

---

# ANÁLISIS NUMÉRICO

---

*Basado en las clases de Carlos María Parés Madroñal*

Autor:

Jorge Rodríguez Domínguez

---

# Índice general

<b>1. Métodos numéricos para problemas de valor inicial</b>	<b>1</b>
1.1. Métodos de Taylor . . . . .	1
1.2. Métodos de Taylor de orden $p$ . . . . .	1
1.3. Métodos de Runge-Kutta . . . . .	1
1.4. Convergencia, consistencia y estabilidad . . . . .	2
1.5. Notación Landau . . . . .	4
1.6. Orden de un método . . . . .	5
1.7. Análisis de los métodos RK . . . . .	6
1.7.1. Orden de un método RK . . . . .	8
1.8. Estimador del error de discretización local . . . . .	9
<b>2. Métodos multipaso</b>	<b>11</b>
2.1. Motivación, ejemplos y repaso de interpolación . . . . .	11
2.1.1. Métodos basados en integración numérica . . . . .	11
2.1.2. Forma de Lagrange del polinomio de interpolación . . . . .	11
2.1.3. Forma de Newton del polinomio de interpolación . . . . .	12
2.2. Métodos multipaso basados en integración numérica . . . . .	13
2.2.1. Métodos de Adams-Bashforth . . . . .	13
2.2.2. Métodos de Adams-Moulton . . . . .	14
2.3. Métodos BDF . . . . .	14
2.4. Análisis de los métodos multipaso . . . . .	14
2.4.1. Orden y consistencia . . . . .	15
2.4.2. Estabilidad . . . . .	16
<b>3. Estabilidad asintótica</b>	<b>19</b>
3.1. Motivación. Ecuación test de Dahlquist . . . . .	19
3.2. Estabilidad absoluta de los métodos RK . . . . .	23
3.2.1. Representación gráfica de la región de estabilidad . . . . .	25
3.3. Estabilidad absoluta de los métodos multipasos . . . . .	26
3.3.1. Método de localización de la frontera . . . . .	26
3.4. Otros tipos de ecuaciones con comportamiento Stiff . . . . .	28
3.5. Estabilidad absoluta de los métodos Predictor-Corrector . . . . .	29
<b>4. Problemas de contorno</b>	<b>31</b>
4.1. Derivación numérica . . . . .	31
4.1.1. Fórmulas de derivación numérica . . . . .	31
4.1.2. Método de los coeficientes indeterminados . . . . .	32
4.1.3. Método interpolatorio . . . . .	33
4.2. Problemas lineales: existencia y unicidad de solución . . . . .	33
4.3. Método de diferencias finitas . . . . .	34
4.3.1. Resolución numérica del sistema . . . . .	36
4.4. Análisis del método . . . . .	37

4.5. Otras condiciones de contorno . . . . .	38
4.6. Problemas no lineales . . . . .	39
4.6.1. Método de diferencias finitas . . . . .	39
4.6.2. Métodos de punto fijo . . . . .	40
4.6.3. Aplicación de los métodos de diferencias finitas para problemas de contorno no lineales . . . . .	43

# Capítulo 1

## Métodos numéricos para problemas de valor inicial

### 1.1. Métodos de Taylor

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$y' = f(t, y),$$

donde  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,  $f \in \mathcal{C}^{p-1}([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$  (lo que implica que  $y \in \mathcal{C}^p([t_0, t_0 + T])$ ). ¿Qué condiciones verifican las derivadas de la solución de la ecuación? No es difícil probar que, en general se tiene que

$$y^{(l+1)} = f^{(l)}(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

donde  $f^{(0)}, \dots, f^{(p-1)}$  se definen recursivamente como

$$\begin{cases} f^{(0)}(t, y) = f(t, y) \\ f^{(l+1)}(t, y) = \frac{\partial f^{(l)}}{\partial t}(t, y) + f^{(0)}(t, y) \frac{\partial f^{(l)}}{\partial y}(t, y), \quad l = 0, \dots, p-2 \end{cases}$$

### 1.2. Métodos de Taylor de orden p

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{l=1}^p \frac{f^{(l-1)}(t_k, y_k)}{l!} h^{l-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

A la función  $\Phi(t, y; h) = \sum_{l=1}^p \frac{f^{(l-1)}(t_k, y_k)}{l!} h^{l-1}$  se le conoce como función incremento.

### 1.3. Métodos de Runge-Kutta

La expresión general de un método de Runge-Kutta es

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^q b_i f\left(t_k^{(i)}, y_k^{(i)}\right),$$

siendo

- $q$  el número de etapas.
- $b_1, \dots, b_q$  coeficientes.
- $t_k^{(i)} = t_k + c_i h$ ,  $i = 1, \dots, q$ , donde  $c_1, \dots, c_q$  son coeficientes.
- $y_k^{(i)} = y_k + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_k^{(j)}, y_k^{(j)})$ ,  $i = 1, \dots, q$ , donde  $a_{11}, \dots, a_{qq}$  son coeficientes.

Esto nos da un sistema no lineal de  $q$  ecuaciones y  $q$  incógnitas.

Una forma de representar un método de Runge-Kutta es su *tablero de Butcher*:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \cdots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_q \end{array}$$

Diremos que el método es explícito si su tablero de Butcher es de la forma:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \cdots & a_{q(q-1)} & 0 \\ \hline & b_1 & \cdots & b_{q-1} & b_q \end{array}$$

**Observación 1.3.1.** En todos los métodos Runge-Kutta que vamos a estudiar se cumple que

$$c_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}.$$

**Ejemplo 1.3.2.**

1. Tablero de Butcher del Método RK4.

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

2. Tablero de Butcher del Método del Trapecio. Recordemos que:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})),$$

y su tablero de Butcher sería

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

## 1.4. Convergencia, consistencia y estabilidad

**Definición 1.4.1.** Consideremos un método numérico de la forma

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

siendo  $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \longrightarrow \mathbb{R}$  continua. Se denomina

■ **Error en  $t_k$  a:**

$$e_k = |y(t_k) - y_k|, \quad k = 0, \dots, N.$$

■ **Error a:**

$$e(h) = \max_{k=0, \dots, N} |e_k|.$$

**Definición 1.4.2.** Se dice que el método es **convergente** cuando

$$\lim_{h \rightarrow 0} e(h) = 0.$$

**Definición 1.4.3.** Se denomina **error de discretización local** a

$$\varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h\Phi(t_k, y(t_k), h), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

**Definición 1.4.4.** Se dice que el método es **consistente** si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = 0.$$

**Definición 1.4.5.** Se dice que un método es **estable** si existe  $M > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que, dados  $\{y_k\}_{k=0}^N$ ,  $\{z_k\}_{k=0}^N$ ,  $\{\delta_k\}_{k=0}^{N-1}$  verificando

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ z_{k+1} &= z_k + h\Phi(t_k, z_k, h) + \delta_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\max_{k=0, \dots, N} |y_k - z_k| \leq M \left[ |z_0 - y_0| + \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k| \right]$$

**Teorema 1.4.6.** *Consistencia y estabilidad implican convergencia.*

*Demostración.* Por definición  $\varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y_k - h\Phi(t_k, y(t_k), h)$  para cada  $k = 0, \dots, N-1$ , entonces

$$y(t_{k+1}) = y_k - h\Phi(t_k, y(t_k), h) + \varepsilon_k, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Por otro lado, el método nos da

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Aplicando la definición de estabilidad para  $z_k = y(t_k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ ,  $y_k$  la solución numérica y  $\delta_k = \varepsilon_k$  tenemos que:

$$0 \leq \max_{k=0, \dots, N-1} |y(t_k) - y_k| \leq M \left[ |y_0 - y(t_0)| + \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| \right] = M \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k|.$$

Lo que nos dice que

$$0 \leq e(h) \leq M \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k|.$$

Como  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = 0$  (por definición de consistencia), el criterio de comparación nos dice que  $\lim_{h \rightarrow 0} e(h) = 0$ .  $\square$

**Teorema 1.4.7.** *Un método es consistente si y solo si  $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$ .*

**Teorema 1.4.8.** *Si existe  $\Lambda > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que*

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq \Lambda |y - z|$$

*para todo  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  y cualquier  $h \in [0, h^*]$ , entonces el método es estable.*

*Demostración.* Hemos de probar que existe  $M > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que, dados  $\{y_k\}_{k=0}^N$ ,  $\{z_k\}_{k=0}^N$  y  $\{\delta_k\}_{k=0}^{N-1}$  verificando

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_{k+1} = y_k + h\Phi(t_k, y_k, h), \quad k = 0, \dots, N-1, \\ (2) \quad & z_{k+1} = z_k + h\Phi(t_k, z_k, h) + \delta_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\max_{k=0, \dots, N} |y_k - z_k| \leq M \left[ |z_0 - y_0| + \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k| \right].$$

Sean  $\{y_k\}_{k=0}^N$ ,  $\{z_k\}_{k=0}^N$  verificando (1) y (2), tendríamos entonces

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - y_{k+1}| &= |z_k + h\Phi(t_k, z_k, h) + \delta_k - y_k - h\Phi(t_k, y_k, h)| \\ &= |z_k - y_k + h(\Phi(t_k, z_k, h) - \Phi(t_k, y_k, h)) + \delta_k| \\ &\leq |z_k - y_k| + h\Lambda |z_k - y_k| + |\delta_k| \\ &\stackrel{1+x \leq e^x}{\leq} e^{h\Lambda} |z_k - y_k| + |\delta_k| \\ &\leq e^{h\Lambda} [e^{h\Lambda} |z_{k-1} - y_{k-1}| + |\delta_{k-1}|] + |\delta_k| \\ &\vdots \\ &\leq e^{(k+1)h\Lambda} |z_0 - y_0| + e^{kh\Lambda} |\delta_0| + \dots + e^{h\Lambda} |\delta_{k-1}| + |\delta_k| \\ &\leq e^{Nh\Lambda} \left[ |y_0 - z_0| + \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k| \right] \\ &\stackrel{h=T/N}{=} e^{T\Lambda} \left[ |y_0 - z_0| + \sum_{k=0}^{N-1} |\delta_k| \right] \end{aligned}$$

Basta tomar  $M = e^{T\Lambda}$  (que no depende de  $h$ ) como constante de estabilidad. □

## 1.5. Notación Landau

Sean  $f, g : [0, h^*] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Se dice que son "infinitésimos" si

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0.$$

- Se dice que  $f = o(g)$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

- Se dice que  $f = O(g)$  si existe  $C > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que  $|f(h)| \leq C|g(h)|$ .

Algunas propiedades inmediatas son



1. Si  $g = O(h^p)$  y  $q < p$ , entonces  $g = O(h^q)$ .
2. Si  $f = O(h^p)$  y  $g = O(h^q)$ , entonces  $f + g = O(h^{\min(p,q)})$ .
3. Si  $f = O(h^p)$  y  $g = O(h^q)$ , entonces  $f \cdot g = O(h^{p+q})$ . En particular, si  $f = O(h^p)$ , entonces  $f \cdot h^q = O(h^{p+q})$ .

## 1.6. Orden de un método

**Definición 1.6.1.** Se dice que un método es de **orden  $p$**  si, para toda solución  $y \in \mathcal{C}^{p+q}([t_0, t_0 + T])$ , se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k = O(h^p).$$

**Teorema 1.6.2.** Si  $f \in \mathcal{C}^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$  y el método es estable y de orden  $p$ , entonces  $e(h) = O(h^p)$ .

*Demostración.* Observamos que si  $f \in \mathcal{C}^p$ , todas las soluciones verifican que  $y \in \mathcal{C}^{p+1}([t_0, t_0 + T])$ . La demostración es idéntica a la de convergencia y estabilidad implica convergencia.  $\square$

**Teorema 1.6.3.** Supongamos que  $f \in \mathcal{C}^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$  y que  $\Phi(t, y, h)$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h)$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, h)$  existen y son continuas en  $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*]$ . Si se verifican las igualdades

$$\begin{cases} \Phi(t, y, 0) = f(t, y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2}f^{(1)}(t, y) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t, y, 0) = \frac{1}{3}f^{(2)}(t, y) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial h^{p-1}}(t, y, 0) = \frac{1}{p}f^{(p-1)}(t, y) \end{cases}$$

para todo  $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ , entonces el método de orden al menos  $p$ .

*Demostración.* Por definición  $\varepsilon_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h\Phi(t_k, y(t_k), h)$ . Por un lado, si desarrollamos el polinomio de Taylor  $y$  centrado en  $t_k$  y evaluamos en  $t_{k+1}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(t_k) &= y'(t_k)h + \frac{y''(t_k)}{2}h^2 + \dots + \frac{y^{(p)}(t_k)}{p!}h^p + O(h^{p+1}) \\ &= f^{(0)}(t_k, y(t_k))h + \frac{f^{(1)}(t_k, y(t_k))}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(p-1)}(t_k, y(t_k))}{p!}h^p + O(h^{p+1}) \end{aligned}$$

Si consideramos que  $\Phi$  es una función que depende de  $h$  y desarrollando su polinomio de Taylor centrado en 0:

$$\begin{aligned} h\Phi(t_k, y(t_k), h) &= \Phi(t_k, y(t_k), 0)h + \frac{\partial \Phi(t_k, y(t_k), 0)}{\partial h}h^2 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} \Phi(t_k, y(t_k), 0)}{\partial h^{p-1}}h^p + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= [f^{(0)}(t_k, y(t_k)) - \Phi(t_k, y(t_k), 0)]h + \left[ \frac{1}{2}f^{(1)}(t_k, y(t_k)) - \frac{\partial \Phi(t_k, y(t_k), 0)}{\partial h} \right]h^2 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \left[ \frac{1}{p}f^{(p-1)}(t_k, y(t_k)) - \frac{\partial^{p-1} \Phi(t_k, y(t_k), 0)}{\partial h^{p-1}} \right]h^p + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuentas las igualdades de la hipótesis del teorema, llegamos a que  $\varepsilon_k = O(h^{p+1})$ , es decir, existe  $c > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que  $|\varepsilon_k| \leq ch^{p+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  y por tanto:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} ch^{p+1} = Nch^{p+1} = (Nh)ch^p = Tch^p \implies \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| = O(h^p).$$

□

**Observación 1.6.4.** Con la definición que hemos dado, si un método es de orden  $p$ , también es de orden  $q$  si  $q < p$ . Se suele decir que el orden del método es el mayor de sus órdenes.

## 1.7. Análisis de los métodos RK

Consideremos un método Runge-Kutta arbitrario Consideremos un método Runge-Kutta con el si-

$c_1$	$a_{11}$	$\cdots$	$a_{1q}$	Veamos cuando este método es cosistente. Usado
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$c_q$	$a_{q1}$	$\cdots$	$a_{qq}$	
	$b_1$	$\cdots$	$b_q$	

que un método es consistente si y solo si  $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$ , tenemos

$$\begin{aligned} t^{(i)} &= t + c_i \cdot h \underset{h=0}{=} t, \quad i = 1, \dots, q, \\ y^{(i)} &= y + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t^{(i)}, y^{(i)}) \underset{h=0}{=} y, \\ \Phi(t, y, 0) &= \sum_{i=1}^q b_i f(t^{(i)}, y^{(i)}) = f(t, y) \sum_{i=1}^q b_i = f(t, y) \iff \sum_{j=1}^q b_j = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado el siguiente teorema:

**Teorema 1.7.1.** *Un método RK es consistente si y solo si  $\sum_{j=1}^q b_j = 1$ .*

**Teorema 1.7.2.** *Supongamos que  $h^*$  es tal que  $h^* \|A\|_\infty L < 1$  siendo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{pmatrix}$$

*y  $L$  la constante de Lipschitz de  $f$ , entonces el método está bien definido y existe  $\Lambda > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que*

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq \Lambda |y - z|,$$

*para todo  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  y cualquier  $h \in [0, h^*]$ . En consecuencia, el método es estable.*

**Demostración.** Para probar que el método está bien definido, hemos de demostrar que dados  $t, y$ , existen  $y^{(1)}, \dots, y^{(q)}$  (únicos) tales que

$$\begin{cases} y^{(1)} &= y + h \sum_{j=1}^q a_{1j} f(t^{(j)}, y^{(j)}) \\ &\vdots \\ y^{(q)} &= y + h \sum_{j=1}^q a_{qj} f(t^{(j)}, y^{(j)}) \end{cases}$$

Definimos  $Y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(q)} \end{bmatrix}$  y sea  $\vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ , entonces, podemos ver el sistema anterior de forma matricial como

$$Y = y\vec{e} + hAF(Y)$$

donde,  $F(Y) = \begin{bmatrix} f(t^{(1)}, y^{(1)}) \\ \vdots \\ f(t^{(q)}, y^{(q)}) \end{bmatrix}$ . Definimos  $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  como  $G(X) = y\vec{e} + hAF(X)$ . Veamos que  $G$  es contractiva. Sean  $X, Y \in \mathbb{R}^q$ :

$$\begin{aligned} \|G(X) - G(Y)\|_\infty &= h\|A(F(X) - F(Y))\|_\infty \leq h\|A\|_\infty\|F(X) - F(Y)\|_\infty \\ &\leq h\|A\|_\infty L\|X - Y\|_\infty \leq h^*\|A\|_\infty L\|X - Y\|_\infty \end{aligned}$$

Como por hipótesis  $h^*\|A\|_\infty L < 1$ , tenemos que  $G$  es contractiva, por tanto, tiene un único punto fijo, que es la solución de nuestro sistema de ecuaciones, con lo que el método está bien definido. Además, se puede obtener como límite de cualquier sucesión  $\{Y_l\}_{l=0}^\infty$  dada por

$$Y_{l+1} = y\vec{e} + hAF(Y_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Veamos ahora que  $\Phi$  es de Lipschitz en la segunda variable. Sean  $y, z \in \mathbb{R}$ , observamos que

$$\Phi(t, y, h) = \sum_{i=1}^q b_i f(t^{(i)}, y^{(i)})$$

siendo  $y^{(1)}, \dots, y^{(q)}$  tales que

$$\begin{cases} y^{(1)} &= y + h \sum_{j=1}^q a_{1j} f(t^{(j)}, y^{(j)}) \\ &\vdots \\ y^{(q)} &= y + h \sum_{j=1}^q a_{qj} f(t^{(j)}, y^{(j)}) \end{cases}$$

De igual modo

$$\Phi(t, z, h) = \sum_{i=1}^q b_i f(t^{(i)}, z^{(i)})$$

siendo  $z^{(1)}, \dots, z^{(q)}$  tales que

$$\begin{cases} z^{(1)} &= z + h \sum_{j=1}^q a_{1j} f(t^{(j)}, z^{(j)}) \\ &\vdots \\ z^{(q)} &= z + h \sum_{j=1}^q a_{qj} f(t^{(j)}, z^{(j)}) \end{cases}$$

Al igual que antes, definimos  $Y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(q)} \end{bmatrix}$  y  $Z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(q)} \end{bmatrix}$ , con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} Y &= y\vec{e} + hAF(Y) \\ Z &= z\vec{e} + hAF(Z) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y - Z &= (y - z)\vec{e} + hA(F(Y) - F(Z)) \\ \|Y - Z\|_\infty &\leq |y - z| + h\|A\|_\infty\|F(Y) - F(Z)\|_\infty \\ &\leq |y - z| + h^*\|A\|_\infty L\|Y - Z\|_\infty, \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\|Y - Z\|_\infty \leq \frac{1}{1 - h^* \|A\|_\infty L} |y - z|,$$

pues  $1 - h^* \|A\|_\infty L > 0$ . Observamos además que

$$\Phi(t, y, h) = \vec{b} F(Y), \quad \Phi(t, z, h) = \vec{b} F(Z)$$

siendo  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}$ . Con todo esto:

$$\begin{aligned} |\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| &= |\vec{b} (F(Y) - F(Z))| \leq \|\vec{b}\|_\infty \|F(Y) - F(Z)\|_\infty \\ &\leq \|\vec{b}\|_\infty L \|Y - Z\|_\infty \\ &\leq \|\vec{b}\|_\infty \frac{L}{1 - h^* \|A\|_\infty L} |y - z| \end{aligned}$$

Tomando  $\Lambda = \|\vec{b}\|_\infty \frac{L}{1 - h^* \|A\|_\infty L}$ , que no depende de  $h$ , tenemos que  $\Phi$  es de Lipschitz respecto a la segunda variable.  $\square$

**Corolario 1.7.3.** Si  $\sum_{i=1}^q b_i = 1$  y  $h^* \|A\|_\infty L < 1$ , entonces el método RK está bien definido y es convergente.

**Corolario 1.7.4.** Si  $\sum_{i=1}^q b_i = 1$  y  $h^* \rho(|A|) L < 1$ , entonces el método RK está bien definido y es convergente, siendo  $\rho(|A|)$  el radio espectral de

$$|A| = \begin{pmatrix} |a_{11}| & \cdots & |a_{1q}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{q1}| & \cdots & |a_{qq}| \end{pmatrix}.$$

**Observación 1.7.5.** Este segundo corolario es más fino porque  $\rho(|A|) \leq \|A\|_\infty$ .

**Corolario 1.7.6.** Todo método RK explícito tal que  $\sum_{i=1}^q b_i = 1$ , está bien definido y es convergente.

### 1.7.1. Orden de un método RK

1. Orden 1.

$$\sum_{i=1}^q b_i = 1$$

2. Orden 2.

$$\sum_{i=1}^q b_i c_i = \frac{1}{2}$$

3. Orden 3.

$$\sum_{i=1}^q b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^q b_i a_{ij} c_i = \frac{1}{6}$$

4. Orden 4.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^q b_i c_i^3 &= \frac{1}{4} & \sum_{i,j=1}^q b_i a_{ij} c_j^2 &= \frac{1}{12} \\ \sum_{i,j=1}^q b_i c_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{8} & \sum_{i,j,k=1}^q b_i a_{ij} a_{jk} c_k &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

**Teorema 1.7.7.** *Un método explícito de  $q$  etapas tiene a lo sumo orden  $q$ .*

**Teorema 1.7.8.** *Un método explícito de  $q$  etapas con  $q \geq 5$  tiene orden estrictamente menor que  $q$ .*

**Teorema 1.7.9.** *Un método explícito de  $q$  etapas con  $q \geq 5$  puede tener mayor orden cuando se aplica a una ecuación que cuando se aplica un sistema.*

**Teorema 1.7.10.** *Un método RK implícito de  $q$  etapas tiene a lo sumo orden  $2q$ .*

## 1.8. Estimador del error de discretización local

La idea es usar:

- $\Phi(t, y, h)$ , método de orden  $p$  para avanzar en iteraciones.
- $\Phi^*(t, y, h)$ , método de orden  $q > p$ , para estimar el error.

Y el estimador de error que vamos a usar es

$$\tilde{\varepsilon}_k = h(\Phi^*(t, y, h) - \Phi(t, y, h))$$

Se puede probar que  $\varepsilon_k = \tilde{\varepsilon}_k + O(h^p)$ . ¿Cómo usamos el estimador para calcular el siguiente paso? El siguiente paso que daremos será

$$h_{k+1} = \alpha \left( \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}_k} \right)^{\frac{1}{p+1}} h_k, \quad \alpha \in (0, 1]$$



## Capítulo 2

# Métodos multipaso

### 2.1. Motivación, ejemplos y repaso de interpolación

#### 2.1.1. Métodos basados en integración numérica

La solución exacta de

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

satisface

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Tomando una fórmula de integración numérica para aproximar dicha integral, podemos aproximar

$$y(t_{k+1}) \simeq y(t_k) + h \sum_{i=1}^q b_i f\left(f_k^{(i)}, t_k^{(i)}\right).$$

**Ejemplo 2.1.1.** Método de Adams-Bashforth de 2 pasos. Si calculamos el polinomio que interpola  $(t_{k-1}, f_{k-1})$  y  $(t_k, f_k)$ , al que denotaremos por  $P_1$ , podemos aproximar:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t, y(t)) dt \simeq \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_1(t) dt.$$

Y usando lo anterior, llegamos a que:

$$y_{k+1} = t_k + \frac{h}{2} [3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})].$$

Para calcular los polinomios de interpolación se suelen usar la forma de Lagrange y la forma de Newton.

#### 2.1.2. Forma de Lagrange del polinomio de interpolación

Recordemos que

$$\ell_i(t) = \frac{(t-t_0) \cdots \widehat{(t-t_i)} \cdots (t-t_k)}{(t_i-t_0) \cdots \widehat{(t_i-t_i)} \cdots (t_i-t_k)}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Observamos que

$$\ell_i(t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Entonces, la forma de Lagrange del polinomio de interpolación de  $(t_0, f_0), \dots, (t_k, f_k)$  es

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^k f_i \ell_i(t)$$

Con esto

$$\int_a^b f(t) dt \simeq \int_a^b P_k(t) dt = \int_a^b \sum_{i=0}^k f_i \ell_i(t) dt = \sum_{i=0}^k \alpha_i f_i$$

siendo  $\alpha_i = \int_a^b \ell_i(t) dt$  (pesos de la fórmula).

### 2.1.3. Forma de Newton del polinomio de interpolación

Recordemos que las diferencias divididas de Newton se definen como

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k) & k \in \{0, \dots, n\} \\ f[x_k, x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} & k \in \{0, \dots, n-1\} \\ f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} & k \in \{0, \dots, n-2\} \\ &\vdots \\ f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] &= \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k} & k \in \{0, \dots, n-i\} \end{aligned}$$

De esta manera, la forma de Newton del polinomio de interpolación de  $(t_0, f_0), \dots, (t_k, f_k)$  es

$$P_k(t) = f_0 + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1) + \dots + f[t_0, \dots, t_k](t - t_0) \cdots (t - t_{k-1})$$

Aunque en la práctica usaremos la otra expresión, que viene dada por:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= f_k + f[t_{k-1}, t_k](t - t_k) + f[t_{k-2}, t_{k-1}, t_k](t - t_k)(t - t_{k-1}) + \dots \\ &\quad + f[t_0, \dots, t_k](t - t_k) \cdots (t - t_1) \end{aligned}$$

**Definición 2.1.2** (Diferencias finitas regresivas). La diferencia finita regresiva de orden 0 en  $t_j$  es  $\nabla^0 f_j = f_j$ . De forma recursiva, definimos:

$$\nabla^{k+1} f_k = \nabla^k f_j - \nabla^k f_{j-1}.$$

**Observación 2.1.3.** De esta manera, tenemos que

$$f[t_i, \dots, t_{i+j}] = \frac{\nabla^j f_{i+j}}{j! h^j}.$$

Con lo que podemos reescribir la forma de Newton del polinomio de interpolación como

$$P_k(t) = \tilde{P}_k(s) = \nabla^0 f_k + \nabla^1 f_k + \frac{\nabla^2 f_k}{2!} s(s+1) + \dots + \frac{\nabla^k f_k}{k!} s(s+1) \cdots (s+k-1).$$



siendo  $sh = t - t_k$ . Observamos que

$$\binom{s}{j} = \frac{s!}{j!(s-j)!} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{j!},$$

con lo que

$$P_k(t) = \tilde{P}_k(s) = \sum_{i=0}^k \binom{s+i-1}{i} \nabla^i f_k, \quad s = \frac{t-t_k}{h}.$$

Esta expresión se conoce como la expresión de Gregory-Newton regresiva del polinomio de interpolación.

## 2.2. Métodos multipaso basados en integración numérica

### 2.2.1. Métodos de Adams-Bashforth

La solución exacta de la ecuación  $y' = f(t, y)$  verifica que

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt.$$

La idea del métodos de Adams-Bashforth de  $q$  pasos es aproximar:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{q-1}(t) dt.$$

siendo  $P_{q-1}$  el polinomio de interpolación de  $(t_k, f_k), \dots, (t_{k-q+1}, f_{k-q+1})$ .

La expresión del método  $AB$  de  $q$  pasos es la siguiente:

$$t_{k+1} = t_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{q-1}(t) dt.$$

Si hacemos el cambio de variable  $s = \frac{t-t_k}{h}$ , entonces:

$$y_{k+1} = y_k + h \int_0^1 \tilde{P}_{q-1}(s) ds.$$

#### Ejemplo 2.2.1.

1. La expresión del método  $AB1$  es:

$$y_{k+1} = y_k + hf_k.$$

2. La expresión del método  $AB2$  es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1}).$$

3. La expresión del método  $AB3$  es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}).$$

### 2.2.2. Métodos de Adams-Moulton

Los métodos Adams-Moulton son métodos implícitos. Dichos métodos son parecidos a los Adams-Bashfort, pero vamos a usar el polinomio de interpolación  $Q_q$  que interpola los puntos

$$(t_{k+1}, f_{k+1}), (t_k, f_k), \dots, (t_{k-q+1}, f_{k-q+1}),$$

es decir, usamos en la expresión del polinomio a  $f_{k+1}$ , que para conocerlo necesitamos  $y_{k+1}$  (por eso es un método implícito). El método de Adams-Moulton de  $q$  pasos es:

$$y_{k+1} = y_k + h \int_{-1}^0 \tilde{Q}_q(s) ds, \quad s = \frac{t - t_k}{h}.$$

#### Ejemplo 2.2.2.

1. La expresión del método  $AM1$  (o método del trapecio) es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k).$$

2. La expresión del método  $AM2$  es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1}).$$

### 2.3. Métodos BDF

Los métodos BDF (en inglés, *Backward differentiation formula*) son métodos basados en diferenciación numérica. Supongamos que conocemos el valor de la función  $y(t)$  en  $k+1$  puntos y queremos aproximar  $y'(\bar{t})$ . Una aproximación razonable es  $y(\bar{t}) \approx P'_k(\bar{t})$ , siendo  $P_k$  el polinomio de interpolación de  $(t_0, y(t_0)), \dots, (t_k, f(t_k))$ .

El método  $BDF$  de  $q$  pasos viene dado por

$$\frac{1}{h} \tilde{R}'_q(0) = f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

siendo  $R_q$  el polinomio que interpola  $(t_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (t_{k-q+1}, y_{k-q+1})$ .

#### Ejemplo 2.3.1.

1. La expresión del método  $BDF1$  es:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}),$$

es decir, coincide con Euler implícito.

2. La expresión del método  $BDF2$  es:

$$y_{k+1} - \frac{4}{3}y_k + \frac{1}{3}y_{k-1} = \frac{2h}{3}f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

### 2.4. Análisis de los métodos multipaso

Todos los métodos multipaso se puede escribir de la forma:

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{k+i}$$

**Observación 2.4.1.** Para que un método multipaso tenga  $q$  pasos ha de ocurrir que:

- $\alpha_q \neq 0$ .
- $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ .

Si  $\beta_q = 0$ , entonces tenemos un método explícito.

### 2.4.1. Orden y consistencia

**Definición 2.4.2.** Error en  $t_k$  es  $e_k = |y(t_k) - y_k|$ .

**Definición 2.4.3.** Error es  $e(h) = \max_k e_k$ .

**Definición 2.4.4.** Definimos el error de discretización local en  $t_{k+q}$  como  $\varepsilon_{k+1} = y(t_{k+q}) - \tilde{y}_{k+q}$ , siendo  $\tilde{y}_{k+q}$  tal que:

$$\alpha_q \tilde{y}_{k+q} + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i y(t_{k+i}) = h \beta_q f(t_{k+q}, \tilde{y}_{k+q}) + h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i f(t_{k+i}, y(t_{k+i})).$$

**Definición 2.4.5.** Se dice que el método es consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-q} |\varepsilon_{k+q}| = 0.$$

**Definición 2.4.6.** Se dice que el método es de orden  $p$  si  $\varepsilon_{q+k} = O(h^{p+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , para cualquier solución  $y(t)$  de clase  $\mathcal{C}^{p+1}$ .

**Definición 2.4.7.** Dado un método de  $q$  pasos

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{k+i}$$

se define el **operador diferencia** de la siguiente manera: Dada  $y : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, dado  $h > 0$ , dado  $t \in [t_0, t_0 + T - qh]$ , el operador diferencia viene dado por

$$L(y, t, h) = \sum_{i=0}^q [\alpha_i y(t + ih) - h \beta_i y'(t + ih)].$$

**Teorema 2.4.8.** *El método*

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{k+i}$$

*es orden  $p$  si y solo si  $L(y, t, h) = O(h^{p+1})$  para cualquier  $y \in \mathcal{C}^{p+1}([t_0, t_0 + T])$ .*

**Teorema 2.4.9.** *El método multipaso*

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{k+i}$$

*es orden al menos  $p$  si y solo si*

- $\sum_{i=0}^q \alpha_i = 0$ .
- $\sum_{i=0}^q \alpha_i i^l = l \sum_{i=0}^q \beta_i i^{l-1}$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

*Demostración.* Sea  $y \in \mathcal{C}^{p+1}([t_0, t_0 + T])$  y  $h > 0$ . Hemos de probar que

$$L(y, t, h) = \sum_{i=0}^q [\alpha_i y(t + ih) - h\beta_i y'(t + ih)] = O(h^{p+1}).$$

Desarrollando el polinomio de Taylor de  $y$  y evaluando en  $t + ih$ :

$$\begin{aligned} y(t + ih) &= y(t) + y'(t)ih + y''(t)\frac{(ih)^2}{2} + \dots + y^{(p)}(t)\frac{(ih)^p}{p!} + O(h^{p+1}) \\ &= \sum_{l=0}^p \frac{y^{(l)}(t)}{l!} i^l h^l + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

Actuando de forma análoga con  $y'$ :

$$\begin{aligned} hy'(t + ih) &= y'(t)h + y''(t)ih + y'''(t)\frac{i^2 h^3}{2} + \dots + y^{(p)}(t)\frac{i^{p-1} h^p}{(p-1)!} + O(h^{p+1}) \\ &= \sum_{l=1}^p \frac{y^{(l)}(t)}{(l-1)!} i^{l-1} h^l + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

Con esto llegamos que

$$\begin{aligned} L(y, t, h) &= \sum_{i=0}^q \left[ \alpha_i \sum_{l=0}^p \frac{y^{(l)}(t)}{l!} i^l h^l - \beta_i \sum_{l=1}^p \frac{y^{(l)}(t)}{(l-1)!} i^{l-1} h^l \right] + O(h^{p+1}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^q \alpha_i \right) y(t) + \sum_{l=1}^p \frac{y^{(l)}(t)}{l!} h^l \left( \sum_{i=0}^q \alpha_i i^l - l \sum_{i=0}^q \beta_i i^{l-1} \right). \end{aligned}$$

Luego,  $L(t, y, h) = O(h^{p+1})$  si y solo si

- $\sum_{i=0}^q \alpha_i = 0$ .
- $\sum_{i=0}^q \alpha_i i^l = l \sum_{i=0}^q \beta_i i^{l-1}$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

□

**Proposición 2.4.10.** *El método de Adams-Moulton de  $q$  pasos tiene orden  $q + 1$ .*

## 2.4.2. Estabilidad

Antes de comenzar con la estabilidad, necesitamos recordar las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas y de coeficientes constantes. Supongamos que tenemos la siguiente ecuación:

$$\alpha_q y_{k+q} + \alpha_{q-1} y_{k+q-1} + \dots + \alpha_0 y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{R}, \quad \alpha_q \neq 0$$

Una sucesión  $\{y_k\}_{k=0}^\infty$  es solución si satisface dicha ecuación. El conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $q$ . Una base es:

$$\begin{cases} y_0^0 = 1, y_1^0 = 0, \dots, y_{q-1}^0 = 0, y_q^0, y_{q+1}^0, \dots \\ y_0^1 = 0, y_1^1 = 1, \dots, y_{q-1}^1 = 0, y_q^1, y_{q+1}^1, \dots \\ \vdots \\ y_0^{q-1} = 0, y_1^{q-1} = 0, \dots, y_{q-1}^{q-1} = 1, y_q^{q-1}, y_{q+1}^{q-1}, \dots \end{cases}$$

Para resolver la ecuación en diferencias finitas, hemos de encontrar una expresión de  $y_k$ . ¿Existen soluciones de la forma  $\{\lambda^k\}_{k=0}^\infty$  con  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ?

$$0 = \alpha_q \lambda^{k+q} + \dots + \alpha_1 \lambda^{k+1} + \alpha_0 \lambda^k = \lambda^k [\alpha_q \lambda^q + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0] \iff \alpha_q \lambda^q + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0.$$

Denotaremos  $p(\lambda) = \alpha_q \lambda^q + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ . Distinguiremos los siguientes casos:

1. Si  $p(\lambda)$  tiene  $q$  raíces reales y distintas  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ . Entonces todas las soluciones puede escribirse de la forma

$$y_k = c_1 \lambda_1^k + \dots + c_q \lambda_q^k, \quad c_1, \dots, c_q \in \mathbb{R}.$$

En este caso, podemos afirmar que todas las soluciones de la ecuación en diferencias están acotadas si  $|\lambda_i| \leq 1$  para cada  $i = 1, \dots, q$ .

2. Si  $p(\lambda)$  tiene una raíz  $\lambda$  con multiplicidad  $m$ , entonces es fácil comprobar que las sucesiones:

$$\{\lambda^k\}_{k=0}^{\infty}, \{k\lambda^k\}_{k=0}^{\infty}, \dots, \{k^{m-1}\lambda^k\}_{k=0}^{\infty}.$$

son soluciones de la ecuación y son linealmente independientes. Por tanto, también será solución una combinación lineal de ellas, es decir:

$$y_k = \beta_1 \lambda^k + \beta_2 k \lambda^k + \dots + \beta_m k^{m-1} \lambda^k = Q(k) \lambda^k, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R},$$

siendo  $Q$  un polinomio de grado menor o igual que  $m-1$ . Luego, si  $\lambda$  es raíz real de multiplicidad  $m$ , son soluciones:

$$y_k = Q(k) \lambda^k,$$

con  $Q$  polinomio de grado menor o igual que  $m-1$ . En este caso, podemos afirmar que todas las soluciones de la ecuación en diferencias están acotadas si  $|\lambda| < 1$  o  $|\lambda| = 1$  pero  $m = 1$ .

3. Si  $p(\lambda)$  tiene un par de raíces complejas (conjugadas). Sean  $\mu_{\pm} = \alpha e^{\pm i\theta} = \alpha(\cos \theta \pm i \sin \theta)$  dichas raíces complejas. Es fácil comprobar que:

$$\{\alpha^k \cos(k\theta)\}_{k=0}^{\infty}, \{\alpha^k \sin(k\theta)\}_{k=0}^{\infty},$$

son soluciones de la ecuación y son linealmente independientes. Por tanto, es solución una combinación lineal de ellas, es decir:

$$y_k = \alpha^k (c_1 \cos(k\theta) + c_2 \sin(k\theta)).$$

En este caso, podemos afirmar que todas las soluciones de la ecuación en diferencias están acotadas si  $|\alpha| \leq 1$ .

4. Si  $p(\lambda)$  tiene al par de raíces complejas  $\mu_{\pm} = \alpha e^{\pm i\theta} = \alpha(\cos \theta \pm i \sin \theta)$  con multiplicidad  $m$ , entonces

$$y_k = \alpha^k (R_1(k) \cos(k\theta) + R_2(k) \sin(k\theta)),$$

siendo  $P$  y  $Q$  polinomios de grado menor o igual que  $m-1$ . En este caso, podemos afirmar que todas las soluciones de la ecuación en diferencias están acotadas si  $|\alpha| < 1$  o  $|\alpha| = 1$  pero  $m = 1$ .

En conclusión: Todas las soluciones de la ecuación en diferencias están acotadas si y solo las raíces  $\lambda$  de  $p$  satisfacen una de las siguientes condiciones:

- $|\lambda| < 1$ .
- $|\lambda| = 1$  y multiplicidad 1.

(si  $\lambda$  es complejo,  $|\lambda|$  es su módulo).

**Definición 2.4.11.** Dado un método multipaso

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{k+i},$$

se denomina

- Primer polinomio característico a:

$$\rho(s) = \sum_{i=0}^q \alpha_i s^i.$$

- Segundo polinomio característico a:

$$\sigma(s) = \sum_{i=0}^q \beta_i s^i.$$

**Definición 2.4.12.** Se dice que el método verifica la condición de la raíz si todas las raíces  $\lambda$  del primer polinomio característico verifican una de las siguientes condiciones:

- $|\lambda| < 1$ .
- $|\lambda| = 1$  y multiplicidad 1.

**Teorema 2.4.13.** *Un método multipaso es estable si y solo si se verifica la condición de la raíz.*

**Observación 2.4.14.** Si el método es consistente, entonces  $\lambda = 1$  es siempre raíz del primer polinomio característico pues:

$$\rho(1) = \alpha_0 + \dots + \alpha_q = 0$$

Para que sea estable, tiene que tener multiplicidad 1.

**Ejemplo 2.4.15.**

1. Los métodos Adams (AM ó AB) son todos estables.
2. Los métodos BDF son estables para  $q = 1, \dots, 6$ .

**Teorema 2.4.16** (Primera barrera de Dahlquist).

- *Un método multipaso estable de  $q$  pasos tiene a lo sumo orden  $q + 1$  si  $q$  es impar o  $q + 2$  si  $q$  es par.*
- *Si además es explícito, su orden es a lo sumo  $q$ .*

**Teorema 2.4.17.** *Un método multipaso que satisface:*

- *La condición de la raíz.*
- $\alpha_0 + \dots + \alpha_q = 0$ .
- $\sum_{i=0}^q \alpha_i i^l = l \sum_{i=0}^q \beta_i i^{l-1}$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

*es convergente. Si además el método es de orden  $p$  y los  $q$  primeros pasos se dan con un método unipaso de orden  $p$ , entonces existe  $c > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que:*

$$\max_{i=0, \dots, N} |y(t_i) - y_i| \leq ch^p.$$

## Capítulo 3

# Estabilidad asintótica

### 3.1. Motivación. Ecuación test de Dahlquist

Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La única solución de dicho problema es  $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$  y todas las soluciones de la ecuación  $y' = \lambda y$  verifican que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Apliquemos el método de Euler a este problema. Tenemos entonces el método

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) \\ &= y_k + h\lambda y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

¿Para qué valores de  $h$  ocurre que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_k = 0$ ?

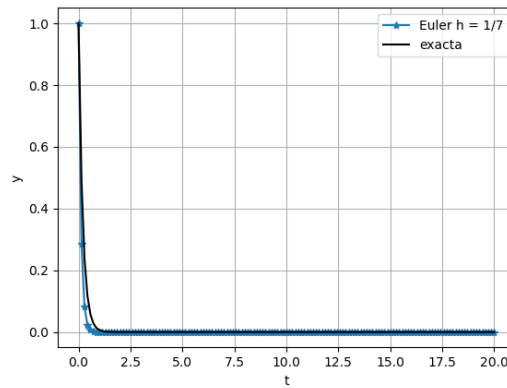
$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= y_0(1 + h\lambda) \\ y_2 &= y_1(1 + h\lambda) = y_0(1 + h\lambda)^2 \\ &\vdots \\ y_k &= y_0(1 + h\lambda)^k \end{aligned}$$

Entonces

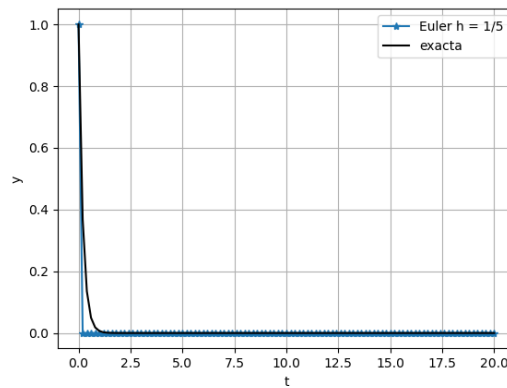
$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0 \iff |1 + h\lambda|^k < 1 \iff h < -\frac{2}{\lambda}$$

Si  $0 < 1 + h\lambda < 1$  la convergencia es monótona y esto ocurre si y solo si  $h < -1/\lambda$ . Distingamos los distintos casos:

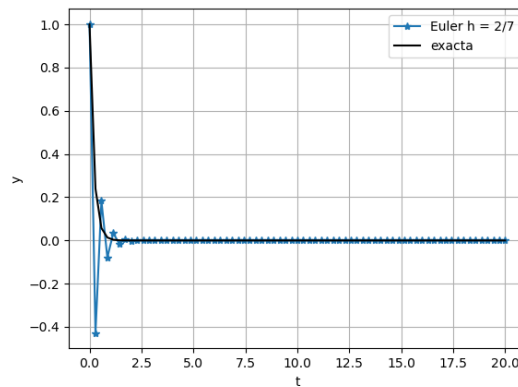
1. Si  $h \in (0, -\frac{1}{\lambda})$  entonces  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  de forma monótona. Si tomamos  $\lambda = -5$ :



2. Si  $h = -\frac{1}{\lambda}$ . Si tomamos  $\lambda = -5$ :

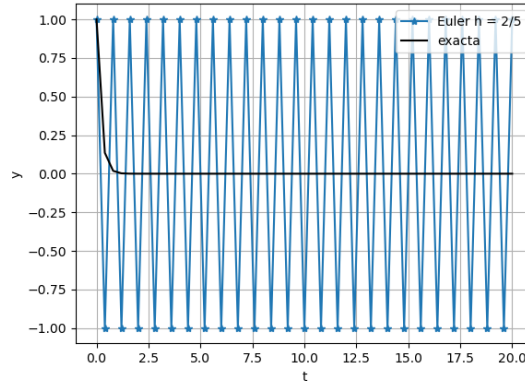


3. Si  $h \in (-\frac{1}{\lambda}, -\frac{2}{\lambda})$ . Si tomamos  $\lambda = -5$ :

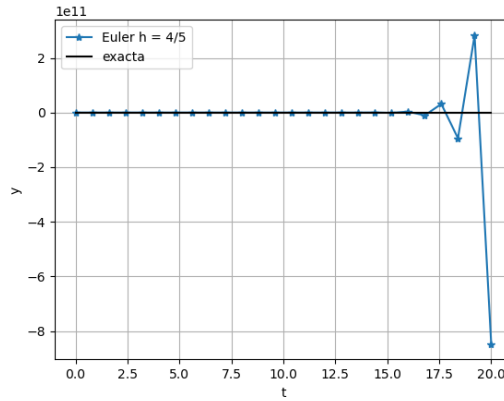




4. Si  $h = -\frac{2}{\lambda}$ . Si tomamos  $\lambda = -5$ :



5. Si  $h > -\frac{2}{\lambda}$  entonces  $|y_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ . Si tomamos  $\lambda = -5$ :



**Definición 3.1.1.** A la función  $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h}$ , siendo  $\hat{h} = h\lambda$ , se le denomina función de estabilidad absoluta del método de Euler. Si  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , se denomina intervalo de estabilidad absoluta a  $I_A = \{\hat{h} : |R(\hat{h})| < 1\}$ .

**Ejemplo 3.1.2.** Encontrar la función de estabilidad absoluta y el intervalo de estabilidad absoluta para el método de Euler implícito aplicándolo al problema:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & \text{Re}(\lambda) < 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) \\ &= y_k + h\lambda y_{k+1} \end{aligned}$$

De donde deducimos que  $y_{k+1} = \frac{1}{1-\hat{h}}y_k$ , siendo  $\hat{h} = h\lambda$ . Así

$$|R(\hat{h})| < 1 \iff \left| \frac{1}{1-\hat{h}} \right| < 1 \iff \hat{h} < 0 \implies I_A = (-\infty, 0)$$

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , entonces las soluciones de la ecuación del problema se pueden expresar como

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} = y_0 e^{\text{Re}(\lambda)t} [\cos(\text{Im}(\lambda)t) + i \sin(\text{Im}(\lambda)t)].$$

Como  $\cos(\text{Im}(\lambda)t) + i \sin(\text{Im}(\lambda)t)$  está acotada, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  para toda solución de la ecuación. Aplicando el método de Euler llegamos a que

$$y_k = (1 + h\lambda)^k y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

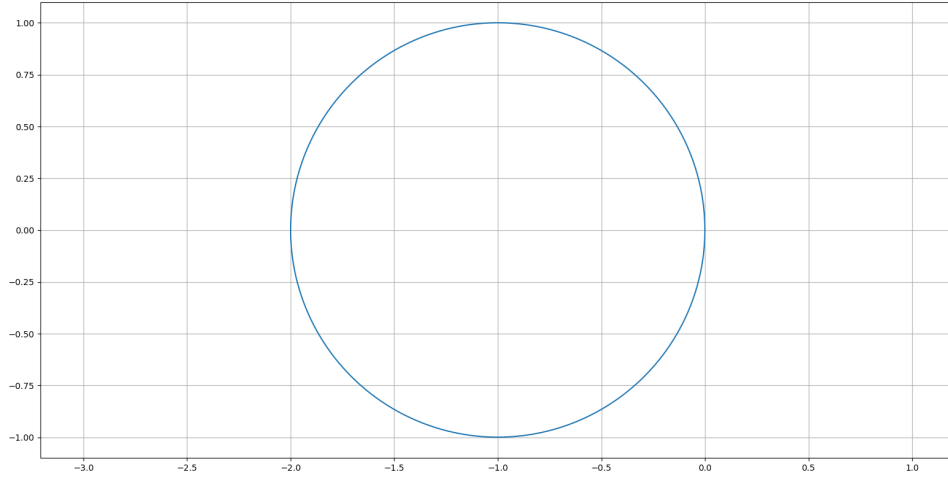
$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0 \iff |1 + h\lambda|^k < 1 \iff |1 + \hat{h}| < 1 \iff \hat{h} \in \Delta(-1, 1).$$

A  $\{\hat{h} \in \mathbb{C} : |R(\hat{h})| < 1\}$  se le denomina dominio de estabilidad.

Si aplicamos Euler implícito llegamos a que

$$|R(\hat{h})| < 1 \iff \left| \frac{1}{1 - \hat{h}} \right| < 1 \iff 1 < |1 - \hat{h}| \iff |\hat{h} - 1| > 1.$$

Así, la región de estabilidad es el exterior del disco  $\Delta(1, 1)$ .



Frontera del dominio de estabilidad del método Euler implícito.

Supongamos ahora que tenemos un sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \vec{y}' = M \vec{y} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}$$

Supongamos que  $M$  es diagonalizable, con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ . ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = 0$  para toda solución del sistema?

Como  $M$  es diagonalizable, entonces  $M = Q\Lambda Q^{-1}$  donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}, \quad Q = [R_1 | \cdots | R_N]$$

siendo  $MR_i = \lambda_i R_i$  para cada  $i = 1, \dots, N$ .

Si cambiamos de la base canónica a la base de los autovalores, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{Z}(t) &= Q^{-1}\vec{y}(t) \\ \vec{Z}'(t) &= Q^{-1}\vec{y}'(t) = Q^{-1}M\vec{y}(t) = Q^{-1}MQ\vec{Z}(t) = \Lambda\vec{Z}(t)\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} Z'_1 \\ \vdots \\ Z'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \iff Z'_i = \lambda_i Z_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Por tanto, la solución es  $Z_i(t) = Z_{i,0}e^{\lambda_i t}$  siendo

$$\vec{Z}_0 = Q^{-1}\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} Z_{1,0} \\ \vdots \\ Z_{N,0} \end{bmatrix},$$

lo que nos dice que

$$\vec{Z}(t) = \begin{bmatrix} Z_{1,0}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ Z_{N,0}e^{\lambda_N t} \end{bmatrix}.$$

Así,  $\vec{y}(t) = Q\vec{Z}(t)$ , luego  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = 0$  si y solo si los autovalores son complejos con parte real negativa (lo que incluye el caso de que sean reales y negativos).

Si aplicamos el método de Euler:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + hM\vec{y}_k.$$

¿Cuándo podemos afirmar que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = 0$ ?

$$\begin{aligned}\vec{Z}_{k+1} &= Q^{-1}\vec{y}_{k+1} = Q(\vec{y}_k + hM\vec{y}_k) = \vec{Z}_k + h\Lambda\vec{Z}_k \\ &= (I + h\Lambda)\vec{Z}_k \\ &= \begin{bmatrix} 1 + h\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 + h\lambda_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_{1,k} \\ \vdots \\ Z_{N,k} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Así,

$$\vec{Z}_k = \begin{bmatrix} (1 + h\lambda_1)^k Z_{1,0} \\ \vdots \\ (1 + h\lambda_N)^k Z_{N,0} \end{bmatrix}.$$

Por tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = 0$  si y solo si  $|1 + h\lambda_i| < 1$  para cada  $i = 1, \dots, N$ .

## 3.2. Estabilidad absoluta de los métodos RK

Al igual que antes, consideremos el problema

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & \text{Re}(\lambda) < 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$y(t) = y_0 e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} [\cos(\operatorname{Im}(\lambda)t) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(\lambda)t)]$$

Aplicamos un método RK con el siguiente tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \cdots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_q \end{array}$$

Hemos de re-

solver:

$$\left. \begin{array}{l} y_k^{(1)} = y_k + \lambda h \sum_{j=1}^q a_{1,j} y_k^{(j)} \\ y_k^{(2)} = y_k + \lambda h \sum_{j=1}^q a_{2,j} y_k^{(j)} \\ \vdots \\ y_k^{(q)} = y_k + \lambda h \sum_{j=1}^q a_{q,j} y_k^{(j)} \\ y_{k+1} = \lambda h \sum_{i=1}^q b_i y_k^{(i)} \end{array} \right\} \iff Y = y_k \vec{e} + \hat{h} A Y.$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_k^{(1)} \\ \vdots \\ y_k^{(q)} \end{bmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{h} = h\lambda.$$

Por tanto, hemos de resolver

$$\begin{aligned} Y = y_k \vec{e} + \hat{h} A Y &\iff (I - \hat{h} A) Y = y_k \vec{e} \\ &\iff Y = [(I - \hat{h} A)^{-1} \vec{e}] y_k \end{aligned}$$

Por lo que necesitamos que  $I - \hat{h} A$  tenga inversa.

**Observación 3.2.1.** Si  $\rho(B) < 1$ , entonces  $I - B$  es invertible y

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + B^3 + \dots$$

Usando esto para  $B = \hat{h} A$ , tenemos que

$$|\hat{h} \rho(A)| = h |\lambda| \rho(A) < 1 \iff 1 < \frac{1}{|\lambda| \rho(A)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \hat{h} \sum_{i=1}^q b_i y_k^{(i)} = y_k + \hat{h} \vec{b}^T Y \\ &= y_k + \hat{h} \vec{b}^T (I - \hat{h} A)^{-1} \vec{e} y_k \\ &= (1 + \hat{h} \vec{b}^T (I - \hat{h} A)^{-1} \vec{e}) y_k, \end{aligned}$$

con lo que llegamos a la siguiente definición.

**Definición 3.2.2.** Se denomina función de estabilidad absoluta de un método RK a

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} \vec{b}^T (I - \hat{h} A)^{-1} \vec{e}.$$

**Observación 3.2.3.** Se puede demostrar que

$$R(\hat{h}) = \frac{|I - \hat{h} A + \hat{h} \vec{e} \vec{b}^T|}{|I - \hat{h} A|}.$$

**Definición 3.2.4.** Se denomina dominio de estabilidad absoluta a

$$D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C}^- : |R(\hat{h})| < 1\}.$$

**Definición 3.2.5.** Se denomina intervalo de estabilidad absoluta a  $I_A = D_A \cap \mathbb{R}$ .

**Definición 3.2.6.** Se dice que un método es  $A$ -estable si  $D_A = \mathbb{C}^-$ .

**Definición 3.2.7.** Se dice que un método es  $L$ -estable si es  $A$ -estable y además

$$\lim_{\hat{h} \in \mathbb{C}^-, |\hat{h}| \rightarrow \infty} R(\hat{h}) = 0.$$

**Ejemplo 3.2.8.** El método de Euler implícito es  $L$ -estable pues  $D_A = \mathbb{C}^-$  (es decir, es  $A$ -estable) y además:

$$\lim_{|\hat{h}| \rightarrow \infty} R(\hat{h}) = \lim_{|\hat{h}| \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \hat{h}} = 0.$$

**Observación 3.2.9.** Dado un método RK:

1.  $R(\hat{h})$  es siempre una función racional.
2. Si el método es explícito,  $R(\hat{h})$  es un polinomio de grado menor o igual que  $q$ .
3. Un método explícito consistente no puede ser  $A$ -estable.
4. Para un método de orden  $p$  se tiene que  $R(\hat{h}) = e^{\hat{h}} + O(\hat{h}^{p+1})$ .
5. Siempre ocurre que  $0 \in \partial D_A$ . Además, siempre ocurre que  $R(\hat{h}) > 1$  si  $\hat{h} \in (0, \varepsilon)$  para cierto  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Por tanto, nunca ocurre que  $|R(\hat{h})| < 1$  para todo  $\hat{h} \in \mathbb{C}$ .
6. En un método explícito de  $p$  etapas y orden  $p$  siempre se tiene

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2!} + \dots + \frac{\hat{h}^p}{p!}, \quad p \leq 5$$

7. Un método de  $q$  etapas explícito no puede tener orden mayor que  $q$ .

### 3.2.1. Representación gráfica de la región de estabilidad

Denotemos:

- $D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C}^- : |R(\hat{h})| < 1\}$ .
- $Fr(A) = \{\hat{h} \in \mathbb{C}^- : |R(\hat{h})| = 1\}$ .
- $\partial D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C} : |R(\hat{h})| < 1\}$ .

Vamos a intentar dibujar  $\partial D_A$ . Sea  $z \in \partial D_A$ , entonces existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $R(z) = e^{i\theta}$  (porque  $z$  tiene módulo 1). ¿Qué relación hay entre  $z$  y  $\theta$ ? Supongamos que  $z$  es una función derivable de  $\theta$  entonces

$$\begin{aligned} R(z(\theta)) = e^{i\theta} &\implies R'(z(\theta)) \cdot z'(\theta) = ie^{i\theta} \\ &\implies z'(\theta) = \frac{ie^{i\theta}}{R'(z(\theta))}. \end{aligned}$$

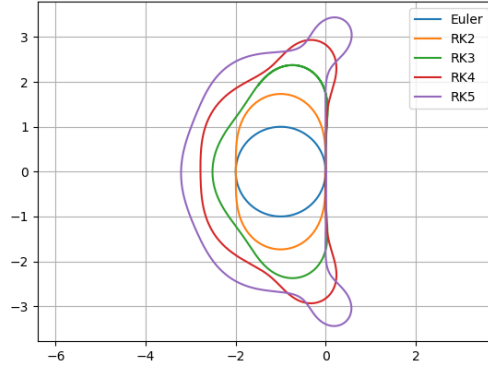
Hemos llegado a una ecuación diferencial para  $z(\theta)$ . Si suponemos que tenemos una condición inicial para  $\theta = 0$ , entonces

$$R(z(0)) = e^{i \cdot 0} = 1.$$

Anteriormente vimos que  $R(0) = 1$ , luego podemos tomar como condición inicial que  $z(0) = 0$ . Así, tenemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} z'(\theta) = \frac{ie^{i\theta}}{R'(z(\theta))} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando este método a los métodos RK:



Frontera de los dominios de estabilidad para los métodos RK explícitos de orden 1, 2, 3, 4 y 5.

### 3.3. Estabilidad absoluta de los métodos multipasos

**Definición 3.3.1.** Se denomina polinomio de estabilidad absoluta del método multipaso

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{k+i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{k+i},$$

al polinomio:

$$\Pi(z, \hat{h}) = \rho(z) - \hat{h}\sigma(z).$$

**Observación 3.3.2.** Podemos asegurar que todas las soluciones de la ecuación  $y' = \lambda y$ ,  $\text{Re}(\lambda) < 0$  tienden a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  si y solo si todas las raíces de  $\Pi(z; \hat{h})$  tienen módulo estrictamente menor que 1.

**Definición 3.3.3.** Se denomina dominio de estabilidad absoluta

$$D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C} : \Pi(z; \hat{h}) = 0 \implies |z| < 1\}.$$

**Definición 3.3.4.** Se denomina intervalo de estabilidad absoluta a  $I_A = D_A \cap \mathbb{R}$ .

**Definición 3.3.5.** Se dice que el método es  $A$ -estable si  $\mathbb{C}^- \subset D_A$ .

#### 3.3.1. Método de localización de la frontera

Definimos

$$\partial D_A = \{\hat{h} \in \mathbb{C} : \Pi(z; \hat{h}) \text{ tiene alguna raíz de módulo } 1\}.$$

Es claro que  $Fr(D_A) = \partial D_A$ . Si  $\hat{h} \in \partial D_A$ , existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\Pi(e^{i\theta}; \hat{h}) = 0$ , es decir, existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\rho(e^{i\theta}) - \hat{h}\sigma(e^{i\theta}) = 0$ , si  $\sigma(e^{i\theta}) \neq 0$ , entonces

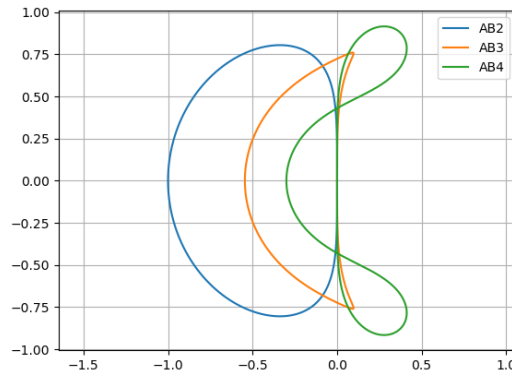
$$\hat{h} = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}.$$

Consideramos en  $\mathbb{C}$  la curva:

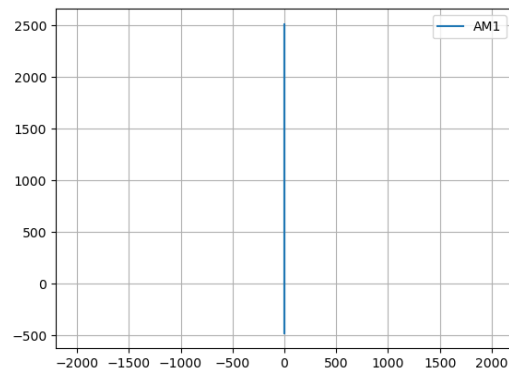
$$\theta \in \mathbb{R} : \sigma(e^{i\theta}) \mapsto \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}.$$

Esto nos da una curva que contiene a la frontera de  $D_A$ .

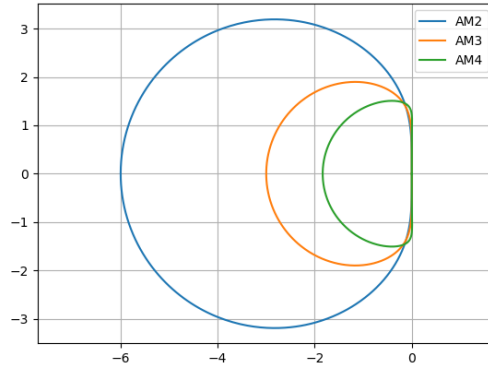
Aplicando este método a los métodos AB, AM y BDF:



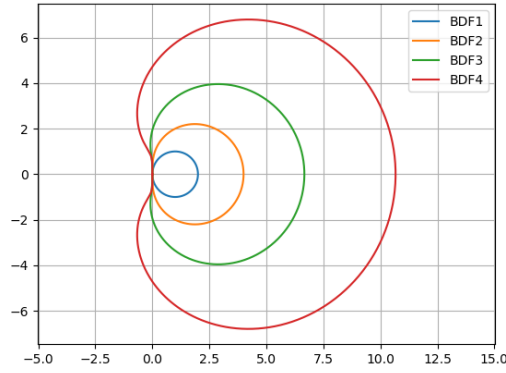
Frontera de los dominios de estabilidad para los métodos AB de 2, 3 y 4 pasos.



Frontera del dominio de estabilidad del métodos AM1.



Frontera de los dominios de estabilidad para los métodos AM de 2, 3 y 4 pasos.



Frontera de los dominios de estabilidad para los métodos BDF de 1, 2, 3 , 4 y 5 pasos.

### 3.4. Otros tipos de ecuaciones con comportamiento Stiff

Los problemas *stiff* son aquellos que presentan ciertas características que hacen que sean difíciles de resolver utilizando métodos numéricos tradicionales. Estas características incluyen la presencia de términos que varían de forma muy rápida o muy lenta en el tiempo, o la presencia de términos que varían de forma muy rápida o muy lenta en el espacio. Estos términos pueden hacer que los métodos numéricos tradicionales tengan un rendimiento inaceptablemente lento o inestable. Veamos un ejemplo donde podamos observar estas características.

#### Ejemplo 3.4.1.

1.

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & \text{Re}(\lambda) < 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \vec{y}' = M \vec{y}, & A \in M_{N \times N} \\ \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$



### 3.5. Estabilidad absoluta de los métodos Predictor-Corrector

Consideremos el método P-C que para cada  $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} z_0 = y_k + hf(t_k, y_k) \\ z_{l+1} = y_k + hf(t_{k+l}, z_l), \quad l = 0, \dots, M-1 \\ y_{k+1} = z_M \end{cases}$$

Calculemos  $R(\hat{h})$ . Aplicamos el método P-C para resolver

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Una vez calculado  $y_k$ :

$$\begin{aligned} z_0 &= y_k + h\lambda y_k = (1 + \hat{h})y_k \\ z_1 &= y_k + h\lambda y_k = (1 + \hat{h})z_0 = y_k + \hat{h}(1 + \hat{h})y_k = (1 + \hat{h} + \hat{h}^2)y_k \\ &\vdots \\ z_M &= \dots = (1 + \hat{h} + \dots + \hat{h}^{M+1})y_k \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que  $y_{k+1} = z_M = (1 + \hat{h} + \dots + \hat{h}^{M+1})y_k = (1 + \hat{h} + \dots + \hat{h}^{M+1})^{k+1}y_0$ , luego,  $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \dots + \hat{h}^{M+1}$ .

- Si  $M = 0$ ,  $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h}$ , que es la función de estabilidad del método de Euler.
- Si  $M = \infty$ ,  $R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \hat{h}^2 + \dots = \frac{1}{1-\hat{h}}$ , que es la función de estabilidad del método de Euler implícito.



# Capítulo 4

## Problemas de contorno

El problema que vamos a estudiar a lo largo de este capítulo es

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y'), & t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}$$

### 4.1. Derivación numérica

Consideramos los valores de una función  $u$  en los puntos de una partición  $x_0, x_1, \dots, x_{N+1}$ . Si la partición es uniforme, entonces  $x_i = x_0 + ih$  para cada  $i = 0, 1, \dots, N+1$ . ¿Cómo podemos aproximar  $u^{(k)}(c)$  usando solo puntos de la malla?

#### 4.1.1. Fórmulas de derivación numérica

Consideramos una partición uniforme  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N+1$ . Las fórmulas de derivación numérica son de la forma:

$$u^{(k)}(c) \approx D_{n+1}^k u(c) = \frac{1}{h^k} \sum_{j=1}^r \alpha_j u(x_{i+j}), \quad l < r.$$

**Ejemplo 4.1.1.** Aproximación de la segunda derivada de  $u$  en  $x_i$  usando  $u(x_{i-1})$ ,  $u(x_i)$  y  $u(x_{i+1})$ .

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= (u')'(x_i) \approx \frac{u'(x_i + h/2) - u'(x_i - h/2)}{h} \\ &\approx \frac{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h}}{h} \\ &= \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}. \end{aligned}$$

Luego:

$$u''(x_i) \approx D_3^2 u(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}.$$

**Definición 4.1.2.** Diremos que una fórmula  $u^{(k)}(c) \approx D_{n+1}^k u(c)$  tiene orden  $p$  si

$$u^{(k)}(c) = D_{n+1}^k u(c) + O(h^p),$$

para funciones  $u$  de clase  $p+k$ .

**Ejemplo 4.1.3.** Veamos que

$$u''(x_i) \approx D_3^2 u(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}$$

tiene orden 2. Desarrollando el polinomio de Taylor de  $u$  en  $x_i$  y evaluando en  $x_{i+1}$  y  $x_{i-1}$  respectivamente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = u(x_i) + u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 + \frac{u'''(x_i)}{6}h^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{24}h^4 \dots \\ u(x_{i-1}) &= u(x_i - h) = u(x_i) - u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 - \frac{u'''(x_i)}{6}h^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{24}h^4 + \dots \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} = u''(x_i) + \frac{u^{(4)}(x_i)}{12}h^2 + \dots$$

Siendo rigurosos, si desarrollamos el polinomio de Taylor de orden 4 de  $u$  en  $x_i$ , llegamos a que

$$D_3^2 u(x_i) = u''(x_i) + O(h^2),$$

es decir, esta fórmula tiene orden 2.

**Observación 4.1.4.** Consideremos la fórmula de derivación numérica  $u^{(k)}(c) \approx D_{n+1}^k u(c)$ . Si  $n \geq k$ , el máximo orden que puede tener la fórmula es  $n + 1 - k$ . Pero si la fórmula es centrada en  $x_i$  y  $n$  y  $k$  tienen la misma paridad, entonces el orden máximo es  $n - k + 2$ .

#### 4.1.2. Método de los coeficientes indeterminados

Supongamos que queremos obtener una fórmula para

$$u'(x_i) \approx D_3^1 u(x_i) = \frac{\alpha_0 u(x_i) + \alpha_1 u(x_{i+1}) + \alpha_2 u(x_{i+2}))}{h}$$

¿Cómo encontramos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ? Al igual que antes, si desarrollamos el polinomio de Taylor de  $u$  en  $x_i$  y lo evaluamos en  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$  respectivamente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i + h) = u(x_i) + u'(x_i)h + \frac{u''(x_i)}{2}h^2 + \frac{u'''(x_i)}{6}h^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{24}h^4 \dots \\ u(x_{i+2}) &= u(x_i + 2h) = u(x_i) + u'(x_i)2h + \frac{u''(x_i)}{2}(2h)^2 + \frac{u'''(x_i)}{6}(2h)^3 + \frac{u^{(4)}(x_i)}{24}(2h)^4 \dots \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} hD_3^1 u(x_i) &= \alpha_0 u(x_i) + \alpha_1 u(x_{i+1}) + \alpha_2 u(x_{i+2}) \\ &= [\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2]u(x_i) + [\alpha_1 + 2\alpha_2]u'(x_i) + \left[\frac{\alpha_1}{2} + 2\alpha_2\right]u''(x_i)h^2 + \\ &\quad + \left[\frac{\alpha_1}{6} + \frac{8\alpha_2}{6}\right]u'''(x_i)h^3 + \dots \end{aligned}$$

Como vamos a aproximar la primera derivada, queremos que el coeficiente que acompaña a  $u(x_i)$  sea 0 y que el coeficiente que acompaña a  $u'(x_i)$  sea 1. Aún nos queda otra ecuación (pues llevaríamos 2 ecuaciones y tenemos 3 incógnitas). Podemos hacer que el coeficiente que acompaña a  $u''(x_i)$  sea 0 y así tener el mayor orden posible. Nos quedaría entonces:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ \frac{\alpha_1}{2} + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución  $\alpha_0 = -3/2$ ,  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = -1/2$ . Por tanto:

$$u'(x_i) \approx D_3^1 u(x_i) = \frac{-3u(x_i) + 4\alpha_1 u(x_{i+1}) - (x_{i+2})}{2h},$$

y por la forma en la que la hemos construido, se puede comprobar que es de orden 2.

### 4.1.3. Método interpolatorio

Supongamos que conocemos el valor de la función  $u$  en la partición uniforme  $x_i = x_0 + ih$ , con  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ . Es razonable aproximar  $u^{(k)}(c) \approx P^{(k)}(c)$ , siendo  $P$  el polinomio que interpola

$$(x_{i+l}, u(x_{i+l})), \dots, (x_{i+r}, u(x_{i+r})).$$

Si usamos la forma de Lagrange del polinomio de interpolación:

$$P(x) = \sum_{j=1}^r u(x_{i+j}) \ell_j(x),$$

$$\ell_j(t) = \frac{(x - x_{i+l}) \cdots \widehat{(x - x_{i+j})} \cdots (x - x_{i+r})}{(x_{i+j} - x_{i+l}) \cdots \widehat{(x_{i+j} - x_{i+j})} \cdots (x_{i+j} - x_{i+r})}.$$

Con lo que tenemos

$$P^{(k)}(c) = \frac{1}{h^k} \sum_{j=1}^r \alpha_j u(x_{i+j}),$$

donde  $\frac{\alpha_j}{h^k} = l_{i+j}^{(k)}(c)$ . En particular, si usamos  $k + 1$  puntos para aproximar la  $k$ -ésima derivada:

$$u^{(k)}(c) \approx P^{(k)}(c) = k! \cdot a_k = k! \cdot u[x_{i+l}, \dots, x_{i+r}].$$

## 4.2. Problemas lineales: existencia y unicidad de solución

Vamos a estudiar problemas del tipo:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

siendo  $p, q, r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  continuas.

Primero vamos a ver cuando tiene solución el problema homogéneo, es decir, el problema:

$$(P) \begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y, & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

Sabemos que el problema de Cauchy:

$$(PC) \begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y, & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s \end{cases}$$

tiene solución única en  $[a, b]$ , que denotaremos por  $y(x; s)$ . Si somos capaces de encontrar un  $s$  tal que  $y(b; s) = \beta$ , entonces  $(P)$  tiene solución. Como el problema  $(P)$  es lineal, la ecuación  $y(b; s) = \beta$  es también lineal. Consideramos entonces los problemas:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y, & x \in [a, b] \\ y(a) = 1, \quad y'(a) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y, & x \in [a, b] \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 \end{cases}$$

y denotemos por  $y_1$  e  $y_2$  a sus soluciones respectivamente. Entonces el conjunto de soluciones de  $y'' = p(x)y' + q(x)y$  es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Ajustando  $c_1$  y  $c_2$  para que  $y(a) = \alpha$  e  $y'(a) = s$ :

$$\begin{aligned} y(a) &= c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = c_1, \quad c_1 = \alpha \iff c_1 = \alpha, \\ y'(a) &= c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = c_2, \quad c_2 = \beta \iff c_2 = \beta. \end{aligned}$$

Por tanto,  $y(x; s) = \alpha y_1(x) + s y_2(x)$ . Luego, la ecuación a resolver es:

$$(E) \quad y(b; s) = \alpha y_1(b) + s y_2(b) = \beta.$$

Distinguimos tres casos:

- (a) Si  $y_2(b) \neq 0$  entonces  $s = \frac{\beta - \alpha y_1(b)}{y_2(b)}$ , es decir,  $(P)$  tiene solución y es única.
- (b) Si  $y_2(b) = 0$  y  $\alpha y_1(b) \neq \beta$ , entonces  $(P)$  no tiene solución.
- (c) Si  $y_2(b) = 0$  y  $\alpha y_1(b) = \beta$ , entonces  $(P)$  tiene infinitas soluciones, pues  $y(x; s)$  es solución para cualquier  $s$ .

Si el problema es no homogéneo, el conjunto de soluciones de  $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$  es

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

siendo  $y_p$  una solución particular de  $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$  e  $y_h$  una solución de la ecuación homogénea. Acabamos de probar que  $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$  ( $y_1$  e  $y_2$  son las de antes). Vamos a tomar como solución particular, la solución del problema:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & x \in [a, b] \\ y(a) = 0, \quad y'(a) = 0 \end{cases}$$

que es solución además, de algún problema de contorno. Luego, todas las soluciones de  $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$  son de la forma:

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Ahora solo hemos de ajustar  $c_1$  y  $c_2$  para que  $y'(a) = \alpha$  e  $y'(a) = s$ . Es fácil comprobar, que esto implica que  $c_1 = \alpha$  y que  $c_2 = s$ . Por tanto, hemos de resolver la ecuación:

$$(E) \quad y_p(b) + \alpha y_1(b) + s y_2(b) = \beta.$$

Distinguimos tres casos (similares a los de antes).

### 4.3. Método de diferencias finitas

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

siendo  $q(x) > 0$  para cada  $x \in [a, b]$ .

1. Tomamos una partición uniforme en  $[a, b]$  de  $N + 2$  puntos, es decir,  $x_i = a + ih$ , siendo  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ .
2. Elegimos una fórmula de derivación numérica que aproxime  $y''(x_i)$  e  $y'(x_i)$  usando solo puntos de la malla para  $i = 1, \dots, N$ .

**Ejemplo 4.3.1.** Consideremos las fórmulas de derivación numérica:

$$y''(x_i) \approx D_3^2 y(x_i) = \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2}$$

$$y'(x_i) \approx D_2^1 y(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$$

que son de orden 2. Entonces la solución de

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}$$

verifica:

$$y(x_0) = \alpha$$

$$\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2} - p(x_i) \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - q(x_i)y(x_i) = r(x_i) + O(h^2), \quad i = 1, \dots, N$$

$$y(x_{N+1}) = \beta$$

Ahora, aproximamos  $y(x_i) \approx u_i$ :

$$u_0 = \alpha$$

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u_{i+1})}{h^2} - p(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - q(x_i)u_i = r(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$u_{N+1} = \beta$$

que es un sistema de  $N + 2$  ecuaciones y  $N + 2$  incógnitas. Para  $i = 2, \dots, N - 1$ , tenemos que:

$$\left( \frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h} \right) u_{i-1} - \left( \frac{2}{h^2} + q(x_i) \right) u_i + \left( \frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h} \right) u_{i+1} = r(x_i)$$

Multiplicando por  $-h^2/2$ :

$$-\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p(x_i)}{2} h \right) u_{i-1} + \left( 1 + \frac{q(x_i)}{2} h^2 \right) u_i - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p(x_i)}{2} h \right) u_{i+1} = -\frac{h^2}{2} r(x_i)$$

Definimos para cada  $i = 2, \dots, N - 1$ :

$$b_i = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p(x_i)}{2} h \right)$$

$$a_i = 1 + \frac{q(x_i)}{2} h^2$$

$$c_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p(x_i)}{2} h \right)$$

Para  $i = 1$ :

$$-b_1 u_0 + a_1 u_1 - c_1 u_2 = -\frac{h^2}{2} r(x_1) \iff a_1 u_1 - c_1 u_2 = -\frac{h^2}{2} r(x_1) + b_1 \alpha$$

Para  $i = N$ :

$$-b_N u_{N-1} + a_N u_N = -c_N u_{N+1} - \frac{h^2}{2} r(x_N) \iff -b_N u_{N-1} + a_N u_N = -\frac{h^2}{2} r(x_N) + c_N \beta$$

Luego, nos queda el sistema lineal  $A \vec{u} = \vec{f}$ , siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = -\frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ \vdots \\ r(x_{N-1}) \\ r(x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_N \beta \end{bmatrix}$$

**Definición 4.3.2.** Se dice que la matriz  $A$  es de diagonal estrictamente dominante por filas si

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad i = 1, \dots, N.$$

**Teorema 4.3.3.** Si una matriz es de diagonal estrictamente dominante por filas, entonces su determinante es distinto de cero.

**Ejemplo 4.3.4.**

- Si  $p = 0$ , entonces  $A$  es diagonal estrictamente dominante por filas.

*Demostración.* Si  $p = 0$ , entonces

$$|a_i| = 1 + \frac{h^2}{2} q(x_i) > |b_i| + |c_i| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

□

- Si  $p \neq 0$  y  $h < \frac{2}{\|p\|_\infty}$ , entonces  $A$  es diagonal estrictamente dominante por filas.

*Demostración.* Observamos que

$$\begin{aligned} p(x_i) &\geq -|p(x_i)| \geq -\|p\|_\infty \\ b_i &= \frac{1}{2} (1 + p(x_i)) \geq \frac{1}{2} (1 - \|p\|_\infty) > 0 \\ c_i &= \frac{1}{2} \left( 1 - p(x_i) \frac{h}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \|p\|_\infty \frac{h}{2} \right) > 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$|b_i| + |c_i| = b_i + c_i = 1 < 1 + \frac{h^2}{2} q(x_i) = a_i = |a_i|.$$

□

#### 4.3.1. Resolución numérica del sistema

Para resolver  $AX = F$  podemos usar la factorización  $LU$ . Es decir, podemos expresar  $A = LU$  siendo  $L$  una matriz triangular inferior y  $U$  una matriz triangular superior.

Además, si  $A$  es tridiagonal, entonces, podemos encontrar  $L$  y  $U$  de la siguiente forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & l_{N,N-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & & & & \\ & u_{22} & u_{23} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & u_{N-1,N} \\ & & & & & u_{N,N} \end{bmatrix}$$

Una vez tenemos  $A = LU$ , para resolver  $AX = F$ , o equivalentemente,  $LUX = F$ , tenemos que hacer lo siguiente:

1. Resolver  $LY = F$ .
2. Resolver  $UX = Y$ .

que son dos sistemas muy fáciles de resolver (por la forma que tienen  $L$  y  $U$ ).



## 4.4. Análisis del método

**Definición 4.4.1.** Definimos el operador  $\mathcal{L}$ , como el operador que a una función  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^2$  le asocia la función  $\mathcal{L}y$  definida por:

$$\mathcal{L}y = y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x).$$

Con esto, la ecuación  $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$  es equivalente a resolver  $\mathcal{L}y = r$ . Sea  $\mathcal{P} = \{x_0 < \dots < x_{N+1}\}$  una partición uniforme del intervalo  $[a, b]$ . Para cada vector  $U \in \mathbb{R}^{N+2}$ ,  $U^T = (u_1, \dots, u_N)$ , definimos  $\mathcal{L}_h$  que le asocia a  $U$  el vector de  $\mathbb{R}^N$  cuyas componentes son:

$$\mathcal{L}_h U_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - p(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - q(x_i)u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Con esto, el método de diferencia finitas se puede escribir como:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h U_i = r(x_i), & i = 1, \dots, N \\ u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta \end{cases}$$

Dada una función  $y(x)$ , representamos por  $Y$  al vector  $Y^T = (y(x_0), \dots, y(x_{N+1}))$ .

**Definición 4.4.2.** Se denomina error en  $x_i$  a  $e_i = y(x_i) - u_i$ .

**Definición 4.4.3.** Se denomina error a  $e(h) = \max_i |e_i|$ .

**Definición 4.4.4.** Se dice que el método es convergente si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} e(h) = 0.$$

**Definición 4.4.5.** Se denomina error de discretización local en  $x_i$  a:

$$\tau_i = \mathcal{L}_h Y_i - r(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

siendo  $Y^T = (y(x_0), \dots, y(x_{N+1}))$  e  $y(x)$  solución del problema.

**Definición 4.4.6.** Se dice que el esquema es consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0,$$

siendo  $\tau(h) = \max_i \tau_i$ .

**Definición 4.4.7.** Diremos que el método es estable si existe  $M > 0$  (independiente de  $h$ ) tal que

$$V = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{N+1} \end{bmatrix} \text{ y } \{\delta_k\}_{k=1}^N \text{ son tales que } \mathcal{L}_h V_i = \delta_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

**Teorema 4.4.8.** *Consistencia y estabilidad implican convergencia.*

**Definición 4.4.9.** Se dice que el método es de orden  $p$  si  $\tau(h) = O(h^p)$ .

**Teorema 4.4.10.** *Si un método es estable y de orden  $p$ , entonces  $e(h) = O(h^p)$ .*

**Corolario 4.4.11.** *El método*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h U_i = r(x_i), & i = 1, \dots, N \\ u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta \end{cases}$$

*es de orden 2.*

**Teorema 4.4.12.** Si  $q(x) > 0$  para cada  $x \in [a, b]$  y  $h \leq \frac{2}{\|p\|_\infty}$  (o  $h$  cualquiera si  $p = 0$ ) entonces

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h U_i = r(x_i), & i = 1, \dots, N \\ u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta \end{cases}$$

es un método estable.

**Corolario 4.4.13.** El método

$$\begin{cases} \mathcal{L}_h U_i = r(x_i), & i = 1, \dots, N \\ u_0 = \alpha, & u_{N+1} = \beta \end{cases}$$

es convergente.

## 4.5. Otras condiciones de contorno

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & x \in [a, b] \\ y'(a) = \sigma, & y(b) = \beta \end{cases}$$

Para  $i = 1, \dots, N$  consideramos

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - p(x_i) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - q(x_i)u_i = r(x_i).$$

Para  $i = N$ , tenemos que  $u_{N+1} = \beta$ , así podemos considerar:

$$\frac{u_{N-1} - 2u_N}{h^2} + p(x_N) \frac{u_{N-1}}{2h} - q(x_N)u_N = r(x_N) - \frac{\beta}{h^2} + p(x_N) \frac{\beta}{2h}.$$

Para  $i = 1$ , tenemos que  $y'(a) = \sigma \approx \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$ , aproximamos,  $\sigma = \frac{u_1 - u_0}{h}$ , así podemos considerar

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} - p(x_1) \frac{u_2 - u_1}{2h} - q(x_1)u_0 = r(x_0).$$

Para  $i = 0$ , si aproximamos  $\sigma = \frac{u_1 - u_0}{h}$ , despejando,  $u_0 = u_1 - \sigma h$  y sustituyendo en la ecuación para  $i = 1$  y multiplicándola por  $-h^2/2$ , nos queda que:

$$-b_1 u_0 + a_1 u_1 - c_1 u_2 = -\frac{h^2}{2} r(x_1) \underset{u_0 = u_1 - \sigma h}{\iff} (-b_1 + a_1)u_1 - c_1 u_2 = -r(x_1) \frac{h^2}{2} + b_1 \sigma h$$

Con todo esto que hemos hecho, nos queda el sistema  $AU = F$ , siendo

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 + a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{bmatrix}, \quad F = -\frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ \vdots \\ r(x_{N-1}) \\ r(x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \sigma h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_N \beta \end{bmatrix}$$

Otra alternativa a este método es el usar un nodo fantasma.

$$\sigma = y'(a) \approx \frac{y(a+h) - y(a-h)}{2h}$$

Añadimos

$$\blacksquare \quad \sigma = \frac{u_1 - u_{-1}}{2h}.$$

■

$$\frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2} - p(x_0)\frac{u_1 - u_0}{2h} - q(x_0)u_0 = r(x_0)$$

Despejando  $u_{-1}$  tenemos que

$$-b_0u_{-1} + a_0u_0 - c_0u_1 = -\frac{h^2}{2}r(x_0) \underset{u_{-1}=u_1-2\sigma h}{\iff} a_0u_0 - u_1 = -\frac{h^2}{2}r(x_0) - 2b_0\sigma h$$

Con esto, nos queda el sistema  $AU = F$ , siendo

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & -1 & & & \\ -b_1 + a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{bmatrix}, \quad F = -\frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} r(x_0) \\ r(x_1) \\ \vdots \\ r(x_{N-1}) \\ r(x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b_0\sigma h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_N\beta \end{bmatrix}$$

En el caso más general, tendríamos el problema:

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & x \in [a, b] \\ c_1y(a) + c_2y'(a) = \alpha \\ d_1y(b) + d_2y'(b) = \beta \end{cases}$$

## 4.6. Problemas no lineales

Son problemas de la forma

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

siendo  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.6.1.** Si  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , tiene derivadas parciales acotadas y existe  $L^* > 0$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') \geq L^*$$

para cualquier  $x \in [a, b]$  y cualesquiera  $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ , entonces el problema

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

tiene una única solución.

### 4.6.1. Método de diferencias finitas

Sea  $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{N+1} = b\}$  una malla equidistante del intervalo  $[a, b]$ , es decir,  $h = \frac{b-a}{N+1}$  y  $x_i = a + ih$  para cada  $i = 0, \dots, N+1$ . La solución del problema verifica que  $y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$  para cada  $i = 1, \dots, N$ . Aproximando las derivadas:

$$\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}\right) + O(h^2).$$

Actuado como antes, buscamos  $u_0, \dots, u_{N+1}$  tales que

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha \\ \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} &= f\left(x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right), \quad i = 1, \dots, N \\ u_{N+1} &= \beta \end{aligned}$$

Con lo que tenemos un sistema no lineal con  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas.

#### 4.6.2. Métodos de punto fijo

Un sistema no lineal se puede expresar como  $F(U) = 0$ , siendo

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad F : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad F(U) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, \dots, u_N) \\ \vdots \\ f_N(u_1, \dots, u_N) \end{bmatrix}$$

Si somos capaces de reescribir la ecuación que queremos resolver en una forma equivalente como  $U = G(U)$ , siendo  $G : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ , podríamos aplicar un método de punto fijo, por ejemplo

$$\begin{cases} U_0 \in D \\ U_{l+1} = G(U_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

**Observación 4.6.2.** Siempre podemos reescribir una ecuación  $F(U) = 0$  como  $G(U) = U$ . En la práctica tomaremos  $G(U) = U - AF(U)$ , con  $A$  matriz invertible.  $G(U) = U$  es efectivamente, equivalente a  $F(U) = 0$  porque

$$G(U) = U \iff U - AF(U) = U \iff AF(U) = 0 \underset{A \text{ invertible}}{=} F(U) = 0$$

**Definición 4.6.3.** Se dice que  $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  es contractiva si existe  $C \in [0, 1)$  tal que

$$\|G(U) - G(V)\| \leq C\|U - V\|,$$

para alguna norma  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^N$ .

**Teorema 4.6.4** (Teorema de Punto Fijo). *Si  $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  es contractiva, entonces tiene un único punto fijo  $U^*$  y además, todas las sucesiones*

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}^N \\ U_{l+1} = G(U_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

*convergen a  $U^*$ .*

**Teorema 4.6.5.** *Supongamos que  $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y existe  $C \in [0, 1)$  tal que*

$$\left| \frac{\partial G_i}{\partial u_j}(U) \right| < \frac{C}{N}$$

*para cada  $U \in \mathbb{R}^n$  y cualesquiera  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces  $G$  es contractiva.*

*Demostración.* Sean  $U, V \in \mathbb{R}^N$  y sea  $\psi(t) = G(V + t(U - V))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Sean  $\psi_i(t) = G_i(V + t(U - V))$ ,  $i = 1, \dots, n$  las componentes de  $\psi$ . Entonces

$$G_i(U) - G_i(V) = \psi_i(1) - \psi_i(0), \quad i = 1, \dots, N$$

Por el teorema del valor medio, existe  $\xi_i$  tal que

$$\begin{aligned}\psi_i(1) - \psi_i(0) &= \psi'_i(\xi_i)(1 - 0) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial G_i}{\partial u_j}(V + \xi_i(U - V)) \cdot (u_j - v_j), \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}$$

Tomando valor absolutos:

$$\begin{aligned}|G_i(U) - G_i(V)| &\leq \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial G_i}{\partial u_j}(V + \xi_i(U - V)) \right| \cdot |u_j - v_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \frac{C}{N} \|U - V\|_\infty = N \frac{C}{N} \|U - V\|_\infty = C \|U - V\|_\infty\end{aligned}$$

De aquí deducimos que

$$\|G(U) - G(V)\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |G_i(U) - G_i(V)| \leq C \|U - V\|_\infty$$

□

**Proposición 4.6.6.** Si  $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  es contractiva, de clase  $\mathcal{C}^2$ , todas las derivadas parciales de segundo orden son acotadas y

$$\frac{\partial G_i}{\partial u_j}(U^*) = 0$$

para cualesquiera  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  siendo  $U^*$  el único punto fijo de  $G$ , entonces el método es de orden 2.

*Demostración.* Sea  $\psi(t) = G(U^* + t(U - U^*))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Para cada  $i = 1, \dots, N$  tenemos que

$$G_i(U) - G_i(U^*) = \psi_i(1) - \psi_i(0)$$

Usando el teorema de Taylor, sabemos que existe  $\xi_i$  tal que

$$\begin{aligned}\psi_i(1) - \psi_i(0) &= \psi'_i(0)(1 - 0) + \frac{\psi''_i(\xi_i)}{2!}(1 - 0)^2 \\ &= \psi'_i(0) + \frac{\psi''_i(\xi_i)}{2!}\end{aligned}$$

Observamos que

$$\psi'_i(0) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial G_i}{\partial u_j}(U^*) = 0$$

Por tanto:

$$\psi_i(1) - \psi_i(0) = \frac{\psi''_i(\xi_i)}{2}, \quad i = 1, \dots, N$$

Calculemos la segunda derivada de  $\psi_i$

$$\begin{aligned}\psi_i(t) &= G_i(U^* + t(U - U^*)) \\ \psi'_i(t) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial G_i}{\partial u_j}(U^* + t(U - U^*)) \cdot (u_j - u_j^*) \\ \psi''_i(t) &= \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial^2 G_i}{\partial u_j \partial u_k}(U^* + t(U - U^*)) \cdot (u_j - u_j^*) \cdot (u_k - u_k^*)\end{aligned}$$

Si suponemos que  $M$  es cota superior para las segundas derivadas parciales, entonces

$$|\psi_i''(t)| \leq NM\|U - V\|_\infty^2$$

Por tanto,

$$|G_i(U) - G_i(U^*)| = \frac{\psi_i''(\xi_i)}{2} \leq \frac{1}{2}NM\|U - V\|_\infty^2 \stackrel{C=NM/2}{=} C\|U - U^*\|_\infty^2$$

De aquí deducimos que

$$\|G(U) - G(U^*)\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |G_i(U) - G_i(U^*)| \leq C\|U - U^*\|_\infty^2$$

□

**Observación 4.6.7.** Como hemos dicho antes, podemos rescribir  $F(U) = 0$  como  $G(U) = U$ , tomando  $G(U) = U - AF(U)$ , siendo  $A$  una matriz invertible. ¿Cómo hay que tomar  $A$  para que el método sea de orden 2?

Si queremos usar la proposición anterior, hemos de asegurar que  $\frac{\partial G_i}{\partial u_j}(U^*) = 0$  para cualesquiera  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , siendo  $U^*$  el único punto fijo de  $G$ .

$$G(U) = U - AF(U) \iff G_i(U) = u_i - \sum_{l=1}^N a_{il}F_l(u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, \dots, N$$

Entonces

$$\frac{\partial G_i}{\partial u_j} = \begin{cases} 1 - \sum_{l=1}^N a_{il} \frac{\partial F_l}{\partial u_j} & \text{si } j = i \\ - \sum_{l=1}^N a_{il} \frac{\partial F_l}{\partial u_j} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Es fácil ver que  $DG(U) = I - A \cdot DF(U)$ . Como queremos que  $DG(U^*) = 0$ :

$$0 = DG(U^*) = I - A \cdot DF(U^*) \iff A \cdot DF(U^*) = I$$

Si  $DF(U^*)$  es invertible, hemos de tomar  $A = DF(U^*)^{-1}$ , que sería la mejor elección para  $A$ . Sin embargo en la práctica no conocemos  $U^*$ , pero suponiendo que el método que usamos es convergente, podemos aproximar  $U^*$  por  $U_L$ , con lo que nos quedaría el siguiente método

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}^N \\ U_{l+1} = G(U_l) = U_l - DF(U_l)^{-1}F(U_l), \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

que es conocido como el método de Newton.

**Teorema 4.6.8.** Si  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ ,  $U^*$  es un cero de  $F$  y si  $DF(U^*)$  es invertible, entonces existe  $\delta > 0$  tal que las sucesiones

$$\begin{cases} U_0 \in B_\infty(U^*, \delta) \\ U_{k+1} = U_k - DF(U_k)^{-1}F(U_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

están bien definidas y convergen hacia  $U^*$  con segundo orden, es decir, existe  $M > 0$  tal que

$$\|U_{k+1} - U^*\|_\infty \leq M\|U_k - U^*\|_\infty^2$$

**Observación 4.6.9.**

1. Si  $N = 1$ , este es el método de Newton en  $\mathbb{R}$ .
2. En la práctica no es necesario calcular  $DF(U_l)^{-1}$ , para programar el método es mucho más eficiente hacer lo siguiente:

$$U_{k+1} - U_k = -DF(U_k)^{-1}F(U_k) \iff DF(U_k)(U_k - U_{k+1}) = F(U_k)$$

Si llamamos  $X_k = U_k - U_{k+1}$ , entonces resolvemos  $DF(U_k)X_k = F(U_k)$  y luego tomamos  $U_{k+1} = U_k - X_k$ .

### 4.6.3. Aplicación de los métodos de diferencias finitas para problemas de contorno no lineales

Consideremos el problema

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases}$$

Por comodidad supondremos que  $\alpha = \beta = 0$ . Entonces un método de diferencias finitas podría ser:

$$\begin{aligned} \frac{-2u_1 + u_2}{h^2} &= f\left(x_1, u_1, \frac{u_2}{2h}\right) & i = 1 \\ \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} &= f\left(x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right), & i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{-2u_{N-1} + u_N}{h^2} &= f\left(x_N, u_N, \frac{-u_{N-1}}{2h}\right) & i = N \end{aligned}$$

Observamos que  $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$  verifica  $\Phi(U) = 0$  siendo

$$\begin{aligned} \Phi_1(u_1, \dots, u_N) &= \frac{-2u_1 + u_2}{h^2} - f\left(x_1, u_1, \frac{u_2}{2h}\right) \\ \Phi_i(u_1, \dots, u_N) &= \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - f\left(x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right), & i = 2, \dots, N-1 \\ \Phi_N(u_1, \dots, u_N) &= \frac{-2u_{N-1} + u_N}{h^2} - f\left(x_N, u_N, \frac{-u_{N-1}}{2h}\right) \end{aligned}$$

Observamos que

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} = \begin{cases} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} & si & h = i-1 \\ -\frac{2}{h^2} - \frac{\partial f}{\partial y} & si & j = i \\ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} & si & h = i+1 \\ 0 & si & \text{es otro caso} \end{cases}$$

Así,

$$D\Phi(U) = -\frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} a_i &= 1 + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \left( x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) \\ b_i &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \left( x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) \right] \\ c_i &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \left( x_i, u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) \right] \end{aligned}$$