Ampliación de la Teoría de la Probabilidad

Basado en las clases y apuntes de Antonio Jesús Barrera García

Autor:
Jorge Rodríguez Domínguez

Índice general

Capítulo 1

Función de distribución

1.1. Propiedades

Definición 1.1. Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, P_X medida de probabilidad inducida por X en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. La función de distribución asociada a X es $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$F(a) = P_X((-\infty, a]) \equiv P(X \leq a)$$

Las propiedades de F son

1. F es monótona no decreciente.
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
3. F es continua por la derecha, es decir, $\lim_{h\to0^+} F(x + h) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. Existe el límite por la izquierda, es decir, $\lim_{h\to0^-} F(x+h) = F(x^-) = F(x) - P_X(\{x\})$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2 (de correspondencia)**.** *Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ es una función*

- *Monótona no decreciente.*
- *$F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.*
- *Continua por la derecha*

Entonces existe (y es única) una medida de probabilidad P_F que $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que F es su función de distribución.

Definición 1.3. Sea F una función de distribución. Definimos

- El conjunto de continuidad de F como

$$C(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = F(x^-)\}$$

- El conjunto de discontinuidad de F como

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) > 0\}$$

Observación 1.4. Es fácil ver que $D(F) = \overline{C(F)}$.

Proposición 1.5. *$D(F)$ es a lo sumo numerable.*

Demostración. Definimos la sucesión de conjuntos

$$D_n(F) = \left\{ x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

Es claro que $\{D_n\}$ es una sucesión creciente. Veamos que $\#D_n(F)$ es finito. Por el teorema de correspondencia, existe una única P_F medida de probabilidad asociada a F, es decir, $P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos usar que P_F para "medir" $D_n(F)$ de la siguiente manera:

$$P_F(D_n(F)) = \sum_{x \in D_n(F)} P_F(\{x\}) \geq \sum_{x \in D_n(F)} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \#D_n(F)$$

de donde deducimos que $\#D_n(F) \leq n$. Como $\{D_n\}$ es una sucesión creciente, entonces

$$D(F) = \lim_{n \to \infty} D_n(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(F)$$

lo que demuestra que $D(F)$ es a lo sumo numerable. □

Corolario 1.6. *$C(F)$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Como $D(F) = \overline{C(F)}$ y $D(F)$ es a lo sumo numerable, tenemos que si $x \in \mathbb{R}$, o bien $x \in C(F)$, o bien $x \in D(F)$, por lo que cualquier bola $B(x, \varepsilon)$ contiene puntos de $C(F)$. □

Proposición 1.7. *Sean F y G funciones de distribución tales que $F(x) = G(x)$ para todo $x \in E \subset \mathbb{R}$ con E denso en $\mathbb{R}$. Entonces $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Como E es denso en $\mathbb{R}$, existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \to x$ de forma decreciente ($x_n \downarrow x$) cuando $n \to \infty$. Entonces $F(x_n) = G(x_n)$ para todo $x_n \in E$ (por hipótesis). Como F y G son funciones de distribución, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$$
$$\lim_{n \to \infty} G(x_n) = G(x)$$

Por la unicidad del límite, $F(x) = G(x)$. □

Definición 1.8. La función de masa de probabilidad es $p : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$p(x) = P_F(\{x\}).$$

Definición 1.9. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y función de masa p. Diremos que

- X es una variable aleatoria discreta cuando
$$\sum_{x \in D(F)} p(x) = 1$$
- X es una variable aleatoria continua cuando $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- X es una variable aleatoria singular si existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $m(B) = 0$ (medida de Lebesgue) y $P_X(B) = 1$.
- X es una variable aleatoria absolutamente continua si para cualquier $B \in \mathcal{B}$ con $m(B) = 0$ se tiene que $P_X(B) = 0$.

Teorema 1.10 (Radon-Nikodyn)**.** *Sea F función de distribución. Entonces F es absolutamente continua si y solo si existe una función medible f no negativa y finita tal que para cualquier $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Teorema 1.11 (Primera descomposición)**.** *Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma*

$$F = \alpha F_d + (1-\alpha)F_c,$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, F_d es la función de distribución de una variable aleatoria discreta y F_c es la función de distribución de una variable aleatoria continua.

Demostración. Sea $D(F)$ el conjunto de discontinuidad de F. Definimos $\alpha = \sum_{x\in D(F)} p(x)$, donde p es la función de masa.

- Si $\alpha = 0$, entonces $F = F_c$ y es continua.
- Si $\alpha = 1$, entonces $F = F_d$ y es discreta.
- Si $0 < \alpha < 1$, definimos

$$\begin{aligned} F_d(x) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{D(F)\ni y \leq x} p(y) \\ F_c(x) &= \frac{1}{1-\alpha}(F(x) - \alpha F_d(x)) \end{aligned}$$

  Por definición, F_d es discreta. Veamos que F_c es continua, para ello hay que ver que $F_c(x) - F_c(x^-) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} F_c(x) - F_c(x^-) &= \frac{1}{1-\alpha}(F(x) - \alpha F_d(x) - F(x^-) + \alpha F_d(x^-)) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}(F(x) - F(x^-) - \alpha(F_d(x) - F_d(x^-))) \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(p(x) - \alpha\frac{1}{\alpha}p(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

□

Lema 1.12. *Sea F una función de distribución. Entonces*

a) Existe F' en casi todo punto, es no negativa y finita.

b) $\int_a^b F'(x)\ dx \leq F(b) - F(a)$ para todo $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Siendo $F_{ac} = \int_{-\infty}^x F'(t)\ dt$ y $F_s(x) = F(x) - F_{ac}(x)$, entonces $F'_{ac}(x) = F'(x)$ en casi todo punto y $F'_s(x) = 0$.

Teorema 1.13 (Segunda descomposición)**.** *Toda función de distribución F se puede descomponer de la forma*

$$F = \beta F_{ac} + (1-\beta)F_s,$$

donde $0 \leq \beta \leq 1$, F_{ac} es la función de distribución de una variable aleatoria absolutamente continua y F_s es la función de distribución de una variable aleatoria singular.

Demostración. Sea $f \equiv F'$ donde exista. Definimos $\beta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$.

- Si $\beta = 1$, entonces $F = F_{ac}$ y es absolutamente continua.
- Si $\beta = 0$, enntonces $F = F_s$ y es singular.
- Si $0 < \beta < 1$, definimos

$$\begin{aligned} F_{ac}(x) &= \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^x f(t)\ dt \\ F_s(x) &= \frac{1}{1-\beta}(F(x) - \beta F_{ac}(x)) \end{aligned}$$

Por definición, F_{ac} es absolutamente continua. Veamos que F_s es singular, para ello hemos de probar que $F_s' = 0$.

$$F's(x) = \frac{1}{1-\beta}\left(f(x) - \beta\frac{1}{\beta}f(x)\right) = 0$$

□

Observación 1.14. Aplicando la primera descomposición a F_s, tenemos que

$$\begin{aligned} F &= \beta F_{ac} + (1-\beta)[\alpha F_d + (1-\alpha)F_{cs}] \\ &= \beta F_{ac} + (1-\beta)\alpha F_d + (1-\beta)(1-\alpha)F_{cs} \\ &= \beta F_{ac} + \gamma F_d + (1-\beta-\gamma)F_{cs} \end{aligned}$$

siendo $\gamma = (1-\beta)\alpha$ y $\beta + \gamma \leq 1$.

Recordemos ahora el concepto de esperanza matemática.

Definición 1.15. Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definimos la esperanza de X como $E(X) = \int_\Omega X\ dP$.

Usando el siguiente Teorema de Teoria de la Medida e Integración

Teorema 1.16. *Sean* (X, M, μ) *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *dos espacios de medida y sea* $T : X \longrightarrow Y$ *una aplicación* $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$*-medible que conserva las medidas. Si* $g : Y \longrightarrow [0, +\infty]$ *es medible entonces*

$$\int_Y g\ d\nu = \int_X g \circ T\ d\mu.$$

es fácil ver que

- Si F es la función de distribución de una variable aleatoria absolutamente continua, entonces

$$E(X) = \int_\mathbb{R} x \cdot f(x)\ dx.$$

- Si F es la función de distribución de una variable aleatoria discreta, entonces

$$E(X) = \sum_{x \in D(F)} x \cdot p(x).$$

1.2. Convolución de funciones de distribución

Definición 1.17. Sean F y G funciones de distribución. Definimos la convolución de F y G como la función

$$(F * G)(z) = \int_\mathbb{R} F(z-y)\ dG(y),\ \ z \in \mathbb{R}.$$

Proposición 1.18. *$F * G$ es una función de distribución.*

Demostración. 1. $F * G$ es monótona no decreciente. Sean $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$(F * G)(a) = \int_\mathbb{R} F(a-y)\ dG(y) \leq \int_\mathbb{R} F(b-y)\ dG(y) = (F * G)(b),$$

donde usamos que F es función de distribución.

2. $\lim_{x\to-\infty}(F*G)(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty}(F*G)(x) = 1$.

$$\lim_{x\to-\infty}(F*G)(x) = \lim_{x\to-\infty}\int_{\mathbb{R}} F(x-y)\ dG(y) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to-\infty} F(x-y)\ dG(y) = \int_{\mathbb{R}} 0\ dG(y) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(F*G)(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}} F(x-y)\ dG(y) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to\infty} F(x-y)\ dG(y) = \int_{\mathbb{R}} 1\ dG(y) = 1$$

donde usamos que F y G son funciones de distribución.

3. $F*G$ es continua por la derecha, es decir, $\lim_{h\to0^+}(F*G)(x+h) = (F*G)(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0^+}(F*G)(x+h) &= \lim_{h\to0^+}\int_{\mathbb{R}} F(x+h-y)\ dG(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to0^+} F(x+h-y)\ dG(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} F(x-y)\ dG(y) = (F*G)(x)\end{aligned}$$

donde usamos el Teorema de la Convergencia Dominada y que F es función de distribución.

4. Existe el límite por la izquierda, es decir, $\lim_{h\to0^-}(F*G)(x+h) = (F*G)(x^-)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0^-}(F*G)(x+h) &= \lim_{h\to0^-}\int_{\mathbb{R}} F(x+h-y)\ dG(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h\to0^-} F(x+h-y)\ dG(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} F(x^- -y)\ dG(y) = (F*G)(x^-)\end{aligned}$$

donde usamos el Teorema de la Convergencia Dominada y que F es función de distribución.

□

Teorema 1.19. *Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_X y F_Y respectivamente. Entonces $F_X * F_Y$ es la función de distribución de $X+Y$.*

Demostración. Definimos la variable aleatoria $Z = X+Y$. Si llamamos $F_{(X,Y)}$ a la función de distribución conjunta del par (X,Y), entonces la función de distribución de Z es

$$\begin{aligned}F_Z(z) = P(Z\le z) = P(X+Y\le z) &= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\le z\}} dF_{(X,Y)}(x,y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} dF_X(x)dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(z-y)\ dF_Y(y) = (F_X*F_Y)(z)\end{aligned}$$

□

Teorema 1.20. *Si F es una función de distribución absolutamente continua con densidad f, entonces $F*G$ es una función de distribución absolutamente continua con densidad*

$$(f*G)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s-y)\ dG(y).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(F*G)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(s)\ ds\ dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f(s-y)\ ds\ dG(y)\\ &= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f(s-y)\ dG(y)\ ds\end{aligned}$$

□

Teorema 1.21. *Si F y G son funciones de distribución absolutamente continuas con densidades f y g respectivamente, entonces $F * G$ es una función de distribución absolutamente continua con densidad $f * g$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}(F * G)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(s)\ ds\ dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f(s-y)\ ds\ dG(y)\\ &= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f(s-y)\ dG(y)\ ds = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f(s-y)g(y)\ dy\ ds\end{aligned}$$

□

1.3. Convergencia en distribución

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos una variable aleatoria X_n en $(\Omega, \mathcal{A}_n, P_n)$. De esta forma $\{X_n\}$ tiene una suceesión asociada $\{F_n\}$ de funciones de distribución.

Definición 1.22. Sea F y F_n, $n \in \mathbb{N}$, funciones de distribución. Decimos que la sucesión $\{F_n\}$ converge a F débilmente (o en distribución), y se denota como $F_n \xrightarrow{d} F$, cuando

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

para todo $x \in C(F)$.

Teorema 1.23. *El límite débil es único.*

Demostración. Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución tal que $F_n \xrightarrow{d} F$ y $F_n \xrightarrow{d} G$, con F y G funciones de distribución. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)\ \forall x \in C(F)$$
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x)\ \forall x \in C(G)$$

De aquí

$$F(x) = G(x)\ \forall x \in C(F) \cap C(G)$$

Como $C(F)$ y $C(G)$ son densos en $\mathbb{R}$, entonces $C(F) \cap C(G)$ es denso en $\mathbb{R}$ y por tanto, $F \equiv G$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Definición 1.24. La sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ converge en distribución a otra variable aleatoria X cuando $F_n \xrightarrow{d} F$, siendo F_n y F las funciones de distribución asociadas a X_n y X respectivamente.

Definición 1.25. Sean P y P_n, $n \in \mathbb{N}$, medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Decimos que la sucesión de medidas $\{P_n\}$ converge debilmente a P cuando

$$\lim_{n\to\infty} P_n((a,b]) = P((a,b])$$

para todo $a < b$ con $P(a) = P(b) = 0$.

Lema 1.26. $F_n \xrightarrow{d} F$ *si y solo si para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x) \quad y \quad \liminf_{n\to\infty} F_n(x^-) \geq F(x).$$

Demostración. $\boxed{\Longleftarrow}$ Tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$F(x^-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x).$$

Si $x \in C(F)$, entonces $F(x) = F(x^-)$, y en consecuencia

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) = \limsup_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

es decir, $F_n \xrightarrow{d} F$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $x \in \mathbb{R}$ e $y \in C(F)$, $y > x$. Entocnes

$$F_n(x) \leq F_(y) \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(y) = \lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y).$$

Como $C(F)$ es denso en $\mathbb{R}$, podemos tomar una sucesión de puntos de $C(F)$ que tienda a x (en nuestro caso, de manera decreciente), y así

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{y\downarrow x} F(y) = F(x),$$

donde la última igualdad es cierta por ser F función de distribución. Usando un argumento análogo, sea $z < x$, $z \in C(F)$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq \liminf_{n\to\infty} F_n(z) = F(z).$$

Al igual que antes, podemos tomar una sucesión de puntos de $C(F)$ que tienda a x (en nuestro caso, de manera creciente), y así

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geq \lim_{z\uparrow x} F(z) = F(x^-).$$

$\square$

Teorema 1.27 (Helly-Bray)**.** *Sean F_n, F funciones de distribución ($n > 0$). Entonces $F_n \xrightarrow{d} F$ si y solo si para toda función g real, continua y acotada se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dF(x).$$

Definición 1.28. Una función F se dice función de distribución impropia si verifica:

(i) Es monótona no decreciente.

(ii) Es continua por la derecha.

(iii) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe

$$\lim_{h\to 0^-} F(x+h) = F(x^-).$$

(iv)

$$\lim_{x\to\infty} F(x) > 0 \quad \text{ò} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) < 1.$$

Definición 1.29. Sea $\{F_n\}$ sucesión de funciones de distribución y F función de distribución (propia o impropia). Decimos que $\{F_n\}$ converge de forma vaga a F si

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

para todo $x \in C(F)$. Se denota como $F_n \xrightarrow{v} F$.

Observación 1.30. Es claro que $F_n \xrightarrow{d} F \Longrightarrow F_n \xrightarrow{v} F$.

Teorema 1.31. *Supongamos que $F_n \xrightarrow{v} F$, siendo F una función de distribución impropia. Sea g una función real y continua en $[a, b]$, siendo $a < b$ y $a, b \in C(F)$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)\ dF_n(x) = \int_a^b g(x)\ dF(x)$$

Teorema 1.32. *Supongamos que $F_n \xrightarrow{v} F$, siendo F una función de distribución impropia. Sea g una función real y continua en $\mathbb{R}$ y tal que $g(+\infty) = g(-\infty) = 0$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dF(x)$$

Lema 1.33. *$\{F_n\}$ converge vagamente si y solo si converge puntualmente en algún conjunto denso $D \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Es directo, pues basta tomar $D = C(F)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $r \in D$, definimos

$$F_D(r) = \lim_{n\to\infty} F_n(r).$$

Sabemos que $0 \leq F_D(r) \leq 1$ para cada $r \in D$. Si $s \in D$ es tal que $r < s$, entonces

$$F_D(r) = \lim_{n\to\infty} F_n(r) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(s) = F_D(s),$$

pues F_n es función de distribución, lo que nos dice que F_D es monótona no decreciente. Ahora, sea $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$F(x) = \lim_{r\downarrow x,\ r\in D} F_D(x) = \inf \Pi_x,$$

donde

$$\Pi_x = \{F_D(r) : r > x, r \in D\}.$$

Es claro que $0 \leq F(x) \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Veamos que F es continua por la derecha, para ello hemos de probar que $F(x) = F(x^+)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in D$ tales que $x < y < r$, entonces

$$F(y) = \inf \Pi_y \leq F_D(r),$$

pues $F_D(r) \in \Pi_y$. Entonces

$$F(x^+) = \lim_{y\downarrow x} F(y) \leq F_D(r).$$

Además $F(x^+) \leq \inf \Pi_x = F(x)$ (pues $x^+ > x$) y como F es monótona no decreciente, tenemos que $F(x) \leq F(x^+)$, por tanto, $F(x) = F(x^+)$.

Con todo esto, hemos probado que F es función de distribución imp'ropia. Veamos que $F_n \xrightarrow{v} F$ en $C(F)$. Sean $x \in C(F)$, $r', s \in D$ tales que $r' < x < s$, entonces

$$\begin{aligned}\inf \Pi_r = F(r) \leq F_D(r) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(r) = \liminf_{n\to\infty} F_n(r) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \\ \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(s) = F_D(s) \leq F(s) = \inf \Pi_s.\end{aligned}$$

Tomando $r < r'$, $r \in D$, tenemos que

$$\inf \Pi_r = F(r) \leq F_D(r').$$

Si tomamos límite $r \uparrow x$, $s \downarrow x$, tenemos que

$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x),$$

de donde concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

para cada $x \in C(F)$, es decir, $F_n \xrightarrow{v} F$. □

Teorema 1.34 (Principio de selección de Helly)**.** *Dada $\{F_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sucesión de funciones de distribución, existe alguna subsucesión que converge vagamente.*

Definición 1.35. Sea $\mathscr{H}$ familia de funciones de distribución. Diremos que $\mathscr{H}$ es ajustada si para cada $\varepsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que

$$P_F((-a, a]) > 1 - \varepsilon,$$

para cada $F \in \mathscr{H}$.

Definición 1.36. Sea $\mathscr{H}$ una familia de funciones de distribución. Diremos que $\mathscr{H}$ es relativamente compacta (respecto de la convergencia debil) si cada sucesión $\{F_n\}$, $F_n \in \mathscr{H}$, tiene un subsucesión convergente (de forma debil, a un límite no esté necesariamente en $\mathscr{H}$).

Teorema 1.37 (Prokhorov)**.** *Sea $\mathscr{H}$ una familia de funciones de distribución. $\mathscr{H}$ es relativamente compacta si y solo si es ajustada.*

Capítulo 2

Función característica

2.1. Función característica

Definición 2.1. Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La función característica asociada a X es $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ dF(x).$$

Si $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, es un vector de variables aleatorias, entonces $\varphi_Y : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada por

$$\varphi_Y(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,x>}\ dF(x),$$

siendo $<,>$ un producto escalar en $\mathbb{R}^d$.

Observación 2.2. Como $e^{itx} = \cos(tx) + i\,\mathrm{sen}(tx)$, entonces

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\ dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\ dF(x).$$

Algunas propiedades de la función característica son

1. $\varphi(0) = 1$.
2. $|\varphi(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   Demostración.

   $$|\varphi(t)| = \left|E\left[e^{itX}\right]\right| \leq E\left[\left|e^{itX}\right|\right] = 1.$$

   □

3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   Demostración.

   $$\begin{aligned}\varphi(-t) &= E\left[e^{-itX}\right] = E[\cos(-tx) + i\sin(-tx)] = E[\cos(tx) - i\sin(tx)] \\ &= \overline{E[\cos(tx)] + iE[\sin(tx)]} = \overline{E[\cos(tx) + i\sin(tx)]} = \overline{\varphi(t)}.\end{aligned}$$

   □

4. φ es una función definida positiva, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, ..., z_n)$ se tiene que

   $$\sum_{k,j=1}^{n} z_k \varphi(t_j - t_k)\overline{z_j} \geq 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j=1}^{n} z_k\varphi(t_j-t_k)\overline{z_j} &= \sum_{k,j=1}^{n} z_k E\left[e^{i(t_j-t_k)X}\right]\overline{z_j} = \sum_{k,j=1}^{n} z_k E\left[e^{it_jX}e^{-it_kX}\right]\overline{z_j} \\
&= E\left[\sum_{k,j=1}^{n} z_k e^{it_jX}e^{-it_kX}\overline{z_j}\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} z_k e^{-t_kX}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}e^{it_jX}\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{k=1}^{n} z_k e^{-t_kX}\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j e^{-it_jX}\right)}\right] = E\left[\left|\sum_{k=1}^{n} z_k e^{-it_kX}\right|^2\right] \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. *φ es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $t, h \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
|\varphi(t+h)-\varphi(t)| &= \left|E\left[e^{i(t+h)X}\right] - E\left[e^{itX}\right]\right| = \left|E\left[e^{i(t+h)X} - e^{itX}\right]\right| \\
&= \left|E\left[e^{itX}\left(e^{ihX}-1\right)\right]\right| \leq E\left[\left|e^{itX}\left(e^{ihX}-1\right)\right|\right] \\
&= E\left[\left|e^{itX}\right|\left|e^{ihX}-1\right|\right] = E\left[\left|e^{ihX}-1\right|\right]
\end{aligned}$$

Como

- $\left|e^{ihX}-1\right| \leq \left|e^{ihX}\right| + 1 = 2.$
- $\left|e^{ihX}-1\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada, $E\left[e^{ihX}-1\right] \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, de donde, $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, lo que nos dice que φ es uniformemente continua. □

Teorema 2.4 (de inversión)**.** *Sea X una varaible aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F y función característica φ. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se tiene que*

$$\frac{F(b)+F(b^-)}{2} - \frac{F(a)+F(a^-)}{2} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\varphi(t)\ dt.$$

Demostración. Observamos que

$$\left|\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\right| = \left|\int_a^b e^{-itx}\ dx\right| \leq \int_a^b \left|e^{itx}\right| = b-a < \infty.$$

Usando el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\varphi(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\ dF(x)\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-a)-i^{it(x-b)}}}{2it}\ dt\ dF(x).
\end{aligned}$$

Llamemos

$$I(t) := \int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-a)-i^{it(x-b)}}}{2it}\ dt,$$

así

$$\begin{aligned}
I(T) &= \int_{-T}^{T}\frac{\cos(t(x-a)) + i\operatorname{sen}(t(x-a)) - \cos(t(x-b)) - i\operatorname{sen}(t(x-b))}{2it}\ dt \\
&= \int_{0}^{T}\frac{i2\operatorname{sen}(t(x-a)) - i2\operatorname{sen}(t(x-b))}{2it}\ dt = \int_0^T\left(\frac{\operatorname{sen}(t(x-a))}{t} - \frac{\operatorname{sen}(t(x-b))}{t}\right)dt.
\end{aligned}$$

Definimos ahora la función

$$H(y) = \int_0^y \frac{\text{sen}(t)}{t},$$

que sabemos que verifica que $H(-y) = H(y)$ y $\lim_{y\to\infty} H(y) = \pi/2$. Consideremos ahora el cambio de variables $u = t(x-a)$, de esta forma

$$\int_0^T \frac{\text{sen}(t(x-a))}{t}\ dt = \int_0^{T(x-a)} \frac{\sin(u)}{u}\ du = H(T(x-a)) \xrightarrow[T\to\infty]{} \begin{cases} -\pi/2 & x<a \\ 0 & x=a \\ \pi/2 & x>a \end{cases}.$$

Actuando de igual forma para el cambio $u = t(x-b)$, llegamos a que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left(\frac{\text{sen}(t(x-a))}{t} - \frac{\text{sen}(t(x-b))}{t}\right) dt = \begin{cases} 0 & x<a \\ \pi/2 & x=a \\ \pi & a<x<b \\ \pi/2 & x<b \\ 0 & x>b \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T \frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\varphi(b)\ dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(t)\ dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} I(t)\ dF(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}P(X=a) + \pi P(a<X<b) + \frac{\pi}{2}P(X=b)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}(F(a)-F(a^-)) + \pi(F(b^-)-F(a)) + \frac{\pi}{2}(F(b)-F(b^-))\right) \\ &= \frac{F(b)+F(b^-)}{2} - \frac{F(a)+F(a^-)}{2}.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.5. *Sea X una varaible aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F y función característica φ. Dados $a, b \in C(F)$, $a<b$, se tiene que*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\varphi(t)\ dt.$$

Teorema 2.6. *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 y funciones características φ_1 y φ_2 respectivamente. Entonces $F_1 = F_2$ si y solo si $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $F_1 = F_2$, entonces

$$\varphi_1(t) = E\left[e^{itX_1}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ dF_1(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ dF_2(x) = E\left[e^{itX_2}\right] = \varphi_2(t).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi$. Sean $a<b$, $a, b \in C(F_1)\cap C(F_2)$. Por el Teorema de Inversión

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a),$$

tomando límite $a \to \infty$, tenemos que

$$F_1(b) - 1 = F_2(b) - 1 \Longleftrightarrow F_1(b) = F_1(b),$$

de donde deducimos que F_1 y F_2 coinciden en un denso de $\mathbb{R}$ y por tanto, $F_1 = F_2$ en todo $\mathbb{R}$. □

Teorema 2.7. *Existe $k \in (0,\infty)$ tal que para todo $a>0$ y toda medida de probabilidad P_F (puede ser cualquier medida de probabilidad arbitraria) tal que*

$$P_F\left(\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]^c\right) \leq \frac{k}{a}\int_0^a (1 - Re\ \varphi_F(t))\ dt.$$

Demostración. Nótese que

$$\mathrm{Re}(\varphi_F(t)) = \mathrm{Re}E\left[e^{itX}\right] = \mathrm{Re}E[\cos(tx) + i\,\mathrm{sen}(tx)] = E[\cos(tx)],$$

de donde

$$1 - \mathrm{Re}(\varphi_F(t)) = E[1 - \cos(tx)].$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_0^a (1 - \mathrm{Re}(\varphi_F(t)))\,dt &= \frac{1}{a}\int_0^a \int_{\mathbb{R}} (1-\cos(tx))\,dF(x)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a}\int_0^a (1-\cos(tx))\,dt\,dF(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a}\left(\int_0^a 1\,dt - \int_0^a \cos(tx)\,dt\right)\,dF(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(1 - \frac{\mathrm{sen}(ax)}{ax}\right)\,dF(x) \\
&\geq \int_{|ax|>1}\left(1 - \frac{\mathrm{sen}(ax)}{ax}\right)\,dF(x) \geq \inf_{|t|>1}\left(1 - \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}\right)\cdot P_F\left(\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]^c\right)
\end{aligned}$$

Basta tomar

$$k = \frac{1}{\inf_{|t|>1}\left(1 - \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}\right)}$$

para obtener el resultado. □

Corolario 2.8. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, con F_n, P_n y φ_n asociada a X_n. Supongamos que*

1. *Existe $\delta > 0$ tal que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$.*
2. *φ es continua en 0.*

Entonces $\{X_n\}$ es ajustada, es decir, $\{F_n\}$ forma una familia ajustada.

Teorema 2.9. *Sea $\{F_n\}$ una familia ajustada de funciones de distribución. Si todas las subsucesiones convergentes tienen el mismo límite F, entonces $F_n \xrightarrow{d} F$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $F_n \overset{d}{\not\to} F$, entonces existe $x \in C(F)$ tal que $F_n(x) \not\to F(x)$, es decir, existe una subsucesión $\{F_{n_k}\}$ tal que $F_{n_k}(x) \to \alpha \neq F(x)$. Por hipótesis, $\{F_{n_k}\}$ es ajustada, por el Teorema de Prokhorov, existe $\{F_{n'_k}\} \subset \{F_{n_k}\}$ tal que $F_{n'_k} \to F$ (por hipótesis). Como $x \in C(F)$, entonces $F_{n'_k} \to F(x) \neq \alpha$, lo que es una cotradicción. □

Teorema 2.10 (Continuidad de Levy)**.** *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias con φ_n función característica asociada a X_n. Si existe φ función tal que*

1. *$\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*
2. *φ es continua en 0.*

Entonces $X_n \xrightarrow{d} X$, donde X es la variable aleatoria con función característica φ.

Demostración. Por el Corolario **??** tenemos que $\{X_n\}$ es una familia ajustada. Veamos que el límite de las subssucesioes de $\{F_n\}$ es único, con lo que bastaría usar el Teorema **??** para llegar al resultado.

Sean $\{F_{n_k}\}$ y $\{F_{n_j}\}$ subsucesiones tales que

$$F_{n_k} \xrightarrow{d} G_1, \quad F_{n_j} \xrightarrow{d} G_2.$$

Consideremos las sucesiones asociadas de funciones características

$$\varphi_{n_k}(t) \longrightarrow \varphi_{G_1}(t), \quad \varphi_{n_j}(t) \longrightarrow \varphi_{G_2}(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\{\varphi_{n_k}\}$ y $\{\varphi_{n_j}\}$ son subsucesiones de $\{\varphi_n\}$, entonces, por hipótesis, $\varphi_{G_1}(t) = \varphi_{G_2}(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De aquí, deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dG_1(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dG_2(x).$$

Como la función $t \longmapsto e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$, es continua y acotada, entonces esta igualdad implica que $P_{G_1} = P_{G_2}$. Por el Teorema de Correspondencia, tenemos que $G_1 = G_2$. Por el Teorema **??** $F_n \xrightarrow{d} F$, es decir, $X_n \xrightarrow{d} X$. □

Teorema 2.11. *$\{F_n\}$ es ajustada si y solo si*

$$\lim_{t\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty} Re(1-\varphi_n(t))\right] = 0.$$

Observación 2.12 (Teorema Central del Límite de De Moivre)**.** Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \sim Bi(n,p)$. Tenemos entonces que $E[X_n] = p$ y $Var[X_n] = npq$, siendo $q = 1-p$. Si definimos las variables aleatorias

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}},$$

tenemos que $Z_n \xrightarrow{d} Z$, siendo $Z \sim N(0,1)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= E\left[e^{itZ_n}\right] = E\left[e^{it\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}}\right] = E\left[e^{it\frac{X_n}{\sqrt{npq}}}e^{-it\frac{np}{\sqrt{npq}}}\right] = e^{-it\frac{np}{\sqrt{npq}}}E\left[e^{it\frac{X_n}{\sqrt{npq}}}\right]\\ &= e^{-it\frac{np}{\sqrt{npq}}}\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right).\end{aligned}$$

Como $X_n \sim Bi(n,p)$, entonces $\varphi_{X_n}(t) = \left(pe^{-it}+q\right)^n$. Por tanto,

$$\varphi_{Z_n}(t) = e^{-it\frac{np}{\sqrt{npq}}}\left(pe^{-i\frac{t}{\sqrt{npq}}}+q\right)^n = \left(pe^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}}+qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{npq}}}\right)^n$$

Tomando límite cuando $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(pe^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}}+qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{npq}}}\right)^n \Longrightarrow \text{Indeterminación tipo "}1^\infty\text{"}$$

Recordemos que si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} g(x) = \infty,$$

entonces,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)(f(x)-1)}.$$

Usando esto, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(pe^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}}+qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{npq}}}-1\right)\right].$$

Desarrollando la serie de Taylor de $e^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}}$:

$$e^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i\frac{tq}{\sqrt{npq}}\right)^k}{k!} = 1 + i\frac{tq}{\sqrt{npq}} + \frac{\left(i\frac{tq}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2!} + o\left(\frac{t^2}{npq}\right),$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
pe^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}} + qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{npq}}} - 1 &= p\left[1 + i\frac{tq}{\sqrt{npq}} + \frac{\left(i\frac{tq}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2!})\right] + q\left[1 - i\frac{tp}{\sqrt{npq}} + \frac{\left(-i\frac{tp}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2!}\right] - 1 + o\left(\frac{t^2}{npq}\right) \\
&= p(iq)^2\frac{t^2}{2npq} + q(ip)^2\frac{t^2}{2npq} + o\left(\frac{t^2}{npq}\right) = -pq^2\frac{t^2}{2npq} - qp^2\frac{t^2}{2npq} + o\left(\frac{t^2}{npq}\right) \\
&= -\frac{t^2}{2npq}\left(pq^2 + qp^2\right) + o\left(\frac{t^2}{npq}\right) = -\frac{t^2}{2npq}pq + o\left(\frac{t^2}{npq}\right) \\
&= -\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{npq}\right) = -\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) &= \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(pe^{i\frac{tq}{\sqrt{npq}}} + qe^{-i\frac{tp}{\sqrt{npq}}} - 1\right)\right] = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\right] \\
&= e^{-t^2/2} = \varphi_Z(t),
\end{aligned}
$$

siendo $Z \sim N(0,1)$. Por el Teorema de Levy, $Z_n \xrightarrow{d} Z$, $Z \sim N(0,1)$. $\square$

Proposición 2.13. *Si $E[|X|^n] < \infty$ para cierto $n \geq 1$, entonces existen y son finitos $E[X^r]$ para cada $1 \leq r \leq n$.*

Definición 2.14. El espacio L^r es el conjunto de las variables aleatorias X tales que $E[|X|^r] < \infty$, es decir,

$$L^r = \left\{X \text{ variable aleatoria} : \int_{\mathbb{R}} |x|^r dF(x) < \infty\right\}.$$

Teorema 2.15. *Sea $X \in L^n$, para cierto $n \geq 1$, con función característica φ. Entonces existen las derivadas $\varphi^{(k)}$ para $k = 1, ..., n$, son uniformemente continuas y*

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} dF(x).$$

Además,

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k E[X^k],$$

y

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E[X^k] + o(t^n).$$

Proposición 2.16. *Sean X e Y variables aleatorias independientes con fuciones características φ_X y φ_Y respectivamente. Entonces la función característica de la variable aleatoria $S = X + Y$ es $\varphi_S(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$.*

Observación 2.17. En general, si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y $S = X_1 + \ldots + X_n$, entonces

$$\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t).$$

Lema 2.18.

$$\left| e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \min\left\{\frac{2|y|^n}{n!}, \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}.$$

Teorema 2.19. *Si φ es absolutamente integrable, entonces F es absolutamente continua y su función de densidad es*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi(t)\ dt.$$

Lema 2.20 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si F es absolutamente continua entonces*

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t)| = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} |\varphi(t)| = 0.$$

Lema 2.21.

$$P(X = a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ita} \varphi(t)\ dt.$$

2.2. Función generatriz de momentos y Función generatriz de cumulantes

Definición 2.22. Sea X una variable aleatoria con función característica φ, es define la función generatriz de cumulantes de X como $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\kappa(t) = \log \varphi(t).$$

Proposición 2.23. *Sean $X_1, , X_n$ variables aleatorias independientes con funciones características $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ respectivamente. Sea $S = X_1 + \ldots + X_n$, entonces*

$$\kappa_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_{X_i}(t).$$

Teorema 2.24. *Si $E[|X|^n] < \infty$ para cierto $n \geq 1$. Entonces*

$$\kappa(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j}{j!} C_j + o(t^n),$$

siendo

$$C_j = \frac{\kappa^{(j)}(0)}{i^j}.$$

C_j se conoce como el cumulante de orden j.

Observación 2.25. $C_1 = E[X]$ y $C_2 = Var[X]$.

Observación 2.26. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $C_1 = \mu$, $C_2 = \sigma^2$ y $C_n = 0$ para todo $n \geq 3$.

Definición 2.27. Sea X una variable aleatoria con $\sigma = \sqrt{Var[X]}$. Se definen

- Sesgo: C_3/σ^3.
- Curtosis: C_4/σ^4.

Definición 2.28. Sea X una variable aleatoria con función característica φ, es define la función generatriz de momentos de X como

$$\psi(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\ dF(x),$$

siempre que exista $h > 0$ tal que ψ esté definida para todo $|t| < h$.

Observación 2.29. Si existe ψ, entonces $E[|X|^n] < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.30. Sea X una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. La función generatrz de probabilidad de X es

$$G_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n), \quad |t| < 1.$$

Observación 2.31.

$$G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)t^{n-k}P(X = n)$$

$$G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k) \Longrightarrow P(X = K) = \frac{G_X^{(K)}(0)}{k!}.$$

Observación 2.32. Sea $X = Y_1 + \ldots + Y_N$, siendo Y_i variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas y N una variable aleatoria en Z_+. Entonces X sigue una distribución compuesta y su función característiva es

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] = E\left[E\left[e^{itX}|N\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{itX}|N = n\right] P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{it\sum_{i=1}^{n} Y_i}|N = n\right] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi_Y(t)\right)^n P(N = n) \\
&= G_N\left(\varphi_Y(t)\right)
\end{aligned}$$

Lema 2.33. *Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas de probabilidad con funciones características $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ respectivamente. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Entonces, la función característica asociada a la medida de probabilidad $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu_i$ es $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i$.*

Demostración.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d(\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_n\mu_n) = \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ d\mu_1 + \ldots + \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ d\mu_n$$

□

Definición 2.34. Una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es definida positiva si

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} g(t_j - t_i)z_j\overline{z_k} \geq 0,$$

para cualesquiera $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Observación 2.35. La función característica es definida positiva (se probó al inicio de este mismo capítulo).

Teorema 2.36. *Si g es definida postiva y continua en 0, entonces g es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.*

Lema 2.37 (Herglotz)**.** *Si $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ es definida postiva y $\phi(0) = 1$, entonces existe μ distribución de probabilidad en $[-\pi, \pi]$ tal que ϕ es su función característica ascociada, es decir,*

$$\phi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx}\ d\mu,$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.38 (Bochner)**.** *Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ verificando:*

(i) es definida positiva,

(ii) *continua en 0,*

(iii) $\varphi(0) = 1$.

Entonces, φ *es fución característica.*

Corolario 2.39. *Toda combinación lineal convexa de funciones características es función característica.*

Proposición 2.40. *La función* φ_T *dada por*

$$\varphi_T(t) = \text{máx}\left\{1 - \frac{|t|}{T}, 0\right\} \equiv \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}, \quad T \in \mathbb{R},$$

es función característica.

Lema 2.41. *Sea* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(0) = 1$, *no negativa, par y* φ *es una poligonal convexa no creciete en* $\mathbb{R}^+$. *Entonces* φ *es función característica.*

Teorema 2.42 (Criterio de Pólya)**.** *Sea* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

(i) $\varphi(0) = 1$,

(ii) φ *no negativa, par y contiuna.*

(iii) φ *convexa y no creciente en* $\mathbb{R}^+$.

Entonces φ *es función característica.*

Capítulo 3

Convergencia

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$ una sucesión de sucesos. Definimos el límite inferior y superior como sigue

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m \in \mathcal{A}, \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m \in \mathcal{A}.$$

Decimos que la sucesión $\{A_n\}$ converge si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Algunos resultados que ya conocemos son los siguientes:

- Toda sucesión monótona es convergente.
- Si $\{A_n\}$ es monótona creciente, entonces $\lim_n A_n = \cup_{i\geq 1} A_i$.
- Si $\{A_n\}$ es monótona decreciente, entonces $\lim_n A_n = \cap_{i\geq 1} A_i$.

Teorema 3.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión monótona creciente. Entonces*

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n P(A_n).$$

Demostración. Como $\{A_n\}$ es creciente, entonces $\lim_n A_n = \cup_{i\geq 1} A_i$, de donde:

$$P\left(\lim_n A_n\right) = P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right).$$

Como los A_n no son disjuntos, definimos $F_n = A_n \backslash A_{n-1}$ para cada $n \geq 2$. Es claro que los F_n son disjuntos y que

$$\bigcup_{i\geq 1} A_i = A_1 \dot{\bigcup} F_2 \dot{\bigcup} \ldots \dot{\bigcup} F_n \dot{\bigcup} \ldots$$

De aquí,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) &= P(A_1) + P(F_2) + \ldots + P(F_n) + \ldots = P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} P(F_i) \\ &= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} (P(A_n) - P(A_1)) = \lim_{n\to\infty} A_n. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión monótona decreciente. Entonces*

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n P(A_n).$$

Demostración. Consideramos $\{A_n^c\}$, que es una sucesión monótoa decreciente. Por el Teorema anterior

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i^c\right) = P\left(\lim_n A_n^c\right) = \lim_n P(A_n^c).$$

Por las leyes de De Morgan:

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i^c\right) = P\left(\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right)$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - P\left(\bigcap_{i\geq 1} A_i\right) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)$$

□

Teorema 3.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Entonces*

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = \lim_n P\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right).$$

Demostración. Como $\limsup_n A_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{m\geq n} A_m$, tenemos que $\{\cup_{m\geq n} A_m\}$ es una sucesión decreciente y

$$\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m = \lim_{n\to\infty} \left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right),$$

de donde concluimos que

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = P\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = P\left(\lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right).$$

□

Teorema 3.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Entonces*

$$P\left(\liminf_n A_n\right) = \lim_n P\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right).$$

Teorema 3.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Sea $\omega \in \Omega$, entonces $\omega \in \limsup_n A_n$ si y solo si existe una sucesión de índices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tal que $\omega \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\omega \in \limsup A_n$, es decir,

$$\omega 1 \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

En particular, $\omega \in \cup_{m\geq 1} A_m$, es decir, existe $\xi \in \mathbb{N}$, tal que $\omega \in A_\xi$. Tomamos $n_1 = \xi$. Por inducción sobre k, suponemos que $w \in A_{n_i}$, $i = 1, ..., k$. Actuando de igual forma, $\omega \in \cup_{m\geq n_{k+1}} A_m$, es decir, existe $\xi' \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in A_{\xi'}$ y tomamos $n_{k+1} = \xi'$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión de índices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tal que $\omega \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que $\omega \notin \limsup A_n$. De esto últimos, tenemos que

$$\omega \notin \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m \Longrightarrow \omega \in \left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m \right)^c \Longrightarrow \omega \in \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m^c,$$

es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (fijo) tal que $\omega \in A_m^c$ para todo $m \geq n_0$, es decir, $\omega \in A_m$ para todo $m \geq n_0$, lo que nos dice que ω está en un número finito de A_n, los que es una contradicción. □

Teorema 3.6. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Sea $\omega \in \Omega$, entonces $\omega \in \liminf_n A_n$ si y solo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in A_m$ para todo $m \geq n_0$.*

Teorema 3.7 (Primer Lema de Borel-Cantelli)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión tal que $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$. Entonces*

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = 0.$$

Demostración.

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = P\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) \underset{(*)}{=} P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{m\geq n} A_m\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} P(A_n) = 0.$$

En $(*)$ estamos usando que la sucesión $\{\cup_{m\geq n} A_m\}$ es decreciente. □

Teorema 3.8 (Segundo Lema de Borel-Cantelli)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y consideremos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión tal que $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \infty$. Entonces*

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = 1.$$

Demostración.

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = P\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right)^c\right]$$
$$= 1 - P\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m^c\right) = 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{m\geq n} A_m^c\right)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m\geq n} A_m^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{m\geq n} P(A_m^c)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{m\geq} (1 - P(A_m)).$$

Observamos que

$$\prod_{m\geq} (1 - P(A_m)) \underset{(*)}{=} \prod_{m\geq nn} e^{-P(A_m)} = e^{-\sum_{m\geq n} P(A_m)} = 0.$$

En $(*)$ usamos que si $x \geq 0$, entonces $1 - x \leq e^{-x}$. Finalmente, gracias a lo anterior

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = 1.$$

□

Corolario 3.9 (Ley 0-1 de Borel-Cantelli)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y consideremos* $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ *una sucesión de sucesos independientes, entonces* $P(\limsup_n A_n)$ *o bien es 0, o bien es 1.*

Sean X_n variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definimos

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \liminf_n X_n(\omega) = \limsup_n X_n(\omega)\},$$

que es el conjunto de $\omega \in \Omega$ para los cuales existe $\lim_n X_n$.

Teorema 3.10. *Sean* X_i *variables aleatorias en* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Entonces* $\inf_n X_n$*,* $\sup_n X_n$*,* $\liminf_n X_n$ *y* $\limsup_n X_n$ *son variables aleatorias.*

Demostración. Sea $Y = \inf_n X_n$ y fijemos $b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$Y^{-1}((-\infty, b)) = \left\{\omega \in \Omega : \inf_n X_n(\omega) < b\right\} = \bigcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) < b\}$$
$$\bigcup_{n\geq 1} X_n^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A},$$

es decir, Y es variable aleatoria. Observamos que $\sup_n X_n = -\inf_n(-X_n)$,
$\liminf_n X_n = \sup_n \inf_{m\geq n} A_m$ y $\limsup_n X_n = \inf_n \sup_{m\geq n} X_m$. Aplicar una función medible a una variable aleatoria, nos sigue dando una variable aleatoria, por tanto, todo lo anterior eran variables aleatorias. $\square$

Corolario 3.11. Ω_1 *es medible.*

Definición 3.12. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Decimos que X_n converge casi seguro si $P(\Omega_1) = 1$. En tal caso, $X := \lim_n X_n$ y $X_n \xrightarrow{c.s} X$.

Teorema 3.13. $X_n \xrightarrow{c.s} X$ *si y solo si* $P(\liminf_n y_{n.k}) = 1$ *para todo* k*, siendo*

$$y_{n,k} = \left\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Teorema 3.14. $X_n \xrightarrow{c.s} X$ *si y solo si* $P(\limsup_n y_{n,k}^c) = 0$ *para todo* k*.*

Definición 3.15. Diremos que X_n converge en probabilidad a X si para todo $\varepsilon > 0$

$$P(y_{n,\varepsilon}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1,$$

siendo

$$y_{n,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}.$$

Teorema 3.16. *El límite en probabilidad es único casi seguro (c.s).*

Teorema 3.17. *Si* $X_n \xrightarrow{c.s} X$*, entonces* $X_n \xrightarrow{p} X$*.*

Teorema 3.18. *Si* $X_n \xrightarrow{p} X$*, entonces existe alguna subsucesión* X_{n_k} *de* X *tal que* $X_{n_k} \xrightarrow{c.s} X$*.*

Teorema 3.19. $X_n \xrightarrow{p} X$ *si y solo si toda subsucesión contiene una subsucesión convergente casi seguro.*

Teorema 3.20. *La convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución.*

Teorema 3.21. *Sean* X_n*,* X *variables aleatorias en* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *con* $X \sim \delta(c)$*,* c *constante. Entonces* $X_n \xrightarrow{p} X$ *si y solo si* $X_n \xrightarrow{d} X$*.*

Consideremos el espacio

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \text{ v.a} : E[|X|^p] < \infty\}.$$

Se puede probar que $(L^p, \|.\|_p)$ es un espacio métrico, siendo

$$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X|^p \, dP \right)^{1/p}$$

Definición 3.22. Diremos que X_n converge a X en L^p, $X_n \xrightarrow{L^p} X$, cuando $\|X_n - X\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Diremos que

- Converge en media si $p = 1$.
- Converge en media cuadrática si $p = 2$.

Desigualdad de Markov: Sea X variable no negativa y $a > 0$, entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

Si además $X \in L^p$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X^p]}{a^p}.$$

Teorema 3.23. *$X_n, X \in L^p$. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, entonces $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Teorema 3.24. *El límite en L^p es único.*

Teorema 3.25. *Sean $X_n, X \in L^p$ tales que $X_n \xrightarrow{p} X$. Si existe $Y \in L^p$ tal que $|X_n| \leq Y$ para todo n, entonces $X_n \xrightarrow{L^p} X$.*

Ley débil de los grandes números (LDGN)

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definimos

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n \geq 1.$$

La sucesión $\{X_n\}$ verifica la ley débil de los grandes números si existen sucesiones numéricas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $b_n \uparrow \infty$ tales que

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{p} 0.$$

Teorema 3.26 (Bernoulli, 1713)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con $X_i \sim Ber(p)$, $0 < p < 1$. Entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p,$$

es decir, verfica LDGN para $a_n = np$ y $b_n = n$.

Teorema 3.27 (Chebyshev)**.** *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con media μ y varianza σ^2 constantes. Entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

Teorema 3.28 (Chebyshev)**.** *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con varianza acotada por una constante. Entonces*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{p} 0$$

Teorema 3.29 (Markov). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que $Var[S_n/n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Entonces*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{p} 0$$

Teorema 3.30 (Khinchin). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ finita. Entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

Ley fuerte de los grandes números (LFGN)

Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La sucesión $\{X_n\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números si existen sucesiones numéricas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $b_n \uparrow \infty$ tales que

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{c.s} 0.$$

Lema 3.31. *Sea $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguro si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P\left(\max_{1\leq j\leq m} |S_j - S_m| \geq \varepsilon\right) = 0$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Teorema 3.32 (Criterio de convergencia de Kolmogórov). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n] < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - E[X_n]) < \infty$ c.s.*

Teorema 3.33 (Recíproco de Kolmogórov). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Si existe una constante $c > 0$ tal que $|X_n| < c$ c.s para todo n. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - E[X_n]) < \infty \text{ c.s} \iff \sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n] < \infty.$$

Corolario 3.34. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $|X_n| < c$ c.s para algún $c > 0$ constante. Si $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ c.s, entonces también convergen las series $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - E[X_n])$ c.s, $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n]$.*

Teorema 3.35 (Condición suficiente de Kolmogórov). *Sea $\{X_n\}$ una suceción de variables aleatorias independienes con varianza finita. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var[X_n]}{n^2} < \infty$, entonces $\{X_n\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números, es decir,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s} 0$$

Lema 3.36 (Kronecker). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \uparrow \infty$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n} < \infty$ c.s, entonces $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$.*

Definición 3.37. Sean $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{c_n\}$ una sucesión de números reales no negativos. Se define la sucesión de variables aleatorias truncadas como $\{Y_n\}$ donde

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| < c_n\}}.$$

Definición 3.38. Dos sucesiones de variables aleatorias $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ son equivalentes en convergencia cuando $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) = 0$.

Teorema 3.39. *Si $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ son equivalentes en convergencia, entonces*

1. $P\left(\limsup_n \{X_n \neq Y_n\}\right) = 0$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ *c.s si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n < \infty$ *c.s.*

3. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_k) < \infty \xrightarrow[n\to\infty]{c.s} 0$.

Teorema 3.40 (3 series de Kolmogórov)**.** *Sean* $\{X_n\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes y* $\{X_n^c\}$ *una sucesión de variables aleatorias* X_n *truncadas, para alguna constante* $c > 0$. *Si existe* $c > 0$ *tal que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq X_n^c)$, $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n^c]$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n^c]$ *convergen, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *converge c.s.*

Recíprocamete, si $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *converge c.s, entonces las tres series convergen para todo* $c > 0$.

Lema 3.41. *Sea* X *una variable aleatoria. Se tiene que* $E[|X|] < \infty$ *si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$.

Teorema 3.42 (Ley fuerte de los grandes números)**.** *Sean* $X_1, X_2, \ldots$ *variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con* $E[X_1] = \mu < \infty$, *entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s} \mu.$$

Recíprocamente, si $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s} c$ *(constante), entonces* $E[X_1] = c$.

Teorema 3.43 (Teorema central del límite)**.** *Sean* $X_1, X_2, \ldots$ *variables aleatorias, independientes e idénticamete distribuidas con* $E[X_1] = \mu < \infty$ *y* $Var[X_1] = \sigma^2 < \infty$. *Entonces*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Teorema 3.44 (TCL de Lindeberg-Feller)**.** *Sean* $X_1, X_2, \ldots$ *variables aleatorias, independientes con* $E[X_n] = \mu_n < \infty$ *y* $Var[X_n] = \sigma_n^2 < \infty$. *Definimos* $s_n^2 := Var[S_n] = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$. *Entonces*

1. $\frac{1}{s_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_j) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$,

2. $\max_{1\leq j\leq n} \frac{\sigma_j^2}{s_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

es equivalente a

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n}(x-\mu_j)^2 dF_j(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$