mathbb{R}}$ constituyen una topología en $\overline{\mathbb{R}}$ y la topología inducida en $\mathbb{R}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$.

Una vez tenemos una topología natural de $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos la σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$, denotada por $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, asociada a dicha topología. Es fácil ver

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{B \cup D : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ y } D \subset \{-\infty, +\infty\}\}$$

Proposición 2.5.5. *La σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$ está generada por cada una de las siguientes familias de intervalos:*

(a) $\mathcal{E}_1 = \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\mathcal{E}_1 = \{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\mathcal{E}_1 = \{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\mathcal{E}_1 = \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

(Como antes, la proposición vale también cuando a es racional).

Demostración. Veamos que $\mathcal{E}_1$ general $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Sea $\overline{\tau} = \{\text{familia de abiertos de } \overline{\mathbb{R}}\}$

$\subset$. Nótese que

$$\mathcal{E}_1 \subset \overline{\tau} \Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{M}(\overline{\tau}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

Por tanto $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$

$\supset$. Sea $G \in \overline{\tau}$. Entonces

$$G = (G \cap \mathbb{R}) \cup (G \cap (\overline{\mathbb{R}} \backslash \mathbb{R})) = (G \cap \mathbb{R}) \cup (G \cap \{-\infty, +\infty\})$$

Definimos $H = G \cap \mathbb{R}$ y $S = G \cap \{-\infty, +\infty\}$. Veamos que

$$H, S \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \Longrightarrow \overline{\tau} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \Longrightarrow \mathcal{M}(\overline{\tau}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$$

En primer lugar, $S \subset \{-\infty, +\infty\}$.

(i) $S = \emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$.

(ii) $S = \{+\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (n, +\infty] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$, pues $(n, +\infty] \in \mathcal{E}_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $S = \{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, n] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$, pues $[-\infty, n] = (n, +\infty]^c \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $= S = \{-\infty, +\infty\} = \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ por lo probado en (ii) y (iii).

En segundo lugar, $H \subset \mathbb{R}$ abierto, entonces $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. Nótese que

$$(a_i, b_i) = (a_i, +\infty] \backslash [b_i, +\infty] = (a_i, +\infty) \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(b_i - \frac{1}{n}, +\infty \right] \right) \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$$

luego $H \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1))$. Y por tanto $G = H \cup S \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$, es decir, $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$

Por todo lo probado, tenemos que $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ $\square$

2.5.4. Funciones medibles con valores en $\overline{\mathbb{R}}$

Definición 2.5.6. Consideremos un espacio medible $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \in \overline{\mathbb{R}}$. Decimos que f es medible si es $(\mathcal{M}_X, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ – *medible*, es decir, si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_X, \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$$

Proposición 2.5.7. *Consideremos un espacio medible $(X, \mathcal{M}_X)$. Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) f *es medible.*

(b) $f^{-1}((a,+\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}_X$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}([a,+\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}_X$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

(d) $f^{-1}([-\infty,a]) = \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}_X$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

(e) $f^{-1}([-\infty,a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}_X$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Observación 2.5.8. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, entonces $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible.

2.5.5. El caso de $\mathbb{R}^n$

Definición 2.5.9. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible Lebesgue si es medible cuando consideramos en $\mathbb{R}^n$ la σ-álgebra de Lebesgue, es decir, si para todo conjunto de Borel $B \in \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible-Lebesgue o, equivalentemente, por ejemplo, si

$$\{x : f(x) < a\} \text{ es medible Lebesgue para todo } a \in \mathbb{R}.$$

De la misma forma, dceimos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible Borel cuando en $\mathbb{R}^n$ consideramos la σ-álgebra de Borel, es decir, si para todo conjunto de Borel B de $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(B)$ es medible Borel o, equivalentemente, por ejemplo si

$$\{x : f(x) < a\} \text{ es medible Borel para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Como la σ-álgebra de Borel está contenida en la σ-álgebra de Lebesgue, se sigue que si f es medible Borel entonces f es medible Lebesgue.

2.5.6. Conjuntos medibles determinados por funciones medibles

Dadas dos funciones medibles, se pueden considerar conjuntos muy natirales asociados a ella, conjuntos que resultan medibles.

Proposición 2.5.10. *Si* $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *son funciones medibles entonces los conjuntos* $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ *y* $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *son medibles.*

Proposición 2.5.11. *Supongamos que* E *y* F *son conjuntos medibles disjuntos y sean* $X = E \cup F$, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *y* $g : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *son funciones medibles. Entonces la función* $h : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *dafinida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in E \\ g(x) & si \quad x \in F \end{cases}$$

es un función medible.

Las demostraciones de ambas proposiciones son iguales que las análogas para aplicaciones que toman valores en $\mathbb{R}$.

2.5.7. Operaciones con funciones medibles

Proposición 2.5.12. *Sean* $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *dos funciones medibles*

(a) *Si* F *es el conjunto medible donde* $f+g$ *está bien definida entonces* F *es medible y* $f+g : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *es medible.*

(b) $fg : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *es medible.*

(c) *Si* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $f^k : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *es medible.*

(d) *Si* $p \geq 0$ *entonces la función* $|f|^p : x \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *es medible (se entiende* $(+\infty)^p = +\infty$ *para* $p > 0$ *y* $(+\infty)^0 = 1$*).*

Demostración. Haremos sólo la prueba de (a). Las demás se hacen igual. La única diferencia es que la función $f+g$ puede estar definida en un subconjunto de X. Observamos que $F = \bigcup_{i=1}^{7} F_i$ donde

$$\begin{aligned}
&F_1 = \{x \in X : f(x), g(x) \in \mathbb{R}\}, && F_2 = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}, g(x) = +\infty\} \\
&F_3 = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}, g(x) = -\infty\}, && F_4 = \{x \in X : g(x) \in \mathbb{R}, f(x) = +\infty\} \\
&F_5 = \{x \in X : g(x) \in \mathbb{R}, f(x) = -\infty\}, && F_6 = \{x \in X : g(x) = +\infty, f(x) = +\infty\} \\
&F_7 = \{x \in X : g(x) = -\infty, f(x) = -\infty\}
\end{aligned}$$

Es claro que cada uno de los conjuntos F_i es medible y que las restricciones de f y g a cada uno de los conjuntos F_i es medible. Por la Proposición 2.5.11, basta ver que $f+g$ a restringida a cada conjunto F_i es medible. Para $i \geq 2$ es obvio porque $f+g$ es constante en F_i. Para $i=1$, la medibilidad se sigue de la Proposición 2.3.1. ☐

2.6. Supremo e ínfimo de sucesiones de funciones medibles

Proposición 2.6.1. *Sea $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces $g = \sup_n f_n$ y $h = \inf_n f_n$ son funciones medibles, donde*

$$g(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad y \quad h(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

Observe que el supremo y el ínfimo se toman en $\overline{\mathbb{R}}$ por lo que pueden tomar los valores $+\infty$ y $-\infty$.

Demostración. Veamos que $g^{-1}((a,+\infty])$ es un conjunto medible para todo $a \in \mathbb{R}$. Observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
g^{-1}((a,+\infty]) &= \{x \in X : \sup_n f_n(x) > a\} = \{x \in X : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_n(x) > a\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}((a,+\infty])
\end{aligned}$$

De aquí se sigue que $g^{-1}((a,+\infty])$ es medible por ser una unión numerable de conjuntos medibles.

Para el ínfimo se procede de forma semejante. Ahora veamos que $h^{-1}([-\infty,a))$ es un conjunto medible para todo $a \in \mathbb{R}$. Observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
h^{-1}([-\infty,a)) &= \{x \in X : \inf_n f_n(x) < a\} = \{x \in X : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_n(x) < a\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty,a))
\end{aligned}$$

☐

Corolario 2.6.2. *Sean $f,g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles. Entonces $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son medibles, donde las funciones máximo y mínimo se definen como*

$$\max(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad y \quad \min(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Demostración. Basta tomar la sucesión de funciones f_n, donde $f_1 = f$ y $f_n = g$ para todo $n \geq 2$. Entonces $\max(f,g)) = \sup_n f_n$ y $\min(f,g) = \inf_n f_n$ y usando la proposición anterior, se sigue que ambas funciones son medibles. ☐

Definición 2.6.3. Dada una función $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se definen su parte positiva y negativa como

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad y \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

La función $|f|$, valor absoluto de f, se defime como $|f|(x) = |f(x)|$. Es fácil ver que

$$f = f^+ - f^- \quad y \quad |f| = f^+ + f^-$$

Usando el resultado anterior y la Proposición 2.5.12 se sigue inmediatamente el corolario siguiente.

Corolario 2.6.4. *Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible entonces f^+, f^- y $|f|$ son medibles.*

2.6.1. Límites inferior y superior

Vamos a introducir las nociones de límites superior e inferior de una sucesión de funciones. Para ello, necesitamos recordar los conceptos correspondientes a sucesiones de números.

Definición 2.6.5. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales, o cono mayor generalidad, una sucesión de elementos en $\overline{\mathbb{R}}$, el límite superior de dicha sucesión se define como:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n,$$

donde

$$b_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = \sup_{k\geq n} a_k.$$

Nótese que la sucesión b_n está bien definida en $\overline{\mathbb{R}}$ y, además, es decreciente. Por ello, el límite de b_n existe en $\overline{\mathbb{R}}$ y coincide con su ínfimo de $\overline{\mathbb{R}}$. Por consiguiente,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

De manera más simplificada escribimos

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n (\sup_{k\geq n} a_k)$$

Definición 2.6.6. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales, o cono mayor generalidad, una sucesión de elementos en $\overline{\mathbb{R}}$, el límite inferior de dicha sucesión se define como:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n,$$

donde

$$c_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = \inf_{k\geq n} a_k.$$

Nótese que la sucesión c_n está bien definida en $\overline{\mathbb{R}}$ y, además, es creciente. Por ello, el límite de c_n existe en $\overline{\mathbb{R}}$ y coincide con su supremo de $\overline{\mathbb{R}}$. Por consiguiente,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$$

De manera más simplificada escribimos

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \sup_n (\inf_{k\geq n} a_k)$$

Proposición 2.6.7. *Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

y, en ese caso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Observación 2.6.8. $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Proposición 2.6.9. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Definición 2.6.10. Sea $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones, se definen los límites superior e inferior como

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{f_k : k \geq n\}) = \inf_n(\sup\{f_k : k \geq n\}) = \inf_n(\sup_{k\geq n} f_k)$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{f_k : k \geq n\}) = \sup_n(\inf\{f_k : k \geq n\}) = \sup_n(\inf_{k\geq n} f_k).$$

Proposición 2.6.11. *Sea $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces $g = \limsup_n f_n$ y $h = \liminf_n f_n$ son funciones medibles.*

Demostración. Sean $F_n = \sup_{k\geq n} f_k$ y $G_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Por la Proposición 2.6.1, F_n y G_n son funciones medibles. Como $g = \inf_n F_n$ y $h = \sup_n G_n$, aplicando de nuevo la Proposición 2.6.1, concluimos la demostración. □

Proposición 2.6.12. *Sea $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in X$ existe en $\overline{\mathbb{R}}$ el límite de $f_n(x)$. Entonces $f = \lim f_n$ es medible.*

Demostración. Esto es claro por la proposición anterior porque la existencia del límite implica que $f = \limsup_n f_n$ (y $f = \liminf_n f_n$). □

Ejemplo 2.6.13. Sea $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones medibles. Demostrar que es medible el conjunto de los $x \in X$ para los que existe en $\overline{\mathbb{R}}$ el límite de $f_n(x)$. Demuéstrese lo mismo para el conjunto de los $x \in X$ para los existe el límite en $\mathbb{R}$ el límite de $f_n(x)$.

2.7. Funciones simples

Definición 2.7.1. Una **función simple** $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que toma un número finito de valores, es decir, $s(X) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Definición 2.7.2. Sea $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función simple y sea $s(X) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ($a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$). Sea $A_i = \{x \in X : s(x) = a_i\} = s^{-1}(\{a_i\})$. Se verifica entonces que

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}.$$

A esta expresión de s se le denomina **expresión canónica de s**.

Las siguentes propiedades son evidentes:

1. $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
3. $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
4. s es medible si y sólo si A_i es medible para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Veamoslo.

   $\Rightarrow$ Supongamos que s es medible, entonces $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ es la contraimagen de un conjunto cerrado (un boreliano) por un función medible, por lo tanto A_i es medible para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

   $\Leftarrow$ Supongamos que A_i es medible para cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $\mathcal{X}_{A_i}$ es medible para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}$, resulta que s es combinación lineal de funciones medibles y, por consiguiente, es medible.

Observación 2.7.3. Si tomamos un número finito de conjuntos medibles $E_j,\ j = 1, ..., n$, y números reales $d_j,\ j = 1, ..., n$, entonces la función $f = \sum_{j=1}^{n} d_j \mathcal{X}_{E_j}$ es una función simple y medible aunque los conjuntos E_j no sean disjuntos.

Teorema 2.7.4. *Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Entonces, existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples, medibles y no negativas tal que:*

1. $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$.

Si, además, f es acotada, entonces $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en X.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i \in \{1, ..., n2^n\}$ definimos los intervalos siguientes:

$$I_{n,i} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right).$$

Es claro que esta familia de intervalos es una partición del intervalo $[0, n)$. Para $i = n2^n + 1$ ponemos $I_{n,i} = [n, +\infty]$. Ahora, se tiene un partición del intervalo $[0, +\infty]$, es decir, una familia finita de intervalos $I_{n,i}$, $i \in \{1, ..., n2^n\}$ es una familia disjunta y

$$[0, +\infty] = \bigcup_{i=1}^{n2^n+1} I_{n,i}.$$

Observemos que para cada intervalo $I_{n+1,i}$ existe un único $I_{n,j}$ tal que $I_{n+1,i} \subset I_{n,j}$. Definamos

$$E_{n,i} = \{X \in X : f(x) \in I_{n,i}\} = f^{-1}(I_{n,i}).$$

Claramente, por ser f medible, los conjuntos $E_{n,i}$ son medibles y, fijado n, son disjuntos dos a dos y

$$X = \bigcup_{i=1}^{n2^n+1} E_{n,i}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea s_n la función

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & si & x \in E_{n,1} \\ \frac{1}{2^n} & si & x \in E_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{i-1}{2^n} & si & x \in E_{n,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & si & x \in E_{n,n2^n+1} \end{cases} = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathcal{X}_{E_{n,i}} + n\mathcal{X}_{E_{n,n2^n+1}} = \sum_{i=1}^{n2^n+1} \min(I_{n,i}) \mathcal{X}_{E_{n,i}}.$$

Es evidente que s_n es simple, medible y no negativa. Veamos que esta sucesión tiene las propiedades requeridas.

1. Veamos que $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

   Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Existe un único conjunto $E_{n+1,i} = f^{-1}(I_{n+1,i})$ (o un único $I_{n+1,i}$) tal que $x \in E_{n+1,i}$. Como ya hemos observado, dado ese intervalo $I_{n+1,i}$ existe un único $I_{n,j}$ tal que $I_{n+1,i} \subset I_{n,j}$ y, en consecuencia, $x \in E_{n,j}$ y $\min(I_{n,j}) \leq \min(I_{n+1,j})$. Luego, como $s_n(x) = \min(I_{n,j})$ y $s_{n+1}(x) = \min(I_{n+1,i})$, concluimos que

   $$s_n(x) \leq s_{n+1}(x).$$

2. Veamos ahora que $x_n(x)$ converge hacai $f(x)$ para todo $x \in X$. Analizaremos dos casos

(i) Si $f(x) = +\infty$ tenemos que $s_n(x) = n$ para todo n y, claramente, $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty = f(x)$.

(ii) Si $f(x) < \infty$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n_0$. Entonces $f(x) < n$ para todo $n > n_0$. Luego, para cada $n > xn_0$, existe $i \in \{1, ..., n2^n\}$ tales que $x \in E_{n,i}$, es decir, $f(x) \in \left[\frac{i-1}{2n}, \frac{i}{2^n}\right)$. Como $s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, se tiene que

$$|s_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Tomando límites en la expresión anterior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(x) - f(x)| = 0,$$

y, por consiguiente, el límite de $s_n(x)$ es $f(x)$.

3. Supongamos ahora que f está acotada. Entonces existe n_0 tal que $f(x) < n_0$ para todo $x \in X$ y, por consisguiente, $f(x) < n$ para todo $n \geq n_0$ y para todo $x \in X$. Luego, razonando como antes,

$$|s_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo } n \geq n_0 \text{ y todo } x \in X.$$

Consecuentemente,

$$\sup_{x\in X} |s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Tomando límites en la expresión anterior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |s_n(x) - f(x)| = 0,$$

lo que prueba que s_n converge unformemente a f en X.

□

Corolario 2.7.5. *Saea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces, existe una sucesión de funciones simples y medibles $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:*

1. $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)|$ *para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$.*
2. *Para cada $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.*

Además, si f es acotada, la convergencia de $\{\varphi_n\}$ es uniforme.

Demostración. Sabemos que $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son la parte positiva y la parte negativa de f, respectivamente. Sabemos además que f^+ y f^- son medibles yno negativas (toman valores en $[0, +\infty]$). Por el teorema anterior, existen dos sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n, t_n : X \longrightarrow [0, +\infty)$, de funciones simples, medibles, no negativas tales que $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$, $t_n(x) \leq t_{n+1}(x)$, $\lim s_n(x) = f^+(x)$ y $\lim t_n(x) = f^-(x)$. Así, si $\varphi_n = s_n - t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f = f^+ - f^- = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - t_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= |s_n(x) - t_n(x)| = s_n(x) + t_n(x) \\ &\leq s_{n+1}(x) + t_{n+1}(x) = |s_{n+1}(x) - t_{n+1}(x)| = |\varphi_{n+1}(x)| \end{aligned}$$

Para cada $x \in X$. Nótese que $|s_n(x) - t_n(x)| = s_n(x) + t_n(x)$ pues $0 \leq s_n \leq f^+$ y $0 \leq t_n \leq f^-$, luego existen las siguientes tres posibilidades

(i) $s_n > 0$ y $t_n = 0$.

(ii) $s_n = 0$ y $t_n > 0$.

(iii) $s_n = 0$ y $t_n = 0$.

Luego, podemos ver que se cumple dicha desigualdad. $\square$

Por otra parte, si f es acotadaa tenemos que f^+ y f^- son acotadas. Entonces s_n y t_n convergen uniformemente en X a f^+ y $f-$ respectivamente. Luego $\varphi_n = s_n - t_n$ converge uniformemente en X hacia $f^+ - f^- = f$.

2.8. El papel de los conjuntos de medida 0

Supongamos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida (hasta aquí, en este capítulo hemos trabajado con espacios medibles $(X, \mathcal{M})$). Nos encontraremos frecuetemente con que una propiedad se da para todos los puntos salvo en un conjunto de medida 0. Normalmente, esto nos permitirá trabajar como si la propiedade se diera en todos los puntos del conjunto.

Definición 2.8.1. Supongamos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida. Sea P una propiedad que pueden tener o no los elementos $x \in X$. Decimos que P se cumple para casi todo $x \in X$ si el conjunto $\{x \in X : x \text{ no cumple } P\}$ está contenido en un conjunto medible de medida cero ($\{x \in X : x \text{ no cumple } P\} \subset N$ y $\mu(N) = 0$), dicho de otra manera, si existe N medible con $\mu(N) = 0$ tal que P se cumple para todo $x \in N^c$.

Observación 2.8.2. (1) Si el espacio de medida es completo y P se cumple para casi todo $x \in X$ entonces el conjunto $\{x \in X : x \text{ no cumple } P\}$ es medible y es de medida cero (por supuesto, el conjunto $\{x \in X : x \text{ cumple } P\}$ también es medible).

(2) Podría parecer que si $f(x) = g(x)$ para casi todo punto y una de las funciones es medible entonces la otra es medible. Sin embargo, esto no es así salvo que estemos en un espacio de medida completo. Por ejemplo:

Consideremos $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, donde m es la medida de Lebesgue. Sean $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ el conjunto de Cantor, sabemos que existe $A \subset C$ tal que $A \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Definimos

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 0$$
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \in A \\ 1 & si & x \notin A \end{array} \right. = \mathcal{X}_{A^c}$$

Nótese que $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} \subset C$, luego $f = g$ en casi todo punto de X, pero f si es medible y g no es medible.

Proposición 2.8.3. *Supongamos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida completo. Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones tales que $f(x) = g(x)$ para casi todo punto. Si f es medible entonces g es medible.*

Demostración. Sea $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Por ser $f = g$ en casi todo punto de X y por ser $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida completo, se tiene que A es medible y $\mu(A) = 0$. Sea $B = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. B es medible pues $B = X \backslash A$. Veamos que g es medible. Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \{x \in X = g(x) > a\} &= (\{x \in X : g(x) > a\} \cap A) \cup (\{x \in X : g(x) > a\} \cap B) \\ &= (\{x \in X : g(x) > a\} \cap A) \cup (\{x \in X : f(x) > a\} \cap B) \end{aligned}$$

El conjunto $\{x \in X : g(x) > a\} \cap A$ es medible, porque es un subconjunto de A, $\mu(A) = 0$ y estamos en un espacio de medida completo. El conjunto $\{x \in X : f(x) > a\} \cap B$ es medible, puesto que es una intersección de conjuntos medible. Por tanto $\{x \in X = g(x) > a\}$ es medible, lo que prueba la proposición. $\square$

Proposición 2.8.4. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida completo. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles de X en $\overline{\mathbb{R}}$ $(X \in \mathcal{M})$. Sea $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en casi todo punto de X, entonces f es medible.*

Demostración. Sea $A = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$ y sea $B = X \backslash A$. Sabemos que A y B son medibles y que $\mu(B) = 0$. Definimos $F_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$F_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Así definida, $F_n = f_n \mathcal{X}_A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f_n y $\mathcal{X}_A$ son medibles, entonces F_n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Por lo tano, $\lim_{n\to\infty} F_n = f\mathcal{X}_A$. Por tanto $f\mathcal{X}_A$ es medible (por ser límite de una sucesión de funciones medibles).

Veamos que $f\mathcal{X}_A = f$ para casi todo punto. Sea

$$D = \{x \in X : (f\mathcal{X}_A)(x) \neq f(x)\}$$

Entonces $D \subset B$. Como $\mu(B) = 0$ y μ es completa se tiene $\mu(D) = 0$. Una vez sabemos que $f\mathcal{X}_A = f$ para casi todo punto, como μ es completa y $f\mathcal{X}_A$ es medible entonces f es medible (por la proposición anterior). □

Capítulo 3

Integración de funciones medibles

El objetivo de este tema es construir la integral asociada a una medida. Recordamos las ideas intuitivas introducidas en el primer tema. Éstas nos llevan a la conclusión de que, dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ susceptibles de ser integradas son aquellas que verifican que $f^{-1}([a, b))$ es un conjunto medible, es decir $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{M}$, cualquiera que sea el intervalo acotado $[a, b)$. Dicho de otro modo, las funciones con las que vamos a trabajar son las funciones medibles que han sido estudiadas en el capítulo anterior.

Para construir la integral, procederemos de acuerdo con los pasos siguientes: en primer lugar, definimos la integral de una función simple, medible, no negativa, luego la de una función medible no negativa arbitraria y después la de las funciones medibles reales y complejas.

3.1. Integración de funciones simples, medibles y no negativas

3.1.1. La integral sobre el conjunto completo X

Definición 3.1.1. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\varphi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función simple y medible de expresión canónica

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}.$$

Definimos la integral de φ en X (o sobre X) respecto de la medida μ, y la denotamos por $\int_X \varphi \, d\mu$, mediante

$$\int_X \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Observemos que, como $\varphi \geq 0$, se tiene que $\int_X \varphi \, d\mu \geq 0$ y que $\int_X \varphi \, d\mu$ puede ser igual a $+\infty$.

Para esta integral, usaremos también otras notaciones como las siguientes:

$$\int_X \varphi, \quad \int_X \varphi(x) \, d\mu(x), \quad \int \varphi.$$

Como la definición de la integral depende de la expresión canónica, en estos primeros momentos tenemos que trabajar exclusivamente con la expresión canónica de φ. Para que el desarrollo sea más sencillo, vamos a establecer una proposición.

Proposición 3.1.2. *Sea* $\varphi : X \longrightarrow [0,+\infty)$ *una función simple y medible de expresión*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathcal{X}_{D_j},$$

donde $d_j \geq 0$, $d_j \in \mathbb{R}$, $D_j \in \mathcal{M}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *y* $\bigcup_{j=1}^{l} D_j = X$. *Entonces*

$$\int_X \varphi \; d\mu = \sum_{j=1}^{l} d_j \mu(D_j).$$

Demostración. Sea

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_A$$

la expresión canónica de la función simple. Entonces

$$\int_X \varphi \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Como $X = \bigcup_{j=1}^{l} D_j$, entonces $A_i = \bigcup_{j=1}^{l} (A_i \cap D_j)$ y, por ser la unión disjunta

$$\begin{aligned}\int_X \varphi \; d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu \left(\bigcup_{j=1}^{l} A_i \cap D_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \sum_{j=1}^{l} \mu(A_i \cap D_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} a_i \mu(A_i \cap D_j)\end{aligned}$$

Es claro que $a_i \mu(A_i \cap D_j) = d_j \mu(A_i \cap D_j)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_X \varphi \; d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} a_i \mu(A_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} d_j \mu(A_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(d_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap D_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{l} d_j \mu(D_j).\end{aligned}$$

donde en la penútlima igualdad hemos usado que los conjuntos A_i forman un partición de X. □

Observación 3.1.3. (1) Si $\varphi = c\mathcal{X}_E$, $c \geq 0$, $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_X \varphi \; d\mu = c\mu(E).$$

En efecto, $\varphi = c\mathcal{X}_E + 0\mathcal{X}_{X \setminus E}$ y, en consecuencia, por la proposición anterior

$$\int_X \varphi \; d\mu = c\mu(E) + 0\mu(X \setminus E) = c\mu(E).$$

(2) Si $\varphi = 0$ $(= 0\mathcal{X}_X)$

$$\int_X \varphi \; d\mu = 0.$$

(3) Si $\varphi = 1$ $(= \mathcal{X}_X)$

$$\int_X \varphi \ d\mu = \mu(X).$$

Proposición 3.1.4. *Sean $\varphi, \psi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ simples y medibles. Entonces $\varphi + \psi$ es una función simple, medible y*

$$\int_X (\varphi + \psi) \ d\mu = \int_X \varphi \ d\mu + \int_X \psi \ d\mu.$$

Demostración. Consideremos las expresiones canónicas de φ y ψ,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^{s} b_i \mathcal{X}_{B_j}.$$

Por lo tanto, si $i \neq j$ tenemos que $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$. Además $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ y $\bigcup_{j=1}^{s} B_j = X$. Así,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{s} B_j \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{s} A_i \cap B_j \right) = \bigcup_{i,j=1}^{n,s} A_i \cap B_j,$$

y esta unión es disjunta (es decir, los conjuntos $\{A_i \cap B_j\}_{i,j=1}^{n,s}$ son disjuntos dos a dos). Claramente,

$$\varphi + \psi = \sum_{i,j=1}^{n,s} (a_i + b_j) \mathcal{X}_{A_i \cap B_j}.$$

Por lo tanto, por la proposición anterior

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi + \psi \ d\mu &= \sum_{i,j=1}^{n,s} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} (a_i \mu(A_i \cap B_j) + b_j \mu(A_i \cap B_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \sum_{j=1}^{s} \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{s} b_j \mu(B_j) = \int_X \varphi \ d\mu + \int_X \psi \ d\mu.
\end{aligned}$$

donde, en las útlimas igualdades, hemos usado que μ es una medida. □

Observación 3.1.5. (1) Es obvio que, por inducción, la anterior igualdad se extiende a cualquier número finito de funciones simples medibles.

(2) Supongamos que $E_1, ..., E_n \in \mathcal{M}$ y $c_1, ..., c_n \geq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$, entonces la función $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{E_i}$ es simple aunque, probablemente, la expresión anterior no sea la canónica ni los conjuntos E_i sean una partición de X. Sin embargo, se tiene que

$$\int_X \varphi \ d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{E_i} \ d\mu \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i).$$

En efecto, utilizando la aditividad que acabamos de demostrar y que sabemos que $\int_c \mathcal{X}_E = c\mu(E)$, obtenemos

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{E_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_X c_i \mathcal{X}_{E_i} \ d\mu \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i).$$

Proposición 3.1.6. *Si $\varphi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ es medible y simple y $c \geq 0$ $(c \in \mathbb{R})$, entonces $c\varphi$ es simple, medible y*

$$\int_X c\varphi \ d\mu = c \int_X \varphi \ d\mu.$$

Demostración. Sea $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{X}_{E_i}$. Entonces

$$\int_X c\varphi \ d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^n cc_i \mathcal{X}_{E_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_X cc_i \mathcal{X}_{E_I} \ d\mu \right) = \sum_{i=1}^n cc_i \mu(E_i) =$$
$$= c \left(\sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i) \right) = c \int_X \varphi \ d\mu.$$

□

Proposición 3.1.7. *Sean φ y ψ dos funciones simples medibles no negativas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in X$ (lo escribiremos $\varphi \leq \psi$). Entonces,*

$$\int_X \varphi \ d\mu \leq \int_X \psi \ d\mu.$$

Demostración. Es claro que $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$. Las tres funciones son simples medibles y no negativas. Entonces $\in_X (\psi - \varphi) \ d\mu \geq 0$ y, por lo tanto,

$$\int_X \psi \ d\mu = \int_X \varphi \ d\mu + \int_X (\psi - \varphi) \ d\mu \geq \int_X \varphi \ d\mu.$$

□

3.1.2. Integral sobre un conjunto

Definición 3.1.8. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $A \in \mathcal{M}$ y $\varphi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función simple y medible. Definimos la integral de φ en A (o sobre A) respecto de la medida μ, y la denotamos por $\int_A \varphi \ d\mu$, mediante

$$\int_A \varphi \ d\mu := \int_X \varphi \mathcal{X}_A \ d\mu.$$

Para esta integral, usaremos también otras notaciones como las siguientes:

$$\int_A \varphi, \quad \int_A \varphi(x) \ d\mu(x).$$

Cuando $A = X$, la integral que se acaba de definir coincide con la que ya teníamos.

Claramente, si $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i}$, entonces

$$\varphi \mathcal{X}_A = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i} \mathcal{X}_A = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i \cap A}.$$

Por lo tanto

$$\int_A \varphi \ d\mu = \int_X \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{A_i \cap A} \right) d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_X a_i \mathcal{X}_{A_i \cap A} d\mu \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap A).$$

Observación 3.1.9. Si $\mu(A) = 0$ entonces $\int_A \varphi \ d\mu = 0$. En particular $\int_\emptyset \varphi \ d\mu = 0$.

Proposición 3.1.10. *Sean $\varphi, \psi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ funciones medibles y simples, $c \geq 0$ y $A \in \mathcal{M}$.*

(a) $\int_A (\varphi + \psi)\ d\mu = \int_A \varphi\ d\mu + \int_A \psi\ d\mu$.

(b) $\int_A c\varphi\ d\mu = c \int_A \varphi\ d\mu$.

(c) Si $\varphi(x) \leq \psi(x)$ *para todo* $x \in A$ *entonces* $\int_A \varphi\ d\mu \leq \int_A \psi\ d\mu$.

Demostración. (a)

$$\begin{aligned}\int_A (\varphi + \psi)\ d\mu &= \int_X (\varphi + \psi)\mathcal{X}_A\ d\mu = \int_X (\varphi\mathcal{X}_A + \psi\mathcal{X}_A)\ \ d\mu = \int_X \varphi\mathcal{X}_A\ d\mu + \int_X \psi\mathcal{X}_A\ d\mu \\ &= \int_A \varphi\ d\mu + \int_A \psi\ d\mu.\end{aligned}$$

(b)

$$\int_A c\varphi\ d\mu = \int_X c\varphi\mathcal{X}_A\ d\mu = c\int_X \varphi\mathcal{X}_A\ d\mu = c\int_A c\varphi\ d\mu.$$

(c) Si $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in A$, entonces $\varphi(x)\mathcal{X}_A \leq \psi(x)\mathcal{X}_A$ para todo $x \in X$. Por tanto:

$$\int_A \varphi\ d\mu = \int_X \varphi\mathcal{X}_A\ d\mu \leq \int_X \psi\mathcal{X}_A\ d\mu = \int_A \psi\ d\mu.$$

□

Proposición 3.1.11. *Sea $\varphi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función simple, medible y no negativa. Definamos*

$$\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty) \text{ como } \nu(A) = \int_A \varphi\ d\mu.$$

Entonces, ν es una medida sobre $\mathcal{M}$.

Demostración. En primer lugar observemos que ν está bien definida (téngase en cuenta que $\int_A \varphi\ d\mu$ puede tomar el valor $+\infty$). Para demostrar que ν es una medida, vemos que la primera propiedad

$$\nu(\emptyset) = 0$$

ya está demostrada (observación 3.1.9). Para la aditividad numerable, consideramos la expresión canónica de φ, $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\mathcal{X}_A$. Sea $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{M}$. Entonces, aplicando la definición

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) &= \int_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j} \varphi\ d\mu = \sum_{i=1}^n a_i\mu\left(A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_i \cap E_j)\right) \underset{\{A_i\cap E_j\}_{j=1}^\infty \text{ es disjunta } \forall i\in\mathbb{N}.}{=} \sum_{i=1}^n a_i\left(\sum_{j=1}^\infty \mu(A_i \cap E_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i \cap E_j)\right) = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} \varphi\ d\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(E_j).\end{aligned}$$

□

Las siguientes propiedades de la integral de una función simple son consecuencias inmediatas de que ν es una medida. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\varphi : X \longrightarrow [0, +\infty)$ una función simple y medible.

1. Si $A, B \in \mathcal{M}$ son tales que $A \subset B$, entonces $\int_A \varphi \, d\mu \leq \int_B \varphi \, d\mu$.
2. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión expansiva (o creciente) de elementos de $\mathcal{M}$, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n, entonces
$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} \varphi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \, d\mu.$$
3. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión contractiva (o decreciente) de elementos de $\mathcal{M}$, es decir $A_n \supset A_{n+1}$ para todo n, y $\int_{A_1} \varphi \, d\mu < +\infty$ entonces
$$\int_{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} \varphi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \, d\mu.$$

3.2. Integración de funciones medibles no negativas

Definición 3.2.1. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible, definimos la integral (de Lebesgue) de f en X respecto de μ como
$$\int_X f \, d\mu = \sup H_f$$
donde
$$H_f = \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in X, \ \varphi \text{ simple y medible} \right\}$$
y $\int_X \varphi \, d\mu$ es la integral de φ introducida en la sección anterior.

Observación 3.2.2. (1) Para funciones simples ψ medibles y no negativas tenemos dos definiciones de $\int_X \psi \, d\mu$. Por las propiedades de monotonía de la integral de funciones simple, es claro que ambas definiciones coinciden.

(2) Como en el caso de funciones simples, usaremos otras notaciones para la integral:
$$\int_X f \, d\mu, \ \int_X f(x) \, d\mu(x), \ \int f$$

De la definición se siguen de manera inmediata las propiedades siguientes (las funciones están definidas en X, son medibles y no negativas y los conjuntos son medibles):

1. Si $f \leq g$ en X (es decir, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$), entonces
$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$
2. Si $c \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$, entonces:
$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$$

Teorema 3.2.3 (Teorema de la convergencia desde abajo). *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Supongamos que para todo $x \in X$ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Si $f_n(x) \leq f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$, entonces se tiene que f es medible y que*
$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$
o, en otras palabras,
$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demostración. Observamos, en primer lugar, que f es medible por ser el límite puntual de fuciones medibles. Obviamente, f es no negativa. Por la propiedad inmediata de la integral, obtenemos

$$\int_X f_n \leq \int_X f \quad \textit{para todo } n.$$

Si $\int_X f = 0$ la tesis del teorema es obvia. En consecuencia, supongamos que $\int_X f > 0$. Para ver que

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n,$$

es suficiente demostrar que para todo número positivo $\alpha < \int_X f$ existe un natural N tal que $\alpha < \int_X f_n$ para todo $n \geq N$.

Para probar esta útlima afirmación, observemos que, por la definición de integral de f, existe una función φ simple medible, no negativaa tal que

$$\alpha < \int_X \varphi \;\; y \;\; \varphi(x) \leq f(x) \textit{ cualquiera que seaa } x \in X.$$

Sea $s \in (0,1)$ tal que $\alpha < s\int_X \varphi$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \{x \in X : s\varphi(x) \leq f_k(x) \textit{ para todo } k \geq n\} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in X : s\varphi(x) \leq f_k(x)\}.$$

Los conjuntos E_n son medibles, pues son intersección numerable de conjuntos medibles y además forman una sucesión expansiva, es decir, $E_n \subset E_{n+1}$. Veamos que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea $x \in X$.

1. Si $f(x) = 0$ entonces $\varphi(x) = 0$ y $f_n(x) = 0$ puesto que $\varphi \leq f$ y $f_n \leq f$ en X. Luego $x \in E_n$ para todo n.
2. Si $f(x) = +\infty$, como $s\varphi(x) \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, existe n_0 tal que $f_n(x) > s\varphi(x)$ para todo $n \geq n_0$. Luego $x \in E_n$ para todo $n \geq n_0$.
3. Si $0 < f(x) < +\infty$ se tiene que

$$s\varphi(x) \leq sf(x) < f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Luego, existe n_0 tal que $f_n(x) > s\varphi(x)$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x \in E_n$ para todo $n \geq n_0$.

Una vez sabemos que $E_n \subset E_{n+1}$ y que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, podemos aplicar las propiedades de la integral de funciones simples y obtenemos

$$\alpha < s\int_X \varphi = s\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} \varphi = s\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s\varphi.$$

Por lo tanto, existe un natural N tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\alpha < \int_{E_n} s\varphi = \int_X s\varphi \mathcal{X}_{E_n}.$$

Por la definición de los conjuntos E_n, vemos que $s\varphi(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in E_n$, de donde,

$$s\varphi \mathcal{X}_{E_n} \leq f_n \mathcal{X}_{E_n} \leq f_n.$$

Luego

$$\int_{E_n} s\varphi \leq \int_X f_n.$$

Uinendo las desigualdades anteriores, llegamos a que existe N tal que para todo $n \geq N$

$$\alpha \leq \int_X f_n,$$

como queríamos demostrar. $\square$

Corolario 3.2.4 (Teorema de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente en X, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in$. Entonces, si $f = \lim_{n\to\infty}$ se tiene que*

$$\int_X f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu,$$

o, en otras palabras,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

Demostración. La demostración es inmediata porque, al ser la sucesión monótona creciente, se tiene que $f_n(x) \leq f(x)$ para todo n y todo $x \in X$. □

Observación 3.2.5. El corolario no es válido si la sucesión es monótona decreciente. Por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue y la sucesión $f_n = \frac{1}{n}\mathcal{X}_{(0,+\infty)}$. Es claro que $f_n \geq f_{n+1} \geq 0$, sin embargo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = +\infty \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0.$$

Observación 3.2.6. Dada f medible y no negativa, se sabe que existe una sucesión creciente de funciones simples, medibles y no negativas tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. En consecuencia, por el teorema de la convergencia monótona, podemos permutar el límite con la integral, de manera que:

$$\int_X f \; d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \varphi_n \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n.$$

Proposición 3.2.7 (Aditividad de la integral)**.** *Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ dos funciones medibles. Entonces*

$$\int_X (f+g) \; d\mu = \int_X f \; d\mu + \int_X g \; d\mu.$$

Demostración. Como f y g son medibles, existen dos sucesiones φ_n y ψ_n de funciones simples y medibles tales que $\varphi_n \uparrow f$ y $\psi_n \uparrow g$ (es decir, φ_n y ψ_n son sucesiones monótonas crecientes con límites f y g, respectivamente). Entonces, la sucesión suma $(\varphi_n + \psi_n) \uparrow (f+g)$ en X. Por lo tanto, por el teorema de convergencia monótona y la aditividad de la integral para funciones simples,

$$\int_X (f+g) \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n) \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \; d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n \; d\mu.$$

De nuevo, por el teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \; d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n \; d\mu = \int_X f \; d\mu + \int_X g \; d\mu.$$

□

Observación 3.2.8. La propiedad de aditividad anterior se extiende por inducción a un número finito de sumandos.

Proposición 3.2.9. *Sea $f_n : X \to [0, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es medible, no negativa y*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f_n \; d\mu \right).$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ denota la función $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$.

Demostración. Por definición, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \text{lím}_{N\to\infty} F_N$, donde $F_N = \sum_{n=1}^{N} = f_n$. Es obvio que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es medible, no negativa y $0 \leq F_N \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (es decir, F_n es creciente y converge a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$). Por el teorema de la convergencia monótona y la aditividad de la integral,

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} F_n \; d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X F_n \; d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\int_X f_n \; d\mu\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu.$$

□

Debemos destacar aquí que la última propiedad permite intercambiar sumas infinitas con integrales sin preocuparnos de nada, sólo teniendo en cuenta que las funciones han de ser medibles y no negativas.

3.2.1. La integral sobre subconjuntos medibles

Definición 3.2.10. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Sea $E \in \mathcal{M}$. Definimos la integral (de Lebesgue) de f en E respecto de μ como

$$\int_E f \; d\mu := \int_X f\mathcal{X}_E \; d\mu.$$

Observación 3.2.11. 1. La integral de f sobre subconjuntos medibles E tiene las mismas propiedades que la integral sobre el conjunto completo X.

2. Si $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{M}$, entonces $\int_A f \; d\mu \leq \int_B f \; d\mu$ (ya que $f\mathcal{X}_A \leq f\mathcal{X}_B$).

3. Si $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{M}$, entonces $\int_A f \; d\mu = \int_B f\mathcal{X}_A \; d\mu$ (ya que $f\mathcal{X}_A = f\mathcal{X}_{A\cap B} = f\mathcal{X}_A\mathcal{X}_B$).

Proposición 3.2.12. *Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Si $\mu(E) = 0$ entonces $\int_E f \; d\mu = 0$.*

Demostración. Sea φ una función simple, medible, no negativa y tal que $\varphi \leq f\mathcal{X}_E$. Es claro que $\varphi = \varphi\mathcal{X}_E$ u, como $\mu(E) = 0$,

$$\int_X \varphi \; d\mu = \int_X \varphi\mathcal{X}_E \; d\mu = \int_E \varphi \; d\mu = 0.$$

Luego, por la definición de $\int_X f\mathcal{X}_E \; d\mu$, tenemos que $\int_X f\mathcal{X}_E \; d\mu = 0$ y concluimos que

$$\int_E f \; d\mu = \int_X f\mathcal{X}_E \; d\mu = 0.$$

□

Proposición 3.2.13. *Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una colección numerable de conjuntos disjuntos medibles contenidos en X. Sea $A = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Entonces*

$$\int_A f \; d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{E_j} f \; d\mu\right).$$

Demostración. Por las propiedades de la colección numerable, tenemos que $f\mathcal{X}_A = \sum_{j=1}^{\infty} f\mathcal{X}_{E_j}$. Aplicando la proposición anterior,

$$\int_A f \; d\mu = \int_X f\mathcal{X}_A \; d\mu = \int_X f\mathcal{X}_{\cup_{j=1}^{\infty} E_j} \; d\mu = \int_x \left(f \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{E_j}\right) \; d\mu = \int_x \left(\sum_{j=1}^{\infty} f\mathcal{X}_{E_j}\right) \; d\mu$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_X f\mathcal{X}_{E_j} \; d\mu\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{E_j} f \; d\mu\right).$$

□

Corolario 3.2.14. *Sea* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *una función medible. Definimos* $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ *mediante*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Entonces ν *es una medida sobre la misma* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*.*

Demostración. En primer lugar, es claro que $\nu(A)$ está bien definida. Es claro que $\nu(\emptyset) = 0$ ya que $\mu(\emptyset) = 0$. Por último, la aditividad numerable de ν está contenida en el corolario anteior. □

Observación 3.2.15. La medida del corolario anterior tiene una propiedades importante, si $\mu(A) = 0$ entonces $\nu(A) = 0$. En general, la propiedad recíproca no es cierta.

Definición 3.2.16. Sean $\mu, \nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ dos medidas. Diremos que ν es absolutamente continua respecto de μ si se tiene que $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. En tal caso, escribiremos $\nu \ll \mu$.

Teorema 3.2.17 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Si* $\mu, \nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$*, donde* $\mathcal{M}$ *es una* σ*-álgebra finita y* $\nu \ll \mu$ *entonces existe* f *medible no negativa tal que* $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ *para todo* $A \in \mathcal{M}$*. Si existe otra* g *medible no negativa tal que* $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ *para todo* $A \in \mathcal{M}$*, entonces* $f = g$ *en casi todo punto.*

Observación 3.2.18. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible.

1. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión expansiva de elementos de $\mathcal{M}$, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n, entonces

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

2. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contractiva de elementos de $\mathcal{M}$, es decir, $A_n \supset A_{n+1}$ para todo n, y $\int_{A_1} f \, d\mu < +\infty$ entonces

$$\int_{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Una propiedad interesante de la integral es que $\int_X f$ puede ser nula aunque f no sea nula en X. Por ejemplo, basta tomar $f = \mathcal{X}_F$, con $F \neq \emptyset$ y $\mu(F) = 0$. De esa forma, $f = \mathcal{X}_F$ no es identicamente nula pero su integral es cero.

Proposición 3.2.19. *Sea* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *una función medible. Entonces,* $\int_X f \, d\mu = 0$ *si y solo si* $f = 0$ *en casi todo punto de* X*.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que $\int_X f \, d\mu = 0$. Sea $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Como f es medible, A es un conjunto medible. Nos queda probar que $\mu(A) = 0$. Observemos que, por ser f no negativa, $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Si consideramos los conjuntos $A_n = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ vemos que son medibles y que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad y \quad A_n \subset A_{n+1}.$$

Nótese que si $x \in X$ entonces $\mathcal{X}_{A_n}(x) \leq n f(x)$. Luego

$$\mu(A_n) = \int_X \mathcal{X}_{A_n} \, d\mu \leq \int_X n f \, d\mu = n \int_X f \, d\mu = 0.$$

Por lo tanto, $\mu(A_n) = 0$ para todo n, y consecuentemente, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

$\Longleftarrow$ Supongamos ahora que $f = 0$ en casi todo punto de X, esto es, $\mu(A) = 0$, donde $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Entonces,

$$\int_X f\ d\mu = \int_A f\ d\mu + \int_{X\setminus A} f\ d\mu \underset{\mu(A)=0}{=} \int_{X\setminus A} f\ d\mu = \int_X f\mathcal{X}_{X\setminus A}\ d\mu = 0,$$

donde la útlima igualdad se sigue porque $f\mathcal{X}_{X\setminus A}$ es idénticamente nula puesto que $f(x) = 0$ para todo $x \in X\setminus A$. $\square$

Proposición 3.2.20. *Sean $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ dos funciones medibles tales que $f = g$ en casi todo punto de X. Entonces, $\int_X f\ d\mu = \int_X g\ d\mu$.*

Demostración. Sea $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Por la hipótesis, $\mu(A) = 0$. Por otra parte $f\mathcal{X}_{X\setminus A} = g\mathcal{X}_{X\setminus A}$. Luego, por la aditividad de la integral,

$$\begin{aligned}\int_X f\ d\mu &= \int_A f\ d\mu + \int_{X\setminus A} f\ d\mu \underset{\mu(A)=0}{=} \int_{X\setminus A} f\ d\mu \\ &= \int_{X\setminus A} g\ d\mu \underset{\mu(A)=0}{=} \int_A g\ d\mu + \int_{X\setminus A} g\ d\mu = \int_X g\ d\mu.\end{aligned}$$

$\square$

El hecho de que los conjuntos de medida cero no jueguen ningún papel cuando estamos integrando, permite debilitar las hipótesis de los teoremas. Vamos a mostrar en el siguiente teorema cómo se pueden debilitar las hipótesis del teorema de la convergencia monótona. Ésto mismo se podrá hacer con otros teoremas que iremos estableciendo y demostrando, aunque, en general, no presentaremos las versiones de dichos resultados con las hipótesis debilitadas.

Teorema 3.2.21 (Segunda versión del teorema de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Supongamos que*

1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para casi todo $x \in X$.*
2. *$f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es una función medible y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para casi todo $x \in X$.*

Entonces,

$$\int_X f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\ d\mu,$$

o, en otras palabras,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu.$$

Demostración. Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{x \in X : f_n(x) > f_{n+1}(x)\}$. Sea $F = \{x \in X : f_n(x)$ *no converge hacia* $f(x)\}$. Por la hipótesis, $\mu(F_n) = 0 = \mu(F)$. Luego, si $A = F \cup (\cup_{n=1}^{\infty} F_n)$, tenemos que $\mu(A) = 0$. Observemos que la función $f\mathcal{X}_{X\setminus A}$ y la sucesión $f_n\mathcal{X}_{X\setminus A}$ cumplen las hipótesis del teorema de la convergencia monótona. Aplicando este teorema y que $\mu(A) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X f\ d\mu &= \int_A f\ d\mu + \int_{X\setminus A} f\ d\mu \underset{\mu(A)=0}{=} \int_{X\setminus A} f\ d\mu = \int_X f\mathcal{X}_{X\setminus A}\ d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\mathcal{X}_{X\setminus A}\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\mathcal{X}_{X\setminus A}\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} f_n\ d\mu \underset{\mu(A)=0}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} f_n\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_A f_n\ d\mu + \int_{X\setminus A} f_n\ d\mu\right) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu,\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 3.2.22 (Lema de Fatou). *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles,* $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$. *Entonces*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \ d\mu.$$

Demostración. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Por definición, $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$. Se tiene además que $g_n \leq g_{n+1}$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \ d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \ d\mu.$$

Como $g_n = \inf_{k\geq n} f_n \leq f_k$, $k \geq n$, se sigue que $\int_X f_n \ d\mu \leq \int_X f_k \ d\mu$ para todo $k \geq n$. Luego

$$\int_X g_n \ d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \ d\mu.$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \ d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} \int_X f_k \ d\mu \right) = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \ d\mu.$$

Esta útlima desigualdad junto a la primera cadena de igualdades nos da la conclusión del teorema. □

Proposición 3.2.23. *Sea* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *una función medible tal que* $\int_X f \ d\mu < +\infty$. *Entonces* $f(x) < +\infty$ *para casi todo* $x \in X$, *es decir,* $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$.

Demostración. Vamos a probar el contrarecíproco. Sea $A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$. Supongamos que $\mu(A) > 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, entonces $n\mathcal{X}_A \leq f$. La sucesión $\varphi_n = n\mathcal{X}_A$ es una sucesión de funciones simples, medibles, no negativas y tales que $\varphi_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Entonces

$$\int_X f \ d\mu \geq \int_X \varphi_n \ d\mu = \int_X n\mathcal{X}_A \ d\mu = n\mu(A) \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

De aquí concluimos que $\int_X f \ d\mu = +\infty$, como queríamos probar. □

Observación 3.2.24. Se sigue del resultado anterior que si $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es una función medible tal que $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) > 0$ entonces $\int_X f \ d\mu = +\infty$.

Proposición 3.2.25. *Sea* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *una función medible tal que* $\int_X f \ d\mu < +\infty$. *Entonces el conjunto* $\{x \in X : f(x) > 0\}$ *es* σ*-finito, es decir, es una sucesión numerable de conjuntos de medida finita.*

Demostración. Sean $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$ y $A_n = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Son conjuntos medibles y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Procediendo como en la proposición anterior,

$$\mu(A_n) = \int_X \mathcal{X}_{A_n} \ d\mu \leq \int_X nf\mathcal{X}_{A_n} \ d\mu = n \int_X f\mathcal{X}_{A_n} \ d\mu \leq n \int_X f \ d\mu < +\infty,$$

lo que prueba la proposición. □

Ejemplo 3.2.26. Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$, donde δ_a es la delta de Dirac en un punto $a \in X$. Como sabemos, todas las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son medibles. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$,

$$\int_X f \ d\delta_a = \int_{\{a\}\cup(X\setminus\{a\})} f \ d\delta_a = \int_{\{a\}} f \ d\delta_a + \int_{X\setminus\{a\}} f \ d\delta_a \underset{\delta_a(X\setminus\{a\})=0}{=} \int_{\{a\}} f \ d\delta_a = \int_X f\mathcal{X}_{\{a\}} \ d\delta_a,$$

Nótese que,

$$(f\mathcal{X}_{\{a\}})(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f(a) & si & x = a \\ 0 & si & x \not= a \end{array} \right. = f(a)\mathcal{X}_{\{a\}}(x).$$

Entonces,

$$\int_X f\mathcal{X}_{\{a\}} \; d\delta_a = \int_X f(a)\mathcal{X}_{\{a\}} \; d\delta_a = f(a)\delta_a(\{a\}) = f(a).$$

Por tanto,

$$\int_X f \; d\delta_a = f(a).$$

Ejemplo 3.2.27. Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida contadora. Como sabemos, las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ son las sucesiones de números reales ($a_n = f(n)$). Toda sucesión es una función medible. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f \; d\mu &= \int_{\cup_{n=1}^{\infty}\{n\}} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f\mathcal{X}_{\{n\}} \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(n)\mathcal{X}_{\{n\}} \; d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\mu(\{n\}) \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Así, la integral en este espacio coincide con la suma de la sucesión. Tomemos ahora $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una biyección. Razonando de forma análoga,

$$\int_{\mathbb{N}} f \; d\mu = \int_{\cup_{n=1}^{\infty}\{\sigma(n)\}} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma(n))\mu(\{\sigma(n)\}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

sea cual sea la biyección σ.

Ejemplo 3.2.28. Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, donde μ es la medida contadora. Sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ (que siempre es medible en este espacio). Entonces:

$$\int_X f \; d\mu = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) : F \subset X, F \; finito \right\} = \alpha$$

Si $F = \emptyset$ entonces $\sum_{x\in F} f(x) = 0$.

1. Veamos que $\alpha \leq \int_X f \; d\mu$. Si $F = \emptyset$ entonces $\sum_{x\in F} f(x) = 0 \leq \int_X f \; d\mu$. Supongamos que $F \subset X$ y que $F = \{x_1, ..., x_n\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{x\in F} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underset{\mu(\{x_i\})=1}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_X f(x_i)\mathcal{X}_{\{x_i\}} \; d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathcal{X}_{\{x_i\}} \; d\mu \underset{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathcal{X}_{\{x_i\}} \leq f}{\leq} \int_X f \; d\mu. \end{aligned}$$

   Por tanto, $\alpha \leq \int_X f \; d\mu$.

2. Veamos que $\int_X f\ d\mu \leq \alpha$. Si $\alpha = +\infty$, entonces $\int_X f\ d\mu = +\infty$. Supongamos que $\alpha < +\infty$. Sean $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$ y $A_n = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Son conjuntos medibles y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Veamos que A_n es finito. Sea $F \subset A_n$ con F finito, entonces,
$$\frac{1}{n}\#F < \sum_{x \in F} f(x) \leq \alpha < +\infty.$$
Por tanto $\#F \leq \alpha n$ para todo conjunto finito $F \subset A_n$. Luego A_n es finito con a lo sumo αn elementos

Supongamos que A es finito, es decir, $A = \{a_1, ..., a_l\}$, entonces,
$$\begin{aligned}\int_X f\ d\mu &= \int_A f\ d\mu + \int_{X\setminus A} f\ d\mu \underset{f(x)=0\ \forall x \in X\setminus A}{=} \int_A f\ d\mu = \int_{\cup_{i=1}^{l}\{a_i\}} f\ d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{l} \int_{\{a_i\}} f\ d\mu = \sum_{i=1}^{l} f(a_i) \leq \alpha.\end{aligned}$$
Supongamos que A es infinito numerable, es decir, $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, entonces,
$$\begin{aligned}\int_X f\ d\mu &= \int_A f\ d\mu + \int_{X\setminus A} f\ d\mu \underset{f(x)=0\ \forall x \in X\setminus A}{=} \int_A f\ d\mu = \int_{\cup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}} f\ d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\{a_i\}} f\ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(a_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(a_i) \leq \lim_{N\to\infty} \alpha \leq \alpha.\end{aligned}$$

Por tanto $\int_X f\ d\mu \leq \alpha$. Uniendo 1) y 2) tenemos que $\int_X f\ d\mu = \alpha$.

Ejemplo 3.2.29. Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida contadora. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ (que siempre es medible en este espacio), nótese que f es una sucesión, luego $f(n, m) = a_{n,m}$. Aplicando el ejercicio anterior:
$$\sum_{(n,.m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{n,m} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m) = \int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\ d\mu = \sup\left\{\sum_{(n,.m)\in F} a_{n,m} : F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}, F\ finito\right\}$$
Entonces,

- Calculemos $\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\ d\mu$,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\ d\mu &= \int_{\cup_{n=1}^{\infty}(\{n\}\times\mathbb{N})} f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}\times\mathbb{N}} f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\cup_{m=1}^{\infty}(\{n\}\times\{m\})} f\ d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\{n\}\times\{m\}} f\ d\mu\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m)\mu(\{n\}\times\{m\})\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} f(n,m)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right).\end{aligned}$$
- De forma completamente análoga,
$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\ d\mu = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right).$$
- Dada $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ biyección,
$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\ d\mu = \int_{\cup_{n=1}^{\infty}\{\sigma(n)\}} f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\sigma(n)\}} f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Ejemplo 3.2.30. Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida contadora. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos $f_n(m) = a_{n.m} \geq 0$. Supongamos además que $f_n(m) \leq f_{n+1}(m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir, $a_{n,m} \leq a_{n+1,m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_n(m) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu,$$

Aplicando el teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}.$$

Por tanto, dada $\{a_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, $a_{n,m} \geq 0$ y $a_{n,m} \leq a_{n+1,m}$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}.$$

3.2.2. Integral de una función medible no negativa definida sobre un subconjunto

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. En ocasiones tendremos una f unción $f : E \longrightarrow [0, +\infty]$ definida sobre un subconjunto medible E pero, en principio, no definida en todo X. Podemos, es este caso, definir la integral de F en E de la forma siguiente: sea F una función medible definida en X y tal que la restricción de F a E coincide con f; por ejemplo,

$$F(X) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in E \\ 0 & si \quad x \notin E \end{cases}$$

Definimos la integral de f sobre E como la integral de F restringida a E

$$\int_E f \, d\mu := \int_E F \, d\mu = \int_X F\mathcal{X}_E \, d\mu.$$

Esta definición es independiente de la extensión de F que consideremos.

3.2.3. Transformaciones que conservan la medida

Definición 3.2.31. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-medible (esto es, si $E \in \mathcal{N}$, entonces $T^{-1}(E) \in \mathcal{M}$). Decimos que T conserva las medidas si

$$\nu(E) = \mu(T^{-1}(E)) \quad \textit{para todo } E \in \mathcal{N}.$$

Proposición 3.2.32. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-medible que conserva las medidas. Si $g : Y \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible entonces*

$$\int_Y g \, d\nu = \int_X g \circ T \, d\mu.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que g es una función característica, es decir, $g = \mathcal{X}_E$, $E \in \mathcal{N}$. Entonces

$$\int_Y g \, d\nu = \int_Y \mathcal{X}_E \, d\nu = \nu(E).$$

Para el término de la derecha observamos que

$$\begin{aligned} g \circ T(x) = 1 &\Leftrightarrow \mathcal{X}_E \circ T(x) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{X}_E(T(x)) = 1 \Leftrightarrow T(x) \in E \Leftrightarrow x \in T^{-1}(E) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{X}_{T^{-1}(E)}(x) = 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_X g \circ T \, d\mu = \int_X \mathcal{X}_{T^{-1}(E)} \, d\mu = \mu(T^{-1}(E)),$$

como T conserva las medidas, entonces

$$\int_Y g \, d\nu = \nu(E) = \mu(T^{-1}(E)) = \int_X g \circ T \, d\mu.$$

Sea ahora $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}$, $a_i \geq 0$, $E_i \in \mathcal{N}$ una función simple medible y no negativa. Entonces por la linealidad de la integral (la aplicamos dos veces) y por lo que acabamos de demostrar para funciones características,

$$\begin{aligned} \int_X g \circ T \, d\mu &= \int_X \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} \circ T \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \int_X \mathcal{X}_{E_i} \circ T \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_Y \mathcal{X}_{E_i} \, d\nu = \int_Y \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} \, d\nu = \int_Y g \, d\nu. \end{aligned}$$

Finalmente, sea g una función medible no negativa. Sabemos que existe una sucesión φ_n de funciones simples y medibles tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow g$. Entonces $0 \leq \varphi \circ T \uparrow g \circ T$. Por el teorema de la convergencia monótona (lo aplicamos dos veces) y por lo ya demsotrado para funciones simples,

$$\begin{aligned} \int_X g \circ T \, d\mu &= \int_X \varphi_n \circ T \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \circ T \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_Y \varphi_n \, d\nu = \int_Y \lim_{n\to\infty} \varphi_n \, d\nu = \int_Y g \, d\nu. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.2.33 (Variables aleatorias: Ley de probabilidad)**.** Supongamos que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad y que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria. Su ley de probabilidad es la medida definida sobre la σ-álgeba de borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dada por

$$P_X : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow [0, +\infty], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Es claro, por al definición de P_X, que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}R$ conserva las medidas, considerando en Ω la medida P y en $\mathbb{R}$ la medida P_X. Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible-Borel, aplicando la proposición anterior,

$$\int_\Omega g \circ X(\omega) \, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \, dP_X(t).$$

Si tomamos, por ejemplo, $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por $g(t) = |t|$, entonces,

$$\int_\Omega |X(\omega)| \, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} |t| \, dP_X(t).$$

3.2.4. La intergal en espacios de medida con densidad

Definición 3.2.34. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Sabemos que la aplicación $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$,

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu,$$

es una nueva medida sobre $\mathcal{M}$. En esta situación decimos que f es la densidad de μ respecto de ν.

Teorema 3.2.35. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea la medida ν con función de densidad $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Si $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible, entonces*

$$\int_X g \; d\nu = \int_X gf \; d\mu.$$

Demostración. Supongamos primero que $g = \mathcal{X}_E$, donde E es un conjunto medible. Aplicando la definición de ν, tenemos que

$$\int_X g \; d\nu = \int_X \mathcal{X}_E \; d\nu = \nu(E) = \int_E f \; d\mu = \int_X \mathcal{X}_E f \; d\mu = \int_X gf \; d\mu.$$

Ahora, supongamos que g es una función simple medible y no negativa. Sea $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}$. Aplicando lo ya demostrado para funciones características,

$$\begin{aligned} \int_X g \; d\nu &= \int_X \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} \; d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_X \mathcal{X}_{E_i} \; d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \int_X \mathcal{X}_{E_i} f \; d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i} f \; d\mu = \int_X gf \; d\mu. \end{aligned}$$

Finalmente, sea g una función medible no negativa. Sabemos que existe una sucesión φ_n de funciones simples y medibles tal que $0 \leq \varphi_n \uparrow g$. Entonces $0 \leq \varphi f \uparrow gf$. Por el teorema de la convergencia monótona (lo aplicamos dos veces) y por lo ya demsotrado para funciones simples,

$$\begin{aligned} \int_X g \; d\nu &= \int_X \lim_{n\to\infty} \varphi_n \; d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \; d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n f \; d\mu \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \varphi_n f \; d\mu = \int_X gf \; d\mu. \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.36. La medida ν con función de densidad f posee la propiedad siguiente: si $\mu(E) = 0$ entonces $\nu(E) = 0$. Si dos medidas cualesquieras están relaciones de esa forma, se dice que ν es absolutamente continua respecto de μ y se escibe $\nu \ll \mu$.

Teorema 3.2.37 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sean μ y ν dos medidas σ-finitas sobre el espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Si ν es absolutamente continua respecto de μ entonces existe una función medible f no negativa tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \; d\mu,$$

para todo $E \in \mathcal{M}$. Si g es otra función medible no negativa que satisface la propiedad anterior, entonces $f = g$ en casi todo punto (respecto de μ).

Ejemplo 3.2.38 (Variable aleatoria absolutamente continua)**.** Supongamos que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad y que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria. Decimos que X es absolutamente continua si existe una función f definida sobre $\mathbb{R}$, medible-Borel y no negativa, tal que la ley de probabilidad P_X satisface que

$$P_X(B) = \int_B f(t) \; dm(t)$$

donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ (normalmente escribiremos dt en lugar de $dm(t)$) y por lo tanto f es la dessidad de P_X respecto de la medida de Lebesgue. Es claro, por la definición de P_X, que

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ conserva las medidas, considerando en Ω la medida P y en $\mathbb{R}$ la medida de Lebesgue. Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible-Borel, los resultados anteriores nos dicen que

$$\int_\Omega g \circ X(\omega)\ dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(t)\ dP_X(t).$$

Si X es absolutamente continua, como f es la densidad de P_X respecto de la medida de Lebesgue m, resulta que

$$\int_\Omega g(X(\omega))\ dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(t)\ dP_X(t) = \int_\mathbb{R} g(t)f(t)\ dt.$$

Ejemplo 3.2.39 (Variable aleatoria discreta)**.** Supongamos que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad y que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria. Decimos que X es una variable aleatoria discreta si existe $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ finito o infinito numerable tal que $P_X(A) = 1$. En este caso, el conjunto

$$R_X = \{t \in \mathbb{R} : P_X(t) > 0\}$$

es finito o infinito numerable (pongamos que $R_X = \{t_i : i \in \mathbb{N}\}$). Obsérvese que $R_X \subset A$ y $P_X(A \backslash R_X) = 0$. Es claro que

$$P_X(B) = P_X(A \cap R_x) = P_X(B \cap R_X).$$

Sea $p_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $p_X(t) = P_X(\{t\})$. Si $B \in \mathbb{B}_\mathbb{R}$ entonces

$$P_X(B) = P_X(B \cap R_X) = \sum_{t \in B \cap R_x} p_x(t) = \sum_{i : t_i \in B} p_X(t_i).$$

Si en $\mathbb{R}$ consideramos la medida contadora ν, la suma anterior coincide con la integral de p_X respecto de la medida contadora, es decir,

$$\int_B p_X(t)\ d\nu = \int_{\cup_{i\in\mathbb{N}}\{t_i\}} p_X(t)\ d\nu = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_X(t_i) = \sum_{i:t_i \in B} p_X(t_i) = P_X(B).$$

Dicho en otras palabras, p_X es la densidad de P_X respecto de la medida contadora. Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow [', +\infty]$ es medible-Borel, los resultados anteriores nos dicen que

$$\int_\Omega g \circ X(\omega)\ dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(t)\ dP_X(t) = \int_\mathbb{R} g(t)p_X(t)\ d\nu = \sum_i g(t_i)p_X(t_i).$$

3.3. Integración de funciones medibles reales

3.3.1. La integral de una función medible con valores en $\overline{\mathbb{R}}$

Definición 3.3.1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea E un subcojunto medible. Sea $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y sea f^+ y f^- su parte positiva y su parte negativa, respectivamente

(i) Si $\int_E f^+\ d\mu < +\infty$ o $\int_E f^-\ d\mu < +\infty$ decimos que f es integrable en sentido amplio en E y definimos la integral de f en E, como

$$\int_E f\ d\mu := \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu.$$

(ii) Si $\int_E f^+\ d\mu < +\infty$ y $\int_E f^-\ d\mu < +\infty$ decimos que f es integrable en E. La integral de f en E, ya definida en el apartado anterior, es igual a $\int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu$ y es un número real.

Observación 3.3.2. Las funciones medibles no negativas son integrables en el sentido amplio y como $f^+ = f$ y $f^- = 0$, la integral que acabamos de definir coincide con la que ya teníamos para funciones medibles no negativas.

Observación 3.3.3. (a) Si $\mu(E) = 0$ entonces $\int_E f\ d\mu = 0$.

(b) Si $f = g$ en casi toodo punto de E, es claro que f es integral (en sentido amplio) si y solo si g lo es y, en este caso, las integrales sobre E coinciden. Basta ver que si $f = g$ en casi todo punto de E entonces $f^+ = g^+$ y $f^- = g^-$ en casi todo punto de E.

Proposición 3.3.4. *f es integrable sobre E si y solo si $\int_E |f|\ d\mu < +\infty$.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que f es integrable sobre E. Nótese que $|f| = f^+ + f^-$. Por consiguiente,

$$\int_E |f|\ d\mu = \int_E f^+\ d\mu + \int_E f^-\ d\mu.$$

Como f es integrable sobre E, se tiene que $\int_E f^+\ d\mu < +\infty$ y $\int_E f^-\ d\mu < +\infty$, por lo que su suma es finita. Así $\int_E |f|\ d\mu < +\infty$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\int_E |f|\ d\mu < +\infty$. Como $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$ se tiene que

$$\int_E f^+\ d\mu \leq \int_E |f|\ d\mu < +\infty \quad y \quad \int_E f^-\ d\mu \leq \int_E |f|\ d\mu < +\infty$$

Luego, f es integrable sobre E. □

Proposición 3.3.5. *Sea $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable en E. Entonces*

$$\left|\int_E f\ d\mu\right| \leq \int_E |f|\ d\mu.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $f = f^+ - f^-$ y que $|f| = f^+ + f^-$,

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\ d\mu\right| &= \left|\int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu\right| \\ &\leq \int_E f^+\ d\mu + \int_E f^-\ d\mu = \int_E |f|\ d\mu.\end{aligned}$$

□

Observación 3.3.6. 1. Si f es integrable en E entonces $|f(x)| < +\infty$ para casi toodo $x \in E$.

2. Si f es integrable en E y $A \subset E$ es un conjunto medible, entonces f es integrable en A. Veamoslo,

$$\int_A |f|\ d\mu \leq \int_E |f|\ d\mu < +\infty,$$

por tanto, f es integrable en A.

3. Sean $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable en E y tales que $f \leq g$ en E. Entonces, $\int_E f\ d\mu \leq \int_E g\ d\mu$. Veamoslo,

$$\begin{aligned} f^+ = \max\{f, 0\} \leq \max\{g, 0\} = g^+ &\Longrightarrow \int_E f^+\ d\mu \leq \int_E g^+\ d\mu \\ f^- = \max\{-f, 0\} \leq \max\{-g, 0\} = g^- &\Longrightarrow \int_E g^-\ d\mu \leq \int_E f^-\ d\mu \\ &\Longleftrightarrow -\int_E f^-\ d\mu \leq -\int_E g^-\ d\mu,\end{aligned}$$

y suumando ambas desigualdades

$$\int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu \leq \int_E g^+\ d\mu - \int_E g^-\ d\mu \Longleftrightarrow \int_E f\ d\mu \leq \int_E g\ d\mu.$$

4. Sean $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tales que $f \leq g$ en E. Si g es integrable en E entonces f es integrable en senntido amplio en E y $\int_E f\ d\mu \leq \int_E g\ d\mu$. Veamoslo,

$$f^+ = \text{máx}\{f, 0\} \leq \text{máx}\{g, 0\} = g^+ < \infty,$$

lo que nos dice que f es integrable en sentido amplio.

5. Sean $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tales que $f \leq g$ en E. Si f es integrable en E entonces g es integrable en senntido amplio en E y $\int_E f\ d\mu \leq \int_E g\ d\mu$. Veamoslo,

$$g^- = \text{máx}\{-g, 0\} \leq \text{máx}\{-f, 0\} = f^- < +\infty,$$

lo que nos dice que g es integrable en sentido amplio.

6. Sea $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable en E.

   (a) Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles tal que $E_n \subset E_{n+1}$ y $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces

$$\int_E f\ d\mu = \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

   Veamoslo. Como $f = f^+ - f^-$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E f\ d\mu &= \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu = \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f^+\ d\mu - \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f^-\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+\ d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^-\ d\mu.\end{aligned}$$

   Como f es integrable, estas últimas integrales son finitas, tenemos que la diferencia de límites es el límite de la diferencia, es decir,

$$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{E_n} f^+\ d\mu - \int_{E_n} f^-\ d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

   (b) Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tal que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces

$$\int_E f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

   Veamoslo. Como $f = f^+ - f^-$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E f\ d\mu &= \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu = \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f^+\ d\mu - \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f^-\ d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+\ d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^-\ d\mu.\end{aligned}$$

   Como f es integrable, cada integral que consideramos en ambos sumatorios es finita, podemos unir los dos sumatorios en uno solo, es decir,

$$\int_E f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f^+\ d\mu - \int_{E_n} f^-\ d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

7. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles tal que $E_n \supset E_{n+1}$ y sea f una función integrable en E_1. Entonces f es integrable en cada E_n y

$$\int_E f\ d\mu = \int_{\cap_{n=1}^{\infty} E_n} f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

Veamoslo. Como $f = f^+ - f^-$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E f\ d\mu &= \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu = \int_{\cap_{n=1}^\infty E_n} f^+\ d\mu - \int_{\cap_{n=1}^\infty E_n} f^-\ d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+\ d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^-\ d\mu.\end{aligned}$$

Como f es integrable en cada E_n por ser integrable en E_1, tenemos que la diferencia de límites es el límite de la diferencia, es decir,

$$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{E_n} f^+\ d\mu - \int_{E_n} f^-\ d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

3.3.2. El espacio vectorial de las funciones integrables

Proposición 3.3.7. *Sean $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en E y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en E y*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu + \beta \int_E g\ d\mu.$$

Demostración. Sabemos que $\alpha f + \beta g$ es medible y

$$0 \leq |\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|.$$

Por las propiedades de la integral de funciones medibles no negativas

$$0 \leq \int_E |\alpha f + \beta g|\ d\mu \leq |\alpha| \int_E |f|\ d\mu + |\beta| \int_E |g|\ d\mu < +\infty.$$

Luego $\alpha f + \beta g$ es integrable en E. Para demostrar la linealidad de la integral, es suficiente probar que $\int_E f + g\ d\mu = \int_E f\ d\mu + \int_E g\ d\mu$ y que $\int_E \alpha f\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu$.

Sea $h = f + g$. Entonces

$$h^+ - h^- = f^+ - f^+ + g^+ - g^-.$$

Luego

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Integrando en E y usando la linealidad de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E h^+\ d\mu + \int_E f^-\ d\mu + \int_E g^-\ d\mu = \int_E h^-\ d\mu + \int_E f^+\ d\mu + \int_E g^+\ d\mu.$$

Como todos los términos son números reales (porque las funciones son integrables),

$$\int_E h^+\ d\mu - \int_E h^-\ d\mu = \int_E f^+\ d\mu - \int_E f^-\ d\mu + \int_E g^+\ d\mu - \int_E g^-\ d\mu,$$

o, por definición,

$$\int_E h\ d\mu = \int_E f + g\ d\mu = \int_E f\ d\mu + \int_E g\ d\mu.$$

Demostremos ahora que $\int_E \alpha f\ d\mu = \alpha \int_E f\ d\mu$. Para $\alpha = 0$ es obvio. Supongamos que $\alpha > 0$. Entonces

$$(\alpha f)^+ = \alpha(f^+), \quad (\alpha f)^- = \alpha(f^-).$$

Luego, usando la linealidad de la integral de funciones no negativas,

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f\, d\mu &= \int_E (\alpha f)^+\, d\mu - \int_E (\alpha f)^-\, d\mu = \int_E \alpha(f^+)\, d\mu - \int_E \alpha(f^-)\, d\mu \\ &= \alpha \int_E f^+\, d\mu - \alpha \int_E f^-\, d\mu = \alpha \left(\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu \right) = \alpha \int_E f\, d\mu.\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$, solo hay que tener en cuenta que

$$(\alpha f)^+ = -\alpha(f^+), \quad (\alpha f)^- = -\alpha(f^-),$$

y procedemos de la misma forma. □

Observación 3.3.8. Denotemos por $\mathcal{L}^1(E)$ al conjunto de las funciones integrables en E con valores en $\mathbb{R}$. Como hemos probado, $\mathcal{L}^1(E)$ es un espacio vectorial y la integral sobre E es una aplicación lineal sobre dicho espacio.

Por otra parte, si consideramos en $\mathcal{L}^1(E)$ la "norma"

$$\|f\|_1 = \int_E |f|\, d\mu$$

resulta que cumple las propiedades de norma salvo que $\|f\|_1 = 0$ no implica que $f = 0$ (implica que $f = 0$ en casi todo punto de E). Ahora bien, si consideramos en $\mathcal{L}^1(E)$ la relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si } f = g \text{ en casi todo punto de } E,$$

el espacio cociente $L^1(E) = (\mathcal{L}^1(E)/\sim)$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar naturales. Si $[f]$ es una clase de equivalencia de representante f entonces

$$\|f\|_1 = \int_E |f|\, d\mu$$

es independiente del representante y resulta ser una norma. Así $L^1(E)$ es un espacio normado. Más aún es de Banach. En el lenguaje habitual no se habla de clases $[f]$ sino de los representantes. Por ejemplo, decir que la sucesión f_n converge a f en la norma de $L^1(E)$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

Se demuestra que si f_n converge hacia f en $L^1(E)$, entonces existe una subsucesión f_{n_k} que converge hacia f en casi todo punto de E.

3.3.3. El teorema de la convergencia dominada

Teorema 3.3.9 (El Teorema de la Convergencia Dominada)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de E en $\overline{\mathbb{R}}$. Sea g una función medible no negativa definida sobre E. Supongamos que*

(i) *Existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in E$.*

(ii) *$|f_n(x)| \le g(x)$ para todo $x \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *g es integrable en E.*

Entonces

(a) *f_n es integrable en E cualquiera que sea n, f es integrable en E y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$$

(es decir, f_n converge hacia f en $L^1(E)$).

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \; d\mu = \int_E f \; d\mu.$$

Demostración. En primer lugar, haremos la demostración suponiendo que todas las funciones toman valores en $\mathbb{R}$.

La función f es medible por ser el límite puntual de funciones medibles. Como $|f_(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in E$ y, consecuentemente, f es integrable en E ya que

$$\int_E |f| \; d\mu \leq \int_E g \; d\mu < +\infty.$$

Por la misma razón, f_n es integrable en E cualquiera que sea n. Por otra parte,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq g(x) + g(x) = 2g(x)$$

para todo $x \in E$. En consecuencia,

$$0 \leq h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|$$

para todo $x \in E$. Además

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 2g(x).$$

Por el teorema de la convergencia desde abajo,

$$\begin{aligned}\int_E 2g(x) \; d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} h_n(x) \; d\mu &= \int_E \lim_{n\to\infty} (2g(x) - |f_n(x) - f(x)|) \; d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E (2g(x) - |f_n(x) - f(x)|) \; d\mu\end{aligned}$$

Como $\int_E 2g(x) \; d\mu < +\infty$, se deduce que

$$\int_E 2g(x) \; d\mu = \int_E 2g(x) \; d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| \; d\mu,$$

de lo que concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| \; d\mu = 0,$$

por lo que (a) queda probado.

Para probar (b), observamos

$$\left| \int_E f_n \; d\mu - \int_E f \; d\mu \right| = \left| \int_E (f_n - f) \; d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| \; d\mu.$$

Por (a), el límite del término de la derecha es 0. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_E f_n \; d\mu - \int_E f \; d\mu \right| = 0$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \; d\mu = \int_E f \; d\mu.$$

Supongamos ahora que las funciones pueden tomar los valores $-\infty$ y $+\infty$. Puesto que g es integrable, sabemos que $0 \leq g(x) < +\infty$ para casi todo x. Sea

$$A = \{x \in E : g(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\mu(A) = 0$. Además, las funciones f_n, f y g toman valores reales en $B = E \backslash A$ puesto que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad |f(x)| \leq g(x) \quad y \ 0 \leq g(x) < +\infty$$

para todo $x \in B$. Por lo tanto, en el conjunto B estamos en las condiciones del caso ya probado. Por lo tanto,

1. f_n es integrable en B cualquiera que sea n, f es intregrable en B y

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |f_n - f| \, d\mu = 0$$

(es decir, f_n converge hacia f en $L^1(B)$).

2.

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n \, d\mu = \int_B f \, d\mu.$$

Como $\mu(A) = 0$, las afirmaciones anteriores son ciertas también si integramos en E. □

Observación 3.3.10. Las conclusiones del teorema siguen siendo ciertas si las hipótesis (i) y (ii) se cambian por

(i) Existe $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para casi todo $x \in E$.

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in E$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 3.3.11. *Supongamos que $\mu(E) < +\infty$. Sea $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables en E que converge uniformemente hacia f. Entonces f es integrable en E y*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Demostración. Como f_n converge uniformemente hacia f tenemos que la sucesión

$$\alpha_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n < 1$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < 1$ para todo $n \geq n_0$, luego,

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

para todo $x \in E$ y para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + |f_{n_0}(x)|$$

para todo $x \in E$. Sea $g(x) = 1 + |f_{n_0}(x)|$ para todo $x \in E$. Como $\mu(E) < +\infty$ y g es constante en E se tiene que g es integrable en E, aplicando el teorema de la convergencia dominada se tiene que

(a) f_n es integrable en E cualquiera que sea n, f es integrable en E y

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$$

(es decir, f_n converge hacia f en $L^1(E)$).

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

□

Corolario 3.3.12. *Supongamos que $\mu(E) < +\infty$. Sea $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles en E que converge en casi todo punto hacia f. Supongamos también que existe un número real positivo M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y casi todo $x \in E$. Entonces las funciones f_n y f son integrables en E y*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Definición 3.3.13. Supongamos que $A, E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$ y que $\mu(E \backslash A) = 0$.

(i) Decimos que $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ está definida para casi todo punto de E (o en casi todo punto de E).

(ii) Diremos que f es integrable en E si f es integrable en A y definiremos

$$\int_E f := \int_A f$$

Obsérvese que f es integrable en E si y solo si existe una función $F : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable en E tal que $F|_A = f$.

Corolario 3.3.14. *Sea f_n una sucesión de funciones medibles de E en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Entonces

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente para casi todo $x \in E$.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para casi todo $x \in E$.

(c) La función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ está definida para casi todo $x \in E$, es medible, integrable en E y

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Demostración. Sea $g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. La función g es medible por ser límite de una sucesión (la sucesión de sumas parciales) de funciones medibles, g es no negativa y

$$\int_E |g| \, d\mu = \int_E g \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Así, g es integrable en E y, por lo tanto, g es finita en casi todo punto de E, esto es, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente para casi todo $x \in E$, lo que prueba (a).

Sea

$$A = \{x \in E : \textit{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \textit{ converge}\}.$$

El conjunto A es medible, pues es el conjunto donde una sucesión (la sucesión de sumas parciales) converge. Si

$$B = \{x \in E : \textit{la serie} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \textit{ converge absolutamente}\},$$

entoncecs $B \subset A$, luego $E \backslash A \subset E \backslash B$ y como $\mu(E \backslash B) = 0$ obtenemos que $\mu(E \backslash A)$, lo que prueba (b).

Sea $F_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, definida en A. Obviamente, F_N es medible en A. La función f, definida en A, es medible por ser límite en A de F_N. Además

$$|F_N| = |\sum_{n=1}^{N} f_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |f_n| \leq g.$$

Como g es integrable en A, por el teorema de la convergencia dominada, obtenemos que f es integrable en A (y, por lo tanto, en E) y

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu \underset{\mu(E\backslash A)=0}{=} \int_A f \, d\mu &= \int_A \lim_{N\to\infty} F_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_A F_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_A f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\mu \underset{\mu(E\backslash A)=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

□

3.4. La integral de Riemann y su relación con la integral de Lebesgue

Teorema 3.4.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$.*

(a) Si f es integrable Riemann en $[a, b]$ entonces f es integrable-Lebesgue en $[a, b]$ y las integrales en el sentido de Riemann y en el sentido de Lebesgue coinciden.

(b) f es integrable Riemann en $[a, b]$ si y solo si el conjunto de las discontinuidades de f tiene medida cero.

Ejemplo 3.4.2. 1. Cálculo en el sentido de Lebesgue de la función $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Lo primero que observamos es que, como un punto tiene medida cero, es lo mismo integrar en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ que el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Como f es intgrable Riemann en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces es integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden. Por lo tanto,

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2})} \cos(x) \, dx = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1.$$

2. Cálculo de la integral en el sentido de Lebesgue de la función $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

Observemos que f es continua y, por consiguiente, medible en $[0, +\infty)$. Por otra parte $[0, +\infty) = \cup_{n=1}^{\infty} [0, n]$. Como $[0, n] \subset [0, n + 1]$ y f es no negativa, apalicando que la integral es una medida, tenemos que

$$\int_{[0,+\infty)} e^x \, dx = \int_{\cup_{n=1}^{\infty}[0,n]} e^x \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-x} \, dx.$$

Puesto que f es integrable Riemann en el intervalo $[0,n]$ tenemos

$$\int_{[0,n]} e^{-x}\ dx = \int_0^n e^{-x}\ dx = -e^{-x}]_0^n = 1 - e^{-n}.$$

Por consiguiente

$$\int_{[0,+\infty)} e^{x}\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-x}\ dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1.$$

3. Cálculo de la integral en el sentido de Lebesgue de la función $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ en los intervalos $[a,+\infty)$ y $(0,a)$, donde $a > 0$.

   Como antes f es medible por ser continua y no negativa. Como $[a,+\infty) = \cup_{n\in\mathbb{N},n>a}[a,n]$ y $[a,n] \subset [a,n+1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{[a,+\infty)} \frac{1}{x^\alpha}\ dx &= \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n \frac{1}{x^\alpha}\ dx \\ &= \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) & si \quad \alpha \neq 1 \\ \lim_{n\to\infty} (\log(n) - \log(a)) & si \quad \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & si \quad \alpha > 1 \\ +\infty & si \quad \alpha \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

   Por consiguiente,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > 1.$$

   De la misma forma puede verse que

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\ dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha \leq 1.$$

   Para ellos escribimos $(0,a) = \cup_{n\in\mathbb{N},n>1/a}\left[\frac{1}{n},a\right)$ y procedemos de manera similar.

4. Del resultado anterior se sigue que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = +\infty$$

   para todo α.

5. Se obtienen resultados análogos cuando se integra

$$\frac{1}{(x-c)^\alpha}, \quad c \in \mathbb{R},$$

   en los intervalos (c,a) y $(a,+\infty)$ con $a > c$.

6. Se obtienen resultados análogos cuando se integra

$$\frac{1}{(c-x)^\alpha}, \quad c \in \mathbb{R},$$

   en los intervalos (a,c) y $(-\infty,a)$ con $a < c$.

7. Calculemos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx.$$

Para ello, vemos que la la función es medible en $\mathbb{R}$ por ser continua y no negativa. Además $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$ y $[-n,n] \subset [-n-1,n+1]$. Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} (\arctan(n) - \arctan(-n)) = \pi.$$

8. Cálculo de la integral

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx.$$

La función es medible y no negativa. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n xe^{-x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(-xe^{-x}\big]_0^n + \int_o^n e^{-x}\,dx \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-ne^{-n} + (-e^{-n}+1)) = 1.\end{aligned}$$

9. Estudiemos la intergabilidad de

$$f(x) = e^{-x}\log(x)$$

en $(0,+\infty)$. Claramente f es medible pues es continua. Tenemos que examinar si la integral $\int_{(0,+\infty)} |f(x)|\,dx$ es finita o no. Como $log(x) > 0$ si y solo si $x > 1$, tenemos

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x}\log(x)|dx = \int_0^1 e^{-x}(-\log(x))\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\log(x)\,dx.$$

Nótese que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\log(t^\alpha) \leq t^\alpha \Longleftrightarrow \log(t) \leq \frac{1}{\alpha}t^\alpha$$

Por tanto,

$$\int_0^1 e^{-x}(-\log(x))\,dx \leq \int_0^1 e^{-x}\frac{1}{\alpha}t^\alpha\,dx \underset{x\in(0,1)}{\leq} \int_0^1 \frac{1}{\alpha}t^\alpha\,dx,$$

basta tomar $\alpha \in (0,1)$ para que

$$\int_0^1 e^{-x}(-\log(x))\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\alpha}t^\alpha\,dx < +\infty.$$

Por otra parte, $\log(t) \leq t$, luego

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\log(x)\,dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}x\,dx.$$

Esta última integral ya ha sido estudiada y sabemos que es finita. Por lo tanto

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\log(x)\,dx < +\infty.$$

Concluyendo así que f es integrable en $(0,+\infty)$.

10. Estudiemos la integrabilidad de

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

en $(0,+\infty)$. La función f es medible por ser continua. Observamos que $\cup_{k=1}^{\infty}\left[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ es una unión numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos contenidos en $(0,+\infty)$. Luego

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| dx &\geq \int_{\cup_{k=1}^{\infty}\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}} = +\infty.\end{aligned}$$

Luego la función f no es integrable en $(0,+\infty)$. Sin embargo, puede demostrarse que el límite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$$

existe, y definimos el valor propio de $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ como

$$V.P\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx,$$

pero, recalcamos, no es un integral en el sentido de Lebesgue.

3.5. Transformaciones que conservan la medida (segunda parte)

Teorema 3.5.1. *Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ dos espacios de medida y sea $T: X\longrightarrow Y$ una aplicación $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-medible que conserva las medidas. Sea $g: Y\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ medible. La función g es integrable respecto de ν si y solo si $g\circ T$ es integrable respecto de μ y, en este caso,*

$$\int_Y g\, d\nu = \int_X g\circ T\, d\mu.$$

Demostración. La igualdad de las integrales se probó para funciones g medibles no negativas. Si se la aplicamos a $|g|$ obtenemos

$$\int_Y |g|\, d\nu = \int_X |g|\circ T\, d\mu = \int_X |g\circ T| d\mu,$$

de donde se sigue que g es integrable respecto de ν si y solo si $g\circ T$ es integrable respecto de μ. Como $g = g^+ - g^-$ y, como g^+ y g^- son funciones medibles no negativas

$$\begin{aligned}\int_Y g\, d\nu &= \int_Y g^+\, d\nu - \int_Y g^-\, d\nu = \int_X g^+\circ T\, d\nu - \int_X g^-\circ T\, d\nu \\ &= \int_X (g^+ - g^-)\circ T\, d\mu = \int_X g\circ T\, d\mu.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.5.2 (Variables aleatorias: Ley de probabilidad)**.** Supongamos que $(\Omega,\mathcal{A},P)$ es un espacio de probabilidad y que $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ es una variable aleatoria. Su ley de probabilidad es la medida definida sobre la σ-álgeba de borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dada por

$$P_X:\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\longrightarrow[0,+\infty], \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Es claro, por al definición de P_X, que $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}R$ conserva las medidas, considerando en Ω la medida P y en $\mathbb{R}$ la medida P_X. Si $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es medible-Borel, aplicando la proposición anterior,

$$\int_\Omega g\circ X(\omega)\, dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dP_X(t).$$

3.6. La integral en espacios de medida con densidad (segunda parte)

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función medible. Sabemos que la aplicación $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$,

$$\nu(E) = \int_E f \; d\mu,$$

es una nueva medida sobre $\mathcal{M}$. En esta situación decimos que f es la densidad de μ respecto de ν.

Teorema 3.6.1. *Supongamos que estamos en las condiciones anteriores.*

(a) Si $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible,

$$\int_X g \; d\nu = \int_X gf \; d\mu.$$

(b) Sea $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. La función g es integrable respecto de ν si y solo si gf es integrable respecto de μ y, en este caso,

$$\int_X g \; d\nu = \int_X gf \; d\mu.$$

Demostración. El apartado (a) ya fue demostrado. Demostremos el apartado (b). Por el apartado (a)

$$\int_X |g| \; d\nu = \int_X |g|f \; d\mu = \int_X |gf| \; d\mu,$$

de donde se sigue que g es integrable respecto de ν si y solo si gf es integrable respecto de μ. Usando de nuevo (a) y que $g = g^+ - g^-$,

$$\begin{aligned}\int_X g \; d\nu &= \int_X g^+ \; d\nu - \int_X g^- \; d\nu = \int_X g^+ f \; d\mu - \int_X g^- f \; d\mu \\ &= \int_X (g^+ - g^-) f \; d\mu = \int_X gf \; d\mu.\end{aligned}$$

□

3.7. Derivación bajo el signo integral

Muchas funciones vienen dadas por integrales paramétricas, es decir, expresiones del tipo

$$F : G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_E f(x, t) \; d\mu(x).$$

Un ejemplo de esta situación es la función gamma,

$$\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \; dx.$$

Teorema 3.7.1. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $E \in \mathcal{M}$. Sean G un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $t_0 \in G$. Sea $f : E \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. *Para todo $t \in G$ la aplicación*

$$f^t : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^t(x) = f(x, t)$$

es medible.

2. *Existe* $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$*, no negativa, integrable en* E *tal que*

$$|f(x,t)| \leq g(x)$$

cualquiera que sea $(x,t) \in E \times G$.

3. *Para todo* $x \in E$, $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$*, es decir,*

$$f_x : G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(t) = f(x,t)$$

es continua en t_0.

Entonces, la función

$$F : G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_E f(x,t)\ d\mu(x)$$

está bien definida en G *(*f^t *es integrable en* E *para todo* $t \in G$*) y* $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$ *(*F *es continua en* t_0*).*

Demostración. Divimos la prueba en dos pasos.

1. La función F está bien definida porque las propiedades 1 y 2 nos dicen que $f^t(x) = f(x,t)$ es integrable al estar acotada por la función g que es integrable por hipótesis.

2. Para ver que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$, elegimos una sucesión arbitraria $t_k \in G$, $k \in \mathbb{N}$, con $\lim_{k \to \infty} t_k = t_0$, $t_k \neq t_0$. Observamos que

$$F(t_k) = \int_E f(x,t_k)\ d\mu(x) = \int_E f^{t_k}(x)\ d\mu.$$

Como $|f^{t_k}(x)| \leq g(x)$ para todo k y g es integrable, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada, tomar límites y permutar el límite y la integral:

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} F(t_k) &= \lim_{k \to \infty} \int_E f^{t_k}(x)\ d\mu = \int_E \lim_{k \to \infty} f^{t_k}(x)\ d\mu \\ &= \int_E f^{t_0}(x)\ d\mu(x) = F(t_0). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.7.2 (Teorema de derivación bajo el signo integral)**.** *Sea* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $E \in \mathcal{M}$*. Sea* G *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $t_0 \in G$*. Sea* $f : E \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

1. *Para todo* $t \in G$ *la aplicación*

$$f^t : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f^t(x) = f(x,t)$$

es integrable respecto de μ.

2. *Existe* $\frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t) = \frac{\partial f_x}{\partial t_j}(x)$ *para todo* $(x,t) \in E \times G$.

3. *Existe* $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$*, no negativa, integrable en* E *tal que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t) \right| \leq g(x)$$

cualquiera que sea $(x,t) \in E \times G$.

Entonces, la función

$$F : G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_E f(x,t)\ d\mu(x)$$

está bien definida en G, existe la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial t_j}(t)$ *y*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\ d\mu(x).$$

Demostración. La función F está bien definida por la hipótesis 1. Calculemos y mostremos la existencia de la derivada $\frac{\partial F}{\partial t_j}(t)$, donde $t \in G$.

Sea e_j el vector j-ésimo dela base canónica de $\mathbb{R}^n$. Tenemos que estudiar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+he_j) - F(t)}{h}.$$

Lo haremos usando sucesiones. Sea $\{h_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$, $h_k \neq 0$ y $t+h_k e_j \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h_k e_j) - F(t)}{h_k} &= \frac{\int_E f(x,t+h_k e_j)\ d\mu(x) - \int_E f(x,t)\ d\mu(x)}{h_k} \\ &= \int_E \frac{f(x,t+h_k e_j) - f(x,t)}{h_k}\ d\mu(x). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio, tenemos que para todo k suficientemente grande, existe $\widetilde{h}_k$ (que depende también de x) tal que $t + \widetilde{h}_k e_j \in G$ y

$$\left| \frac{f(x,t+h_k e_j) - f(x,t)}{h_k} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(x, t+\widetilde{h}_k e_j) \right|.$$

Aplicando la hipótesis 3, tenemos

$$\left| \frac{f(x,t+h_k e_j) - f(x,t)}{h_k} \right| \leq g(x).$$

Por el teorema de la convergencia dominada y la definición de derivada parcial,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{F(t+h_k e_j) - F(t)}{h_k} &= \lim_{k\to\infty} \int_E \frac{f(x,t+h_k e_j) - f(x,t)}{h_k}\ d\mu(x) \\ &= \int_E \lim_{k\to\infty} \frac{f(x,t+h_k e_j) - f(x,t)}{h_k}\ d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\ d\mu(x), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Ejemplo 3.7.3. Sea $F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(xt) dx$. Demostrar que F está bien definida, que es derivable y que $F'(t) = -\frac{1}{2}F(t)$. Hallar $F(t)$ (sabiendo que $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

1. Si $t \in \mathbb{R}$, $|e^{-x^2} \cos(xt)| = e^{-x^2} |\cos(xt)| \leq e^{-x^2}$ para todo $x \in (0, +\infty)$. Como e^{-x^2} es integrable en $(0,+\infty)$, también $g(x) = e^{-x^2}\cos(xt)$ es integrable en $(0,+\infty)$. Esto prueba que F está bien definida (es decir, que la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(xt)dx$ tiene sentido).
2. Para probar que F es derivable, veremos que se verifican las condiciones del teorema de derivación bajo el signo integral.
   2.1 Si $f(x,t) = e^{-x^2}\cos(xt)$, existe $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D_2 f(x,t)$ en todo punto $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$. Además, $D_2 f(x,t) = -xe^{-x^2} \operatorname{sen}(xt)$.

2.2 La función $D_2f(x,t)$ es continua como función de t. De hecho, $f \in \mathcal{C}^1$.

2.3 $|D_2f(x,t)| = xe^{-x^2}|\operatorname{sen}(x,t)| \leq xe^{-x^2}$ para todo x y todo t, siendo la función xe^{-x^2} integrable en $(0,+\infty)$.

Por tanto, F es derivable en todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$F'(t) = \int_0^\infty D_2f(x,t)\ dx = -\int_0^\infty xe^{-x^2}\operatorname{sen}(xt)\ dx$$

3. Aplicando integración por partes en esta última integral, obtenemos otra expresión para $F'(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\int_0^\infty xe^{-x^2}\operatorname{sen}(xt)\ dx = -\lim_{n\to\infty}\int_0^n xe^{-x^2}\operatorname{sen}(xt)\ dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\operatorname{sen}(xt)\Big]_{x=0}^{x=n} - \frac{t}{2}\int_0^n e^{-x^2}\cos(xt)\ dx\right) = -\frac{t}{2}F(t). \end{aligned}$$

Por tanto, F es solución de la ecuación diferencial $y'(t) = -\frac{t}{2}y(t)$, cuya solución general es $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{4}}$. Si imponemos la condición inicial $y(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, que es $F(0)$, obtenemos

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t}{4}}.$$

3.8. Integración de funciones medibles complejas

Se puede definir también la integral de una función que toma valores en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos. Lo primero que debemos hacer es establecer lo que se entiende por función medible. Para ello introducimos algunas notaciones.

Si $z \in \mathbb{C}$, $Re(z)$ e $Im(z)$ denotan a la parte real y a la parte compleja de z respectivamente, de forma que $z = Re(z) + iIm(z)$. El módulo de z es el número no negativo $\sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$ y se denota por $|z|$.

Sea E un conjunto y $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. Las funciones "Parte Real", $Re(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y "Parte Imaginaria", $Im(f) : E \longrightarrow \mathbb{R}$, de f se definen como

$$Re(f)(x) = Re(f(x)) \quad , \quad Im(f)(x) = Im(f(x)),$$

y , por consiguiente,

$$f = Re(f) + iIm(f)$$

La función módulo de f de E en $\mathbb{R}$ se denota por $|f|$ y se define como

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

Observemos que $Re(f)$, $Im(f)$ y $|f|$ son funciones que toman valores en $\mathbb{R}$.

Definición 3.8.1. Sea $(X,\mathcal{M})$ un espacio medible y sea E un subconjunto medible de X. Decimos que la función $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable en E si las funciones reales Re(f) e Im(f) son integrables en E y la integral de f sobre E, denotada por $\int_E f\ d\mu$, se define como

$$\int_E f\ d\mu := \int_E Re(f)\ d\mu + i\int_E Im(f)\ d\mu.$$

Observación 3.8.2. Es fácil ver que, $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable en E si y solo si la función módulo de f, $|f|$, es integrable en E.

Observación 3.8.3. La integral de funciones con valores en $\mathbb{C}$ tiene las mismas propiedades de linealidad y aditividad numerable que la integral de funciones reales. En particular, el teorema de convergencia dominada y sus consecuencias se cumplen en este contexto y las demostraciones se deducen de las correspondientes para funciones con valores en $\mathbb{R}$. También es cierta la desigualdad

$$\left|\int_E f \, d\mu\right| \leq \int_E |f| \, d\mu$$

para funciones integrables con valores en $\mathbb{C}$, donde las barras de la izquierda denotan el módulo de un número complejo, mientras que $|f|$ es la función módulo de f.

Teorema 3.8.4 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$*,* $a_n \neq 0$*, de grado* $n \geq 1$ *y coeficientes complejos tiene un cero en* $\mathbb{C}$*.*

Capítulo 4

Construcción de medidas

4.1. Medidas exteriores

Definición 4.1.1. Sea X un conjunto. Una medida exterior sobre X es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) Si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(c) (Subaditividad finita)

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

para cualquier colección numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X.

4.1.1. Construcción de medidas exteriores

Definición 4.1.2. Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{E}$ es una familia recubridora de X si

(a) $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

(b) $\emptyset \in \mathcal{E}$.

(c) Existe una colección $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{E}$ tal que $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Teorema 4.1.3. *Supongamos que X es un conjunto y que $\mathcal{E}$ es una familia recubridora de X. Sea $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ una aplicación tal que $\rho(\emptyset) = 0$*

(a) Sea $\mu_\rho^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\mu_\rho^*(A) = \text{ínf}(H_A)$$

donde

$$H_A = \left\{ \lambda \in [0, +\infty] : \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{E} \right\}.$$

Entonces μ_ρ^* es una medida exterior y $\mu_\rho^*(A) \leq \rho(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$. (Nótese que el ínfimo de H_A está bien definido y es un elemento de $[0, +\infty]$).

(b) Supongamos que, además, la aplicación ρ tiene la propiedad siguiente

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \ (E, E_i \in \mathcal{E}) \Longrightarrow \rho(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i).$$

Entonces μ_ρ^* es una medida exterior tal que $\mu_\rho^*(A) = \rho(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$.

Demostración. (a) Observamos primero que μ_ρ^* está bien definida porque cada subconjunto A es recubierto por alguna familia numerable de $\mathcal{E}$ ya que $A \subset X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Antes de probar que μ_ρ^* es una medida exterior, veremos que $\mu_\rho^*(A) \leq \rho(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$. Fijado dicho A, tomamos la sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ definida por $E_1 = A$, $E_i = \emptyset$ para todo $i \geq 2$. Es claro que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ y que $E_i \in \mathcal{E}$ para todo i. Luego $\rho(A) = \rho(E_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) \in H_A$ y, por lo tanto,

$$\mu_\rho^*(A) = \operatorname{ínf}(H_A) \leq \rho(A).$$

Ahora probemos que μ_ρ^* es una medida exterior. Por hipótesis, $\rho(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \emptyset = 0 \in H_\emptyset$, luego $\mu_\rho^*(\emptyset) = 0$. Sean $A, B \in \mathcal{E}$ tales que $A \subset B$, entonces $H_B \subset H_A$, por tanto, $\operatorname{ínf}(H_A) \leq \operatorname{ínf}(H_B)$, es decir, $\mu_\rho^*(A) \leq \mu_\rho^*(B)$. Para que μ_ρ^* sea medida exterior solo nos queda probar la subaditividad numerable.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Entonces, para cada i, consideramos $\mu_\rho^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Como $\mu_\rho^*(A_i) = \operatorname{ínf}(H_{A_i})$, existe $\lambda_i \in H_{A_i}$ tal que

$$\lambda_i \leq \mu_\rho^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Como $\lambda_i \in H_{A_i}$, existe una familia numerable $\{E_{ij}\}$, $E_{ij} \in \mathcal{E}$, tal que

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \ \ y \ \ \lambda_i = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_{ij}).$$

Es claro que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \cup_{i,j=1}^{\infty} E_{ij}$. Si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una biyección, tenemos que $\{E_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección numerable de elementos de $\mathcal{E}$ tal que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \cup_{k=1}^{\infty} E_{\sigma(k)} = \cup_{i,j=1}^{\infty} E_{ij}$. Por lo tanto, por la definición de μ_ρ^*,

$$\begin{aligned} \mu_\rho^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_{\sigma(k)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_{ij})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu_\rho^* \left(A_i\right) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\rho^*(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Haciendo que $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos

$$\mu_\rho^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\rho^*(A_i).$$

(b) La propiedad añadida a ρ implica trivialmente que $\rho(A) \leq \lambda$ para todo $\lambda \in H_A$ y, en consecuencia, $\rho(A) \leq \mu_\rho^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$. Por el apartado (a) tenemos la otra desigualdad, luego $\rho(A) = \mu_\rho^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}$. □

Corolario 4.1.4. *La medida exterior de Lebesgue es una medida exterior y $m^*(I) = \mathcal{V}(I)$ para todo intervalo abierto I.*

4.1.2. Construcción de medidas: el teorema de Carathéodory

Teorema 4.1.5. *Supongamos que estamos en las condiciones del teorema anterior. Sea $A \subset X$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E) = \mu_\rho^*(E)$ *para todo* $E \subset X$.

(b) $\mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E) = \mu_\rho^*(E)$ *para todo* $E \subset \mathcal{E}$.

Demostración. Nótese que solo tenemos que probar $(b) \implies (a)$. En primer lugar, por ser μ_ρ^* medida exterior, tenemos

$$\mu_\rho^*(E) = \mu_\rho^*((A \cap E) \cup (A^c \cap E)) \leq \mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E)$$

para todo $E \subset X$. Probemos la otra desigualdad. Sea $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ tal que $E \subset \cup_{i=1}^\infty E_i$ donde $E_i \in \mathcal{E}$. Entonces

$$A \cap E \subset \cup_{i=1}^\infty (A \cap E_i) \quad y \quad A^c \cap E \subset \cup_{i=1}^\infty (A^c \cap E_i).$$

Aplicamos de nuevo que μ_ρ^* es medida exterior y concluimos que

$$\mu_\rho^*(A \cap E) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu_\rho^*(A \cap E_i) \quad y \quad \mu_\rho^*(A^c \cap E) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu_\rho^*(A^c \cap E_i).$$

Sumando ambas desigualdades,

$$\mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E) \leq \sum_{i=1}^\infty (\mu_\rho^*(A \cap E_i) + \mu_\rho^*(A^c \cap E_i)).$$

Aplicando (b), el último término es $\sum_{i=1}^\infty \mu_\rho^*(E_i)$. Luego,

$$\mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu_\rho^*(E_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \rho(E_i),$$

es decir,

$$\mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E) \leq \lambda \quad \forall \lambda \in H_E,$$

de donde,

$$\mu_\rho^*(A \cap E) + \mu_\rho^*(A^c \cap E) \leq \text{ínf}(H_E) = \mu_\rho^*(E)$$

como queríamos demostrar. □

Observación 4.1.6. Si tenemos una medida exterior μ^* arbitraria entonces la afirmación (b) del teorema anterior no tiene sentido porque no existe la familia $\mathcal{E}$. Sin embargo, (a) tiene sentido completo. Por ello, se introduce la siguiente definición.

Definición 4.1.7. Sea μ^* una medida exterior sobre X. Decimos que $A \subset X$ es un conjunto μ^*-medible (o que A es mu^*-medible en el sentido de Carathéodory) si para todo $E \subset X$ se tiene que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E),$$

o, equivalentemente,

$$\mu_E^*(A) + \mu_E^*(A^c) \leq \mu_E^*(X).$$

Observación 4.1.8. (a) La desigualdad $\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A^c\cap E) \geq \mu^*(E)$ se verifica siempre porque μ^* es una medida exterior. Luego para probar que $A \subset X$ es un conjunto μ^*-medible basta establecer

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E)$$

para todo E con $\mu^*(E) < \infty$.

(b) Si $\mu^*(A) = 0$ entonces A es un conjunto μ^*-medible.

$$\begin{aligned}&A \cap E \subset A \Longrightarrow \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(A) = 0 \Longrightarrow \mu^*(A \cap E) = 0,\\ &A^c \cap E \subset E \Longrightarrow \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E).\end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades, tenemos que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E).$$

Teorema 4.1.9 (Teorema de Carathéodory)**.** *Sea μ^* una medida exterior sobre X y sea*

$$\mathcal{M}^* = \{A \subset X : A \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}.$$

Entonces

(a) $\mathcal{M}^*$ es una σ-álgebra (la σ-álgebra de Carathéodory).

(b) $\mu^*|_{\mathcal{M}^*} = \mu$ es una medida.

(c) $(X, \mathcal{M}^*, \mu)$ es un espacio de medida completo.

Demostración. Comenzaremos probando que $\mathcal{M}^*$ es un álgebra.

Es evidente que $A \in \mathcal{M}^* \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}^*$. Es claro entonces que $X \in \mathcal{M}^*$ puesto que $\emptyset \in \mathcal{M}^*$ ya que $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Supongamos ahora que $A, B \in \mathcal{M}^*$ y demostremos que $A \cup B \in \mathcal{M}^*$. Para ellos, basta usar la subaditividad y la definición de conjunto μ^*-medible (dos veces):

$$\begin{aligned}\mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*((A \cup B)^c \cap E) &= \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*((A^c \cap B^c \cap E)\\ &= \mu^*((A \cup (B\backslash A)) \cap E) + \mu^*((A^c \cap B^c \cap E)\\ &\leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(B \cap A^c \cap E) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap E)\\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E).\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{M}^*$ es un álgebra, sabemos que si $A, B \in \mathcal{M}^*$ entonces $A^c, A \cup B, A \cap B \in \mathcal{M}^*$.

Nótese que para todo $E \subset X$, $\mu^*_E(A) = \mu^*(A \cap E)$ es una medida sobre X. Veremos que es numerablemente aditiva sobre $\mathcal{M}^*$.

(i) Comenzamos probando que, para todo $E \subset X$, μ^*_E es finitamente aditivida sobre $\mathcal{M}^*$, es decir, si $\{A_i\}_{i=1}^s$ es una colección finita y disjunta de elementos de $\mathcal{M}^*$, entonces $\mu^*_E(\cup_{i=1}^s A_i) = \sum_{i=1}^s \mu^*_E(A_i)$. Por ser $\mathcal{M}^*$ un álgebra, basta verlo para $s = 2$. Sean $A, B \in \mathcal{M}^*$, $A \cap B = \emptyset$.

Por ser $A \in \mathcal{M}^*$ y $A \cap B = \emptyset$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*_E(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap E)\\ &= \mu^*((A \cup B) \cap E \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap E \cap A^c)\\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(B \cap E) = \mu^*_E(A) + \mu^*_E(B).\end{aligned}$$

(ii) Vamos a probar ahora que, para todo $E \subset X$, μ^*_E es numerablemente aditiva sobre $\mathcal{M}^*$, es decir, si $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ es una colección numerable y disjunta de elementos de $\mathcal{M}^*$, entonces $\mu^*_E(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*_E(A_i)$.

Por la subaditividad numerable de la medida exterior μ_E^*,

$$\mu_E^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_E^*(A_i).$$

Por ser μ_E^* finitamente aditiva sobre $\mathcal{M}^*$ y por ser una medida exterior,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_E^*(A_i) = \mu_E^*(\cup_{i=1}^{N} A_i) \leq \mu_E^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Tomando límite $N \to \infty$, llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_E^*(A_i) \leq \mu_E^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Por consiguiente, $\mu_E^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_E^*(A_i)$, como queríamos demostrar.

(iii) Del punto anterior, tomando $E = X$, tenemos que si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección numerable y disjunta de elementos de $\mathcal{M}^*$, entonces

$$\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Una vez que sabemos que $\mathcal{M}^*$ es un álgebra, estableceremos que es cerrada para uniones numerables y disjuntasm es decir, vamos a probar que

(iv) si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $A_i \in \mathcal{M}^*$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces

$$B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}^*.$$

Sea $B_n = \cup_{i=1}^{N} A_i$. Por ser $\mathcal{M}^*$ un álgebra, ya sabemos que $B_n \in \mathcal{M}^*$. Además si $E \subset X$

$$\begin{aligned}\mu_E^*(B) &= \mu_E^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_E^*(A_i) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu_E^*(A_i) = \lim_{N\to\infty} \mu_E^*(\cup_{i=1}^{N} A_i) = \lim_{N\to\infty} \mu_E^*(B_n).\end{aligned}$$

Así,

$$\mu_E^*(B) + \mu_E^*(B^c) = \lim_{N\to\infty} (\mu_E^*(B_n) + \mu_E^*(B^c)).$$

Por otra parte, como $B_n \subset B$ tenemos que $B^c \subset B_n^c$. Luego

$$\mu_E^*(B^c) \leq \mu_E^*(B_n^c)$$

para todo n. Puesto que μ_E^* es una medida exterior y $B_n \in \mathcal{M}^*$,

$$\mu_E^*(B_n) + \mu_E^*(B^c) \leq \mu_E^*(B_n) + \mu_E^*(B_n^c) = \mu^*(E).$$

Por lo tanto,

$$\mu_E^*(B) + \mu_E^*(B^c) = \lim_{N\to\infty} (\mu_E^*(B_n) + \mu_E^*(B^c)) \leq \mu^*(E).$$

lo que prueba que $B \in \mathcal{M}^*$.

(v) Veamos que $\mathcal{M}^*$ es una σ-álgebra. Tomemos $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, $E_i \in \mathcal{M}^*$. Si $A_1 = E_1$ y $A_i = E_i \setminus \cup_{n=1}^{i-1} E_n$, $i > 1$, se tiene que $A_i \in \mathcal{M}^*$ (por ser $\mathcal{M}^*$ un álgebra), $cup_{i=1}^{\infty} E_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ y los A_i son disjuntos. Por lo ya probado, se sigue que $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}^*$.

(vi) Pasamos a demostrar que $\mu^*|_{\mathcal{M}^*} = \mu$ es una medida. Es obvio que $\mu(\emptyset) = 0$. Por (iii), μ^* es numerablemente aditivda sobre $\mathcal{M}^*$.

(vii) Nos queda ver que μ es completa pero esto es obvio: si $\mu(N) = 0$ y $F \subset N$ entonces $\mu^*(F) \leq \mu^*(N) = \mu(N) = 0$; luego $\mu^*(F) = 0$ y, en consecuencia, $F \in \mathcal{M}^*$. □

4.2. La medida de Lebesgue

Definimos la medida exterior de Lebesgue $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ como

$$m^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i) : A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ es un intervalo de } \mathbb{R}^n\right\}$$

La familia $\mathcal{E}$ de los intervalos abiertos es una familia recubridora de $\mathbb{R}^n$ y la aplicación

$$\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty], \quad \rho(I) = \mathcal{V}(I),$$

cumple que $\rho(\emptyset) = 0$. Por el teorema de construcción de medidas exteriores, m^* es una medida exterior. Además, si $I \subset \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ donde I y los I_j son intervalos abiertos, se tiene que

$$\rho(I) = \mathcal{V}(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(I_j).$$

Luego, por el apartado (b) del mismo teorema, $m^*(I) = \mathcal{V}(I)$ para todo intervalo abierto.

Obsérvese que $m^*(A) = 0$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia numerable de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i \quad y \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_i) < \varepsilon.$$

Recordemos que, por el teorema de Carathéodory,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{A \subset \mathbb{R}^n : A \; es \; m^*\text{-medible}\} \\ &= \{A \subset \mathbb{R}^n : m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) = m^*(E) \text{ para todo } E \subset \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

es una σ-álgebra.

Como m^* viene definida a través de $\rho = \mathcal{V}$ y la familia elemental de los intervalos abiertos, resulta que

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R}^n : m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) = m^*(E) \text{ para todo intervalo abierto } I\}$$

A $\mathcal{L}$ la llamaremos σ-álgebra de Lebesgue. A los conjuntos $A \in \mathcal{L}$ los llamaremos conjuntos medibles-Lebesgue. Además, por el teorema de Carathéodory, si $m = m^*|_{\mathcal{L}}$ entonces $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ es un espacio de medida completo. A m le llamamos la medida de Lebesgue.

Proposición 4.2.1. *Algunas propiedades de m^*, m y $\mathcal{L}$.*

(a) Si $m^*(A) = 0$ entonces $A \in \mathcal{L}$.

(b) La medida exterior de un intervalo I es su volumen.

(c) $m^*(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) La medida exterior de Lebesgue de un conjunto numerable A es cero, por lo tanto, $A \in \mathcal{L}$.

(e) La medida exterior de $\mathbb{R}^n$ es $+\infty$.

(f) La medida exterior es invariante frente a traslaciones: si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$ entonces $m^*(A+b) = m^*(A)$, donde

$$A + b = \{x : x = a + b, a \in A\}.$$

(g) Para cada $a \in \mathbb{R}$ y para cada $j \in \{1, ..., n\}$ los conjuntos

- $\{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, ..., x_n), x_j > a\}$.

- $\{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, ..., x_n), x_j \leq a\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, ..., x_n), x_j \geq a\}$.
- $\{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, ..., x_n), x_j < a\}$.

son medibles Lebesgue.

(h) Los intervalos I son medibles Lebesgue y $m(I) = \mathcal{V}(I)$.

(i) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L}$ (los borelianos son medibles Lebesgue).

(j) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ es un espacio de medida σ-finito o, en otras palabras, la medida de Lebesgue es σ-finita.

Demostración. Probemos (g). Lo veremos solo para $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, ..., x_n), x_1 > a\}$. Sea $I = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ intervalo abierto. Tenemos tres posibilidad:

(i) $a_1 \geq a$. Entonces $I \subset A$. Además, $m^*(A \cap I) + m^*(A^c \cap I) = m^*(A \cap I) = m^*(I)$.

(ii) $b_j \leq a$. Entonces $I \subset A^c$. Así, $m^*(A \cap I) + m^*(A^c \cap I) = m^*(A \cap I) = m^*(I)$.

(iii) $a_j < a < b_j$. Entonces

$$\begin{aligned} A \cap I &= (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n) \text{ y} \\ A^c \cap I &= (a_1, a] \times ... \times (a_n, b_n). \end{aligned}$$

Como estos conjuntos son intervalos,

$$\begin{aligned} m^*(A \cap I) &= (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \text{ y} \\ m^*(A^c \cap I) &= (a - a_1) \cdots (b_n - a_n). \end{aligned}$$

de donde

$$m^*(A \cap I) + m^*(A^c \cap I) = \frac{(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)}{(b_1 - a_1)}(b_1 - a + a - a_1) = \mathcal{V}(I) = m^*(I).$$

□

4.3. Conjuntos medibles Lebesgue y la medida de Lebesgue: caracterizaciones

Teorema 4.3.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) A es medible-Lebesgue.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto G tal que $A \subset G$ y $m^*(G \backslash A) < \varepsilon$.

(c) Existen una familia numerable de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ y un conjunto N de medida cero tales que $A = (\cap_{i=1}^{\infty} G_i) \backslash N$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Supongamos que $m(A) < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de $m = m^*|_{\mathcal{L}}$, existe $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$, un recubrimiento de A por intervalos abiertos, con $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_J) < m(A) + \varepsilon$. Tomemos $G = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$. Así, G es abierto y $A \subset G$. Además,

$$\begin{aligned} m^*(G \backslash A) &= m(G \backslash A) = m(G) - m(A) = m(\cup_{j=1}^{\infty} I_j) - m(A) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) - m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{V}(I_j) - m(A) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Supongamos que $m(A) = +\infty$. Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, $I_k = [-k, k]^n$. Así,

$$A = A \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

donde $A_k = A \cap I_k$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, A_k es medible y con medida finita ($m(A) \leq m(I_k) < +\infty$). Por lo que hemos demostrado anteriormente, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un abierto G_k con $A_k \subset G_k$ y tal que $m^*(G_k \backslash A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Sea $G = \cup_{k=1}^{\infty} G_k$. Es claro que G es abierto y $A \subset G$. Además,

$$G \backslash A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \backslash A_k).$$

Aplicando las propiedades de la medida exterior,

$$m^*(G \backslash A) \leq m^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \backslash A_k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \backslash A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Por hipótesis, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un abierto G_k tal que $A \subset G_k$ y con $m^*(G_k \backslash A) < \frac{1}{k}$. Sea $G = \cap_{k=1}^{\infty} G_k$. Entonces $A \subset G$. Por lo tanto, $G \backslash A \subset G_k \backslash A$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y, consecuentemente,

$$m^*(G \backslash A) < \frac{1}{k} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite, obtenemos que $m^*(G \backslash A) = 0$, lo que implica que $N = G \backslash A$ es medible y $m(N) = 0$. Por otra parte, $G \backslash N = G \backslash (G \backslash A) = A$.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Es trivial. Por hipótesis, se tiene que $\cap_{i=1}^{\infty} G_k \in \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{L}$, por tanto, $A = (\cap_{i=1}^{\infty} G_k) \backslash N \in \mathcal{L}$. □

Teorema 4.3.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) A es medible-Lebesgue.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un cerrado F tal que $F \subset A$ y $m^*(A \backslash F) < \varepsilon$.

(c) Existen una familia numerable de cerrados $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ y un conjunto N de medida cero tales que $A = (\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \cup N$.

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Sea $\varepsilon > 0$. Como A es medible, tenemos que A^c es medible. Por el teorema anterior, existe un abierto G tal que $A^c \subset G$ y $m^*(G\backslash A^c) < \varepsilon$. Sea $F = G^c$. Es claro que F es cerrado y $F = G^c \subset A$. Además, $A\backslash F = A \cap F^c = A \cap G = G\backslash A^c$. Por consiguiente,

$$m^*(A\backslash F) = m^*(G\backslash A^c) < \varepsilon.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$ Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por hipótesis, existe un cerrado $F \subset A$ tal que $m^*(A\backslash F) < \varepsilon$, de donde, $A^c \subset F^c$ y $m^*(F^c\backslash A^c) < \varepsilon$ (ya que $F^c\backslash A^c = F^c \cap (A^c)^c = F^c \cap A = A\backslash F$). Tomando $G = F^c$, se tiene que $A^c \subset G$, G es abierto y $m^*(G\backslash A^c) < \varepsilon$. Entonces, por el teorema anterior, A^c es medible-Lebesgue y, consecuentemente, A es medible-Lebesgue.

$(a) \Longrightarrow (c)$ Supongamos que A es medible-Lebesgue. Entonces A^c es medible. Por el teorema anterior, existe una familia numerable de abiertos $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ y un conjunto N tales que $m(N) = 0$ y $A^c = (\cap_{j=1}^{\infty} G_j)\backslash N$. Entonces

$$A^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j\right)\backslash N = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \cap N^c$$

o, equivalentemente,

$$A = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j^c\right) \cup N.$$

Lo que prueba la implicación ya que los conjuntos G_j^c son cerrados y $m(N) = 0$.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Es trivial. Por hipótesis, se tiene que $\cup_{i=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{L}$, por tanto, $A = (\cup_{i=1}^{\infty} F_k) \cup N \in \mathcal{L}$. □

Corolario 4.3.3. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible-Lebesgue si y solo si existen un conjunto de Borel B y un conjunto F de medida cero tal que $A = B \cup F$.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Sea $N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ con $m(N) = 0$. Entonces

$$m^*(F) \leq m^*(N) = m(N) = 0,$$

por tanto, $m^*(F) = 0$, luego, F es medible-Lebesgue.

$\Longleftarrow$ Sea $F \in \mathcal{L}$ con $m(F) = 0$. Como F es medible-Lebesgue, existen una familia numerable de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ y un conjunto N de medida cero tales que $F = (\cap_{i=1}^{\infty} G_i)\backslash N$, por tannton $N \subset \cap_{i=1}^{\infty} G_i$, luego, $F \subset \cap_{i=1}^{\infty} G_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Sea $B = F \cup N$, entonces B es medida cero, pues es unión de dos conjuntos de medida cero. □

Corolario 4.3.4. *El espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}})$.*

Demostración. Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$, donde $\mathcal{L}$ es la σ-álgebra de Lebesgue y m es la medida de Lebesgue.

Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{L}$, se tiene que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$ es un espacio de medida, donde $\mu = m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$. Además,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \{A \subset \mathbb{R}^n : A = E \cup F, E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, F \in \mathcal{L}, m(F) = 0\} \\
&= \{A \subset \mathbb{R}^n : A = E \cup F, E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, F \subset N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m(N) = 0\} \\
&= \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $A \in \mathcal{L}$, $A = E \cup F$, $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $F \subset N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $m(N) = 0$, entonces

$$\overline{\mu}(A) = \mu(E) = m(E).$$

y

$$m(A) = m(E \cup F) \leq m(E) + m(F) = m(E) \leq m(A).$$

Luego, $\overline{\mu}(A) = m(A)$. □

Teorema 4.3.5. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible entonces*

$$\begin{aligned} m(A) &= \text{ínf}\,\{m(G) : A \subset G, G \textit{ abierto de } \mathbb{R}^n\} \\ &= \sup\{m(K) : K \subset A, K \textit{ compacto de} \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Teorema 4.3.6 (La medida de Lebesgue es invariante frente a traslaciones)**.** *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. A es un conjunto medible si y solo si $A + b$ es medible y, en este caso, $m(A+b) = m(A)$.*

Demostración. Definimos $T_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $T_b(x) = x + b$, que es biyectiva. Ya sabemos que $m^*(T_bE) = m^*(E+b) = m^*(E)$ para todo conjunto E. Basta demostrar que si A es un conjunto medible-Lebesgue entonces $A+b$ es medible y, en este caso, $m(A+b) = m(A)$. Supongamos que A es medible. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser A medible, existe un abierto G tal que $A \subset G$ y $m(G \backslash A) < \varepsilon$. Como T_b es un homeomorfismo, T_bG es un abierto y, además, $T_bA \subset T_bG$. Como $T_bG \backslash T_bA = T_b(G\backslash A)$ y m^* es invariante frente a traslaciones, resulta que

$$m^*(T_bG \backslash T_bA) = m^*(T_b(G \backslash A)) = m^*(G \backslash A) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, T_bA es medible y $m(T_bA) = m^*(T_bA) = m(A)$. □

4.4. Cubos diádicos y conjuntos abiertos

Definición 4.4.1. Un intervalo diádico de longitud 2^{-k} en $\mathbb{R}$ es un intervalo de la forma $I = (m2^{-k}, (m+1)2^{-k}]$, con $m, k \in \mathbb{Z}$.

Observación 4.4.2. Algunas propiedades inmediatas son

1. Fijado $k \in \mathbb{Z}$, los intevalos 2^{-k} constituyen una partición numerable de $\mathbb{R}$.
2. Dados dos intervalos diádicos de longitud 2^{-k}, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que, o son iguales o son disjuntos.
3. Dados dos intervalos diádicos cualesquiera, o bien son disjuntos, o bien uno está contenido en el otro.

Definición 4.4.3. Un cubo diádico de $\mathbb{R}^n$ de lado 2^{-k}, con $k \in \mathbb{Z}$, es un producto cartesiano de n intervalos diádicos de $\mathbb{R}$ de longitud 2^{-k}, es decir, es de la forma

$$I = (m_1 2^{-k}, (m_1+1)2^{-k}] \times ... \times (m_n 2^{-k}, (m_n+1)2^{-k}], \qquad m_j \in \mathbb{Z}.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}_k$ a la familia de los cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$ de lado 2^{-k}, mientras que $\mathcal{D}$ será la unión $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$, esto es, $\mathcal{D}$ es la familia de todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.4.4. *Sea $G = \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una familia numerable $\{I_j\}$ de cubos diádicos disjuntos tal que $G = \cup_j I_j$.*

Teorema 4.4.5. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible y de medida finita. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\{Q_j\}_{j=1}^N$ de cubos cerrados disjuntos tal que si $F = \cup_{j=1}^N Q_j$ se tiene que $m(E \triangle F) < \varepsilon$. ($E \triangle F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E)$).*

4.5. Funciones simples en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.5.1. Una función paso φ es una combinación lineal finita de funciones características de rectángulos (intervalos acotados), es decir,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} a_i \mathcal{X}_{R_i},$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y R_i es un rectángulo.

Teorema 4.5.2. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, entonces existe una sucesión $\{\varphi_k\}$ de funciones paso que converge a f en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$.*

4.6. Relación entre las medidas de Lebesgue

Teorema 4.6.1. *Consideramos $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, m_p)$ y $(\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$ los espacios de medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, respectivamente. Si A es medible en $\mathbb{R}^p$ $(A \in \mathcal{L}_p)$ y B es medible en $\mathbb{R}^q$ $(B \in \mathcal{L}_q)$ entonces $A \times B$ es medible en $\mathbb{R}^{p+q}$ $(A \times B \in \mathcal{L}_{p+q})$ y $m_{p+q}(A \times B) = m_p(A)m_q(B)$.*

4.7. La medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$

Las funciones crecientes y continuas por la derecha se denominan funciones de distribución. A cada función de distribución F le vamos a asignar una medida de Borel en $\mathbb{R}$, es decir, una medida definida en la σ-álgebra de Borel tal que la medida del intevalo $(a, b]$ es $F(b) - F(a)$. Es de destacar que solo existe una medida con estas propiedades.

Teorema 4.7.1. *Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente continua por la derecha (una función de distribución). Entonces existe una única medida m_F definida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $m_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ para todo intervalo $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dicha medida recibe el nombre de medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Si F es la función identidad, $F(x) = x$, m_F es la medida de Lebesgue (es la única medida m definida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tal que $m((a, b]) = b - a$).*

- **Existencia**. Sea $\mathcal{E} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. Definamos $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty)$ como $\rho((a, b]) = F(b) - F(a)$. $\mathcal{E}$ es una familia recubridora de $\mathbb{R}$ pues
  - $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{E}$ y
  - $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty}(-n, n]$.

  Además, $\rho(\emptyset) = \rho((a, a]) = F(a) - F(a) = 0$, independientemente del a elegido. Luego, por el teorema de construcción de medidas exteriores, $m_F^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

  $$m_F^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : A \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i], (a_i, b_i] \in \mathcal{E}\right\}$$

  es una medida exterior. Sea

  $$\begin{aligned} \mathcal{M}_F^* &= \{A \subset \mathbb{R} : m_F^*(A \cap E) + m_F^*(A^c \cap E) = m_F^*(E) \text{ para todo } E \subset \mathbb{R}\} \\ &= \{A \subset \mathbb{R} : m_F^*(A \cap (a, b]) + m_F^*(A^c \cap (a, b]) = m_F^*((a, b]) \text{ para todo } (a, b] \in \mathcal{E}\} \end{aligned}$$

  la σ-álgebra de Carathéodory asociada a m_F^*. Se tienen las propiedades siguientes
  - $m_F^*((a, b]) = F(b) - F(a)$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Para probar esta propiedad, hacemos uso del siguiente lema

    Lema 4.7.2. *Si $(a, b] \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$ entonces*

    $$\rho((a, b]) = F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(F(b_i) - F(a_i)).$$

- Es importante el siguiente lema.

  Lema 4.7.3. *Todo intervalo semiabierto* $(-\infty, c]$ *es* m_F^**-medible.*

  Demostración. Sea $(a,b] \in \mathcal{E}$, entonces

  (i) Si $c \leq a$

  $$\begin{aligned}&(-\infty, c] \cap (a,b] = \emptyset \\ &(-\infty, c]^c \cap (a,b] = (c, +\infty) \cap (a,b] = (a,b]\end{aligned}$$

  por tanto, $m_F^*((-\infty, c] \cap (a,b]) + m_F^*((-\infty, c]^c \cap (a,b]) = m_F^*((a,b])$.

  (ii) Si $c \geq b$

  $$\begin{aligned}&(-\infty, c] \cap (a,b] = (a,b] \\ &(-\infty, c.]^c \cap (a,b] = (c, +\infty) \cap (a,b] = \emptyset\end{aligned}$$

  por tanto, $m_F^*((-\infty, c] \cap (a,b]) + m_F^*((-\infty, c]^c \cap (a,b]) = m_F^*((a,b])$.

  (iii) Si $a < c < b$

  $$\begin{aligned}&(-\infty, c] \cap (a,b] = (a,c] \\ &(-\infty, c]^c \cap (a,b] = (c, +\infty) \cap (a,b] = (c,b]\end{aligned}$$

  por tanto, $m_F^*((-\infty, c] \cap (a,b]) + m_F^*((-\infty, c]^c \cap (a,b]) = m_F^*((a,b])$.

  □

- El lema anterior demuestra que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_F^*$ ya que $\mathcal{M}_F^*$ es una σ-álgebra y los intervalos $(-\infty, c]$ generan la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
- $m_F = m_F^*|_{\mathcal{M}_F^*}$ es completa (por el Teorema de Carathéodory).
- Es claro que $m_F = m_F^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ cumple las condiciones requeridas.

▪ **Unicidad**: Solo nos interesa saber que es única, la demostración se deja como ejercicio.

El resultado siguiente es un recíproco de lo que hemos demostrado.

Teorema 4.7.4. *Si* μ *es una medida de Borel sobre* $\mathbb{R}$ *que es finita para todo intervalo acotado, entonces existe* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *creciente y continua por la derecha tal que* $m_F = \mu$.

Demostración. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} -\mu((x,0]) & si \quad x \leq 0 \\ \mu((0,x]) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

F cumple las condiciones. □

Proposición 4.7.5. *Sean* F *y* G *funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *crecientes y continuas por la derecha. Entonces* $m_F = m_G$ *si y solo si existe una constante* C *tal que* $F - G = C$.

Teorema 4.7.6. *Si* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es creciente y continua por la derecha, entonces para todo* $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} m_F(E) &= \text{ínf}\{m_F(G) : E \subset G, G \text{ } abierto\} \\ &= \sup\{m_F(K) : K \subset E, K \text{ } compacto\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.7.

- Para cada $x \in \mathbb{R}$, calcular $m_F(\{x\})$.

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x\right]$$

Nótese que $(x - \frac{1}{n}, x]$ es una sucesión contractiva, por tanto

$$m_F(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m_F \left(x - \frac{1}{n}, x\right] = \lim_{n\to\infty} F(x) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) = F(x) - F(x^-).$$

- Determinar $m_F([a,b])$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} m_F([a,b]) &= m_F(\{a\} \cup (a,b]) = m_F(\{a\}) + m_F((a,b]) \\ &= F(a) - F(a^-) + F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(a^-). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.8. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determinar m_F.

- Calculemos $m_F((-\infty, 0))$.

$$\begin{aligned} m_F((-\infty,0)) &= m_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-n, -\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} m_F\left(-n, -\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F\left(-\frac{1}{n}\right) - F(-n) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

- Calculemos $m_F((0, +\infty))$.

$$\begin{aligned} m_F((0,+\infty)) &= m_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, n\right)\right) = \lim_{n\to\infty} m_F\left(\frac{1}{n}, n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(n) - F\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

- Calculemos $m_F(\{0\})$.

$$m_F(\{0\}) = m_F(0) - m_F(0^-) = 1 - 0 = 1.$$

Por tanto $m_F = \delta_0$, es decir, m_F es la delta de Dirac en $a = 0$.

4.7.1. La integral asociada a medidas de Lebesgue-Stieltjes

Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución que es derivable con derivada continua. Sea m_F la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F (recordemos que m_F es la única medida definida sobre la σ-álgebra de Borel tal que la medida del intervalo $(a,b]$ es $F(b) - F(a)$). Sea $f = F'$, la derivada de F y sea ν la medida con densidad f definida sobre todos los medibles-Lebesgue, es decir,

$$\nu(B) = \int_B f(x)\, dx.$$

Si calculamos la medida de los intervalos $(a, b]$ queda

$$\nu((a,b]) = \int_{(a,b]} f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f(x)\ dx = \int_a^b F'\ dx = F(b) - F(a),$$

donde hemos empleado que los puntos tienen medida de Lebesgue cero, que las funciones integrables-Riemann son integrables-Lebesgue y, por último, hemos aplicado la regla de Barrow. Como vemos,

$$\nu((a,b]) = m_F((a,b])$$

para todo intervalo $(a, b]$. Entonces ν y m_F coinciden en la σ-álgebra de Borel. Por lo tanto, aplicando los resultados de la sección anterior, si $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible-Borel, la integral de Lebesgue-Stieltjes de g respecto de m_F es

$$\int_{\mathbb{R}} g\ dm_F = \int_{\mathbb{R}} g\ d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\ dx.$$

De igual forma, una función medible-Borel g definida sobre $\mathbb{R}$ es integrable si y solo si gf es integrable respecto de la medida de Lebesgue y, en ese caso,

$$\int_{\mathbb{R}} g\ dm_F = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\ dx.$$

La medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función de distribución F se denota también por dF. Con esta notación, tenemos

$$\int_B g(x)\ dF(x) = \int_B g(x)F'(x)\ dx.$$

Ejemplo 4.7.9. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x \leq 0 \\ 2x & si \quad 0 < x < 2 \\ 5 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 3^x & si \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Si g es medible Borel y no negativa, dar una expresión de la integral $\int_{\mathbb{R}} g\ dm_F$ en término de integrales respecto de la medida de Lebesgue.

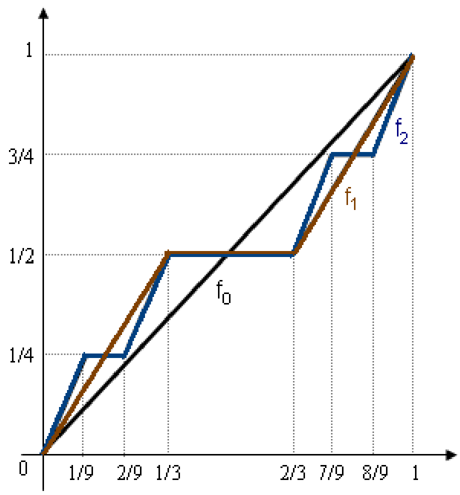
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dF(x) &= \int_{(-\infty,0)} g(x)\ dF(x) + \int_{\{0\}} g(x)\ dF(x) + \int_{(0,2)} g(x)\ dF(x) + \int_{\{2\}} g(x)\ dF(x) + \\ &+ \int_{(2,3)} g(x)\ dF(x) + \int_{\{3\}} g(x)\ dF(x) + \int_{(3,+\infty))} g(x)\ dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{2} g(x)(-2x)\ dx + g(0)m_F(\{0\}) + \int_0^2 g(x)2\ dx + g(2)m_F(\{2\}) \\ &+ \int_2^3 g(x)0\ dx + g(3)m_F(\{3\}) + \int_3^{+\infty} g(x)3^x \log(3)\ dx \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.10 (La escalera del diablo)**.** A continuación se define una sucesión $\{f_n\}$ de funciones sobre el intervalo $[0, 1]$ que converge a la función de Cantor.

Sea $f_1(x) = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la siguiente función $f_{n+1}(x)$ se definirá en términos de $f_n(x)$ como sigue:

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & si \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & si \quad \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

Gráficamente:



Nótese que

- f_n es creciente.
- f_s es continua.
- Además

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ converge uniformemente.

$$S_N(x) = sum_{n=1}^{N}(f_{n+1}(x) - f_n(x)) = f_{N+1}(x) - f_1(x),$$

por tanto, $\{f_n\}$ converge uniformemente es $[0, 1]$.

Sea F el límite uniformente de $\{f_n\}$, entonces

- F es continua.
- F es creciente.
- $F(1) = 1$ y $F(0) = 0$.
- $F'(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]\backslash C$, donde C es *el conjunto de Cantor*, por tanto

$$\int_0^1 F'(x)\ dx = 0.$$

y $F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1$. Por tanto

$$\int_0^1 F'(x)\ dx = 0 \neq F(1) - F(0),$$

es decir, no se cumple la regla de Barrow.

Además

$$m_F(\mathbb{R}) = m_F([0, 1]) = m_F((0, 1]) = F(1) - F(0) = 1 \text{ y}$$
$$m_F([0, 1]\backslash C) = 0 \Longrightarrow m_F(C) = 1 \neq m(C) = 0.$$

Consideremos ahora $H : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x) = F(x) + x$, es claro que

- H es continua.
- H es estrictamente creciente.
- $H(0) = F(0) + 0 = 0$ y $H(1) = F(1) + 1 = 2$.
- $H([0, 1]) = [0, 2]$.

Restringiendo la imagen teneos que $H : [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$ es continua y biyectiva y $H^{-1} : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$ es continua. Además, $m(H([0, 1]\backslash C)) = m([0, 1]\backslash C) = 1$. Calculemos ahora $m(H(C))$.

$$\begin{aligned}
&[0, 1] = C \cup ([0, 1]\backslash C) \\
&H([0, 1]) = H(c) \cup H([0, 1]\backslash C) = [0, 2]
\end{aligned}$$

por lo que $m(H(C)) = 1$. Como tiene medida positiva, entonces existe $E \subset H(C)$ tal que E no es medible-Lebesgue. Consideremos $H^{-1}(E) \subset C$. Como $m(C) = 0$ entonces $m(H^{-1}(E)) = 0$, por lo que $H^{-1}(E)$ es medible-Lebesgue, pero ¿es medible-Borel? No, porque si lo fuera, $H(H^{-1}(E)) = E$ sería medible-Borel, que no es cierto (puesto que E no es medible-Lebesgue). Luego $H^{-1}(E)$ es medible-Lebesgue pero no medible-Borel.

Adeás, $\mathcal{X}_E$ no es medible-Lebesgue, ya que

$$\mathcal{X}_E = \mathcal{X}_{H^{-1}(E)}(H^{-1}(x)) = (\mathcal{X}_{H^{-1}(E)} \circ H^{-1})(x).$$

Capítulo 5

Medida e integración en espacios producto

5.1. La medida producto

Sabemos que si A es medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^p$ y B es medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^q$ entonces $A \times B$ es medible-Lebesgue de $\mathbb{R}^{p+q}$ y $m_{p+q}(A \times B) = m_p(A)m_q(B)$. La medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{p+q}$ es, en este sentido, la medida producto de las medidas de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$ y de $\mathbb{R}^q$. Más aún, el Principio de Cavalieri nos dice que la medida de Lebesgue de cualquier medible de $\mathbb{R}^{p+q}$ se puede obtener a partir de las medidas de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$ y de $\mathbb{R}^q$. La idea de este tema es obtener una medida producto en el contexto de espacio de medida abstractos, medida que ha de conservar las propiedades anterior. Pasamos a precisar lo que acabamos de decir.

Nuestro punto de partida es la consideración de dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. El objetivo es definir una medida $\mu \times \nu$ sobre el espacio producto cartesiano $X \times Y$ de manera que $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$, donde $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$.

5.1.1. La σ-álgebra producto

Comenzamos con la definición de rectángulo medible.

Definición 5.1.1. Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles. Si $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$ decimos que el conjunto $A \times B$ es un rectángulo medible. Denotaremos por $\mathcal{E}$ a la familia de los rectángulos medibles.

Definición 5.1.2. Dados dos espacios medibles $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$, llamamos σ-álgebra producto, y la denotamos por $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, a la σ-álgebra generada por la familia de rectángulos medibles $\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$.

Proposición 5.1.3. *Consideremos* $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p})$ *y* $(\mathbb{R}^q, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q})$*. Entonces*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}.$$

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$. Consideremos

$$\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}\} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}.$$

Entonces

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} = \mathcal{M}\mathcal{M}\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}.$$

Veamos ahora que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \supset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$. Consideremos

$$\mathcal{F} = \{\text{intervalos de } \mathbb{R}^{p+q}\} = \{I \times J : I \text{ intervalo de } \mathbb{R}^p, J \text{ intervalo de } \mathbb{R}^q\}$$

Es claro que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}} = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ y que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, por tanto

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}} = \mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}.$$

□

5.1.2. Definición de la medida producto

Fijemos dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Sea $\mathcal{E}$ la familia de los rectángulos medibles. Es claro que $\mathcal{E}$ es una familia recubridora pues

- $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{E}$ y
- $X \times Y \subset X \times Y \in \mathcal{E}$.

Sea $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}.$$

Es claro que $p(\emptyset) = 0$, luego $\pi^* : \mathcal{P}(X \times Y) \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\begin{aligned}\pi^*(E) &= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : E \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{E}\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : E \subset \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i), A_i \in \mathcal{M}, B_i \in \mathcal{N}\right\},\end{aligned}$$

es una medida exterior.

Proposición 5.1.4. *Supongamos que $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, donde E y todos los E_i son rectángulos medibles. Entonces*

$$\rho(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i).$$

de donde se sigue de forma inmediata que si $E = A \times B$ es un rectángulol medible entonces $\pi^*(A \times B) = \rho(E)$, es decir,

$$\pi^*(A \times B) = \rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}.$$

Proposición 5.1.5. *Sea $\mathcal{M}_\rho^*$ la σ-álgebra de Carathéodory asociada a π^*. Se tiene que*

- $\pi^*|_{\mathcal{M}_\rho^*}$ *es una medida completa.*
- $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{M}_\rho^*$.
- $\pi := \pi^*|_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ *es una medida.*
- $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

La medida π es la medida producto que se suele deonta por $\mu \times \nu$.

Teorema 5.1.6. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida. Entonces, existe una medida π definida sobre la σ-álgebra producto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tal que*

$$\pi(A \times B) = \mu_(A)\nu(B) \ \textit{cualesquiera que sean } A \in \mathcal{M} \textit{ y } B \in \mathcal{N}.$$

Este teorema de existencia se complementa con el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 5.1.7. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Entonces, existe una única medida γ definida sobre la σ-álgebra producto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ tal que*

$$\gamma(A \times B) = \mu_(A)\nu(B) \text{ cualesquiera que sean } A \in \mathcal{M} \text{ y } B \in \mathcal{N}.$$

Dicha medida es $\gamma = \mu \times \nu$.

Observación 5.1.8. (1) Si las medidas μ y ν son finitas entonces $\mu \times \nu$ es finita.

(2) Si las medidas μ y ν son probabilidades entonces $\mu \times \nu$ es una probabilidad.

(3) Si las medidas μ y ν son σ-finitas entonces $\mu \times \nu$ es σ-finita.

Observación 5.1.9. Dado un número natural n, considermos $\mathbb{R}^n$ con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ y la medida de Lebesgue m_n. Sean p y q dos números naturales y tomemos los espacios de medida $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}, m_p)$ y $(\mathbb{R}^q, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}, m_q)$. Vamos a identificar el espacio de medida producto $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}, m_{p+q})$. Ya hemos establecido que

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}.$$

Por otra parte, si I es un intervalo de $\mathbb{R}^{p+q}$, $I = J \times H$ donde J y H son intervalos de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, respectivamente,, se tiene que

$$m_p \times m_q(I) = m_p \times m_q(J \times H) = m_p(J)m_q(H) = \mathcal{V}(I).$$

Así que $m_p \times m_q$ es una medida definida sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$ tal que la medida $m_p \times m_q(I)$ de cada intervalo coincide con su volumen. Por el teorema de unicidad de la medida de Lebesgue, $m_p \times m_q$ es m_{p+q} restringida a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$. Por lo tanto,

$$(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}, m_p \times m_q) = (\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}, m_{p+q})$$

En particular, esta igualdad deuestra que si $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}$ y $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$ entonces $A \times B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$ y

$$m_{p+q}(A \times B) = m_p \times m_q(A \times B) = m_p(A)m_q(B).$$

5.2. El Principio de Cavalieri

Definición 5.2.1. Sean X e Y dos conjuntos. Si $E \subset X \times Y$ y $x \in X$, definimos la x-sección de E como

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\},$$

y, si $y \in Y$, la y-sección de E como

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Algunas propiedades inmediatas de las secciones son las siguientes:

(i) Si $E \subset X \times Y$ y E^c es el complementario de E entonces $(E^c)_x = (E_x)^c$ y $(E^c)^y = (E^y)^c$.

(ii) Si $\{E_j\}$ es una familia arbitraria de conjuntos ded $X \times Y$ entonces

$$(\cup_j E_j)_x = \cup_j (E_j)_x, \quad (\cap_j E_j)_x = \cap_j (E_j)_x,$$
$$(\cup_j E_j)^y = \cup_j (E_j)^y, \quad (\cap_j E_j)^y = \cap_j (E_j)^y.$$

Proposición 5.2.2. *Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles. Sea $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la σ-álgebra. Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, $x \in X$ e $y \in Y$, entonces $E_x \in \mathcal{N}$ y $E^y \in \mathcal{M}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \text{ para todo } x \in X\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

- $X \times Y \in \mathcal{F}$ pues
$$(X \times Y)_x = \{y \in Y : (x, y) \in X \times Y\} = Y.$$
Como $\mathcal{N}$ es σ-álgebra, entonces $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{N}$ y por tanto, $X \times Y \in \mathcal{F}$.
- Si $E \in \mathcal{F}$ entonces $E^c \in \mathcal{F}$ pues
$$(E^c)_x = (E_x)^c.$$
Como $\mathcal{N}$ es σ-álgebra, entonces $(E_x)^c \in \mathcal{N}$ y por tanto, $E^c \in \mathcal{F}$.
- Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, $E_i \in \mathcal{N}$ entonces $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}$ pues
$$(\cup_j E_j)_x = \cup_j (E_j)_x.$$
Como $\mathcal{N}$ es σ-álgebra, entonces $\cup_j (E_j)_x \in \mathcal{N}$ y por tanto, $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$.

Además la familia $\mathcal{E}$ de los rectángulos medibles está contenida en $\mathcal{F}$. En efecto, si $E = A \times B$ con $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$ entonces
$$E_x = \begin{cases} B & si \quad x \in A \\ \emptyset & si \quad x \notin A \end{cases}$$
Luego $E_x \in \mathcal{N}$ para todo $x \in X$ y, por consiguiente, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, resulta que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. $\square$

Observación 5.2.3. Sean p y q dos números naturales y tomemos los espacios de medida $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}, m_p)$ y $(\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$. Veamos que
$$\mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q \subsetneq \mathcal{L}_{p+q}.$$
Primero vamos a probar que $\mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_{p+q}$. Sea $A \in \mathcal{L}_p$ y $B \in \mathcal{L}_q$. Entoces
$$\begin{gathered} A = E_A \cup F_B, \quad E_A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}, \quad m_P(F_A) = 0 \text{ y} \\ B = E_B \cup F_B, \quad E_B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}, \quad m_q(F_B) = 0. \end{gathered}$$
Entonces
$$A \times B = E_A \times E_B \cup E_A \times F_B \cup F_A \times E_B \cup F_A \times F_B.$$
Nótese que

- $E_A \times E_B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$.
- Existe $N_B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$ tal que $F_B \subset N_B$, $m_q(N_B) = 0$. Por tanto $E_A \times F_B \subset E_A \times N_A$ y $m_{p+q}(E_A \times N_A) = m_p(A) m_q(N_A) = 0$. Luego
$$E_A \times F_B \in \mathcal{L}_{p+q} \text{ y } m_{p+q}(E_A \times F_B) = 0.$$
- De igual forma se ve $F_A \times E_B \in \mathcal{L}_{p+q}$ y $m_{p+q}(F_A \times E_B) = 0$ y que $F_A \times F_B \in \mathcal{L}_{p+q}$ y $m_{p+q}(F_A \times F_B) = 0$.

Por tanto, $A \times B \in \mathcal{L}_{p+q}$ y
$$m_{p+q}(A \times B) = m_{p+q}(E_A \times E_B) = m_p(E_A) m_q(E_B) = m_p(A) m_q(B).$$
Si consideramos ahora $(\mathbb{R}^{p+q}, \mathcal{L}_{p+q}, m_{p+q})$, se tiene $\mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ donde
$$\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{L}_p, B \in \mathcal{L}_q\}$$

Es claro que $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}_{p+q}$ y como $\mathcal{L}_{p+q}$ es σ-álgebra, entonces $\mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q = \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{L}_{p+q}$. Entonces $m_p \times m_q = m_{p+q}|_{\mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q}$.

Para ver que son distintos, tomamos el conjunto $E = A \times D$, donde $\emptyset \neq A \in \mathcal{L}_p$, $m_p(A) = 0$ y $D \subset \mathbb{R}^q$ es un un conjuto nno medible ($D \notin \mathcal{L}_q$. Observamos que $E = A \times D \subset A \times \mathbb{R}^q$. Como A tiene medida cero y $\mathbb{R}^q$ es medible-Lebesgue, tenemos que $A \times \mathbb{R}^q \in \mathcal{L}_{p+q}$ y $m_{p+q}(A \times \mathbb{R}^q) = 0$. Por la completitud de la medida m_{p+q} llegamos a que $E = A \times D \in \mathcal{L}_{p+q}$.

Veamos ahora que $E \notin \mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $E \in \mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q$, entonces todas sus secciones $E_x \in \mathcal{L}_q$. Ahora bien, como $A \neq \emptyset$ existe $a \in A$ y como $E_a = D \notin \mathcal{L}_q$ llegamos a ua contradicción. Luego $E = A \times D \in \mathcal{L}_{p+q}$ y $E \notin \mathcal{L}_p \otimes \mathcal{L}_q$.

La medida producto está determinada por las secciones. Este es el contenido del Principio de Cavalieri.

Teorema 5.2.4 (El Principio de Cavalieri)**.** *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Sea $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Entonces*

(i) La aplicación $\varphi_E : X \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\varphi_E(x) = \nu(E_x)$$

está definida para todo $x \in X$, es medible ($\mathcal{M}$-medible) y se verifica

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \varphi_E \; d\mu(x) = \int_X \nu(E_x) \; d\mu(x).$$

(ii) La aplicación $\psi_E : Y \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\psi_E(y) = \mu(E^y)$$

está definida para todo $y \in Y$, es medible ($\mathcal{N}$-medible) y se verifica

$$\mu \times \nu(E) = \int_Y \psi_E(y) \; d\nu(y) = \int_Y \mu(E^y) \; d\nu(y)$$

Demostración. Basta demostrar (i) puesto que la demosrtación de (ii) se hace de forma simétrica.

Es claro que la aplicación $\varphi_E : X \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$\varphi_E(x) = \nu(E_x)$$

está definida para todo $x \in X$. Supongamos que hemos demostrado que φ_E es medible (no lo haremos, de momento). Definamos una nueva aplicación sobre la σ-álgebra producto :

$$\gamma : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \longrightarrow [0, +\infty], \quad \gamma(E) = \int_X \varphi_E \; d\mu.$$

Puesto que φ_E es medible y no negativa se sigue que γ es una medida. Veámoslo.

- $\gamma(\emptyset) = \int_X \varphi_\emptyset(x) \; d\mu(x) = \int_X 0 \; d\mu(x) = 0$.
- Sea $\{E_i\}_{i=1}^\infty$, $E_i \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ y disjunta. Entonces

$$\gamma(\cup_{i=1}^\infty E_i) = \int_X \varphi_{(\cup_{i=1}^\infty E_i)}(x) \; d\mu(x) = \int_X \nu((\cup_{i=1}^\infty E_i)_x) \; d\mu(x) = \int_X \nu(\cup_{i=1}^\infty (E_i)_x) \; d\mu(x)$$
$$= \int_X \sum_{i=1}^\infty \nu((E_i)_x) = \sum_{i=1}^\infty \int_X \nu((E_i)_x) = \sum_{i=1}^\infty \gamma(E_i).$$

Por tanto, γ es medida. Sea $E = A \times B$ con $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$ entonces

$$\varphi_E(x) = \nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B) & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases} = \nu(B)\mathcal{X}_A,$$

por lo que

$$\gamma(E) = \int_X \varphi_E \; d\mu(x) = \nu(B)\mu(A) = \mu \times \nu(E).$$

Por la unicidad de la medida producto en espacios de medida σ-finitos, concluimos que $\gamma = \mu \times \nu$, lo que demuestra el teorema. $\square$

Corolario 5.2.5. *Sea $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$. Las afirmaciones siguientes son ciertas*

(a) $B_x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$ y $B^y \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}$ para todo $y \in \mathbb{R}^q$.

(b) Las aplicaciones $\varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, +\infty]$ y $\psi : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, +\infty]$, definidas por

$$\varphi(x) = m_q(B_x) \quad y \quad \psi(y) = m_p(B^y),$$

son medibles-Borel y

$$m_{p+q}(B) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x) \; dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y) \; dy.$$

5.3. Los Teoremas de Tonelli y Fubini

5.3.1. Secciones de aplicaciones

Definición 5.3.1. Si f es una función definida sobrer $X \times Y$, $f : X \times Y \longrightarrow Z$, y $x \in X$ definimos la x-sección de f como la función

$$f_x : Y \longrightarrow Z \text{ dada por } f_x(y) = f(x, y).$$

Análogamente se define las secciones f^y si $y \in Y$:

$$f^y : X \longrightarrow Z \text{ dada por } f^y(x) = f(x, y).$$

Proposición 5.3.2. *Sean $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ y $(Z, \mathcal{F})$ tres espacios medibles. Sea $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la σ-álgebra producto. Si $f : X \times Y \longrightarrow Z$ es $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mathcal{F})$-medible, entonces, para todo $x \in X$ f_x es $(\mathcal{N}, \mathcal{F})$-medible y para todo $y \in Y$ f^y es $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$-medible.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\begin{aligned} (f_x)^{-1}(E) &= \{y \in Y : f_x(y) \in E\} = \{y \in Y : f(x, y) \in E\} \\ &= \{y \in Y : (x, y) \in f^{-1}(E)\} = (f^{-1}(E))_x. \end{aligned}$$

Como $f : X \times Y \longrightarrow Z$ es $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mathcal{F})$-medible, entonces $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Luego $E_x \in \mathcal{N}$ puesto que $E_x = (f_x)^{-1}(E) = (f^{-1}(E))_x$. $\square$

5.3.2. El Teorema de Tonelli

Teorema 5.3.3 (Teorema de Tonelli)**.** *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible y no negativa. Entonces* *(i) La aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \; d\nu$$

está definida en todo punto x de X, es $\mathcal{M}$-medible, no negativa (puede tomar el valor $+\infty$) y se verifica

$$\int_{X\times Y} f \; d(\mu\times\nu) = \int_X \varphi \; d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \; d\nu(y)\right) \; d\mu(x).$$

(ii) La aplicación $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(y) = \int_X f^y \; d\mu$$

está definida en todo punto y de Y, es $\mathcal{N}$-medible, no negativa (puede tomar el valor $+\infty$) y se verifica

$$\int_{X\times Y} f \; d(\mu\times\nu) = \int_Y \psi \; d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \; d\mu(x)\right) \; d\nu(y).$$

Demostración. Demostremos (i) puesto que (ii) se prueba de la misma forma.

En primer lugar, observamos que si E es un conjunto medible y $f = \mathcal{X}_E$ entonces las conclusiones del Teorema de Tonelli no son otra cos que las contenidas en el Principio de Cavalieri.

$$f_x(y) = \mathcal{X}_E(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad (x,y)\in E \\ 0 & si \quad (x,y)\notin E \end{cases} = \begin{cases} 1 & si \quad y\in E_x \\ 0 & si \quad y\notin E_x \end{cases} = \mathcal{X}_{E_x}(y).$$

Aplicando el Principio de Cavalieri

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \; d\nu = \int_Y \mathcal{X}_{E_x} \; d\nu = \nu(E_x) \quad \text{y}$$
$$\mu\times\nu(E) = \int_X \nu(E) \; d\mu = \int_X \varphi \; d\mu$$

Luego

$$\int_{X\times Y} \mathcal{X}_E \; d(\mu\times\nu) = \int_X \varphi(x) \; d\mu(x),$$

es decir, el teorema se da para funciones características de conjuntos medibles.

Supongamos ahora que f es una función simple medible no negativa de expresión canónica $f = \sum_{i=1}^s a_i\mathcal{X}_{A_i}$. Entonces

$$f_x = \sum_{i=1}^s a_i(\mathcal{X}_{A_i})_x$$

Sabemos que f_x es medible para todo $x\in X$. Denotemos por *varphi* a la función

$$\varphi_i(x) = \int_Y (\mathcal{X}_{A_i})_x(y) \; d\nu(y) = \nu((A_i)_x).$$

Esta aplicación es medible por lo ya probado. Además

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \; d\nu(x) = \int_Y \sum_{i=1}^s a_i(\mathcal{X}_{A_i})_x \; d\nu(x) = \sum_{i=1}^s \int_Y a_i(\mathcal{X}_{A_i})_x \; d\nu(x) = \sum_{i=1}^s a_i\varphi_i(x)$$

Luego φ es medible y

$$\begin{aligned}\int_X \varphi(x)\ d\mu(x) &= \sum_{i=1}^{s} a_i \int_X \varphi_i(x)\ d\mu(x) = \sum_{i=1}^{s} a_i \int_X \nu((A_i)_x)\ d\mu(x)\\ &= \sum_{i=1}^{s} a_i \mu\times\nu(A_i) = \int_{X\times Y} f(x,y)\ d(\mu\times\nu)(x,y).\end{aligned}$$

Finalmente, sea f un función medible arbitraria. Por una parte, sabemos que f_x es medible para todo $x \in X$. Además, es no negativa, luego φ está definida en todo $x \in X$. Por otra parte existe un sucesión creciente s_n de funciones simples, medibles, no negativas, tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$. Se tiene entonces que las secciones $(s_n)_x$ constituyen una sucesión creciente de funciones medibles no negativas y $\lim_{n\to\infty}(s_n)_x = f_x$ para todo $x \in X$. Sabemos, por el caso anterior, que para todo $x \in X$, $(s_n)_x$ es medible, las funciones definidas en todo punto por

$$\varphi_n(x) = \int_Y (s_n)_x(y)\ d\nu(y)$$

son medibles y

$$\int_X \varphi_n(x)\ d\mu(x) = \int_{X\times Y} s_n(x,y)\ d(\mu\times\nu)(x,y).$$

Aplicando entonces el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\varphi(x) = \int_Y f_x(y)\ d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_Y (s_n)_x(y)\ d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

para todo $x \in X$. Luego, φ es medible en X. Además φ_n es una sucesión creciente en X. Finalmente, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona (dos veces)

$$\int_X \varphi(x)\ d\mu(x)$$

□

5.3.3. El Teorema de Fubini

Teorema 5.3.4 (Teorema de Fubini)**.** *Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Sea $f : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-medible e integrable. Entonces*

(i) Para casi todo $x \in X$, f_x es integrable en Y.

(ii) La aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_Y f_x\ d\nu$$

está definida en casi todo punto x de X, es integrable y se verifica

$$\int_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu) = \int_X \varphi\ d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\right)\ d\mu(x).$$

(iii) Para casi todo $y \in Y$, f^y es integrable en X.

(iv) La aplicación $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(y) = \int_X f^y\ d\mu$$

está definida en casi todo punto y de Y, es integrable y se verifica

$$\int_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu) = \int_Y \psi\ d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\right)\ d\nu(y).$$

Demostración. Por razones de simetria, basta demostrar (i) y (ii). Sabemos que $f = f^+ - f^-$. Aplicando el Teorema de Tonelli a estas dos funciones medibles y no negativas, sabemos que las aplicaciones

$$\varphi_1(x) = \int_Y (f^+)_x \, d\nu \quad \text{y} \quad \varphi_2(x) = \int_Y (f^-)_x \, d\nu$$

están bien definidas y son $\mathcal{M}$-medibles. Además

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_1(x) \, d\mu &= \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu\times\nu) \leq \int_{X\times Y} |f| \, d(\mu\times\nu) < +\infty \\ \int_X \varphi_2(x) \, d\mu &= \int_{X\times Y} f^- \, d(\mu\times\nu) \leq \int_{X\times Y} |f| \, d(\mu\times\nu) < +\infty \end{aligned}$$

Entonces si $E^+ = \{x \in X : \varphi_1 < +\infty\} = \{x \in X : (f^+)_x \text{ es integrable}\}$ se tiene que $\mu(X\backslash E^+) = 0$. De la misma forma $E^- = \{x \in X : \varphi_2 < +\infty\} = \{x \in X : (f^-)_x \text{ es integrable}\}$ entonces $\mu(X\backslash E^-) = 0$. Si $E = \{x \in X : f_x \text{ es integrable}\}$ se tiene que $E = E^+ \cap E^-$. Luego $\mu(X\backslash E) = 0$, lo que prueba (i).

Es claro que φ está bien definida en E. Luego está definida en casi todo punto. Además $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ en E. Como φ_1 y φ_2 son integrabls en X (en B) entonces φ es integrable en X y

$$\begin{aligned} \int_X \varphi \, d\mu &= \int_B \varphi \, d\mu = \int_B \varphi_1 \, d\mu - \int_B \varphi_2 \, d\mu \\ &= \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^- \, d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu). \end{aligned}$$

□

Observación 5.3.5. 1. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Sea $D \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible y no negativa o integrable respecto de la meida producto. Entonces

$$\int_D f \, d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_{D_x} f(x,y) \, d\nu(u)\right) \, d\mu(x) = \int_Y \left(\int_{D^y} f(x,y) \, d\mu(x)\right) \, d\nu(y).$$

2. Si en el apartado anterior se toma $D = A \times B$, donde $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$ se tiene que

$$\int_{A\times B} f \, d(\mu\times\nu) = \int_A \left(\int_B f(x,y) \, d\nu(u)\right) \, d\mu(x) = \int_B \left(\int_A f(x,y) \, d\mu(x)\right) \, d\nu(y).$$

5.3.4. Los teoremas de Tonelli y Fubini para funciones medibles Borel

Si tenemos en cuenta que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q}$ y que $m_{p+q} = m_p \times m_q$ y aplicamos el Teorema de Tonelli obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.3.6 (Teorema de Tonelli para funciones medibles Borel)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible-Borel y no negativa. Entonces*

(i) La aplicación $\varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, dy$$

está definida en todo punto x de $\mathbb{R}^q$, es medible-Borel, no negativa (puede tomar el valor $+\infty$) y se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \, dy\right) \, dx.$$

(ii) La aplicación $\psi : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \ dx$$

está definida en todo punto y de $\mathbb{R}^p$, es medible-Borel, no negativa (puede tomar el valor $+\infty$) y se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \ d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \psi \ dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \ dx \right) \ dy.$$

De la misma forma, aplicando el Teorema de Fubini nos queda el siguiente resultado para funciones medibles Borel.

Corolario 5.3.7 (Teorema de Fubini para funciones medibles Borel)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible-Borel y no negativa. Entonces*

(i) Para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, f_x es integrable en $\mathbb{R}^q$.

(ii) La aplicación $\varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x \ dy$$

está definida en casi todo punto x de $\mathbb{R}^p$, es medible-Borel e integrable y se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \ d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \ dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \ dy \right) \ dx.$$

(iii) Para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, f^y es integrable en $\mathbb{R}^p$.

(iv) La aplicación $\psi : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y \ dx$$

está definida en casi todo punto y de Y, es integrable y se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \ d(x,y) = \int_{Y} \psi \ dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \ dx \right) \ dy.$$

5.3.5. Los teoremas de Tonelli y Fubini en espacios euclídeos

Teorema 5.3.8 (El Principio de Cavalieri en espacios euclídeos)**.** *Sea $E \in \mathbb{R}^{p+q}$ un conjunto medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^{p+q}$. Entonces*

(i) E_x es medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^q$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ y E^y es medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^p$ para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$.

(ii) Las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= m_q(E_x) \in [0, +\infty], \\ \psi(y) &= m_p(E^y) \in [0, +\infty], \end{aligned}$$

están definidas para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^p$ y en casi todo punto $y \in \mathbb{R}^q$ respectivamente, son medibles-Lebesgue y se verifica

$$\begin{aligned} m_{p+q}(E) &= \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x) \ dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x) \ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y) \ dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} m_p(E^y) \ dy \end{aligned}$$

Demostración. Sea $E \in \mathcal{L}_{p+q}$ entonces

$$E = B \cup F,$$

donde $F \subset N$, $B, N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{p+q}}$ y $m_{p+q}(N) = 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^p$, entonces $E_x = B_x \cup F_x$ y se tiene que

$$B_x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \text{ y } m_{p+q}(B) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(B_x)dx$$
$$N_x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^q} \text{ y } m_{p+q}(N) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(N_x)dx = 0.$$

Luego, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ $m_q(N_x) = 0$, es decir,

$$D = \{x \in \mathbb{R}^p : m_q(N_x) = 0\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^p} \text{ y } m_p(D^c) = 0.$$

Sea $x \in D$, entonces $F_x \subset N_x$ y como $m_q(N_x) = 0$, entoces $F_x \in \mathcal{L}_q$ y $m_q(F_x) = 0$, luego, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $F_x \in \mathcal{L}_q$ y $m_q(F_x) = 0$. Luego, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$

$$E_x = B_x \cup F_x,\ E_x \in \mathcal{L}_q \text{ y } m_q(E_x) = m_q(B_x).$$

Consideremos $\varphi_B(x) = m_q(B_x)$, que es medible-Borel y

$$\varphi(x) = m_q(E_x) = m_q(B_x) = \varphi_B(x),$$

es decir, $\varphi = \varphi_B$ en casi todo punto. Por tanto, φ es medible-Lebesgue. Además

$$m_{p+q}(E) = m_{p+q}(B) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(B_x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_B(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\ dx.$$

□

Lema 5.3.9. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible-Lebesgue, entonces existe $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f = g$ en casi todo punto.*

Proposición 5.3.10. *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible-Lebesgue. Entonces*

(i) Para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, f_x es medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^q$.

(ii) Para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, f^y es medible-Lebesgue en $\mathbb{R}^p$.

Demostración. Sea $g : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ medible-Borel tal que $f = g$ en casi todo punto (dicha g existe por el lema anterior), es decir,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} : f(x, y) \neq g(x, y)\} \text{ tiene medida cero.}$$

Por el principio de Cavalieri

$$m_{p+q}(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x)\ dx = 0,$$

luego, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $m_q(E_x) = 0$.

$$\begin{aligned} E_x &= \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in E\} = \{y \in \mathbb{R}^q : f(x, y) \neq g(x, y)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^q : f_x(y) \neq g_x(y)\}, \end{aligned}$$

es decir, $m_q(E_x) = 0$ si y solo si $f_x = g_x$ en casi todo punto. Por tanto $f_x = g_x$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. Como g_x es medible-Borel entnonces f_x es medible-Lebesgue en casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. □

Teorema 5.3.11 (Teorema de Tonelli en espacios euclídeos)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible-Lebesgue no negativa. Entoncens* *(i)* f_x *es medible-Lebesgue para casi todo* $x \in \mathbb{R}^p$ *y* f^y *es medible-Lebesgue para casi todo* $y \in \mathbb{R}^q$*.*

(ii) *Las aplicaciones*

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\ dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\ dy \in [0,+\infty], \\
\psi(y) &= \int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\ dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\ dx \in [0,+\infty],
\end{aligned}$$

están definidas para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^p$ *y en casi todo punto* $y \in \mathbb{R}^q$ *respectivamente, son medibles-Lebesgue y se verifica*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\ dm_{p+q}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\ dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\ dm_q(y) \right)\ dm_p(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\ dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\ dm_p(x) \right)\ dm_q(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\ dx \right)\ dy.
\end{aligned}$$

Teorema 5.3.12 (Teorema de Fubini en espacios euclídeos)**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función medible-Lebesgue integrable. Entonces*

(i) f_x *es medible-Lebesgue para casi todo* $x \in \mathbb{R}^p$ *y* f^y *es medible-Lebesgue para casi todo* $y \in \mathbb{R}^q$*.*

(ii) *Las aplicaciones*

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\ dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\ dy \in [0,+\infty], \\
\psi(y) &= \int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\ dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\ dx \in [0,+\infty],
\end{aligned}$$

están definidas para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^p$ *y en casi todo punto* $y \in \mathbb{R}^q$ *respectivamente, son medibles-Lebesgue y se verifica*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\ dm_{p+q}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\ dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\ dm_q(y) \right)\ dm_p(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\ dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\ dm_p(x) \right)\ dm_q(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\ dx \right)\ dy.
\end{aligned}$$

Capítulo 6

El Teorema del Cambio de Variables

Proposición 6.0.1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal y sea A un conjunto medible-Borel. Entonces $T(A)$ es medible-Borel y $m(T(A)) = |det(T)|m(A)$.*

Demostración. Ya sabemos que $T(A)$ es medible-Borel. Veamos la igualdad.

Caso I. Supongamos que

$$T(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, ..., x_n), \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

Es claro que $\det(T) = c$. Para este caso, ya vios que

$$|1| \cdots |1| \cdot |c| \cdot |1| \cdots |1| m(A) = |det(T)|m(A).$$

Caso II. Supongamos que existen $j, k \in \{1, ..., n\}$, $j \neq k$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$T(x_1, ..., x_j, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{j-1}, x_j + cx_k, x_{j+1}, ..., x_n).$$

Es claro que $|\det(T)| = 1$. Por comodidad en la demostración, vamos a suponer que $j = 1$. Así

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + cx_k, x_2, ..., x_n).$$

Consideramos que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ y aplicamos el Principio de Cavalieri

$$m(T(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(T(E))^{(x_2,...,x_n)})\ dm_{n-1}(x_2, ..., x_n).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
(T(A))^{(x_2,...,x_n)} &= \{x \in \mathbb{R} : (x, x_2, ..., x_n) \in T(A)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x = x_1 + cx_k, (x_1, x_2, ..., x_n) \in A\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x = x_1 + cx_k, x_1 \in A^{(x_2,...,x_n)}\} \\
&= A^{(x_2,...,x_n)} + cx_k.
\end{aligned}$$

Como la medida de Lebesgue es invariante frente a traslaciones, $m(T(E))^{(x_2,...,x_n)} = m(E^{(x_2,...,x_n)})$. Por lo tanto, aplicando de nuevo el Principio de Cavalieri.

$$\begin{aligned}
m(T(E)) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(T(A))^{(x_2,...,x_n)})\ dm_{n-1}(x_2, ..., x_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} m(A^{(x_2,...,x_n)})\ dm_{n-1}(x_2, ..., x_n) = m(A).
\end{aligned}$$

Por tanto, $m(T(A)) = |1| \cdot m(A)$.

Caso III. Sea T ahora un isomorfismo lineal cualquiera. Entoces existen $T_1, ..., T_s$ isomorfisos lineales de los tipos contemplados en los casos I y II tales que $T = T_1 \circ \cdots \circ T_s$. Así

$$\begin{aligned} m(T(A)) &= m(T_1(T_2(...(T_s(A))))) = |\det(T_1)| m(T_2(T_3(...(T_s(A))) \\ &= |\det(T_1)| \cdots |\det(T_s)| m(A) = |\det(T)| m(A). \end{aligned}$$

□

Proposición 6.0.2. *Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo lineal y sea A un conjunto medible-Lebesgue. Entonces $T(A)$ es medible-Lebesgue y $m(T(A)) = |det(T)| m(A)$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $m(A) = 0$. Entonces existe un conjunto medible-Borel G tal que $A \subset G$ y $m(G) = 0$. Por la proposición anterior, $m(T(G)) = 0$, y como $T(A) \subset T(G)$, se tiene que $T(A)$ es medible-Lebesgue y $m(T(A)) = 0$, lo que prueba la proposición en este caso.

Supongamos ahora que A es un conjunto medible-Lebesgue cualquiera. Entonces, existen un conjunto medible-Borel B y un conjuto medible-Lebesgue N tales que

$$A = B \cup N \text{ y } m(N) = 0 \text{ y, en consecuencia, } m(A) = m(B).$$

Entonces,

$$T(A) = T(B) \cup T(N).$$

Por la proposición anterior, $T(B)$ es medible-Borel y $m(T(B)) = |\det(T)| m(B)$. Por el primer caso de esta proposición, $T(N)$ es medible-Lebesgue y $m(T(N)) = 0$. Como $T(A) = T(B) \cup T(N)$, entonces $T(A)$ es medible-Lebesgue y

$$m(T(A)) = m(T(B)) = |\det(T)| m(B) = |\det(T)| m(E),$$

coom queríamos demostrar. □

Observación 6.0.3. Si E es medible-Lebesgue entonces $\mathcal{X}_{T(E)}$ es medible-Lebesgue y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{T(E)}\ dm = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E\ dm.$$

Aplicando el resultado a T^{-1},

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{T^{-1}(E)}\ dm = |\det(T^{-1})| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E\ dm.$$

Nótese que $\mathcal{X}_{T^{-1}(E)}(x) = \mathcal{X}_E(T(x))$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E(T(x))\ dx = |\det(T^{-1})| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E\ dx = \frac{1}{|\det(T)|} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_E\ dx.$$

Es decir, la igualdad

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))\ dx,}$$

es válida para funciones características. Por la linealidad de la integral se sigue que también se da para funciones f simples, medibles y no negativas. Aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona concluimos que la igualdad es válida para funciones medibles no negativas. Por último, aplicándolo a las partes positiva y negativa de f, concluimos que si f es integrable entonces $g(x) = f(T(x))$ es integrable y la igualdad es válida. El mismo resultado se da para funciones complejas. En realidad, se observa que f es integrable si y sólo si $g(x) = f(T(x))$ es integrable.

En conclusión, la igualdad es válida para f integrable o f medible no negativa. Dicha igualdad es el Teorema del cambio de variable para transformaciones lineales. En la próxima sección daremos el Teorema para aplicaciones más generales

6.1. El Teorema del Cambio de Variables

Teorema 6.1.1 (Teorema del Cambio de Variables)**.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, y sea $G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función inyectiva tal que $G \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y $\det(DG(x)) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$.*

(a) Si $f : G(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ es medible entonces $(f \circ G)$ y $(f \circ G)|\det(DG)|$ son medibles en Ω y

$$\int_{G(\Omega)} f(x)\ dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(x) |\det(DG(x))|\ dx.$$

(b) Sea $f : G(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. La función f es integrable en $G(\Omega)$ si y solo si $(f \circ G)|\det(DG)|$ es integrable en Ω y, en ese caso,

$$\int_{G(\Omega)} f(x)\ dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(x) |\det(DG(x))|\ dx.$$

(c) Si $E \subset \Omega$ es un conjunto medible, entonces $G(E)$ es medible y

$$m(G(E)) = \int_E |\det(DG(x))|\ dx.$$

(d) Si $E \subset \Omega$ es un conjunto medible, y $f : G(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible no negativa entonces $(f \circ G)$ y $(f \circ G)|\det(DG)|$ son medibles en E y

$$\int_{G(E)} f(x)\ dx = \int_E (f \circ G)(x) |\det(DG(x))|\ dx.$$

(e) Sean $E \subset \Omega$ un conjunto medible y $f : G(E) \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es integrable en $G(E)$ si y solo si $(f \circ G)|\det(DG)|$ es integrable en E y, en ese caso,

$$\int_{G(E)} f(x)\ dx = \int_E (f \circ G)(x) |\det(DG(x))|\ dx.$$

6.2. Cambio de variables afín

Sea $b \in \mathbb{R}^n$ y sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal e invertible. Sea $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G(t) = b + T(t)$. Por lo tanto, $\det(DG(t)) = \det(T)$. Aplicando el cambio de variables para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y no negativa o integrable, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(b + T(t)) |\det(T)|\ dt = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} f(b + T(t))\ dt.$$

6.3. Coordenadas esféricas

6.3.1. Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$

El cambio a coordenadas polares toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos(\varphi) \\ x_2 &= \rho \operatorname{sen}(\varphi), \end{aligned}$$

donde $(\rho, \varphi) \in \Delta_2 = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$. En los términos del teorema de cambio de variables, estamos haciendo lo que sigue. Definimos y $\Phi_2 : \Delta_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\Phi_2(\rho, \varphi) = (\rho \cos(\varphi), \rho \operatorname{sen}(\varphi)).$$

Es fácil ver que $\det(D\Phi_2(\rho, \varphi)) = \rho > 0$.

6.3.2. Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$

El cambio a coordenadas esféricas toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos(\varphi_1) \\ x_2 &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ x_3 &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)\,\mathrm{sen}(\varphi_2), \end{aligned}$$

donde $(\rho, \varphi_2, \varphi_2) \in \Delta_3 = (0, +\infty)\times(0, \pi)\times(-\pi, \pi)$. En los términos del teorema de cambio de variables, estamos haciendo lo que sigue. Definimos $\Phi_3 : \Delta_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$\Phi_3(\rho, \varphi_1, \varphi_2) = (\rho\cos(\varphi_1), \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)\cos(\varphi_2), \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)\,\mathrm{sen}(\varphi_2)).$$

Se puede comprobar que $\det(D\Phi_3(\rho, \varphi_1, \varphi_2)) = \rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi_1) > 0$.

6.3.3. Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

El cambio de coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ es una generalización de lo visto anteriormente, y toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos(\varphi_1) \\ x_2 &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)...\,\mathrm{sen}(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-2}) \\ x_n &= \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_1)...\,\mathrm{sen}(\varphi_{n-2})\,\mathrm{sen}(\varphi_{n-1}), \end{aligned}$$

donde $(\rho, \varphi_1, .., \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) \in \Delta_n = (0, +\infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (-\pi, \pi)$. Definimos $\Phi_n : \Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\Phi_n(\rho, \varphi_1, .., \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n).$$

Se puede comprobar que

$$\det(D\Phi_n(\rho, \varphi_1, .., \varphi_{n-1})) = \rho^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}(\mathrm{sen}(\varphi_i))^{n-1-i} > 0.$$

6.3.4. La fórmula del cambio de variables simplificada

Pongamos que

$$S^{n-1} = (0, \pi)^{n-2} \times (-\pi, \pi).$$

Así

$$\Delta_n = (0, +\infty) \times S^{n-1}.$$

Denotemos por φ al vector $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ y sea

$$s_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s_{n-1}(\varphi) = \prod_{i=1}^{n-2}(\mathrm{sen}(\varphi_i))^{n-1-i}.$$

Como se ve, $s_{n-1}(\varphi)$ es independiente de φ_{n-1}. Con esta notación,

$$\det(D\Phi_n(\rho, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})) = p^{n-1}s_{n-1}(\varphi).$$

Luego, el cambio de variables nos dice que para $f \geq 0$ o f integrable

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx &= \int_{\Delta_n} f(\Phi_n(\rho, \varphi))p^{n-1}s_{n-1}(\varphi)\ d(\rho, \varphi) \\ &= \int_0^\infty \rho^{n-1}\left(\int_{S^{n-1}} f(\Phi_n(\rho, \varphi))s_{n-1}(\varphi)\ d\varphi\right)\ d\rho \\ &= \int_{S^{n-1}} s_{n-1}(\varphi)\left(\int_0^\infty \rho^{n-1}f(\Phi_n(\rho, \varphi))(\varphi)\ d\rho\right)\ d\varphi. \end{aligned}$$

6.3.5. Cálculo de la medida de la bola unidad

Sea $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ la bola cerrada (o abierta) de centro 0 y radio 1. Aplicando el cambio de coordenadas esféricas y empleando esta útlima notación,

$$m(B(0,1)) = \int_{S^{n-1}} s_{n-1}(\varphi) \left(\int_0^1 \rho^{n-1} \, d\rho \right) \, d\varphi = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} s_{n-1}(\varphi) \, d\varphi$$

Si ponemos

$$\omega_n = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} s_{n-1}(\varphi) \, d\varphi,$$

obtenemos que

$$m(B(0,1)) = \frac{\omega_n}{n}.$$

Se puede comprobar que

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

De aquí deducimos que

$$m(B(0,1)) = \frac{\omega_n}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$