

LEHRBUCH

Jens Kahlenberg

Lebensversicherungs- mathematik

Basiswissen zur Technik
der deutschen Lebensversicherung



Springer Gabler

Lebensversicherungsmathematik

Jens Kahlenberg

Lebensversicherungs- mathematik

Basiswissen zur Technik
der deutschen Lebensversicherung



Springer Gabler

Jens Kahlenberg
Aktuarielles und Statistisches Consulting
Köln, Deutschland

ISBN 978-3-658-14657-3 ISBN 978-3-658-14658-0 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-14658-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Gabler
© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags.
Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Gabler ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

*Es ist nicht genug, zu wissen, man muss
auch anwenden; es ist nicht genug, zu
wollen, man muss auch tun.*

Johann Wolfgang von Goethe

Vorwort

Es gibt zahlreiche Bücher über die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Auch dieses Opus reiht sich in den bestehenden Reigen ein und möchte dem Leser eben diese Grundlagen in ausführlicher und verständlicher Weise nahebringen. Folglich wird es nicht unwesentliche Überschneidungen zu bereits erschienenen Werken geben.

Viele Bücher beschränken sich jedoch rein auf die Darstellung der klassischen Lebensversicherungsmathematik, evtl. erweitert um Aspekte der Überschussbeteiligung sowie Fragestellungen des Jahresabschlusses und der Bilanzierung. Sowohl das komplexere Teilgebiet der Berufsunfähigkeitsversicherung als auch die Erläuterung fondsgebundener Tarife werden häufig ausgespart oder nur äußerst knapp angerissen. Dies soll hiermit nachgeholt bzw. vervollständigt werden, indem auf die zugrunde liegende Versicherungstechnik dieser beiden, inzwischen sehr bedeutsamen Produktarten in derselben Ausführlichkeit eingegangen wird wie bei den herkömmlichen Produkten. Darüber hinaus werden auch wissenswerte Aspekte der Pflegeversicherung sowie Grundlagen der Lebensrückversicherung erläutert.

Das Buch ist über einen Zeitraum von mehreren Jahren während meiner Tätigkeit als aktuarieller Berater entstanden. Neben den derzeit gültigen, gesetzlichen Grundlagen wird daher jeweils versucht, auf die historische Entwicklung bis zum heutigen Stand der Produkte einzugehen. Auch das aktuelle Thema Solvency II wird auf einer übergeordneten Ebene beleuchtet.

In diesem Zusammenhang möchte ich Dr. Zoran Nikolic einen besonderen Dank aussprechen, der auf meine Bitte hin einen Gastbeitrag zu diesem Buch in Gestalt des Kapitels 2 geleistet hat.

Für das Korrekturlesen sowie die konstruktiven Diskussionen und Anmerkungen möchte ich mich bei Dr. Axel Schmidt ausdrücklich bedanken. Mein aufrichtiger Dank gilt auch Kathrin Kraff, die mich im vorigen Jahr durch

Korrekturarbeiten und hilfreiche Hinweise in wertvoller Weise unterstützt hat. Schließlich möchte ich auch meinem Bruder Hans-Jörg ganz herzlich dafür danken, dass er während der letzten Monate des Buchprojekts durch intensives Redigieren zu weiteren Verbesserungen beigetragen hat.

Für die verlagsseitige Betreuung in der finalen Phase danke ich außerdem Claudia Hasenbalg.

Bei aller Sorgfalt werden sich in einem derart umfangreichen Werk vermutlich dennoch Fehler eingeschlichen haben. Daher möchte ich die Leserinnen und Leser gerne bitten, mir diesbezüglich Hinweise oder auch generelle Anregungen zukommen zu lassen.

Köln, im Dezember 2017

Dr. Jens Kahlenberg

Inhaltsverzeichnis

Teil I Einführung

1	Einleitung	3
1.1	Aufbau des Buches	3
1.2	Weitere Literaturempfehlungen	4
2	Einordnung	7
2.1	Embedded Value	7
2.2	Stochastische Bewertung	9
2.3	Komponenten eines stochastischen Unternehmensmodells	11
2.4	Solvency II	13
3	Grundlagen der Lebensversicherung	15
3.1	Risikotransfer	15
3.2	Grundbegriffe	17
3.3	Historische Entwicklung und aktuelle Bedeutung	19
3.4	Relevante Gesetze	22
3.5	Rechnungsgrundlagen	24
3.6	Standard-Versicherungen	25
3.7	Versicherungsmathematische Notation	35

Teil II Klassische Lebensversicherungsmathematik

4	Elementare Finanzmathematik	39
4.1	Zinsrechnung	39
4.2	Zahlungsströme	50
4.3	Rechnungszins einer Versicherung	69
4.4	Übungen	72

5	Biometrische Grundlagen	85
5.1	Zukünftige Lebensdauer	85
5.2	Sterbetafeln	96
5.3	Modifikation von Sterbewahrscheinlichkeiten	113
5.4	Übungen	117
6	Erwartete Barwerte	129
6.1	Kommutationszahlen	129
6.2	Erwartungswert von Versicherungsleistungen	131
6.3	Stetige und sofort fällige Versicherungsleistungen	155
6.4	Übungen	162
7	Kosten, Zuschläge und Provisionen	177
7.1	Kosten 1. Ordnung	178
7.2	Kosten 2. Ordnung	183
8	Prämien	187
8.1	Äquivalenzprinzip	188
8.2	Prämien und ihre Berechnung	189
8.3	Besonderheiten	196
8.4	Kostenausweis und Kostenquoten	202
8.5	Übungen	205
9	Deckungskapital und weitere Reserven	217
9.1	Gesetzliche Bestimmungen	218
9.2	Deckungskapital	218
9.3	Bilanzdeckungsrückstellung	239
9.4	Zusätzliche Reserven	240
9.5	Übungen	248
10	Überschussbeteiligung	259
10.1	Gesetzliche Bestimmungen	260
10.2	Überschussentstehung	262
10.3	Überschussverwendung	269
10.4	Instrumente der Überschussbeteiligung	278
10.5	Übungen	287

Teil III Weiterführende Versicherungstechnik

11	Vertragsänderungen und Garantiewerte	291
11.1	Änderung von Dauer, Leistung oder Beitrag	292
11.2	Dynamische Erhöhung	294
11.3	Beitragsfreistellung	298
11.4	Rückkauf	300
11.5	Leistung bei Tod	307
11.6	Leistung bei Ablauf	308

11.7 Leistung im Rentenbezug	308
11.8 Übungen	310
12 Verbundene Leben	319
12.1 Versicherungen auf den Tod der ersten Person	320
12.2 Versicherungen auf den Tod der letzten Person	327
12.3 Einseitige Versicherungen	331
12.4 Hinterbliebenenrenten	332
12.5 Tabellarische Übersicht	336
12.6 Übungen	337
13 Fondsgebundene Versicherungen	345
13.1 Gesetzliche Bestimmungen	346
13.2 Überblick	347
13.3 Rechnungsgrundlagen	352
13.4 Notation	354
13.5 Prämien	356
13.6 Reserven	359
13.7 Überschussbeteiligung	367
13.8 Vertragsänderungen und Garantiewerte	370
13.9 Übungen	372
14 Berufsunfähigkeitsversicherung	375
14.1 Versicherungstechnik	377
14.2 Konkurrierende Risiken	378
14.3 Biometrische Grundlagen	384
14.4 Erwartete Barwerte	386
14.5 Kosten und Zuschläge	390
14.6 Prämien	394
14.7 Reserven	395
14.8 Überschussbeteiligung	397
14.9 Vertragsänderungen und Garantiewerte	400
14.10 Übungen	401
15 Pflegeversicherung	405
15.1 Rechnungsgrundlagen	406
15.2 Erwartete Barwerte	408
15.3 Kosten	410
15.4 Prämien	410
15.5 Deckungskapital	411
15.6 Sonstiges	412

16 Lebensrückversicherung	413
16.1 Versicherungstechnisches Risiko	414
16.2 Funktionen von Rückversicherung	415
16.3 Formen der Rückversicherung	416
16.4 Rückversicherungsarten	416
16.5 Prämienberechnung	420
17 Rechnungslegung	423
17.1 Gesetzliche Bestimmungen	423
17.2 Jahresabschluss	424
17.3 Mindestzuführung zur RfB	432
17.4 Anzeige- und Berichtspflichten	435
17.5 Solvabilität	438
18 Projektionsmodelle	445
18.1 Struktur	445
18.2 Variablenblöcke	446
18.3 Datensätze	447
18.4 Berechnungen	448
18.5 Konsistenz und Güte	449
18.6 Ergebnisse	450

Teil IV Anhang

A Biometrische Rechnungsgrundlagen	453
A.1 DAV 2008 T	453
A.2 DAV 2004 R (Grundtafel mit Altersverschiebung)	460
A.3 DAV 2004 R (Basistafel mit Trendfunktion)	469
A.4 DAV 1997 I	473
A.5 DAV 1997 TI	474
A.6 DAV 1997 RI	477
B Mathematische Grundformeln	481
B.1 Folgen und Reihen	481
B.2 Potenzreihen und Taylor-Entwicklung	485
B.3 Abschätzung von Integralen	486
C Wörterbuch Deutsch – Englisch	489
Symbolverzeichnis	505
Abkürzungsverzeichnis	521
Literaturverzeichnis	525
Stichwortverzeichnis	529

Teil I

Einführung

Kapitel 1

Einleitung

Bevor wir in die Materie der deutschen Lebensversicherungstechnik eintauchen, widmen wir uns vorab dem Aufbau des vorliegenden Werkes. Anschließend erfolgt eine kurze Auflistung von Büchern, die dem Autor aufgrund seiner eigenen Ausbildung und beruflichen Tätigkeit erwähnenswert erscheinen.

1.1 Aufbau des Buches

Das Buch gliedert sich in vier Teile, die jeweils aus mehreren Kapiteln bestehen. Die Kapitel der Buchteile II und III sind derart aufgebaut, dass sich nach der Darstellung des mathematischen Stoffs – sofern inhaltlich sinnvoll – jeweils ein Abschnitt mathematischer Übungsaufgaben und zugehöriger Lösungen daran anschließt.

Im Rahmen dieses ersten, einführenden Teils folgt im Anschluss an das aktuelle Kapitel zunächst eine von Dr. Zoran Nikolic verfasste überblickartige Einordnung in den übergeordneten Kontext stochastischer Unternehmensmodelle. Danach folgt eine Darstellung der wesentlichen Grundbegriffe und gesetzlichen Grundlagen für die deutsche Lebensversicherung.

Im zweiten Buchteil werden die Themen der klassischen Lebensversicherungsmathematik behandelt und insbesondere die einzelnen Komponenten der versicherungsmathematischen Rechnungsgrundlagen vorgestellt.

Kapitel 4 legt die finanzmathematischen Grundlagen und beschäftigt sich mit dem Zins. Dabei werden Formeln für Barwerte von gängigen Zahlungsströmen hergeleitet. Kapitel 5 ist der biometrischen Komponente gewidmet, wobei dort zunächst nur auf das biometrische Risiko Tod eingegangen wird. Wir werden eine Zufallsvariable einführen, welche die zukünftige Lebensdauer eines Individuums beschreibt, und anschließend sehen, welche Informationen

in Sterbetafeln enthalten sind. In Kapitel 6 werden die Erkenntnisse der beiden vorhergehenden Kapitel kombiniert, so dass wir in der Lage sind, erwartete Barwerte von Standard-Deckungen anzugeben.

Kapitel 7 stellt die letzte, noch ausstehende Komponente der Rechnungsgrundlagen vor, nämlich die Kosten. Im nachfolgenden Kapitel werden wir sehen, wie die Prämie eines Versicherungsvertrags berechnet werden kann. Darauf aufbauend wird die Berechnung von Reserven erläutert. Das letzte Kapitel des zweiten Teils befasst sich mit dem wichtigen Thema der Überschussbeteiligung und geht auf ihre Entstehung sowie Verwendung ein.

Teil III fokussiert über den üblichen Standard hinausgehende Bereiche der Versicherungstechnik.

Zunächst wird gezeigt, wie bei Vertragsänderungen oder anderen Geschäftsvorfällen vorgegangen wird.

In den folgenden vier Kapiteln werden besondere Versicherungen betrachtet. Kapitel 12 zeigt die Besonderheiten von Versicherungen auf verbundene Leben. Kapitel 13 beschreibt, wie fondsgebundene Lebensversicherungen modelliert werden können. Kapitel 14 untersucht die Charakteristika von Berufsunfähigkeitsversicherungen, und das anschließende Kapitel erlaubt einen kurzen Einblick in die Pflegeversicherung.

Nach einer überblickartigen Beschreibung der Lebensrückversicherung werden Aspekte der Bilanzierung, Gewinnzerlegung und Solvabilität erläutert. Abschließend erfolgt ein kurzer Ausblick, wie die zuvor beschriebene Versicherungstechnik in einem Projektionsmodell umgesetzt werden kann.

Im Anhang, dem vierten Teil des Buches, sind zunächst die derzeit gültigen Sterbetafeln bzw. Ausscheideordnungen tabelliert. Darüber hinaus finden sich ergänzende Ausführungen zu elementaren finanzmathematischen Formeln. Außerdem ist ein Wörterbuch Deutsch – Englisch angefügt, in welchem die Übersetzungen der wesentlichen Begrifflichkeiten aufgelistet sind.

1.2 Weitere Literaturempfehlungen

Wie im Vorwort bereits erwähnt, gibt es inzwischen zahlreiche Skripte zu Veranstaltungen an Universitäten und diverse etablierte Bücher zu dem umfassenden Thema der Lebensversicherungsmathematik. Die nachfolgende Aufzählung ist rein subjektiv und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Das wohl bekannteste deutschsprachige Buch ist der Klassiker „Versicherungsmathematik“ von *Wolfsdorf (1997)*, welcher erstmals im Jahr 1986 erschienen ist.

Milbrodt und Helbig (1999) haben die Personenversicherungsmathematik insbesondere mit Hinblick auf die stochastischen Modellierungsmöglichkeiten in einen allgemeinen Rahmen eingebettet.

Aus der jüngeren Vergangenheit sei die zweite Auflage des Werkes von *Führer und Grimmer (2010)* genannt, welches einen gelungenen Einstieg in das Thema der Lebensversicherungsmathematik ermöglicht.

Aufgrund der ausführlichen Darstellung und der zahlreichen Beispiele sowie Übungsaufgaben inklusive Lösungen sei die zweite Auflage von *Ortmann (2015)* besonders hervorgehoben.

Als ein nicht-mathematisches Buch, welches sich umfassend mit der Lebensversicherung auseinandersetzt, ist *Kurzendörfer (2000)* zu erwähnen, wobei diese dritte Auflage an einigen Stellen nicht mehr ganz aktuell sein dürfte.

Aus dem Englischen sind sowohl das Buch von *Gerber (1997)*, von dem im Jahr 2010 ein Re-Print erschienen ist, als auch das Basiswerk von *Bowers et al. (1997)* sehr zu empfehlen.

Kapitel 2

Einordnung

Die meisten europäischen Lebensversicherungsunternehmen implementieren ihre Produkte und die dazugehörigen Versicherungspolicen in einem **Cash Flow Projection Model** (kurz: CFPM). An dieser Stelle soll einführend darauf eingegangen werden, warum die Versicherungsunternehmen den durchaus erheblichen Aufwand betreiben, diese Umsetzung vorzunehmen.

Die Notwendigkeit, Lebensversicherungspolicen zu projizieren, ist vorrangig in der Langfristigkeit dieser Verträge begründet. Im Regelfall besteht die durch einen Lebensversicherungsvertrag entstehende Geschäftsbeziehung mehrere Jahrzehnte (man denke etwa an Rentenversicherungen, die bis zum Lebensende des Kunden bestehen); mitunter gibt es Verträge, die ein Jahrhundert lang laufen, z.B. in der privaten Kranken-Vollversicherung, die in mancher Hinsicht der Lebensversicherung ähnelt.

Betrachtet man die Geldflüsse zum Zeitpunkt des Abschlusses eines Lebensversicherungsvertrags, so stellt man fest, dass eine neue Police für das Unternehmen wirtschaftlich eine Investition darstellt. Denn: Im Geschäftsjahr, in dem die Police zugeht, bewirkt diese üblicherweise einen Verlust, der darin begründet ist, dass bei Vertragsabschluss Provisionen für die erfolgreiche Vertragsvermittlung gezahlt werden, die eingehenden Beiträge der Kunden in ebendiesem Geschäftsjahr jedoch i.d.R. deutlich niedriger als die Höhe der ausgezahlten Provisionen sind.

2.1 Embedded Value

Bei Unternehmen aus Handel oder produzierendem Gewerbe reicht häufig ein Blick in die Bilanz eines einzelnen Jahres, um zu verstehen, wie gesund das Unternehmen ist. Endet ein gewöhnliches Geschäftsjahr mit Verlusten, geht es dem Unternehmen wahrscheinlich schlecht. Die Aktienmärkte reagieren

unmittelbar auf die aktuellen Geschäftsentwicklungen. Selbst wenn die künftigen Erwartungen im jüngsten Aktienkurs bereits eingepreist sind, schauen die Kapitalanleger eher nur einige Monate oder Quartale und nicht mehrere Jahrzehnte in die Zukunft, um den Preis der Aktie zu bestimmen.

Das Lebensversicherungsgeschäft ist jedoch anders.

Stellen wir uns folgende Situation vor: Ein großer Investor unterstützt die Gründung eines Lebensversicherers, der sich mit neuartigen Produkten auf dem Markt etablieren will. Das Versicherungsunternehmen ist demnach finanziell gut ausgestattet, der starke Investor verschafft ihm eine solide Basis. Da die Wettbewerber zur gleichen Zeit auf den Markt drängen, benötigt der Lebensversicherer neben innovativen und attraktiven Produkten auch einen starken Vertrieb. Dieser ist aber rar und daher teuer. Zudem wollen die Verkäufer bzw. Vermittler die Provisionen für ihre Bemühungen unmittelbar bei Vertragsabschluss erhalten. Der Versicherer hat ausreichend viel Geld, so dass er die Provisionen sofort bezahlt. Von den neuen Kunden erhält der Versicherer anfänglich jedoch nur die ersten monatlichen Prämien, von denen wiederum ein erheblicher Anteil für die erwarteten Leistungen der Kunden allokiert wird.

Der Lebensversicherer verkauft nun jedes Quartal Versicherungsverträge, bezahlt hierfür hohe Provisionen und bekommt im Vergleich zu diesen ausgezahlten Provisionen nur wenig Prämien. Wie sieht seine Gewinn- und Verlustrechnung in diesen ersten Quartalen aus? Schlecht, denn es werden dort ausnahmslos Verluste ausgewiesen. Sein Rohüberschuss ist über Quartale hinweg negativ, und das Kapital des Investors wird verzehrt.

Warum also sollte der Geldgeber überhaupt in dieses Versicherungsunternehmen investieren? Die Antwort lautet: Weil er die Versicherungsverträge über mehrere Jahrzehnte hinweg in die Zukunft projiziert und damit ausgerechnet hat, dass mit fortschreitender Vertragsdauer aus den künftigen Beiträgen der Kunden mit einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit ein kontinuierlicher Gewinn entstehen wird. Schließlich sind die vom Kunden zu entrichtenden Prämien im Rahmen der Produktentwicklung entsprechend auskömmlich kalkuliert worden.

Insofern reicht ein alleiniger Blick in die Bilanz der letzten Quartale zur Beurteilung der Profitabilität eines Versicherungsunternehmens nicht aus. Es gibt einen in der Bilanz nicht ersichtlichen, im Portfolio der Versicherungspolicen „eingebetteten Wert“ des Unternehmens. Für diesen hat sich weltweit der englischsprachige Begriff **Embedded Value** (kurz: **EV**) etabliert. Der EV entspricht dem künftigen erwarteten Gewinn aus dem Versicherungsportfolio und wird definiert als die Summe aller künftigen Gewinne des Unternehmens, ausgedrückt im heutigen Geld.

Um diese zukünftigen Gewinne ausrechnen zu können, müssen wir alle Verträge in die Zukunft projizieren und die Dividenden aller zukünftigen Jahre geeignet in das heutige Geld überführen. Für diese Aufgabe benötigen wir die Cash Flow Projection Models.

2.2 Stochastische Bewertung

Zur Erfassung der Langfristigkeit des Lebensversicherungsgeschäfts werden also mehrjährige Projektionen in einem CFPM benötigt. Sowohl die anfängliche Belastung durch Provisionen als auch die voraussichtlichen Gewinne aus dem weiteren Vertragsverlauf werden auf diese Weise berücksichtigt.

Wie können nun die zukünftigen Aufwendungen und Erträge im heutigen Geld ausgedrückt werden? Intuitiv ist klar, dass eine sichere Ausgabe von bspw. 100 Euro heute nicht durch eine Einnahme von 100 Euro in zwei Jahren ausgeglichen wird. Die ersten 100 Euro wechseln heute den Eigentümer, dahingegen sind die 100 Euro in zwei Jahren zunächst einmal nur eine Erwartung bzw. ein Versprechen.

Traditionell wird angenommen, dass 100 Euro heute mehr wert sind als 100 Euro in zwei Jahren. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass diese Annahme für derart kleine Beträge und Privatpersonen wohl auch wahr ist (zumindest solange Bargeld nicht abgeschafft wird). In Zeiten von negativen, risikolosen Zinsen gilt dies für die meisten Investoren jedoch nicht mehr.

Um Zahlungsströme zu verschiedenen Zeitpunkten zu erfassen, greift man auf Methoden der Finanzmathematik zurück. Der einfachste Zugang zu dieser Problematik besteht in einer Barwertbetrachtung: Unterstellt man eine risikofreie Zinsstrukturkurve am Markt (z.B. die jährlichen Renditen deutscher Staatsanleihen), so kann man durch Diskontierung den heutigen Wert einer Auszahlung von 100 Euro in zwei Jahren ermitteln:

	heute	in 1 Jahr	in 2 Jahren
Risikofreie Zinsstrukturkurve	1	1,01	1,02515
Wert von 100 Euro	97,5467005	98,5221675	100

Dies ist soweit elementar und den Aktuaren bereits seit einigen Jahrzehnten bekannt. Was diese einfache Betrachtung jedoch nicht berücksichtigt, sind die Schwankungen auf den Kapitalmärkten und ihr Einfluss auf den Wert des Portfolios.

Dass die Kapitalmarktschwankungen überhaupt etwas mit der Bewertung von Versicherungspolicen zu tun haben, ist in der Natur der Beziehung zwischen dem Lebensversicherer und seinen Kunden begründet – sie ist nämlich asymmetrisch. Der Kunde kann den Vertrag stornieren, der Versicherer nicht. Der Kunde kann in vielen aufgeschobenen Rentenversicherungen entscheiden, ob er am Ende der Aufschubphase das erreichte Kapital ausgezahlt bekommt oder ob er sich eine Leibrente auszahlen lässt; der Versicherer wird dazu nicht gefragt. Außerdem kann der Kunde einer planmäßigen Beitragserhöhung widersprechen, und der Versicherer muss diese Kundenentscheidung akzeptieren.

Es geht also um Asymmetrien, die in der Versicherungsbranche unter der Bezeichnung **Optionen und Garantien** geläufig sind. In dieser Betrachtung ähnelt ein Lebensversicherer daher einem Finanzderivat. Und ähnlich wie bei Derivaten erfolgen künftige Zahlungsströme nicht vorherbestimmt (man sagt auch deterministisch), sondern sie sind abhängig von einer oder mehreren schwankenden Größen wie Zinshöhen oder Aktienkursen, deren Wert wiederum von der Entwicklung der Kapitalmärkte abhängt.

Im Fall eines Lebensversicherers bestehen die wesentlichen künftigen Zahlungsströme aus Prämien, Leistungen, Kosten, Dividenden und Steuern. Dabei lassen sich zwei Sichtweisen unterscheiden:

- **Aktionärssicht:**

Aus der Blickrichtung des Eigentümers steht der Wert des Portfolios im Vordergrund, so dass der Barwert der (zukünftigen) Dividenden berechnet wird. Dieser Barwert wird gewöhnlich als **Present Value of Future Profits** (kurz: **PVFP**) bezeichnet. Er ist ein wesentlicher Bestandteil des oben definierten Embedded Value.

- **Kundensicht:**

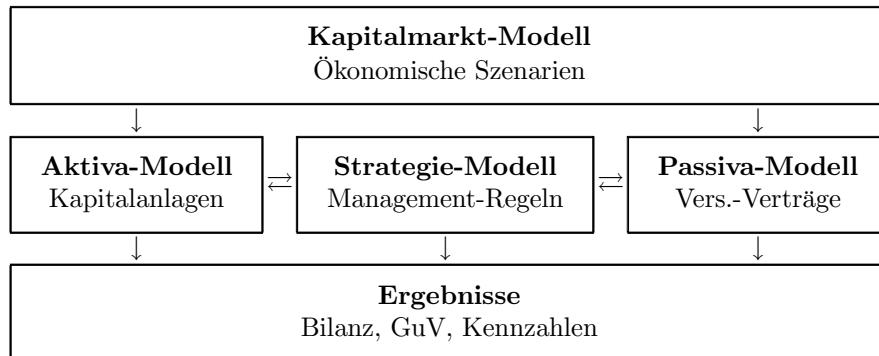
Hierbei steht die Höhe der Verpflichtungen gegenüber den Kunden im Fokus. Folglich wird der Barwert der Auszahlungen (Leistungen und Kosten) abzüglich der Einzahlungen (Prämien) berechnet. Der resultierende Betrag wird **Best Estimate (of) Liabilities** (kurz: **BEL**) genannt.

Es ist unmittelbar klar, dass das Auszahlungsmuster für Dividenden hochkomplex ist und aus den Schwankungen der Kapitalmärkte nicht direkt abgeleitet werden kann – es gibt hierzu nämlich keine explizite analytische Formel. Analog zum Vorgehen in der Finanzmathematik greift man daher auf Monte-Carlo-Simulationen zurück, welche dann zum Einsatz kommen, wenn es keine analytische Formel zur Bewertung eines komplexen Derivats gibt. Daraus entsteht die Anforderung, Tausende Simulationen von Zinsen, Aktien und anderen Kapitalmarktgrößen zu betrachten. Allen Kapitalmarktgrößen liegen stochastische Differentialgleichungen zugrunde, welche die Dynamik in

den Simulationen beschreiben, z.B. eine Hochzinssimulation oder eine Simulation mit schwankenden Aktienkursen. Wird ein CFPM für diese Bewertungen eingesetzt, so nennt man es **stochastisches (Unternehmens-)Modell** (kurz: **SUM**).

2.3 Komponenten eines stochastischen Unternehmensmodells

Wie soeben beschrieben ist die Entwicklung von Kapitalanlagen von maßgeblicher Bedeutung für die künftigen Zahlungsströme. Daher werden im Rahmen eines SUM nicht nur die Passiva, d.h. die Versicherungsverträge, abgebildet, sondern auch die Vermögenswerte des Versicherungsunternehmens:



Innerhalb des **Passiva-Modells** werden Produkte und Verträge des abzubildenden Lebensversicherungsunternehmens implementiert. In diesem Modell findet die Projektion der Beiträge, Leistungen, Kosten und Reserven statt. Zudem wird die Bestandsentwicklung (Vertragskündigungen, Todesfälle, Rententübergänge usw.) unter Zugrundelegung von realistischen Annahmen modelliert. Realistische Annahmen unterscheiden sich von den Rechnungsgrundlagen für die Reservenbildung in den Bilanzen der Unternehmen. Für die Bilanzierung werden nämlich stets vorsichtige Annahmen gewählt, bspw. werden bei Risikolebensversicherungen höhere Sterblichkeiten als durch historische Daten und Trends nachweisbar angenommen. Für die Projektionen werden stattdessen die besten Schätzer für die Sterblichkeiten angesetzt.

Derjenige Teil eines SUM, welcher die Kapitalanlagen abbildet, heißt **Aktiva-Modell**. Hierin werden Zahlungsströme sowie Markt- und Buchwerte der Kapitalanlagen unter Berücksichtigung von Kauf- und Verkaufsentscheidungen sowie der Anlage und Umschichtung in verschiedene Anlageklassen projiziert.

Das **Kapitalmarkt-Modell** ermöglicht erst die Stochastik im Modell. Die Monte-Carlo-Simulationen für die in Abschn. 2.2 beschriebenen, schwankenden Größen wie Zinshöhen oder Aktienkursen werden in diesem Modell erzeugt. Typischerweise werden die Entwicklungen von Nominal- und Realzinsen, die Aktien- und Immobilienperformance (ggf. mehrere Indizes) sowie das Kreditrisiko mithilfe von stochastischen Differentialgleichungen modelliert. Die freien Parameter der Differentialgleichungen werden so bestimmt, dass die entsprechenden Volatilitäten den auf den Märkten beobachteten oder in einem separaten Marktmodell hergeleiteten Volatilitäten entsprechen. Diesen Prozess nennt man **Kalibrierung** des Kapitalmarkt-Modells. Sehr häufig werden in der Praxis die implizierten Volatilitäten der Swaptions zur Kalibrierung der Nominalzinsen herangezogen. Die Ergebnisse des Kapitalmarkt-Modells bestehen aus Tausenden von Simulationen, die jeweils eine mögliche Entwicklung der modellierten Größen (Zinsen, Aktien usw.) in der Zukunft darstellen.

Das SUM strebt für jede betrachtete Simulation eine möglichst realistische Abbildung des Unternehmenszustandes in der Zukunft an. Während die Bilanzierungsregeln sowie die Ermittlung von Marktwerten der Aktiva weitgehend eindeutig beschreibbar und modellierbar sind, existieren weitere relevante Sachverhalte in der echten Welt wie bspw. die Festlegung der künftigen Überschüsse, welche die Unternehmensführung relativ frei treffen kann. Durch die Mindestzuführungsverordnung (kurz: MindZV) wird nämlich festgelegt, welcher Anteil der erwirtschafteten Überschüsse den Versicherungsnehmern mindestens weitergereicht werden muss. In der Regel entscheidet das Unternehmensmanagement, den Kunden eine höhere Überschussbeteiligung alsaufsichtsrechtlich durch die MindZV gefordert zu gewähren. Dies geschieht aus Wettbewerbsgründen, denn die Höhe der Überschusszuteilung ist offensichtlich ein wichtiges Verkaufsargument beim Vertrieb von neuen Policen. Wie hoch soll aber diese Überschusszuteilung in einer bestimmten Monte-Carlo-Simulation und in einem bestimmten Jahr sein? In der Realität legt der zuständige Vorstand nach umfangreichen Auswertungen und Testsimulationen im Aktuariat und im Controlling die Höhe der Überschusssätze fest. Dies ist also eine Managemententscheidung, sie spiegelt die Strategie des Unternehmens wider. Ihre Umsetzung in Form eines Algorithmus im SUM erfolgt im **Strategie-Modell**. Wie man sich denken kann, ist diese Umsetzung äußerst diffizil, da sie sich im Grenzgebiet zwischen Mathematik, Ökonomie und Psychologie befindet. Es ist zu hoffen, dass künftig spieltheoretische Ansätze zu einer Verfeinerung der derzeit noch sehr einfachen Ansätze im Strategie-Modell führen werden.

Das Strategie-Modell umfasst also Vorstandsentscheidungen, die der Einhaltung gesetzlicher und/oder unternehmerischer Ziele dienen. Steuerungsgrößen sind bspw. die Einhaltung der MindZV, die Erfüllung der Solvabilitätsanforderungen, die Erreichung von gewissen Zielquoten (z.B. Eigenkapital)

oder auch die Erwirtschaftung einer bestimmten Rendite für die Anteileigner. Zu den Maßnahmen, die zwecks Zielerreichung ergriffen werden können, zählen etwa eine Erhöhung oder Senkung der Kunden-Überschussbeteiligung wie oben beschrieben, eine Reduktion der auszuschüttenden Aktionärsdividende oder auch eine Änderung in der Zusammensetzung der Kapitalanlagen. Letzteres wird auch als **strategische Kapitalanlage-Allokation** (kurz: **SAA** vom Englischen „Strategic Asset Allocation“) bezeichnet. Man sieht also, dass das Strategie-Modell wie auch die Management-Entscheidungen in der Realität weitreichende Auswirkungen sowohl auf die Aktiva als auch auf die Passiva haben.

Häufig wird unter dem Strategie-Modell ebenfalls das (vermeintlich) rationale Versicherungsnehmer-Verhalten subsummiert bzw. darüber abgebildet. Dabei reagieren die Kunden auf die Entwicklung ihrer Versicherungsverträge, indem sie ihre Verträge verstärkt kündigen oder sich häufiger für die Einmal-Kapitalauszahlung statt lebenslanger Rentenzahlung entscheiden.

Als Ergebnisse liefert ein SUM sowohl Projektionen der (ökonomischen) Bilanz und der Gewinn- und Verlustrechnung, welche i.d.R. zwischen 40 und 80 Jahre in die Zukunft reichen, als auch Kennzahlen wie z.B. den aus zukünftigen Jahresüberschüssen bzw. Dividenden errechneten PVFP oder die BEL.

2.4 Solvency II

Solvency II ist eine Sammlung von europaweiten Regelungen, welche den Versicherungsunternehmen u.a. feste Vorgaben zur Berechnung der Solvabilität macht. Unter **Solvabilität** versteht man das Verhältnis zwischen den verfügbaren Eigenmitteln und demjenigen Verlust, der (modellmäßig) nur einmal in 200 Jahren auftreten kann. Sind die Eigenmittel höher als der Verlust in einem derart verheerenden Ereignis, kann das Unternehmen eine solch ungünstige Situation aus eigener Kraft überstehen – es ist also solvent.

In Abschn. 2.2 haben wir die Kundensicht beschrieben, welche zur Definition der BEL führte. Die BEL beschreibt den besten Schätzer (Englisch „best estimate“) für die in den bestehenden Policien enthaltenen Zusagen bzw. Verpflichtungen (Englisch „liabilities“) den Versicherungsnehmern gegenüber. Solvency II fordert speziell von den Lebensversicherern, die BEL als Barwert der Auszahlungen abzüglich des Barwertes der Einnahmen zu berechnen.

Vor Einführung von Solvency II war die gesetzliche Anforderung an die Lebensversicherer in ihrem Kern nicht anders – sie mussten eine Reserve für die eingegangenen Verpflichtungen stellen, die wie heute dem Barwert der Auszahlungen abzüglich des Barwertes der Einnahmen entsprach.

Der Unterschied besteht jedoch in der Art, wie die Barwerte gebildet werden: In der Vor-Solvency-II-Welt wurde zur Barwertbildung ein fester Diskontsatz festgelegt, und die Lebensversicherer mussten zudem keine Reserve für künftige Überschüsse stellen.

Seit der Einführung von Solvency II soll die Reserve marktnah ermittelt werden. Daraus folgt, dass die Entwicklung der Kapitalanlagen, die künftigen Überschusszuteilungen an Kunden und die möglichen Handlungen der Versicherungsnehmer (bspw. Stornierung, Beitragsfreistellung, Kapitalabfindung statt Rentenauszahlung) realistisch geschätzt werden. Wie oben bereits dargelegt, erfolgt diese Schätzung mithilfe von vielen Monte-Carlo-Simulationen, um im Mittel den besten Schätzer für die Verpflichtungen zu gewinnen.

Die meisten Risiken aus der Solvency II-Risikolandkarte eines Lebensversicherungsunternehmens werden mithilfe von stochastischen Unternehmensmodellen bewertet: sowohl die Marktrisiken, d.h. Aktienentwicklung, Immobilienentwicklung, Zinsbewegung, Zinsvolatilität, Währungsschwankungen, Ausfall von Anleihen, als auch die versicherungstechnischen Risiken Biometrie (Sterblichkeit einschließlich Katastrophen, Langlebigkeit, Invalidität), Kosten und Storno.

Kapitel 3

Grundlagen der Lebensversicherung

Was ist Versicherung bzw. eine Versicherung? Auf diese Frage gibt es zahlreiche definitorische Antworten, und diese führen unweigerlich in den Bereich der Versicherungswissenschaft oder auch der Versicherungsbetriebslehre. Jedoch wollen wir hier nicht allzu weit ausholen.

In diesem Kapitel sollen die Leser/-innen mit grundlegenden Begriffen vertraut gemacht und wesentliche Details von Versicherungen vorgestellt werden, um ein Grundverständnis sowie eine einheitliche sprachliche Basis für die weitere Lektüre zu legen.

3.1 Risikotransfer

Charakteristisch für eine Versicherung ist, dass es sich hierbei um ein abstraktes Produkt handelt – ein Produkt, das vielen Menschen komplex und unverständlich erscheint und mit dem man sich oftmals auch nur ungern auseinandersetzt. Versicherungen schützen eine (natürliche oder auch juristische) Person und/oder ihre Angehörigen vor den finanziellen Nachteilen, die aus einem unerwartet auftretenden Ereignis resultieren (können).

Wissenschaftlicher ausgedrückt stellt Versicherung einen **Risikotransfer** dar. Persönliche Entscheidungen oder Handlungen sowie Einflüsse unserer Umgebung und Umwelt resultieren i.d.R. nicht in eindeutigen, vorhersehbaren Ergebnissen, sondern führen zu einer Menge möglicher Konsequenzen. Diese sind zwar ihrer Art nach bekannt, aber welche der Folgen letztendlich eintritt, ist hingegen unbekannt. Zudem sind die jeweiligen Auswirkungen in vielen Fällen nur schwer messbar. Stellt man sich auf den Standpunkt, dass die potenziellen Resultate quantifizierbar sind und ihnen Wahrscheinlichkeiten ihres Eintretens zugeordnet werden können, erhält man auf diese Weise eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der ungewissen Ergebnisse. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnen wir als **Risiko**.

Für den Aspekt der Versicherung sind allerdings nur solche Ergebnisse relevant, welche eine für die Person ungünstige Auswirkung, einen sog. **Schaden**, darstellen. Derjenige Ausschnitt des Risikos, welcher nur die Ergebnisse mit ungünstigen Auswirkungen betrachtet, wird **Schadenverteilung** genannt.

Man unterscheidet zwischen Sach- und Personenversicherungen, wobei wir uns im Folgenden auf den Bereich der Personenversicherung, genauer gesagt nur Lebensversicherung, beschränken. Einer der wesentlichen Unterschiede zur Sachversicherung ist, dass der Wert des entstandenen Schadens nicht objektiv ermittelt werden kann, sondern im Vorhinein beziffert bzw. von der Person angegeben wird, indem diese eine garantierte Leistung festlegt, die ihr bei oder nach Eintritt des relevanten Ereignisses ausgezahlt wird.

Die wichtigsten, durch Lebensversicherungen gedeckten Risiken sind Tod und Invalidität sowie das Langlebigkeitsrisiko. Daneben gibt es noch Versicherungsschutz für Risiken wie Pflegebedürftigkeit oder den Eintritt schwerer Krankheiten (Dread Disease). Ein paar Beispiele aus dem täglichen Leben sind:

- Zur Absicherung seiner Familie schließt ein alleinverdienender Familienvater eine Risikolebensversicherung ab, welche im Fall seines Todes die vereinbarte Versicherungssumme an die Hinterbliebenen auszahlt, damit diese zumindest die finanziellen Folgen des Verlusts des Ernährers ausgleichen bzw. mildern können.
- Geschäfts- oder Lebenspartner können zum Zwecke der gegenseitigen Absicherung eine Risikolebensversicherung auf den Tod der ersten Person abschließen. Verstirbt dann die erste von mehreren Personen aus einem festgelegten Personenkreis, so wird die Versicherungssumme an die übrigen, hinterbliebenen Personen ausgezahlt.
- Bei Aufnahme eines Darlehens ist ggf. der zusätzliche Abschluss einer Versicherung notwendig, durch welche im Todesfall des Kreditnehmers der Kredit abgelöst werden kann (Risikolebensversicherung, Restschuldversicherung). Auf diese Weise reduziert die Bank ihr Risiko eines Kreditausfalls, d.h. das Risiko, dass der Kredit nicht (vollständig) zurückgezahlt wird.
- Arbeitnehmer, die für den Fall vorsorgen möchten, dass sie aufgrund körperlicher oder psychischer Umstände nicht mehr in der Lage sind, ein Arbeitseinkommen zu erzielen, können eine Berufs- oder Erwerbsunfähigkeitsversicherung abschließen. Der Versicherer zahlt dann die vereinbarte Leistung solange die Berufs- bzw. Erwerbsunfähigkeit besteht.
- Damit auch im beruflichen Ruhestand genügend Einkommen vorhanden ist, sorgen Arbeitnehmer durch Abschluss einer (aufgeschobenen) Rentenversicherung vor. Sofern der Arbeitnehmer einen im Vorhinein festgelegten Zeitpunkt erlebt, erhält er fortan für den Rest seines Lebens eine Rente.

In allen genannten Beispielen findet der oben beschriebene Risikotransfer statt, indem der Kunde sein Risiko zu sterben, zu erkranken oder auch lange zu leben auf den Versicherer überträgt. Natürlich erfolgt dieser Risikotransfer nicht kostenlos, sondern der Versicherer erhält für die Übernahme des Risikos eine Gegenleistung vom Kunden in Form der Versicherungsprämie.

Es stellt sich die Frage, warum das Risiko beim Versicherungsunternehmen besser aufgehoben ist als bei der einzelnen Person selbst. Auf den ersten Blick hat eine Versicherungsgesellschaft natürlich eine größere Finanzstärke, um einzelne Schäden zu verkraften. Der wahre Grund, welcher den Versicherer erst in die Lage versetzt, die Schäden zu begleichen, ist jedoch ein mathematischer, der sog. **Risikoausgleich im Kollektiv**. Die Tatsache, dass der Versicherer viele gleichartige Risiken übernimmt, führt nämlich zu Ausgleichseffekten in seinem Bestand an Versicherungen. Dies bedeutet, dass sich die zufällige Schwankung in der Höhe der zu zahlenden Schadenleistungen bei zunehmender Anzahl gleichartiger Verträge reduziert und somit stabiler, für den Lebensversicherer besser kalkulierbar wird.

3.2 Grundbegriffe

Derjenige, der eine Versicherung mit einem **Versicherungsunternehmen** (kurz: **VU**) abschließt, wird als **Versicherungsnehmer** (kurz: **VN**) bezeichnet. Diejenige Person, auf deren Leben oder Gesundheitszustand die Versicherung abgeschlossen wird, heißt **versicherte Person** (kurz: **VP**) und muss (ausgenommen bei Verträgen der betrieblichen Altersvorsorge) ihr Einverständnis dazu erklären. Die Person, welche die Leistungen aus dem Versicherungsvertrag erhält, wird **Begünstigter** genannt. Und diejenige Person, welche die Beiträge zahlt, heißt **Beitragszahler**. Versicherungsnehmer, versicherte Person, Beitragszahler und Begünstiger können identisch sein, sind es aber vielfach nicht. Möglich ist auch, dass es nicht nur eine, sondern mehrere (oftmals zwei) versicherte Personen gibt. In diesem Fall heißt die Versicherung **auf verbundene Leben**, da diese Personen eine Einheit bilden und dadurch miteinander „verbunden“ sind.

Der **Versicherungsvertrag** kommt auf Antrag des VN zustande. Nach einer eventuellen Risikoprüfung und Annahme des Antrags durch das VU erhält der VN einen **Versicherungsschein (Police)**, wodurch das eingegangene Vertragsverhältnis beurkundet wird. Im Folgenden wird anstelle von Versicherungsvertrag oft auch nur von Versicherung gesprochen.

Bei Abschluss der Versicherung hat die VP ein bestimmtes Alter, das sog. **Eintrittsalter**.

Versicherungsverträge werden für eine festgelegte **Versicherungsdauer** abgeschlossen. Während dieser Dauer besteht der **Versicherungsschutz**, d.h., wenn innerhalb dieser Zeitspanne das **versicherte Ereignis** eintritt, wird dadurch der **Leistungsfall** ausgelöst, und der VN hat Anspruch auf die vereinbarte, garantierte Leistung.

Die seitens des VU zugesagte **versicherte Leistung** kann entweder aus einer einmaligen Zahlung bestehen, der sogenannten **Versicherungssumme**, oder aber aus einer Serie regelmäßig wiederkehrender Zahlungen, welche als **Rente** bezeichnet wird. Während die Versicherungssumme nach einmaliger Überprüfung der Voraussetzungen zeitnah fällig wird, ist die Auszahlung einer Rentenleistung üblicherweise an das dauerhafte und wiederholt zu überprüfende Vorliegen der Voraussetzungen geknüpft (z.B. die VP lebt oder ist berufsunfähig). Die Zeitspanne, innerhalb welcher die Renten gezahlt werden, wird **Leistungsdauer** der Rentenzahlung oder auch **Rentenbezugsdauer** genannt. Die Versicherung befindet sich dann in der **fälligen Zeit** bzw. im **Rentenbezug** und wird als **leistungspflichtig** bezeichnet. Solange keine Leistung fällig ist, befindet sich die Versicherung in der **Anwartschaft**, und ihr Status wird als **anwartschaftlich** bezeichnet.

Für den vom VU gewährten Schutz zahlt der VN ein Entgelt, welches als **Prämie**, synonym auch **Beitrag**, bezeichnet wird. Der Zeitraum, während dessen der VN Prämien zahlt, wird **Prämienzahlungsdauer** genannt. Hinsichtlich der Beitragszahlung unterscheidet man zwischen der Zahlung einer **Einmalprämie** zu Beginn der Versicherung oder der Zahlung einer **laufenden Prämie**. Werden laufende Prämien gezahlt, kann die Dauer der Prämienzahlung entweder mit der Versicherungsdauer übereinstimmen oder sie kann gegenüber dieser abgekürzt sein. Letzteres heißt dann **abgekürzte Prämienzahlungsdauer**.

Befindet sich eine Versicherung innerhalb der Prämienzahlungsdauer, so ist der Vertrag **beitragspflichtig**, andernfalls nennt man ihn **beitragsfrei**. Wünscht der VN vor dem Ablauf der vereinbarten Prämienzahlungsdauer die Einstellung der Beitragszahlung (bei gleichzeitiger Anpassung der Versicherungsleistungen), wird dieser Vorgang als **Beitragsfreistellung** bezeichnet, und der Vertrag ist ab diesem Zeitpunkt **unplanmäßig (bzw. vorzeitig) beitragsfrei**. Läuft die (abgekürzte) Prämienzahlungsdauer regulär ab, so ist die Versicherung anschließend **planmäßig (bzw. tariflich) beitragsfrei**.

Im Kontext regelmäßig wiederkehrender Zahlungen taucht häufig der Begriff **Zahlungsabschnitt** oder auch **Zahlungsperiode** auf. Hierbei handelt es sich um den Zeitraum, für den die entsprechende Zahlung getätigt wird. Üblich ist ein Zahlungsabschnitt von einem Jahr, es können aber auch kürzere Zeiträume von einem halben oder Vierteljahr bzw. von einem Monat

festgelegt werden. Die Länge des Zahlungsabschnitts impliziert den Begriff der **Zahl(ungs)weise**, bei welchem man zwischen **jährlicher Zahlweise** und **unterjähriger Zahlweise** differenziert. Im Unterschied zur jährlichen Zahlweise erfolgt die Zahlung – bspw. von Prämien oder (Renten-)Leistungen – bei unterjähriger Zahlweise gleichmäßig aufgeteilt auf mehrere Zeitpunkte während eines Jahres, i.d.R. halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich.

Sowohl hinsichtlich der Prämien- als auch Rentenzahlung wird unterschieden, ob die Zahlungen zu Beginn oder zum Ende des Zahlungsabschnitts erfolgen. Finden die Zahlungen jeweils am Anfang statt, so werden sie **vorschüssig** geleistet. Zahlungen im Nachhinein, d.h. jeweils am Ende des Zahlungsabschnitts, nennt man **nachschüssig**. Prämien werden (zumindest kalkulatorisch) ausnahmslos vorschüssig gezahlt. Rentenzahlungen können vor- oder nachschüssig erfolgen, wobei (in der Kalkulation) fast immer von vorschüssiger Zahlweise ausgegangen wird.

3.3 Historische Entwicklung und aktuelle Bedeutung

Ein kurzer Blick in die Historie zeigt, dass sich bereits im antiken Rom Vorläufer der heutigen Lebensversicherung wiederfinden. Dort gab es sogenannte **Beerdigungsvereine** (heute würde man Sterbekasse dazu sagen), welche bei Tod eines ihrer Mitglieder die Kosten für dessen Bestattung übernahmen (vgl. *Ortmann (2015)*) und somit einen gewissen Absicherungs- oder Solidaritätsgedanken trugen.

Lebensversicherungen haben durchaus Charakterzüge einer Wette. Die eine Partei wettet, dass sie selbst (oder eine weitere, dritte Person) einen bestimmten Zeitpunkt erlebt, und die andere Partei hält dagegen. Erlebt die besagte Person den vereinbarten Zeitpunkt, so muss die zweite Partei der ersten Partei einen vorab festgelegten Betrag zahlen. Der Wetteinsatz wird Prämie genannt. Das soeben beschriebene Prozedere trat in ähnlicher Form im 18. Jahrhundert in England in Gestalt der **Wett-Versicherung** auf.

Doch lassen sich nicht nur Vorläufer von Risikolebensversicherungen ausmachen. Im 17. Jahrhundert trat mit der **Tontine** ein früher Vorläufer der Rentenversicherung in Erscheinung. Hierbei zahlten die „Teilnehmer“ Geld an einen „Veranstalter“. Im Gegenzug verpflichtete sich dieser, die eingezahlte Summe zu bestimmten Zeiten an die dann jeweils noch lebenden Teilnehmer wieder auszuzahlen. Tontinen sind dem Wesen nach jedoch keine Versicherungen, weil nicht der Veranstalter (= VU), sondern die Teilnehmer (= VN) selbst das Sterblichkeitsrisiko tragen, jedoch lässt sich der Aspekt des Risikoausgleichs im Kollektiv bereits erkennen.

Man sieht, dass in der „Frühzeit“ der Lebensversicherung durchaus Verträge abgeschlossen wurden, welche Leistungen bei Tod oder Erleben von bestimmten Personen vorsahen. Die Kalkulation der Prämie geschah jedoch noch nicht auf systematischer Basis. Im Jahre 1762 wurde in London die erste Lebensversicherungsgesellschaft gegründet, welche erstmals nach versicherungsmathematischen Prinzipien kalkulierte Prämien erhob.

Der erste Lebensversicherer in Deutschland war die von dem Kaufmann Ernst-Wilhelm Arnoldi im Jahre 1827 gegründete Gothaer Lebensversicherungsbank. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde in Deutschland dann die Sozialversicherung etabliert. Diese gesellschaftlich bedeutsame Errungenschaft begründete mit dem sechsten Buch des Sozialgesetzbuchs auch die Einführung einer **Gesetzlichen Rentenversicherung** (kurz: **GRV**), welche der Sicherung eines Alterseinkommens dient. Die GRV basiert auf dem **Generationenvertrag**, welcher besagt, dass die jeweils aktive, arbeitende Generation die Altersrenten der im Ruhestand befindlichen Generation bezahlt. Grundsätzlich wird die GRV durch das **Umlageverfahren** finanziert, indem die eingehenden Beiträge der arbeitenden Bevölkerung unmittelbar an die Ruheständler ausgezahlt werden. Bei Einführung und auch lange Zeit danach funktionierte dieses System zunächst gut. Seit Bestehen der GRV ist jedoch das Verhältnis der Anzahl der Personen, die Beiträge in das System einzahlen („Rentenzahler“), zur Anzahl derjenigen Personen, die Leistungen aus dem System beziehen („Rentenempfänger“), gekippt.

Die Bevölkerungsstruktur verschiebt sich immer weiter von einer Pyramide zu einer pilzförmigen Altersstruktur. Die unter dem Begriff des **demografischen Wandels** sich verändernde Zusammensetzung der Bevölkerung basiert auf mehreren Faktoren. So führen bspw. längere Ausbildungszeiten und sinkende Geburtenraten zu einer sinkenden Anzahl an Rentenzahlern. Verbesserungen der Nahrung sowie der hygienischen und medizinischen Verhältnisse führen gleichzeitig zu einer ansteigenden Zahl älterer, immer länger lebender Rentenbezieher. Dies hat zur Folge, dass entweder die Beiträge zur GRV immer weiter steigen oder die gesetzlichen Renten sinken. Eine hohe Arbeitslosigkeit verschärft den Effekt fehlender Rentenzahler zusätzlich.

Das Umlageverfahren erscheint heute nicht mehr adäquat bzw. nicht mehr in der Lage, die soziale Absicherung der GRV zu gewährleisten. Deshalb wird die GRV neben steuerlichen Zuschüssen (Bundeszuschuss) seit Beginn der 2000er-Jahre durch ergänzende Maßnahmen flankiert. Neben Leistungskürzungen wurden auch zusätzliche Versorgungssysteme, die nach dem **Kapitaldeckungsverfahren** arbeiten, eingeführt. Die Politik stellt hierbei auf die eigene Vorsorge ab, indem jeder entsprechend seiner finanziellen Möglichkeiten zusätzliche Versicherungen abschließt, welche die im Alter entstehende **Versorgungslücke** schließen oder zumindest verringern sollen.

Lange Zeit war vom **Drei-Säulen-Modell** der Altersversorgung die Rede, nach welchem bildlich gesprochen das „Haus der Altersversorgung“ auf den drei Säulen GRV, betriebliche Altersversorgung und privates Vermögen gebaut ist. Diese Klassifizierung nach dem Versorgungsträger wurde im Jahr 2005 sprachlich und inhaltlich durch das **Drei-Schichten-Modell** abgelöst, welches eine Klassifizierung nach der steuerlichen Behandlung darstellt. Außerdem empfand man es als bildlich unpassend, wenn eine der Säulen fehlte und das „Haus“ deshalb in eine Schieflage geriet oder gar drohte einzustürzen. Zurzeit unterscheidet man drei **Versorgungsschichten** (wobei hier nicht auf die steuerlichen Aspekte eingegangen wird):

- Schicht 1: Basisversorgung, d.h. Gesetzliche Rentenversicherung und der GRV ähnliche Versicherungen (Rürup-Rente)
- Schicht 2: Betriebliche Altersversorgung (kurz: bAV), Riester-Rente
- Schicht 3: Private Altersversorgung (kurz: pAV).

Da die Begrifflichkeiten insbesondere im Kontext der Gesetzgebung auftreten, sei abschließend erwähnt, dass für die bAV fünf **Durchführungswege** existieren, d.h. fünf Formen oder Vehikel, wie eine bAV gewährt bzw. aufgebaut werden kann:

- Direktversicherung
- Pensionskasse
- Pensionsfonds
- Direktusage (Pensionsusage)
- Unterstützungskasse.

Für ausführliche Details zu diesem Themenkomplex sei bspw. auf *Buttler (2012)* verwiesen.

Aufgrund der vorangehend beschriebenen Probleme der sozialen Sicherungssysteme ist die politische Bedeutung der Lebensversicherung in den letzten Jahren kontinuierlich gewachsen. Ein Blick in *GDV (2016)* spiegelt auch die (finanz)wirtschaftliche Bedeutung der Lebensversicherung wider. Knapp die Hälfte aller Beitragseinnahmen der Versicherungsbranche entfielen im Jahr 2015 auf die Sparte Lebensversicherung. Die gebuchten Bruttobeiträge hatten ein Volumen von 92.662 Mio. EUR, und es wurden Leistungen in Höhe von 115.522 Mio. EUR (ohne Pensionskassen und Pensionsfonds) ausgezahlt. Insgesamt waren in 2015 ca. 91 Mio. Lebensversicherungsverträge aktiv, d.h., im Durchschnitt hatte jeder Bundesbürger mindestens einen Lebensversicherungsvertrag.

3.4 Relevante Gesetze

Versicherungen, sowohl im Sinne eines Unternehmens als auch im Sinne des Vertrags, unterliegen zahlreichen gesetzlichen Vorgaben und Anforderungen. Wesentliche Gesetze seien hier – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – kurz erwähnt. Ausgewählte Paragraphen werden dann in den nachfolgenden Kapiteln an den jeweiligen Stellen aufgeführt und auf ihre Bedeutung eingegangen.

Da Versicherungsunternehmen zum Handelsgewerbe zählen, unterliegen sie dem **Handelsgesetzbuch** (kurz: **HGB**), welches exakt zu Beginn des 20. Jahrhunderts eingeführt wurde. Speziell im dritten Buch des HGB, Abschn. 4, finden sich ergänzende Vorschriften für Versicherungsunternehmen und Pensionsfonds.

Das ebenfalls aus dem Beginn des 20. Jahrhunderts stammende „Gesetz über die Beaufsichtigung der Versicherungsunternehmen“ – oder auch **Ver sicherungsaufsichtsgesetz** (kurz: **VAG**) – regelt die staatliche Aufsicht über sämtliche Unternehmen, welche Versicherungsgeschäfte (sowie Pensionsfondsgeschäfte) betreiben. Die Bestimmungen dieses Gesetzes sind u.a. Voraussetzung für die Aufnahme und Fortführung des Versicherungsbetriebs. Das „Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen“, welches Anfang des Jahres 2016 in Kraft trat, beinhaltete die jüngste Novelle des VAG.

Grundlegend ist § 67 VAG, der die **Spartentrennung** fordert. Danach dürfen Versicherungsunternehmen nicht gleichzeitig Lebens-, Kranken- und Sachversicherung betreiben, sondern nur eine der genannten Sparten.

§ 141 VAG spezifiziert die Rolle des **Verantwortlichen Aktuars** in der Lebensversicherung. Jedes VU muss einen Verantwortlichen Aktuar bestellen. Dessen wichtigste Aufgaben bestehen darin sicherzustellen, dass die Berechnung der Prämien und der Deckungsrückstellungen in Einklang mit den relevanten gesetzlichen Bestimmungen erfolgt, und dass „die dauernde Erfüllbarkeit der sich aus den Versicherungsverträgen ergebenden Verpflichtungen jederzeit gewährleistet ist“. Außerdem zeichnet er verantwortlich dafür, dass das VU über ausreichende Solvabilitätsmittel verfügt.

§ 143 VAG regelt die sogenannten **Anzeigepflichten**. Danach müssen die VU der **Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht** (kurz: **BaFin**), Bereich Versicherungs- und Pensionsfondsaufsicht, für sämtliche von ihnen verkauften Produkte „die Grundsätze für die Berechnung der Prämien und Deckungsrückstellungen einschließlich der verwendeten Rechnungsgrundlagen, mathematischen Formeln, kalkulatorischen Herleitungen und statistischen Nachweise unter deren Beifügung“ vorlegen. Diese Dokumente sind als „Mitteilung nach § 143 VAG“ geläufig, vormals auch nur kurz **13d-Mitteilung** genannt, da die Anzeigepflichten bis zum 31.12.2015 in § 13d Abs. 6 VAG a.F. geregelt wurden.

Das „Gesetz über den Versicherungsvertrag“ bzw. **Versicherungsvertragsgesetz** (kurz: **VVG**) regelt sämtliche Rechte und Pflichten, die sich aus dem Versicherungsvertrag sowohl für den VN als auch für das VU ergeben. Insbesondere besteht für das VU gemäß § 7 VVG die Verpflichtung, dem VN vor Vertragsabschluss sämtliche Vertragsbestimmungen inkl. der **Allgemeinen Versicherungsbedingungen** (kurz: **AVB**) vorzulegen. Das Gesetz wurde 100 Jahre nach seiner Einführung grundlegend überarbeitet; die Regelungen dieser **VVG-Reform** traten mit Beginn des Jahres 2008 in Kraft. Die Änderungen betrafen insbesondere die Informationspflichten des VU gegenüber dem VN, die Höhe und Berechnung des im Kündigungsfall vom VU zu zahllenden Rückkaufswertes sowie die Beteiligung der VN an den Überschüssen, genauer gesagt den stillen Reserven (Bewertungsreserven).

Um den in Abschn. 3.3 beschriebenen Problemen der GRV entgegenzuwirken, wurden in den 2000er-Jahren zwei weitere bedeutende Gesetze verabschiedet. Bereits in den Jahren 2001 und 2002 traten das „Gesetz über die Zertifizierung von Altersvorsorge- und Basisrentenverträgen“ (**Altersvorsorgeverträge-Zertifizierungsgesetz**, kurz: **AltZertG**) sowie das „Gesetz zur Reform der gesetzlichen Rentenversicherung und zur Förderung eines kapitalgedeckten Altersvorsorgevermögens“ (**Altersvermögensgesetz**, kurz: **AVmG**) in Kraft, mit welchem die staatlich geförderte und als **Riester-Rente** bezeichnete private Altersrentenversicherung eingeführt wurde. Mit Beginn des Jahres 2005 erlangte das „Gesetz zur Neuordnung der einkommensteuerrechtlichen Behandlung von Altersvorsorgeaufwendungen und Altersbezügen“ (**Alterseinkünftegesetz**, kurz: **AltEinkG**) Gültigkeit. Durch dieses Änderungsgesetz wurden diverse bestehende Gesetze, bspw. § 3 Nr. 63 und § 10a des **Einkommensteuergesetzes** (kurz: **EStG**), hinsichtlich der steuerlichen Förderfähigkeit angepasst. Insbesondere wurden die als **Rürup-Rente** bekannte Rentenversicherung der Basisversorgung sowie das Prinzip der nachgelagerten Besteuerung eingeführt.

Im Kontext der bAV ist das „Gesetz zur Verbesserung der betrieblichen Altersversorgung“ (**Betriebsrentengesetz**, kurz: **BetrAVG**) zu erwähnen, welches u.a. Regelungen zur Insolvenzsicherung betrieblicher Versorgungsansprüche durch den **Pensions-Sicherungs-Verein VVaG** enthält.

Neben den aufgeführten Gesetzen gibt es Verordnungen, welche maßgebliche Vorschriften für bestimmte Teilbereiche enthalten:

- „Verordnung über Rechnungsgrundlagen für die Deckungsrückstellungen“ (**Deckungsrückstellungsverordnung**, kurz: **DeckRV**)
- „Verordnung über die Mindestbeitragsrückerstattung in der Lebensversicherung“ (**Mindestzuführungsverordnung**, kurz: **MindZV**)
- „Verordnung über die Rechnungslegung von Versicherungsunternehmen“ (**Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung**, kurz: **RechVersV**)

- „Verordnung über die Berichterstattung von Versicherungsunternehmen gegenüber der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht“ (**Versicherungsberichterstattungs-Verordnung**, kurz: **BerVersV**)
- „Verordnung über die Kapitalausstattung von Versicherungsunternehmen“ (**Kapitalausstattungs-Verordnung**, kurz: **KapAusstV**).

Schließlich sei noch das „Gesetz zur Absicherung stabiler und fairer Leistungen für Lebensversicherte“ erwähnt, welches als **Lebensversicherungsreformgesetz** (kurz: **LVRG**) bekannt ist und im Jahr 2014 in Kraft trat. Ziel dieses Gesetzes war es, den Verbraucherschutz und gleichzeitig die Risikotragfähigkeit der Lebensversicherungsunternehmen zu erhöhen bzw. zu stärken. Das LVRG enthielt im Wesentlichen Regelungen, welche zu Anpassungen in anderen Gesetzen wie VAG, VVG, DeckRV, MindZV usw. führten.

3.5 Rechnungsgrundlagen

Wie die Beispiele aus Abschn. 3.1 andeuten, führt der Abschluss einer Lebensversicherung oft zu einer lang angelegten Kundenbeziehung zwischen VN und VU. Im Falle einer (aufgeschobenen) Rentenversicherung kann dies nicht selten eine Dauer von 50 Jahren oder mehr bedeuten. Der VN vertraut darauf, dass das VU seinem Leistungsversprechen nachkommt bzw. nachkommen kann. Umgekehrt sagt das VU zu, bspw. in 30 Jahren eine Rente an den VN zu zahlen, solange die VP lebt. Da der Versicherer jedoch nicht weiß, wie sich die Finanzmärkte und die Lebenserwartung in der Zukunft entwickeln, muss er bereits heute sehr vorausschauend agieren.

Die nach § 141 VAG bestehende Auflage, Reserven in ausreichender Höhe zu stellen, impliziert insbesondere, vorsichtige Annahmen über diejenigen Größen zu treffen, welche einen Einfluss auf die Entwicklung des Vertrags haben, nämlich:

- Zins
- Biometrie
- Kosten.

Diese drei Einflussfaktoren werden unter dem Begriff **Annahmen** bzw. **Rechnungsgrundlagen** zusammengefasst.

Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung entsprechen den vorsichtigen Annahmen über die drei vorgenannten Größen. Sie werden für die Berechnung von Prämien und Reserven verwendet, wobei es zwei voneinander abweichende Sätze von Annahmen für die Prämien- und Reserveberechnung geben kann. In Deutschland stimmen die Rechnungsgrundlagen für Prämien und Reserven bislang in dem meisten Fällen überein.

Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung spiegeln die tatsächliche Erfahrung des Versicherers wider bzw. das, was der Versicherer als realistischen „Schadenverlauf“ erwartet.

Wie wir in Kap. 10 sehen werden, führen Unterschiede in den Rechnungsgrundlagen 1. und 2. Ordnung zur Entstehung von Überschüssen, welche ihrerseits den Versicherten wieder zugute kommen.

3.6 Standard-Versicherungen

Im Folgenden werden die gängigsten Produkte der Lebensversicherung und ihre Charakteristika beschrieben. Aufgrund der in Abschn. 3.3 genannten Veränderungen ist die Anzahl an Kapitallebensversicherungen zugunsten von Rentenversicherungen rückläufig, während der Anteil von Risikolebensversicherungen nahezu konstant geblieben ist.

3.6.1 Unterscheidungskriterien

Lebensversicherungen lassen sich hinsichtlich diverser Kriterien aufteilen, auf die wir vorab eingehen wollen.

Die Unterscheidung nach der **Versorgungsschicht** bezieht sich auf das in Abschn. 3.3 beschriebene Drei-Schichten-Modell der Altersversorgung und gibt an, welcher der drei Schichten der Versicherungsvertrag angehört.

Die Differenzierung in **Produkte** bzw. **Produktarten** zielt auf das versicherte Risiko bzw. den Deckungsumfang ab. So gibt es Produkte zur Absicherung des Todesfallrisikos, des Erlebensfall- oder Langlebigkeitsrisikos sowie des Invaliditätsrisikos. Eng verbunden und quasi eine Verfeinerung des Produktbegriffs ist die Einteilung in **Tarife**. Wie die verschiedenen, am Markt existierenden Bezeichnungen für die offizielle Dokumentation von Lebensversicherungen belegen (nämlich Geschäftsplan, Tarifplan, Produktplan etc.), sind die Begrifflichkeiten nicht einheitlich. Produkte enthalten Parameter, mit deren Hilfe sich Produkteigenschaften wie z.B. die Höhe der Todesfalleistung o.ä. darstellen lassen. Durch Festlegung der Parameter gelangt man zu einer speziellen Ausprägung des Produkts, einem Tarif. Die zusätzliche Festlegung der Kostenparameter führt zu einer **Tarifstufe** oder **Kostenstufe**. Gleichartige Tarife werden im zeitlichen Ablauf bei Einführung zusätzlicher oder bei Änderung bestehender Eigenschaften durch den Begriff der **Tarifgeneration** voneinander abgegrenzt, bspw. bei einer Änderung des Rechnungszinses.

Die Unterscheidung nach dem **Vertragsteil** führt zum Begriff der Hauptversicherung auf der einen und der Zusatzversicherung auf der anderen Seite.

Eine **Hauptversicherung** ist ein rechtlich eigenständiger Versicherungsvertrag und bildet die Hauptkomponente einer Versicherung. Eine **Zusatzversicherung** hingegen stellt die Anbündelung einer Zusatzkomponente an eine Hauptversicherung dar, mit der ein zusätzlicher Versicherungsschutz eingeschlossen wird. Eine Zusatzversicherung bildet eine rechtliche Einheit mit der Hauptversicherung und kann i.d.R. allein, ohne die Hauptversicherung, nicht fortbestehen. Dies bedeutet, dass bei Beendigung der Hauptversicherung auch die Zusatzversicherung endet. Umgekehrt kann eine Zusatzversicherung für sich allein jedoch durchaus gekündigt werden, ohne dass die Hauptversicherung erlischt.

Versicherungsverträge werden häufig auch in **Vertragsbausteine** oder **Vertragsscheiben** aufgeteilt. Der Stammbaustein bzw. die erste Vertragsscheibe entspricht dabei der bei Vertragsabschluss vereinbarten Konstellation aus Versicherungsdauer, zu zahlender Prämie und versicherter Leistung. Während der Vertragslaufzeit hat der Kunde nun die Möglichkeit, Änderungen an seinem Vertrag durchzuführen. So führt z.B. eine vom Kunden gewünschte Erhöhung des Beitrags zum Entstehen eines Zusatzbausteins (in diesem Fall eines Erhöhungsbausteins) bzw. einer Dynamikscheibe, in welcher die hinzukommende Prämie, die damit einhergehende Erhöhung der versicherten Leistung sowie die Restlaufzeit des Vertrags getrennt vom originären Baustein abgelegt werden. Diverse Vertragsänderungen führen zu zusätzlichen Bausteinen oder Scheiben, so dass der gesamte Vertrag sich im Laufe der Zeit ggf. aus mehreren Vertragsbausteinen bzw. -scheiben zusammensetzt. Die sprachliche Trennung von Vertragsteil und Vertragsbaustein ist in der Praxis insofern uneinheitlich, als dass die Begriffe Zusatzversicherung und Zusatzbaustein beizeiten synonym verwendet werden. Dem hier vorgestellten Terminus folgend hat jedoch sowohl die Haupt- als auch eine evtl. eingeschlossene Zusatzversicherung jeweils immer einen Stammbaustein und ggf. einen oder mehrere Zusatzbausteine.

Eine weitere Unterscheidung stellt die **Geschäftsart** dar, wonach Lebensversicherungen entweder im **Einzelgeschäft** oder im **Kollektivgeschäft**, d.h. in Form einer Einzel- oder einer Kollektivversicherung, abgeschlossen werden. Kollektivgeschäft liegt vor, wenn ein Versicherungsvertrag für eine größere Gruppe von Personen, ein sog. Kollektiv, abgeschlossen wird (nicht zu wechseln mit Versicherungen auf verbundene Leben). Dies ist häufig im Rahmen der bAV der Fall, wo sämtliche, nach festgelegten Kriterien in Frage kommenden Mitarbeiter eines Unternehmens als Gruppe bzw. Kollektiv definiert werden. Kollektivgeschäft zeichnet sich einerseits dadurch aus, dass für alle Mitglieder des Kollektivs ein einheitlicher Deckungsumfang zugesagt wird, unabhängig vom Gesundheitszustand der einzelnen VPen oder unter Durchführung einer nur vereinfachten Gesundheitsprüfung. Andererseits führt die einheitliche Handhabung zu Ersparnissen in der Vertragsverwaltung auf Seiten des VU, so dass im Rahmen der Kalkulation in Abhängigkeit von der Gruppengröße niedrigere Kosten angesetzt werden können.

Findet eine Trennung nach der bereits **abgelaufenen Vertragsdauer** statt, so erhält man einerseits **Bestand(sverträge)**, d.h. laufende Versicherungsverträge, die sich bereits im Portfolio des VU befinden, und auf der anderen Seite **Neugeschäft(sverträge)**, d.h. neue Policen, die im Betrachtungszeitraum (z.B. ein Kalenderjahr) abgeschlossen wurden.

3.6.2 Risikolebensversicherung

Die Risikolebensversicherung gewährt Versicherungsschutz ausschließlich für den Todesfall. Häufig spricht man auch von einer **reinen Todesfallversicherung**. Stirbt die VP innerhalb der Versicherungsdauer, so wird eine Todesfallleistung, nämlich die vereinbarte Versicherungssumme, fällig. Bei einer lebenslangen Risikolebensversicherung wird die Versicherungsleistung folglich in jedem Fall ausgezahlt.

Das Leistungsspektrum derartiger Versicherungen umfasst sowohl Tarife mit gleichbleibender (konstanter) Versicherungssumme als auch Tarife mit einer planmäßig steigenden und/oder fallenden Versicherungssumme. Die Veränderung kann entweder linear, prozentual oder nach einem anderen Muster erfolgen. Im Kontext von Kreditverträgen tritt die Risikolebensversicherung in Gestalt der **Restschuldversicherung** auf, und in Form der **Sterbegeldversicherung** dient sie als Ersatzabsicherung des weggefallenen, früher von der gesetzlichen Krankenversicherung gezahlten Sterbegeldes.

Bei Risikolebensversicherungen findet häufig eine Differenzierung nach zusätzlichen sterblichkeitsbeeinflussenden Risikomerkmalen statt. So gibt es bspw. Unterscheidungen nach dem Raucherstatus (Raucher oder Nichtraucher) oder nach dem Akademiker-Status (Akademiker oder Nicht-Akademiker), die auch in Kombination auftreten können und somit zu einer Aufsplittung in homogenere Zielgruppen führen. Derartige Tarife werden auch als **Preferred Lives-Tarife** bezeichnet, da die Prämien für die bevorzugten Personengruppen (z.B. nicht rauchende Akademiker) deutlich reduziert ausfallen.

Risikolebensversicherungen können auch auf verbundene Leben abgeschlossen werden. Bei Tod einer der VPen wird die Versicherungssumme fällig, jedoch nur ein einziges Mal, d.h. wenn die erste oder die letzte VP verstirbt. Derartige Versicherungen dienen der gegenseitigen Absicherung der jeweils anderen VP(en).

Risikolebensversicherungen können als Haupt- und als Zusatzversicherungen abgeschlossen werden.

3.6.3 Kapitallebensversicherung

Die **reine Erlebensfallversicherung**, welche bei Erleben des Ablaufs der Versicherungsdauer die Versicherungssumme auszahlt, ist ein historisches Relikt, das in dieser Reinform heute kaum noch zu finden sein dürfte.

Die Kapitallebensversicherung, auch als **gemischte Versicherung** bezeichnet, stellt eine Kombination aus der reinen Todesfall- und der reinen Erlebensfallversicherung dar. Bei Tod innerhalb der Versicherungsdauer wird eine Todesfallleistung fällig; überlebt die VP jedoch bis zum Ende der Versicherungsdauer, wird eine Erlebensfallleistung ausgezahlt.

Klassisch stimmen die für den Todes- und den Erlebensfall versicherten Summen überein. Angeboten werden inzwischen jedoch auch Varianten mit voneinander abweichender Todes- und Erlebensfallsumme. Dabei kann das Verhältnis dieser beiden Größen konstant sein oder im Laufe der Versicherungsdauer variieren. Bspw. kann die Todesfallsumme zu Vertragsbeginn gegenüber der Erlebensfallsumme abgesenkt sein und gegen Ende der Versicherungsdauer auf die Erlebensfallsumme ansteigen. Denkbar ist auch, dass die Todesfallsumme anfänglich höher ist als die Erlebensfallsumme und linear auf diese absinkt. Es lassen sich nahezu beliebige Leistungsspektren konstruieren.

Kapitallebensversicherungen können auch als **Teilauszahlungs-Tarif** auftreten. Hierbei werden Teile der Erlebensfallleistung bereits während der Versicherungsdauer ausgezahlt. Die Auszahlung erfolgt, sofern die VP die vorab festgelegten Auszahlungszeitpunkte erlebt. Unmittelbar nach Auszahlung des Teilbetrags sinkt die verbleibende Erlebensfallleistung sprungartig um den ausgezahlten Teilbetrag.

Es sei angemerkt, dass der Begriff **kapitalbildende Lebensversicherung** keineswegs gleichbedeutend mit dem der Kapitallebensversicherung ist. Vielmehr ist ersterer ein Oberbegriff für alle diejenigen Lebensversicherungen, bei denen in nicht unerheblichem Maße ein Kapital gebildet werden muss, um die als sehr wahrscheinlich einzustufende Auszahlung der Versicherungsleistung durchführen zu können. Demnach gehören die Kapitallebensversicherung und die Rentenversicherung zu den kapitalbildenden Versicherungen, während Risikolebens- und Berufs unfähigkeitsversicherung nicht dazu zählen, sondern unter dem Begriff **Risikoversicherung** zusammengefasst werden.

3.6.4 Termfix- Versicherung

Diese Versicherung wird auch als **Kapitallebensversicherung mit festem Auszahlungstermin** bezeichnet. Die Versicherungssumme wird am Ende der Versicherungsdauer fällig – und zwar unabhängig davon, ob die VP diesen Zeitpunkt erlebt oder nicht. Die Tatsache, dass der Auszahlungstermin im Vorhinein feststeht, führt zu dem Namen „term fix“.

Stirbt die VP vor Erreichen des Ablaufs, wird keine Versicherungssumme ausgezahlt. Statt dessen besteht die Todesfallleistung darin, dass die Versicherung beitragsfrei fortgeführt wird, indem das VU die Beiträge zu dieser Versicherung (zumindest kalkulatorisch) weiter zahlt.

Termfix-Versicherungen gibt es nicht gegen Einmalbeitrag, da es sich ansonsten um einen reinen Sparvorgang ohne Versicherungscharakter handeln würde.

Die Termfix-Versicherung tritt in der Praxis unter dem Namen **Ausbildungsversicherung** oder auch **Heiratsversicherung** in Erscheinung, wodurch dem Kind – unabhängig vom Überleben des als VP eingesetzten Elternteils, Paten oder sonstigen Verwandten – zu einem Startkapital bei Ausbildungs- oder Studiumsbeginn bzw. einer Art Aussteuer bei Heirat verholfen werden soll.

3.6.5 Rentenversicherung

Bei einer **Rentenversicherung auf ein Leben** erhält der Begünstigte eine Rente, solange die VP lebt. Die genauere Bezeichnung ist **Leibrente** (und somit Leibrentenversicherung), da die Zahlung vom Überleben der VP abhängig ist. Die Rentenbezugsdauer ist in den meisten Fällen **lebenslang**, sie kann jedoch auch auf eine bestimmte Anzahl von Jahren begrenzt sein, so dass eine **abgekürzte Rentenzahlung** vorliegt und man von einer **temporären Leibrente** spricht.

Rentenversicherungen treten in Form von sofort beginnenden sowie aufgeschobenen Rentenversicherungen auf. Bei einer **sofort beginnenden Rentenversicherung** setzt die Rentenzahlung unmittelbar nach bzw. bei Vertragsbeginn ein. Im Falle einer **aufgeschobenen Rentenversicherung** beginnt die Rentenzahlung erst ab einem vorab festgelegten Zeitpunkt, dem so genannten **Rentenbeginn(termin)**. Den Zeitraum zwischen Vertragsbeginn und Rentenbeginn bezeichnet man als **Aufschubdauer**. Es ist offensichtlich, dass sofort beginnende Rentenversicherungen nur gegen Einmalbeitrag abgeschlossen werden können.

Sofern keine gesetzlichen Regelungen dagegen sprechen (wie z.B. bei Versicherungen der 1. Versorgungsschicht), besteht bei Rentenversicherungen in den meisten Fällen ein **Kapitalwahlrecht**. Dies bedeutet, dass der Versicherungsnehmer zum Ende der Aufschubdauer wählen kann, ob er in den Rentenbezug wechseln oder statt dessen eine einmalige Kapitalzahlung, die **Kapitalabfindung**, erhalten möchte.

Rentenversicherungen sind vom Ursprung her Erlebensfall-orientiert, da Leistungen nur dann erfolgen, sofern die versicherte Person die relevanten Zeitpunkte erlebt. Jedoch lassen sich auch in diesem Produkt Todesfallleistungen einschließen. Dies entspringt einerseits einem Absicherungsgedanken, andererseits der Kunden-Sichtweise, dass nach jahrelanger Beitragszahlung und dann eintretendem Tod keine Leistung aus seiner Versicherung fällig wird und „das ganze Geld weg ist“.

Für den Zeitraum des Rentenbezugs kann eine **Rentengarantiezeit** vereinbart werden. Hierbei wird die Zahlung der (Leib)Rente für eine festgelegte Mindestlaufzeit garantiert, d.h., die Rente wird unabhängig vom Erleben der Auszahlungszeitpunkte geleistet (und ist somit eine **Zeitrente**). Die maximale Dauer der Rentengarantiezeit ist aufgrund gesetzlicher Vorschriften begrenzt, da ansonsten der Versicherungscharakter verloren geht.

Alternativ oder ergänzend dazu kann eine **Beitragsrückgewähr** eingeschlossen werden. Die Beitragsrückgewähr kann sich auf die Aufschubdauer, den Rentenbezug oder auch auf beide Zeiträume beziehen. Die Regelungen der meisten Versicherer sehen vor, dass im Falle des Todes der VP innerhalb der Aufschubdauer die Summe der bis dahin gezahlten Beiträge unverzinst zurückgezahlt wird. Verstirbt die versicherte Person während des Rentenbezugs, so wird üblicherweise die Summe der Beiträge abzüglich der bis zum Todeszeitpunkt schon ausgezahlten garantierten Renten als Todesfalleistung ausgeschüttet. Sofern sich die Beitragsrückgewähr auch auf den Rentenbezug erstreckt, ist die zusätzliche Vereinbarung einer Rentengarantiezeit ausgeschlossen.

3.6.6 Hinterbliebenenrentenversicherung

Unter dem Oberbegriff Hinterbliebenenrentenversicherung werden sowohl Witwen- als auch Waisenrentenversicherungen subsummiert. Wie der Name andeutet, handelt es sich um ein Produkt zur Absicherung von Hinterbliebenen im Todesfall, z.B. Ehegatte, Lebenspartner oder Kinder.

Bei dieser Versicherung ist eine zweite versicherte Person vorhanden, so dass eine Abgrenzung dieser beiden Personen in (**haupt**)versicherte Person (kurz: VP) und **mitversicherte Person** (kurz: MVP) stattfindet. Die VP ist diejenige Person, deren Tod die Zahlung der Hinterbliebenenrente auslöst. Die MVP ist die Empfängerin der Hinterbliebenenrente, also die als Hinterbliebene übrig bleibende Person. Wie man erkennt, handelt es sich hierbei um eine Versicherung auf verbundene Leben.

Die Hinterbliebenenrentenversicherung kann üblicherweise nur als Zusatzversicherung – gemeinsam mit einer (Leib)Rentenversicherung – abgeschlossen werden. Die VP der Leibrentenversicherung ist mit der (Haupt-)VP der Hinterbliebenenrentenversicherung identisch.

Im Falle des Todes der VP vor oder nach Ablauf der Aufschubdauer (der Leibrentenversicherung) wird die Hinterbliebenenrente gezahlt. Ist eine Rentengarantiezeit (bei der Leibrentenversicherung) eingeschlossen und stirbt die VP innerhalb dieser Rentengarantiezeit, so wird die Hinterbliebenenrente erst nach Ablauf der Rentengarantiezeit gezahlt. Bei Tod der MVP erlischt die Hinterbliebenenrentenversicherung.

Die Höhe der Hinterbliebenenrente ist üblicherweise an die Höhe der (in der Leibrentenversicherung) versicherten Altersrente gekoppelt. Gängig sind Witwenrenten in Höhe von 60% der Altersrente und Waisenrenten in Höhe von 20% der Altersrente.

Während Witwenrenten selbst wieder Leibrenten sind, werden Waisenrenten vielfach als Zeitrenten modelliert, zumal ihre Zahlung i.d.R. spätestens dann endet, sobald die Waise das Alter von 27 Jahren erreicht.

3.6.7 Berufs-/Erwerbsunfähigkeitsversicherung

Berufs- bzw. Erwerbsunfähigkeitsversicherungen bieten Schutz vor dem Risiko des Einkommenswegfalls aufgrund von eingetretener **Invalidität**. Invalidität steht hierbei als Oberbegriff für die Unfähigkeit, ein Arbeitseinkommen zu erzielen, weil die VP dauerhaft erkrankt ist. Bei vorliegender Invalidität ist die VP entweder berufsunfähig, d.h. unfähig, ihren erlernten oder einen vergleichbar qualifizierten Beruf auszuüben, oder sie ist sogar erwerbsunfähig, d.h., sie ist vollkommen außer Stande, einer Tätigkeit zur Erzielung eines Einkommens nachzugehen. Das gerade vereinfacht beschriebene Vorliegen von **Berufsunfähigkeit** (kurz: BU) oder **Erwerbsunfähigkeit** (kurz: EU) wird in der Praxis sehr präzise definiert. Dabei tauchen Begriffe wie Verweisungsverzicht, Grad der Berufsunfähigkeit etc. auf, was an dieser Stelle jedoch nicht von ausschlaggebender Bedeutung ist und somit nicht weiter verfolgt wird.

Zur Vereinfachung wird im Folgenden nur von BU-Versicherung (kurz: BUV) gesprochen, womit gleichzeitig auch stets die EU-Versicherung (kurz: EUV) gemeint ist.

Die BU-Versicherung stellt vermutlich das bekannteste Beispiel einer Zusatzversicherung dar. Eine **BU-Zusatzversicherung** (kurz: **BUZ**) wird in der Regel zu einer kapitalbildenden Lebensversicherung abgeschlossen. Andererseits können BU-Versicherungen auch als eigenständige Hauptversicherung abgeschlossen werden, was in diesem Fall als **selbstständige BU-Versicherung** (kurz: **SBU**) bezeichnet wird.

Wird die VP während der **Anspruchsdauer** berufsunfähig, so besteht die seitens des VU zugesagte Leistung aus mehreren Bestandteilen. Bei einer selbstständigen BU-Versicherung wird im Leistungsfall eine **BU-Rente**, man sagt auch **Barrente**, gezahlt. Die Zahlung erfolgt so lange wie die BU andauert, maximal jedoch bis zum Ablauf der vereinbarten Leistungsdauer. Diese kann kleiner oder gleich der Anspruchsdauer sein. Sie kann aber auch über die Anspruchsdauer hinausgehen, was als **verlängerte Leistungsdauer** bezeichnet wird. Bei einer BUZ besteht die Leistung stets aus einer **Beitragsbefreiung** der Hauptversicherung, man sagt auch **Befreiungsrente**, d.h., bei BU-Eintritt entfällt die Pflicht zur Beitragszahlung in der zugehörigen Hauptversicherung. Optional kann zusätzlich eine Barrente (analog zur selbstständigen BU-Versicherung) abgedeckt werden. Im Kontext der BUZ findet man daher oft auch die abkürzenden Bezeichnungen „BUZ-B“ für die Beitragsbefreiung und „BUZ-R“ für die Barrente. Die BU-Versicherung befreit sich selbst immer von der Beitragszahlung, d.h., bei Eintritt der BU entfällt automatisch die Pflicht zur Beitragszahlung für die BU-Versicherung.

Im Kontext der BU-Versicherungen findet eine Aufteilung in Risikogruppen statt. Diese Einteilung erfolgt anhand des von der VP ausgeübten Berufs und basiert auf der Erfahrung, dass verschiedene Berufsgruppen ein unterschiedlich hohes Risiko für den Eintritt einer BU haben, bspw. weisen Anwälte ein deutlich niedrigeres Invalidisierungsrisiko auf als Handwerker. Entsprechend erfolgt eine Berufsgruppen-spezifische und damit risikogerechte Kalkulation.

Eine weitere Besonderheit ist, dass eine eingetretene BU nicht für den Rest der Versicherungsdauer anhalten muss. Es kommt (gar nicht so selten) vor, dass die VP wieder so weit gesundet, dass eine BU nicht mehr vorliegt und die VP folglich wieder einer Arbeitstätigkeit nachgehen kann. Wenn dies passiert, spricht man von **Reaktivierung** bzw. dass die VP reaktiviert wird. Da die BU wegen desselben oder eines anderen Grundes erneut auftreten kann, ist der Wechsel zwischen BU und Nicht-BU sogar mehrfach möglich.

Im Rahmen der BU-Versicherung ist der Begriff der **Karenzzeit** noch von wesentlicher Bedeutung. Die Karenzzeit ist derjenige Zeitraum, für welchen die BU ab ihrem Eintritt ununterbrochen bestanden haben muss, bevor eine Leistung seitens des VU erstmalig gezahlt wird. Das bedeutet: Mit dem Eintritt der BU beginnt die Karenzzeit, und erst mit Ablauf dieser Karenzzeit entsteht ein Anspruch auf Leistungen aus der BU-Versicherung, also erst nach der Karenzzeit wird eine Befreiungsrente und/oder Barrente gezahlt. Die Beitragszahlungspflicht für die BU-Versicherung selbst entfällt jedoch stets ab Beginn der Karenzzeit. Die Karenzzeit wird vom VN selbst gewählt und kann zwischen 3 und 36 Monaten betragen.

In den letzten Jahren haben sich – neben Beitragsbefreiung und Barrente – weitere Leistungskomponenten am Markt eingebürgert. Dabei handelt es sich um zusätzliche Assistance-Leistungen, welche optional einschließbar sind und überwiegend in Form von einmaligen Kapitalzahlungen bei BU-Eintritt und/oder Reaktivierung geleistet werden.

3.6.8 Fondsgebundene Lebens- oder Rentenversicherung

Die **fondsgebundene Lebensversicherung** (kurz: **FLV**) stellt das Pendant zur Kapitallebensversicherung dar, während die **fondsgebundene Rentenversicherung** (kurz: **FRV**) prinzipiell mit der konventionellen Rentenversicherung vergleichbar ist. Bei der FLV wird zum Ablauf der Versicherungsdauer die dann erreichte Erlebensfallleistung ausgezahlt. Bei der FRV wird das erreichte Vertragsguthaben verrentet, sofern der VN keine Kapitalabfindung wählt.

Fondsgebundene Versicherungen zeichnen sich dadurch aus, dass die gezahlten Beiträge nicht in einen konventionellen Deckungssstock, sondern durch Kauf entsprechender Fondsanteile in einen oder mehrere **Wertpapierfonds (Investmentfonds)** angelegt werden. Der Vorteil für den VN besteht in der Chance, an einer besseren Verzinsung seiner Beiträge teilzuhaben (man sagt auch: zu partizipieren). Umgekehrt trägt der VN selbst ein Risiko, das sogenannte **Anlagerisiko**, welches darin besteht, dass die wertmäßige Entwicklung der Fonds nicht vorhersagbar ist und somit die Höhe der Versicherungsleistungen nicht von Anfang an feststeht – wie es bei den bisher beschriebenen, nicht fondsgebundenen Produkten der Fall ist. Im Extremfall könnte sogar ein Totalverlust, d.h. die komplette Entwertung der Wertpapiere, eintreten, so dass der Kunde keine Versicherungsleistung erhielte. Um zu vermeiden, dass der VN trotz gezahlter Beiträge keine Leistung aus seiner Versicherung erhält, kommen verschiedene Mechanismen zum Einsatz.

Fondgebundene (wie auch konventionelle) Versicherungen gewähren Leistungen bei Tod und im Erlebensfall. Vielfach werden Todesfallleistungen ihrer Höhe nach vorab festgelegt, indem eine Versicherungssumme fixiert wird, welche dann garantiert ausgezahlt wird. Alternative Regelungen sehen vor, dass bei Tod bspw. die Summe der bislang gezahlten Beiträge oder einfach das vorhandene Gesamtguthaben ausgezahlt wird (welches dann jedoch von der Wertentwicklung abhängt).

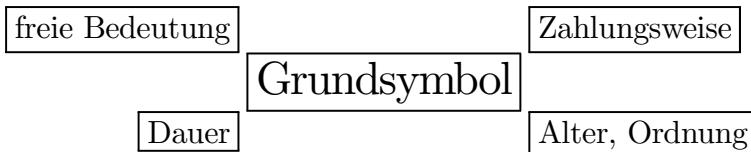
Die Höhe der Erlebensfallleistung steht in den meisten Fällen nicht von Anfang an fest, da sie von der Wertentwicklung der Fonds abhängt. Zur Begrenzung des Anlagerisikos kann ein Teil der Erlebensfallleistung garantiert werden. Gängig ist hier die Zusage seitens des VU, im Erlebensfall mindestens die Summe der gezahlten Beiträge zu leisten (**Beitragserhaltungsgarantie**). Dies hat zur Folge, dass weniger in die Fonds investiert werden kann, da aus den Beiträgen zusätzlich jetzt ein Guthaben für die Erreichung der Garantieleistung aufgebaut werden muss.

Fondsgebundene Versicherungen werden als **Kontentarife** geführt. Die Beiträge werden gezahlt, und daraus ergeben sich, zusammen mit der Wertentwicklung des Fondsvermögens, die Stände der einzelnen Konten. Üblicherweise kennt man (mindestens) ein **Fondskonto** und ggf. ein **Garantiekonto** (in welchem ein evtl. Garantieguthaben geführt wird). Ist neben einem Fondskonto auch ein Garantiekonto vorhanden, so spricht man von einem **Hybrid-Produkt** (kurz: **Hybrid**). Man trennt zwischen statischen und dynamischen Hybrid-Produkten: Bei **statischen Hybriden** findet keine Umschichtung zwischen den Konten statt, bei **dynamischen Hybriden** sehr wohl. Außerdem findet eine Unterscheidung nach der Anzahl der geführten Konten, sogenannten „Töpfen“, statt. Bislang existieren am Markt Zwei-Topf-Hybride sowie Drei-Topf-Hybride. Ein **Zwei-Topf-Hybrid** sieht ein Garantie- und ein Fondskonto vor. Beim **Drei-Topf-Hybrid** sind neben dem Garantiekonto zwei weitere Fondskonten vorhanden, ein Fondskonto mit freien (ungesicherten) Fonds sowie ein Fondskonto, welches in **Garantiefonds** investiert ist. Garantiefonds bringen entweder am Ende ihrer Laufzeit (mindestens) einen festgelegten Garantiebetrag zur Auszahlung oder – falls eine **Höchststandsgarantie** inkludiert ist – sichern zwischenzeitlich erreichte und in bestimmten Intervallen überprüfte Höchststände des Fondswertes ab.

Im Laufe des Vertrags hat der VN das Recht, Guthaben (Fondsanteile) von einem auf den anderen Fonds umzuschichten (**Shift**). Darüber hinaus hat er das Recht, die Auswahl der Fonds, in die seine Beiträge investiert werden, zu wechseln (**Switch**); in diesem Fall verbleiben die bereits investierten Anteile in den „alten“ Fonds. Shiften und Switchen können unabhängig voneinander ausgeübt werden. Die Anzahl derartiger Wechsel pro Jahr ist üblicherweise begrenzt oder wird ab einer gewissen Anzahl kostenpflichtig.

3.7 Versicherungsmathematische Notation

An dieser Stelle sei kurz die allgemeine aktuarielle Schreibweise erläutert, wie sie im Rahmen des XIV. International Congress of Actuaries (ICA) im Jahr 1954 festgelegt wurde und daher auch in diesem Buch verwendet wird. Seit jenem Zeitpunkt haben versicherungsmathematische Symbole im Allgemeinen folgendes Aussehen:



In jeder der vier Ecken um das Grundsymbol wird eine zusätzliche Information bereitgestellt. Die Inhalte seien am folgenden Beispiel verdeutlicht:

$$u \mid \ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(k)}$$

- Das Grundsymbol \ddot{a} zeigt an, dass es sich um den Barwert einer vorschüssig zahlbaren Rente handelt.
- Das (k) in der Ecke rechts oben bedeutet, dass die Zahlung in k gleichen Teilzahlungen erfolgt bzw. dass die Zahlungsperiode von einer Zeiteinheit in k gleich große Teilperioden aufgeteilt wird.
- In der unteren Ecke rechts finden sich das Eintrittsalter x der VP sowie die festgelegte Zahlungsdauer bzw. Laufzeit von (maximal) n Zahlungsperioden.
- Die Ecke links unten ($u \mid$) steht für eine Aufschubdauer von u Zahlungsperioden.
- Und aus der linken oberen Ecke geht hervor, dass der Barwert zu einem Zinssatz von $i\%$ berechnet werden soll.

Korrekt erweise wäre das Symbol

$$u \mid n \ddot{a}_x^{(k)}$$

zu verwenden, da Dauern in der linken unteren Ecke stehen. Wie auch *Milbrodt und Helbig (1999)* ausführen, handelt es sich um eine Ausnahme, indem (als Zugeständnis an die finanzmathematische Notation) deterministische Laufzeiten rechts unten und Aufschubdauern links unten aufgeführt werden (dürfen).

Diese Darstellung gibt zwar nicht sämtliche Feinheiten wieder, jedoch zeigt sie die wesentlichen Bestandteile sowie die häufigsten Belegungen der jeweiligen Positionen. Eine ausführliche und vollständige Beschreibung der Notation findet sich in *DGVM (1955)*.

Teil II
Klassische
Lebensversicherungsmathematik

Kapitel 4

Elementare Finanzmathematik

Da die Lebensversicherungsmathematik auf der Finanzmathematik basiert, wird hier einerseits die Basis für nachfolgende Kapitel gelegt und andererseits die Rechnungsgrundlage „Zins“ betrachtet. Im Anhang (siehe Anhang B) findet sich eine Übersicht über hilfreiche Formeln, die regelmäßig im Rahmen finanzmathematischer Berechnungen zur Anwendung kommen.

4.1 Zinsrechnung

Der **Zins** kann als Preis für die Übernahme eines Risikos und/oder als Preis für das Leihen von Geld angesehen werden. So verlangt eine Bank für die Gewährung eines Privatkredits von ihren Kunden Zinsen. Der Grund dafür liegt einerseits darin, dass die Bank das Risiko eingeht, dass der Kunde zahlungsunfähig wird (Kreditausfallrisiko) und sie in diesem Fall nicht den gesamten Darlehensbetrag zurück erhält. Andererseits entstehen der Bank Kosten aufgrund der entgangenen Möglichkeit, den als Kredit gewährten Betrag selbst anzulegen und somit anderweitig zu investieren (Opportunitätskosten). Je höher diese Kosten sind bzw. das Risiko ist, desto höhere Zinsen werden üblicherweise verlangt.

Allgemeiner ausgedrückt möchte ein Geldgeber für die Bereitstellung seines Kapitals eine Belohnung erhalten. Je riskanter das Unterfangen ist, in welches er sein Geld angelegt hat, desto höher fallen normalerweise die an ihn zu zahlenden Zinsen aus.

Diese eingängige Interpretation wird jedoch erschwert, sofern negative Zinsen auftreten bzw. möglich sind, wie es in der Finanzwirtschaft bereits seit einigen Jahren Realität geworden ist. Wir werden den Begriff Zins im Folgenden ganz allgemein verwenden, um den Vorgang des Kapitalwachstums zu beschreiben.

Sei K_0 das Kapital, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ investiert wird. Nach t Zeiteinheiten erhält der Investor einen Geldbetrag in Höhe von K_t zurück, welcher neben dem investierten Betrag auch die innerhalb des Anlagezeitraums angefallenen Zinserträge beinhaltet.

Die Funktion K_t wird **Kapitalwachstumsfunktion** genannt. Die **Zeiteinheit** beträgt – sofern nichts anderes gesagt wird – ein Jahr. Davon zu unterscheiden ist der Zeitraum der **Zinsperiode** oder des **Zinszahlungsabschnitts**, welcher angibt, wann bzw. wie oft pro Zeiteinheit die Zinsen fällig werden.

Um das Kapital K_t zu berechnen, wird ein **Zinssatz pro Zeiteinheit**, insbesondere **per annum** (kurz: **p.a.**), eingeführt, welcher mit i (vom Englischen „interest“) notiert wird. Zinssätze werden in der Regel in Prozent (in Zeichen: %) bzw. als Dezimalwert angegeben, z.B. $i = 3\% = 0,03$. Der vor dem %-Zeichen stehende Wert wird auch als **Zinsfuß** bezeichnet und beträgt im Beispiel folglich 3.

Die Zinsrechnung beschäftigt sich nun mit der Berechnung der entstehenden Zinsen, wobei folgende Kriterien zu beachten sind:

- Wie werden bereits angefallene Zinsen behandelt?
Werden bereits angefallene (und nicht ausgezahlte) Zinsen in den Folgeperioden wieder mitverzinst, so handelt es sich um **zusammengesetzte Verzinsung (Zinsseszinsrechnung)**, andernfalls spricht man von **einfacher Verzinsung**, bei der die anfallenden Zinsen schlichtweg angesammelt werden.
- Wann werden die Zinsen gutgeschrieben?
Es wird die grundlegende Annahme einer **nachschüssigen Verzinsung** getroffen, d.h. dass die Zinsen im Nachhinein fällig werden, indem diese jeweils erst am Ende der Zinsperiode gutgeschrieben werden. Theoretisch denkbar ist auch eine **vorschüssige Verzinsung** zu Beginn der Zinsperiode. Diese ist jedoch zum einen in der Praxis kaum vertreten und kann zum anderen auf den Fall der nachschüssigen Verzinsung zurückgeführt werden, so dass dies hier nicht weiter betrachtet wird.
- Wie werden Laufzeiten behandelt, die keine ganzen Jahre sind?
Bei Laufzeiten von weniger als einem Jahr (z.B. bei der Geldanlage auf einem Tagesgeldkonto) wird das sog. **kaufmännische Rechnen** angewendet. Bei der als „Deutsche Methode“ bezeichneten Vorgehensweise wird das Jahr auf 360 (Zins)Tage und ein Monat auf 30 (Zins)Tage normiert (unabhängig von der jeweils tatsächlichen Länge). An jedem Zinstag fällt somit $\frac{1}{360}$ -tel des Jahreszinses an.

4.1.1 Einfache Verzinsung

Bei der einfachen Verzinsung werden die Zinsen ausgehend vom Anfangskapital K_0 berechnet. Einmal gezahlte Zinsen werden nicht wieder mitverzinst, so dass der Investor jedes Jahr eine gleich hohe Zinszahlung in Höhe von $i \cdot K_0$ erhält.

Nach einem Jahr besitzt der Anleger

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1 + i) . \end{aligned}$$

Am Ende des zweiten Jahres erhält der Anleger wieder eine Zinszahlung von $i \cdot K_0$, so dass sein Kapital auf

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 + i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1 + i) + i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1 + 2 \cdot i) \end{aligned}$$

ansteigt. Nach t Jahren hat sich das Kapital des Investors schließlich zu

$$K_t = K_0 + \underbrace{t \cdot i \cdot K_0}_{\text{Zinsen}}$$

bzw.

$$K_t = K_0 \cdot (1 + t \cdot i) \quad (4.1)$$

akkumuiert.

4.1.2 Zusammengesetzte Verzinsung

Bei der zusammengesetzten Verzinsung erhält der Investor jährlich eine Zinszahlung, deren Höhe sich auf das am Ende des Vorjahres angesammelte Kapital K_{t-1} bezieht. Auf diese Weise werden sämtliche bislang angefallenen Zinsen selbst wieder mitverzinst.

Am Ende des ersten Jahres hat der Investor ein Kapital von

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1 + i) \end{aligned}$$

(dies stimmt mit dem Ergebnis bei einfacher Verzinsung überein).

Im zweiten Jahr erhält der Anleger eine Zinszahlung in Höhe von $i \cdot K_1$, so dass das Kapital am Jahresende

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 + i \cdot K_1 \\ &= K_1 \cdot (1 + i) \\ &= K_0 \cdot (1 + i)^2 \end{aligned}$$

beträgt. Nach t Jahren hat sich das investierte Kapital zu

$$\begin{aligned} K_t &= K_{t-1} + i \cdot K_{t-1} \\ &= K_{t-1} \cdot (1 + i) \\ &= K_0 + \underbrace{\left[(1 + i)^t - 1 \right]}_{\text{Zinsen}} \cdot K_0 \end{aligned}$$

bzw.

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t \quad (4.2)$$

akkumuliert.

Ist der Zinssatz i echt positiv, wächst das Kapital bei zusammengesetzter Verzinsung nach t Zeiteinheiten auf einen höheren Wert als bei der einfachen Verzinsung, da es zusätzlich zum Zins auf das Anfangskapital K_0 auch noch Zinsen auf die bisherigen Zinsen gibt. Während einfache Verzinsung zu einem linearen Wachstum des Kapitals führt (siehe Gleichung (4.1)), wächst das Kapital aufgrund des Zinseszins-Effekts bei zusammengesetzter Verzinsung exponentiell, wie die Darstellung in Gleichung (4.2) verdeutlicht.

Man sieht, dass das Kapital K_t nach t Jahren von drei Größen abhängt, nämlich dem Startkapital K_0 , dem Zinssatz i und dem Zeitraum t . Folglich kann bspw. aus dem Startkapital K_0 und dem Kapital K_t der zugehörige Zinssatz i bestimmt werden.

Beispiel 1. Ein Betrag von 5.200 EUR wird zu einem Zinssatz von 4% p.a. angelegt. Welchen Betrag erhält der Investor nach sechs Jahren zurück?
Mit $t = 6$ berechnet man

$$\begin{aligned} K_6 &= K_0 \cdot (1 + 0,04)^6 \\ &= 5.200 \text{ EUR} \cdot 1,04^6 \\ &= 6.579,66 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Beispiel 2. Ein anfängliches Kapital von 1 Mio. EUR hat sich nach drei Jahren zu einem Betrag von 1.061.208 EUR akkumuliert. Welches ist der zugrundeliegende (gleichbleibende) Zinssatz pro Jahr?

Auflösen der Gleichung (4.2) nach i führt zu

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 .$$

Folglich ist

$$i = \sqrt[3]{\frac{K_3}{K_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1.061.208}{1.000.000}} - 1 = 0,02 .$$

Der zugrundeliegende Zinssatz i beträgt also 2%.

Beispiel 3. Angenommen wird ein Zinssatz von 2% p.a. Ein Betrag in Höhe von 20.000 EUR hat sich zu 21.244,16 EUR akkumuliert. Für wie viele Jahre wurde das Geld angelegt?

Ausgehend von Gleichung (4.2) wird diese nach der Dauer aufgelöst, so dass

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{\ln(1+i)} .$$

Einsetzen der gegebenen Informationen liefert somit

$$t = \frac{\ln\left(\frac{21.244,16}{20.000}\right)}{\ln(1+0,02)} = \frac{\ln(1,062208)}{\ln(1,02)} = 3 ,$$

d.h., der Anlagezeitraum beträgt drei Jahre.

Zur Vereinfachung der Notation werden an dieser Stelle zwei Faktoren eingeführt:

- Der Term

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{4.3}$$

heißt **Diskontfaktor**. Seine Interpretation basiert auf der folgenden Fragestellung: Welcher Betrag muss zum Zeitpunkt $t = 0$ investiert werden, damit sich nach einem Jahr der normierte Betrag der Höhe 1 ergibt? Die Antwort wird durch den Ausdruck

$$v = (1+i)^{-1}$$

gegeben, denn ein Betrag der Höhe v zum Zeitpunkt $t = 0$ akkumuliert sich durch Verzinsung mit dem Zins i nach einem Jahr zu $v \cdot (1+i) = 1$.

- Der Ausdruck

$$1+i$$

wird als **Aufzinsungsfaktor** bezeichnet (auf die sonst häufig anzutreffende Notation mit r wird in diesem Buch verzichtet).

4.1.3 Gemischte Verzinsung und kaufmännische Diskontierung

Zusammengesetzte Verzinsung ist die in der Praxis wohl am häufigsten angewendete Form der Verzinsung. Die Anwendung von einfacher Verzinsung beschränkt sich in der Regel auf die Verzinsung innerhalb eines Jahres bzw. innerhalb eines Teils eines Jahres. Erfolgt die Anlage eines Kapitals jedoch nicht über volle Jahre (bzw. Zinsperioden), sondern über einen gebrochenen Zeitraum, so treten die beiden Verzinsungsformen auch in Kombination auf.

Bei der als **gemischte Verzinsung**, manchmal auch als „Sparbuchmethode“ bezeichneten Vorgehensweise wird über volle Zinsperioden hinweg die zusammengesetzte Verzinsung angewendet. Für die an den Rändern ggf. verbleibenden Bruchteile werden die anfallenden Zinsen nach der einfachen Zinsrechnung ermittelt. Der gesamte Anlagezeitraum t lässt sich dann in drei Teile zerlegen: den Teil t_u vor Beginn der ganzzahligen Laufzeit, die ganzzahlige Laufzeit t_N und den sich daran anschließenden Teil t_o . Somit gilt

$$t = t_u + t_N + t_o .$$

Für die beiden Zeiträume t_u und t_o wird einfache Verzinsung gewährt, für den Zeitraum t_N wird Zinseszinsrechnung angewendet, so dass sich insgesamt das Kapital

$$K_t = K_0 \cdot (1 + t_u \cdot i) \cdot (1 + i)^{t_N} \cdot (1 + t_o \cdot i) \quad (4.4)$$

ergibt.

Während bei der gemischten Verzinsung innerhalb eines Bruchteils eines Jahres linear aufgezinst wird, findet bei der als **kaufmännische Diskontierung** (oder auch „Wechseldiskontierung“) geläufigen Form der Verzinsung eine lineare Diskontierung während des entsprechenden Jahresbruchteils statt. Sie entspricht damit der Diskontierung bei vorschüssiger Verzinsung. Für die o.g. Konstellation mit $t = t_u + t_N + t_o$ führt dies zu der folgenden Darstellung:

$$K_t = K_0 \cdot \frac{(1 + i)^{t_N+2}}{1 + (2 - (t_u + t_o)) \cdot i} .$$

4.1.4 Effektive Verzinsung

Der Zinssatz i heißt **effektiver Zinssatz** oder **Effektivzinssatz** (pro Zeiteinheit) genau dann, wenn ein Einheitsbetrag der Höhe 1 nach t Zeiteinheiten auf $(1 + i)^t$ anwächst.

Bei einem Investment, welches sich über t Jahre erstreckt, werden in den einzelnen Jahren i.d.R. unterschiedliche Zinssätze gewährt, etwa i_1, i_2, \dots, i_t . Interessiert man sich nun für die erzielte durchschnittliche Verzinsung, so sucht man den Effektivzinssatz i für den genannten Zeitraum. Dieser ergibt sich aus dem Ansatz

$$K_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \dots \cdot (1 + i_t) \stackrel{!}{=} K_0 \cdot (1 + i)^t .$$

Den effektiven Zinssatz i erhält man somit als geometrisches Mittel der Aufzinsungsfaktoren, d.h.

$$1 + i = \left(\prod_{j=1}^t (1 + i_j) \right)^{\frac{1}{t}}$$

bzw.

$$i = \left(\prod_{j=1}^t (1 + i_j) \right)^{\frac{1}{t}} - 1 .$$

Nebenbei sei angemerkt, dass sich der durchschnittliche Zinssatz im Falle der einfachen Verzinsung als arithmetisches Mittel berechnet, denn der Ansatz

$$K_0 \cdot (1 + i_1 + i_2 + \dots + i_t) \stackrel{!}{=} K_0 \cdot (1 + t \cdot i)$$

führt zu

$$i = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t i_j .$$

Der Begriff des effektiven Zinssatzes wird auch verwendet, wenn im Rahmen eines Darlehens oder einer Investition Kosten oder Gebühren erhoben werden. Der Effektivzinssatz bezeichnet dann die – unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Aufwände – korrigierte, tatsächlich erzielte Verzinsung. Wir nehmen der Einfachheit halber jedoch an, dass keine zusätzlichen Kosten anfallen.

Der Ausdruck

$$d = 1 - v = \frac{i}{1 + i} = i \cdot v \quad (4.5)$$

heißt **effektiver Diskontsatz** (pro Zeiteinheit). Die anschauliche Begründung für diese Definition ist, dass ein Betrag der Höhe 1, welcher zu diesem Diskontsatz d angelegt wird, sich nach t Zeiteinheiten zu $(1 - d)^{-t}$ akkumuliert, wobei $0 < d < 1$ (d.h. $i > 0$).

Wie man leicht zeigt, ist die Angabe des effektiven Zinssatzes i oder des effektiven Diskontsatzes d zueinander äquivalent:

$$(1 - d)^{-1} = \left(1 - \frac{i}{1+i}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{-1} = 1 + i .$$

4.1.5 Nominelle Verzinsung

Bislang wurde angenommen, dass die Zinsen nur einmal pro Zeiteinheit, d.h. am Ende eines Jahres, fällig werden. Es gab also nur eine Zinsperiode pro Jahr. In der Praxis finden sich jedoch zahlreiche Beispiele, dass Geld für kürzere Zeiträume als ein Jahr geliehen oder angelegt wird, bspw. bei Tagesgeldkonten oder Dispositionskrediten. In diesen Fällen erzielt die Geldanlage Zinsen für einen kürzeren Zeitraum, und unmittelbar nach Zuteilung bzw. Auszahlung dieser Zinsen wird der Gesamtbetrag erneut angelegt, d.h. re-investiert.

Im Folgenden entfallen auf eine Zeiteinheit (Jahr) k Zinsperioden, welche jeweils eine Länge von $\frac{1}{k}$ des Jahres haben. Folglich werden k -Mal pro Jahr Zinsen (nachschüssig) fällig. Diese Art der Zinsfälligkeit bezeichnet man als **unterjährige Verzinsung**. Der Wert von k ist ganzzahlig. Meistens ist $k = 2, 4, 6$ oder 12 . Ein Wert von $k = 4$ bedeutet bspw., dass Zinsen vierteljährlich zugeteilt werden, ein Wert von $k = 12$ hingegen impliziert monatliche Zinszahlungen.

Prinzipiell kann man die für $k > 1$ entstehende Abweichung zwischen Zeiteinheit und Zinsperiode umgehen, indem die Zeiteinheit auf die Länge der Zinsperiode angepasst wird und ein entsprechend angepasster Zinssatz i_{mod} (pro Zeiteinheit) gewählt wird. Häufig geht man jedoch anders vor: Man belässt es bei einer Zeiteinheit von 1 Jahr und ändert statt dessen den Zinssatz, welcher die unterjährige Verzinsung angibt.

Die nachfolgenden Definitionen gewährleisten, dass der Zinsertrag über die gesamte Zeiteinheit mit der Summe der in den zugehörigen Zinsperioden erfolgenden Zinszahlungen übereinstimmt.

Der **nominelle Zinssatz** oder auch **Nominalzinssatz** $i^{(k)}$ pro Zeiteinheit wird durch die Gleichung

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \quad (4.6)$$

definiert.

Ein nomineller Zinssatz von $i^{(k)}$ p.a. wird in k gleich großen Teilzahlungen (Raten) unterjährig ausgeschüttet. Er stimmt mit einem effektiven Zinssatz von $\frac{i^{(k)}}{k}$ pro $\frac{1}{k}$ eines Jahres überein. Für $k = 1$ stimmen effektiver und nomineller Zinssatz überein.

Aus der Definition folgt, dass ein Betrag in Höhe von 1 sich nach t Zeiteinheiten auf $\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{k \cdot t}$ akkumuliert.

Beispiel 4. Die Zeiteinheit betrage ein Jahr. Wir betrachten einen Nominalzins von $i^{(k)} = 4\%$ p.a.. Abhängig von der Anzahl k der Zinsperioden ergibt sich ein effektiver Zinssatz von i p.a. entsprechend der folgenden Tabelle:

k	1	2	4	12	52	360
i	4,0000%	4,0400%	4,0604%	4,0742%	4,0795%	4,0808%

Man sieht, dass der effektive Jahreszinssatz i für $m > 1$ den nominalen Zinssatz übersteigt. Der Grund hierfür liegt in den Zinseszinsen, welche durch die unterjährige Ausschüttung der Zinsen erzielt werden.

Beispiel 5. Eine Bank bietet ein Tagesgeldkonto mit einer effektiven Verzinsung von 4% p.a. an. Ein Investor möchte Geld für ein halbes Jahr anlegen. Wie hoch ist der effektive Zinssatz für diesen Zeitraum?

In diesem Fall ist $k = 2$, und gesucht ist der Zinssatz $\frac{i^{(2)}}{2}$. Die Gleichung (4.6) lautet in diesem Fall

$$1 + 0,04 = \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 .$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\frac{i^{(2)}}{2}$ liefert

$$\frac{i^{(2)}}{2} = \sqrt{1,04} - 1 = 0,0198 ,$$

d.h., der Anleger erzielt in dem halben Jahr eine effektive Verzinsung von 1,98% (was einer Nominalverzinsung von 3,96% p.a. entspricht).

Analog existiert auch ein **nomineller Diskontsatz**, welcher mit $d^{(k)}$ bezeichnet und mittels des effektiven Diskontsatzes d definiert wird, nämlich

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(k)}}{k}\right)^k ,$$

oder über den nominellen Zinsstaz $i^{(k)}$, so dass

$$\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k = \left(1 - \frac{d^{(k)}}{k}\right)^{-k} .$$

4.1.6 Stetige Verzinsung

Anstelle von jährlicher ($k = 1$) oder täglicher ($k = 360$) Zinsfälligkeit werden die Zinsen nun jede Minute oder sekündlich fällig, d.h., die Anzahl der Zinsperioden steigt. Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ führt dann zu einem Spezialfall der unterjährigen Verzinsung, nämlich zur stetigen oder auch **kontinuierlichen Verzinsung**.

Unter der Annahme eines konstanten nominellen Zinssatzes von $i^{(k)} \equiv \delta$ führt die Grenzwertbildung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k$$

zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\delta}{k}\right)^k = \exp(\delta) = e^\delta .$$

Der effektive Zinssatz i ergibt sich wiederum aus dem Ansatz

$$1 + i = e^\delta ,$$

so dass

$$i = e^\delta - 1 .$$

Auf stetige Verzinsung stößt man üblicherweise durch direkte Betrachtung der Wachstumsfunktion K_t , welche das nach t Zeiteinheiten vorhandene Kapital beschreibt. Der Zeitindex t ist jetzt jedoch nicht diskret, sondern stetig. Vorausgesetzt, dass der Verlauf der Funktion K_t hinreichend glatt ist (insbesondere dass K_t differenzierbar ist), wird zur Messung, wie schnell das Kapital zu einem Zeitpunkt wächst, die **Zinsintensität** zum Zeitpunkt t bestimmt.

Dieses Maß wird mit $\delta(t)$ notiert und ergibt sich als

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \frac{1}{K_t} \cdot \frac{d}{dt} K_t \\ &= \frac{d}{dt} \ln(K_t) .\end{aligned}$$

Die Zinsintensität beschreibt annähernd die prozentuale Veränderung des Kapitals zum Zeitpunkt t über einen infinitesimalen Zeitraum, daher auch die Alternativbezeichnung **Momentanverzinsung**.

Die Existenz einer Zinsintensität impliziert, dass die Kapitalfunktion K_t geschrieben werden kann als

$$K_t = K_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^t \delta(u) \, du \right\} ,$$

wobei der Ausdruck $\exp \left\{ \int_0^t \delta(u) \, du \right\}$ die kumulierte relative Veränderung des Kapitals angibt.

Die Annahme einer konstanten Zinsintensität, d.h. $\delta(t) \equiv \delta$, führt zu der Darstellung

$$K_t = K_0 \cdot e^{\delta \cdot t} .$$

Führt man den Zinssatz i über die Definition $i = e^\delta - 1$ ein, d.h. man ersetzt e^δ durch $1 + i$, so erhält man die bekannte Darstellung

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t .$$

Beispiel 6. Die Zinsintensität sei konstant und betrage 10%, d.h. $\delta = 0,1$. Ein Investment von 1.000 EUR zum Zeitpunkt $t = 0$ akkumuliert sich nach einem Jahr zu $1.000 \cdot e^{0,1} = 1.105,17$ EUR, was einem effektiven Zinssatz von $i = 10,517\%$ p.a. entspricht.

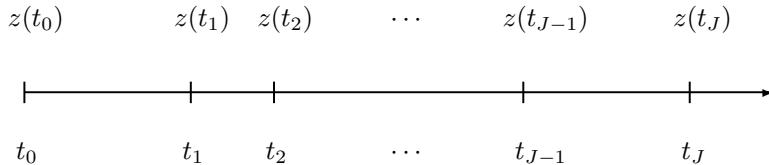
Abschließend seien noch einmal die fünf verschiedenen Typen von Zins- und Diskontsätzen zusammengefasst, mit denen das Wachstum von Kapital beschrieben werden kann:

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k = e^\delta = \left(1 - \frac{d^{(k)}}{k}\right)^{-k} = (1 - d)^{-1} . \quad (4.7)$$

4.2 Zahlungsströme

Die Mehrheit der finanziellen Zahlungsvorgänge, insbesondere alle hier betrachteten Zahlungsschemata, lassen sich unter dem gemeinsamen Dach eines Zahlungsstroms darstellen. Die Zeiteinheit beträgt, sofern nichts anderes gesagt wird, wiederum 1 Jahr, und die Verzinsung erfolgt nachschüssig (sowie ggf. unterjährig).

Ein (**diskreter**) **Zahlungsstrom** ist eine Serie von Zahlungen $z(t_j)$, welche zu diskreten Zeitpunkten t_j mit $j \in \{0, \dots, J\}$ gemacht werden. Die Zahlungen $z(t_j)$ können positiv, negativ oder auch Null sein. In vielen Fällen ist $t_j = j$, so dass die Zahlungen äquidistant, d.h. in gleichen Abständen, über die Zeitachse verteilt sind – jedoch ist das nicht notwendigerweise der Fall.



Zur Motivation der nachfolgend vorgestellten Ideen und Begrifflichkeiten betrachten wir vorab ein Beispiel.

Beispiel 7. Ein Bankkunde erhält zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Kredit in Höhe von 10.000 EUR. Während der nächsten 10 Jahre könnte der Kunde einerseits jedes Jahr einen Betrag von 1.100 EUR zurückzahlen, um das Darlehen zu tilgen. Der zugehörige Zahlungsstrom (aus Sicht der Bank) sieht wie folgt aus:

t_j	0	1	2	\dots	9	10
$z(t_j)$	-10.000	1.100	1.100	\dots	1.100	1.100

Ein anderes Rückzahlungsschema könnte das folgende sein:

t_j	0	1	2	\dots	9	10
$z(t_j)$	-10.000	100	100	\dots	100	10.100

In beiden Fällen zahlt der Kunde insgesamt einen Betrag von 11.000 EUR zurück. Aber welches der beiden Rückzahlungsschemata würde bzw. sollte die Bank bevorzugen?

Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, die beiden Zahlungsströme zu bewerten. Aus dem Vergleich dieser beiden Bewertungen kann dann eine Antwort abgeleitet werden.

Bei den kommenden Betrachtungen vernachlässigen wir jegliche Kosten und Einflussfaktoren, welche eine Komponente von Unsicherheit darstellen könnten. Das bedeutet, dass die Zahlungen auf jeden Fall erfolgen und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahlung ausfällt (Ausfallwahrscheinlichkeit) somit Null ist. Daher wird diese Art von Zahlungsströmen auch als **deterministischer (diskreter) Zahlungsstrom** – im weiteren Verlauf abkürzend auch nur „Zahlungsstrom“ – bezeichnet. Als Instrument zur Bewertung eines Zahlungsstroms verwendet man den Zins.

4.2.1 Bewertung und Äquivalenz von Zahlungsströmen

Auf Basis eines effektiven Zinssatzes von i p.a. wird der **Wert des Zahlungsstroms** zu einem ausgewählten Zeitpunkt t^* ($t_0 \leq t^* \leq t_J$) definiert als (vom Englischen „cash flow“)

$$CF(t^*; i) = \sum_{j=0}^J z(t_j) \cdot (1+i)^{t^*-t_j} . \quad (4.8)$$

Der **Barwert** des Zahlungsstroms zum Zinssatz i , in Zeichen: $PV(i)$ (vom Englischen „present value“), ist der Wert des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt $t^* = t_0$, d.h.

$$\begin{aligned} PV(i) &= CF(t_0; i) \\ &= \sum_{j=0}^J z(t_j) \cdot (1+i)^{t_0-t_j} \\ &= \sum_{j=0}^J z(t_j) \cdot v^{t_0-t_j} . \end{aligned}$$

Der Wert des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt $t^* = t_J$ wird als **Endwert** des Zahlungsstroms bezeichnet und hier mit $TV(i)$ notiert (vom Englischen „terminal value“) :

$$\begin{aligned} TV(i) &= CF(t_J; i) \\ &= \sum_{j=0}^J z(t_j) \cdot (1+i)^{t_J-t_j} . \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff „Barwert“ teilweise auch für den Wert des Zahlungsstroms zu einem beliebigen Zeitpunkt t^* verwendet wird, insbesondere dann, wenn t^* den aktuellen Betrachtungszeitpunkt repräsentiert.

Wie man leicht nachrechnen kann, gilt für alle t^*

$$CF(t^*; i) = (1 + i)^{t^*} \cdot PV(i)$$

oder – allgemeiner ausgedrückt – für zwei Zeitpunkte s und t

$$CF(t; i) = (1 + i)^{t-s} \cdot CF(s; i) . \quad (4.9)$$

Insbesondere gilt

$$TV(i) = (1 + i)^{t_J} \cdot PV(i)$$

bzw.

$$PV(i) = v^{t_J} \cdot TV(i) .$$

Aus dieser Gleichung folgt – bei gegebenem Zinssatz i –, dass zwei Zahlungsströme, die denselben Barwert haben, zu jedem Zeitpunkt denselben Wert haben. In diesem Fall nennt man die beiden Zahlungsströme zueinander **äquivalent**.

Beispiel 8. Wir betrachten ein Einjahresintervall und unterstellen einen effektiven Zinssatz von i p.a.

Seien $k, d, d^{(k)}, i^{(k)}$ sowie δ Werte derart, dass die Gleichung (4.7) erfüllt ist, und gegeben seien die folgenden fünf Zahlungsströme innerhalb dieses einen Jahres:

1. Eine Zahlung in Höhe von d zum Zeitpunkt 0.
2. k Zahlungen der jeweiligen Höhe $\frac{d^{(k)}}{k}$ zu den Zeitpunkten $0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$.
3. k Zahlungen der jeweiligen Höhe $\frac{i^{(k)}}{k}$ zu den Zeitpunkten $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1$.
4. Eine Zahlung in Höhe von i zum Zeitpunkt 1.
5. Ein stetiger Strom von Zahlungen vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 1 zu einer konstanten Rate von δ p.a.

Zu dem gegebenen effektiven Jahreszins von i p.a. haben diese Zahlungsströme alle denselben Wert, und zwar zu jedem Zeitpunkt. Sie sind daher zueinander äquivalent. Für den Beweis reicht es aus, den Barwert aller Zahlungsströme zu berechnen und zu zeigen, dass diese übereinstimmen.

4.2.2 Spezielle Zahlungsströme

Im Bereich der Finanzmathematik treten gewisse Zahlungsmuster immer wieder auf. Daher werden im Folgenden die wesentlichen Standard-Muster von Zahlungsströmen vorgestellt und ihre Bar- sowie Endwerte berechnet.

Für diese speziellen Bar- und Endwerte hat sich eine besondere Notation entwickelt, welche sich auch in der Versicherungsmathematik in sehr ähnlicher Form wiederfinden wird.

Die Zeiteinheit betrage weiterhin 1 Jahr, und der jährliche (effektive) Zinssatz sei i p.a. Die jährlichen Zahlungen haben jeweils die normierte Höhe 1 (sofern nichts anderes gesagt wird). Dies hat den Vorteil, dass bei einem abweichen- den Jahresbetrag von bspw. B die nachfolgend hergeleiteten Formeln einfach mit B multipliziert werden müssen, um das gesuchte Ergebnis zu erhalten.

4.2.2.1 Einmalzahlung

Eine **Einmalzahlung** ist eine Zahlung, die einmalig zu einem vorab festgelegten Zeitpunkt geleistet wird.

Findet die Einmalzahlung nach n Jahren statt, so gilt für den zugehörigen Zahlungsstrom: $J = n$, $j \in \{0, \dots, n\}$, $t_j = j$ sowie $z(t_j) = 0$ für $t_j = 0, \dots, n-1$ und $z(n) = 1$.

Der Barwert dieses Zahlungsstroms ist

$$PV(i) = CF(0; i) = v^n ,$$

und der Endwert beträgt

$$TV(i) = CF(n; i) = 1 .$$

Sofern die Einmalzahlung sofort erfolgt, ergeben sich für den Zahlungsstrom die Parameter: $J = n$, $j \in \{0, \dots, n\}$, $t_j = j$ mit $z(0) = 1$ und $z(t_j) = 0$ für $t_j = 1, \dots, n$.

In diesem Fall ergeben sich ein Barwert von

$$PV(i) = 1$$

und ein Endwert von

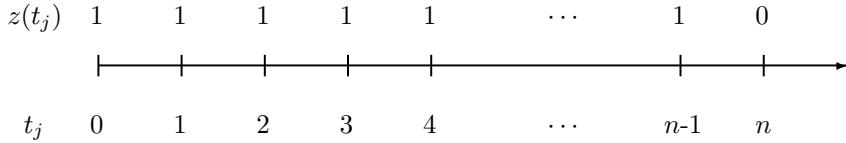
$$TV(i) = (1+i)^n .$$

4.2.2.2 Zeitrenten

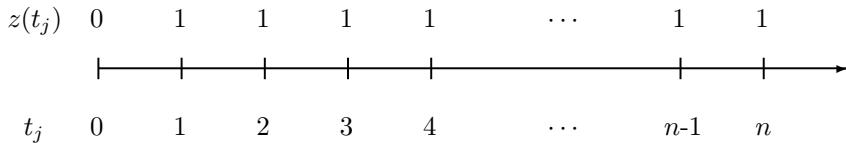
Da die Zahlungen deterministisch sind, handelt es sich bei den folgenden Zahlungsschemata um Zeitrenten (vgl. Abschn. 3.6.5). Der Begriff der Zeitrente beinhaltet üblicherweise bereits die Information, dass die Rente nur über einen gewissen Zeitraum gezahlt wird. Präziser müsste man von einer **temporären Zeitrente** sprechen – wie es auch bei Leibrenten üblich ist.

Die Rentenzahlungen können entweder vorschüssig zu Beginn oder nachschüssig, d.h. am Ende des jeweiligen Jahres, erfolgen.

Eine n Jahre lang vorschüssig zahlbare (temporäre) Zeitrente (der Höhe 1) lässt sich als Zahlungsstrom darstellen, indem $J = n$, $j \in \{0, \dots, n\}$, $t_j = j$ sowie $z(t_j) = 1$ für $t_j = 0, \dots, n-1$ und $z(n) = 0$ gesetzt wird.



Für die n Jahre lang nachschüssig zahlbare Zeitrente ist $z(0) = 0$ und $z(t_j) = 1$ für alle $t_j = j = 1, \dots, n$.



Der Barwert einer n -jährigen vorschüssigen Zeitrente berechnet sich (unter Ausnutzung der Summenformel für geometrischen Folgen, siehe Anhang B) wie folgt:

$$\begin{aligned} PV(i) &= CF(0; i) \\ &= 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} v^j \\ &= \frac{1 - v^n}{1 - v} \\ &= \frac{1 - v^n}{d}. \end{aligned}$$

Dieser Barwert wird als **vorschüssiger Rentenbarwertfaktor** bezeichnet und mit dem Symbol $\ddot{a}_{\overline{n}}$ notiert, also

$$\ddot{a}_{\overline{n}} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Für die n -jährige nachschüssige Zeitrente wird der **nachschüssige Rentenbarwertfaktor** durch $a_{\overline{n}}$ symbolisiert, und dieser Barwert ist gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}} &= v + v^2 + \cdots + v^n \\ &= \sum_{j=1}^n v^j \\ &= v \cdot \sum_{j=1}^n v^{j-1} \\ &= v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}, \end{aligned}$$

so dass

$$a_{\overline{n}} = \frac{1 - v^n}{i}.$$

Offensichtlich gilt zwischen den beiden Rentenbarwertfaktoren die Beziehung

$$a_{\overline{n}} = v \cdot \ddot{a}_{\overline{n}}$$

bzw.

$$\ddot{a}_{\overline{n}} = (1 + i) \cdot a_{\overline{n}}.$$

Beispiel 9. Zeigen Sie, dass $\ddot{a}_{\overline{n}} = 1 + a_{\overline{n-1}}$.

Ausgehend von der rechten Seite der Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} 1 + a_{\overline{n-1}} &= 1 + \frac{1 - v^{n-1}}{i} \\ &= \frac{i + 1 - v^{n-1}}{i} \\ &= \frac{\frac{1}{v} - v^{n-1}}{i} \\ &= \frac{1 - v^n}{v \cdot i} \\ &= \frac{1 - v^n}{d} \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}}. \end{aligned}$$

Nach Herleitung der Barwertformeln erhält man die zugehörigen Endwerte der Zeitrenten durch Multiplikation des Barwertes mit dem Aufzinsungsfaktor $(1 + i)^n$. Somit ergibt sich der **vorschüssige Rentenendwertfaktor** aus

$$\ddot{s}_{\overline{n}} = (1 + i)^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d},$$

und den **nachschüssigen Rentenendwertfaktor** erhält man als

$$s_{\bar{n}} = (1+i)^n \cdot a_{\bar{n}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

Auch für die Rentenendwertfaktoren gelten wiederum die Beziehungen

$$\ddot{s}_{\bar{n}} = (1+i) \cdot s_{\bar{n}}$$

und

$$s_{\bar{n}} = v \cdot \ddot{s}_{\bar{n}}$$

sowie die Gleichung

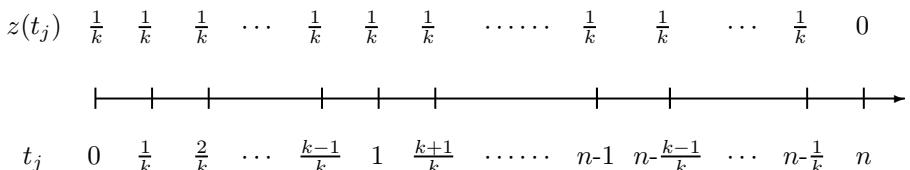
$$\ddot{s}_{\bar{n}} = s_{\bar{n+1}} - 1 .$$

Mit steigendem Zinssatz i sinkt der Diskontfaktor v . Folglich gilt für eine feste Laufzeit n :

- Die Rentenbarwertfaktoren $\ddot{a}_{\bar{n}}$ und $a_{\bar{n}}$ sind fallende Funktionen des Zinssatzes i .
- Die Rentenendwertfaktoren $\ddot{s}_{\bar{n}}$ und $s_{\bar{n}}$ sind steigende Funktionen des Zinssatzes i .

4.2.2.3 Unterjährige und stetige Zeitrenten

Nehmen wir nun an, die Rente werde nicht zu einem Zeitpunkt innerhalb des Jahres (zu Beginn oder am Ende), sondern gleichmäßig verteilt über k Zeitpunkte innerhalb eines Jahres ausgezahlt. Typischerweise ist $k \in \{1; 2; 4; 6; 12\}$. Das bedeutet, dass zu jedem der k Zeitpunkte eine Rentenzahlung in Höhe von $\frac{1}{k}$ erfolgt und der jährliche Gesamtbetrag somit nach wie vor 1 ist. Für Werte $k > 1$ spricht man von **unterjähriger Rentenzahlung**, bzw. von einer k -tel-jährlichen **Rentenzahlweise**. Die Dauer der Rentenzahlung betrage nach wie vor n Jahre.



Der Barwert einer n Jahre lang unterjährig vorschüssig zahlbaren Zeitrente berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{2}{k}} + \cdots + \frac{1}{k} \cdot v^{n-\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{n \cdot k - 1} v^{\frac{j}{k}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1 - v^n}{d^{(k)}}.\end{aligned}$$

Man sieht, dass sich dieser Barwert auf den vorschüssigen Rentenbarwertfaktor einer jährlich zahlbaren Zeitrente zurückführen lässt, denn

$$\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{d}{d^{(k)}} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}},$$

und für den zugehörigen Endwert gilt entsprechend

$$\ddot{s}_{\overline{n}}^{(k)} = (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{d}{d^{(k)}} \cdot \ddot{s}_{\overline{n}}.$$

Analog ergibt sich für die unterjährig nachschüssig zahlbare Zeitrente ein Barwert von

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}}^{(k)} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n \cdot k} v^{\frac{j}{k}} \\ &= \frac{1 - v^n}{i^{(k)}} \\ &= \frac{i}{i^{(k)}} \cdot a_{\overline{n}}\end{aligned}$$

sowie ein Endwert von

$$\dot{s}_{\overline{n}}^{(k)} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{i}{i^{(k)}} \cdot s_{\overline{n}}.$$

Auch für unterjährig zahlbare Renten sind die Formeln miteinander verknüpft via

$$\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = (1+i)^{\frac{1}{k}} \cdot a_{\overline{n}}^{(k)}$$

bzw.

$$a_{\overline{n}}^{(k)} = v^{\frac{1}{k}} \cdot \dot{a}_{\overline{n}}^{(k)}.$$

Wie bei der stetigen Verzinsung auch, führt der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ zu einer stetig zahlbaren Zeitrente bzw. **stetigen Rente**. Der zugehörige Zahlungsstrom wäre dann jedoch nicht mehr diskret, sondern ebenfalls stetig. In der Praxis werden die Formeln für stetige Renten bereits als Approximation bei wöchentlicher Rentenzahlung ($k = 52$) verwendet.

Der Barwert einer n Jahre lang stetig zahlbaren Renten wird mit $\bar{a}_{\overline{n}}$ notiert. Er ergibt sich als Grenzwert

$$\bar{a}_{\overline{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\overline{n}}^{(k)}$$

und lässt sich berechnen als

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{n}} &= \int_0^n v^t \, dt = \int_0^n e^{-\delta \cdot t} \, dt \\ &= \left[-\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot t} \right]_{t=0}^{t=n} \\ &= -\frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot n} + \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{\delta},\end{aligned}$$

so dass man schließlich die folgende Darstellung erhält:

$$\bar{a}_{\overline{n}} = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

Dieser Barwert steht zum vorschüssigen und nachschüssigen Rentenbarwertfaktor in folgender Beziehung:

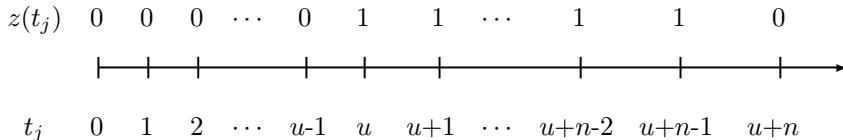
$$\bar{a}_{\overline{n}} = \frac{d}{\delta} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} = \frac{i}{\delta} \cdot a_{\overline{n}}.$$

Für den Endwert einer stetigen Rente gilt:

$$\begin{aligned}\bar{s}_{\overline{n}} &= (1 + i)^n \cdot \bar{a}_{\overline{n}} \\ &= \frac{d}{\delta} \cdot \ddot{s}_{\overline{n}} = \frac{i}{\delta} \cdot s_{\overline{n}}.\end{aligned}$$

4.2.2.4 Aufgeschobene Zeitrenten

Beginnt die Rentenzahlung nicht sofort, sondern erst nach einer festgelegten Anzahl von Jahren, so spricht man von einer aufgeschobenen Zeitrente. Alle bislang vorgestellten Renten können zusätzlich mit einer Aufschubdauer versehen werden. Das Vorgehen wird am Beispiel einer n Jahre lang vorschüssigen zahlbaren Rente illustriert. Die Aufschubdauer betrage u Jahre.



Der Barwert dieser aufgeschobenen Zeitrente ist:

$$\begin{aligned} {}_{u|}\ddot{a}_{\overline{n}} &= v^u + v^{u+1} + \cdots + v^{u+n-1} \\ &= v^u \cdot (1 + v + \cdots + v^{n-1}) \\ &= v^u \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} . \end{aligned}$$

Die Auswirkung der Aufschubdauer auf den Barwert besteht lediglich in dem zusätzlichen Faktor v^u , welcher die Diskontierung über die u -jährige Aufschubdauer repräsentiert.

Der Barwert der aufgeschobenen Zeitrente lässt sich auch als Differenz zweier nicht aufgeschobener Zeitrenten darstellen:

$$\begin{aligned} {}_{u|}\ddot{a}_{\overline{n}} &= v^u + v^{u+1} + \cdots + v^{u+n-1} \\ &= \sum_{j=u}^{u+n-1} v^j \\ &= \sum_{j=0}^{u+n-1} v^j - \sum_{j=0}^{u-1} v^j \\ &= \ddot{a}_{\overline{n+u}} - \ddot{a}_{\overline{u}} . \end{aligned}$$

Analog werden die Barwerte ${}_{u|}\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)}$ oder ${}_{u|}\bar{a}_{\overline{n}}$ definiert, ebenso die entsprechenden Barwerte für nachschüssige aufgeschobene Zeitrenten. Die Berechnung von Endwerten aufgeschobener Zeitrenten, also bspw. ${}_{u|}s_{\overline{n}}$, ist theoretisch möglich, aber eher unüblich.

4.2.2.5 Ewige Renten

Wenn der Zahlungshorizont n immer länger wird, d.h. $n \rightarrow \infty$, wird die Zeitrente offensichtlich immer weiter gezahlt und endet nicht. Daher nennt man diese Art der Rente auch **ewige Rente**.

Für $i > 0$ (d.h. $v < 1$) ergeben sich durch Grenzübergang die Barwerte

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\overline{n}} = \frac{1}{d}$$

und

$$a_{\overline{\infty}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}} = \frac{1}{i} .$$

Falls $i \leq 0$, konvergieren die Terme $\ddot{a}_{\overline{n}}$ und $a_{\overline{n}}$ nicht, so dass die Barwerte der ewigen Renten nicht angegeben werden können bzw. unendlich sind.

Unabhängig vom Zinssatz i konvergieren die Endwerte \ddot{s}_n und s_n für $n \rightarrow \infty$ nie, so dass die Endwerte ewiger Renten nicht angegeben werden können bzw. stets unendlich sind (was durchaus intuitiv nachvollziehbar erscheint).

Für unterjährige ewige Renten hat man

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{\infty}}^{(k)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{1}{d^{(k)}} , \\ a_{\overline{\infty}}^{(k)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{1}{i^{(k)}} ,\end{aligned}$$

und für die stetige ewige Rente

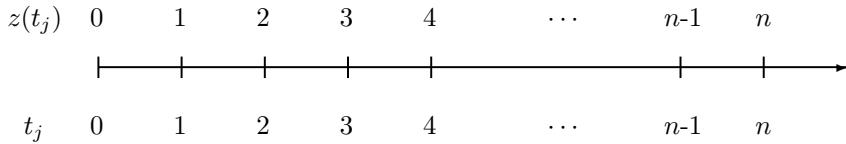
$$\bar{a}_{\overline{\infty}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{\overline{n}} = \frac{1}{\delta} .$$

Eine Konsequenz ewiger Renten ist, dass das zugrunde liegende Kapital nicht aufgezehrt werden darf, was wiederum bedeutet, dass sämtliche Rentenzahlungen allein aus der Verzinsung des Kapitals finanziert werden. Ein typisches Beispiel derartiger Konstrukte sind Stiftungen, deren Vermögen stets unangetastet bleibt.

4.2.2.6 Steigende Zeitrenten

Im Folgenden werden steigende Zeitrenten betrachtet, also Zeitrenten, deren jährlicher Rentenzahlungsbetrag im Laufe der Zeit steigt. Dabei kann man zwischen arithmetisch steigenden und geometrisch steigenden Zeitrenten unterscheiden.

Bei einer **arithmetisch steigenden Zeitrente** wächst der anfängliche Jahresbetrag der Höhe 1 jedes Jahr um eben diesen Wert. Bspw. sieht der Zahlungsstrom einer arithmetisch steigenden, jährlich nachschüssig zahlbaren Zeitrente der anfänglichen Höhe 1 wie folgt aus:



Der jeweils am Ende eines Jahres zu zahlende Betrag steigt, beginnend bei 1, jedes Jahr um diesen Wert, so dass im letzten Jahr eine Rente in Höhe von n zu zahlen ist.

Der Barwert dieser steigenden Zeitrente ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} &= v + 2 \cdot v^2 + \cdots + n \cdot v^n \\ &= \sum_{j=1}^n (j \cdot v^j) . \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks betrachtet man zunächst den um ein Jahr aufgezinsten Wert $(1+i) \cdot (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}}$. Dieser entspricht

$$\begin{aligned} (1+i) \cdot (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} &= 1 + 2 \cdot v + \cdots + n \cdot v^{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^n (j \cdot v^{j-1}) . \end{aligned}$$

Eine einfache, geschlossene Formel für $(I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}}$ erhält man nun durch Differenzbildung der beiden voranstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (1+i) \cdot (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} - (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} &= \sum_{j=1}^n (j \cdot v^{j-1}) - \sum_{j=1}^n (j \cdot v^j) \Leftrightarrow \\ i \cdot (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} &= \sum_{j=1}^n (j \cdot v^{j-1}) - \sum_{j=0}^{n-1} (j \cdot v^j) - n \cdot v^n \Leftrightarrow \\ i \cdot (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} &= \sum_{j=0}^{n-1} ((j+1) \cdot v^j) - \sum_{j=0}^{n-1} (j \cdot v^j) - n \cdot v^n \Leftrightarrow \\ i \cdot (I_{\bar{n}}|a)_{\bar{n}} &= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} v^j}_{=\ddot{a}_{\bar{n}}} - n \cdot v^n . \end{aligned}$$

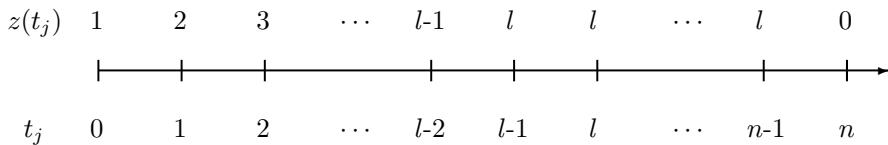
Somit ergibt sich:

$$(I_{\overline{n}} a)_{\overline{n}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n \cdot v^n}{i} .$$

Sofern die Rentenzahlung vorschüssig erfolgt, lautet der zugehörige Barwert

$$(I_{\overline{n}} \ddot{a})_{\overline{n}} = (1+i) \cdot (I_{\overline{n}} a)_{\overline{n}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n \cdot v^n}{d} .$$

Beispiel 10. Wir betrachten eine n Jahre lang vorschüssig zahlbare Zeitrente, welche arithmetisch steigt, jedoch nicht über den gesamten Zeitraum von n Jahren, sondern nur innerhalb der ersten l Jahren (mit $1 \leq l \leq n$). Während der verbleibenden Rentenzahlungsdauer bleibt die nach l Jahren erreichte Rente konstant.

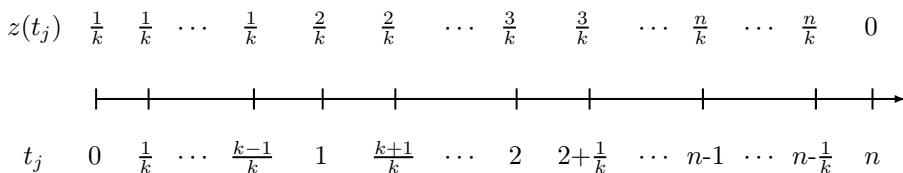


Leiten Sie eine Formel für den Barwert dieser temporär steigenden Zeitrente her.

Der hier gesuchte Barwert wird üblicherweise mit $(I_{\overline{n}} \ddot{a})_{\overline{n}}$ notiert, und er ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (I_{\overline{l}} \ddot{a})_{\overline{n}} &= \underbrace{1 + 2 \cdot v^2 + \cdots + l \cdot v^{l-1}}_{= (I_{\overline{l}} \ddot{a})_{\overline{l}}} + \underbrace{l \cdot v^l + l \cdot v^{l+1} + \cdots + l \cdot v^{n-1}}_{= l \cdot {}_{\overline{l}} \ddot{a}_{\overline{n-l}}} \\ &= (I_{\overline{l}} \ddot{a})_{\overline{l}} + l \cdot {}_{\overline{l}} \ddot{a}_{\overline{n-l}}. \end{aligned}$$

Wird die steigende Zeitrente unterjährig gezahlt, so ergibt sich bspw. folgender Zahlungsstrom:



Die nach- bzw. vorschüssigen Barwerte lassen sich mittels der Barwerte für jährliche, nachschüssige Zahlungen darstellen:

$$\left(I_{\overline{n}} a^{(k)} \right)_{\overline{n}} = \frac{i}{i^{(k)}} \cdot (I_{\overline{n}} a)_{\overline{n}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n \cdot v^n}{i^{(k)}}$$

und

$$\left(I_{\overline{n}} \ddot{a}^{(k)} \right)_{\overline{n}} = (1+i)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(I_{\overline{n}} a^{(k)} \right)_{\overline{n}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n \cdot v^n}{d^{(k)}}.$$

Bei einer **geometrisch steigenden Zeitrente** steigt der jährliche Rentenzahlungsbetrag, beginnend bei 1, jedes Jahr um einen festgelegten Steigerungssatz r . Bspw. bestimmt sich der Barwert einer n Jahre lang vorschüssig zahlbaren, geometrisch steigenden Zeitrente wie folgt:

$$\begin{aligned} \% (I_{\overline{n}} \ddot{a})_{\overline{n}} &= 1 + (1+r) \cdot v + (1+r)^2 \cdot v^2 + \cdots + (1+r)^{n-1} \cdot v^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1+r)^j \cdot v^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1+r}{1+i} \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{v}^j. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet \tilde{v} den Diskontfaktor zu dem neuen Zinssatz $\tilde{i} := \frac{i-r}{1+r}$, so dass

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{1+\tilde{i}}}_{=\tilde{v}} &= \frac{1+r}{1+i} \Leftrightarrow \\ \tilde{i} &= \frac{1+i}{1+r} - 1 \Leftrightarrow \\ \tilde{i} &= \frac{i-r}{1+r}. \end{aligned}$$

Man sieht, dass der gesuchte Barwert einer n -jährigen, vorschüssigen, geometrisch steigenden Rente mit Steigerungssatz r und Zinssatz i mit dem Barwert einer n Jahre lang vorschüssig zahlbaren, konstanten Zeitrente zum Zinssatz \tilde{i} übereinstimmt, d.h.

$$\% (I_{\overline{n}} \ddot{a})_{\overline{n}} = \tilde{i} \ddot{a}_{\overline{n}}.$$

Betrachtet man stetige Renten, so kann man danach unterscheiden, ob die Steigerung jährlich erfolgt oder diese ebenfalls stetig wächst. Der Barwert einer jährlich steigenden, stetigen Zeitrente bestimmt sich als

$$(I_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}} = \frac{i}{\delta} \cdot (I_{\bar{n}} a)_{\bar{n}} = \frac{\ddot{a}_{\bar{n}} - n \cdot v^n}{\delta} .$$

Hingegen ist der Barwert einer kontinuierlich steigenden, stetigen Zeitrente gegeben durch

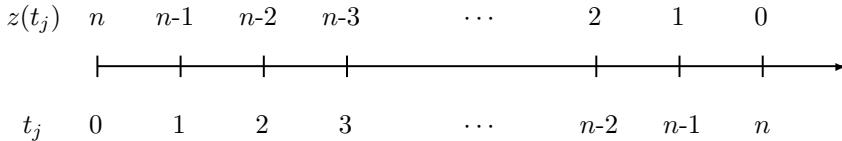
$$(\bar{I}_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}} = \int_0^{\bar{n}} (t \cdot e^{-\delta \cdot t}) dt = \frac{\bar{a}_{\bar{n}} - n \cdot v^n}{\delta} .$$

Abschließend sei angemerkt, dass $\ddot{a}_{\bar{n}} > \bar{a}_{\bar{n}}$, falls der Zinssatz i positiv ist, und in diesem Fall auch $(I_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}} > (\bar{I}_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}}$ gilt.

Sofern klar ist, wie lange die Zeitrente steigt (oftmals nämlich genauso lange wie die Laufzeit der Rente), verwendet man häufig eine Notation der Art $(I\ddot{a})_{\bar{n}}$, so dass der Zeitindex am Buchstaben „I“ vereinfachend entfällt.

4.2.2.7 Fallende Zeitrenten

Es ist ebenfalls möglich, dass eine Zeitrente während (eines Teils) ihrer Zahlungsdauer fällt, wobei das Absinken wiederum linear oder prozentual erfolgen kann.



Der Barwert einer n Jahre lang, vorschüssig zahlbaren Zeitrente, welche jährlich um den Wert 1 fällt und bis zum letzten Jahr auf den Betrag 1 sinkt, lautet

$$\begin{aligned} (D_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}} &= n + (n-1) \cdot v + \dots + v^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} ((n-j) \cdot v^j) \\ &= \sum_{j=1}^n ((n+1-j) \cdot v^{j-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \cdot \sum_{j=1}^n v^{j-1} - \sum_{j=1}^n (j \cdot v^{j-1}) \\
&= (n+1) \cdot \ddot{a}_{\bar{n}} - (I_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}} .
\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt bei nachschüssiger Rentenzahlung ein Barwert von

$$(D_{\bar{n}} a)_{\bar{n}} = (n+1) \cdot a_{\bar{n}} - (I_{\bar{n}} a)_{\bar{n}} .$$

Die erhaltenen Formeln spiegeln den kanonischen Ansatz wider, die arithmetisch fallende Rente als Differenz einer konstanten und einer arithmetisch steigenden Rente darzustellen.

4.2.2.8 Zusammenfassung

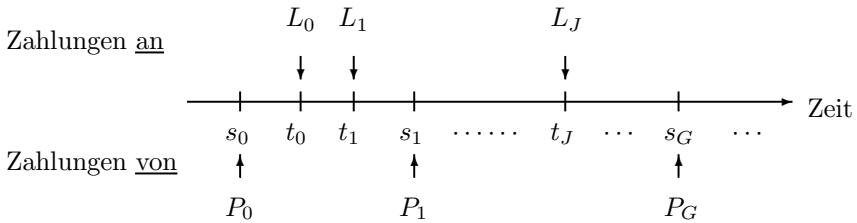
Die nachfolgende Tabelle enthält noch einmal eine Übersicht über die wichtigsten normierten Barwertgrößen:

Zahlungsstrom	Barwert	Symbol
Einmalzahlung nach n Jahren	v^n	v^n
n -jährige vorschüssige Zeitrente	$\frac{1-v^n}{d}$	$\ddot{a}_{\bar{n}}$
n -jährige vorschüssige unterjährig zahlbare Zeitrente	$\frac{1-v^n}{d^{(k)}}$	$\ddot{a}_{\bar{n}}^{(k)}$
n -jährige stetige Zeitrente	$\frac{1-v^n}{\delta}$	$\overline{a}_{\bar{n}}$
aufgeschobene n -jährige vorschüssige Zeitrente	$v^u \cdot \ddot{a}_{\bar{n}}$	$u \ddot{a}_{\bar{n}}$
ewige vorschüssige Rente	$\frac{1}{d}$	\ddot{a}_{∞}
n -jährige vorschüssige arithmetisch steigende Zeitrente	$\frac{\dot{a}_{\bar{n}} - n \cdot v^n}{d}$	$(I_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}}$
n -jährige vorschüssige geometrisch steigende Zeitrente	$\tilde{\ddot{a}}_{\bar{n}}$	$\% (I_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}}$
n -jährige vorschüssige arithmetisch fallende Zeitrente	$(n+1) \cdot \ddot{a}_{\bar{n}} - (I_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}}$	$(D_{\bar{n}} \ddot{a})_{\bar{n}}$

4.2.3 Rendite von Zahlungsströmen

Zahlungsströme im Kontext von Finanztransaktionen bestehen im Allgemeinen aus einer Reihe von Zahlungen P_g (P wie „Prämie“), die von dem Investor (z.B. einer Privatperson oder einem Unternehmen) zu bestimmten Zeitpunkten s_g ($g = 0, \dots, G$) getätigt werden, und einer Reihe von Zahlungen L_j (L wie „Leistung“) an den Investor zu Zeitpunkten t_j ($j = 0, \dots, J$). Dabei können manche der Zeitpunkte s_g durchaus mit einigen Zeitpunkten t_j übereinstimmen, jedoch ist dies nicht notwendigerweise der Fall.

Die resultierenden Zahlungen haben dann bspw. die folgende Gestalt:



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $s_0 = t_0 = 0$. Außerdem wird zur Vereinfachung der Notation der Begriff der **Finanztransaktion** eingeführt, welche durch die Angabe des Paares (\mathbf{P}, \mathbf{L}) von Prämien und Leistungen definiert wird. Dabei bezeichnet

$$\mathbf{P} = \{(P_g, s_g) \mid g = 0, \dots, G\}$$

den Zahlungsstrom der Prämien und

$$\mathbf{L} = \{(L_j, t_j) \mid j = 0, \dots, J\}$$

den Zahlungsstrom der Leistungen. Als Paar zweier Zahlungsströme ist eine Finanztransaktion offensichtlich selbst wieder ein Zahlungsstrom.

Bei einem gegebenen effektiven Zinssatz i ist der Barwert der Prämien (wegen $s_0 = 0$)

$$PV_{\mathbf{P}}(i) = CF_{\mathbf{P}}(0; i) = \sum_{g=0}^G P_g \cdot v^{s_g}$$

und der Barwert der Leistungen (wegen $t_0 = 0$)

$$PV_{\mathbf{L}}(i) = CF_{\mathbf{L}}(0; i) = \sum_{j=0}^J L_j \cdot v^{t_j} .$$

Zur Bewertung, wie profitabel eine Finanztransaktion ist oder welche von mehreren zur Auswahl stehenden Finanztransaktionen vorzuziehen ist, berechnet man die **Rendite** – oder auch den **internen Zinsfuß** – der jeweiligen Finanztransaktion(en) und vergleicht diese ggf. miteinander. Abschließend wählt man diejenige Transaktion mit der höchsten Rendite.

Die Rendite der Finanztransaktion (\mathbf{P}, \mathbf{L}) entspricht demjenigen Zinssatz i_Z , welcher sich als Lösung der folgenden Bestimmungsgleichung ergibt:

$$PV_{\mathbf{P}}(i_Z) \stackrel{!}{=} PV_{\mathbf{L}}(i_Z) . \quad (4.10)$$

Das bedeutet, die Rendite ist derjenige Zinssatz i_Z , so dass der Barwert der Prämien mit dem Barwert der Leistungen übereinstimmt (wobei $v_Z = \frac{1}{1+i_Z}$):

$$\sum_{g=0}^G P_g \cdot v_Z^{s_g} \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^J L_j \cdot v_Z^{t_j} .$$

Wie bereits von Gleichung (4.9) bekannt, reicht es aus, die Gleichheit zum Zinssatz i nur zu einem Zeitpunkt ($t = 0$) zu überprüfen, da die beiden Zahlungsströme dann zu jedem Zeitpunkt denselben Wert besitzen.

Die übereinstimmenden Barwerte sind gleichbedeutend mit der Äquivalenz der beiden Zahlungsströme von Prämien und Leistungen. Dieses **Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik** wird uns in Kap. 9 bei der Berechnung des Deckungskapitals noch einmal begegnen.

Man beachte, dass die Bestimmungsgleichung (4.10) mehrere Lösungen besitzen kann (inklusive negativer und komplex-wertiger Lösungen). In vielen praktischen Anwendungen existiert meist eine eindeutige, positive Lösung.

Beispiel 11. Bei einem effektiven Zinssatz von $i = 4\%$ p.a. hat ein Schuldner die folgenden Verpflichtungen:

- Zahlung von 1.000 EUR nach drei Jahren,
- Zahlung von 2.000 EUR nach fünf Jahren,
- Zahlung von 3.000 EUR nach sechs Jahren.

Der Schuldner beabsichtigt, anstelle dieser drei Zahlungen seine Schulden mit einer einzigen Zahlung nach vier Jahren zu tilgen. Wie hoch ist diese einmalige Zahlung?

Der Barwert der Verpflichtungen (hier: Prämien) ist

$$\begin{aligned} PV_{\mathbf{P}}(0,04) &= 1.000 \cdot \frac{1}{1,04^3} + 2.000 \cdot \frac{1}{1,04^5} + 3.000 \cdot \frac{1}{1,04^6} \\ &= 889,00 + 1.643,85 + 2.370,94 \\ &= 4.903,79 . \end{aligned}$$

Der Wert des Prämien-Zahlungsstroms nach vier Jahren beträgt

$$CF_P(4; 0,04) = PV_P(0,04) \cdot 1,04^4 = 5.736,74 ,$$

d.h., eine Zahlung nach vier Jahren i.H.v. 5.736,74 EUR ist äquivalent zur Zahlung der drei Teilbeträge zu den genannten Zeitpunkten.

Beispiel 12. Person A leiht Person B 1.000 EUR. Die Rückzahlung erfolgt über die nächsten fünf Jahre:

- 200 EUR jeweils am Ende der ersten beiden Jahre,
- 300 EUR jeweils am Ende der darauffolgenden drei Jahre.

Welche Rendite erzielt Person A durch den Verleih des Geldes?

Die Berechnung der gesuchten Rendite i erfolgt durch Lösen der folgenden Bestimmungsgleichung (Transaktion aus Sicht von Person A):

$$1.000 = 200 \cdot (v + v^2) + 300 \cdot (v^3 + v^4 + v^5) .$$

Setzt man

$$f(i) := 200 \cdot (v + v^2) + 300 \cdot (v^3 + v^4 + v^5) - 1.000$$

als Funktion des Zinssatzes i an, so ist also eine Nullstelle von f gesucht, denn für die Rendite i gilt $f(i) = 0$.

Nun ist $f(0) = 300$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = -1.000$. Da $f(i)$ für $i > 0$ eine stetige und monoton fallende Funktion ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein Wert $i_Z > 0$, so dass $f(i_Z) = 0$.

Versuchsweises Einsetzen verschiedener Werte für i liefert $f(0,08) = 19,487$ und $f(0,09) = -9,016$. Eine näherungsweise Lösung der Gleichung erhält man durch lineare Interpolation. Dazu nimmt man an, dass f für $i_1 \leq i \leq i_2$, wobei $f(i_1) > 0$ und $f(i_2) < 0$, linear ist. Den Wert i_Z erhält man nun durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{i_Z - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{f(i_Z) - f(i_1)}{f(i_2) - f(i_1)} .$$

In diesem Fall folgt aus

$$\frac{i_Z - 0,08}{0,09 - 0,08} = \frac{0 - 19,487}{-9,016 - 19,487} ,$$

dass $i_Z \approx 0,0868$, d.h., die jährliche Rendite dieser Transaktion beträgt ungefähr 8,68% p.a..

Wie das vorangegangene Beispiel gezeigt hat, kann die Bestimmung der Rendite durchaus schwierig sein. Es ist insbesondere wichtig, geeignete Werte zu finden, zwischen denen dann ggf. linear interpoliert werden kann. Treten mehrere Vorzeichenwechsel auf, ist die Rendite möglicherweise nicht eindeutig.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei noch die Lösung des eingangs aufgeführten Beispiels 7 nachgeliefert: Die Rendite i_A des ersten Rückzahlungsschemas erhält man aus der Bestimmungsgleichung

$$-10.000 = 1.100 \cdot {}^{i_A}a_{\overline{10}} ,$$

diejenige i_B des zweiten Rückzahlungsschemas aus dem Ansatz

$$-10.000 = 100 \cdot {}^{i_B}a_{\overline{10}} + 10.000 \cdot \left(\frac{1}{1+i_B} \right)^{10} .$$

Wegen $i_A \approx 1,77\%$ und $i_B = 1\%$ würde sich die Bank für das erste Rückzahlungsschema entscheiden, da sie – anstelle des endfälligen Darlehens – bereits früher Tilgungsraten für den Kredit erhält und dadurch eine höhere Rendite erzielt.

4.3 Rechnungszins einer Versicherung

Bei einer Lebensversicherung handelt es sich im Grunde ebenfalls um eine Finanztransaktion, bestehend aus einem Prämien- und einem Leistungszahlungsstrom. Im Unterschied zur vorangegangenen, deterministischen Definition ist jedoch ungewiss, wann und ob überhaupt eine Zahlung erfolgt. Diese Unsicherheit stiftende Einflussgröße der Sterblichkeit werden wir im nächsten Kapitel eingehend diskutieren.

Lebensversicherungen werden auf Basis eines festgelegten Zinssatzes, dem sog. **Rechnungszins**, kalkuliert. Der Lebensversicherer garantiert diesen bei Abschluss vereinbarten Zinssatz über die gesamte Versicherungsdauer, d.h., der Rechnungszins darf während der Vertragslaufzeit nicht mehr geändert werden. Daher wird der Rechnungszins (fälschlicherweise) oft auch als Garantiezins bezeichnet. Die vom VU ausgesprochene Zinsgarantie besteht allerdings darin, dass nicht die gesamten, während der Laufzeit des Vertrags vom Kunden geleisteten Beiträge mindestens mit diesem Zinssatz verzinst werden, sondern nur die in den Beiträgen enthaltenen Sparanteile. Was das genau ist, werden wir in Kap. 9 sehen.

Zur Erfüllung des eingegangenen Leistungsversprechens bildet das VU aus den erhaltenen Prämien eine Reserve in Form der **Deckungsrückstellung**.

Die Einzelheiten dazu werden wir ebenfalls in Kap. 9 kennen und verstehen lernen, doch wir benötigen den Begriff bereits hier und nehmen vorweg, dass die Deckungsrückstellung auf Barwertbetrachtungen basiert.

Der Rechnungszins fließt sowohl in die Prämienberechnung als auch in die Berechnung besagter Deckungsrückstellung ein, aber er ist de jure nur für die Reserveberechnung relevant. Grundsätzlich kann der Zinssatz für die Prämienberechnung also von demjenigen, der bei der Reserveberechnung verwendet wird, abweichen. Gemäß § 138 VAG müssen jedoch auch die Prämien derart kalkuliert werden, dass „das Lebensversicherungsunternehmen allen seinen Verpflichtungen nachkommen und insbesondere für die einzelnen Verträge ausreichende Deckungsrückstellungen bilden kann“. Bislang stimmt der im Rahmen der Prämienkalkulation verwendete Zinssatz üblicherweise mit dem Rechnungszins überein.

Bis Mitte des Jahres 1994 mussten Versicherungstarife und die zugehörigen AVB vom **Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen** (kurz: **BAV**) – einer Vorgängerbehörde der BaFin – vorab genehmigt werden. Dadurch wurde zugleich auch der angesetzte Rechnungszins mit abgesegnet. Aufgrund der im Jahr 1994 erfolgten **Deregulierung** sind Versicherungstarife seitdem jedoch nicht mehr genehmigungspflichtig, sondern nur noch vorlagepflichtig (indem die Mitteilung nach § 143 VAG eingereicht wird). Übrigens: Verträge zu regulierten Tarifen, d.h. solche, die vor dem Stichtag 29. Juli 1994 abgeschlossen wurden, bilden gemäß § 336 VAG (vormals § 11c VAG a.F.) den sog. **Altbestand**. Verträge zu deregulierten Tarifen, also mit einem Vertragsabschluss nach dem 28. Juli 1994, zählen entsprechend zum **Neubestand**. Den **Zwischenbestand** bilden Verträge, die im Übergangszeitraum vom 29.07.1994 bis 31.12.1994 abgeschlossen wurden. Grundsätzlich zählen diese zum Neubestand; sofern sie aber auf denselben Rechnungsgrundlagen und genehmigten Bedingungen wie der Altbestand basieren, werden sie diesem zugeordnet und unterliegen dann dem älteren Aufsichtsrecht.

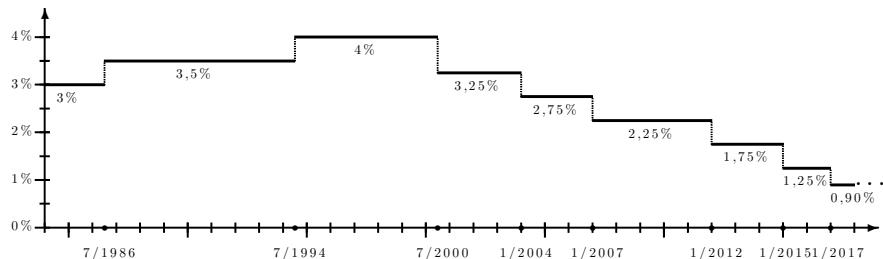
Die rechtlichen Grundlagen bzgl. des Rechnungszinses finden sich seit der Deregulierung in § 2 DeckRV im Zusammenspiel mit § 88 VAG. Letzterer ermächtigt das Bundesministerium für Finanzen, bei Versicherungsverträgen mit Zinsgarantie Höchstwerte für den Rechnungszins festzusetzen. In der Deckungsrückstellungsverordnung wird der Höchstzinssatz dann konkret genannt.

Beachtend, dass die Deckungsrückstellung aus einer Barwertbildung heraus entsteht, beruht die Rechnungszins-Beschränkung nach oben auf der am Ende von Abschn. 4.2.2.2 erwähnten Tatsache, dass Barwerte niedriger sind, je höher der eingehende (positive) Zinssatz ist.

Zur Gewährleistung, dass eine ausreichend hohe Reserve für den einzelnen Versicherungsvertrag zur Verfügung steht, wird der anzusetzende Zinssatz folglich durch den in § 2 DeckRV aufgeführten Höchstzinssatz begrenzt. Man spricht daher auch oft vom **Höchstrechnungszins**. Prinzipiell kann ein VU bei der Reserveberechnung auch einen niedrigeren als den zugelassenen Höchstzins verwenden, jedoch wäre die damit berechnete Reserve dann höher als gesetzlich notwendig, so dass dies in praxi eher selten auftritt.

Die Bemessung des Höchstzinssatzes wurde bislang in § 65 VAG a.F. erläutert. Die Spezifikation ist inzwischen zwar entfallen, dennoch sei die Regelung hier noch einmal erwähnt: Danach orientiert sich der Höchstzinssatz an der Umlaufrendite von auf Euro lautenden Staatsanleihen, d.h. insbesondere, dass nicht nur deutsche Staatsanleihen, sondern sämtliche Staatsanleihen des Euroraumes in die Betrachtung mit einfließen. Dazu wird der Durchschnitt über Euro-Staatsanleihen von höchster Bonität (AAA-Rating) und mit einer Laufzeit von 10 Jahren (welches der Laufzeit von festverzinslichen Wertpapieren in der Neuanlage von Lebensversicherern entspricht) gebildet. Um die Langfristigkeit von Lebensversicherungsverträgen widerzuspiegeln, erfolgt die Durchschnittsbildung ebenfalls über 10 Jahre. Der Höchstrechnungszins darf dann höchstens „60% der durchschnittlichen Rendite 10-jähriger europäischer Staatsanleihen mit höchster Bonität der vorhergehenden 10 Jahre“ betragen (vgl. DAV (2011)).

Die nachfolgende Grafik gibt eine Übersicht über die Entwicklung des (Höchst)Rechnungszinses seit 1984.



Die vom VU gegebene Zinsgarantie hat in den vergangenen Jahren aufgrund des sinkenden Zinsniveaus dazu geführt, dass Versicherer teilweise kaum in der Lage sind, die Garantieverzinsung zu erwirtschaften. So haben die meisten Versicherer einen nicht unerheblichen Anteil Verträge in ihrem Bestand, die einen Rechnungszins von 4% aufweisen. Der aktuelle, am Kapitalmarkt erzielbare Zinsertrag liegt jedoch seit längerem unter dieser Marke, so dass die VU bei diesen Verträgen Geldmittel zuschießen müssen.

4.4 Übungen

4.4.1 Aufgaben

Übung 1. 70er-Regel

- Zeigen Sie, dass bei zusammengesetzter Verzinsung mit einem effektiven Zinssatz von $i = \frac{P}{100}$ p.a. es ungefähr $\frac{70}{P}$ Jahre dauert, bis sich ein Kapital verdoppelt.
- Leiten Sie eine entsprechende Faustregel für den Zeitraum her, der benötigt wird, damit sich das Kapital verdreifacht.

Übung 2. Effektiv- und Nominalzins

- Berechnen Sie für einen nominalen, vierteljährlich zahlbaren Zinssatz $i^{(4)}$ in Höhe von 5% p.a. den zugehörigen effektiven Zinssatz i p.a.
- Berechnen Sie für eine konstante Zinsintensität $\delta = 5\%$ p.a. den zugehörigen effektiven Zinssatz i p.a.

Übung 3. Zeigen Sie, dass die Zinsintensität δ approximiert werden kann durch das arithmetische Mittel aus effektivem Zinssatz i und effektivem Diskontsatz d , d.h.

$$\delta \approx \frac{i + d}{2} .$$

Übung 4. Gegeben sei die Zinsintensität

$$\delta(t) = 0,06 \cdot 0,93303^t .$$

Bestimmen Sie den nach zehn Jahren akkumulierten Betrag eines Investments zum Zeitpunkt $t = 0$ in Höhe von 1.000 EUR.

Übung 5. Berechnen Sie für einen effektiven Zinssatz von $i = 10\%$ p.a. den Barwert $a_{\overline{9}}$ sowie den Endwert $\ddot{s}_{\overline{9}}$.

Übung 6. Zeigen Sie, dass der Barwert $\ddot{a}_{\overline{n}}$ bei fester Laufzeit n eine streng monoton fallende Funktion des Zinssatzes i ist (für $i > 0$).

Übung 7. Wir betrachten eine Reihe von Zahlungen i.H.v. jeweils 2 EUR, welche zu den Zeitpunkten $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1\frac{1}{3}, \dots, 19\frac{2}{3}$ und 20 getätigt werden.

- Geben Sie den Barwert dieses Zahlungsstroms formelmäßig an.
- Berechnen Sie den Wert dieses Zahlungsstroms unter Verwendung eines effektiven Zinssatzes von 4% p.a. zu den folgenden Zeitpunkten:
 - $t = 0$
 - $t = 20$

c. $t = 2\frac{1}{3}$

Übung 8. Approximation bei unterjähriger Zahlweise

1. Zeigen Sie, dass die folgende Näherung gilt:

$$\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} \approx \left(1 - d \cdot \frac{k-1}{2k}\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} .$$

2. Zeigen Sie, dass die folgende Näherung gilt:

$$a_{\overline{\infty}}^{(k)} = \left(1 + i \cdot \frac{k-1}{2k}\right) \cdot a_{\overline{\infty}} .$$

Übung 9. Leiten Sie eine Formel für den Barwert $(I_{\overline{\infty}} \ddot{a})_{\overline{\infty}}$ einer ewig arithmetisch steigenden, jährlich vorschüssig zahlbaren (ewigen) Rente her.

Übung 10. Ein Investor zahlt 10.000 EUR an eine Bank. Im Gegenzug erhält er während der nächsten 20 Jahre eine jährlich vorschüssig zahlbare Rente. Die Rente soll jedes Jahr um 5% steigen (erstmals nach einem Jahr). Berechnen Sie unter Annahme eines Zinssatzes von 3% p.a. die Höhe der ersten Rentenzahlung.

Übung 11. Ein Schuldner soll ein Darlehen entsprechend der folgenden Zahlungen tilgen: 6.280 EUR nach 4 Jahren, 8.460 EUR nach 7 Jahren und 7.350 EUR nach 13 Jahren. Der effektive Jahreszins betrage $i = 8\%$ p.a. Der Schuldner bietet nun Folgendes an:

1. Anstelle der drei Zahlungen eine einmalige Zahlung i.H.v. x EUR nach fünf Jahren.
2. Rückzahlung des Gesamtbetrags (22.090 EUR) durch eine einmalige Zahlung zu einem zu bestimmenden Zeitpunkt $t > 0$.

Ermitteln Sie die Höhe der Zahlung x sowie den Zeitpunkt t .

Übung 12. Gegeben seien $\ddot{a}_{\overline{n}} = 7,029584$ und $\ddot{a}_{\overline{2n}} = 10,934563$. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Werte für den Zinssatz i und die Laufzeit n .

Übung 13. Betrachten Sie folgenden Sparplan: Zehn Einzahlungen i.H.v. jeweils 1.000 EUR (zahlbar jährlich vorschüssig) und zehn jährliche Rückzahlungen i.H.v. jeweils 2.000 EUR, beginnend ein Jahr nach der letzten Einzahlung. Schreiben Sie Bestimmungsgleichung für die Rendite dieser Transaktion auf und berechnen Sie die Rendite.

Übung 14. Geometrisch fallende Zeitrente

Leiten Sie eine Formel für den Barwert einer n Jahre lang vorschüssig zahlbaren Zeitrente her, welche mit einer Zahlung der Höhe 1 im ersten Jahr beginnt und anschließend jährlich um $r \cdot 100\%$ sinkt.

4.4.2 Lösungen

Lösung 1. 70er-Regel

1. Die aufzustellende Gleichung lautet

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right)^t = 2 .$$

Diese ist äquivalent zu

$$t = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{P}{100}\right)} .$$

Eine Taylor-Entwicklung von $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ führt zu

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \cdot x^j$$

und somit zu der linearen Approximation

$$\ln(1+x) \approx x ,$$

so dass

$$t \approx \frac{\ln 2}{\frac{P}{100}} = \frac{100 \cdot 0,69315}{P} = \frac{69,315}{P} \approx \frac{70}{P} .$$

Hinweis: Nähert man $\log 2$ durch den Wert 0,69 an, so erhält man die 69er-Regel. Anstelle der hergeleiteten Faustregel ist in der Praxis die **72er-Regel** etabliert, also die Näherung $\frac{72}{P}$. Der Grund hierfür liegt vermutlich darin, dass die Zahl 72 viele Teiler ($P = 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12$) besitzt, welche in den Bereich relevanter Prozentzahlen fallen.

2. Der Ansatz

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right)^t = 3$$

führt analog zum vorangegangenen Aufgabenteil zu der Faustregel

$$t \approx \frac{\ln 3}{\frac{P}{100}} = \frac{109,861}{P} \approx \frac{110}{P} .$$

Lösung 2. Effektiv- und Nominalzins

1. Die Gleichung

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4$$

ist nach i aufzulösen. Man erhält

$$i = 1,0125^4 - 1 = 0,050945 = 5,0945\% .$$

2. Auflösen der Gleichung

$$1 + i = e^\delta$$

nach i liefert

$$i = e^{0,05} - 1 = 0,051271 = 5,1271\% .$$

Lösung 3. Eine Taylor-Approximation 2. Ordnung der Exponentialfunktion e^x (um den Entwicklungspunkt $\delta_0 = 0$) liefert einerseits

$$1 + i = e^\delta \approx 1 + \delta + \frac{1}{2} \cdot \delta^2$$

und andererseits

$$1 - d = v = \frac{1}{1 + i} = e^{-\delta} \approx 1 - \delta + \frac{1}{2} \cdot \delta^2 .$$

Folglich ist

$$i + d = (1 + i) - (1 - d) \approx 2 \cdot \delta ,$$

was schließlich zu dem gewünschten Ergebnis

$$\delta \approx \frac{i + d}{2}$$

führt.

Lösung 4. Der akkumulierte Wert berechnet sich als

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^t \delta(u) \, du \right\} \\ &= 1.000 \cdot \exp \left\{ \int_0^{10} 0,06 \cdot 0,93303^u \, du \right\} \\ &= 1.000 \cdot \exp \left\{ 0,06 \cdot \int_0^{10} 0,93303^u \, du \right\} \\ &= 1.000 \cdot \exp \left\{ 0,06 \cdot \left[\frac{0,93303^u}{\ln 0,93303} \right]_0^{10} \right\} \\ &= 1.000 \cdot \exp \left\{ 0,06 \cdot \frac{0,93303^{10} - 1}{\ln 0,93303} \right\} \\ &= 1.000 \cdot e^{0,4328} \\ &= 1.541,60 . \end{aligned}$$

Lösung 5. Es ist

$$a_{\bar{9}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1,1}\right)^9}{0,1} = 5,7590$$

und

$$\ddot{s}_{\bar{9}} = 1,1 \cdot s_{\bar{9}} = 1,1 \cdot a_{\bar{9}} \cdot 1,1^9 = 5,7590 \cdot 1,1^{10} = 14,9374 .$$

An dieser Stelle sei noch einmal die Idee von Barwert und Endwert anhand eines Bankkontos nahegebracht: Um sicherzustellen, dass am Ende jedes der folgenden neun Jahre jeweils der Betrag 1 vom Konto abgehoben werden kann, muss heute ein Betrag von $a_{\bar{9}} = 5,7590$ auf dem Konto vorhanden sein. Die Summe der Zahlungen ist 9. Zu Beginn wird jedoch weniger benötigt, da zwischenzeitlich Zinsen erwirtschaftet werden, welche den sinkenden Kontostand teilweise ausgleichen. Der Endwert $\ddot{s}_{\bar{9}} = 14,9374$ kommt dadurch zu stande, dass zu Beginn eines jeden der neun Jahre eine Einzahlung i.H.v. von 1 auf das Konto erfolgt und zusätzlich (Zinses)Zinsen anfallen. Das Bankkonto entwickelt sich in den beiden Szenarien wie folgt:

Zeitpunkt	Kontostand (Abhebung)	Kontostand (Einzahlung)
0	5,7590	1
1	$5,7590 \cdot 1,1 - 1 = 5,3349$	$1 \cdot 1,1 + 1 = 2,1$
2	$5,3349 \cdot 1,1 - 1 = 4,8684$	$2,1 \cdot 1,1 + 1 = 3,31$
\vdots	\vdots	\vdots
7	$2,4868 \cdot 1,1 - 1 = 1,7355$	$9,4872 \cdot 1,1 + 1 = 11,4359$
8	$1,7355 \cdot 1,1 - 1 = 0,9091$	$11,4359 \cdot 1,1 + 1 = 13,5795$
9	$0,9091 \cdot 1,1 - 1 = 0$	$13,5795 \cdot 1,1 = 14,9374$

Würden übrigens keine Zinsen gewährt, entsprächen Barwert und Endwert jeweils der Summe der Beträge, also $a_{\bar{9}} = \ddot{s}_{\bar{9}} = 9$.

Lösung 6. Der Barwert $\ddot{a}_{\bar{n}} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$, aufgefasst als Funktion des Zinssatzes i , lautet

$$f(i) := \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}}{i} = \frac{1+i - (1+i)^{-n+1}}{i} .$$

Für $i > 0$ ist die Funktion f differenzierbar, so dass

$$\frac{\partial}{\partial i} f(i) = \frac{\left[1 - (-n+1) \cdot (1+i)^{-n}\right] \cdot i - \left[1 + i - (1+i)^{-n+1}\right] \cdot 1}{i^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial i} f(i) = \frac{(1+i)^{-n}}{i^2} \cdot [1 + n \cdot i - (1+i)^n] .$$

Da $\frac{(1+i)^{-n}}{i^2} > 0$ für $i > 0$, hängt das Vorzeichen der ersten Ableitung vom Ausdruck in der eckigen Klammer ab. Eine Taylor-Entwicklung von $(1+i)^n$ um $i_0 = 0$ zeigt, dass

$$(1+i)^n = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n}{l} \cdot i^l = 1 + n \cdot i + \underbrace{\sum_{l=2}^{\infty} \binom{n}{l} i^l}_{>0} > 1 + n \cdot i .$$

Für $i > 0$ ist $\frac{\partial}{\partial i} f(i) < 0$ und die Funktion f somit streng monoton fallend. Alternativ kann man auch einfach die Reihendarstellung des Barwertes $\ddot{a}_{\overline{n}}$ betrachten. Für zwei Zinssätze $0 < i_1 < i_2$ ist $v_2 < v_1 < 1$, woraus unmittelbar die strenge, fallende Monotonie

$${}^{i_1} \ddot{a}_{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} v_1^j > \sum_{j=0}^{n-1} v_2^j = {}^{i_2} \ddot{a}_{\overline{n}}$$

folgt.

Lösung 7. Der Zahlungsstrom lässt sich verbal beschreiben als eine 20 Jahre lang zahlbare Zeitrente der Jahreshöhe 6, welche unterjährig (viermonatlich) nachschüssig ausgeschüttet wird.

1. Der Barwert dieses Zahlungsstroms lautet somit

$$6 \cdot a_{\overline{20}}^{(3)} .$$

2. Mit $i^{(3)} = \left(1,04^{\frac{1}{3}} - 1\right) \cdot 3 = 0,039478$ ergeben sich folgende Werte des Zahlungsstrom zu den verschiedenen Zeitpunkten:

a. $t = 0$:

$$CF(0; 0,04) = PV(0,04) = 6 \cdot a_{\overline{20}}^{(3)} = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,04}\right)^{20}}{0,039478} = 82,62$$

b. $t = 20$:

$$CF(20; 0,04) = TV(0,04) = PV(0,04) \cdot 1,04^{20} = 181,03$$

c. $t = 2\frac{1}{3}$:

$$CF\left(2\frac{1}{3}; 0,04\right) = PV(0,04) \cdot 1,04^{\frac{7}{3}} = 90,54$$

Lösung 8. Approximation bei unterjähriger Zahlweise

Die folgenden Formeln gelten sogar exakt, wenn man eine kaufmännische Diskontierung unterstellt.

1. Der gesuchte Barwert ist

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{n \cdot k - 1} v^{\frac{j}{k}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(v^j \sum_{m=0}^{k-1} v^{\frac{m}{k}} \right) \\ &= \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} v^j \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{k-1} (1-d)^{\frac{m}{k}} \right) \\ &= \frac{1}{k} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} (1-d)^{\frac{m}{k}}.\end{aligned}$$

Eine Taylor-Approximation 1. Ordnung von $(1-d)^{\frac{m}{k}}$ um den Entwicklungspunkt $d_0 = 0$ liefert die Näherung

$$(1-d)^{\frac{m}{k}} \approx 1 - \frac{m}{k} \cdot d.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} &\approx \ddot{a}_{\overline{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{k} \cdot d \right) \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(k - \frac{d}{k} \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{2} \right) \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(k - d \cdot \frac{k-1}{2} \right) \\ &= \ddot{a}_{\overline{n}} \cdot \left(1 - d \cdot \frac{k-1}{2k} \right)\end{aligned}$$

bzw. die äquivalente, ebenfalls geläufige Darstellung

$$\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} \approx \ddot{a}_{\overline{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1-v^n).$$

2. Zunächst ist

$$\dot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n \cdot k} v^{\frac{j}{k}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(v^j \sum_{m=1}^k v^{\frac{m}{k}} \right) \\
&= \frac{1}{k} \cdot \ddot{a}_{\bar{n}} \cdot \sum_{m=1}^k (1-d)^{\frac{m}{k}} .
\end{aligned}$$

Analog zu Aufgabenteil 1. ist entweder

$$\begin{aligned}
a_{\bar{n}}^{(k)} &\approx \ddot{a}_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=1}^k \left(1 - \frac{m}{k} \cdot d \right) \\
&= \ddot{a}_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(k - d \cdot \frac{k+1}{2} \right) \\
&= \ddot{a}_{\bar{n}} \cdot \left(1 - d \cdot \frac{k+1}{2k} \right)
\end{aligned}$$

und äquivalenterweise

$$a_{\bar{n}}^{(k)} \approx \ddot{a}_{\bar{n}} - \frac{k+1}{2k} \cdot (1 - v^n) .$$

Oder mit $\ddot{a}_{\bar{n}} = \frac{1}{v} \cdot a_{\bar{n}}$ sowie der Taylor-Approximation 1. Ordnung

$$(1+i)^{1-\frac{m}{k}} \approx 1 + \left(1 - \frac{m}{k} \right) \cdot i$$

erhält man

$$\begin{aligned}
a_{\bar{n}}^{(k)} &= \frac{1}{k} \cdot a_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \sum_{m=1}^k (1-d)^{\frac{m}{k}} \\
&= \frac{1}{k} \cdot a_{\bar{n}} \cdot \sum_{m=1}^k (1-d)^{\frac{m}{k}-1} \\
&= a_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=1}^k \left(\frac{1}{1-d} \right)^{1-\frac{m}{k}} \\
&= a_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=1}^k (1+i)^{1-\frac{m}{k}} \\
&\approx a_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=1}^k \left(1 + \left(1 - \frac{m}{k} \right) \cdot i \right) \\
&= a_{\bar{n}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(k + i \cdot k - i \cdot \frac{k+1}{2} \right)
\end{aligned}$$

und damit

$$a_{\overline{n}}^{(k)} = a_{\overline{n}} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k-1}{2k} \right)$$

bzw. die alternative Darstellung

$$a_{\overline{n}}^{(k)} \approx a_{\overline{n}} + \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - v^n) .$$

Grenzwertbildung liefert das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned} a_{\infty}^{(k)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}}^{(k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + i \cdot \frac{k-1}{2k} \right) \cdot a_{\overline{n}} \right) \\ &= \left(1 + i \cdot \frac{k-1}{2k} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}} \\ &= \left(1 + i \cdot \frac{k-1}{2k} \right) \cdot a_{\infty} . \end{aligned}$$

Die beiden Barwerte $\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)}$ und $a_{\overline{n}}^{(k)}$ stehen übrigens auch in folgender Beziehung:

$$a_{\overline{n}}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} - \frac{1}{k} \cdot (1 - v^n) .$$

Lösung 9. Zunächst hat man

$$(I_{\infty} \ddot{a})_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_{\overline{n}} \ddot{a})_{\overline{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n \cdot v^n}{d} .$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot v^n = 0$ (Nachweis mittels Regel von l'Hospital) ist

$$(I_{\infty} \ddot{a})_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}}}{d} = \frac{\ddot{a}_{\infty}}{d} = \frac{1}{d^2} .$$

Analog lässt sich zeigen, dass

$$(I_{\infty} a)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{n}}}{i} = \frac{\ddot{a}_{\infty}}{i} = \frac{1}{i \cdot d} .$$

Lösung 10. Gegeben ist eine geometrisch steigende, über 20 Jahre lang vor-schüssig zahlbare Zeitrente. Der Barwert dieses Zahlungsstroms ist

$$5\% (I_{\overline{20}} \ddot{a})_{\overline{20}} = \tilde{i} \ddot{a}_{\overline{20}} ,$$

wobei der Zinssatz

$$\tilde{i} = \frac{i - r}{1 + r} = \frac{0,03 - 0,05}{1 + 0,05} = -0,019048 \approx -1,905\%$$

beträgt. Somit ist

$$5\% \left(I_{\overline{20}} \ddot{a} \right)_{\overline{20}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1-0,01905} \right)^{20}}{1 - \frac{1}{1-0,01905}} = 24,1569 .$$

Nun muss die Gleichung

$$10.000 = P \cdot 5\% \left(I_{\overline{20}} \ddot{a} \right)_{\overline{20}}$$

gelöst werden, was zu

$$P = \frac{10.000}{5\% \left(I_{\overline{20}} \ddot{a} \right)_{\overline{20}}} = \frac{10.000}{24,1569} = 413,96$$

führt. D.h., die erste, sofort fällige Rente beträgt 413,96 EUR und steigt in jedem der nachfolgenden Jahre um jeweils 5%.

Lösung 11. Bei einem Zinssatz von $i = 8\%$ p.a. beträgt der Barwert des Zahlungsstroms

$$PV(0,08) = 6.280 \cdot 1,08^{-4} + 8.460 \cdot 1,08^{-7} + 7.350 \cdot 1,08^{-13} = 12.255 .$$

1. Der Wert des Zahlungsstroms nach fünf Jahren beträgt somit

$$\begin{aligned} x &= PV \cdot 1,08^5 \\ &= 12.255 \cdot 1,08^5 \\ &= 18.007 . \end{aligned}$$

2. Der Zeitpunkt t bestimmt sich aus der Gleichung

$$12.255 \cdot 1,08^t = 22.090 ,$$

dies führt zu

$$t = \frac{\ln \frac{22.090}{12.255}}{\ln 1,08} = 7,6557 \text{ Jahre} .$$

Lösung 12. Wir wissen, dass

$$\ddot{a}_{\overline{m+n}} = \ddot{a}_{\overline{m}} + {}_m \ddot{a}_{\overline{n}} = \ddot{a}_{\overline{m}} + v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} .$$

Setzt man $m = n$, so ergibt sich

$$\ddot{a}_{\overline{2n}} = \ddot{a}_{\overline{n}} + v^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} ,$$

so dass

$$v^n = \frac{\ddot{a}_{\overline{2n}} - \ddot{a}_{\overline{n}}}{\ddot{a}_{\overline{n}}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{2n}}}{\ddot{a}_{\overline{n}}} - 1 = \frac{10,934563}{7,029584} - 1 = 0,55551 .$$

Ebenfalls ist bekannt, dass

$$\ddot{a}_{\bar{n}} = \frac{1 - v^n}{d} = \frac{1 - v^n}{\frac{i}{1+i}} .$$

Umstellen dieser Gleichung führt zu

$$\begin{aligned} \frac{i}{1+i} &= \frac{1 - v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}}} \Leftrightarrow \\ i &= \frac{1 - v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}}} \cdot (1+i) \Leftrightarrow \\ i &= \frac{\frac{1 - v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}}}}{1 - \frac{1 - v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}}}} \Leftrightarrow \\ i &= \frac{1 - v^n}{\ddot{a}_{\bar{n}} - 1 + v^n} . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$i = \frac{1 - 0,55551}{7,029584 - 1 + 0,55551} = 0,0675$$

und

$$n = \frac{\ln 0,55551}{\ln \frac{1}{1,0675}} = 9 .$$

Lösung 13. Die Bestimmungsgleichung für die Rendite des Sparplans lautet:

$$\begin{aligned} 1.000 \cdot \ddot{a}_{10} &= 2.000 \cdot {}_{10}| \ddot{a}_{10} \Leftrightarrow \\ 1.000 \cdot \ddot{a}_{10} &= 2.000 \cdot (\ddot{a}_{20} - \ddot{a}_{10}) \Leftrightarrow \\ 2.000 \cdot \ddot{a}_{20} - 3.000 \cdot \ddot{a}_{10} &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 \cdot \frac{1 - v^{20}}{d} - 3 \cdot \frac{1 - v^{10}}{d} &= 0 \Leftrightarrow \\ 2 - 2 \cdot v^{20} - 3 + 3 \cdot v^{10} &= 0 \Leftrightarrow \\ 3 \cdot v^{10} - 2 \cdot v^{20} - 1 &= 0 . \end{aligned}$$

Nach Substitution von v^{10} mit x erhält man die quadratische Gleichung

$$-2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 = 0 ,$$

welche die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ besitzt. Die Lösung $v^{10} = 1$ bzw. $i = 0$ ist jedoch nicht zulässig, da die Barwerte sonst nicht definiert sind.

Folglich lautet die Lösung:

$$\begin{aligned} v^{10} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{1+i} &= \sqrt[10]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ i &= \sqrt[10]{2} - 1 \approx 0,07177 , \end{aligned}$$

d.h., die jährliche Rendite i_Z beträgt ungefähr 7,18%.

Zum Vergleich: Einsetzen mehrerer Werte für i zeigt, dass die Funktion

$$f(i) := 3 \cdot v^{10} - 2 \cdot v^{20} - 1$$

zwischen $i = 7\%$ und $i = 8\%$ eine Nullstelle hat. Lineare Interpolation zwischen diesen beiden Werten liefert eine Rendite von ungefähr 7,17% p.a.:

$$\begin{aligned} \frac{i_Z - 0,07}{0,08 - 0,07} &= \frac{0 - f(0,07)}{f(0,08) - f(0,07)} \Leftrightarrow \\ i_Z &= 0,07 - 0,01 \cdot \frac{0,00821}{-0,03952 - 0,00821} \Leftrightarrow \\ i_Z &= 0,07172 . \end{aligned}$$

Lösung 14. Geometrisch fallende Zeitrente

Der gesuchte Barwert lässt sich mit $\%^{(D_{\bar{n}}\ddot{a})_{\bar{n}}}$ notieren. Mit dem Absenkungssatz $0 < r < 1$ ist:

$$\begin{aligned} \%^{(D_{\bar{n}}\ddot{a})_{\bar{n}}} &= 1 + (1-r) \cdot v + (1-r)^2 \cdot v^2 + \cdots + (1-r)^{n-1} \cdot v^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1-r)^j \cdot v^j = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1-r}{1+i} \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \hat{v}^j . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet \hat{v} den Diskontfaktor zu dem neuen Zinssatz $\hat{i} := \frac{i+r}{1-r}$, denn

$$\underbrace{\frac{1}{1+\hat{i}}}_{=\hat{v}} = \frac{1-r}{1+i} \Leftrightarrow \hat{i} = \frac{i+r}{1-r} .$$

Analog zur geometrisch steigenden Rente erhält man somit die Darstellung

$$\%^{(D_{\bar{n}}\ddot{a})_{\bar{n}}} = \hat{i}\ddot{a}_{\bar{n}} .$$

Kapitel 5

Biometrische Grundlagen

Im vorigen Kapitel wurde die Rechnungsgrundlage Zins betrachtet. Nun werden wir auf die zweite Komponente der Rechnungsgrundlagen, die Biometrie, eingehen. Die biometrische Komponente umfasst jegliche Art von Risiken, denen ein Individuum ausgesetzt ist, z.B. Tod, Berufsunfähigkeit, Heirat oder Pensionierung. An dieser Stelle beschränken wir uns ausschließlich auf das Sterblichkeitsrisiko. Weitere Risiken werden in späteren Kapiteln behandelt.

Ziel ist die Definition von altersspezifischen ein- oder auch mehrjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten sowie die Einführung von abgeleiteten Größen wie bspw. der zukünftigen Lebenserwartung. Die Herleitung erfolgt üblicherweise durch die Betrachtung der zukünftigen Lebensdauer der unter dem Sterblichkeitsrisiko stehenden Person.

Im Folgenden wird, soweit nicht anders vorgegeben, das Alter einer Person mit x notiert, und eine Person des Alters x wird auch kurz mit (x) bezeichnet. Sofern das Geschlecht der Person relevant ist, verwendet man zur Abgrenzung üblicherweise x bzw. (x) für männliche Personen und y bzw. (y) für weibliche Personen. Sofern Aussagen oder Formeln für beide Geschlechter gelten, wird zur Vereinfachung die Schreibweise für Männer angewendet.

5.1 Zukünftige Lebensdauer

Die **zukünftige Lebensdauer** eines Neugeborenen, d.h. einer Person des Alters $x = 0$, kann mittels einer nicht-negativen Zufallsvariable, welche mit T_0 bezeichnet wird, dargestellt werden. Aus Vereinfachungsgründen wird angenommen, dass T_0 – und später auch T_x – stetige Zufallsvariablen sind.

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable T_0 sei

$$F_0(t) = P(T_0 \leq t) .$$

$F_0(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein neugeborenes Kind höchstens t Jahre überlebt.

Die zugehörige Dichtefunktion ist die erste Ableitung von F_0 , d.h.

$$f_0(t) = \frac{d}{dt} F_0(t) .$$

Die **Überlebensfunktion** wird definiert als

$$SF_0(t) = 1 - F_0(t) = P(T_0 > t) .$$

Sie entspricht der Gegenwahrscheinlichkeit von $F_0(t)$, nämlich der Wahrscheinlichkeit, dass das Neugeborene mindestens t Jahre überlebt.

Die zukünftige Lebensdauer einer Person im Alter x wird T_x notiert. Die Verteilungsfunktion dieser (stetigen) Zufallsvariable wird mit

$$F_x(t) = P(T_x \leq t)$$

notiert.

Betrachtet man eine x -jährige Person, impliziert dies, dass die Person bereits bis zum Alter x überlebt hat. Somit erfolgen sämtliche Aussagen über die zukünftige Lebensdauer T_x von (x) bedingt auf die Tatsache, dass diese Person seit ihrer Geburt mindestens x Jahre überlebt hat (d.h., dass die Lebensdauer T_0 dieser Person als Neugeborenes größer als x ist). Auf dieser grundlegenden Annahme basiert die folgende Beziehung zwischen den beiden Verteilungsfunktionen von T_0 und T_x . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P(T_x \leq t) \\ &= P(T_0 \leq x + t \mid T_0 > x) \\ &= \frac{P(x < T_0 \leq x + t)}{P(T_0 > x)} \\ &= \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{SF_0(x)} . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Dichtefunktionen von T_0 und T_x die Beziehung

$$f_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_x(t) = \frac{f_0(x + t)}{SF_0(x)} ,$$

und für die zugehörige Überlebensfunktion gilt

$$\begin{aligned}
SF_x(t) &= 1 - F_x(t) \\
&= P(T_x > t) \\
&= P(T_0 > x + t \mid T_0 > x) \\
&= \frac{P(T_0 > x + t)}{P(T_0 > x)} \\
&= \frac{SF_0(x + t)}{SF_0(x)} .
\end{aligned}$$

Folglich erhält man die Gleichung

$$SF_0(x + t) = SF_0(x) \cdot SF_x(t) ,$$

oder allgemeiner mit $t, u \geq 0$

$$SF_x(t + u) = SF_x(t) \cdot SF_{x+t}(u) . \quad (5.1)$$

Die Gleichung (5.1) wird auch **Stationaritätsbedingung** genannt (vgl. *Milbrodt und Helbig (1999)*, S. 63).

Beispiel 13. Sei $F_0(t) = 1 - \exp(-\frac{t}{100})$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neugeborenes

1. nicht später als im Alter 40 stirbt.
2. bis Alter 80 überlebt.
3. nach Alter 40, aber vor Alter 75 stirbt.

Es ist:

1.

$$\begin{aligned}
P(T_0 \leq 40) &= F_0(40) = 1 - e^{-0,4} \\
&\approx 1 - 0,67032 \\
&= 0,32968 .
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
P(T_0 > 80) &= SF_0(80) = 1 - F_0(80) \\
&= e^{-0,8} \\
&\approx 0,44933 .
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(40 < T_0 \leq 75) &= F_0(75) - F_0(40) = e^{-0,4} - e^{-0,75} \\
&\approx 0,67032 - 0,47237 \\
&= 0,19795 .
\end{aligned}$$

Beispiel 14. Sei $F_0(t) = 1 - \exp(-\frac{t}{100})$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

1. eine Person des Alters 20 bis Alter 60 überlebt.
2. eine 50-jährige Person nicht später als Alter 85 stirbt.

Man berechnet:

1.

$$\begin{aligned} P(T_{20} > 40) &= SF_{20}(40) = \frac{S_0(60)}{S_0(20)} \\ &= \frac{e^{-0,6}}{e^{-0,2}} \\ &= e^{-0,4} \\ &\approx 0,67032 . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(T_{50} \leq 35) &= F_{50}(35) = 1 - SF_{50}(35) \\ &= 1 - \frac{e^{-0,85}}{e^{-0,5}} \\ &= 1 - e^{-0,35} \\ &\approx 0,29531 . \end{aligned}$$

Dieses klassische Beispiel soll Folgendes verdeutlichen: Vergleicht man die Lösungen des jeweils ersten Teils der Beispiele 13 und 14, so zeigt sich eine auf den ersten Blick erstaunliche Tatsache, nämlich wegen $SF_0(40) = SF_{20}(60)$ hängt die Überlebenswahrscheinlichkeit nicht vom (akutellen) Alter der Person ab. Offenbar ist es irrelevant, ob die betrachtete Person ein Neugeborenes ist oder bereits das Alter 20 erreicht hat. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 40 Jahre zu überleben, ist für beide Personen dieselbe.

Der Grund dafür liegt in der besonderen Wahl der Verteilung(sfunktion) der zukünftigen Lebensdauer. Es handelt sich um die Exponentialverteilung, welche die Verteilungsfunktion $1 - \exp(-\lambda \cdot t)$ besitzt (im Beispiel: $\lambda = \frac{1}{100}$). Die Exponentialverteilung wird häufig für die Modellierung der Überlebensdauer von elektronischen Geräten bzw. Bauteilen verwendet. Die Wahl dieser Verteilung ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass das betrachtete Objekt keine Alterungserscheinungen zeigt, d.h., ganz gleich, zu welchem Zeitpunkt man die Wahrscheinlichkeit für eine gewisse (zukünftige) Lebensdauer berechnen will, die gesuchte Wahrscheinlichkeit hängt nur von der betrachteten Zeitspanne ab. Man spricht hierbei auch von der Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit“ der Exponentialverteilung. Für Lebensdauern von Personen erscheint diese Annahme – und somit die Exponentialverteilung – jedoch nicht angemessen, da der Mensch zweifelsohne Alterungsprozessen unterliegt.

5.1.1 Ausfallrate

Anstelle der gesamten Verteilung der zukünftigen Lebensdauer betrachtet man zuweilen auch nur die **Ausfallrate** (**Hazardrate**) oder **Sterbeintensität**. Diese ist definiert als

$$\begin{aligned}\mu_0(t) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{P(t < T_0 \leq t+h \mid T_0 > t)}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{P(t < T_0 \leq t+h)}{P(T_0 > t)} \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{SF_0(t)} \cdot \frac{F_0(t+h) - F_0(t)}{h} \right] \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} F_0(t)}{SF_0(t)} = \frac{f_0(t)}{SF_0(t)} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial t} SF_0(t)}{SF_0(t)}.\end{aligned}$$

Allgemeiner ist

$$\begin{aligned}\mu_x(t) &= \lim_{h \searrow 0} \frac{P(t < T_x \leq t+h \mid T_x > t)}{h} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial t} SF_x(t)}{SF_x(t)}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Stationaritätsbedingung (5.1) gilt

$$P(t < T_x \leq t+h \mid T_x > t) = P(x+t < T_0 \leq x+t+h \mid T_0 > x+t),$$

so dass sich für die Ausfallraten die Beziehung

$$\mu_x(t) = \mu_0(x+t)$$

ergibt. Dasselbe Ergebnis erhält man auch auf direktem Wege durch Einsetzen von $SF_x(t) = \frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)}$ in die Formel für $\mu_x(t)$, denn

$$\mu_x(t) = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} SF_x(t)}{SF_x(t)} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)} \right)}{\frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} SF_0(x+t)}{SF_0(x+t)} = \mu_0(x+t).$$

Für $t = 0$ schreibt man häufig auch nur kurz μ_x anstatt $\mu_x(0)$. Für sehr kleine Werte von $h > 0$ gilt näherungsweise

$$P(0 < T_x \leq h \mid T_x > 0) \approx h \cdot \mu_x ,$$

so dass die Wahrscheinlichkeit, dass (x) vor Erreichen des Alters $x+h$ stirbt, annähernd proportional zur Ausfallrate μ_x ist. Anders ausgedrückt, kann die Ausfallrate μ_x auch als „relative Momentansterblichkeit“ interpretiert werden, nämlich als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die das Alter x erreicht hat, unmittelbar nach Erreichen dieses Alters stirbt.

Aus der Definition der Ausfallrate folgt (mit $t = 0$), dass

$$\frac{\partial}{\partial x} SF_0(x) = -SF_0(x) \cdot \mu_x$$

bzw.

$$f_0(x) = SF_0(x) \cdot \mu_x .$$

Allgemeiner gilt

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \frac{f_0(t)}{SF_0(x)} \\ &= \frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)} \cdot \mu_{x+t} \\ &= SF_x(t) \cdot \mu_{x+t} , \end{aligned}$$

was sich wiederum umschreiben lässt zu der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} SF_x(t) = -SF_x(t) \cdot \mu_{x+t} . \quad (5.2)$$

Die Kenntnis von $F_0(x)$ bzw. $SF_0(x)$ oder der Ausfallrate μ_x ist äquivalent zueinander. Die Ausfallrate erhält man aus der Überlebensfunktion $SF_0(x)$ wie vorher gesehen. Umgekehrt kann man aus Kenntnis von μ_x die Überlebensfunktion SF_0 bestimmen, denn diese ergibt als Lösung der (homogenen linearen) Differentialgleichung

$$\mu_x = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} SF_0(x)}{SF_0(x)} .$$

Man formt wie folgt um

$$\mu_x = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} SF_0(x)}{SF_0(x)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} - \int_0^x \mu_t dt &= \int_0^x \frac{\frac{\partial}{\partial x} SF_0(t)}{SF_0(t)} dt \Leftrightarrow \\ - \int_0^x \mu_t dt &= \ln SF_0(x) \end{aligned}$$

und erhält für die Überlebensfunktion die Darstellung

$$SF_0(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \mu_t dt \right\}$$

bzw. für die Verteilungsfunktion

$$F_0(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \mu_t dt \right\}.$$

Für beliebige Alter x gilt allgemeiner

$$SF_x(t) = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \mu_u du \right\}. \quad (5.3)$$

Das Integral

$$\int_x^{x+t} \mu_u du$$

wird auch als **kumulierte** (oder **integrierte**) **Ausfallrate** bezeichnet.

Beispiel 15. Bestimmen Sie die Ausfallrate der Exponentialverteilung $F_x(t) = 1 - \exp(-\lambda \cdot t)$.

Man berechnet

$$\begin{aligned} \mu_x &= - \frac{\frac{\partial}{\partial t} SF_x(t)}{SF_x(t)} \\ &= - \frac{\exp(-\lambda \cdot t) \cdot (-\lambda)}{\exp(-\lambda \cdot t)} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Die Ausfallrate der Exponentialverteilung ist konstant und folglich unabhängig vom Alter x . Dies spiegelt noch einmal die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit wider.

5.1.2 Sterbegesetze

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, eine „einfache“ mathematische Formel für μ_x zu erhalten, welche zudem für die gesamte Altersbandbreite gültig ist. Sehr oft wird angenommen, dass die Ausfallrate konstant oder polynomial ist oder Exponentialterme beinhaltet.

Historisch gesehen basiert die Aufstellung von Sterbegesetzen auf der Vermutung, dass die Sterblichkeit einem Naturgesetz folgt, dessen Gesetzmäßigkeiten in einer Formel zusammengefasst werden können. Diese Idee hat in den vergangenen Jahrhunderten diverse Sterbegesetze hervorgebracht. In der heutigen Zeit finden sie jedoch kaum noch Anwendung, ihr Einsatz beschränkt sich im Wesentlichen auf die Ausgleichung roher Sterbewahrscheinlichkeiten im Rahmen der Herleitung von Sterbetafeln.

Das älteste ist das **Sterbegesetz von de Moivre**. Ausgehend von einem Maximalalter ω , welches auf 86 gesetzt wurde, unterstellt es für die zukünftige Lebensdauer T_x eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0; \omega - x]$, so dass sich die Sterbeintensität für $0 \leq x < \omega = 86$ darstellen lässt als

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x} .$$

Dem **Sterbegesetz von Gompertz** zufolge gilt für die Ausfallrate

$$\mu_x = B \cdot c^x ,$$

wobei die Parameter B und c positive reelle Zahlen sind. Bei diesem Ansatz, welcher auf der Lösung einer Differentialgleichung basiert, wird unterstellt, dass die Sterbeintensität exponentiell wächst.

Das Modell wurde von Makeham zum **Sterbegesetz von Gompertz-Makeham** erweitert, so dass

$$\mu_x = A + B \cdot c^x .$$

Hierbei repräsentiert der zusätzliche, altersabhängige Parameter $A > 0$ eine Art „Grundrisiko“ (vgl. *Milbrodt und Helbig (1999)*, S. 90).

Als Größenordnungen für die Parameter werden oft folgende Werte genannt:

$$0,001 < A < 0,003$$

$$10^{-6} < B < 10^{-3}$$

$$1,08 < c < 1,12 .$$

5.1.3 Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeit

Die aktuarielle Notation der Wahrscheinlichkeiten für Tod bzw. Überleben wird über die Verteilungsfunktion $F_x(t)$ und die Überlebensfunktion $SF_x(t)$ definiert:

- $p_x = P(T_x > 1) = SF_x(1)$ ist die **einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit**, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person des Alters x ein Jahr, also bis zum Alter $x + 1$, überlebt.
- $q_x = 1 - p_x = F_x(1) = P(T_x \leq 1)$ gibt die **einjährige Sterbewahrscheinlichkeit** an, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass (x) innerhalb eines Jahres, d.h. innerhalb des Intervalls $[x, x + 1[$ bzw. vor Erreichen des Alters $x + 1$ stirbt.
- $tp_x = SF_x(t)$ ist die **t -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit**, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person des Alters x bis zum Alter $x + t$ überlebt.
- $tq_x = 1 - tp_x = F_x(t)$ repräsentiert die **t -jährige Sterbewahrscheinlichkeit**, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (x) innerhalb der nächsten t Jahre stirbt.

Insbesondere ist

$$_0p_x = 1 \text{ und } {}_1p_x = p_x$$

sowie

$${}_0q_x = 0 \text{ und } {}_1q_x = q_x .$$

Mit diesen Definitionen kann die Ausfallrate auch dargestellt werden als

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_x}{h} .$$

Aus Gleichung (5.1) folgt, dass

$${}_{t+u}p_x = {}_t p_x \cdot {}_u p_{x+t} ,$$

und Gleichung (5.3) erlaubt es, die t -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von μ_x darzustellen als

$${}_t p_x = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \mu_u du \right\} . \quad (5.4)$$

Wegen $SF_x(t) = {}_t p_x$ ergibt sich aus Gleichung (5.2) unmittelbar die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x = - {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

bzw. äquivalent dazu $\left(\text{weil } f_x(t) = -\frac{\partial}{\partial t} SF_x(t) \right)$

$$f_x(t) = SF_x(t) \cdot \mu_{x+t}.$$

Neben den ein- bzw. t -jährigen Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten gibt es auch aufgeschobene Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten:

- ${}_{s|t} p_x$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person des Alters x das Altersintervall $[x+s, x+s+t]$ überlebt. Die t -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ist hierbei um s Jahre aufgeschoben.
- Entsprechend ist ${}_{s|t} q_x$ die (aufgeschobene) Wahrscheinlichkeit dafür, dass (x) zwischen dem Alter $x+s$ und Alter $x+s+t$ verstirbt. Diese Wahrscheinlichkeit kann als Differenz zweier mehrjähriger Überlebenswahrscheinlichkeiten dargestellt werden, nämlich

$$\begin{aligned} {}_{s|t} q_x &= P(s < T_x \leq s+t) \\ &= P(T_x \leq s+t) - P(T_x \leq s) \\ &= P(T_x > s) - P(T_x > s+t) \\ &= {}_s p_x - {}_{s+t} p_x. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} {}_{s|t} q_x &= {}_s p_x - {}_{s+t} p_x \\ &= {}_s p_x - {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s} \\ &= {}_s p_x \cdot (1 - {}_t p_{x+s}) \end{aligned}$$

ergibt sich außerdem die Darstellung

$${}_{s|t} q_x = {}_s p_x \cdot {}_t q_{x+s}.$$

Falls $t = 1$, schreibt man kurz ${}_{s|t} p_x$ (bzw. ${}_{s|t} q_x$) anstelle von ${}_{s|1} p_x$ (bzw. ${}_{s|1} q_x$).

Für $s = 0$ ergeben sich die „üblichen“ t -jährigen Wahrscheinlichkeiten ${}_{0|t} p_x = {}_t p_x$ bzw. ${}_{0|t} q_x = {}_t q_x$.

5.1.4 Fernere Lebenserwartung

Die Zufallsvariable T_x beschreibt die zukünftige Lebensdauer von (x) . Teilweise interessiert jedoch nur der ganzzahlige Teil, welcher als **gestutzte zukünftige Lebensdauer** bezeichnet und mit K_x notiert wird. Somit ist

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor,$$

wobei die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ den ganzzahligen Teil des Arguments liefert. Im Gegensatz zu T_x ist die Zufallsvariable K_x nun eine diskrete, nicht-negative Zufallsvariable, welche die Anzahl der ganzen, von (x) durchlebten Jahre oberhalb des Alters x angibt.

Ist $c = 0, 1, 2, \dots$, so gilt für die Wahrscheinlichkeiten $P(K_x = c)$ von K_x Folgendes:

$$\begin{aligned} P(K_x = c) &= P(c \leq T_x < c + 1) \\ &= F_x(c + 1) - F_x(c) \\ &= SF_x(c) - SF_x(c + 1) \\ &= SF_x(c) - SF_x(c) \cdot SF_{x+c}(1) \\ &= SF_x(c) \cdot F_{x+c}(1) \\ &= cp_x \cdot q_{x+c} \\ &= c|q_x. \end{aligned}$$

Da T_x und K_x Zufallsvariablen sind, kann jeweils ihr Erwartungswert berechnet werden.

Mit Hilfe von partieller Integration ergibt sich für die zukünftige Lebensdauer ein Erwartungswert von

$$\mathring{e}_x := E[T_x] = \int_0^\infty t \cdot f_x(t) dt = \dots = \int_0^\infty S_x(t) dt = \int_0^\infty tp_x dt$$

und für die gestutzte zukünftige Lebensdauer

$$e_x := E[K_x] = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot P(K_x = c) = \dots = \sum_{c=1}^{\infty} S_x(c) = \sum_{c=1}^{\infty} cp_x.$$

Die Größe \mathring{e}_x wird als **vollständige (fernere) Lebenserwartung** von (x) bezeichnet, die Größe e_x als **gestutzte (fernere) Lebenserwartung**.

Die Angabe des Wertes $x + \mathring{e}_x$ entspricht somit dem durchschnittlichen Alter bei Tod einer heute x -jährigen Person.

5.2 Sterbetafeln

Eine **Sterbetafel** beschreibt das Überlebensmodell einer Population bzw. einer Personengesamtheit (Kollektiv). In diesem Kapitel ist die einzige Ausscheideursache der Tod. Im Kontext der Berufs- bzw. Erwerbsunfähigkeitsversicherung existieren hingegen auch Tafeln mit mehreren Ausscheideursachen, indem eine Person durch Tod oder Invalidisierung aus dem Kollektiv (der Aktiven) ausscheiden kann (siehe Kap. 14).

An dieser Stelle werden Sterbetafeln als gegebene Tabellen angesehen. Anmerkungen zu Besonderheiten und verschiedenen Typen von Sterbetafeln finden sich weiter unten in Abschn. 5.2.4.

Eine Sterbetafel enthält aktuarielle Basis-Funktionen, welche mit l_x , q_x , d_x notiert werden. Der Index x bezeichnet das aktuelle Alter. Teilweise werden auch weitere aktuarielle Funktionen wie bspw. die Ausfallrate μ_x in einer Sterbetafel tabelliert.

Sterbetafeln beginnen mit einem Startalter x_0 – in den meisten Fällen ist $x_0 = 0$ (d.h., man startet mit Neugeborenen) – und einer anfänglichen Populationsgröße, welche durch eine große (positive) Zahl l_{x_0} festgelegt wird. Zwar ist l_{x_0} frei wählbar, aber sehr oft ist $l_{x_0} = 100.000$, um im weiteren Verlauf der Tafel eine angemessene Anzahl signifikanter Stellen zu gewährleisten. Der Startwert für die Population wird auch als **Radix** der Sterbetafel bezeichnet.

Im Folgenden werden die Standardwerte verwendet, also $x_0 = 0$ und $l_{x_0} = l_0 = 100.000$, d.h., die Sterbetafel beginnt mit einer Gruppe von 100.000 Neugeborenen. Als Zeitintervall verwenden wir zunächst ganze Jahre.

5.2.1 Basisfunktionen

Die zukünftige Lebensdauer eines neugeborenen Kindes hat die Überlebensfunktion $SF_0(x)$. Unter der Annahme, dass die Neugeborenen unabhängig voneinander sind, handelt es sich bei ihren Lebensdauern um unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.

Nach x Jahren erwarten wir, dass

$$l_x = l_0 \cdot SF_0(x) = l_0 \cdot {}_xp_0$$

Individuen noch leben, so dass l_x die erwartete Anzahl der (Über)Lebenden des Alters x von ursprünglich l_0 Neugeborenen angibt.

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} l_{x+1} &= l_x \cdot p_x \\ &= l_x \cdot (1 - q_x) . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Funktion d_x repräsentiert die Anzahl der zwischen den Altern x und $x+1$, genauer im Intervall $[x, x+1[$, Verstorbenen und ergibt sich somit als

$$d_x = l_x - l_{x+1} .$$

Allgemeiner gilt

$$l_x = l_{x_0} \cdot {}_{x-x_0}p_{x_0} .$$

Setzt man $x+t$ anstelle von x ein, erhält man

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_{x_0} \cdot {}_{x+t-x_0}p_{x_0} \\ &= \underbrace{l_{x_0} \cdot {}_{x-x_0}p_{x_0}}_{=l_x} \cdot {}_t p_x \\ &= l_x \cdot {}_t p_x , \end{aligned}$$

so dass

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} .$$

Daraus folgt die Beziehung

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \prod_{s=0}^{t-1} \frac{l_{x+s+1}}{l_{x+s}} = \prod_{s=0}^{t-1} p_{x+s} , \quad (5.6)$$

d.h., die Wahrscheinlichkeit, t Jahre zu überleben, ergibt sich durch Multiplikation der im Intervall liegenden einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Für die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der nächsten t Jahre zu sterben, gilt

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{\sum_{s=0}^{t-1} d_{x+s}}{l_x}$$

bzw. über die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten ausgedrückt

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \prod_{s=0}^{t-1} (1 - q_{x+s}) .$$

Auch alle übrigen Wahrscheinlichkeiten können mithilfe der Anzahl der Lebenden l_x ausgedrückt werden, bspw. ist die Wahrscheinlichkeit, zwischen den Altern $x + t$ und $x + t + s$ zu sterben,

$${}_{s|t}q_x = \frac{l_{x+s} - l_{x+s+t}}{l_x} .$$

Insbesondere ist für $t = 1$

$${}_{s|1}q_x = \frac{l_{x+s} - l_{x+s+1}}{l_x} = \frac{d_{x+s}}{l_x} ,$$

so dass

$${}_tq_x = \sum_{s=0}^{t-1} {}_{s|1}q_x .$$

Häufig beinhalten Sterbetafeln auch altersspezifische Werte für die Ausfallrate μ_x , welche sich in Abhängigkeit von l_x darstellen lässt als

$$\mu_x = -\frac{\partial}{\partial x} \log(l_x) ,$$

denn

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x} SF_0(x)}{SF_0(x)} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x} x p_0}{x p_0} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{l_x}{l_0} \right)}{\frac{l_x}{l_0}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} l_x}{l_x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \log(l_x) . \end{aligned}$$

Auch die Anzahl Tote d_x kann mittels l_x (und μ_x) dargestellt werden. Einerseits ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neugeborenes zwischen den Altern x und $x + 1$ stirbt,

$${}_{x|0}q_0 = \frac{l_{0+x} - l_{0+x+1}}{l_0} = \frac{d_x}{l_0} ,$$

andererseits hat man

$$\begin{aligned} {}_x|q_0 &= {}_xp_0 - {}_{x+1}p_0 \\ &= \int_x^{x+1} ({}_up_0 \cdot \mu_u) du \\ &= \int_x^{x+1} \left(\frac{l_u}{l_0} \cdot \mu_u \right) du . \end{aligned}$$

Gleichsetzen und anschließende Multiplikation beider Seiten mit l_0 liefert schließlich

$$d_x = \int_x^{x+1} (l_u \cdot \mu_u) du .$$

An dieser Stelle seien noch einmal die Beziehungen zwischen den Basisfunktionen zusammengefasst:

$$\begin{aligned} l_x &= l_{x-1} - d_{x-1} \\ p_x &= \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ q_x &= 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \\ {}_{s|t}q_x &= \frac{l_{x+s} - l_{x+s+t}}{l_x} \\ \mu_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \log(l_x) \end{aligned}$$

sowie

$$l_x = l_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^x \mu_u du \right\} .$$

Üblicherweise existiert auch ein **Schlussalter** oder **Endalter** der Sterbetafel, welches mit ω bezeichnet wird. Hierbei handelt es sich um das kleinste Alter x , zu welchem für die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit $q_x = 1$ gilt, also $q_\omega = 1$. Dies bedeutet, dass im letzten tabellierten Jahr die gesamte verbleibende Population stirbt und keiner überlebt (denn $p_\omega = 0$). Folglich hat sich die Population ein Jahr später vollständig abgebaut, so dass $l_{\omega+1} = 0$, genauer gesagt $l_x = 0$ für alle $x > \omega$.

Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur manchmal das Alter $\omega + 1$ als Schlussalter bezeichnet wird.

5.2.2 Basisfunktionen für nicht-ganzzahlige Alter

Bislang wurden die Basisfunktionen nur für ganze Jahre ausgewertet. Um die Größe der Population auch unterjährig, d.h. zwischen zwei aufeinanderfolgenden Altern, angeben zu können, bedient man sich verschiedener Methoden, von denen hier zwei gängige Ansätze vorgestellt werden.

Ziel ist es, Werte für l_{x+t} zu ermitteln, wobei t nicht ganzzahlig ist, d.h. $0 < t < 1$. Außerdem betrachten wir, welche Implikationen dies jeweils auf die Größen $t p_x$, $t q_x$ sowie μ_{x+t} hat.

In der Praxis wird die näherungsweise Berechnung von Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten für gebrochene Dauern sowohl bei der Konstruktion von Sterbetafeln als auch bei der Berechnung von Leistungsbarwerten (siehe Kap. 6) eingesetzt.

5.2.2.1 Gleichverteilung der Toten

Für die meisten Anwendungen reicht es aus anzunehmen, dass die Tafelfunktion l linear zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Altern x und $x+1$ verläuft. Dieses ist die einfachste Annahme, die man über den Verlauf von l treffen kann. Die Annahme eines linearen Verlaufs von l bedeutet, dass sich die Sterbefälle gleichmäßig innerhalb des Altersintervalls $[x, x+1]$ verteilen, so dass diese Annahme auch als „Gleichverteilung der Toten“ (kurz: UDD, vom Englischen „uniform distribution of deaths“) geläufig ist.

Es sei angemerkt, dass die Annahme von UDD im ersten Lebensjahr nicht sinnvoll ist, da die Sterblichkeit von Neugeborenen anfänglich sehr hoch ist und dann schnell sinkt.

Im Falle von UDD lässt sich der Wert l_{x+t} für $0 < t < 1$ mittels linearer Interpolation berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{l_{x+t} - l_x}{x + t - x} &= \frac{l_{x+1} - l_x}{x + 1 - x} \Leftrightarrow \\ \frac{l_{x+t} - l_x}{t} &= l_{x+1} - l_x \Leftrightarrow \\ l_{x+t} - l_x &= t \cdot \underbrace{(l_{x+1} - l_x)}_{=-d_x} . \end{aligned}$$

Folglich ist

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x$$

bzw.

$$l_{x+t} = (1-t) \cdot l_x + t \cdot l_{x+1} .$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit für Zeiträume von weniger als 1 Jahr, d.h. $0 < t < 1$, ergibt sich im Fall von UDD als

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - t \cdot \frac{d_x}{l_x}$$

bzw.

$${}_t p_x = 1 - t \cdot q_x .$$

Dies ist äquivalent zu

$${}_t q_x = t \cdot q_x .$$

Differenzieren der letzten Gleichung nach t liefert

$$q_x = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

und somit

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{{}_t p_x} = \frac{q_x}{1 - t \cdot q_x} .$$

Alternativ erhält man diese Darstellung der Ausfallrate ausgehend von Gleichung (5.2), d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x = - {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} .$$

Bei Gültigkeit der Gleichverteilungsannahme entspricht dies

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (1 - t \cdot q_x) &= - (1 - t \cdot q_x) \cdot \mu_{x+t} \Leftrightarrow \\ -q_x &= - (1 - t \cdot q_x) \cdot \mu_{x+t} \Leftrightarrow \\ \mu_{x+t} &= \frac{q_x}{1 - t \cdot q_x} . \end{aligned}$$

Unter der Annahme UDD gilt für die ferneren Lebenserwartungen (siehe Abschn. 5.1.4) die (näherungsweise) Beziehung

$$\dot{e}_x = e_x + \frac{1}{2} . \quad (5.7)$$

Der Beweis wird dem Leser als Übungsaufgabe 22 überlassen.

5.2.2.2 Konstante Ausfallrate

Eine zu UDD alternative Annahme ist diejenige einer konstanten Ausfallrate (kurz: CFM, vom Englischen „constant force of mortality“) zwischen ganzjährigen Altern, d.h. $\mu_{x+t} = \mu$ für alle $0 < t < 1$.

Aus Gleichung (5.4) folgt für $t = 1$, dass

$$p_x = \exp \left\{ - \int_x^{x+1} \mu_u du \right\} .$$

Unter der Annahme CFM folgt daraus

$$p_x = e^{-\mu}$$

und somit

$$q_x = 1 - e^{-\mu} .$$

Aus der Annahme einer konstanten Ausfallrate μ zwischen den Altern x und $x + 1$ folgt außerdem

$${}_t p_{x+s} = e^{-\mu \cdot t}$$

für alle $0 < s, t < 1$ mit $s + t \leq 1$, denn:

$$\begin{aligned} {}_t p_{x+s} &= \exp \left\{ - \int_{x+s}^{x+s+t} \mu du \right\} \\ &= \exp \{ -\mu \cdot (x + s + t - (x + s)) \} \\ &= e^{-\mu \cdot t} . \end{aligned}$$

Insbesondere gelten (wegen $p_x = e^{-\mu}$) auch die Beziehungen

$${}_t p_x = (p_x)^t$$

sowie

$$\mu_{x+t} = -\log p_x .$$

Die beiden vorgestellten Annahmen kommen jeweils durch Interpolation zu stande (vgl. *Bowers et al. (1986)*, S. 74):

- Die Annahme UDD ist gleichbedeutend mit der linearen Interpolation zwischen den beiden Überlebenswahrscheinlichkeiten $SF_x(0)$ und $SF_x(1)$, d.h., für ganzzahlige Alter x und $0 < t < 1$ gilt

$$SF_x(t) = (1-t) \cdot SF_x(0) + t \cdot SF_x(1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} tp_x &= (1-t) + t \cdot p_x \Leftrightarrow \\ tp_x &= 1 - t \cdot q_x \end{aligned}$$

- Die Annahme CFM ist äquivalent zu einer exponentiellen Interpolation, d.h. einer linearen Interpolation zwischen $\ln SF_x(0)$ und $\ln SF_x(1)$:

$$\begin{aligned} \ln S_x(t) &= (1-t) \cdot \ln SF_x(0) + t \cdot \ln SF_x(1) \Leftrightarrow \\ tp_x &= (p_x)^t . \end{aligned}$$

- Schließlich findet noch eine dritte Art der Interpolation Verwendung, welche als hyperbolische oder auch **Balducci-Annahme** bekannt ist. Danach wird eine harmonische Interpolation durchgeführt, so dass

$$\frac{1}{SF_x(t)} = (1-t) \cdot \frac{1}{SF_x(0)} + t \cdot \frac{1}{SF_x(1)} .$$

Hierzu siehe auch Übungsaufgabe 23.

5.2.3 Monatliche Sterblichkeiten

Die Angabe von Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten basiert seit jeher auf einer jährlichen Betrachtung. Auch die Konstruktion der Kommutationszahlen (vgl. Abschnitt 6.1) folgt diesem Ansatz. Es stellt sich die Frage, was zu tun wäre, wenn man anstelle von jährlichen monatliche Ausscheidewahrscheinlichkeiten ansetzen würde.

Prinzipiell gibt es zwei mögliche Herangehensweisen.

5.2.3.1 Monatliche Überlebenswahrscheinlichkeit

Analog zur mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit, welche sich als Produkt der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten ergibt, kann die jährliche Überlebenswahrscheinlichkeit p_x als Produkt von monatlichen Überlebenswahrscheinlichkeiten dargestellt werden, d.h.

$$p_x = \prod_{s=0}^{11} \bar{p}_{x+\frac{s}{12}} ,$$

wobei $\bar{p}_{x+\frac{s}{12}}$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine Person des Alters $x + \frac{s}{12}$ den Monat $s+1$ überlebt. Anstelle von Jahren beträgt die Zeiteinheit bei \bar{p} einen Monat.

Für die einmonatige Sterbewahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person des Alters $x + \frac{s}{12}$ innerhalb des nächsten Monats $s + 1$ verstirbt, ergibt sich dann

$$\bar{q}_{x+\frac{s}{12}} = 1 - \bar{p}_{x+\frac{s}{12}} .$$

Unter der Annahme, dass die monatlichen Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Altersjahres identisch sind, d.h. $\bar{p}_{x+\frac{s}{12}} = \bar{p}_x$ für alle $s = 0, \dots, 11$, gelangt man zu der Darstellung

$$p_x = (\bar{p}_x)^{12}$$

bzw.

$$\bar{p}_x = p_x^{\frac{1}{12}} .$$

Für die Sterbewahrscheinlichkeit ergibt sich dann

$$\bar{q}_x = 1 - p_x^{\frac{1}{12}} = 1 - (1 - q_x)^{\frac{1}{12}} \quad (5.8)$$

bzw.

$$q_x = 1 - (1 - \bar{q}_x)^{12} .$$

5.2.3.2 Monatliche Sterbewahrscheinlichkeit

Zur Gewährleistung, dass die Summe der monatlich Sterbenden mit der Anzahl der innerhalb des gesamten Jahres Sterbenden übereinstimmt, ist es auch denkbar, von der jährlichen Sterblichkeit q_x auszugehen und diese gleichmäßig (sprich linear) auf die Monate zu verteilen. In diesem Fall ist

$$\bar{q}_{x+\frac{s}{12}} = \bar{q}_x = \frac{q_x}{12}$$

für alle $s = 0, \dots, 11$ bzw.

$$q_x = 12 \cdot \bar{q}_x .$$

Für die einmonatige Überlebenswahrscheinlichkeit gilt dann

$$\begin{aligned} \bar{p}_{x+\frac{s}{12}} &= \bar{p}_x \\ &= 1 - \bar{q}_x \\ &= 1 - \frac{q_x}{12} \end{aligned}$$

für $s = 0, \dots, 11$, und für die Wahrscheinlichkeit, dass (x) ein Jahr überlebt,

$$p_x = 1 - 12 \cdot (1 - \bar{p}_x) .$$

5.2.4 Eigenschaften von Sterbetafeln

Die ausführliche Darstellung der Konstruktion von Sterbetafeln würde ein eigenes Kapitel erfordern, so dass auf die Erläuterung der relevanten Methoden verzichtet wird. Wir nehmen nur so viel zur Kenntnis: Zunächst werden aus gesammelten Daten (z.B. aus einer Volkszählung oder aus Beständen von Versicherungsunternehmen) rohe Sterbewahrscheinlichkeiten hergeleitet. Diese werden durch Glättungsverfahren in ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeiten transformiert, auf welche abschließend verschiedene Arten von Sicherheitszuschlägen angewendet werden.

Im Folgenden werden wir auf wesentliche Begrifflichkeiten und Abgrenzungen im Kontext von Sterbetafeln eingehen. So unterscheidet man einerseits Perioden(sterbe)tafeln von Generationen(sterbe)tafeln. Darüber hinaus gibt es die Aufteilung in Selektions(sterbe)tafeln und Aggregat(sterbe)tafeln.

5.2.4.1 Personengesamtheiten

Periodentafeln oder auch **Querschnitttafeln** basieren auf der Betrachtung einer Personengesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt bzw. über eine bestimmte Periode. Sie stellen die Sterblichkeitsverhältnisse des Kollektivs aus einem oder mehreren Kalenderjahren dar, indem alle innerhalb des Betrachtungszeitraums gleichzeitig lebenden Geburtsjahrgänge mit einbezogen werden. Durch diesen Querschnitt durch die gesamte Bevölkerung entsteht „eine Momentaufnahme der im betrachteten Zeitraum herrschenden Bedingungen“ (vgl. *Statistisches Bundesamt (2012)*, S. 1).

Generationentafeln, welche auch als **Kohortentafeln** oder **Längsschnitttafeln** bezeichnet werden, entstehen hingegen durch Betrachtung eines einzelnen Geburtsjahrgangs, einer sogenannten **Kohorte**. Beginnend bei der Geburt wird der vollständige Sterblichkeitsverlauf bis zum Tod des letzten Mitglieds der Kohorte aufgezeichnet. Aufgrund dieser Längsschnittbetrachtung werden sämtliche Besonderheiten eines einzelnen Geburtsjahrgangs erfasst. Im Unterschied zur Periodentafel kann eine Generationentafel also erst aufgestellt werden, sobald die komplette Generation ausgestorben ist, was nicht selten mehr als 100 Jahre dauern kann. Generationentafeln für Geburtsjahrgänge nach dem Jahr 1900 bedienen sich daher mathematischer Modelle, um die Sterbewahrscheinlichkeiten für noch fehlende Altersjahre zu schätzen.

5.2.4.2 Sterblichkeitsverbesserung

Betrachtet man die Geburtsjahrgänge des letzten Jahrhunderts, so zeigt sich über die Zeit eine Sterblichkeitsverbesserung, genauer gesagt Sterblichkeits-

verringerung. Jüngere Geburtsjahrgänge weisen niedrigere Sterblichkeiten auf als ältere, was unmittelbar zu einer höheren Lebenserwartung führt. Während die steigende Lebenserwartung früher auf die sinkende Kindersterblichkeit und sich verbessernde hygienische Verhältnisse zurückgeführt werden konnte, resultiert die Erhöhung der Lebenserwartung heutzutage aus einer sinkenden Alterssterblichkeit. Der anhaltende Trend sinkender Sterbewahrscheinlichkeiten führt zum Begriff des Langlebigkeitsrisikos, indem die Menschen immer älter werden.

Um der sich verändernden Sterblichkeit Rechnung zu tragen, berücksichtigen aktuarielle Sterbetafeln zukünftige Sterblichkeitsverbesserungen bislang durch zwei Verfahren, nämlich entweder durch Verwendung einer Altersverschiebung (Rueff'sche Methode) oder durch explizite Berücksichtigung einer Trendfunktion.

- Die Verwendung einer **Trendfunktion** führt zu einer zweidimensionalen, genauer gesagt zeitabhängigen, Sterbetafel, bei welcher die Sterbewahrscheinlichkeit gleichzeitig vom akutellen Alter der Person sowie vom aktuellen Kalenderjahr abhängt. Ausgehend von einem Basisjahr t_0 werden die Sterblichkeiten einer x -jährigen Person wie folgt berechnet:

$$q_x(t) = q_x(t_0) \cdot g(x, t_0, t) .$$

Dabei bezeichnet t das aktuelle Kalenderjahr und $g(\cdot)$ die Trendfunktion, deren Wert vom Alter x , dem aktuellen Jahr t sowie dem Basisjahr t_0 abhängt.

- Bei der **Altersverschiebung nach Rueff** handelt es sich um eine Approximation der zweidimensionalen Sterbetafel. Dabei hängt die Sterbewahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person nur von ihrem Geburtsjahrgang ab. Es existiert ein ausgezeichneter Geburtsjahrgang bzw. ein Grundjahr t_0 , bei welchem die Sterblichkeiten unverändert bleiben. Für alle übrigen Geburtsjahrgänge t wird, i.d.R. durch Gruppierung über mehrere Geburtsjahrgänge, jeweils eine ganzzahlige Altersverschiebung $h(t)$ bestimmt, wobei

$$h(t) \begin{cases} > 0 & \text{für } t < t_0 , \\ = 0 & \text{für } t = t_0 , \\ < 0 & \text{für } t > t_0 . \end{cases}$$

Die Funktion $h(\cdot)$ ist monoton fallend in t , d.h., je jünger (bzw. älter) der Geburtsjahrgang, desto größer ist die absolute negative (bzw. positive) Altersverschiebung. Die aufgrund des Geburtsjahrgangs ermittelte Altersverschiebung wird einheitlich auf alle Sterbewahrscheinlichkeiten angewendet, so dass für alle Alter x' , die aus demselben Geburtsjahrgang stammen, gilt:

$$q_x = q_{x'+h(t)} .$$

5.2.4.3 Selektion

Neben der Veränderung der Sterblichkeit im Zeitablauf lässt sich im Kontext aktuarieller Sterbetafeln auch ein weiterer, wesentlicher Effekt beobachten, nämlich die Selektion.

Betrachtet man z.B. ein Kollektiv von Versicherten, die eine Rentenversicherung abgeschlossen haben, so zeigt sich, dass die VPen eine geringere Sterblichkeit aufweisen als der Durchschnitt der Bevölkerung. Der Grund hierfür ist, dass im Allgemeinen nur Personen, die sich gesund fühlen (und es i.d.R. auch sind), eine Rentenversicherung abschließen. Hingegen werden Personen, die ihrer eigenen Einschätzung nach krank sind und somit eine geringere Lebenserwartung haben, eine derartige Versicherung nicht anstreben, sondern eher Versicherungsschutz für den Todesfall suchen.

Der beispielhaft beschriebene Effekt wird als **temporäre Anfangsselektion** bezeichnet. Bei Versicherungen auf den Todesfall begegnen die Versicherer diesem Umstand mit der Durchführung einer **Gesundheitsprüfung** vor Vertragsabschluss, so dass gewährleistet ist, dass die VP sich (anfänglich) in einem guten Zustand befindet. Im Falle von Rentenversicherungen erfolgt keine Gesundheitsprüfung durch das VU. Die Risikoeinschätzung vollzieht sich de facto durch die VP selbst, so dass man in diesem Fall von **Autoselektion** spricht.

Eine Sterbetafel, die Selektionseffekte quantitativ erfasst, wird als **Selektionstafel** bezeichnet. Dabei kann pro Tafel nur ein Selektionseffekt abgebildet werden. Jedoch ist nicht jede Sterbetafel eine Selektionstafel. So spiegeln bspw. die Allgemeinen Deutschen Sterbetafeln die Sterblichkeitserfahrung der gesamten Bevölkerung wider, ohne Berücksichtigung möglicher Unterschiede aufgrund von Selektion. Eine solche Sterbetafel nennt man **Aggregattafel**.

Selektion bewirkt, dass die Individuen aus einer Population „ausgewählt“ werden. Die selektierte Gruppe von Individuen gleichen Alters hat eine vom Durchschnitt der gleichaltrigen Personen abweichende Sterblichkeit. Jedoch hält der Selektionseffekt nicht dauerhaft an, sondern klingt im Laufe der Zeit wieder ab. Je länger der Zeitpunkt der Selektion zurückliegt, desto stärker nähert sich die Sterblichkeitserfahrung der selektierten Gruppe wieder dem durchschnittlichen Sterblichkeitsverlauf der Gesamtbevölkerung an. Schließlich ist der Selektionseffekt nach mehreren Jahren wieder vollständig verschwunden.

Neben der Verwendung einer Trendfunktion zur Abbildung der Sterblichkeitsverbesserung führt auch die Berücksichtigung eines Selektionseffekts zu einer zweidimensionalen Sterbetafel, bei welcher die Sterbewahrscheinlichkeit vom

Alter der Person und gleichzeitig von der seit dem Zeitpunkt der Selektion verstrichenen Dauer abhängt. Der Zeitraum, währenddessen sich der Selektionseffekt wieder vollständig abbaut, wird **Selektionsperiode** genannt. Ihre Länge wird in ganzen Jahren gemessen und hier mit b notiert. Die nach Abklingen des Selektionseffekts erreichten Sterbewahrscheinlichkeiten ändern sich nicht mehr und werden in einer sog. **Schlusstafel** tabelliert.

Zur Verdeutlichung, dass ein Individuum ausgewählt wurde, wird die Person des Alters x anstelle von (x) mit $[x]$ notiert. Somit bezeichnet $l_{[x]}$ die Anzahl selektierter Lebender des Alters x . Die Basisfunktionen werden dann in der gewohnten Weise definiert:

$$\begin{aligned} p_{[x]} &= \frac{l_{[x]+1}}{l_{[x]}} , \\ d_{[x]} &= l_{[x]} - l_{[x]+1} , \\ q_{[x]} &= \frac{d_{[x]}}{l_{[x]}} . \end{aligned}$$

Für $t = 0, 1, \dots, b$ repräsentiert die Schreibweise

$$q_{[x-t]+t}$$

die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit für eine Person des Alters x , welche vor t Jahren einem Selektionsvorgang ausgesetzt war. Die Wahrscheinlichkeiten $q_{[x]}, q_{[x]+1}, \dots, q_{[x]+b-1}$ werden auch als **selektive Sterbewahrscheinlichkeiten** bezeichnet. Sofern die Selektion zu niedrigeren Sterbewahrscheinlichkeiten führt, gilt im Allgemeinen die Beziehung

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots < q_{[x-b]+b} .$$

Für $t \geq b$, d.h. nach Ablauf der Selektionsperiode, ist

$$q_{[x-t]+t} = q_{[x-b]+b} =: q_x .$$

Die **ultimative Sterbewahrscheinlichkeit** q_x ändert sich also nicht mehr.

Beispiel 16. Wir betrachten eine Selektionsperiode von $b = 3$ Jahren. Das Alter der Person sei $x = 28$. In diesem Fall unterscheiden sich die selektiven Sterbewahrscheinlichkeiten

$$q_{[26]+2} \neq q_{[27]+1} \neq q_{[28]} ,$$

aber die ultimate Sterbewahrscheinlichkeit ist in allen Fällen gleich:

$$q_{[25]+3} = q_{[24]+4} = q_{[23]+5} = q_{[22]+6} = \dots =: q_{28} .$$

Die mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit bestimmt sich im Falle einer Selektionstafel als

$${}_t p_{[x]+s} = \begin{cases} \frac{l_{[x]+s+t}}{l_{[x]+s}} & \text{falls } s+t < b, \\ \frac{l_{x+s+t}}{l_{[x]+s}} & \text{falls } s+t \geq b, \end{cases}$$

sofern $s < b$. Andernfalls hat man

$${}_t p_{x+s} = \frac{l_{x+s+t}}{l_{x+s}}.$$

Alternativ zur Schreibweise $q_{[x-t]+t}$ mit $t = 0, \dots, b$ und der Selektionsperiode b wird häufig auch das Alter zum Zeitpunkt der Selektion erfasst und mit z bezeichnet. Die einjährige selektive Sterbewahrscheinlichkeit wird dann mit

$$q_{z,x}$$

notiert. Die Indizes repräsentieren nun das Alter z bei Selektion sowie das akutelle Alter $x \geq z$. Der seit Selektion vergangene Zeitraum entspricht der Differenz $x - z$. Für $x - z > b$ erhält man die ultimative Sterbewahrscheinlichkeit q_x .

5.2.5 Aktuelle Sterbetafeln

Die offiziellen Sterbetafeln der **Deutschen Aktuarvereinigung e.V.** (kurz: **DAV**) werden regelmäßig auf ihre Angemessenheit hin überprüft und bei Bedarf angepasst. Betroffen von einer Nichtanpassung wären in besonderem Maße Rentenversicherungen. Während sinkende Sterbewahrscheinlichkeiten bei Kapitallebens- und Risikoversicherungen zu einer Erhöhung der in der Sterbetafel enthaltenen Sicherheitszuschläge führen, würde dies bei Rentenversicherungen zu einer Unterschätzung des Langlebigkeitsrisikos führen. Vorausschauend werden bei Tafeln für Rentenversicherungen daher Trendfunktionen oder Altersverschiebungen berücksichtigt.

Im Zusammenhang mit der Bezeichnung von Sterbetafeln wird häufig auf den **Charakter der Lebensversicherung**, bei der die entsprechende Tafel verwendet wird, Bezug genommen. Man sagt, dass eine Versicherung **Todesfallcharakter** hat, sofern das riskierte Kapital (vgl. Kap. 9) positiv ist. Hingegen hat eine Versicherung **Erlebensfallcharakter**, wenn das riskierte Kapital negativ ist.

Die nachfolgend beschriebenen Sterbetafeln sind jeweils im Anhang tabelliert.

5.2.5.1 DAV 2008 T

Die Sterbetafel DAV 2008 T (Vorgänger: DAV 1994 T) ist eine nach Geschlecht differenzierende, eindimensionale Sterbetafel mit Startalter $x = 0$ und Schlussalter $\omega = 121$. Sie ist für Kapitallebens-, Risiko- und fondsgebundene Lebensversicherungen zu verwenden. Der Buchstabe „T“ deutet an, dass es sich um eine Tafel für Versicherungen mit Todesfallcharakter handelt.

Zusätzlich gibt es eine Differenzierung nach dem Raucherstatus, so dass es jeweils eine Variante „R“ für Raucher und „NR“ für Nichtraucher gibt.

5.2.5.2 DAV 2004 R

Die Sterbetafel DAV 2004 R (Vorgänger: DAV 1994 R) wird für Versicherungen mit Erlebensfallcharakter, also insbesondere Rentenversicherungen (daher der Buchstabe „R“ im Tafelnamen), verwendet. Die Tafel beginnt bei Alter $x = 0$ und hat ebenfalls das Schlussalter $\omega = 121$. Von dieser Tafel gibt es zwei Ausführungen. Einerseits liegt sie als eindimensionale Sterbetafel mit Altersverschiebung vor, bei der ausgehend von einer Grundtafel (für den Geburtsjahrgang $t_0 = 1965$) die Altersverschiebung nach Rueff angewendet wird.

Die alternative Variante ist die Repräsentation als zweidimensionale Sterbetafel. Ausgehend von einer Basistafel für das Jahr $t_0 = 1999$ werden die Sterbewahrscheinlichkeiten mittels einer Trendfunktion der Form

$$g(t_0, t, x) = \exp \{ - (t - t_0) \cdot F(x) \}$$

fortgeschrieben. Die Werte $F(x)$ – nicht zu verwechseln mit der Verteilungsfunktion einer zukünftigen Lebensdauer – sind sowohl alters- als auch geschlechtsspezifisch und liegen in Form eines Trendvektors vor.

Da man davon ausgeht, dass der Trend der Sterblichkeitsverbesserung nicht gleich bleibt, sondern sich im Laufe der Zeit abschwächen wird, hängt der Trendvektor 2. Ordnung zusätzlich auch noch vom Kalenderjahr ab. Zur Dämpfung des Trends findet sukzessive ein Übergang vom sog. Starttrend zu einem als Zieltrend bezeichneten Trendvektor statt.

Für die DAV 2004 R gibt es sowohl eine Aggregatatafel als auch eine Selektionsatafel – und für beide gibt es jeweils eine Basistafel sowie einen Trendvektor. Die Aggregatatafel kann sowohl für die Aufschubzeit als auch für den Rentenbezug verwendet werden, die Selektionstafel (mit einer Selektionsperiode von $b = 6$ Jahren) wird nur für den Rentenbezug verwendet. Die selektiven Sterbewahrscheinlichkeiten erhält man durch Multiplikation der ultimativen Sterbewahrscheinlichkeiten mit sogenannten **Selektionsfaktoren** f^s für die ersten fünf Jahre nach Rentenbeginn (d.h. $s = 1, \dots, 5$).

5.2.5.3 Unisex-Tafeln

Aufgrund europäischer Rechtsprechung müssen Versicherungen, die seit dem 21.12.2012 neu abgeschlossen werden, für Männer und Frauen gleich kalkuliert werden. Der Gesetzesbeschluss verfolgt das Ziel der Gleichbehandlung der Geschlechter, welche in deutschem Recht bereits im Jahr 2006 durch das **Allgemeine Gleichbehandlungsgesetz** (kurz: **AGG**) verankert wurde.

Diese Gleichbehandlung führt zu **Unisex-Tarifen**. Hierbei wird anstelle der bisher getrennten Sterbetafeln für Männern und Frauen eine einheitliche, für beide Geschlechter gültige Sterbetafel verwendet. Da die Sterblichkeiten weiterhin differenziert nach Geschlecht vorliegen, entsteht die Unisex-Tafel durch Mischung der beiden geschlechtsspezifischen Sterbetafeln, wobei sich das Mischungsverhältnis je nach Bestandszusammensetzung von VU zu VU unterscheiden kann.

Bezeichnet q_x^M die Sterbewahrscheinlichkeit eines x -jährigen Mannes und q_x^F die Sterbewahrscheinlichkeit einer x -jährigen Frau, so ergibt sich die Unisex-Sterbewahrscheinlichkeit q_x^U als Konvexitätskombination der beiden geschlechtspezifischen Werte, d.h.

$$q_x^U := \zeta_x \cdot q_x^M + (1 - \zeta_x) \cdot q_x^F$$

mit dem „Männeranteil“

$$\zeta_x := \frac{l_x^M}{l_x^M + l_x^F} \in [0; 1] .$$

Je nachdem, ob der Anteil ζ_x konstant ist oder mit dem Alter variiert, spricht man von einer **statischen Mischung** oder einer **dynamischen Mischung**. Da der Männeranteil ζ_x aufgrund der niedrigeren Frauensterblichkeit im Zeitablauf tendenziell sinkt, ist grundsätzlich der Ansatz einer dynamischen Mischung zu wählen. Dieser Effekt tritt jedoch erst in höheren Altern deutlich hervor und drückt sich in der höheren Lebenserwartung von Frauen aus. Daher wird eine dynamische Mischung oftmals nur für die Phase des Rentenbezugs gewählt. Ein mögliches Vorgehen ist es, von der bei Rentenübergang erwarteten Bestandszusammensetzung auszugehen und den Männeranteil anschließend rekursiv fortzuschreiben. Bezeichnen ζ^R den bei Rentenübergang vorliegenden Männeranteil und x_R das Alter bei Rentenübergang, so ist

$$\zeta_{x_R} = \zeta^R$$

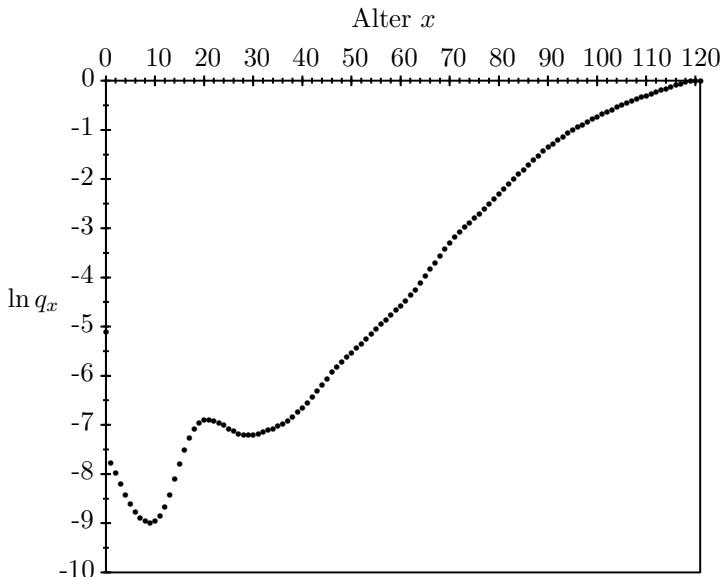
und für alle $x \geq x_R$

$$\zeta_{x+1} = \frac{\zeta_x \cdot (1 - q_x^M)}{\zeta_x \cdot (1 - q_x^M) + (1 - \zeta_x) \cdot (1 - q_x^F)} .$$

Sowohl bei Rentenversicherungen während der Aufschubzeit als auch bei Kapitallebens- und Risikoversicherungen kann man aus Vereinfachungsgründen – und sofern sich Männer und Frauen hinsichtlich ihres Kündigungsverhaltens nicht signifikant voneinander unterscheiden – durchaus von einem konstant bleibenden Mischungsverhältnis ausgehen, also $\zeta_x = \zeta^A$ für alle relevanten Alter x .

5.2.5.4 Typischer Verlauf

Im Folgenden wollen wir uns anschauen, welche Charakteristika die Sterblichkeiten in einer deutschen Sterbetafel aufweisen. Dabei ist es nachrangig, welche Art von Sterbetafel man betrachtet (Bevölkerungstafel, Versichertentafel, Todes- oder Erlebensfalltafel), denn die beschriebenen Eigenschaften finden sich in allen Tafeln wieder, ggf. unterschiedlich stark ausgeprägt oder auf einem anderen Niveau. Wir betrachten daher exemplarisch die Sterbetafel DAV 2008 T für Männer, deren einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten q_x im Anhang aufgeführt sind. Zur besseren Herausstellung der Effekte werden die q_x -Werte auf einer logarithmischen Skala abgetragen, d.h., wir betrachten das Alter x und die zugehörigen Werte $\ln q_x$.



Neugeborene (Alter $x = 0$) und Kleinkinder weisen eine hohe Säuglings- bzw. Kindersterblichkeit auf. Die geringste Sterblichkeit wird im Alter $x = 9$ erreicht. Im Altersbereich von etwa $x = 18$ bis $x = 26$ sind deutlich erhöhte Sterblichkeiten sichtbar, welche auf eine hohe Anzahl tödlicher Verkehrsunfälle in dieser Altersgruppe zurückzuführen sind. Der (optische)

Effekt wird daher auch als **Unfallbuckel** bezeichnet. Die Abbildung veranschaulicht ebenfalls, dass die Sterblichkeit auf der logarithmischen Skala über das Altersintervall [35; 90] annähernd linear verläuft (d.h., dass die Sterbewahrscheinlichkeiten exponentiell ansteigen).

5.3 Modifikation von Sterbewahrscheinlichkeiten

5.3.1 Eintrittsalter

Das Alter bei Versicherungsbeginn wird als Eintrittsalter bezeichnet (vgl. Abschn. 3.2). In praxi unterscheidet man zwischen dem **rechnerischen Eintrittsalter** und dem **technischen Eintrittsalter**. Das rechnerische Eintrittsalter entspricht i.d.R. dem nach der **Geburtsjahrmethode** ermittelten Alter, indem die Differenz aus dem Beginnjahr der Versicherung und dem Geburtsjahr der VP berechnet wird. Daneben gibt es die **Halbjahresmethode**, bei welcher das Alter sechs Monate vor und nach dem eigentlichen Geburtstag als „ein“ Alter gilt. Nur in seltenen Fällen wird das exakte Alter, d.h. unter Beachtung des Geburtstages der VP, als rechnerisches Eintrittsalter herangezogen. Das technische Eintrittsalter ergibt sich aus einer Modifikation des rechnerischen, indem etwa eine Altersverschiebung (siehe Abschn. 5.2.4.2) angewendet wird.

Bspw. werde eine aufgeschobene Rentenversicherung abgeschlossen. Der Versicherungsvertrag habe das Beginndatum 01.01.2016, und der Geburtstag der männlichen VP sei der 15.03.1981. Zum Zeitpunkt des Vertragsbeginns ist das tatsächliche Eintrittsalter der VP 34 Jahre (und 8,5 Monate). Das nach der Geburtsjahrmethode berechnete rechnerische Eintrittsalter entspricht 35 Jahre. Aufgrund einer negativen Altersverschiebung von vier Jahren (gemäß der Sterbetafel DAV 2004 R M) beträgt das technische Eintrittsalter 31 Jahre.

Soweit nicht anders vorgegeben, entspricht das Alter x immer dem technischen Alter. Falls nötig, notieren wir das rechnerische Alter zur Abgrenzung mit x' .

5.3.2 Wahrscheinlichkeiten für Vertragsänderungen

An dieser Stelle bietet es sich an, weitere Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, welche einen Einfluss auf den Vertragsverlauf haben. Die Sterblichkeit hängt zwar unmittelbar an der VP, kann von ihr jedoch nicht oder nur bedingt beeinflusst werden. Hingegen kann der VN durch das Treffen bestimmter Entscheidungen sehr wohl den Versicherungsverlauf beeinflussen.

So kann sich der VN dazu entschließen, den Vertrag vorzeitig zu kündigen oder zumindest beitragsfrei zu stellen. Bei aufgeschobenen Rentenversicherungen kann der VN zum Zeitpunkt des Rentenübergangs – sofern keine gesetzlichen Bestimmungen dem entgegenstehen – von seinem Kapitalwahlrecht Gebrauch machen (vgl. Abschn. 3.6.5) bzw. entscheiden, ob der Vertrag wie vorgesehen weiter läuft und in den Rentenbezug wechselt oder ob die Kapitalabfindung ausgezahlt werden soll.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten werden bei der Kalkulation zwar nicht berücksichtigt, sind jedoch für die tatsächliche Entwicklung des Versichertenbestands, den sog. **Bestandsabbau**, ebenso von Bedeutung wie die Sterblichkeit. Annahmen über das mögliche Kundenverhalten zählen somit zu den Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung (vgl. Abschn. 3.5).

5.3.3 Sterblichkeit und Storno

Wir untersuchen nun den Fall, dass neben die Sterblichkeit ein zweites Risiko bzw. eine zweite Ausscheideursache tritt, nämlich das Storno. Die nachfolgenden Ausführungen sind grundsätzlich zwar auch für Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung gültig, jedoch beschränken wir uns auf die gemeinsame Betrachtung von Sterblichkeit und Storno im Rahmen der Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung.

Dazu bezeichnet w'_x die einjährige Stornowahrscheinlichkeit (2. Ordnung) für eine Person des Alters x , d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass (x) den Vertrag innerhalb des nächsten Jahres kündigt. Diese Wahrscheinlichkeit trägt der Einfachheit halber nur den Index des Alters x , in der Praxis hängt sie üblicherweise von noch weiteren bzw. von anderen Faktoren ab, bspw. von der bereits abgelaufenen Dauer des Vertrags.

Außerdem führen wir die gängige Notation für Sterblichkeiten 2. Ordnung ein, indem q'_x die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit 2. Ordnung für eine Person des Alters x bezeichnet.

Für die Ermittlung der Anzahl der Lebenden (2. Ordnung), abweichend mit l_x^w bezeichnet, gibt es bei Vorliegen von zwei Ausscheidegründen verschiedene Herangehensweisen:

- Einerseits kann der additive Ansatz

$$l_{x+1}^w = l_x^w \cdot (1 - q'_x - w'_x)$$

gewählt werden. Die Anzahl der Toten wäre dann

$$d_x^w = l_x^w \cdot q'_x$$

und die Anzahl der Storni

$$s_x^w = l_x^w \cdot w'_x .$$

- Alternativ ist auch ein multiplikativer Ansatz möglich, welcher zu einer rekursiven Darstellung der Form

$$\begin{aligned} l_{x+1}^w &= l_x^w \cdot (1 - q'_x) \cdot (1 - w'_x) \\ &= l_x^w \cdot (1 - q'_x - w'_x + q'_x \cdot w'_x) \end{aligned}$$

führt. Da das Produkt $q'_x \cdot w'_x$ sehr klein ist, ist die zweite Variante im Ergebnis nahezu identisch mit dem erstgewählten Ansatz. Teilt man den gemischten Term $q'_x \cdot w'_x$ zwischen Toten und Storno mit einem Faktor $0 \leq \lambda \leq 1$ auf, so ist

$$l_{x+1}^w = l_x^w \cdot (1 - q'_x - w'_x + \lambda \cdot q'_x \cdot w'_x + (1 - \lambda) \cdot q'_x \cdot w'_x)$$

und damit

$$d_x^w = l_x^w \cdot (1 - (1 - \lambda) \cdot w'_x) \cdot q'_x$$

sowie

$$s_x^w = l_x^w \cdot (1 - \lambda \cdot q'_x) \cdot w'_x .$$

Die Interpretation ist die folgende:

In d_x^w können nur Personen sterben, die bis zum Zeitpunkt $1 - \lambda$ innerhalb des betrachteten Jahres noch nicht gekündigt haben (da sie andernfalls vorher durch Storno abgegangen wären). Umgekehrt wird in s_x^w die Kündigung nur gezählt, sofern der Vertrag bis zum Zeitpunkt λ innerhalb des Jahres nicht durch Tod abgegangen ist.

Auch wenn die beiden Herangehensweisen numerisch ähnliche Ergebnisse liefern, so sind sie ihrer Idee nach grundverschieden. Während die beiden Ausscheideursachen Tod und Storno im zweiten Ansatz als unabhängig voneinander angesehen werden, geht die erste Darstellung von abhängigen Wahrscheinlichkeiten aus. Dabei bedeutet **unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit**, dass die Ausscheideursache für sich alleine betrachtet wird und ohne Berücksichtigung der anderen Ausscheideursache(n) wirkt. Hingegen ist bei einer **abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeit** das gemeinsame Wirken der Ausscheideursachen in den Wahrscheinlichkeiten bereits „eingepreist“, wodurch sich auch die Darstellung als Summe ergibt.

Immer wenn mehrere Ausscheideursachen vorhanden sind, existieren sowohl abhängige als auch unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Im Kontext der Berufsunfähigkeitsversicherung (siehe Kap. 14) werden wir dieser Tatsache noch einmal begegnen und dort ausführlicher darauf eingehen.

5.3.4 Stress und Schocks

Die Begriffe Stress und Schock treten nicht nur im Zusammenhang mit Sterblichkeiten auf. Auch für Zinsen und andere Annahmen 2. Ordnung lassen sich Stress- oder Schock-Szenarien in der nachfolgend beschriebenen Weise definieren.

Wir gehen davon aus, dass wir ein Basisniveau von Sterblichkeiten oder kurz eine **Basissterblichkeit** 2. Ordnung haben.

Ein **Stress** stellt eine globale Änderung dieses Basisniveaus dar. Ein Sterblichkeits-Stress liegt also vor, wenn dauerhaft bspw. 25% mehr Personen sterben würden, oder anders ausgedrückt wenn die Sterblichkeit 2. Ordnung im Vergleich zum Basisniveau durchgängig um 25% höher wäre.

Hingegen ist ein **Schock** eine einmalig oder zumindest nur punktuell bzw. kurzzeitig auftretende Veränderung des Basisniveaus. Bspw. kann durch eine Epidemie oder Naturkatastrophe die Sterblichkeit in einem bestimmten Jahr um ein Vielfaches höher sein als die Basissterblichkeit.

Selbstverständlich muss es sich nicht immer um eine Erhöhung des Basisniveaus handeln, auch Abweichungen nach unten gelten als Stress oder Schock. Zudem muss die Veränderung nicht ausschließlich prozentual sein, sondern kann auch (ggf. zusätzlich) in absoluter Höhe vorliegen.

In Formeln lässt sich bspw. die gestresste oder geschockte Sterbewahrscheinlichkeit wie folgt darstellen:

$$q'_{x+m} = \min \left\{ 1; \max \left\{ 0; str_q^{\text{mult}}(m) \cdot q'^{\text{Basis}}_{x+m} + str_q^{\text{add}}(m) \right\} \right\}.$$

Dabei bezeichnet $str_q^{\text{mult}}(m)$ einen multiplikativen Stressfaktor und $str_q^{\text{add}}(m)$ einen additiven Stress-Term auf die Basissterblichkeit 2. Ordnung q'^{Basis}_{x+m} , die jeweils vom Vertragsjahr m abhängen.

5.4 Übungen

5.4.1 Aufgaben

Übung 15. Die zukünftige Lebensdauer eines Neugeborenen lasse sich durch die folgende Verteilungsfunktion beschreiben ($0 \leq \alpha < \beta$):

$$F_0(t) = 1 - (1 + \alpha \cdot t) \cdot e^{-\beta \cdot t} .$$

1. Leiten Sie Formeln für $F_x(t)$, ${}_tp_x$, μ_x und ${}_{s|t}q_x$ her.
2. Zeigen Sie, dass für die vollständige Lebenserwartung gilt:

$$\dot{e}_x = \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{(1 + \alpha \cdot x) \cdot \beta^2} .$$

3. Was fällt Ihnen im Spezialfall $\alpha = 0$ auf?

Übung 16. Sterbegesetz von de Moivre

Leiten Sie aus dem Ansatz

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

mit $0 \leq x < \omega = 86$ Formeln für die Sterbewahrscheinlichkeit q_x und die Anzahl der Lebenden l_x her.

Übung 17. Sterbegesetz von Gompertz

1. Zeigen Sie, dass bei Annahme des Sterbegesetzes von Gompertz die t -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit dargestellt werden kann als

$${}_tp_x = g^{c^x \cdot (c^t - 1)} ,$$

wobei $c \neq 1$ und $g = \exp \left\{ -\frac{B}{\ln c} \right\}$ ist. Was ergibt sich für $c = 1$?

2. Wie lautet die daraus resultierende Formel für die Anzahl der Lebenden l_x ?

Übung 18. Für die einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten gelte für ganzzahlige Alter x mit $80 \leq x \leq 84$ die Gleichung

$$p_x = \frac{89 - x}{10} .$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten q_{80} , ${}_2p_{80}$, ${}_5p_{80}$, ${}_3q_{82}$ sowie ${}_{2|3}q_{80}$, und geben Sie eine Schätzung für μ_{81} an.

Übung 19. Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} {}_tp_x = {}_tp_x \cdot (\mu_x - \mu_{x+t}) .$$

Übung 20. Berechnen Sie auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein 30-jähriger Mann

1. bis Alter 40 überlebt.
2. vor Erreichen des Alters 50 stirbt.
3. im 50. Lebensjahr stirbt.
4. zwischen dem 40. und 50. Geburtstag stirbt.
5. entweder zwischen den Altern 35 und 45 oder zwischen den Altern 70 und 80 stirbt.

Übung 21. Es wird angenommen, dass für $x \leq 100$ die Beziehung

$$\frac{l_x}{l_0} = \frac{20.000 - 100 \cdot x - x^2}{20.000}$$

gilt. Konstruieren Sie – ausgehend von einer Radix von 100.000 – für die Alter $x \in \{0; 1; 2\}$ die Werte l_x sowie d_x der zugehörigen Sterbetafel, und bestimmen Sie den Wert μ_1 .

Übung 22. Beweisen Sie, dass unter der Annahme UDD für die ferneren Lebenserwartungen die folgende Beziehung gilt:

$$\hat{e}_x = e_x + \frac{1}{2} .$$

Übung 23. Balducci-Annahme

Zeigen Sie, dass unter der Balducci-Annahme die folgenden Beziehungen gelten ($0 < t < 1$):

$$\begin{aligned} {}^t q_x &= \frac{t \cdot q_x}{1 - (1-t) \cdot q_x} , \\ {}^t p_x &= \frac{p_x}{1 - (1-t) \cdot q_x} , \\ \mu_{x+t} &= \frac{q_x}{1 - (1-t) \cdot q_x} . \end{aligned}$$

Übung 24. Eine Sterbetafel enthalte eine Selektionsdauer von drei Jahren. Berechnen Sie mit Hilfe der folgenden Angaben die Wahrscheinlichkeit ${}_3 p_{53}$:

$$q_{[50]} = 0,01601$$

$$2p_{[50]} = 0,96411$$

$${}^2|q_{[50]} = 0,02410$$

$${}^{2|3}q_{[50]+1} = 0,09272 .$$

5.4.2 Lösungen

Lösung 15. Zur Herleitung der gesuchten Größen wird die Überlebensfunktion benötigt. Diese lautet

$$\begin{aligned} SF_0(t) &= 1 - F_0(t) \\ &= (1 + \alpha \cdot t) \cdot e^{-\beta \cdot t}. \end{aligned}$$

1. Für die Überlebensfunktion einer x -jährigen Person gilt dann

$$\begin{aligned} SF_x(t) &= \frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)} \\ &= \frac{(1 + \alpha \cdot (x+t)) \cdot e^{-\beta \cdot (x+t)}}{(1 + \alpha \cdot x) \cdot e^{-\beta \cdot x}} \\ &= \frac{1 + \alpha \cdot (x+t)}{1 + \alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot t}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} F_x(t) &= 1 - SF_x(t) \\ &= 1 - \frac{1 + \alpha \cdot (x+t)}{1 + \alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot t}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} tp_x &= SF_x(t) \\ &= \frac{1 + \alpha \cdot (x+t)}{1 + \alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot t}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} SF_0(x) &= \alpha \cdot e^{-\beta \cdot x} + (1 + \alpha \cdot x) \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot (-\beta) \\ &= [\alpha - \beta \cdot (1 + \alpha \cdot x)] \cdot e^{-\beta \cdot x} \end{aligned}$$

erhält man für die Ausfallrate

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\frac{\frac{d}{dx} SF_0(x)}{SF_0(x)} = -\frac{[\alpha - \beta \cdot (1 + \alpha \cdot x)] \cdot e^{-\beta \cdot x}}{(1 + \alpha \cdot x) \cdot e^{-\beta \cdot x}} \\ &= -\frac{\alpha - \beta \cdot (1 + \alpha \cdot x)}{(1 + \alpha \cdot x)} \\ &= \frac{\beta \cdot (1 + \alpha \cdot x) - \alpha}{(1 + \alpha \cdot x)} \\ &= \beta - \frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot x}. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$s|t q_x = s p_x - s+t p_x$$

$$= \frac{1 + \alpha \cdot (x + s)}{1 + \alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot s} - \frac{1 + \alpha \cdot (x + s + t)}{1 + \alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot (s+t)} .$$

2. Die vollständige zukünftige Lebenserwartung erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \int_0^{\infty} t p_x \, dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{1 + \alpha \cdot (x + t)}{1 + \alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot t} \right] \, dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot x} \cdot t \right) \cdot e^{-\beta \cdot t} \, dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\beta \cdot t} \, dt + \frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot x} \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\beta \cdot t} \, dt \\ &= \underbrace{\left[-\frac{1}{\beta} \cdot e^{-\beta \cdot t} \right]_0^{\infty}}_{= \frac{1}{\beta}} + \frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot x} \cdot \left[\underbrace{\left[-\frac{t}{\beta} \cdot e^{-\beta \cdot t} \right]_0^{\infty}}_{= 0} + \frac{1}{\beta} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\beta \cdot t} \, dt \right] \\ &= \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{1 + \alpha \cdot x} \cdot \frac{1}{\beta^2} . \end{aligned}$$

3. Im Falle $\alpha = 0$ sind alle zuvor hergeleiteten Ausdrücke unabhängig vom Alter x , was äußerst unrealistisch erscheint.

Lösung 16. Sterbegesetz von de Moivre

Die Sterbewahrscheinlichkeit erhält man aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - p_x \\ &= 1 - \exp \left\{ - \int_x^{x+1} \mu_u \, du \right\} \\ &= 1 - \exp \left\{ - \int_x^{x+1} \frac{1}{86-u} \, du \right\} \\ &= 1 - \exp \left\{ - [-\ln(86-u)]_x^{x+1} \right\} \\ &= 1 - \exp \{ \ln(86-x-1) - \ln(86-x) \} \\ &= 1 - \frac{86-x-1}{86-x} \end{aligned}$$

und somit

$$q_x = \frac{1}{86 - x} .$$

Für die Anzahl der Lebenden ergibt sich dann analog

$$\begin{aligned} l_x &= l_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^x \mu_u \, du \right\} \\ &= l_0 \cdot \exp \{ \ln(86 - x) - \ln(86) \} \\ &= l_0 \cdot \frac{86 - x}{86} \end{aligned}$$

bzw. bei Wahl von $l_0 = 86$ die linear fallende Funktion $l_x = 86 - x$.

Lösung 17. Sterbegesetz von Gompertz

1. Es ist

$${}_t p_x = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} \mu_u \, du \right\} = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} (B \cdot c^u) \, du \right\} .$$

Im Fall $c \neq 1$ hat man

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \exp \left\{ \left[-\frac{B}{\ln c} \cdot c^u \right]_x^{x+t} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{B}{\ln c} \cdot (c^{x+t} - c^x) \right\} \\ &= \underbrace{\left(\exp \left\{ -\frac{B}{\ln c} \right\} \right)}_{=: g}^{c^{x+t} - c^x} \\ &= g^{c^x \cdot (e^t - 1)} . \end{aligned}$$

Für $c = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \exp \left\{ - \int_x^{x+t} B \, du \right\} \\ &= e^{-B \cdot t} , \end{aligned}$$

was unabhängig von x ist und somit der Annahme einer Exponentialverteilung für die zukünftige Lebensdauer T_x entspricht.

2. Für die Anzahl der Lebenden erhält man – ausgehend von einer Radix $l_0 = 1$ – die Darstellung

$$l_x = {}_x p_0 \cdot l_0 = g^{c^0 \cdot (c^x - 1)} = k \cdot g^{c^x},$$

wobei $k = g^{-1}$ ist. Für $c = 1$ ist

$$l_x = {}_x p_0 = e^{-B \cdot x}.$$

Für das Gompertz-Makeham'sche Gesetz ergeben sich übrigens (falls $c \neq 1$)

$${}_t p_x = \exp \left\{ -A \cdot t - \frac{B}{\ln c} \cdot (c^{x+t} - c^x) \right\} = s^t \cdot g^{c^x \cdot (c^t - 1)},$$

wobei $s = \exp \{-A\}$ und $g = \exp \left\{ -\frac{B}{\ln c} \right\}$ sind, sowie

$$l_x = {}_x p_0 = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

mit $k = g^{-1}$.

Lösung 18. Man berechnet

$$\begin{aligned} q_{80} &= 1 - p_{80} \\ &= 1 - \frac{89 - 80}{10} = 1 - 0,9 = 0,1 \\ {}_2 p_{80} &= p_{80} \cdot p_{81} \\ &= \frac{89 - 80}{10} \cdot \frac{89 - 81}{10} = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72 \\ {}_5 p_{80} &= p_{80} \cdot p_{81} \cdot p_{82} \cdot p_{83} \cdot p_{84} \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,1512 \\ {}_3 q_{82} &= 1 - {}_3 p_{82} \quad (= 1 - p_{82} \cdot p_{83} \cdot p_{84}) \\ &= 1 - \frac{{}_2 p_{80}}{2 p_{80}} = 1 - \frac{0,1512}{0,72} = 0,79 \\ {}_2|{}_3 q_{80} &= {}_2 p_{80} - {}_5 p_{80} \\ &= 0,72 - 0,1512 = 0,5688 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} {}_2|{}_3 q_{80} &= {}_2 p_{80} \cdot {}_3 q_{82} \\ &= 0,72 \cdot 0,79 = 0,5688. \end{aligned}$$

Für die Schätzung der Sterbeintensität μ_{81} gibt es mehrere Möglichkeiten:
Die Annahme einer konstanten Ausfallrate (CFM) führt zu

$$\begin{aligned} p_{81} &= e^{-\mu} \\ 0,8 &= e^{-\mu} \\ \mu &= \mu_{81} = -\ln 0,8 = 0,2231 . \end{aligned}$$

Die Anwendung der Tangenten-Trapezregel auf das Integral

$${}_2p_{80} = \exp \left\{ - \int_{80}^{82} \mu_t \, dt \right\}$$

liefert

$$-\ln {}_2p_{80} = \int_{80}^{82} \mu_t \, dt \approx 2 \cdot \mu_{81}$$

und folglich

$$\mu_{81} = -\frac{1}{2} \cdot \ln 0,72 = 0,1643 .$$

Lösung 19. Mit

$$\mu_x = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} SF_0(x)}{SF_0(x)}$$

und

$${}_t p_x = SF_x(t) = \frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} {}_t p_x &= \frac{\partial}{\partial x} SF_x(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{SF_0(x+t)}{SF_0(x)} \right) \\ &= \frac{SF_0(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} SF_0(x+t) - SF_0(x+t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} SF_0(x)}{[SF_0(x)]^2} \\ &= \frac{SF_0(x+t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} SF_0(x+t)}{SF_0(x)} - \frac{SF_0(x+t) \cdot \frac{\partial}{\partial x} SF_0(x)}{SF_0(x)} \\ &= {}_t p_x \cdot (-\mu_{x+t}) - {}_t p_x \cdot (-\mu_x) \\ &= {}_t p_x \cdot (\mu_x - \mu_{x+t}) . \end{aligned}$$

Lösung 20. Die aus der Sterbetafel DAV 2008 T M benötigten Werte l_x sind im Anhang tabelliert.

1.

$${}_{10}p_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}} = \frac{969.933}{978.799} = 0,990942$$

2.

$${}_{20}q_{30} = \frac{l_{30} - l_{50}}{l_{30}} = \frac{978.799 - 947.629}{978.799} = 0,031845$$

3.

$${}_{19|}q_{30} = \frac{l_{49} - l_{50}}{l_{30}} = \frac{951.081 - 947.629}{978.799} = 0,003527$$

4.

$${}_{10|10}q_{30} = \frac{l_{40} - l_{50}}{l_{30}} = \frac{969.933 - 947.629}{978.799} = 0,022787$$

oder

$${}_{10|10}q_{30} = {}_{10}p_{30} - {}_{20}p_{30} = 0,990942 - (1 - 0,031845) = 0,022787$$

5.

$$\begin{aligned} {}_{5|10}q_{30} + {}_{40|10}q_{30} &= \frac{l_{35} - l_{45} + l_{70} - l_{80}}{l_{30}} \\ &= \frac{974.903 - 961.922 + 731.511 - 389.904}{978.799} \\ &= 0,36227 \end{aligned}$$

Lösung 21. Aus der Gleichung

$$l_x = 100.000 - 500 \cdot x - 5 \cdot x^2$$

berechnet man zunächst die notwendigen Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} {}_{1}p_0 &= \frac{l_1}{l_0} = \frac{20.000 - 100 - 1}{20.000} = 0,99495 \\ {}_{2}p_0 &= \frac{l_2}{l_0} = \frac{20.000 - 200 - 4}{20.000} = 0,98980 \\ {}_{3}p_0 &= \frac{l_3}{l_0} = \frac{20.000 - 300 - 9}{20.000} = 0,98455. \end{aligned}$$

Wegen $d_x = l_x - l_{x+1}$ ergibt sich dann folgende Sterbetafel:

x	l_x	d_x
0	100.000	505
1	99.495	515
2	98.980	525
3	98.455	—

Zur Schätzung der Ausfallrate μ_x verwendet man die Beziehung

$$\mu_x = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} l_x}{l_x} = \frac{500 + 10 \cdot x}{100.000 - 500 \cdot x - 5 \cdot x^2},$$

was für $x = 1$ den Wert

$$\mu_1 = \frac{510}{99.495} = 0,005126$$

liefert.

Lösung 22. Es ist

$$\ddot{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt \quad \text{und} \quad e_x = \sum_{c=1}^\infty {}_c p_x.$$

Unter der Annahme von UDD gilt ${}_t p_x = 1 - t \cdot q_x = 1 - t \cdot (1 - p_x)$ für alle $0 < t < 1$ und alle $0 \leq x \leq \omega$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_x &= \int_0^\infty {}_t p_x dt = \sum_{c=0}^\infty \left(\int_c^{c+1} {}_t p_x dt \right) = \sum_{c=0}^\infty \left(\int_0^1 {}_{t+c} p_x dt \right) \\ &= \sum_{c=0}^\infty \left(\int_0^1 {}_t p_{x+c} \cdot {}_c p_x dt \right) = \sum_{c=0}^\infty \left({}_c p_x \cdot \int_0^1 {}_t p_{x+c} dt \right) \\ &= \sum_{c=0}^\infty \left({}_c p_x \cdot \int_0^1 [1 - t \cdot (1 - p_{x+c})] dt \right) \\ &= \sum_{c=0}^\infty \left({}_c p_x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + p_{x+c}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{c=0}^\infty ({}_c p_x + {}_{c+1} p_x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{c=0}^\infty {}_c p_x + \sum_{c=0}^\infty {}_{c+1} p_x \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{c=1}^\infty {}_c p_x + \sum_{c=1}^\infty {}_c p_x \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \cdot e_x) \\ &= e_x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lösung 23. Unter der Balducci-Annahme gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{SF_x(t)} &= (1-t) \cdot \frac{1}{SF_x(0)} + t \cdot \frac{1}{SF_x(1)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{tp_x} &= (1-t) + t \cdot \frac{1}{p_x} \Leftrightarrow \\ tp_x &= \frac{p_x}{(1-t) \cdot p_x + t} \Leftrightarrow \\ tp_x &= \frac{p_x}{(1-t) \cdot (1-q_x) + t} \Leftrightarrow \\ tp_x &= \frac{p_x}{1 - (1-t) \cdot q_x}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}tq_x &= 1 - tp_x \\ &= 1 - \frac{p_x}{1 - (1-t) \cdot q_x} \\ &= \frac{1 - (1-t) \cdot q_x - p_x}{1 - (1-t) \cdot q_x} \\ &= \frac{t \cdot q_x}{1 - (1-t) \cdot q_x}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= -\frac{1}{tp_x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} tp_x \\ &= -\frac{1 - (1-t) \cdot q_x}{p_x} \cdot \frac{-p_x \cdot q_x}{(1 - (1-t) \cdot q_x)^2} \\ &= \frac{q_x}{1 - (1-t) \cdot q_x}.\end{aligned}$$

Lösung 24. Zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit sind schrittweise mehrere Gleichungen zu lösen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}q_{[50]} &= \frac{l_{[50]} - l_{[50]+1}}{l_{[50]}} = 0,01601 \\ 2p_{[50]} &= \frac{l_{[50]+2}}{l_{[50]}} = 0,96411 \\ 2|q_{[50]} &= \frac{l_{[50]+2} - l_{[50]+3}}{l_{[50]}} = 0,02410 \\ 2|3q_{[50]+1} &= \frac{l_{[50]+3} - l_{[50]+6}}{l_{[50]+1}} = 0,09272.\end{aligned}$$

Mit $l_{[50]} = 100.000$ berechnet man:

$$l_{[50]+1} = (1 - q_{[50]}) \cdot l_{[50]} = 98.399$$

$$l_{[50]+2} = {}_2 p_{[50]} \cdot l_{[50]} = 96.411$$

$$l_{[50]+3} = l_{[50]+2} - {}_2 q_{[50]} \cdot l_{[50]} = 94.001$$

$$l_{[50]+6} = l_{[50]+3} - {}_2 {}_3 q_{[50]+1} \cdot l_{[50]+1} = 84.877 .$$

Da die Selektionsphase drei Jahre umfasst, ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus

$${}_3 p_{53} = \frac{l_{56}}{l_{53}} = \frac{l_{[50]+6}}{l_{[50]+3}} = 0,90294 .$$

Kapitel 6

Erwartete Barwerte

Basierend auf den beiden Rechnungsgrundlagen Zins und Biometrie sind wir nun in der Lage, Leistungsbarwerte für verschiedene Versicherungsprodukte herzuleiten. Präziser handelt es sich um erwartete Barwerte, da nicht gewiss ist, ob und wann die Versicherungsleistung zu zahlen ist. Barwerte von Rentenleistungen werden später auch als Prämienbarwerte verwendet.

Lebensversicherer bieten eine Vielzahl von Deckungen an. Im Folgenden beschränken wir uns auf die in Kap. 3.6 beschriebenen Produktarten, welche die größte Relevanz besitzen. Selbstverständlich können nahezu beliebige Deckungen – ggf. durch Kombination verschiedener Standard-Produkte – konstruiert werden.

Soweit nichts anderes erwähnt wird, beziehen sich alle nachfolgend vorgestellten erwarteten Barwerte auf eine normierte Versicherungssumme bzw. Jahresrente der Höhe 1. Sofern im Laufe eines Jahres k Zahlungen erfolgen, wird der Jahresbetrag in gleich große Zahlungen der Höhe $\frac{1}{k}$ aufgeteilt. Für eine Versicherungssumme oder Jahresrente der Höhe B müssen die entsprechenden Leistungsbarwerte lediglich mit dem Faktor B multipliziert werden.

Der Zinssatz wird wieder mit i bezeichnet, und die VP habe bei Vertragsbeginn das (technische) Alter x .

6.1 Kommutationszahlen

Um aktuarielle Berechnungen übersichtlich zu halten, werden sogenannte **Kommutationszahlen** verwendet. Früher diente dieses Konstrukt insbesondere zur Reduzierung von Rechenzeiten, jedoch kann dieser Grund heutzutage eher vernachlässigt werden. Dennoch finden die nachfolgenden Abkürzungen weiterhin Verwendung und erlauben eine komprimierte Darstellung versicherungsmathematischer Barwerte:

1. Kommutationszahlen 1. Ordnung:

- $D_x = l_x \cdot v^x$
- $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$

2. Kommutationszahlen 2. Ordnung:

- $N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega$
- $M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \dots + C_\omega$

3. Kommutationszahlen 3. Ordnung:

- $S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j} = \sum_{j=0}^{\omega-x} (j+1) \cdot D_{x+j}$
- $R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j} = \sum_{j=0}^{\omega-x} (j+1) \cdot C_{x+j}$

Die Werte D_x bzw. C_x werden auch als **diskontierte Lebende** bzw. **diskontierte Tote** bezeichnet. Entsprechend repräsentieren die Werte N_x bzw. M_x die Summe der diskontierten Lebenden bzw. Toten. Die Kommutationszahlen D , N und S stehen in Bezug zu Erlebensfall-Leistungen, während C , M und R im Zusammenhang mit Todesfall-Leistungen verwendet werden.

Als Merkhilfe mag Folgendes dienen: Entsprechend ihrer Konstruktion kann man sich die Namen derjenigen Kommutationszahlen, die mit Lebenden zu tun haben, leicht als das genetische Erbgut $D-N-S$ merken. Daraus erhält man die Reihe $C-M-R$ für die mit Toten assoziierten Kommutationszahlen einfach durch Verschiebung im Alphabet um einen Buchstaben nach vorne.

Aufgrund der Beziehungen

$$\begin{aligned} N_x &= D_x + N_{x+1}, & S_x &= N_x + S_{x+1}, \\ M_x &= C_x + M_{x+1}, & R_x &= M_x + R_{x+1} \end{aligned}$$

können die Kommutationszahlen 2. und 3. Ordnung auch rekursiv berechnet werden.

Die Kommutationszahlen für die Toten können mittels der Kommutationszahlen für die Lebenden ausgedrückt werden. Der umgekehrte Weg ist übrigens nicht möglich. In Geschäftsplänen oder Mitteilungen an die BaFin gemäß § 143 VAG werden daher teilweise auch nur die Kommutationszahlen für die Lebenden verwendet.

Es gelten bspw. die Identitäten

$$C_x = v \cdot D_x - D_{x+1}$$

sowie

$$M_x = v \cdot N_x - N_{x+1} ,$$

denn

$$\begin{aligned} v \cdot D_x - D_{x+1} &= v \cdot l_x \cdot v^x - l_{x+1} \cdot v^{x+1} \\ &= (l_x - l_{x+1}) \cdot v^{x+1} \\ &= d_x \cdot v^{x+1} \\ &= C_x \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} v \cdot N_x - N_{x+1} &= v \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k} - \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+1+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} \underbrace{(v \cdot D_{x+k} - D_{x+1+k})}_{=C_{x+k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k} \\ &= M_x . \end{aligned}$$

6.2 Erwartungswert von Versicherungsleistungen

Sämtliche der im Folgenden hergeleiteten (erwarteten) Leistungsbarwerte haben jeweils die Gestalt

$$E [PV] = \sum_t b(t) \cdot p(t) \cdot v(t) .$$

Dabei ist

- $b(t)$ die Leistung zum Zeitpunkt t ,
- $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Leistung zum Zeitpunkt t fällig wird,

und

- $v(t)$ der zugehörige Diskontfaktor, mit dem die Zahlung auf den Versicherungsbeginn, also den Zeitpunkt 0, abgezinst wird.

6.2.1 Barwerte von Erlebensfallleistungen

6.2.1.1 Reine Erlebensfall-Versicherung

Hierbei wird die Versicherungssumme i.H.v. 1 zum Zeitpunkt n genau dann fällig, wenn die versicherte Person zu diesem Zeitpunkt noch lebt, d.h. wenn die versicherte Person (x) genau n Jahre überlebt.

Der Barwert PV dieser Leistung ist eine Zufallsvariable, welche den Wert v^n mit Wahrscheinlichkeit ${}_n p_x$ und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - {}_n p_x$ annimmt. Folglich ist der Erwartungswert des Barwertes

$$\begin{aligned} E[PV] &= {}_n p_x \cdot v^n + (1 - {}_n p_x) \cdot 0 \\ &= {}_n p_x \cdot v^n \\ &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_x}. \end{aligned}$$

Der erhaltene Leistungsbarwert wird üblicherweise mit ${}_n E_x$ oder $A_{x:\overline{n}}$ notiert. Die Ziffer „1“ über der Dauer n deutet an, dass die Betonung auf der zu überlebenden Dauer n liegt.

6.2.1.2 Lebenslange Leibrente

Bei der lebenslangen Leibrente erfolgt jährlich eine Rentenzahlung i.H.v. 1 während der gesamten zukünftigen Lebensdauer von (x) , d.h. solange (x) lebt. Die Rentenzahlung kann entweder vorschüssig oder nachschüssig erfolgen.

Im Falle einer vorschüssigen Rentenzahlung wird der Barwert PV dieser Leistung mit $\ddot{a}_{\overline{K_x+1}}$ notiert, wobei K_x die gestutzte zukünftige Lebensdauer von (x) bezeichnet (vgl. Abschn. 5.1.4). Der erwartete Barwert ist dann

$$\begin{aligned} E[PV] &= E\left[\ddot{a}_{\overline{K_x+1}}\right] = \sum_{j=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{k+1}} \cdot P(K_x = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1 - v^{j+1}}{1 - v} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1 - v^{j+1}}{1 - v} \cdot ({}_j p_x - {}_{j+1} p_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{j+1}}{1-v} \cdot {}_j p_x - \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{j+1}}{1-v} \cdot {}_{j+1} p_x \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1-v^j + v^j - v^{j+1}}{1-v} \cdot {}_j p_x - \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{j+1}}{1-v} \cdot {}_{j+1} p_x \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{1-v^j}{1-v} \cdot {}_j p_x + \sum_{j=0}^{\omega-x} v^j \cdot {}_j p_x - \sum_{j=1}^{\omega-x} \frac{1-v^j}{1-v} \cdot {}_j p_x \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} v^j \cdot {}_j p_x \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_j E_x \\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+j}}{D_x} \\
&= \frac{N_x}{D_x}.
\end{aligned}$$

Alternativ ist eine direkte Herleitung analog zur ewigen (Zeit)Rente (vgl. Abschn. 4.2.2.5) möglich:

$$\begin{aligned}
E[PV] &= 1 + p_x \cdot v + {}_2 p_x \cdot v^2 + \dots \\
&= \frac{l_x \cdot v^x}{l_x \cdot v^x} + \frac{l_{x+1} \cdot v^{x+1}}{l_x \cdot v^x} + \frac{l_{x+2} \cdot v^{x+2}}{l_x \cdot v^x} + \dots \\
&= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots}{D_x} \\
&= \frac{N_x}{D_x}.
\end{aligned}$$

Der erwartete Barwert einer lebenslangen vorschüssigen Leibrente wird mit \ddot{a}_x notiert.

Wird die jährliche Rente nachschüssig gezahlt, so lautet der Barwert der Leistung $PV = a_{\overline{K}_x}$. Für den Erwartungswert, der mit a_x bezeichnet wird, ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{aligned}
E[PV] &= p_x \cdot v + {}_2 p_x \cdot v^2 + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k E_x \\
&= \frac{N_{x+1}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Wegen $N_x = D_x + N_{x+1}$ sieht man unmittelbar, dass

$$\ddot{a}_x = a_x + 1 .$$

6.2.1.3 Temporäre Leibrente

Hierbei wird die Leibrente nicht lebenslang, sondern für einen festgelegten (maximalen) Zeitraum n gezahlt, d.h., die Rentenzahlung erfolgt, solange (x) lebt, aber höchstens n Jahre lang.

Bei jährlich vorschüssiger Rentenzahlung ergibt sich ein erwarteter Barwert von

$$\begin{aligned} E[PV] &= E\left[\ddot{a}_{\min\{K_x+1;n\}}\right] \\ &= 1 + p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} , \end{aligned}$$

welcher mit $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$ symbolisiert wird.

Erfolgt die Rentenzahlung jährlich nachschüssig, wird der erwartete Barwert mit $a_{x:\overline{n}}$ notiert, und dieser berechnet sich als

$$\begin{aligned} E[PV] &= E\left[a_{\min\{K_x;n\}}\right] \\ &= p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1} + {}_n p_x \cdot v^n \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} . \end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Leistungsbarwerten gelten die Beziehungen

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = a_{x:\overline{n}} + 1 - {}_n E_x \tag{6.1}$$

und

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = 1 + a_{x:\overline{n-1}} ,$$

denn

$$a_{x:\overline{n}} + 1 - {}_n E_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_x}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overbrace{D_x + N_{x+1}}^{=N_x} - \overbrace{(N_{x+n+1} + D_{x+n})}^{=N_{x+n}}}{D_x} \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \ddot{a}_{x:\bar{n}}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
1 + a_{x:\bar{n}-1} &= \frac{D_x}{D_x} + \frac{N_{x+1} - N_{x+(n-1)+1}}{D_x} \\
&= \frac{\overbrace{D_x + N_{x+1}}^{=N_x} - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \ddot{a}_{x:\bar{n}}.
\end{aligned}$$

6.2.1.4 Aufgeschobene Leibrente

Bei einer aufgeschobenenen Leibrente beginnt die Zahlung der Leibrente erst nach Ablauf einer Aufschubdauer von u Jahren, vorausgesetzt, dass (x) bis dahin überlebt hat.

Der erwartete Barwert einer aufgeschobenen lebenslang vorschüssig zahlbaren Leibrente wird mit ${}_u|\ddot{a}_x$ notiert und entspricht

$$\begin{aligned}
E[PV] &= {}_u p_x \cdot v^u + {}_{u+1} p_x \cdot v^{u+1} + {}_{u+2} p_x \cdot v^{u+2} + \dots \\
&= {}_u p_x \cdot v^u \cdot (1 + p_{x+u} \cdot v + {}_2 p_{x+u} \cdot v^2 + \dots) \\
&= {}_u E_x \cdot \ddot{a}_{x+u} \\
&= \frac{N_{x+u}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Der analoge erwartete Barwert einer aufgeschobenenen temporären vorschüssigen Leibrente ist

$$\begin{aligned}
E[PV] &= {}_u p_x \cdot v^u + {}_{u+1} p_x \cdot v^{u+1} + \dots + {}_{u+n-1} p_x \cdot v^{u+n-1} \\
&= {}_u E_x \cdot \ddot{a}_{x+u:\bar{n}} \\
&= \frac{N_{x+u} - N_{x+u+n}}{D_x}
\end{aligned}$$

und wird durch das Symbol ${}_u|\ddot{a}_{x:\bar{n}}$ repräsentiert.

Eine sofort beginnende lebenslange Leibrente lässt sich in eine temporäre Leibrente sowie eine aufgeschobene lebenslange Leibrente zerlegen:

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}} + {}_{n|}\ddot{a}_x .$$

Umgekehrt kann eine temporäre Leibrente als Differenz zweier Ausdrücke dargestellt werden, welche auf lebenslangen Leibrenten basieren:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \ddot{a}_x - {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n} .$$

Schließlich kann eine aufgeschobene temporäre Leibrente als Differenz zweier sofort beginnender temporärer Leibrenten dargestellt werden:

$${}_{u|}\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \ddot{a}_{x:\overline{n+u}} - \ddot{a}_{x:\overline{u}} .$$

Als Spezialfälle von aufgeschobenen Leibrenten hat man für $u = 1$

$${}_{1|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 1 = a_x$$

sowie für $u = 0$

$${}_{0|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x .$$

Für nicht-ganzzahlige Werte von $u \in]0; 1[$ kann der erwartete Barwert ${}_{u|}\ddot{a}_x$ mittels linearer Interpolation approximiert werden, indem

$$\begin{aligned} {}_{u|}\ddot{a}_x &\approx (1-u) \cdot {}_{0|}\ddot{a}_x + u \cdot {}_{1|}\ddot{a}_x \\ &= (1-u) \cdot \ddot{a}_x + u \cdot (\ddot{a}_x - 1) \\ &= \ddot{a}_x - u \cdot \ddot{a}_x + u \cdot \ddot{a}_x - u \end{aligned}$$

und somit

$${}_{u|}\ddot{a}_x \approx \ddot{a}_x - u . \quad (6.2)$$

Entsprechende Formeln für nachschüssig zahlbare aufgeschobene Leibrenten können über die Beziehungen aus den vorherigen Abschnitten hergeleitet werden.

6.2.1.5 Arithmetisch steigende Leibrente

Eine arithmetisch (d.h. linear) steigende Leibrente beginnt mit einer Zahlung der Höhe 1, welche mit Ablauf des ersten Jahres jährlich um den Betrag 1 ansteigt. Sofern die Anzahl Jahre des planmäßigen Anstiegs unbegrenzt ist, entfällt hier der Zeitindex am Buchstaben „I“ im Vergleich zur Notation in Abschn. 4.2.2.6.

Der erwartete Barwert einer lebenslang arithmetisch steigenden, vorschüssig zahlbaren Leibrente ist

$$\begin{aligned}
 (I\ddot{a})_x &= E \left[(I\ddot{a})_{\overline{K_x+1}} \right] \\
 &= 1 + 2 \cdot p_x \cdot v + 3 \cdot {}_2p_x \cdot v^2 + \dots \\
 &= \sum_{j=0}^{\omega-x} (j+1) \cdot {}_jE_x \\
 &= \frac{S_x}{D_x}
 \end{aligned}$$

sowie bei nachschüssiger Rentenzahlung

$$(Ia)_x = E \left[(Ia)_{\overline{K_x}} \right] = \sum_{j=1}^{\omega-x} j \cdot {}_jE_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}.$$

Der Erwartungswert des Barwertes $PV = (I\ddot{a})_{\min\{1+K_x, n\}}$ einer arithmetisch steigenden vorschüssigen temporären Leibrente ist

$$\begin{aligned}
 (I\ddot{a})_{x:\overline{n}} &= E \left[(I\ddot{a})_{\min\{K_x+1; n\}} \right] \\
 &= 1 + 2 \cdot p_x \cdot v + \dots + n \cdot {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1} \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \cdot {}_jE_x \\
 &= \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

bzw. bei nachschüssiger Rentenzahlung

$$\begin{aligned}
 (Ia)_{x:\overline{n}} &= E \left[(Ia)_{\min\{K_x; n\}} \right] = \sum_{j=1}^n j \cdot {}_jE_x \\
 &= \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x}.
 \end{aligned}$$

Die vor- und nachschüssigen Barwerte sind wiederum über die Beziehungen

$$(I\ddot{a})_x = (Ia)_x + \ddot{a}_x$$

und

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}} = (Ia)_{x:\overline{n}} + \ddot{a}_{x:\overline{n}} - n \cdot {}_nE_x$$

miteinander verknüpft.

Sofern die Rente planmäßig nur l Jahre lang steigen soll, hat man

$$\begin{aligned}(I_{\bar{l}} \ddot{a})_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} \min \{j+1; l\} \cdot {}_j E_x \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (j+1) \cdot {}_j E_x + \sum_{j=l}^{\omega-x} l \cdot {}_j E_x \\ &= (I \ddot{a})_{x:\bar{l}} + l \cdot {}_{l|} \ddot{a}_x\end{aligned}$$

bzw. (mit $l \leq n$)

$$(I_{\bar{l}} \ddot{a})_{x:\bar{n}} = (I \ddot{a})_{x:\bar{l}} + l \cdot {}_{l|} \ddot{a}_{x:\overline{n-l}} .$$

6.2.1.6 Geometrisch steigende Leibrente

Bei einer geometrisch steigenden Leibrente steigen die jährlichen Rentenzahlungen nicht um einen konstanten absoluten Betrag, sondern um einen konstanten Steigerungssatz r .

Mit dem Diskontfaktor $v = \frac{1}{1+i}$ ergibt sich für den erwarteten Barwert einer lebenslang vorschüssig zahlbaren, geometrisch steigenden Leibrente folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}E[PV] &= 1 + (1+r) \cdot p_x \cdot v + (1+r)^2 \cdot {}_2 p_x \cdot v^2 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} (1+r)^j \cdot {}_j p_x \cdot \frac{1}{(1+i)^j} \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_j p_x \cdot \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_j p_x \cdot \tilde{v}^j\end{aligned}$$

wobei \tilde{v} wiederum der Diskontfaktor zum neuen Zinssatz $\tilde{i} := \frac{i-r}{1+r}$ ist.

Analog zu Abschn. 4.2.2.6 erkennt man, dass dieser erwartete Barwert demjenigen einer lebenslang vorschüssig zahlbaren (konstanten) Leibrente zum neuen Zins \tilde{i} entspricht, so dass wiederum gilt:

$$\% (I \ddot{a})_x = \tilde{i} \ddot{a}_x .$$

6.2.1.7 Leibrente mit Rentengarantiezeit

Ist zu der Leibrente eine Rentengarantiezeit vereinbart (vgl. Abschn. 3.6.5), so wird die Rente lebenslang, bei temporären Leibrenten längstens bis zum vereinbarten Ende der Laufzeit gezahlt, jedoch unabhängig vom Erleben mindestens für die Dauer der Rentengarantiezeit. Verstirbt die VP während der Rentengarantiezeit, können die dann noch erfolgenden Zahlungen als eine Art Todesfallleistung aufgefasst werden.

Bezeichne g die Dauer der Rentengarantiezeit. Da die Zahlungen während der Rentengarantiezeit auf jeden Fall erfolgen, entspricht der Barwert dieser Zahlungen dem üblichen Barwert einer temporären Zeitrente (siehe Abschn. 4.2.2.2). Der erwartete Barwert einer sofort beginnenden lebenslangen vorschüssigen Leibrente mit Rentengarantiezeit lautet in diesem Fall

$$E[PV] = \ddot{a}_{\overline{g}} + {}_{g|}\ddot{a}_x .$$

Für eine um u Jahre aufgeschobene vorschüssige Leibrente mit Rentengarantiezeit g ergibt sich der Leistungsbarwert

$$E[PV] = {}_{u|}\ddot{a}_{\overline{g}} + {}_{u+g|}\ddot{a}_x .$$

Zwar verwenden *Bowers et al. (1997)*, S. 146, für den ersten dieser beiden zusammengesetzten Barwerte die Notation $\ddot{a}_{\overline{x:\overline{g}}}$, jedoch übernehmen wir dies hier nicht.

6.2.1.8 Unterjährige Leibrente

Bei einer unterjährigen Leibrente wird die Rente der Jahreshöhe 1 in k gleich großen Teilzahlungen der Höhe $\frac{1}{k}$ geleistet, und zwar so lange (x) lebt.

Der Erwartungswert des Barwertes $PV = \ddot{a}_{\overline{K_x^{(k)} + \frac{1}{k}}}$ einer lebenslang unterjährig vorschüssig zahlbaren Leibrente wird mit $\ddot{a}_x^{(k)}$ notiert und entspricht

$$\begin{aligned} E[PV] &= E\left[\ddot{a}_{\overline{K_x^{(k)} + \frac{1}{k}}}\right] \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} p_x \cdot v^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} p_x \cdot v^{\frac{2}{k}} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{j}{k} p_x \cdot v^{\frac{j}{k}} . \end{aligned}$$

Dabei ist $K_x^{(k)}$ die auf Vielfache von $\frac{1}{k}$ gestutzte zukünftige Lebensdauer von (x) , d.h. $K_x^{(k)} \in \{0; \frac{1}{k}; \frac{2}{k}; \frac{3}{k}; \dots\}$.

Der voranstehende Leistungsbarwert wird üblicherweise nicht exakt berechnet, sondern nur approximativ bestimmt. Zur Herleitung einer Näherungsformel existieren diverse Herangehensweisen.

- Fasst man die unterjährig zahlbare Rente der Höhe 1 als Summe von k jährlich zahlbaren, um $\frac{j}{k}$ ($j = 0, \dots, k-1$) aufgeschobenen Renten der jeweiligen Höhe $\frac{1}{k}$ auf (vgl. *Führer und Grimmer (2010)*, S. 63, bzw. *Wolfsdorf (1997)*, S. 143), so lässt sich der Barwert schreiben als

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{j}{k} p_x \cdot v^{\frac{j}{k}} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+\frac{m}{k}}{k} p_x \cdot v^{j+\frac{m}{k}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k} |\ddot{a}_x|.\end{aligned}$$

Mit der Näherung aus Gleichung (6.2) ist

$$\frac{m}{k} |\ddot{a}_x| \approx \ddot{a}_x - \frac{m}{k},$$

so dass

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(k)} &\approx \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \left(\ddot{a}_x - \frac{m}{k} \right) \\ &= \frac{1}{k} \cdot \left(k \cdot \ddot{a}_x - \frac{(k-1) \cdot k}{2 \cdot k} \right)\end{aligned}$$

und damit

$$\ddot{a}_x^{(k)} \approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}. \quad (6.3)$$

- Es wird angenommen, dass zwischen den Kommutationszahlen D_x linear interpoliert werden kann. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Annahme UDD (siehe Abschn. 5.2.2.1) sowie der zusätzlichen Annahme, dass unterjährig einfache Verzinsung angewendet wird (vgl. *Ortmann (2015)*, S. 130, bzw. *Bowers et al. (1997)*, S. 151). In diesem Fall ist also

$$D_{x+t} = (1-t) \cdot D_x + t \cdot D_{x+1}$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ und jedes Alter x , so dass sich mit $t = \frac{m}{k}$ Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\frac{j}{k} p_x \cdot v^{\frac{j}{k}}}{D_x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{D_{x+\frac{j}{k}}}{D_x} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{D_{x+j+\frac{m}{k}}}{D_x} \\
&\approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(1 - \frac{m}{k}) \cdot D_{x+j} + \frac{m}{k} \cdot D_{x+j+1}}{D_x} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{D_{x+j}}{D_x} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k^2}}_{=\frac{k+1}{2k}} + \frac{D_{x+j+1}}{D_x} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k^2}}_{=\frac{k-1}{2k}} \right) \\
&= \frac{N_x}{D_x} \cdot \frac{k+1}{2k} + \frac{N_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{k-1}{2k} \\
&= \frac{N_x}{D_x} \cdot \frac{k+1}{2k} + \frac{N_x - D_x}{D_x} \cdot \frac{k-1}{2k} \\
&= \frac{N_x}{D_x} \cdot \left(\frac{k+1}{2k} + \frac{k-1}{2k} \right) - \frac{D_x}{D_x} \cdot \frac{k-1}{2k} \\
&= \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass aus der alleinigen Annahme von UDD nicht die Linearität in den diskontierten Lebenden folgt. Dazu bedarf es der zusätzlichen Annahme der einfachen Verzinsung während eines Jahres. Wie Übungsaufgabe 34 zeigt, basiert das zuvor durch lineare Interpolation der Barwerte hergeleitete Ergebnis auf denselben beiden Annahmen.

Falls die Rentenzahlung nachschüssig erfolgt, wird der erwartete Barwert

$$E[PV] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K_x^{(k)}}}\right]$$

mit $a_x^{(k)}$ notiert. Anstelle einer ausführlichen Herleitung nutzt man die Beziehung

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \frac{1}{k} + a_x^{(k)}$$

und erhält

$$\begin{aligned}
a_x^{(k)} &= \ddot{a}_x^{(k)} - \frac{1}{k} \\
&\approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{a}_x - \frac{k+1}{2k} \\
&= a_x + 1 - \frac{k+1}{2k} \\
&= a_x + \frac{k-1}{2k} .
\end{aligned}$$

Man sieht übrigens, dass $\ddot{a}_x^{(k)} \leq \ddot{a}_x$ sowie $a_x^{(k)} \geq a_x$ ist.

Den erwarteten Barwert $\ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)}$ einer unterjährig vorschüssigen temporären Leibrente kann man aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(k)} &= \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} + {}_n|\ddot{a}_x^{(k)} \\
&= \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} + {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(k)}
\end{aligned}$$

herleiten. Umsortieren dieser Gleichung führt zu

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} = \ddot{a}_x^{(k)} - {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(k)},$$

und unter Ausnutzung der Näherung (6.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} &\approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - {}_nE_x \cdot \left(\ddot{a}_{x+n} - \frac{k-1}{2k} \right) \\
&= \ddot{a}_x - {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x) . \quad (6.4)$$

Bei unterjährig nachschüssiger Rentenzahlung ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
a_{x:\bar{n}}^{(k)} &= \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \cdot {}_nE_x \\
&= \ddot{a}_{x:\bar{n}}^{(k)} - \frac{1}{k} \cdot (1 - {}_nE_x) \\
&\approx \ddot{a}_{x:\bar{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x) - \frac{1}{k} \cdot (1 - {}_nE_x) \\
&= \ddot{a}_{x:\bar{n}} - \frac{k+1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x) \\
&= \ddot{a}_{x:\bar{n}} - \left(1 - \frac{k-1}{2k} \right) \cdot (1 - {}_nE_x)
\end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$a_{x:\bar{n}}^{(k)} \approx a_{x:\bar{n}} + \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x) .$$

Beispiel 17. Beweisen Sie die Näherung

$$(I\ddot{a})_{x:\bar{n}}^{(k)} \approx (I\ddot{a})_{x:\bar{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - n \cdot {}_nE_x) .$$

Es ist

$$\begin{aligned} (I\ddot{a})_{x:\bar{n}}^{(k)} &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_{j|}\ddot{a}_{x:\bar{n}-j}^{(k)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot \ddot{a}_{x+j:\bar{n}-j}^{(k)} \\ &\approx \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot \left(\ddot{a}_{x+j:\bar{n}-j} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_{n-j}E_{x+j}) \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot \ddot{a}_{x+j:\bar{n}-j} \right) - \frac{k-1}{2k} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x - \sum_{j=0}^{n-1} {}_nE_x \right) \\ &= (I\ddot{a})_{x:\bar{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - n \cdot {}_nE_x) . \end{aligned}$$

6.2.2 Barwerte von Todesfallleistungen

6.2.2.1 Lebenslange Risikolebensversicherung

Die versicherte Leistung wird am Ende desjenigen Jahres fällig, in welchem (x) stirbt. Da (x) auf jeden Fall irgendwann stirbt, wird die Versicherungsleistung mit Sicherheit ausgezahlt, fraglich ist also nur der Zeitpunkt.

Die Verteilung der Zufallsvariable $PV = v^{1+K_x}$, d.h. des Barwertes der Todesfallleistung, kann durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(pv) = \begin{cases} q_x & \text{für } pv = v \text{ (d.h. Tod in Jahr 1)} \\ {}_{1|}q_x & \text{für } pv = v^2 \text{ (d.h. Tod in Jahr 2)} \\ {}_{2|}q_x & \text{für } pv = v^3 \text{ (d.h. Tod in Jahr 3)} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

beschrieben werden. Daraus ergibt sich der Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[PV] &= E[v^{1+K_x}] \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_x \cdot v + {}_{1|}q_x \cdot v^2 + {}_{2|}q_x \cdot v^3 + \dots \\
&= \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 + \dots \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots}{D_x} \\
&= \frac{M_x}{D_x},
\end{aligned}$$

welcher mit A_x notiert wird.

6.2.2.2 Temporäre Risikolebensversicherung

Hierbei wird die Todesfallleistung am Jahresende nur dann fällig, wenn (x) während der n -jährigen Versicherungsdauer verstirbt. Überlebt (x) den gesamten Zeitraum, wird keine Leistung ausgezahlt.

Der Erwartungswert der Zufallsvariable $PV = v^{\min\{1+K_x, n\}}$ ist

$$\begin{aligned}
E[PV] &= E[v^{\min\{1+K_x, n\}}] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\
&= q_x \cdot v + {}_{1|}q_x \cdot v^2 + \dots + {}_{n-1|}q_x \cdot v^n \\
&= \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + \dots + C_{x+n-1}}{D_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Als Bezeichnungen findet man ${}_nA_x$ oder $A_{\underline{x:n}}$, wobei die Ziffer 1 über dem Alter x andeutet, dass der Fokus der Betrachtung auf der Person (x) liegt.

Analog zu temporären und lebenslangen Leibrenten bestehen zwischen temporären und lebenslangen Risikolebensversicherungen die folgenden Beziehungen:

$$A_x = A_{\underline{x:n}} + {}_nE_x \cdot A_{x+n} \quad (6.5)$$

bzw.

$$A_{\underline{x:n}} = A_x - {}_nE_x \cdot A_{x+n}.$$

6.2.2.3 Gemischte Kapitallebensversicherung

Diese Versicherung stellt eine Kombination aus temporärer Risikolebens- und reiner Erlebensfallversicherung dar. Daher bestimmt sich der erwartete Barwert der Versicherungsleistung als Summe zweier Leistungsbarwerte:

$$\begin{aligned} E[PV] &= {}_nA_x + {}_nE_x = A_{\overline{x:n}} + A_{\overline{x:\overline{n}}} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \end{aligned}$$

Dieser Erwartungswert wird durch $A_{\overline{x:n}}$ symbolisiert.

6.2.2.4 Termfix-Versicherung

Bei der Termfix-Versicherung wird die Versicherungsleistung bei Ablauf der Versicherungsdauer auf jeden Fall ausgezahlt, unabhängig davon, ob die VP diesen Zeitpunkt erlebt oder nicht. Die Auszahlung ist also deterministisch und somit ihr Erwartungswert, für den es keine eigene Bezeichnung gibt,

$$E[PV] = PV = v^n.$$

6.2.2.5 Arithmetisch steigende Risikolebensversicherung

Analog zur arithmetisch steigenden Leibrente kann man eine arithmetisch steigende Risikolebensversicherung betrachten. Dabei steigt die Todesfallleistung jedes Jahr um denselben Betrag der Höhe 1, erstmals nach Ablauf des ersten Versicherungsjahres.

Der Leistungsbarwert einer lebenslangen, linear steigenden Risikolebensversicherung wird mit $(IA)_x$ notiert und bestimmt sich als

$$\begin{aligned} E[PV] &= E[(1 + K_x) \cdot v^{1+K_x}] \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} (j+1) \cdot v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-x} (j+1) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} \\ &= \frac{R_x}{D_x}, \end{aligned}$$

während der entsprechende Leistungsbarwert einer temporären, linear steigenden Risikolebensversicherung mit $(IA)_{x:\overline{n}}$ bezeichnet wird und sich aus

$$\begin{aligned} E[PV] &= E \left[\min \{1 + K_x, n\} \cdot v^{\min \{1+K_x, n\}} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} \\ &= \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

ergibt.

Falls die Dauer des planmäßigen Anstiegs auf einen Zeitraum von l Jahren begrenzt ist, hat man einen erwarteten Barwert von

$$\begin{aligned} (I_{\overline{l}} A)_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} \min \{j+1; l\} \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (j+1) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} + l \cdot \sum_{j=l}^{\omega-x} \frac{C_{x+j}}{D_x} \\ &= (IA)_{x:\overline{l}} + l \cdot {}_l E_x \cdot A_{x+l} \end{aligned}$$

bzw. (für $l \leq n$)

$$(I_{\overline{l}} A)_{x:\overline{n}} = (IA)_{x:\overline{l}} + l \cdot {}_l E_x \cdot A_{x+l:n-l} .$$

Der Leistungsbarwert einer gemischten (Kapital)Lebensversicherung mit linear steigender Versicherungssumme entspricht

$$\begin{aligned} (IA)_{x:\overline{n}} &= (IA)_{x:\overline{n}} + n \cdot {}_n E_x \\ &= \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n} + n \cdot D_{x+n}}{D_x} . \end{aligned}$$

In Analogie zu unterjährigen Leibrentenversicherungen kann man auch Todesfallleistungen betrachten, die nicht erst am Ende des Versicherungsjahres, in dem der Tod eingetreten ist, gezahlt werden, sondern bereits am Ende des $\frac{1}{k}$ -ten Teils des Jahres, in dem (x) verstirbt, d.h., die Todesfallleistung wird zum ersten Zeitpunkt $\{\frac{1}{k}; \frac{2}{k}; \frac{3}{k}; \dots\}$, der nach dem Tod von (x) folgt, gezahlt. Wir benötigen erneut die unterjährig gestützte Lebensdauer $K_x^{(k)}$ (siehe Abschn. 6.2.1.8).

Der Barwert der beschriebenen, $\frac{1}{k}$ -tel-jährlich fälligen Todesfallleistung der Höhe 1 ist

$$PV = v^{\frac{1}{k} + K_x^{(k)}} ,$$

und sein Erwartungswert wird mit $A_x^{(k)}$ notiert.

Beispiel 18. Zeigen Sie, dass im Falle von UDD sowie unterjährig einfacher Verzinsung näherungsweise gilt:

$$A_x^{(k)} \approx A_x - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{\overline{x:1}} .$$

Bei Gültigkeit der beiden Annahmen gelten die Beziehungen $tq_x = t \cdot q_x$ und $C_{x+t} = (1-t) \cdot C_x + t \cdot C_{x+1}$. Analog zur Herleitung der Näherung von $\ddot{a}_x^{(k)}$ ist:

$$\begin{aligned} A_x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} v^{\frac{j+1}{k}} \cdot {}_j p_x \cdot {}_{\frac{1}{k}} q_{x+\frac{j}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} v^{j+\frac{m+1}{k}} \cdot {}_j p_x \cdot {}_{\frac{m}{k}} p_{x+j} \cdot {}_{\frac{1}{k}} q_{x+j+\frac{m}{k}} \\ &\approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{m=0}^{k-1} v^{j+\frac{m+1}{k}} \cdot {}_j p_x \cdot {}_{\frac{m}{k}} p_{x+j} \cdot q_{x+j+\frac{m}{k}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{C_{x+j+\frac{m}{k}}}{D_x} \\ &\approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(1 - \frac{m}{k}) \cdot C_{x+j} + \frac{m}{k} \cdot C_{x+j+1}}{D_x} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{C_{x+j}}{D_x} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k^2}}_{= \frac{k+1}{2k}} + \underbrace{\frac{C_{x+j+1}}{D_x} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k^2}}_{= \frac{k-1}{2k}} \right) \\ &= \frac{M_x}{D_x} \cdot \frac{k+1}{2k} + \frac{M_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{k-1}{2k} \\ &= \frac{M_x}{D_x} \cdot \frac{k+1}{2k} + \frac{M_x - C_x}{D_x} \cdot \frac{k-1}{2k} \\ &= \frac{M_x}{D_x} \cdot \left(\frac{k+1}{2k} + \frac{k-1}{2k} \right) - \frac{C_x}{D_x} \cdot \frac{k-1}{2k} \\ &= A_x - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{\overline{x:1}} . \end{aligned}$$

Anstelle dieser Herleitung des erwarteten Barwertes kann man sich auch der weiter unten (siehe Abschn. 6.2.3) aufgeführten Beziehungen zwischen den Barwerten von Leibrentenversicherungen und Versicherungen auf den Todesfall bedienen.

Mit dem Ergebnis des vorangehenden Beispiels ergibt sich die Näherung

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}}^{(k)} &= A_x^{(k)} - {}_nE_x \cdot A_{x+n}^{(k)} \\ &\approx A_x - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{x:\overline{1}} - {}_nE_x \cdot \left(A_{x+n} - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{x+n:\overline{1}} \right) \\ &= A_{x:\overline{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot \left(A_{x:\overline{1}} - {}_nE_x \cdot A_{x+n:\overline{1}} \right) \end{aligned}$$

bzw. unter Vernachlässigung des letzten Terms (der nahe Null ist)

$$A_{x:\overline{n}}^{(k)} \approx A_{x:\overline{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{x:\overline{1}} .$$

Dies kann wiederum dazu verwendet werden, eine Näherung für eine temporäre, arithmetisch steigende und unterjährig fällige Risikolebensversicherung herzuleiten, indem

$$\begin{aligned} (IA)_{x:\overline{n}}^{(k)} &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot A_{x+j:\overline{n-j}}^{(k)} \\ &\approx \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot \left(A_{x+j:\overline{n-j}} - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{x+j:\overline{1}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot A_{x+j:\overline{n-j}} - \frac{k-1}{2k} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot A_{x+j:\overline{1}} \end{aligned}$$

und damit

$$(IA)_{x:\overline{n}}^{(k)} \approx (IA)_{x:\overline{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot A_{x:\overline{n}} . \quad (6.6)$$

6.2.2.6 Geometrisch steigende Risikolebensversicherung

Steigt die Todesfalleistung jedes Jahr um einen (gleichbleibenden) Prozentsatz r , so handelt es sich um eine geometrisch steigende Risikolebensversicherung.

Der Leistungsbarwert einer derartigen, temporären Risikolebensversicherung wird mit $\%^{(k)}(IA)_{x:\overline{n}}$ notiert und berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} E[PV] &= \sum_{j=0}^{n-1} (1+r)^j \cdot v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (1+r)^{j+1} \cdot v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x . \end{aligned}$$

Mit dem neuen Zinssatz $\tilde{i} := \frac{i-r}{1+r}$ (und auf dessen Basis ermittelten Kommutationszahlen) ist

$$\begin{aligned} E[PV] &= \frac{1}{1+r} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{v}^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\tilde{C}_{x+j}}{\tilde{D}_x} \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \frac{\tilde{M}_x - \tilde{M}_{x+n}}{\tilde{D}_x} . \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass dieser erwartete Barwert auf denjenigen einer Risikolebensversicherung mit konstanter Versicherungssumme und neuem Zins \tilde{i} zurückgeführt werden kann, nämlich

$$\%^{(IA)}_{\overline{x:n}} = \frac{1}{1+r} \cdot {}^{\tilde{i}}A_{\overline{x:n}} .$$

6.2.3 Beziehungen zwischen Leibrenten- und Risikolebensversicherungen

Die Beziehungen zwischen erwarteten Barwerten von Erlebensfall- und Todesfallleistungen resultieren aus den in Abschn. 6.1 dargestellten Beziehungen zwischen den zugehörigen Kommutationszahlen.

Aus Abschn. 4.2.2 ist die Beziehung

$$\ddot{a}_{\overline{n}} = \frac{1-v^n}{d} \quad \text{bzw.} \quad d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} + v^n = 1$$

bekannt, wobei $d = 1-v = \frac{i}{1+i}$ der Diskontsatz ist (nicht zu verwechseln mit der Anzahl der Toten d_x).

Zunächst ersetzt man n durch $1+K_x$ und erhält auf diese Weise die Gleichung

$$d \cdot \ddot{a}_{\overline{1+K_x}} + v^{1+K_x} = 1 .$$

Erwartungswertbildung führt zu

$$d \cdot \underbrace{E[\ddot{a}_{\overline{1+K_x}}]}_{\ddot{a}_x} + \underbrace{E[v^{1+K_x}]}_{=A_x} = 1$$

und damit

$$d \cdot \ddot{a}_x + A_x = 1$$

bzw.

$$A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x .$$

Ersetzt man stattdessen n durch $\min\{1 + K_x; n\}$, so erhält man die Beziehung

$$A_{x:\overline{n}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} .$$

Ausgehend von der Gleichung

$$(I_{\overline{n}} \ddot{a})_{\overline{n}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n \cdot v^n}{d}$$

und der Substitution $n = 1 + K_x$ folgt analog die Relation

$$(I \ddot{a})_x = \frac{\ddot{a}_x - (IA)_x}{d} ,$$

bzw.

$$(IA)_x = d \cdot (I \ddot{a})_x - \ddot{a}_x .$$

Schließlich gelangt man über die Gleichung

$$\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{1 - v^n}{d^{(k)}}$$

einer unterjährig vorschüssig zahlbaren Zeitrente mittels der Substitution $n = \frac{1}{k} + K_x^{(k)}$ und anschließender Erwartungswertbildung zu der Beziehung

$$A_x^{(k)} = 1 - d^{(k)} \cdot \ddot{a}_x^{(k)} ,$$

wobei $d^{(k)} = \frac{i^{(k)}}{1+i}$ der nominelle Diskontsatz bei k -tel jährlicher Zinszahlung ist.

Im Fall von UDD gilt übrigens

$$A_x^{(k)} \approx \frac{i}{i^{(k)}} \cdot A_x ,$$

denn

$$\begin{aligned} A_x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} v^{\frac{j+1}{k}} \cdot {}_j p_x \cdot {}_{\frac{1}{k}} q_{x+\frac{j}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} v^{j+\frac{m+1}{k}} \cdot {}_j p_x \cdot {}_{\frac{m}{k}} p_{x+j} \cdot {}_{\frac{1}{k}} q_{x+j+\frac{m}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} v^{j+\frac{m+1}{k}} \cdot {}_j p_x \cdot \underbrace{\left(\frac{m+1}{k} q_{x+j} - \frac{m}{k} q_{x+j} \right)}_{\approx \frac{1}{k} \cdot q_{x+j}} \\ &\approx \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{v^{\frac{1}{k}}}{v} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} v^{\frac{m}{k}} \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j p_x \cdot q_{x+j}}_{= A_x} \cdot \underbrace{\frac{1}{k} \cdot \frac{v^{\frac{1}{k}}}{v} \cdot \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{k}}}}_{= \frac{i}{i^{(k)}}} \\ &= \frac{i}{i^{(k)}} \cdot A_x . \end{aligned}$$

Beispiel 19. Beweisen Sie

$$(I\ddot{a})_{x:\bar{n}} = \frac{\ddot{a}_{x:\bar{n}} - (IA)_{x:\bar{n}}}{d} .$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} (IA)_{x:\bar{n}} &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_j E_x \cdot A_{x+j:\bar{n-j}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_j E_x \cdot \left(1 - d \cdot \ddot{a}_{x+j:\bar{n-j}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_j E_x - d \cdot \sum_{j=0}^{n-1} {}_j E_x \cdot \ddot{a}_{x+j:\bar{n-j}} \\ &= \ddot{a}_{x:\bar{n}} - d \cdot (I\ddot{a})_{x:\bar{n}} . \end{aligned}$$

Auflösen dieser Gleichung nach $(I\ddot{a})_{x:\bar{n}}$ liefert die obige Identität.

6.2.4 Leistungsspektren

Wie in den vorangehenden Ausführungen deutlich geworden ist, muss die versicherte Leistung, bspw. für den Todesfall, nicht während der gesamten Versicherungsdauer konstant sein. Falls ein gewisses „Muster“ hinsichtlich der (ggf. variierenden) Leistungshöhe vereinbart ist, nennt man dies ein **Leistungsspektrum**.

Bei Risikolebens- oder gemischten Versicherungen ist es möglich, dass die Todesfallsumme linear steigt oder linear fällt. Möglicherweise steigt die Todesfallleistung auch zunächst an und sinkt anschließend wieder. Insbesondere im Kontext von Risikolebensversicherungen ist es auch gängig, dass die versicherte Summe annuitätisch fällt (bei Restschuldversicherungen).

Produkte, die eine Rentenzahlung vorsehen, können mit einer **Leistungsdynamik** oder **dynamisierten Leistung** ausgestattet sein. Dies bedeutet, dass die versicherte Jahresrente während des Rentenbezugs jährlich ansteigt, meistens um einen festgelegten Prozentsatz r , so dass eine geometrisch steigende Rente vorliegt (siehe Abschn. 6.2.1.6).

Im Folgenden bezeichne der Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ das Leistungsspektrum. Dieses gibt für jedes Jahr der Versicherungsdauer an, wie hoch die Leistung in dem jeweiligen Jahr ist, als Faktor bezogen auf die 100%-Leistung. Sofern die Versicherung nur eine Leistungsart vorsieht, ist diese Notation ausreichend. Sobald jedoch Todes- und Erlebensfallleistungen vorgesehen sind, ist eine Aufteilung, etwa in ein Todesfallspektrum $\boldsymbol{\theta}^T$ und ein Erlebensfallspektrum $\boldsymbol{\theta}^E$, notwendig.

Grundsätzlich gilt $\theta_j \geq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Dabei sind durchaus Werte größer als 1 zugelassen, so dass im Versicherungsjahr j das θ_j -fache der 100%-Leistung gezahlt wird. Im Falle einer lebenslang zahlbaren Rente erweitern wir das Leistungsspektrum auf $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n, \dots, \theta_{\omega-x})$. Exemplarisch betrachten wir an dieser Stelle die Leistungsspektren dreier Versicherungen:

- Im Falle einer um n Jahre aufgeschobenen lebenslangen, geometrisch steigenden Leibrente ist

$$\theta_j := \theta_j^E = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \dots, n \\ (1+r)^{j-n-1} & \text{für } j > n \end{cases}$$

und $\theta_j^T = 0$ für alle $j \geq 1$.

- Umgekehrt hat man bei einer Risikolebensversicherung mit linear fallender Todesfallsumme

$$\theta_j := \theta_j^T = \frac{n+1-j}{n}$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

Der Vollständigkeit halber wird $\theta_j^E = 0$ für $j \geq 1$ gesetzt.

- Bei einer gemischten Kapitallebensversicherung mit konstanter Todesfallleistung gilt hingegen

$$\theta_j^E = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{für } j = n \end{cases}$$

sowie $\theta_j^T = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Leistungsspektren können bereits bei der Berechnung der Kommutationszahlen berücksichtigt werden.

Für Erlebensfallleistungen setzt man

$$N_x^{\boldsymbol{\theta}^E} := \sum_{j=0}^{\omega-x} \theta_{j+1}^E \cdot D_{x+j} .$$

Dies führt bspw. im Falle einer lebenslang zahlbaren, geometrisch steigenden Rente, die sofort beginnt, zu der Darstellung

$$\ddot{a}_x^{\boldsymbol{\theta}^E} = \frac{N_x^{\boldsymbol{\theta}^E}}{D_x} ,$$

welche identisch mit dem bereits kennengelernten Barwert $\tilde{i}\ddot{a}_x$ ist.

Für Todesfallleistungen kann

$$M_x^{\boldsymbol{\theta}^T} := \sum_{j=0}^{\omega-x} \theta_{j+1}^T \cdot C_{x+j}$$

gesetzt werden, so dass sich z.B. für eine Risikolebensversicherung mit linear fallender Todesfallsumme der Leistungsbarwert

$$A_{\overline{x:n}}^{\boldsymbol{\theta}^T} = \frac{M_x^{\boldsymbol{\theta}^T} - M_{x+n}^{\boldsymbol{\theta}^T}}{D_x}$$

ergibt, welcher mit dem Barwert $(DA)_{\overline{x:n}}$ aus Übungsaufgabe 38 übereinstimmt.

6.2.5 Tabellarische Übersicht

Deckung	Leistungsbarwert	Symbol
reine Erlebensfallleistung	$\frac{D_{x+n}}{D_x}$	$A_{x:\overline{n}}, {}^n E_x$
lebenslange vorschüssige Leibrente	$\frac{N_x}{D_x}$	\ddot{a}_x
abgekürzte vorschüssige Leibrente	$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}}$
aufgeschobene lebenslange vorschüssige Leibrente	$\frac{N_{x+n}}{D_x}$	${}^n \ddot{a}_x$
linear steigende lebenslange vorschüssige Leibrente	$\frac{S_x}{D_x}$	$(I\ddot{a})_x$
linear steigende temporäre vorschüssige Leibrente	$\frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$	$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}}$
lebenslange Risiko-LV mit konstanter Summe	$\frac{M_x}{D_x}$	A_x
temporäre Risiko-LV mit konstanter Summe	$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$	$A_{x:\overline{n}}, {}^n A_x$
gemischte Kapital-LV	$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$	$A_{x:\overline{n}}$
lebenslange Risiko-LV mit linear steigender Summe	$\frac{R_x}{D_x}$	$(IA)_x$
temporäre Risiko-LV mit linear steigender Summe	$\frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$	$(IA)_{x:\overline{n}}$
temporäre Risiko-LV mit linear fallender Summe	$\frac{M_x - \frac{1}{n} \cdot (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}$	$(DA)_{x:\overline{n}}$

6.3 Stetige und sofort fällige Versicherungsleistungen

Die Darstellung von Leistungen aus Lebensversicherungsverträgen hat sich bisher auf diskrete Zeitpunkte beschränkt. Im Folgenden betrachten wir kontinuierlich fließende Rentenversicherungsleistungen sowie unmittelbar bei Tod fällige Versicherungsleistungen und wie diese in der Versicherungstechnik abgebildet werden.

Motivation für derartige Betrachtungen ist die Tatsache, dass mit der Auszahlung der Todesfallleistung in der Praxis selten bis zum Ende des Jahres, in dem der Tod eingetreten ist, gewartet wird. Vielmehr wird nach Klärung sämtlicher Formalitäten die Bearbeitung des Versicherungsfalls so schnell wie möglich abgeschlossen und die Versicherungsleistung zeitnah ausgezahlt. Anstelle der Berücksichtigung einer kurzzeitigen Verzögerung nimmt man stattdessen an, dass die Todesfallleistung unmittelbar zum Zeitpunkt des Todes ausgezahlt wird.

6.3.1 Kommutationszahlen

Auch wenn es prinzipiell nicht notwendig ist, werden für diese Art von Versicherungsleistungen ebenfalls Kommutationszahlen konstruiert. Die angegebenen Näherungen für die Kommutationszahlen 1. Ordnung \overline{D}_x und \overline{C}_x basieren auf der Sehnen-Trapezregel (siehe Anhang, Abschn. B.3).

Die Kommutationszahlen für Erlebensfalleistungen sind wie folgt definiert:

- $\overline{D}_x = \int_x^{x+1} D_t \, dt \approx \frac{D_x + D_{x+1}}{2}$
- $\overline{N}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{D}_{x+j}$
- $\overline{S}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{N}_{x+j} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot \overline{D}_{x+j}$

Als Kommutationszahlen für Todesfallleistungen hat man:

- $\overline{C}_x = \int_x^{x+1} D_t \cdot \mu_t \, dt \approx \frac{D_x \cdot \mu_x + D_{x+1} \cdot \mu_{x+1}}{2}$
- $\overline{M}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{C}_{x+j}$
- $\overline{R}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{M}_{x+j} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot \overline{C}_{x+j}$

6.3.2 Leistungsbarwerte

Im stetigen Fall haben die erwarteten Barwerte allesamt die Gestalt

$$E[PV] = \int b(t) \cdot p(t) \cdot v(t) dt .$$

Dabei bezeichnet

- $b(t)$ die Leistungsrate zum Zeitpunkt t ,
- $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Leistung zum Zeitpunkt t zu zahlen ist,

und

- $v(t)$ die Diskontierungsfunktion.

An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, dass die zukünftige Lebensdauer von (x) die stetige Zufallsvariable T_x ist, deren Dichtefunktion durch $f_{T_x}(t) = tp_x \cdot \mu_{x+t}$ gegeben ist (siehe Abschn. 5.1 und 5.1.1).

6.3.2.1 Barwerte von Erlebensfallleistungen

Der erwartete Barwert einer lebenslangen, stetig zahlbaren Leibrente ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= E[\bar{a}_{\overline{T_x}}] = \int_0^{\infty} (\bar{a}_{\overline{t}} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\bar{a}_{\overline{t}} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x \right) \right) dt . \end{aligned}$$

Da $\bar{a}_{\overline{t}} = \frac{1 - e^{-\delta \cdot t}}{\delta}$ (siehe Abschn. 4.2.2.3), führt partielle Integration zu

$$\bar{a}_x = \underbrace{[-\bar{a}_{\overline{t}} \cdot {}_t p_x]_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \left(\underbrace{e^{-\delta \cdot t}}_{=v^t} \cdot {}_t p_x \right) dt$$

und somit

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} ({}_t p_x \cdot v^t) dt .$$

Die Verwendung der obigen Kommutationszahlen erlaubt die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_x &= \int_0^\infty (_tp_x \cdot v^t) dt \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} (_tp_x \cdot v^t) dt \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{D_x} \cdot \underbrace{\int_j^{j+1} D_{x+t} dt}_{=\overline{D}_{x+j}} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{D}_{x+j}}{D_x},
 \end{aligned}$$

so dass

$$\bar{a}_x = \frac{\overline{N}_x}{D_x}.$$

Analog zu Abschn. 4.2.2.3 gilt

$$\ddot{a}_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \ddot{a}_x^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_x^{(k)}.$$

Wie im diskreten Fall, wo $\ddot{a}_x = a_x + 1$ gilt, ist aufgrund der Sehnen-Trapezregel näherungsweise

$$\ddot{a}_x \approx \bar{a}_x + \frac{1}{2},$$

denn

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_x &= \frac{\overline{N}_x}{D_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \overline{D}_{x+j} \\
 &\approx \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_{x+j} + D_{x+j+1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N_x + N_{x+1}}{D_x} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{N_x + N_x - D_x}{D_x} \\
 &= \ddot{a}_x - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Außerdem gelten die Approximationen

$$\begin{aligned}\overline{a}_x &\approx a_x + \frac{1}{2}, \\ \overline{a}_x &\approx \ddot{a}_x^{(k)} - \frac{1}{2k}, \\ \overline{a}_x &\approx a_x^{(k)} + \frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$a_x < \overline{a}_x < \ddot{a}_x.$$

Der Leistungsbarwert einer temporären stetigen Leibrente ergibt sich aus der Beziehung

$$\overline{a}_{x:\overline{n}} = \overline{a}_x - {}_n E_x \cdot \overline{a}_{x+n}$$

oder direkt als

$$\overline{a}_{x:\overline{n}} = E \left[\overline{a}_{\min\{T_x, n\}} \right].$$

Beide Ansätze liefern das Ergebnis

$$\overline{a}_{x:\overline{n}} = \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}}{D_x}.$$

6.3.2.2 Barwerte von Todesfallleistungen

Die lebenslange Risikolebensversicherung zahle nun die versicherte Summe der Höhe 1 unmittelbar bei Tod von (x) aus. Dann ist der erwartete Barwert dieser Todesfallleistung gegeben durch

$$\begin{aligned}\overline{A}_x &= E[v^{T_x}] = \int_0^\infty (v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}) dt \\ &= \sum_{j=0}^\infty \int_j^{j+1} (v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}) dt \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{D_x} \cdot \underbrace{\int_j^{j+1} (D_{x+t} \cdot \mu_{x+t}) dt}_{=\overline{C}_{x+j}} \\ &= \sum_{j=0}^\infty \frac{\overline{C}_{x+j}}{D_x},\end{aligned}$$

so dass

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x} .$$

Der Leistungsbarwert \overline{A}_x kann heuristisch approximiert werden durch

$$\overline{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot A_x . \quad (6.7)$$

Die Interpretation dieser Näherung ist recht intuitiv: Die Todesfallleistung wird nicht am Ende des Jahres, sondern im Durchschnitt zur Jahresmitte gezahlt. Folglich wird der Leistungsbarwert bei Auszahlung zum Jahresende um ein halbes Jahr diskontiert.

Unter der Annahme UDD gilt übrigens

$$\overline{C}_x \approx \frac{i}{\delta} \cdot C_x ,$$

womit sich die Näherung

$$\overline{A}_x \approx \frac{i}{\delta} \cdot A_x$$

ergibt. Die Näherung für \overline{C}_x basiert auf Differentiation der Gleichung

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x$$

nach der Zeit und Ausnutzen der Annahme UDD (so dass $d_x = l_{x+t} \cdot \mu_{x+t}$):

$$\begin{aligned} \overline{C}_x &= \int_x^{x+1} (D_t \cdot \mu_t) dt = \int_0^1 (D_{x+t} \cdot \mu_{x+t}) dt \\ &= \int_0^1 \left(e^{-\delta \cdot (x+t)} \cdot \underbrace{l_{x+t} \cdot \mu_{x+t}}_{=d_x} \right) dt \\ &\approx d_x \cdot v^x \cdot \int_0^1 e^{-\delta \cdot t} dt \\ &= d_x \cdot v^x \cdot \left(-\frac{1}{\delta} \cdot \underbrace{(v-1)}_{=-\frac{i}{v}} \right) \\ &= \underbrace{d_x \cdot v^{x+1}}_{=C_x} \cdot \frac{i}{\delta} \\ &= \frac{i}{\delta} \cdot C_x . \end{aligned}$$

Der Leistungsbarwert einer temporären, unmittelbar bei Tod fälligen Risikolebensversicherung ist

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\underline{x:n}} &= E \left[v^{\min\{n; T_x\}} \right] \\ &= \int_0^n (v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}) \, dt \\ &= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}.\end{aligned}$$

Auch hier kann die Approximation

$$\overline{A}_{\underline{x:n}} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot A_{\underline{x:n}}$$

verwendet werden.

Der Leistungsbarwert einer entsprechenden gemischten Kapitallebensversicherung ergibt sich wieder als Summe, nämlich

$$\begin{aligned}\overline{A}_{x:\overline{n}} &= \overline{A}_{\underline{x:n}} + A_{\underline{x:\overline{n}}} \\ &= \overline{A}_{\underline{x:n}} + {}_n E_x \\ &= \int_0^n (v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}) \, dt + v^n \cdot {}_n p_x.\end{aligned}$$

Wie man sich überlegen kann, gilt die Näherung mit dem Faktor $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ in diesem Fall übrigens nicht!

Analog zum diskreten Fall – siehe Gleichung (6.5) – gilt

$$\overline{A}_x = \overline{A}_{\underline{x:n}} + {}_n E_x \cdot \overline{A}_{x+n}.$$

Der Vollständigkeit halber werden abschließend noch Risikolebensversicherungen mit steigender Todesfallleistung betrachtet. Erfolgt die Steigerung jährlich, so ist der erwartete Barwert gegeben durch

$$(I\overline{A})_x = \frac{\overline{R}_x}{D_x}.$$

Sofern die Steigerung selbst auch kontinuierlich erfolgt, ergibt sich ein Leistungsbarwert von

$$(\overline{IA})_x = \int_0^{\infty} (t \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}) dt ,$$

was näherungsweise bestimmt werden kann durch

$$(\overline{IA})_x \approx (\overline{IA})_x - \frac{1}{2} \cdot \overline{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[(IA)_x - \frac{1}{2} \cdot A_x \right] .$$

6.3.2.3 Beziehungen

Stetige Leibrenten und sofort fällige Todesfalleistungen stehen – wie auch im diskreten Fall – in Beziehung zueinander. So gelten insbesondere

$$\overline{A}_x = 1 - \delta \cdot \overline{a}_x$$

und

$$\overline{A}_{x:\overline{n}} = 1 - \delta \cdot \overline{a}_{x:\overline{n}} .$$

6.3.3 Tabellarische Übersicht

Deckung	Leistungsbarwert	Symbol
lebenslange stetige Leibrente	$\frac{\overline{N}_x}{D_x}$	\overline{a}_x
temporäre stetige Leibrente	$\frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}}{D_x}$	$\overline{a}_{x:\overline{n}}$
lebenslange Risiko-LV mit konstanter Summe	$\frac{\overline{M}_x}{D_x}$	\overline{A}_x
gemischte Kapital-LV	$\frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$	$\overline{A}_{x:\overline{n}}$
lebenslange Risiko-LV mit steigender Summe	$\frac{\overline{R}_x}{D_x}$	$(\overline{IA})_x$

6.4 Übungen

6.4.1 Aufgaben

Übung 25. Zeigen Sie, dass

$$M_x = D_x - d \cdot N_x .$$

Übung 26. Leiten Sie einen Ausdruck für a_x in Abhängigkeit von v , p_x und a_{x+1} her.

Übung 27. Gegeben seien $a_x = 20$, $a_{x:\overline{n}} = 18$ und $a_{x+n} = 8$. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von ${}_nE_x$ ($= A_{x:\overline{n}}$) und $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$.

Übung 28. Berechnen Sie auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T und einem Rechnungszins von $i = 2\%$ die folgenden Barwerte für eine 40-jährige Frau:

1. $A_{40:\overline{30}}$
2. $A_{40:\overline{30}}$
3. $A_{40:\overline{30}}$
4. $(IA)_{40:\overline{30}}$

Übung 29. Berechnen Sie auf Basis der Sterbetafel DAV 2004 R und einem Rechnungszins von $i = 2\%$ die folgenden Barwerte für einen 40-jährigen Mann (verwenden Sie die Grundtafel ohne Altersverschiebung):

1. $\ddot{a}_{40:\overline{30}}$
2. $\ddot{a}_{40:\overline{30}}^{(12)}$
3. $(I\ddot{a})_{40:\overline{30}}$
4. ${}_5|\ddot{a}_{40:\overline{25}}$

Übung 30. Beweisen Sie die Identität

$$A_x = v \cdot \ddot{a}_x - a_x .$$

Übung 31. Zeigen Sie, dass

$$A_{x:\overline{n}} = v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - a_{x:\overline{n-1}} .$$

Übung 32. Beweisen Sie, dass

$$A_{x:\overline{n}} = v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - a_{x:\overline{n}} .$$

Übung 33. Betrachten Sie die Barwerte \ddot{a}_x , $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$ sowie A_x und $A_{x:\overline{n}}$. Welche Formeln ergeben sich für diese Barwerte, wenn ceteris paribus

1. die Sterblichkeit für alle Alter gleich 0 ist?
2. der zugrunde liegende Zinssatz gleich 0 ist?

Übung 34. Approximation bei unterjähriger Rentenzahlung

1. Zeigen Sie, dass sich bei Annahme von UDD (siehe Abschn. 5.2.2.1) der Rentenbarwert $\ddot{a}_x^{(k)}$ darstellen lässt als

$$\ddot{a}_x^{(k)} = A(k) \cdot \ddot{a}_x - B(k) ,$$

wobei $A(k)$ und $B(k)$ altersunabhängige Gewichte sind.

2. Zusätzlich zu UDD werde nun angenommen, dass unterjährig einfache Verzinsung vorliegt. Leiten Sie für diesen Fall die bekannte Näherung

$$\ddot{a}_x^{(k)} \approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}$$

aus Aufgabenteil 1. her.

3. Zeigen Sie, dass

$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(k)} \approx {}_{n|}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x) .$$

Übung 35. Rekursive Berechnung von Leibrentenbarwerten

1. Zeigen Sie, dass für $n > 1$ gilt:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + 1 .$$

2. Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabenteil 1., dass für $n > 1$ die folgende Rekursion gilt:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(k)} \approx \left(\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}}^{(k)} + \frac{k-1}{2k} \right) \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \left(1 - \frac{k-1}{2k} \right) .$$

3. Zeigen Sie, dass für $n > 1$ gilt:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}} = (I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \ddot{a}_{x:\overline{n}} .$$

4. Leiten Sie eine zu Aufgabenteil 3. analoge Formel für eine geometrisch steigende Leibrente her.

Übung 36. Leiten Sie eine Formel für den Barwert einer jährlich um den Prozentsatz r steigenden lebenslangen Todesfallleistung her.

Übung 37. Rekursive Berechnung von Barwerten für Todesfallleistungen

1. Zeigen Sie, dass für $n > 1$ gilt:

$$A_{\overline{x:n}} = \left(A_{\overline{x+1:n-1}} - 1 \right) \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + v .$$

2. Zeigen Sie, dass für $n > 1$ gilt:

$$(IA)_{\overline{x:n}} = (IA)_{\overline{x+1:n-1}} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + A_{\overline{x:n}} .$$

Übung 38. Leiten Sie eine Formel für den Barwert $(DA)_{\overline{x:n}}$ einer temporären Todesfallleistung her, deren Höhe über die Laufzeit gleichmäßig (d.h. von anfänglich 1 jährlich arithmetisch um $\frac{1}{n}$) fällt.

6.4.2 Lösungen

Lösung 25. Beginnend auf der rechten Seite der Gleichung gelangt man zu

$$\begin{aligned} D_x - d \cdot N_x &= l_x \cdot v^x - \underbrace{d}_{=1-v} \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot v^{x+k}) \\ &= l_x \cdot v^x - \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot [v^{x+k} - v^{x+k+1}]) \\ &= l_x \cdot v^x - \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot v^{x+k}) + \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot v^{x+k+1}) \\ &= l_x \cdot v^x - l_x \cdot v^x - \sum_{k=1}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot v^{x+k}) + \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot v^{x+k+1}) \\ &= - \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k+1} \cdot v^{x+k+1}) + \sum_{k=0}^{\omega-x} (l_{x+k} \cdot v^{x+k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} \left(\underbrace{[l_{x+k} - l_{x+k+1}]}_{=d_{x+k}} \cdot v^{x+k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k} \\ &= M_x , \end{aligned}$$

weil $l_x = 0$ für alle $x \geq \omega$.

Alternativ (und deutlich kürzer) ist:

$$\begin{aligned} M_x &= v \cdot N_x - N_{x+1} = v \cdot N_x - (N_x - D_x) \\ &= D_x - (1-v) \cdot N_x \\ &= D_x - d \cdot N_x . \end{aligned}$$

Durch Summenbildung folgt übrigens sofort die Gleichheit

$$R_x = N_x - d \cdot S_x .$$

Lösung 26. Es ist

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{N_{x+1}}{D_x} \\ &= \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{D_{x+1} + N_{x+2}}{D_{x+1}} \\ &= \frac{l_{x+1} \cdot v}{l_x} \cdot \left(1 + \frac{N_{x+2}}{D_{x+1}}\right) \\ &= v \cdot p_x \cdot (1 + a_{x+1}) . \end{aligned}$$

Lösung 27. Unter Verwendung der Ergebnisse

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{N_{x+1}}{D_x} = 20 \\ a_{x:\bar{n}} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = 18 \\ a_{x+n} &= \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} = 8 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= A_{x:\frac{1}{\bar{n}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{D_{x+n}}{N_{x+n+1}} \cdot \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \\ &= \frac{D_{x+n}}{N_{x+n+1}} \cdot \frac{N_{x+1} - (N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x} \\ &= \frac{1}{a_{x+n}} \cdot (a_x - a_{x:\bar{n}}) \\ &= \frac{20 - 18}{8} \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}} &= 1 + a_{x:\overline{n}} - {}_nE_x \\ &= 1 + 18 - 0,25 \\ &= 18,75.\end{aligned}$$

Lösung 28. DAV 2008 T F

Da nur die Kommutationszahlen für Erlebensfallleistungen tabelliert sind, verwendet man bei der Berechnung der Barwerte die Beziehungen $M_x = D_x - d \cdot N_x$ und $R_x = N_x - d \cdot S_x$ sowie $A_{x:\overline{n}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}$.

1.

$$\begin{aligned}
 A_{\frac{1}{40:30}} &= {}_{30}A_{40} \\
 &= \frac{M_{40} - M_{70}}{D_{40}} \\
 &= \frac{D_{40} - d \cdot N_{40} - (D_{70} - d \cdot N_{70})}{D_{40}} \\
 &= 1 - \frac{D_{70}}{D_{40}} - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \\
 &= 1 - \underbrace{\frac{210.447,735}{445.244,647}}_{=0,47266} - \underbrace{\frac{0,02}{1,02}}_{=0,019608} \cdot \underbrace{\frac{12.400.812,506 - 2.577.593,062}{445.244,647}}_{=22,06252} \\
 &\qquad\qquad\qquad =0,43260 \\
 &= 0,09474
 \end{aligned}$$

2.

$$A_{\frac{1}{40:30}} = {}_{30}E_{40} = \frac{D_{70}}{D_{40}} = 0,47266$$

3.

$$\begin{aligned}
 A_{40:\overline{30}} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{40:\overline{30}} \\
 &= 1 - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \\
 &= 1 - 0,43260 \\
 &= 0,56740
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} A_{40:\overline{30}} &= A_{\frac{1}{40:\overline{30}}} + A_{\frac{1}{40:\overline{30}}} \\ &= 0,09474 + 0,47266 \\ &= 0,56740 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 (IA)_{\overline{40:30|}} &= \frac{R_{40} - R_{70} - 30 \cdot M_{70}}{D_{40}} \\
 &= \frac{N_{40} - d \cdot S_{40} - (N_{70} - d \cdot S_{70}) - 30 \cdot (D_{70} - d \cdot N_{70})}{D_{40}} \\
 &= \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{S_{40} - S_{70}}{D_{40}} - 30 \cdot \left(\frac{D_{70}}{D_{40}} - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{N_{70}}{D_{40}} \right) \\
 &= 22,06252 - 0,019608 \cdot \underbrace{\frac{234.099.406,640 - 21.887.718,085}{445.244,647}}_{=476,61817} \\
 &\quad - 30 \cdot \left(0,47266 - 0,019608 \cdot \underbrace{\frac{2.577.593,062}{445.244,647}}_{=5,78916} \right) \\
 &= 22,06252 - 9,34553 - 10,77438 \\
 &= 1,94261
 \end{aligned}$$

Lösung 29. DAV 2004 R M

Zum Vergleich für die nachfolgenden Berechnungen:

$$\ddot{a}_{\overline{30|}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1,02}\right)^{30}}{1 - \frac{1}{1,02}} = 22,84438$$

1.

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{\overline{40:30|}} &= \frac{N_{40} - N_{70}}{D_{40}} \\
 &= \frac{14.263.407,113 - 4.324.985,247}{445.272,691} \\
 &= 22,31985
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{\overline{40:30|}}^{(12)} &= \ddot{a}_{\overline{40:30|}} - \frac{12-1}{2 \cdot 12} \cdot (1 - {}_{30}E_{40}) \\
 &= 22,31985 - \underbrace{\frac{11}{24}}_{=0,45833} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{227.920,060}{445.272,691}}_{=0,51187} \right) \\
 &= 22,09613
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (I\ddot{a})_{40:\overline{30}} &= \frac{S_{40} - S_{70} - 30 \cdot N_{70}}{D_{40}} \\
 &= \frac{323.428.337,053 - 55.924.803,422 - 30 \cdot 4.324.985,247}{445.272,691} \\
 &= 309,36992
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 {}_5|\ddot{a}_{40:\overline{25}}| &= \ddot{a}_{40:\overline{30}} - \ddot{a}_{40:\overline{5}} \\
 &= 22,31985 - \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} \\
 &= 22,31985 - \underbrace{\frac{14.263.407,113 - 12.127.414,536}{445.272,691}}_{=4,79704} \\
 &= 17,52281
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 {}_5|\ddot{a}_{40:\overline{25}}| &= {}_5E_{40} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{25}} \\
 &= \frac{N_{45} - N_{70}}{D_{40}} \\
 &= \frac{12.127.414,536 - 4.324.985,247}{445.272,691} \\
 &= 17,52281
 \end{aligned}$$

Lösung 30. Wegen $M_x = v \cdot N_x - N_{x+1}$ ist

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{M_x}{D_x} \\
 &= \frac{v \cdot N_x - N_{x+1}}{D_x} \\
 &= v \cdot \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x} \\
 &= v \cdot \ddot{a}_x - a_x .
 \end{aligned}$$

Lösung 31. Wegen $A_{x:\overline{n}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}$ und $\ddot{a}_{x:\overline{n}} = 1 + a_{x:\overline{n-1}}$ ist

$$\begin{aligned}
 A_{x:\overline{n}} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} + \ddot{a}_{x:\overline{n}} - \ddot{a}_{x:\overline{n}} \\
 &= (1 - d) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - (\ddot{a}_{x:\overline{n}} - 1) \\
 &= v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - a_{x:\overline{n-1}} .
 \end{aligned}$$

Lösung 32. Aufgrund der vorherigen Aufgabe ist

$$\begin{aligned} A_{\overline{x:n}} &= A_{x:\overline{n}} - {}_nE_x \\ &= v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - \underbrace{a_{x:\overline{n-1}} - {}_nE_x}_{=-a_{x:\overline{n}}} \\ &= v \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - a_{x:\overline{n}} . \end{aligned}$$

Lösung 33. Betrachtet werden die Barwerte \ddot{a}_x , $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$ sowie A_x und $A_{x:\overline{n}}$. Für diese gelten die Beziehungen $A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x$ und $A_{x:\overline{n}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}$.

- Bei Vernachlässigung der Sterblichkeit, d.h. $q_x = 0$ bzw. $p_x = 1$ für alle x , ergibt sich Folgendes für die Barwerte:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \underbrace{{}_k p_x}_{=1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

und

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot \underbrace{{}_k p_x}_{=1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v} = \ddot{a}_{\overline{n}} .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} A_x &= 1 - d \cdot \ddot{a}_x = 1 - \frac{d}{d} = 0 \\ A_{x:\overline{n}} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} = 1 - (1 - v^n) = v^n . \end{aligned}$$

Interpretation: Falls das Risiko Tod ausgeschaltet wird, ergeben sich für die Leibrentenbarwerte die für ewige bzw. Zeitrenten gültigen Barwertformeln (vgl. Abschn. 4.2.2.2 und 4.2.2.5). Die Todesfallleistung wird nie fällig, so dass $A_x = 0$; die Erlebensfallleistung nach n Jahren wird sicher fällig, also $A_{x:\overline{n}} = v^n$.

- Bei Vernachlässigung des Zinses, d.h. $i = 0$ bzw. $d = 0$ und $v = 1$, ergibt sich Folgendes für die Barwerte:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \underbrace{v^k}_{=1} \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_k p_x = e_x + 1$$

und

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{v^k}_{=1} \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x = e_{x:\overline{n-1}} + 1 ,$$

so dass

$$\begin{aligned} A_x &= 1 - d \cdot \ddot{a}_x = 1 , \\ A_{x:\overline{n}} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} = 1 . \end{aligned}$$

Interpretation: Als Rentenbarwerte ergeben sich die fernere Lebenserwartung (siehe Abschn. 5.1.4) sowie die temporäre fernere Lebenserwartung. Da der Tod sicher eintritt, ist $A_x = 1$, und da Tod oder Erleben innernhalb von n Jahren auf jeden Fall eintritt, ist auch der Barwert der Todes- und Erlebensfallleistung $A_{x:\overline{n}} = 1$.

Lösung 34. Approximation bei unterjähriger Rentenzahlweise

- Zum Beweis vergleiche auch *Wolfsdorf (1997)*, S. 144f, sowie *Bowers et al. (1997)*, S. 151f. Die Annahme UDD ist gleichbedeutend mit

$$l_{x+t} = (1-t) \cdot l_x + t \cdot l_{x+1}$$

für $0 \leq t \leq 1$ (vgl. Abschn. 5.2.2.1), so dass mit $t = \frac{m}{k}$ ($m = 0, \dots, k-1$) für alle $x \in \{0; 1; 2; \dots\}$ folgt:

$$l_{x+\frac{m}{k}} = \left(1 - \frac{m}{k}\right) \cdot l_x + \frac{m}{k} \cdot l_{x+1} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} p_x \cdot v^{\frac{j}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{l_{x+\frac{j}{k}}}{l_x} \cdot v^{\frac{j}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot \frac{\left(1 - \frac{m}{k}\right) \cdot l_{x+j} + \frac{m}{k} \cdot l_{x+j+1}}{l_x} \cdot v^{j+\frac{m}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{l_x} \cdot \left(l_{x+j} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{m}{k}\right) \cdot v^{\frac{m}{k}} + l_{x+j+1} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{k} \cdot \frac{m}{k} \cdot v^{\frac{m}{k}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{l_x} \cdot \left(l_{x+j} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k^2} \cdot v^{\frac{m}{k}}}_{=: \tilde{A}(k)} + l_{x+j+1} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k^2} \cdot v^{\frac{m}{k}}}_{=: \tilde{B}(k)} \right) . \end{aligned}$$

Die Gewichte $\tilde{A}(k)$ und $\tilde{B}(k)$ sind unabhängig vom Alter, so dass

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(k)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}(k) \cdot l_{x+j} + \tilde{B}(k) \cdot l_{x+j+1}}{l_x} \cdot v^j \\ &= \tilde{A}(k) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j}}{l_x} \cdot v^j + \tilde{B}(k) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_{x+j+1}}{l_x} \cdot v^j \end{aligned}$$

$$= \tilde{A}(k) \cdot \ddot{a}_x + \frac{\tilde{B}(k)}{v} \cdot a_x .$$

Wegen $a_x = \ddot{a}_x - 1$ hat man

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \left(\tilde{A}(k) + \frac{\tilde{B}(k)}{v} \right) \cdot \ddot{a}_x - \frac{\tilde{B}(k)}{v} ,$$

woraus mit $A(k) := \tilde{A}(k) + \frac{\tilde{B}(k)}{v}$ und $B(k) := \frac{\tilde{B}(k)}{v}$ die Behauptung $\ddot{a}_x^{(k)} = A(k) \cdot \ddot{a}_x - B(k)$ folgt.

Für die Konstanten gilt übrigens auch:

$$A(k) = \frac{d \cdot i}{d^{(k)} \cdot i^{(k)}}$$

und

$$B(k) = \frac{i - i^{(k)}}{d^{(k)} \cdot i^{(k)}}$$

(vgl. Milbrodt und Helbig (1999), S. 214).

2. Sofern darüber hinaus unterjährig einfache Verzinsung unterstellt wird, ist folgende Ersetzung vorzunehmen:

$$v^{\frac{m}{k}} \approx \frac{1}{1 + \frac{m}{k} \cdot i} .$$

Damit erhält man zunächst die Approximationen

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k) &\approx \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{k} \cdot i} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k+m \cdot i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{B}(k) &\approx \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{k} \cdot i} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k+m \cdot i} . \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\tilde{B}(k)}{v} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m \cdot (1+i)}{k+m \cdot i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m + m \cdot i}{k + m \cdot i} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k + m \cdot i - (k - m)}{k + m \cdot i} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \left(\sum_{m=0}^{k-1} \frac{k + m \cdot i}{k + m \cdot i} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k - m}{k + m \cdot i} \right) \\
&= 1 - \tilde{A}(k)
\end{aligned}$$

folgt

$$\ddot{a}_x^{(k)} \approx \ddot{a}_x - \frac{1+i}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k+m \cdot i},$$

was der von *Neuburger (1990)*, S. 262–264, hergeleiteten Näherung entspricht. Ersetzt man im Korrekturglied

$$\tilde{C}_k(i) := \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m + m \cdot i}{k + m \cdot i}$$

den Zinssatz i einfach durch den Wert 0, so ergibt sich die wohlbekannte Näherung

$$\ddot{a}_x^{(k)} \approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}.$$

Eine Taylor-Approximation des Korrekturglieds um den Entwicklungspunkt 0 liefert darüber hinaus Folgendes:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_k(i) \Big|_{i=0} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m + m \cdot i}{k + m \cdot i} \Big|_{i=0} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m}{k} \\
&= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} \\
&= \frac{k-1}{2k}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial i} \tilde{C}_k(i) \Big|_{i=0} &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m \cdot k - m^2}{(k + m \cdot i)^2} \Big|_{i=0} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m \cdot k - m^2}{k^3} \\
&= \frac{1}{k^3} \cdot \left(k \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} - \frac{(k-1) \cdot k \cdot (2k-1)}{6} \right) \\
&= \frac{k-1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{2k-1}{3k} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{k+1}{3k} = \frac{k^2 - 1}{6k^2}$$

und

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial i^2} \tilde{C}_k(i) \right|_{i=0} &= \left. \frac{-2}{k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m^2 \cdot k - m^3}{(k+m \cdot i)^3} \right|_{i=0} = -2 \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m^2 \cdot k - m^3}{k^4} \\ &= \frac{-2}{k^4} \cdot \left(k \cdot \frac{(k-1) \cdot k \cdot (2k-1)}{6} - \frac{(k-1)^2 \cdot k^2}{4} \right) \\ &= -\frac{k-1}{k^2} \cdot \left(\frac{2k-1}{3} - \frac{k-1}{2} \right) \\ &= -\frac{k-1}{k^2} \cdot \frac{k+1}{6} = -\frac{k^2 - 1}{6k^2}, \end{aligned}$$

so dass die Taylor-Approximation 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k(i) &\approx \tilde{C}_k(0) + \tilde{C}'_k(0) \cdot i \\ &= \frac{k-1}{2k} + \frac{k^2 - 1}{6k^2} \cdot i \end{aligned}$$

lautet und die 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k(i) &\approx \tilde{C}_k(0) + \tilde{C}'_k(0) \cdot i + \frac{1}{2} \cdot \tilde{C}''_k(0) \cdot i^2 \\ &= \frac{k-1}{2k} + \frac{k^2 - 1}{6k^2} \cdot i - \frac{k^2 - 1}{12k^2} \cdot i^2 \\ &= \frac{k-1}{2k} + \frac{k^2 - 1}{6k^2} \cdot i \cdot \left(1 - \frac{i}{2} \right). \end{aligned}$$

Zum Abschluss eine Übersicht über die Werte, die der Korrekturterm für ausgewählte Zinsen annimmt:

		k			
$\tilde{C}_k(i)$	i	1	2	4	12
$\frac{k-1}{2k}$	—	0,00000	0,25000	0,37500	0,45833
$\frac{k-1}{2k} + \frac{k^2 - 1}{6k^2} \cdot i$	3,50%	0,00000	0,25438	0,38047	0,46413
$\frac{k-1}{2k} + \frac{k^2 - 1}{6k^2} \cdot i \cdot \left(1 - \frac{i}{2} \right)$	1,75%	0,00000	0,25219	0,37773	0,46123
	3,50%	0,00000	0,25430	0,38037	0,46402
	1,75%	0,00000	0,25217	0,37771	0,46120

3. Es ist

$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(k)} = {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(k)} \approx {}_nE_x \cdot \left(\ddot{a}_{x+n} - \frac{k-1}{2k} \right) = {}_{n|}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \cdot {}_nE_x.$$

Lösung 35. Rekursive Berechnung von Leibrentenbarwerten

1. Es ist

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}} &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\ &= 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_{x+1}} \\ &= 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}}.\end{aligned}$$

2. Im Falle von unterjähriger Prämienzahlung gilt nach Gleichung (6.4) die Näherung

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(k)} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x).$$

Nach Aufgabenteil 1. ist dann

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(k)} &\approx 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_nE_x) \\ &= \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot \left(\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}} + \frac{k-1}{2k} \cdot {}_{n-1}E_{x+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot \left(\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}} - \frac{k-1}{2k} \cdot (1 - {}_{n-1}E_{x+1}) + \frac{k-1}{2k}\right) \\ &\approx \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot \left(\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}}^{(k)} + \frac{k-1}{2k}\right).\end{aligned}$$

3. Man hat

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}} &= \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_x - N_{x+n} + S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1) \cdot N_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1) \cdot N_{x+n}}{D_{x+1}} \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{n}} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot (I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}}.\end{aligned}$$

4. Ist r der Steigerungssatz der jährlichen Rentenleistung, so gilt

$$\%^{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}}} = \tilde{i} \ddot{a}_{x:\overline{n}}$$

mit dem Zinssatz $\tilde{i} := \frac{i-r}{1+r}$. Gemäß Aufgabenteil 1. ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \%^{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}}} &= \tilde{i} \ddot{a}_{x:\overline{n}} \\ &= 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{i} \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}} \\ &= 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot (1+r) \cdot \%^{(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}}} . \end{aligned}$$

Lösung 36. Gesucht ist der Barwert $\%^{(IA)_x}$. Für diesen gilt:

$$\begin{aligned} \%^{(IA)_x} &= \sum_{l=0}^{\infty} v^{l+1} \cdot (1+r)^l \cdot {}_l p_x \cdot q_{x+l} \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{v}^{l+1} \cdot {}_l p_x \cdot q_{x+l} \\ &= \frac{1}{1+r} \cdot \tilde{i} A_x . \end{aligned}$$

Hierbei ist $\tilde{v} = \frac{1+r}{1+i} = \frac{1}{1+\tilde{i}}$ der Diskonfaktor zum Zinssatz $\tilde{i} := \frac{i-r}{1+r}$.

Lösung 37. Rekursive Berechnung von Barwerten für Todesfallleistungen

1. Es ist

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}} &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{C_x + M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{C_x}{D_x} + \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} \\ &= \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \cdot v + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot A_{x+1:\overline{n-1}} \\ &= v + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot \left(A_{x+1:\overline{n-1}} - 1\right) . \end{aligned}$$

2. Man hat

$$\begin{aligned}
 (IA)_{\underline{x:n}} &= \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} \\
 &= \frac{M_x + R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1) \cdot M_{x+n} - M_{x+n}}{D_x} \\
 &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1) \cdot M_{x+n}}{D_x} \\
 &= A_{\underline{x:n}} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v \cdot (IA)_{\underline{x+1:n-1}}.
 \end{aligned}$$

Lösung 38. Für den Barwert $(DA)_{\underline{x:n}}$ gilt

$$\begin{aligned}
 (DA)_{\underline{x:n}} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \cdot v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{j+1}{n}\right) \cdot v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\
 &= \frac{n+1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \cdot v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\
 &= \frac{n+1}{n} \cdot A_{\underline{x:n}} - \frac{1}{n} \cdot (IA)_{\underline{x:n}}
 \end{aligned}$$

oder mit Kommutationszahlen ausgedrückt

$$\begin{aligned}
 (DA)_{\underline{x:n}} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1) \cdot (M_x - M_{x+n}) - (R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n})}{D_x} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot M_x - (R_x - M_x) + (R_{x+n} - M_{x+n})}{D_x} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot M_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}.
 \end{aligned}$$

Kapitel 7

Kosten, Zuschläge und Provisionen

In diesem Kapitel betrachten wir die mit einem Versicherungsvertrag verbundenen Kosten und somit – nach Zins und Biometrie – die letzte der drei Rechnungsgrundlagen.

Durch Entwicklung, Verkauf und Verwaltung von Versicherungspolicen entstehen für das VU Kosten, welche dem VN (zumindest anteilig) in Rechnung gestellt werden. Nur selten, wie bspw. die Kosten für die Durchführung einer Gesundheitsprüfung, können produktbezogene Kosten direkt einem einzelnen Vertrag zugeordnet werden. Der weitaus größte Teil der Kosten entsteht übergreifend in Form von sog. **Overhead-Kosten**. Dazu zählen u.a. Personalkosten, Kosten für Gebäudeunterhaltung und Steuern. Die Verteilung sämtlicher Kosten auf die einzelnen Policen erfolgt durch eine indirekte, unternehmensindividuelle unterschiedliche Zuschlagslösung.

Analog zu den Ausscheide- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten findet eine Differenzierung nach Kosten 1. Ordnung und Kosten 2. Ordnung statt. Bei den **Kosten 1. Ordnung** handelt es sich um die vom VU angesetzten und in Form von **Kostensätzen** – synonym auch **Kostenzuschlägen** – in der Prämie eingerechneten Kosten, welche der VN trägt. **Kosten 2. Ordnung** hingegen bezeichnen die dem VU tatsächlich entstehenden Kosten im Zusammenhang mit dem einzelnen Vertrag. Die eingerechneten Kostenzuschläge sollten den tatsächlichen Kosten entsprechen, was dadurch erreicht werden kann, dass die Kostensätze aufgrund der in der Vergangenheit beobachteten Kosten ermittelt werden.

Kosten werden über ein **Kostenmodell** abgebildet. Dieses beschreibt,

- welche Kosten anfallen (Kostenart),
- welche Bezugsgrößen die einzelnen Kostensätze haben (Kostensystem), und
- welche Ober- und Untergrenzen für die jeweiligen Kostenzuschläge gelten.

Entsprechend der Gewinn- und Verlustrechnung eines VU (siehe Abschn. 17.2.2) werden die folgenden Kosten unterschieden:

- Kosten für den Abschluss von Versicherungsverträgen,
- Kosten für die Verwaltung von Versicherungsverträgen,
- Kosten für die Kapitalanlage.

Zu Beginn eines Vertrags fallen **Abschlusskosten** an. Diese setzen sich zusammen aus der Abschlussprovision, die an den Vermittler gezahlt wird (siehe Abschn. 7.2.3), Kosten für die Risiko- und ggf. medizinische Gesundheitsprüfung, Kosten für die Antragsbearbeitung sowie die Ausfertigung und den Versand des Versicherungsscheins.

Während der Vertragslaufzeit fallen Kosten für die fortlaufende Pflege bzw. Verwaltung der Versicherung an. Diese werden als **laufende Verwaltungskosten** bezeichnet. Dazu zählen u.a. Aufwendungen für die Erstellung jährlicher Mitteilungen über den Vertragsstand, Kosten im Zusammenhang mit Geschäftsvorfällen sowie Kosten, die durch die Bearbeitung und Abwicklung von Versicherungsfällen entstehen.

Grundsätzlich kommen als Bezugsgrößen für die unterschiedlichen Kostenarten entweder die Prämie bzw. die Beitragssumme oder die versicherte Leistung in Gestalt der Versicherungssumme bzw. Jahresrente in Frage. Darüber hinaus werden Kosten auch in fixer Höhe, d.h. ohne eine beitrags- oder leistungsbezogene Bemessungsgrundlage, angesetzt; sie werden **Stückkosten** genannt.

7.1 Kosten 1. Ordnung

Die Festlegung der Höhe der Kostensätze sowie der zugehörigen Bemessungsgrundlagen geschieht im Rahmen der Produktentwicklung und wird mit dem Begriff **Pricing** bezeichnet. Die Wahl der Kostenparameter sollte derart erfolgen, dass das VU in die Lage versetzt wird, die auf lange Sicht tatsächlich anfallenden Kosten durch die Beitragseinnahmen decken zu können. Dieses Ziel führt – analog zur Auswahl der Sterbetafeln – zu vorsichtigen Kostenannahmen 1. Ordnung.

7.1.1 Kostensätze

In den derzeit gängigen Kostenmodellen der Lebensversicherer werden die folgenden Kostenzuschläge angesetzt:

- Abschlusskosten (α -Kosten), üblicherweise aufgeteilt in rechnungsmäßige und überrechnungsmäßige Abschlusskosten;
- laufende Verwaltungskosten, bestehend aus Inkassokosten (β -Kosten) und weiteren Verwaltungskosten (γ -Kosten);
- Stückkosten.

Die Aufteilung der Abschlusskosten in rechnungsmäßige und überrechnungsmäßige resultiert aus der gesetzlichen Bestimmung, dass im Rahmen der Zillmerung maximal 2,5% der Prämiensumme als einmalige Abschlusskosten angesetzt werden dürfen (siehe Abschn. 9.2.3). Die in die Prämie eingerechneten (und tatsächlich entstehenden) Abschlusskosten sind jedoch i.d.R. höher als die rechnungsmäßig zugelassenen, so dass der übersteigende Teil auf die Prämienzahlungsdauer verteilt und als **Amortisationskosten** bezeichnet wird. Sofern es sich nicht um laufende Abschlusskosten handelt, werden die überrechnungsmäßigen Abschlusskosten demnach vorfinanziert.

Früher wurde als Bezugsgröße für die einmaligen Abschlusskosten die Versicherungssumme herangezogen, aktuell bezieht sich der relevante Kosten-
satz üblicherweise auf die Summe aller Bruttoprämiens. Dabei findet oftmals eine Begrenzung auf die Summe der Prämien einer gewissen Anzahl von Jahren t^* statt. Die Amortisationskosten wiederum beziehen sich i.d.R. auf die garantierte Versicherungsleistung.

Innerhalb der laufenden Verwaltungskosten unterscheidet man historisch die Inkassokosten von den sonstigen Verwaltungskosten. Die Bezeichnung Inkassokosten erscheint in heutiger Zeit obsolet, da die Versicherungsprämien überwiegend bargeldlos über Bankkonten zu den VU gelangen und nicht mehr durch den Versicherungsvertreter eingeholt werden müssen. Dennoch hält sich der Begriff hartnäckig.

Die sonstigen Verwaltungskosten beziehen sich auf die Vertragslaufzeit. Je nachdem, welchen Vertragsstatus die Police hat, werden unterschiedliche Kostensätze für die Vertragsverwaltung angesetzt bzw. erhoben. Dabei findet eine Differenzierung nach der Anwartschafts- und nach der Leistungsphase statt, sowie innerhalb der anwartschaftlichen Zeit danach, ob der Vertrag beitragspflichtig, planmäßig oder unplanmäßig beitragsfrei (gestellt) ist.

7.1.2 Ratenzuschläge

Auch wenn die Berechnung unterjähriger Prämien technisch prinzipiell kein Problem darstellt, folgt die Kalkulation der Prämien nach wie vor einer jährlichen Betrachtung. Sofern der VN dann eine unterjährige Prämienzahlung in Form von halbjährlichen, vierteljährlichen oder monatlichen Prämien wünscht, werden sog. **Raten(zahlungs)zuschläge** erhoben.

Die Ratenzuschläge werden kalkulatorisch auf den Verwaltungsaufwand, auf den Sparanteil und die Abdeckung des Todesfallrisikos aufgeteilt. Entsprechend lässt sich die Erhebung solcher Zuschläge begründen:

Dadurch, dass die Prämie nicht vollständig zu Beginn des Versicherungsjahres gezahlt wird, sondern unterjährig in mehreren Teilzahlungen, entsteht für das VU ein höherer Verwaltungsaufwand (z.B. für Inkasso). Gleichzeitig entgehen dem VU Zinsgewinne auf die Prämie. Schließlich muss das VU aus der nur teilweise vorhandenen Prämie das komplette Todesfallrisiko des einzelnen Jahres decken, d.h., wenn die VP stirbt, wird dennoch die gesamte vereinbarte Versicherungsleistung gezahlt, auch wenn die Prämie in dem konkreten Jahr nicht vollständig vereinnahmt wurde.

Üblicherweise gilt: Je mehr Raten gezahlt werden, desto höher ist der Ratenzuschlag; der Ratenzuschlag ist also eine monoton wachsende Funktion von der Prämienzahlweise. Verbreitet waren Ratenzuschläge i.H.v. 2% für eine halbjährliche, 3% für vierteljährliche und 5% für die monatliche Prämienzahlweise.

Im Zusammenhang mit der Erhebung von Zuschlägen für unterjährige Prämienzahlweisen kommt es immer wieder zu juristischen Auseinandersetzungen. So stand bspw. jahrelang die Frage im Raum, ob die unterjährige Prämienzahlung ein Darlehen des VU an den VN darstellt und somit – in Analogie zu entsprechenden Bankprodukten – ein Effektivzins ausgewiesen werden muss. Da diese Angabe seitens der VU jedoch fehlte, drohten Rückzahlungsforderungen in Milliardenhöhe. Der über mehrere Jahre anhaltende Rechtsstreit zwischen Verbraucherorganisationen und Versicherungsbranche wurde schließlich durch eine Entscheidung des Bundesgerichtshofes (kurz: BGH) beigelegt und die Auffassung, dass es sich um eine Kreditgewährung handelt, abgelehnt. Somit blieben die VU vor den drohenden Ansprüchen verschont.

Beispiel 20. Wir betrachten eine Jahresprämie von 120 EUR. Bei einem Ratenzuschlag von 5% für monatliche Zahlweise ergibt sich ein monatlicher Beitrag i.H.v. $\frac{120 \cdot 1,05}{12} = 10,50$ EUR. Interpretiert man die eigentlich zu Jahresbeginn fällige Prämie von 120 EUR als Darlehen, welches in zwölf vorschüssig zahlbaren Raten á 10,50 EUR „getilgt“ wird, so ist der interne Zinsfuß dieses Zahlungsstroms 11,35% p.a. (vgl. Abschn. 4.2.3). Folglich entspricht ein 5%-iger Ratenzuschlag bei monatlicher Zahlweise einem Effektivzins von 11,35%.

Aber nicht nur aufgrund dieser Unsicherheit versuchen die VU teilweise, die Erwähnung von Ratenzuschlägen zu vermeiden. Statt einer Jahresprämie geht man zu unterjährigen Prämienzahlungsabschnitten über, für welche die dann aufgeführten Prämien gelten. Bei diesem Vorgehen werden anstelle von Ratenzuschlägen bspw. modifizierte Kostensätze in die Prämie eingerechnet.

7.1.3 Sonstige Zuschläge

Beim Abschluss von Kapital- und Risikolebensversicherungen wird üblicherweise eine Risikoprüfung durchgeführt. Ziel dieser Risikoprüfung ist es zu ermitteln, ob die VP „Eigenschaften“, sog. **Risikofaktoren**, aufweist, welche das Sterblichkeitsrisiko über das normale (und in den verwendeten Sterbewahrscheinlichkeiten enthaltene) Maß hinaus erhöhen. Die Risikoprüfung besteht insbesondere aus Fragen zum Gesundheitszustand sowie zum Lebenswandel der versicherten Person. So kann bereits bei Antragstellung abgefragt werden, ob die VP bspw. an einer besonderen Krankheit leidet oder Risikosportarten ausübt. Sofern die Erhebung bzw. die Beantwortung dieser Fragen nicht ausreicht, kann auch eine medizinische Gesundheitsprüfung in Form einer ärztlichen Untersuchung notwendig werden. Je nachdem, welche Erkenntnisse die Risikoprüfung liefert, wird ein **Risikozuschlag** erhoben, der sich auch aus mehreren einzelnen Risikozuschlägen zusammensetzen kann. Für erhöhte Gesundheitsrisiken wird dann ein medizinischer Zuschlag erhoben, für jede Risikosportart u.U. ein separater Zuschlag usw.

Eine weitere Variante ist der **Summenzuschlag** bzw. **Summenrabatt**. Diese Art von Zuschlag war lange üblich, wird jedoch in der heutigen Zeit eher selten angewendet. Dabei wird in Abhängigkeit von der Höhe der Versicherungssumme entweder – bei niedrigen Versicherungssummen – ein Zuschlag erhoben oder – bei hohen Versicherungssummen – ein Rabatt gewährt. Der Zuschlag bzw. Rabatt kann auch gestaffelt, d.h. aufgeteilt auf mehrere Intervalle von Versicherungssummen, angewendet werden. Begründet wird dieser Zuschlag mit dem überproportional großen Verwaltungsaufwand bei kleinen Summen sowie dem unterproportionalen Kostenaufwand bei großen Summen. Problematisch bei der Verwendung dieses Zuschlags ist, dass die Linearität zwischen dem Leistungsbarwert für die Versicherungssumme 1 und demjenigen für eine beliebige Summe B verloren geht, was zu (zwar lösbar, aber vermeidbaren) Problemen bei der Prämien- und/oder Leistungsberechnung führen kann.

Im Kontext von Berufsunfähigkeitsversicherungen existiert ein **Berufsgruppenzuschlag**, auf den wir im zugehörigen Kapitel (siehe Kap. 14) eingehen werden.

7.1.4 Tarif-/Kostenstufen

Im Rahmen von Kollektivverträgen werden häufig reduzierte Kostensätze und Zuschläge angesetzt. Gestaffelt nach der Größe des versicherten Kollektivs fällt die Reduktion unterschiedlich stark aus. Begründen lässt sich dies mit der hohen Anzahl gleichartiger Verträge.

Dadurch ergeben sich insbesondere Kosteneinsparungen bei der Verwaltung der Verträge, so dass die zugehörigen Kostensätze und auch die Ratenzuschläge im Vergleich zum Einzelgeschäft teilweise deutlich abgesenkt werden (können).

Allgemeiner werden unterschiedliche Kostenabstufungen, wie z.B. innerhalb des Kollektivgeschäfts, unter dem Begriff der **Tarifstufe** oder **Kostenstufe** geführt. Dabei entspricht eine Tarifstufe einer bestimmten Konstellation von Kostensätzen, die sich aus der Art des kontrahierten Vertrags begründen lässt und/oder an das Vorliegen gewisser Konditionen geknüpft ist. Gängige Tarifstufen sind Einzeltarif, Kollektivtarif, Sammeltarif sowie Haustarif.

7.1.5 Übersicht

Zum Abschluss fasst die folgende Tabelle noch einmal die beschriebenen Kostenarten und Zuschläge, die gängigen bzw. hier verwendeten Bezeichnungen sowie die relevanten Bezugsgrößen zusammen:

Kosten-/Zuschlagsart	Kostensatz (Notation)	Bezugsgröße
Abschlusskosten – Einmalig – Amortisationskosten	α , α^z α^γ	Summe der Bruttoprämien versicherte Leistung
Laufende Verwaltungskosten – Inkassokosten – beitragspflichtig (bpfl) – tariflich beitragsfrei (bfr) – vorzeitig beitragsfrei (vbfr) – in Leistung (leist)	β γ_1 γ_2 γ_3 γ_4	Brutto(jahres)prämie versicherte Leistung versicherte Leistung versicherte Leistung versicherte Leistung
Ratenzuschlag	$\rho = \rho(k)$	Bruttojahresprämie
Stückkosten	ε	—
Risikozuschlag	σ	Brutto(jahres)prämie
Summenzuschlag	—	versicherte Leistung

Hierbei steht „versicherte Leistung“ für die Versicherungssumme bei Kapital- und Risikolebensversicherungen oder die versicherte Jahresrente bei Rentenversicherungen.

7.2 Kosten 2. Ordnung

Bei den tatsächlichen Kosten werden insbesondere anfängliche Kosten, die bei Zustandekommen eines Versicherungsvertrags entstehen, und wiederkehrende Kosten während des Vertragsverlaufs, die bspw. durch bestimmte Geschäftsvorfälle verursacht werden, voneinander abgegrenzt.

7.2.1 Geschäftsvorfall-bezogene Kosten

Der Abschluss des Versicherungsvertrags, das Erreichen des Ablaufs der Versicherung, der Eintritt des Versicherungsfalls (z.B. Tod der VP, Erreichen des Rentenbeginntermins) und jede Vertragsänderung (z.B. Änderung der Prämienzahlweise) stellen einen sog. **Geschäftsvorfall** dar, dessen interne Bearbeitung mit Kosten verbunden ist.

Die einem Geschäftsvorfall zuzuordnenden Kosten können durchaus als fixer Betrag angesetzt werden, da der jeweilige Geschäftsvorfall i.d.R. einen fest definierten qualitativen (Arbeits-)Aufwand nach sich zieht und in den meisten Fällen unabhängig von quantitativen Größen (z.B. Höhe der zu zahlenden Prämie oder Höhe der auszuzahlenden Versicherungsleistung) ist.

Gleichwohl ist die Höhe dieses Fixbetrags 2. Ordnung von Geschäftsvorfall zu Geschäftsvorfall unterschiedlich, denn während bei einer Zahlweisen-Änderung nur ein oder zwei Arbeitsschritte notwendig sind (Änderung im Verwaltungssystem und Versand eines neuen Versicherungsscheins), ist der Eintritt des Versicherungsfalls in der Bearbeitung deutlich aufwändiger, da abgesehen von der bloßen Auszahlung der Leistung zunächst die Rechtmäßigkeit der Auszahlung sowie des Empfängers überprüft werden müssen.

7.2.2 Kosten für die Kapitalanlage

Um mindestens den gegenüber dem VN garantierten Rechnungszins zu erwirtschaften, verwahrt das VU die eingenommenen Prämien oder die gebildeten Reserven nicht bloß, sondern investiert diese Geldmittel am Kapitalmarkt. So kauft das VU bspw. festverzinsliche Wertpapiere mit verschiedenen Laufzeiten oder investiert in Aktienfonds. Die Anlage am Kapitalmarkt ist mit zusätzlichen Kosten verbunden, den sog. **Kapitalanlagekosten**. Diese resultieren einerseits aus der Verwaltung der Kapitalanlagen und andererseits aus den Transaktionskosten für deren Kauf und Verkauf.

7.2.3 Provisionen

Provisionen sind Vergütungen für den Vertrieb von Versicherungen sowie die Betreuung von Versicherungskunden. Die Empfänger derartiger Zahlungen sind einerseits **Versicherungsvertreter**, d.h. festangestellte Vermittler der VU-eigenen Ausschließlichkeitsorganisation, und **Mehrfachagenten**, welche Produkte mehrerer Versicherer gleichzeitig anbieten und diese VU jeweils rechtlich vertreten. Andererseits erhalten auch **Versicherungsmakler**, d.h. unabhängige Berater, die VU-neutral im Auftrag des Kunden agieren, für die Vermittlung eines Vertragsabschlusses einen Lohn, welcher speziell als **Courage** bezeichnet wird.

Provisionen werden als **Abschlussprovision** für den erfolgreichen Vertrieb einer Versicherung oder als **Bestandsprovision** für die fortlaufend erfolgende Prämienannahme des VU gewährt. Die Regelungen bzgl. der Provisionierung, d.h. Höhe, Vereinnahmung bzw. Rückerstattung etc., werden in einer **Provisionsordnung** fixiert. Diese wird zwischen dem VU und den Vertretern des Versicherungs- bzw. Maklervertriebs ausgehandelt.

Die Abschlussprovision ist eine i.d.R. bei Vertragsabschluss zu leistende Zahlung des VU an den Vermittler. Ihre Höhe bemisst sich anhand einer sog. **Wertungssumme**, welche i.d.R. der Beitragssumme, d.h. der Summe aller zu zahlenden Prämien, entspricht. Dabei findet häufig eine Begrenzung auf eine bestimmte Anzahl von Prämienzahlungsjahren statt, z.B. 40 Jahre, so dass die Wertungssumme höchstens der Summe der Prämien in den ersten 40 Jahren der Prämienzahlungsdauer entspricht. Die Abschlussprovision berechnet sich dann mithilfe eines **Provisionssatzes** in Prozent oder Promille der ermittelten Wertungssumme. Die Festlegung des Provisionssatzes unterliegt diversen Faktoren. So ist es üblich, dass für die Vermittlung von Einzelgeschäft die volle Provision gezahlt wird, während für Kollektivgeschäft je nach Größe des Kollektivs deutlich weniger gezahlt wird.

Für die Abschlussprovision ist in der Provisionsordnung üblicherweise ein **Provisionshaftungszeitraum** bzw. eine **Stornohaftungszeit** festgelegt. Wird der Vertrag, für den die Abschlussprovision gezahlt wurde, innerhalb dieser Frist storniert, so muss der Vermittler einen Teil seiner Abschlussprovision wieder an das VU zurückzahlen. Die Höhe dieser Rückzahlung richtet sich danach, wie die Abschlussprovision innerhalb dieses Haftungszeitraums verdient wird. Beträgt der Haftungszeitraum bspw. fünf Jahre und verdient der Vermittler jeden Monat $\frac{1}{60}$ der Abschlussprovision, so darf der Vermittler bei einer Kündigung des Vertrags nach drei Jahren $\frac{36}{60} = 60\%$ der Abschlussprovision behalten und muss die übrigen 40% an das VU rückerstatteten. Gängig sind auch Regelungen, nach denen die Abschlussprovision im Stornofall in Höhe der Hälfte der bis dahin gezahlten Prämien für den Vermittler verdient ist, woraus Stornohaftungszeiten von bis zu drei Jahren

resultieren. Für die rückgeforderte Abschlussprovision wird häufig auch die Kurzbezeichnung **Rück-AP** verwendet. Endet der Vertrag innerhalb des Haftungszeitraums hingegen durch Tod der VP, so gilt üblicherweise die gesamte Abschlussprovision für den Vermittler als verdient.

Die Bestandsprovision, auch als **Bestandspflegegeld** bezeichnet, erhält der Vermittler für das Fortbestehen der Versicherung und die damit verbundene Beitragseinnahme. Meistens beginnt ihre Zahlung erst ein oder zwei Jahre nach Vertragsabschluss, und sie wird so lange gezahlt wie der Vertrag besteht und Prämien fließen. Die Höhe des Bestandspflegegelds richtet sich nach der eingehenden Prämie und berechnet sich als Prozentsatz derselben.

Kapitel 8

Prämien

Nachdem wir in den vorhergehenden Kapiteln alle Rechnungsgrundlagen kennengelernt haben, können wir nun Prämien für die verschiedenen Versicherungsprodukte bestimmen. Kurze Wiederholung: Die Prämie, synonym der Beitrag, ist der Preis, den der VN dafür zu zahlen hat, dass er das Risiko von Tod und/oder Überleben bzw. Langlebigkeit auf den Versicherer transferiert. Tritt das versicherte Ereignis ein, zahlt das VU die garantierte Leistung an den Begünstigten.

Gesetzliche Grundlage für die Prämienkalkulation ist § 138 VAG. Danach muss die Prämie „unter Zugrundelegung angemessener versicherungsmathematischer Annahmen kalkuliert werden“. Darüber hinaus fordert das Gesetz, dass die Prämie hinreichend hoch bemessen sein muss, damit der Versicherer sämtliche von ihm eingegangenen Verpflichtungen erfüllen kann. Letztere bestehen insbesondere in der Bildung einer ausreichenden Deckungsrückstellung (siehe Kap. 9) und umfassen neben der Bereitstellung der zugesagten Versicherungsleistungen auch die vollständige Bearbeitung und Verwaltung des Vertrags vom Anfang bis zu seiner Beendigung.

Da der Eintritt des versicherten Ereignisses nicht sicher ist, basiert die Beitragsberechnung auf Wahrscheinlichkeiten, insbesondere Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten, zu denen je nach Produktart noch weitere Wahrscheinlichkeiten hinzukommen. Außerdem sind Kosten, die dem VU während der Vertragsdauer des einzelnen Vertrags entstehen, eingepreist. Schließlich findet auch der Zins Berücksichtigung, weil das VU einen Teil der Prämie investieren und somit Kapitalerträge erwirtschaften kann. Aus diesem Grund werden sowohl die Verbindlichkeiten des Kunden (in Form der Prämien) als auch die des Versicherers (in Form von Versicherungs- und Serviceleistungen) mit dem Zinssatz für die Prämienberechnung diskontiert. Den Ausführungen aus Abschn. 4.3 folgend gehen wir davon aus, dass der Zinssatz für die Prämienberechnung identisch mit dem Rechnungszins ist.

Diese einführenden Erläuterungen münden in das sog. **Äquivalenzprinzip**, welches das Fundament für die Kalkulation der Prämien und sämtlicher damit in Zusammenhang stehender Größen ist.

8.1 Äquivalenzprinzip

Das **Äquivalenzprinzip der Versicherungsmathematik** basiert – analog zum „Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik“ (siehe Abschn. 4.2.3) – auf der Identität zweier Zahlungsströme. Dort wurde zur Bestimmung des internen Zinsfußes der Barwert der Investitionszahlungen (Ausgaben) mit dem Barwert der Rückzahlungen (Einnahmen) gleichgesetzt. Hier wird ein nahezu identischer Ansatz verfolgt, mit dem Unterschied, dass die Zahlungsströme nicht mehr deterministisch sind. Die entsprechenden Zahlungen erfolgen in Abhängigkeit vom Erleben oder Tod bzw. einem sonstigen Status der VP und werden daher mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (dass sich die VP im jeweiligen Status befindet) gewichtet. Somit werden keine klassischen Barwerte, sondern erwartete Barwerte gebildet.

Beim versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip stehen auf der einen Seite die vom Kunden gezahlten Prämien, auf der anderen Seite die vom VU erbrachten Versicherungs- und Serviceleistungen. Das Äquivalenzprinzip fordert die Äquivalenz von Beiträgen und Leistungen zu jedem Zeitpunkt während der gesamten Dauer eines Versicherungsvertrags. Genauer ausgedrückt heißt dies, dass – unter Berücksichtigung des Zinses – der Erwartungswert der Leistungen jederzeit mit dem Erwartungswert der Prämien übereinstimmen muss.

Die Berechnung dieser Erwartungswerte entspricht einer Bewertung des dem Versicherungsvertrag zugrunde liegenden Zahlungsstroms. Für diese Bewertung gibt es zwei Betrachtungsweisen. Die **prospektive Sichtweise** blickt vom aktuellen Zeitpunkt m in die Zukunft des Versicherungsvertrags, während die **retrospektive Sichtweise** die bisherige Vertragshistorie bis zum aktuellen Betrachtungszeitpunkt m widerspiegelt.

Unter der prospektiven Betrachtungsweise eines Versicherungsvertrags lässt sich das Äquivalenzprinzip wie folgt formulieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{Erwarteter Barwert} & & \text{Erwarteter Barwert} \\ \text{zum Zeitpunkt } m & = & \text{zum Zeitpunkt } m \\ \text{der zukünftigen Prämien,} & & \text{der zukünftigen Leistungen,} \\ \text{zahlbar durch den VN} & & \text{zahlbar durch das VU.} \end{array} \quad (8.1)$$

Entsprechend einer retrospektiven Betrachtungsweise verlangt das Äquivalenzprinzip, dass

$$\begin{array}{lcl} \text{Erwarteter Endwert} & & \text{Erwarteter Endwert} \\ \text{zum Zeitpunkt } m & = & \text{zum Zeitpunkt } m \\ \text{der durch den VN} & & \text{der durch das VU} \\ \text{bereits gezahlten Prämien} & & \text{bereits gezahlten Leistungen .} \end{array} \quad (8.2)$$

Die Art und Weise, wie das Äquivalenzprinzip formuliert ist, beinhaltet also die Forderung, dass jeder VN den Barwert der für ihn zu erwartenden Leistungen zahlt, so dass es sich folglich um ein individuelles Äquivalenzprinzip handelt und auf dessen Basis eine dem jeweiligen Risiko angemessene Prämie ermittelt wird.

Es sei daran erinnert, dass es ausreicht, diese Betrachtung zu einem einzigen Zeitpunkt zu machen, z.B. bei Ausfertigung des Vertrags. Denn sind zwei Zahlungsströme zu einem Zeitpunkt äquivalent, d.h., haben sie dort denselben Wert, so stimmen ihre Werte zu jedem Zeitpunkt überein (vorausgesetzt, man verwendet stets dieselben Rechnungsgrundlagen). Für die Prämienberechnung reicht es daher aus, die Äquivalenz bei Vertragsbeginn, also zum Zeitpunkt $m = 0$, zu gewährleisten.

8.2 Prämien und ihre Berechnung

Im Folgenden bezeichnet VS die Versicherungssumme und JR die Höhe der garantierten Jahresrente. Je nach Produktart bezeichnet n die Versicherungsdauer oder die Aufschubdauer, und t repräsentiert stets die Prämienzahlungsdauer.

Wie bereits in Abschn. 3.2 ausgeführt, können entweder eine Einmalprämie zu Vertragsbeginn oder laufende Prämien für eine vereinbarte Dauer von $t \leq n$ Jahren gezahlt werden. Die Prämienzahlungsdauer startet mit dem Versicherungsbeginn und endet mit dem Tod der VP, spätestens jedoch nach Ablauf des festgelegten Zeitraums von t Jahren.

Die Herleitung der Prämien erfolgt für eine garantierte Versicherungsleistung der Höhe 1, so dass die erhaltenen Größen für abweichende Leistungshöhen lediglich mit der tatsächlichen Versicherungsleistung VS bzw. JR multipliziert werden müssen.

8.2.1 Kostenmodell

Wie in Kap. 7.1 ausgeführt, sind die unterschiedlichsten Kosten- und Bezugsgrößen möglich. Für die Berechnung der Bruttoprämien wird – soweit nichts anderes erwähnt ist – das folgende Kostenmodell verwendet:

- $\alpha = \alpha^z$ in Prozent der Bruttoeinmalprämie bzw. der Summe der Bruttojahresprämien der ersten $t_\alpha := \min \{t^*; t\}$ Jahre, zahlbar unmittelbar zu Vertragsbeginn;
- α^γ in Prozent der garantierten Versicherungsleistung, zahlbar in jedem Jahr der Prämienzahlungsdauer;
- β in Prozent der Bruttoeinmal- oder -jahresprämie, zahlbar in jedem Jahr der Prämienzahlungsdauer;
- γ_1 in Prozent der garantierten versicherten Leistung, zahlbar in jedem Jahr während der beitragspflichtigen Zeit;
- γ_2 in Prozent der garantierten Versicherungsleistung, zahlbar in jedem Jahr während der tariflich beitragsfreien Zeit;
- ε in absoluter Höhe;
- $\rho = \rho(k)$ bei unterjähriger Zahlweise in Prozent der Bruttojahresprämie.

Bei Rentenversicherungen gibt es zusätzlich folgende Kostengröße:

- γ_4 in Prozent der garantierten Jahresrente, zahlbar in jedem Jahr der Rentenbezugsdauer.

Die angegebenen Kostenparameter waren bislang üblicherweise konstant während der Versicherungsdauer. In den letzten Jahren sind die VU teilweise dazu übergegangen, unterschiedliche Kostensätze für unterschiedliche Zeiträume innerhalb der Versicherungsdauer anzusetzen. So gibt es Modelle, in denen bspw. β -Kosten in Höhe von β_u für die ersten 10 Jahre und β_o für die verbleibende Prämienzahlungsdauer angesetzt werden. Die Ermittlung der zugehörigen Bruttoprämie wird in Übungsaufgabe 44 behandelt.

8.2.2 Nettoprämie

Nettoprämiien werden ohne Berücksichtigung von Kosten oder Zuschlägen kalkuliert.

Die **Nettoeinmalprämie** $NEP_{x:\overline{n}}$ für eine VP des Eintrittsalters x und die Versicherungs- bzw. Aufschubdauer n entspricht dem erwarteten Barwert der vom Versicherer zugesagten Deckung, so dass gelten muss:

$$\begin{array}{ccc} \text{Erwarteter Barwert} & & \text{Erwarteter Barwert} \\ \text{zum Zeitpunkt } m = 0 & = & \text{zum Zeitpunkt } m = 0 \\ \text{der zukünftigen} & & \text{der zukünftigen} \\ \text{Nettoprämi en} & & \text{Leistungen} . \end{array}$$

Das bedeutet, dass die Nettoeinmalprämie einfach dem Leistungsbarwert aus Kap. 6 entspricht.

Entscheidet sich der VN für die Zahlung einer laufenden Prämie, so ist eine **laufende Netto(jahres)prämie** $NP_{x:\bar{n}}$ zu bestimmen. Grundsätzlich werden Prämien kalkulatorisch jährlich und vorschüssig gezahlt – und nur, solange die versicherte Person lebt. Auch die beiden Alternativen „Zahlung einer Nettoeinmalprämie“ und „Zahlung einer laufenden Nettoprämie für die Dauer von t Jahren“ sind im Barwert-Kalkül identisch und daher äquivalent zueinander. Entsprechend ergibt sich die laufende Nettoprämie, indem die Nettoeinmalprämie durch den zugehörigen erwarteten Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren temporären Leibrente (für t Jahre) dividiert wird, d.h.

$$NP_{x:\bar{t}} = \frac{NEP_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} .$$

Hinsichtlich der Notation bei Nettoprämi en (und auch Bruttoträmi en) wird in der Praixs entweder eine von der zugesagten Deckung unabhängige Schreibweise gewählt, oder die Indizes an den Prämiengrößen orientieren sich an den zugrunde liegenden erwarteten Barwerten (vgl. Kap. 6). So kann die Nettoeinmalprämie einer temporären Risikolebensversicherung wie oben mit $NEP_{x:\bar{n}}$ oder spezifischer mit $NEP_{\dot{x}:\bar{n}}$ (aufgrund des zugehörigen Leistungsbarwertes $A_{\dot{x}:\bar{n}}$) notiert werden. Hier wird im Folgenden eine von der Deckung unabhängige Notation verwendet.

8.2.3 Bruttoträmie

Nettoprämi en werden ausschließlich unter Ansatz der garantierten Versicherungsleistungen berechnet. Für die weiteren (Service-)Leistungen des VU, z.B. Vertragsausfertigung und -verwaltung, ist gemäß des Äquivalenzprinzips eine zusätzliche Prämie zu erheben, welche der Deckung der resultierenden Kosten dient. Zur Herleitung der Bruttoträmie, welche auch als **Tarifprämie** oder **ausreichende Prämie** bezeichnet wird, werden daher die erwarteten Barwerte sämtlicher Zahlungen an und durch das VU gleichgesetzt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \text{Erwarteter Barwert} & & \text{Erwarteter Barwert} \\ \text{zum Zeitpunkt } m = 0 & = & \text{zum Zeitpunkt } m = 0 \\ \text{der zukünftigen} & & \text{der zukünftigen} \\ \text{Bruttoträmi en} & & \text{Leistungen und Kosten} . \end{array}$$

Obwohl manche der Kosten, z.B. für tariflich beitragsfreie Jahre oder die Leistungsphase, im zeitlichen Verlauf der Versicherung erst später anfallen, werden sie allesamt bereits in die zu zahlende Prämie eingerechnet. Durch diese müssen alle (auch zukünftig) anfallenden Kosten gedeckt sein. Folglich wird in den Jahren der Prämienzahlungsdauer eine Mehr-Prämie erhoben, welche zum Aufbau einer sog. Kostenreserve verwendet wird. Aus dieser Reserve werden dann die später anfallenden Kosten kalkulatorisch beglichen, was zum Abbau der Kostenreserve führt (siehe Kap. 9).

Auf Basis des unterstellten Kostenmodells ergibt sich für die **Bruttoeinmalprämie** $BEP_{x:\bar{n}}$ nach dem Äquivalenzprinzip die Bestimmungsgleichung

$$\underbrace{BEP_{x:\bar{n}}}_{\text{Barwert der Prämien}} = \underbrace{NEP_{x:\bar{n}}}_{\text{Barwert der Leistungen}} + \underbrace{\alpha \cdot BEP_{x:\bar{n}} + \beta \cdot BEP_{x:\bar{n}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}_{\text{Barwert der Kosten}},$$

welche resultiert in

$$BEP_{x:\bar{n}} = \frac{NEP_{x:\bar{n}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{1 - \alpha - \beta}. \quad (8.3)$$

Die **laufende Brutto(jahres)prämie** $BP_{x:\bar{t}}$ lässt sich in ähnlicher Weise herleiten. Der auf dem Äquivalenzprinzip basierende Ansatz

$$\begin{aligned} BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} &= \overbrace{NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}}}^{=NEP_{x:\bar{n}}} \\ &\quad + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} + \beta \cdot BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \alpha^\gamma \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \gamma_1 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}) \end{aligned}$$

führt zu

$$BP_{x:\bar{t}} = \frac{NP_{x:\bar{t}} + \alpha^\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} - 1 \right)}{1 - \alpha \cdot \frac{t_\alpha}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} - \beta}$$

bzw.

$$BP_{x:\bar{t}} = \frac{NEP_{x:\bar{n}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1 - \gamma_2) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha}. \quad (8.4)$$

Bei Rentenversicherungen ist in den Ausdrücken $NEP_{x:\bar{n}}$ bzw. $NP_{x:\bar{t}}$ jeweils der Kostenfaktor $(1 + \gamma_4)$ zu berücksichtigen.

8.2.4 Zahlprämie

Durch Berücksichtigung von Stückkosten sowie Zuschlägen für unterjährige Zahlweise und/oder ein erhöhtes Risiko gelangt man von der Bruttoprämie zur sog. Zahlprämie, d.h. derjenigen Prämie, die der Kunde tatsächlich pro Jahr zu zahlen hat.

Die Reihenfolge, in welcher der Ratenzuschlag und die Stückkosten berücksichtigt werden, kann durchaus variieren. So ist es denkbar, dass zunächst die Stückkosten hinzugaddiert werden und anschließend die Ratenzuschläge. Bisher gängiger war jedoch die umgekehrte Reihenfolge, so dass die Stückkosten nicht noch mit Zuschlägen belastet wurden. Die **einmalige Zahlprämie** $ZEP_{x:\overline{n}}$ lässt sich dann darstellen als

$$ZEP_{x:\overline{n}} = BEP_{x:\overline{n}} \cdot (1 + \sigma) + \varepsilon ,$$

und bei k -tel jährlicher Zahlweise ergibt sich eine **Jahreszahlprämie** $ZP_{x:\overline{t}}^{(k)}$ von

$$ZP_{x:\overline{t}}^{(k)} = BP_{x:\overline{t}} \cdot (1 + \sigma) \cdot (1 + \rho(k)) + \varepsilon .$$

Die **Zahlprämie gemäß Zahlweise** ist derjenige Teil der (jährlichen) Zahlprämie, der auf $\frac{1}{k}$ -tel eines jeden Jahres entfällt, also $\frac{1}{k} \cdot ZP_{x:\overline{t}}^{(k)}$. Diese Größe wird auch als **Beitragseingang** bezeichnet.

Zwecks „Vermeidung“ von Ratenzuschlägen (siehe Abschn. 7.1.2) können die Kostensätze bei unterjähriger Prämienzahlweise entsprechend modifiziert werden. Beim vorliegenden Kostensystem führt eine Anpassung der Kostensätze α und β gemäß

$$\tilde{\alpha} := \frac{\alpha}{1 + \rho(k)} \quad \text{und} \quad \tilde{\beta} := \frac{\beta + \rho(k)}{1 + \rho(k)}$$

dazu, dass die Bruttoprämie $\widetilde{BP}_{x:\overline{t}}$, berechnet mit den modifizierten Kostensätzen $\tilde{\alpha}$ sowie $\tilde{\beta}$ und definiert als

$$\widetilde{BP}_{x:\overline{t}} = \frac{NP_{x:\overline{t}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\overline{n}} - \ddot{a}_{x:\overline{t}})}{(1 - \tilde{\beta}) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} - \tilde{\alpha} \cdot t_\alpha} ,$$

denselben Wert liefert wie

$$BP_{x:\overline{t}} \cdot (1 + \rho(k)) .$$

8.2.5 Gezillmerte Nettoprämie

Werden anstelle sämtlicher Kosten nur die zu Beginn fälligen einmaligen Abschlusskosten α^Z ($= \alpha$) berücksichtigt, so erhält man aus der Netto(jahres)-prämie die **gezillmerte Netto(jahres)prämie** oder kurz **Zillmerprämie** $NP_{x:\bar{t}}^Z$.

Nach dem Äquivalenzprinzip ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$NP_{x:\bar{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} = NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \alpha^Z \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}},$$

was zu der Darstellung

$$NP_{x:\bar{t}}^Z = NP_{x:\bar{t}} + \frac{\alpha^Z \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \quad (8.5)$$

führt.

An dieser Stelle nehmen wir die Zillmerprämie zunächst als zusätzliche Beitragsgröße zur Kenntnis. Der Vorgang der Zillmerung wird in Kap. 9 noch eingehend beschrieben. Was man jedoch sieht ist, dass mittels der gezillmerten Nettoprämie die einmaligen Abschlusskosten i.H.v. $\alpha^Z \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}$ kalkulatorisch über die gesamte Prämienzahlungsdauer t verteilt werden, indem dieser Betrag durch den Prämienbarwert $\ddot{a}_{x:\bar{t}}$ dividiert wird, so dass sie quasi in einen Prämienzuschlag umgerechnet werden.

8.2.6 Normprämie

Die Rechnungsgrundlagen für die Prämienberechnung sowie für die Berechnung der Deckungsrückstellung (siehe Kap. 9) dürfen sich voneinander unterscheiden. Vielfach tun sie das nicht, so dass die nachfolgende Unterscheidung in diesen Fällen irrelevant ist.

Wird die vom Kunden zu entrichtende Prämie jedoch bspw. unter Verwendung eines abweichenden Zinssatzes und/oder unter Ansatz vorsichtigerer Ausscheidewahrscheinlichkeiten bestimmt, so ist die Deckungsrückstellung mit einer gesonderten Beitragsgröße, der **Normprämie** oder auch **Bedarfsprämie**, zu berechnen. Im Folgenden wird diese Prämie mit $BP_{x:\bar{t}}^{\text{Norm}}$ notiert. Bei der Normprämie handelt sich vereinfacht ausgedrückt um die auf Basis der Rechnungsgrundlagen für die Reserveberechnung ermittelte Brutto-prämie.

Der Unterschied zwischen Normprämie und Brutto-prämie wird als **Beitragsunterschuss** bezeichnet, sofern $BP_{x:\bar{t}}^{\text{Norm}} > BP_{x:\bar{t}}$, andernfalls handelt es sich bei der Differenz $BP_{x:\bar{t}} - BP_{x:\bar{t}}^{\text{Norm}}$ um einen sog. **Beitragszuschlag**.

8.2.7 Zusammenfassung

Wir geben noch einmal eine schematische Übersicht über die verschiedenen (laufenden) Beitragsgrößen und ihre Zusammensetzung bzw. ihren Aufbau:

$$\begin{array}{r}
 \text{Nettoprämie } NP \\
 + \text{ Abschlusskosten } \alpha \quad (= \alpha^Z) \\
 \hline
 \text{Zillmerprämie } NP^Z \\
 + \text{ Amortisationskosten } \alpha^\gamma \\
 + \text{ Verwaltungskosten } \beta \\
 + \text{ Verwaltungskosten } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4 \\
 \hline
 \text{Bruttoprämie (Tarifprämie) } BP \\
 + \text{ Risikozuschlag } \sigma \\
 + \text{ Ratenzahlungszuschlag } \rho(k) \\
 + \text{ Stückkosten } \varepsilon \\
 \hline
 \text{Zahlprämie } ZP^{(k)}
 \end{array}$$

Abschließend noch ein paar Bemerkungen:

- Wir haben das Äquivalenzprinzip derart verwendet, dass wir zu einer vorgegebenen Leistung die zugehörige Prämie ermitteln (**Leistungsprimat**). Selbstverständlich lässt sich umgekehrt, bei vorgegebener Prämie, die entsprechende Leistung ebenfalls mit Hilfe der Äquivalenzgleichung bestimmen (**Beitragsprimat**).
- Die in der voranstehenden Weise hergeleitete (laufende) Netto- bzw. Bruttoprämie stellt eine durchschnittliche Prämie dar, welche während der gesamten Prämienzahlungsdauer konstant bleibt. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, lässt sich die Prämie jedoch in verschiedene Bestandteile zerlegen, deren Zusammensetzung im Laufe der Zeit variiert.
- Teilweise herrscht in der Literatur oder auch je nach Unternehmensbereich (Aktuariat, Vertrieb etc.) eine uneinheitliche Nomenklatur der Prämiengrößen. So werden bspw. Effektiv- und Nettoprämie synonym verwendet, wobei die **Effektivprämie** die um eine evtl. Vorabüberschussbeteiligung verminderte Zahlprämie bezeichnet (siehe Abschn. 10.3).
- Die Prämien werden auf Basis einer jährlichen Betrachtung ermittelt, so dass für unterjährige Zahlweisen eine entsprechende Anpassung mittels des Ratenzuschlags erfolgt. Dies scheint prinzipiell vermeidbar, falls anstelle von $\ddot{a}_{x:\overline{t}}$ direkt der unterjährige Prämienbarwert $\ddot{a}_{x:\overline{t}}^{(k)}$ verwendet würde.
- Prämien spielen auch bei der Auswertung des neu abgeschlossenen Versicherungsgeschäfts eine wichtige Rolle. In diesem Kontext ist insbesondere die angelsächsisch geprägte Kennzahl **Annual Premium Equivalent** (kurz: **APE**) eine international gebräuchliche Vergleichsgröße. Sie entspricht bei Verträgen gegen laufende Prämienzahlung der Bruttojahresprämie, und bei Verträgen gegen Einmalprämie werden 10% der Bruttoeinmalprämie in dem Jahr als APE angesetzt.

8.3 Besonderheiten

8.3.1 Prämiendepot

Ein **Prämiendepot** oder **Beitragsdepot** stellt eine besondere Form der Aufbewahrung einer Prämienvorauszahlung des Kunden an den Lebensversicherer dar. Es ist jedoch von einer Einmalprämie zu unterscheiden. Zwar wird in beiden Fällen anfänglich ein einziger Betrag entrichtet, im Falle des Prämiendepots dient dieses jedoch nur dazu, das eingezahlte Kapital zwischenzeitlich zu „parken“. Das VU verzinst den eingezahlten Betrag und entnimmt daraus während des Vertragsverlaufs die jährlich fälligen (im ursprünglichen Sinne laufenden) Prämien. Bei Eintritt des Versicherungsfalls wird neben der zugesagten Leistung auch der nicht verbrauchte Teil des Prämiendepots an den Begünstigten zurückgezahlt.

Das Prämiendepot spielt heute nur noch eine eher untergeordnete Rolle. Vor den steuerrechtlichen Änderungen des Jahres 2005 hatte es jedoch eine große Bedeutung. Um die Voraussetzungen für eine steuerfreie Auszahlung der Leistung aus einer kapitalbildenden Lebensversicherung zu erfüllen, wurde durch das Prämiendepot eine Einmalprämie quasi auf fünf Jahre Prämienzahlung gestreckt. Dieses Vorgehen ist bzw. war als „5 plus 7“-Verträge bekannt, wonach eine Lebensversicherungspolice kurz gesagt dann steuerlich begünstigt war, falls die Prämienzahlungsdauer mindestens fünf Jahre und die Versicherungsdauer mindestens 12 Jahre betrug. Kunden, die von dieser Regelung profitieren und Geld anlegen wollten, entschieden sich daher häufig für das Prämiendepot.

8.3.2 Prämienpektren

Bisher wurde bei der Ermittlung des Prämie davon ausgegangen, dass diese während der gesamten Prämienzahlungsdauer gleich bleibt. In Analogie zu Leistungen in variierender Höhe (siehe Abschn. 6.2.4) kann jedoch auch die Prämienhöhe variabel sein. Abgesehen von der Erhöhung der Prämie durch eine Beitragsdynamik (siehe Abschn. 11.2) werden insbesondere Versicherungen angeboten, bei denen die Prämien über die ersten (i.d.R. fünf oder zehn) Jahre schrittweise steigen, bis das finale Prämieniveau erreicht ist. Vorrangig im Kontext von Berufsunfähigkeitsversicherungen werden derartige Varianten bspw. als „Einstieger“-Tarife verkauft. Zielgruppe sind vor allem jüngere VN, da der Prämienverlauf in dem Sinne an die Einkommenssituation angepasst ist, dass in den ersten Jahren, wenn das Einkommen noch nicht so hoch ist, niedrigere Prämien anfallen und mit (hoffentlich) steigendem Einkommen sich entsprechend auch die Prämien erhöhen.

Der Kunde ist i.d.R. bereits von Beginn an zur vollen Leistung berechtigt, zahlt jedoch zunächst abgesenkte Prämien. Aufgrund der anfänglich (zu) niedrigen Startbeiträge müssen selbstverständlich im Laufe der Zeit Beiträge „nachgezahlt“ werden, so dass die Prämien während der Prämienzahlungsdauer gemäß eines vorab vereinbarten Schemas steigen. Die planmäßigen Steigerungen erfolgen jedoch selten jährlich, sondern stufenartig im Abstand von mehreren Jahren, d.h., die Prämien bleiben über einen gewissen Zeitraum konstant und steigen erst danach wieder an. Die Bestimmung der Absenkungshöhen sowie der Längen der Absenkungsphasen (und damit der Anzahl der Stufen) unterliegt sowohl Risiko- als auch Profitabilitätsaspekten aus Sicht des VU. Wie attraktiv der Abschluss eines derartigen Prämien-Modells aus Kundensicht ist, lässt sich durch einen Vergleich mit der Alternative einer gleichbleibenden Prämie beantworten, bspw. gemessen an der insgesamt zahlbaren Beitragssumme.

Analog zum Leistungsspektrum $\boldsymbol{\theta}$ (siehe Abschn. 6.2.4) bezeichne der Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ das **Prämienspektrum**. Für dieses gilt:

- Für alle $j = 1, \dots, t$ ist $0 < \pi_j \leq 1$, d.h., die Prämie im j -ten Versicherungsjahr entspricht dem Anteil π_j der 100%-Prämie. π_j gibt also den Prozentsatz für das Prämieniveau im Versicherungsjahr j an.
- Für $t < j \leq n$ gilt $\pi_j = 0$, da nach Ablauf der Prämienzahlungsdauer keine Prämien mehr gezahlt werden.

Ein Prämienspektrum ist eine im Verlauf der Prämienzahlungsdauer nicht-fallende Funktion, so dass $\pi_{j-1} \leq \pi_j$ für $j = 2, \dots, t$ gilt. Anders ausgedrückt: Planmäßig sinkende Prämien sind zwar theoretisch möglich, aber unüblich.

Betrachten wir dazu ein paar Beispiele:

- Das Prämienspektrum bei einer Versicherung gegen Einmalprämie entspricht $\pi_j = 1$ für $j = 1$ und $\pi_j = 0$ für alle $j = 2, \dots, n$.
- Im Falle einer Beitragsdynamik, bei welcher die Brutto-Prämie jährlich um den Dynamikssatz ds ansteigt (und die Erhöhung jedes Jahr ausgeübt wird), gilt für das Prämienspektrum

$$\pi_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1 \\ (1 + ds)^{j-1} & \text{für } j = 2, \dots, t \end{cases}$$

sowie der Vollständigkeit halber $\pi_j = 0$ für alle $j > t$.

- Für eine Versicherung mit stufenweise steigenden Prämien seien drei Prämienstufen vorgesehen. Die planmäßigen Prämiensteige sollen nach t_1 und nach t_2 Jahren mit $0 < t_1 < t_2 < t$ stattfinden. In diesem Fall gibt π_j den Prozentsatz der Prämienstufe an, und es ergibt sich das Prämienspektrum

$$\pi_j = \begin{cases} \pi_1 & \text{für } j = 1, \dots, t_1 \\ \pi_{t_1+1} & \text{für } j = t_1 + 1, \dots, t_2 \\ 1 & \text{für } j = t_2 + 1, \dots, t \\ 0 & \text{für } j = t + 1, \dots, n . \end{cases}$$

Während bei der Beitragsdynamik die anfängliche Prämie dem 100%-Niveau entspricht, wird bei stufenweiser Prämiensteigerung die 100%-Zielprämie erst mit der letzten Prämienstufe und somit spätestens im letzten Jahr der Prämienzahlungsdauer erreicht (d.h., unabhängig von Anzahl und Höhe der Prämienstufen gilt in jedem Fall $\pi_t = 1$).

Das stufenweise Ansteigen der Prämie kann bereits bei der Berechnung der Kommutationszahlen berücksichtigt werden. In diesem Fall setzt man

$$N_x^\pi := \sum_{j=0}^{t-1} \pi_{j+1} \cdot D_{x+j} + \sum_{j=t}^{\omega-x} D_{x+j} ,$$

so dass sich für den Prämienbarwert die bekannte Darstellung

$$\ddot{a}_{x:\overline{t}}^\pi = \frac{N_x^\pi - N_{x+t}^\pi}{D_x}$$

ergibt. Die Prämiengröße, mit welcher der Prämienbarwert multipliziert wird, entspricht dann der 100% -Prämie, d.h. der auf der letzten Prämienstufe zu erreichenden Prämie.

Hingegen wird eine Beitragsdynamik nicht in die Kommutationszahlen bzw. den Prämienbarwert eingerechnet, da es sich um ein Wahlrecht des Kunden handelt, welches naturgemäß nicht jedes Jahr ausgeübt werden muss und somit nicht von vorneherein vollständig berücksichtigt werden kann.

Im Zusammenhang mit Prämien- und Leistungsspektren wird häufig auch das sog. **Thiele'sche Gleichungssystem** (bzw. im stetigen Fall die **Thiele'sche Differentialgleichung**) angeführt, worauf wir hier jedoch nicht eingehen werden.

8.3.3 Beitragsrückgewähr

Im Gegensatz zu den übrigen Lebensversicherungen sehen Rentenversicherungen standardmäßig keine Todesfallleistung vor. Sofern vereinbart, kann die Rentengarantiezeit als eine Art Todesfallleistung während der Rentenbezugsphase angesehen werden. Während der Aufschubphase hingegen wird im Falle des Todes keine Leistung gezahlt.

Aus Kundensicht stellt es sich allerdings derart dar, dass bei vorzeitigem Tod die Prämien „umsonst“ gezahlt worden sind, da diesen scheinbar keine Leistung gegenübergestanden hat. Aus diesem Grund kann als zusätzlicher Vertragsbaustein eine **Prämienrückgewähr** (oder auch **Beitragsrückgewähr**) eingeschlossen werden. Dadurch wird im Todesfall nun eine Leistung fällig, jedoch muss der VN für diese zusätzliche Deckung auch eine höhere Prämie zahlen (wozu er bereit zu sein scheint).

Die „klassische“ Form der Beitragsrückgewähr bezieht sich ausschließlich auf den Zeitraum der Aufschubphase. Sie sieht vor, dass bei Tod der VP vor Beginn der Rentenzahlungen die Summe der bis dahin gezahlten Brutto-prämien zurückerstattet wird. In der Übungsaufgabe 39 wird die Prämie für diese Form der Beitragsrückgewähr hergeleitet. Aufgrund der jährlichen Betrachtungsweise geht die Kalkulation davon aus, dass die Summe der Prämien bis zum Ende desjenigen Jahres, in welchem der Tod eingetreten ist, ausgezahlt wird.

Eine Beitragsrückgewähr ist nicht zwangsweise auf die Aufschubphase beschränkt, sondern sie kann sich auch bis in die Rentenbezugsphase hinein erstrecken. Innerhalb der Aufschubzeit gilt die klassische Form. Ab dem Rentenübergang ermittelt sich die Todesfallleistung dann als Differenz der gesamten Bruttobeitragssumme abzüglich der bis zum Zeitpunkt des Todes geleisteten (garantierten) Rentenzahlungen. Erreicht bzw. übersteigt die Summe der gezahlten Renten die Summe der Brutto-prämien, so wird fortan keine Todesfallleistung mehr fällig. Die Schwierigkeit bei dieser Variante besteht darin, dass die Länge des Zeitfensters (im Rentenbezug), innerhalb dessen noch eine Rückzahlung bei Tod erfolgt, von der Beitragssumme (genauer gesagt von Höhe der Prämie) abhängig ist und die Prämie wiederum von der Länge dieses Zeitfensters abhängt. Somit müssen die Prämie und die Länge der Rückgewährdauer iterativ bestimmt werden.

Die Aufschubdauer bei aufgeschobenen Renten wurde in Kap. 6 mit dem Buchstaben u notiert, um die Barwerte deutlich voneinander zu unterscheiden. Ab hier gehen wir jedoch auf die allgemein gebräuchliche Notation über und geben die Rentenaufschubdauer ab jetzt ebenfalls mit n an.

Zur Abgrenzung wird die Dauer der Beitragsrückgewähr im Folgenden mit $n^{RÜ}$ notiert. Im beschriebenen „klassischen“ Fall ist also $n^{RÜ} = n$. Grundsätzlich ist jedoch $n^{RÜ} \leq n$ möglich. Falls die Beitragsrückgewähr auch für den Rentenbezug vereinbart wird, ist selbstverständlich $n^{RÜ} > n$.

Wir leiten nun den Leistungsbarwert einer „klassischen“ Beitragsrückgewähr bei vereinbartem Prämienpektrum π her. Dazu sei die 100%-Brutto-prämie auf 1 normiert. Im Falle des Todes während der Aufschubphase wird die bis dahin gezahlte Summe der Brutto-prämien erstattet, so dass der Barwert der zukünftigen Todesfallleistungen wie folgt ausschaut:

- Bei Tod im Jahr j ($1 \leq j \leq n$) wird die Bruttoeinmalprämie bzw. die Summe der ersten j Bruttojahresprämien ausgezahlt. Unter Verwendung des Prämienspektrums π lässt sich die Todesfallleistung im Jahr j darstellen als

$$\sum_{l=1}^{\min\{j;t\}} \pi_l .$$

- Der erwartete Barwert zum Zeitpunkt des Vertragsbeginns $m = 0$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} & \pi_1 \cdot d_x \cdot v + (\pi_1 + \pi_2) \cdot d_{x+1} \cdot v^2 + \cdots + \left(\sum_{l=1}^{\min\{n;t\}} \pi_l \right) \cdot d_{x+n-1} \cdot v^n \\ &= \pi_1 \cdot \frac{C_x}{D_x} + (\pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{C_{x+1}}{D_x} + \cdots + \left(\sum_{l=1}^{\min\{n;t\}} \pi_l \right) \cdot \frac{C_{x+n-1}}{D_x} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{l=1}^{\min\{j+1;t\}} \pi_l \right) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} . \end{aligned}$$

- Für einen beliebigen Zeitpunkt während der Aufschubdauer, d.h. für $0 \leq m \leq n$, ergibt sich analog

$$\sum_{j=m}^{n-1} \left(\sum_{l=1}^{\min\{j+1;t\}} \pi_l \right) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_{x+m}} .$$

Sofern das Prämienspektrum konstant ist, d.h. $\pi_l = 1$ für alle $l = 1, \dots, t$, ergeben sich wegen

$$\sum_{l=1}^{\min\{j+1;t\}} \pi_l = \min\{j+1; t\}$$

die für eine arithmetisch steigende Todesfallleistung bekannten Barwertformeln (vgl. Abschn. 6.2.2.5), nämlich für $m = 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{l=1}^{\min\{j+1;t\}} \pi_l \right) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \min\{j+1; t\} \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} (j+1) \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} + \sum_{j=t}^{n-1} t \cdot \frac{C_{x+j}}{D_x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (IA)_{\overline{x:t]} + t \cdot {}_t E_x \cdot A_{\overline{x+t:n-t]} \\
 &= (I_t A)_{\overline{x:n]}
 \end{aligned}$$

bzw. allgemeiner für $0 \leq m \leq t$

$$m \cdot A_{\overline{x+m:n-m]} + (IA)_{\overline{x+m:t-m]} + (t-m) \cdot {}_{t-m} E_{x+m} \cdot A_{\overline{x+t:n-t]}$$

sowie für $t < m \leq n$

$$t \cdot A_{\overline{x+m:n-m]}.$$

Zwar wurde die Beitragsrückgewähr soeben nur für Rentenversicherungen beschrieben, jedoch kann jene Art der (zusätzlichen) Todesfallleistung grundsätzlich auch bei Kapital- und Risikolebensversicherungen eingeschlossen werden. In diesem Fällen entspricht die Rückgewährdauer n^R üblicherweise der Versicherungsdauer n .

8.3.4 Beitragsüberträge

Beitragsüberträge bzw. Prämientüberträge entstehen durch die Abweichung des vertragsindividuellen Versicherungsjahres vom Geschäftsjahr des Lebensversicherers und treten daher im Kontext der Bilanzierung auf.

Das Bilanz- bzw. Geschäftsjahr eines VU ist üblicherweise identisch mit dem Kalenderjahr. Hingegen weicht das Versicherungsjahr, d.h. der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Versicherungsstichtagen, in den meisten Fällen davon ab. Prämien, die *in* einem bzw. *für* ein Versicherungsjahr gezahlt werden, beziehen sich dann auf zwei verschiedenene Geschäftsjahre des VU und sind in zeitlicher Hinsicht voneinander abzugrenzen. Diejenigen Prämienteile, welche dem folgenden Geschäftsjahr zuzurechnen sind, werden am Geschäftsjahresende zurückgestellt und in der Bilanz des VU als Rechnungsabgrenzungsposten auf der Passivseite ausgewiesen.

Gesetzliche Grundlage ist § 341e HGB in Verbindung mit § 24 RechVersV. Die dortigen Regelungen besagen, dass am Ende eines Geschäftsjahres eine Rückstellung für diejenigen Beiträge zu bilden ist, welche ertraglich erst dem (bzw. den) kommenden Geschäftsjahr(en) zuzuordnen sind. Dabei vollzieht sich die zeitliche Zuordnung zu den Geschäftsjahren über die Tragung des durch das VU übernommenen Risikos.

Sprachlich findet eine Trennung zwischen gebuchten und verdienten Beiträgen statt, was den inhaltlichen Unterschied verdeutlicht: **Gebuchte Beiträge**

sind sämtliche im Laufe eines Geschäftsjahres fälligen Beiträge der VN. **Verdiente Beiträge** umfassen hingegen nur denjenigen Teil der Prämien, welcher der Risikotragung durch das VU im jeweiligen Geschäftsjahr dient.

Beispiel 21. Versicherungsbeginn einer Police sei der 1. Juni. Dieses Datum ist quasi der „Geburtstag“ des Versicherungsvertrags und wird als Versicherungsstichtag bezeichnet. Am 1. Juni eines jeden Jahres ist dann die Prämie für das zu diesem Termin jeweils beginnende Versicherungsjahr fällig. Hat der VN jährliche Zahlweise vereinbart, so wird die komplette Prämie im jeweiligen Kalenderjahr (= Geschäftsjahr) gebucht. Verdient werden im aktuellen Kalenderjahr jedoch nur $\frac{7}{12}$ der Jahresprämie, die übrigen $\frac{5}{12}$ sind dem nächsten Jahr zuzurechnen. Ist etwa halbjährliche Zahlweise vereinbart, so wird die erste Halbjahresprämie im jeweiligen Kalenderjahr gebucht und auch verdient, die zweite Halbjahresprämie (fällig am 1. Dezember) wird zwar im aktuellen Jahr gebucht, jedoch nur $\frac{1}{6}$ davon verdient; die verbleibenden $\frac{5}{6}$ werden zurückgestellt und erst im folgenden Kalenderjahr verdient. Bei monatlicher Prämienzahlung entstehen demnach keine Beitragsüberträge.

8.4 Kostenausweis und Kostenquoten

Wie wir gesehen haben, enthält die vom VN zahlbare Prämie Kostenteile, welche durch den Abschluss und die Verwaltung des Versicherungsvertrags entstehen. Wie hoch der Anteil dieser Kosten an der Prämie ist, entzog sich lange Zeit der Kenntnis des Kunden bzw. war für diesen nicht ohne Weiteres erkennbar oder nachvollziehbar, zumal die einkalkulierten Kostensätze eine Art „Betriebsgeheimnis“ des VU darstellen.

Zur Erhöhung von Transparenz und Vergleichbarkeit der angebotenen Versicherungsprodukte wurden Anforderungen an die gegenüber dem Kunden auszuweisenden Kosten gesetzlich festgelegt. Für geförderte Altersvorsorgeprodukte erfolgt die Spezifikation in §§ 2a und 7 AltZertG (siehe Abschn. 3.4), und grundsätzlich gilt § 2 der im Rahmen der VVG-Reform erlassenen **VVG-Informationspflichtenverordnung** (kurz: **VVG–InfoV**), welcher durch das LVRG später noch einmal erweitert wurde.

Dort ist geregelt, in welchen Fällen, in welcher Art und in welchem Umfang das VU dem VN gegenüber Angaben zu den in die Prämie eingerechneten Kosten machen muss. Dieser **Kostenausweis** erfolgt entweder in absoluter Höhe oder als Prozentsatz einer definierten Bezugsgröße. Bspw. werden die Abschlusskosten gemäß VVG-InfoV als Gesamtbetrag in Euro ausgewiesen, während die übrigen Kosten unter Nennung der jeweiligen Laufzeit als Anteil an der Jahresprämie angegeben werden, wobei die Verwaltungskosten gesondert auszuweisen sind.

Zusätzlich zu den einzelnen Kostenarten ist auch das Preis-Leistungs-Verhältnis der Police zu quantifizieren. Dazu werden die Effektivkosten in Gestalt der Rendite-Kennzahl **Reduction in Yield** (kurz: **RIY**) in Prozentpunkten angegeben. Neben Verträgen, die unter das AltZertG fallen, ist diese Angabe insbesondere für solche Lebensversicherungen zu machen, die Schutz für ein Risiko bieten, bei dem der Eintritt der Leistungsverpflichtung des VU gewiss ist (also bspw. eine gemischte Kapitallebensversicherung).

Die Kennziffer RIY spiegelt die effektive Kostenbelastung eines Versicherungsvertrags wider und zeigt an, wie sich die einkalkulierten Kosten auf die Rendite des Vertrags auswirken. Inhaltlich bedeutet dies, dass ein Vertrag inkl. Kosten dem entsprechenden Vertrag ohne diese Kosten gegenübergestellt und dann gemessen wird, wie stark die Rendite des Vertrags durch die eingerechneten Kosten geschränkt wird. Dabei sind sämtliche Kosten einzubeziehen, die bis zum Beginn der Auszahlungsphase kalkulatorisch anfallen und somit die Wertentwicklung mindern, d.h. Abschluss-, Vertriebs- und laufende Kosten. Bei fondsgebundenen Produkten (siehe Kap. 13) werden zusätzlich Kapitalanlagekosten, d.h. die mit dem Erwerb und Verkauf sowie der Verwaltung der Fondsanteile entstehenden Kosten, in die Betrachtung mit einbezogen.

Beispiel 22. Wir betrachten eine gemischte Kapitallebensversicherung mit der garantierten Versicherungssumme VS . Die männliche VP ist bei Vertragsbeginn 30 Jahre alt, und der Vertrag läuft bis Alter 65. Als Bruttjahresprämie sind während der gesamten Versicherungsdauer 1.000 EUR zu zahlen.

Zur Veranschaulichung unterstellen wir ein einfaches Kostenmodell, bestehend aus einmaligen Abschlusskosten i.H.v. $\alpha = 2,5\%$ der Bruttobeitragssumme (diese beträgt 35.000 EUR), welche gleichmäßig über die ersten fünf Jahre verteilt werden, sowie laufende Kosten i.H.v. insgesamt $\beta = 10\%$ der jährlich zahlbaren Bruttoprämie.

Um VS zu bestimmen, stellt man die folgende Gleichung auf:

$$1.000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}} = VS \cdot A_{30:\overline{35}} + \frac{0,025 \cdot 35.000}{5} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{5}} + 0,1 \cdot 1.000 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}} \Leftrightarrow$$

$$VS = 1.000 \cdot \frac{(1 - 0,1) \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}} - \frac{0,875}{5} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{5}}}{A_{30:\overline{35}}} .$$

Dies ist äquivalent zu

$$VS = 1.000 \cdot \frac{0,9 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}} - 0,175 \cdot \ddot{a}_{30:\overline{5}}}{1 - \frac{i}{1+i} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}}} .$$

Bei einem Rechnungszins von $i = 2\%$ ergibt sich gemäß der Sterbetafel DAV 2008 T M unter Ausnutzung der Ergebnisse aus Übungsaufgabe 41 die garantierte Ablaufleistung

$$VS \approx 1.000 \cdot \frac{0,9 \cdot 24,71104 - 0,175 \cdot 4,80047}{1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 24,71104} \approx 41.515,24 \text{ EUR}.$$

Dies entspricht ohne Überschussbeteiligung (!) einer Rendite von $i_Z \approx 0,93\%$, welche sich über den (deterministischen) Ansatz

$$41.515,24 = 1.000 \cdot {}^{iz}\ddot{a}_{\overline{35}}$$

(vgl. Abschn. 4.2.3) berechnen lässt.

Um den Effekt der einkalkulierten Kosten zu messen, müssen diese aus der Prämie herausgerechnet werden. Bei unveränderter Ablaufleistung zahlt der Kunde in den ersten fünf Jahren nur 725 EUR und in den Folgejahren nur 900 EUR, so dass sich folgende Gleichung zur Bestimmung der Rendite ergibt:

$$41.515,24 = 900 \cdot {}^{iz}\ddot{a}_{\overline{35}} - 175 \cdot {}^{iz}\ddot{a}_{\overline{5}}.$$

Die Rendite dieses Zahlungsstroms beträgt nun $i_Z \approx 1,67\%$. Durch die Kosten wird die Rendite also um 0,74 Prozentpunkte geschränkt, d.h., die Kennziffer RIY beträgt 0,74%.

Die Quantifizierung der Höhe der in die Prämie eingerechneten Kosten ist auch immer wieder Bestandteil von Marktüberblicken und Unternehmensvergleichen. Dabei werden vorrangig die beiden folgenden Kostenquoten gemessen:

- **Abschlusskostenquote:** Diese setzt die Aufwendungen für den Abschluss der Versicherung (Courtagen, Provisionen, Kosten für Antrags- und Risikoprüfung etc.) ins Verhältnis zur Bruttobeitragssumme des eingelösten Neugeschäfts. Sie fällt je nach Vertriebsweg unterschiedlich hoch aus.
- **Verwaltungskostenquote:** Hier werden die Aufwendungen für die laufende Verwaltung (Betriebskosten ohne Abschlusskosten und ohne Kosten für Schadenefälle (Schadenaufwendungen)) in Relation zu den gebuchten Bruttobeiträgen betrachtet. Diese Kennzahl erlaubt Rückschlüsse auf die Wirtschaftlichkeit des VU, d.h. wie günstig es seine Dienstleistungen erbringt.

Seit einigen Jahren beträgt die durchschnittliche Höhe der Abschlusskostenquote ca. 5%, und die durchschnittliche Verwaltungskostenquote liegt bei ungefähr 2,3%.

8.5 Übungen

8.5.1 Aufgaben

Übung 39. Aufgeschobene Rentenversicherung mit Beitragsrückgewähr

Wir betrachten eine um n Jahre aufgeschobene, lebenslang jährlich vorschüssig zahlbare Leibrente mit einer Rentengarantiezeit von g Jahren. Zu dieser Versicherung wird zusätzlich der Baustein einer Beitragsrückgewähr während der gesamten Aufschubzeit eingeschlossen (d.h. $n^{R\ddot{u}} = n$). Die Beitragszahlungsdauer t kann gegenüber der Aufschubdauer n abgekürzt sein.

1. Leiten Sie jeweils eine Formel für die Nettoeinmalprämie sowie die Nettojahresprämie der beschriebenen Rentenversicherung mit Beitragsrückgewähr her.
2. Unterstellen Sie das Kostenmodell aus Abschn. 8.2.1. Leiten Sie Formeln für die Bruttoeinmalprämie und die laufende Brutto(jahres)prämie her.
3. Zerlegen Sie die Bruttoprämien aus dem vorherigen Aufgabenteil jeweils in einen Prämienteil für die Rentenversicherung mit Mindestlaufzeit g sowie den Prämienteil, der auf die Beitragsrückgewähr entfällt.

Übung 40. Berechnen Sie für die folgenden Verträge die Nettoeinmalprämie auf Basis der Sterbetafel DAV 2004 R Frauen (Grundtafel mit Altersverschiebung) und einem Rechnungszins von 2%. Versicherungsbeginn ist jeweils im Jahr 2017:

1. Aufgeschobene Rentenversicherung (ohne Beitragsrückgewähr und ohne Rentengarantiezeit) für eine 20-jährige Frau. Die Rentenzahlungen i.H.v. 1.000 EUR pro Monat beginnen mit Alter 65 und erfolgen lebenslang.
2. Sofort-beginnende Rentenversicherung für eine 60-jährige Frau. Die Jahresrente i.H.v. 6.000 EUR wird lebenslang jährlich nachschüssig (!) gezahlt, mindestens jedoch für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Übung 41. Berechnen Sie für die folgenden Verträge die Nettojahresprämie auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T Männer und einem Rechnungszins von 2%:

1. Gemischte Kapitallebensversicherung über 35 Jahre für einen 30-jährigen Mann, Beitragszahlungsdauer gleich Versicherungsdauer, Versicherungssumme in Höhe von 50.000 EUR.
2. Risikolebensversicherung über 20 Jahre für einen 30-jährigen Mann, abgekürzte Beitragszahlungsdauer von 5 Jahren, Versicherungssumme in Höhe von 100.000 EUR.

Übung 42. Gemischte Kapitallebensversicherung mit abweichender Todesfallsumme

Wir betrachten eine gemischte Kapitallebensversicherung mit Versicherungsdauer n und Prämienzahlungsdauer $1 \leq t \leq n$. Im Gegensatz zur bisher

bekannten Variante sieht diese Versicherung nun eine Erlebensfallleistung der Höhe 1 sowie eine davon abweichende Todesfallleistung in Höhe von θ mit $0 \leq \theta \leq 8$ vor, so dass die Leistung bei Tod zwischen 0% und 800% der Erlebensfallsumme betragen kann.

Leiten Sie eine Formel für die Nettoeinmalprämie und die Nettojahresprämie dieser Versicherung her.

Übung 43. Risikolebensversicherung mit steigender Todesfallleistung

Wir betrachten eine Risikolebensversicherung für eine bei Versicherungsbeginn 30-jährige Person. Die Prämien sind während der gesamten Versicherungsdauer zu zahlen. Die Versicherungssumme (zahlbar am Ende des Jahres, in dem der Tod eingetreten ist) beträgt im ersten Jahr 10.000 EUR und steigt danach jedes Jahr um 500 EUR bis auf eine Versicherungssumme von 20.000 EUR. Die Versicherung endet mit Alter 51. Berechnen Sie auf Basis der Sterbetafel DAV 2008 T und einem Rechnungszins von 2% die Nettojahresprämie für diese Versicherung sowohl für einen Mann als auch für eine Frau.

Übung 44. Risikolebensversicherung mit variierenden Kostensätzen

Eine temporäre Risikolebensversicherung mit konstanter Todesfallleistung habe eine Laufzeit von $n \geq 15$ Jahren. Die Prämienzahlungsdauer t betrage mindestens 10 Jahre und sei gegenüber der Versicherungsdauer abgekürzt. Wir unterstellen folgendes Kostensystem:

- Abschlusskosten: $\alpha \cdot 100\%$ der Summe der Bruttoprämien der ersten $t_\alpha = \min \{t; 40\}$ Jahre;
- Verwaltungskosten: in den ersten 4 Jahren $\beta_1 \cdot 100\%$ der Bruttojahresprämie, in den darauffolgenden 4 Jahren $\beta_2 \cdot 100\%$ und danach $\beta_3 \cdot 100\%$ der Bruttojahresprämie;
- Verwaltungskosten in der beitragsfreien Zeit: $\gamma_2 \cdot 100\%$ der Versicherungssumme.

Leiten Sie auf Basis dieser Angaben eine Formel für die Bruttojahresprämie dieser Versicherung her.

Übung 45. Termfix-Versicherung mit besonderem Kostensystem

Ein 45-jähriger Mann schließt eine Versicherung mit festem Auszahlungstermin ab. Die Laufzeit beträgt 20 Jahre, und die Dauer der Prämienzahlung stimmt mit der Vertragsdauer überein. Berechnen Sie auf Basis der folgenden Angaben die Bruttojahresprämie für eine Versicherungssumme von 50.000 EUR:

- Rechnungszins: 2% p.a.
- Sterbetafel: DAV 2008 T M
- Kostensystem: 10% der ersten Bruttoprämie, 3,5% von jeder weiteren Bruttoprämie, einmalige Stückkosten i.H.v. 20 EUR sowie ab dem zweiten Jahr laufende Fixkosten i.H.v. 2 EUR.

Übung 46. Kapitallebensversicherung mit Teilauszahlungen

Wir betrachten eine Kapitallebensversicherung mit der normierten Versicherungssumme 1. Die Versicherungsdauer beträgt 30 Jahre, ebenso die Prämienzahlungsdauer. Die Todesfallsumme ist während der Dauer der Versicherung konstant gleich 1. Die Erlebensfalleistung wird jedoch nicht erst bei Ablauf fällig, sondern bereits über die Laufzeit verteilt in mehreren Teilbeträgen ausgezahlt. Die Summe dieser Teilbeträge entspricht ebenfalls der Versicherungssumme 1.

Die Teilauszahlungen finden zu folgenden Zeitpunkten statt (vorausgesetzt, die VP erlebt diese): Nach 10 Jahren werden 40% der Versicherungssumme ausgezahlt, nach weiteren 10 Jahren werden 30% ausgezahlt, und die verbleibenden 30% werden am Ende der Laufzeit fällig.

Geben Sie für diese Versicherung die Nettojahresprämie formelmäßig an.

Übung 47. Prämienpektrum mit drei Stufen

Wir betrachten ein Prämienpektrum mit drei Stufen, d.h. π ist definiert mittels

$$\pi_j = \begin{cases} \pi_1 & \text{für } j = 1, \dots, t_1 \\ \pi_2 & \text{für } j = t_1 + 1, \dots, t_2 \\ 1 & \text{für } j = t_2 + 1, \dots, t . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für die Kommutationszahl in diesem Fall gilt:

$$N_x^\pi = N_x - (1 - \pi_1) \cdot (N_x - N_{x+t_1}) - (1 - \pi_2) \cdot (N_{x+t_1} - N_{x+t_2}) .$$

8.5.2 Lösungen

Lösung 39. Aufgeschobene Rentenversicherung mit Beitragsrückgewähr
Der Leistungsbarwert dieser Rentenversicherung setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen:

- Teil 1: Leistungsbarwert der aufgeschobenen Rente mit Rentengarantiezeit

$$\begin{aligned} LBW_1 &= {}_{n|\ddot{a}_{\overline{g}}|} + {}_{n+g|\ddot{a}_x} \\ &= {}_n E_x \cdot (\ddot{a}_{\overline{g}} + {}_g|\ddot{a}_{x+n}) \end{aligned}$$

- Teil 2: Leistungsbarwert der Beitragsrückgewähr während der Aufschubzeit

$$LBW_2 = \begin{cases} BEP_{x:\overline{n}} \cdot A_{x:\overline{n}} & \text{falls einmalige Beitragszahlung ,} \\ BP_{x:\overline{t}} \cdot (I_{\overline{t}}|A)_{x:\overline{n}} & \text{falls laufende Beitragszahlung .} \end{cases}$$

Im Folgenden wird „'“ verwendet, um anzudeuten, dass die jeweilige Gesamtprämie die Beitragsrückgewähr beinhaltet. Im Rahmen der Zerlegung in Auf-

gabenteil 3. wird „AR“ zur Kenntlichmachung des Prämienteils der eigentlichen (aufgeschobenen) Rentenversicherung und „RÜ“ für den Prämienteil der Rückgewähr verwendet.

1. Die Nettoeinmalprämie für diese Versicherung ist

$$NEP'_{x:\bar{n}} = LBW_1 + LBW_2$$

und die Nettojahresprämie

$$NP'_{x:\bar{n}} = \frac{NEP'_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} = \frac{LBW_1 + LBW_2}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} .$$

2. Unter der Annahme des beschriebenen Kostenmodells (vgl. Abschn. 8.2.1) ergibt sich für die Bruttoeinmalprämie die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} BEP'_{x:\bar{n}} &= (1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n|\ddot{a}_{\bar{g}}} + {}_{n+g|\ddot{a}_x}) + BEP'_{x:\bar{n}} \cdot A_{\frac{1}{x:\bar{n}}} \\ &\quad + \alpha \cdot BEP'_{x:\bar{n}} + \beta \cdot BEP'_{x:\bar{n}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}} \end{aligned}$$

und damit

$$BEP'_{x:\bar{n}} = \frac{(1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n|\ddot{a}_{\bar{g}}} + {}_{n+g|\ddot{a}_x}) + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{1 - \alpha - \beta - A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}} .$$

Die Bruttojahresprämie bestimmt sich aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} BP'_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} &= (1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n|\ddot{a}_{\bar{g}}} + {}_{n+g|\ddot{a}_x}) + BP'_{x:\bar{t}} \cdot (I_{\bar{t}}|A)_{\frac{1}{x:\bar{n}}} \\ &\quad + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP'_{x:\bar{t}} + \beta \cdot BP'_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}) , \end{aligned}$$

und man erhält

$$BP'_{x:\bar{t}} = \frac{(1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n|\ddot{a}_{\bar{g}}} + {}_{n+g|\ddot{a}_x}) + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}})}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha - (I_{\bar{t}}|A)_{\frac{1}{x:\bar{n}}}} .$$

3. Die Bruttoeinmalprämie lässt sich wie folgt zerlegen:

$$BEP'_{x:\bar{n}} \cdot \left(1 - \alpha - \beta - A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}\right) = (1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n|\ddot{a}_{\bar{g}}} + {}_{n+g|\ddot{a}_x}) + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}$$

\Leftrightarrow

$$BEP'_{x:\bar{n}} \cdot \left(1 - \frac{A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}}{1 - \alpha - \beta}\right) = \underbrace{\frac{(1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n|\ddot{a}_{\bar{g}}} + {}_{n+g|\ddot{a}_x}) + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{1 - \alpha - \beta}}_{=BEP'_{x:\bar{n}}^{\text{AR}}} .$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} BEP'_{x:\bar{n}} &= BEP_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}}{1-\alpha-\beta}} \\ &= BEP_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} \cdot \left(1 + \frac{A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}}{1-\alpha-\beta-A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}} \right) \\ &= BEP_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} + BEP_{x:\bar{n}}^{\text{RÜ}} \end{aligned}$$

mit

$$BEP_{x:\bar{n}}^{\text{RÜ}} = BEP_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} \cdot \frac{A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}}{1-\alpha-\beta-A_{\frac{1}{x:\bar{n}}}} .$$

Analog ergibt sich für die Bruttojahresprämie die Zerlegung

$$\begin{aligned} &BP'_{x:\bar{t}} \cdot \left((1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha - (I_{\bar{t}} A)_{\frac{1}{x:\bar{n}}} \right) \\ &= (1+\gamma_4) \cdot ({}_{n|}\ddot{a}_{\bar{g}} + {}_{n+g|}\ddot{a}_x) + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow BP'_{x:\bar{t}} = BP_{x:\bar{t}}^{\text{AR}} + BP_{x:\bar{t}}^{\text{RÜ}} ,$$

wobei

$$BP_{x:\bar{t}}^{\text{AR}} = \frac{(1+\gamma_4) \cdot ({}_{n|}\ddot{a}_{\bar{g}} + {}_{n+g|}\ddot{a}_x) + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}})}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha}$$

und

$$BP_{x:\bar{t}}^{\text{RÜ}} = BP_{x:\bar{t}}^{\text{AR}} \cdot \frac{(I_{\bar{t}} A)_{\frac{1}{x:\bar{n}}}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha - (I_{\bar{t}} A)_{\frac{1}{x:\bar{n}}}} .$$

Lösung 40. Die Nettoeinmalprämien werden mit Hilfe des Äquivalenzprinzips berechnet:

1. Nettoeinmalprämie für eine Jahresrente i.H.v. 1:

$$\begin{aligned} NEP_{y:\bar{n}} &= {}_{n|}\ddot{a}_y^{(k)} \\ &= {}_n E_y \cdot \ddot{a}_{y+n}^{(k)} \\ &= {}_n E_y \cdot \left(\ddot{a}_{y+n} - \frac{k-1}{2k} \right) \\ &= \frac{D_{y+n}}{D_y} \left(\frac{N_{y+n}}{D_{y+n}} - \frac{k-1}{2k} \right) \end{aligned}$$

Nettoeinmalprämie für die angegebene Versicherung ($y = 20$, $n = 45$, $k = 12$, Jahresrente 12.000 EUR):

$$\begin{aligned} NEP_{20:\overline{45}} &= 12.000 \cdot {}_{45|}\ddot{a}_{20}^{(12)} \\ &= 12.000 \cdot \frac{D_{65}}{D_{20}} \cdot \left(\frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{11}{24} \right) \end{aligned}$$

Die Frau hat im Jahr 2017 ein Eintrittsalter von 20, d.h. ihr Geburtsjahr ist 1997. Damit ergibt sich eine Altersverschiebung von -7 Jahren, und man hat

$$\begin{aligned} NEP_{20:\overline{45}} &= 12.000 \cdot \frac{D_{58}}{D_{13}} \cdot \left(\frac{N_{58}}{D_{58}} - \frac{11}{24} \right) \\ &\approx 12.000 \cdot \frac{308.684,135}{772.358,712} \cdot \left(\frac{8.291.766,893}{308.684,135} - \frac{11}{24} \right) \\ &\approx 12.000 \cdot 10,5525 \\ &= 126.630,00 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Der Wert ohne Altersverschiebung beträgt

$$\begin{aligned} NEP_{20:\overline{45}} &\approx 12.000 \cdot \frac{265.389,046}{671.710,621} \cdot \left(\frac{6.263.803,615}{265.389,046} - \frac{11}{24} \right) \\ &\approx 12.000 \cdot 9,1441 \\ &= 109.729,20 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Dieser ist erwartungsgemäß niedriger als die zuvor errechnete Prämie inkl. Altersverschiebung. Durch die negative Altersverschiebung wird berücksichtigt, dass die Frau aufgrund der Sterblichkeitsverbesserung tendenziell länger lebt, was sich erhöhend auf die Prämie auswirkt.

2. Nettoeinmalprämie für eine Jahresrente i.H.v. 1:

$$\begin{aligned} NEP_y &= a_{\overline{g}}^{(k)} + {}_g|a_y^{(k)} \\ &= v \cdot \frac{1 - v^g}{1 - v} + {}_gE_y \cdot a_{y+g}^{(k)} \\ &= v \cdot \frac{1 - v^g}{1 - v} + {}_gE_y \cdot \left(\ddot{a}_{y+g}^{(k)} - \frac{1}{k} \right) \\ &= v \cdot \frac{1 - v^g}{1 - v} + {}_gE_y \cdot \left(\ddot{a}_{y+g} - \frac{k+1}{2k} \right) \\ &= v \cdot \frac{1 - v^g}{1 - v} + \frac{D_{y+g}}{D_y} \cdot \left(\frac{N_{y+g}}{D_{y+g}} - \frac{k+1}{2k} \right) \end{aligned}$$

Nettoeinmalprämie für die angegebene Versicherung ($y = 60$, $k = 1$, $g = 10$, $v = \frac{1}{1,02}$, Jahresrente 6.000 EUR):

$$NEP_{60} = 6.000 \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{1,02} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,02}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{1,02}}}_{\approx 8,9826} + \frac{D_{70}}{D_{60}} \cdot \left(\frac{N_{70}}{D_{70}} - 1 \right) \right]$$

Die 60-jährige Frau ist im Jahr 1957 geboren, so dass eine Alterverschiebung von +1 Jahr anzuwenden ist. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} NEP_{60} &\approx 6.000 \cdot \left[8,9826 + \frac{D_{71}}{D_{61}} \cdot \left(\frac{N_{71}}{D_{71}} - 1 \right) \right] \\ &\approx 6.000 \cdot \left[8,9826 + \frac{231.916,039}{289.496,689} \cdot \left(\frac{4.756.487,105}{231.916,039} - 1 \right) \right] \\ &\approx 6.000 \cdot [8,9826 + 15,6291] \\ &= 147.670,20 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Der Wert ohne Altersverschiebung beträgt

$$\begin{aligned} NEP_{20:\overline{45}} &\approx 6.000 \cdot \left[8,9826 + \frac{237.313,526}{295.781,762} \cdot \left(\frac{4.993.800,631}{237.313,526} - 1 \right) \right] \\ &\approx 6.000 \cdot [8,9826 + 16,0811] \\ &= 150.382,20 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Dieser ist erwartungsgemäß etwas höher als die zuvor errechnete Prämie inkl. Altersverschiebung. Durch die positive Altersverschiebung wird berücksichtigt, dass die Frau aufgrund des früheren Geburtsjahrgangs tendenziell eine kürzere Lebenserwartung hat, so dass die resultierende Einmalprämie niedriger ist.

Lösung 41. Die Nettojahresprämie wird mit Hilfe des Äquivalenzprinzips berechnet.

1. Der Ansatz

$$NP_{30:\overline{35}} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}} = 50.000 \cdot A_{30:\overline{35}}$$

führt zu

$$NP_{30:\overline{35}} = 50.000 \cdot \frac{A_{30:\overline{35}}}{\ddot{a}_{30:\overline{35}}} = 50.000 \cdot \frac{1 - \frac{i}{1+i} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{35}}}{\ddot{a}_{30:\overline{35}}} .$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} NP_{30:\overline{35}} &= 50.000 \cdot \frac{D_{30} - \frac{0,02}{1,02} \cdot (N_{30} - N_{65})}{N_{30} - N_{65}} \\ &\approx 50.000 \cdot \frac{540.366,196 - \frac{0,02}{1,02} \cdot (16.240.652,067 - 2.887.643,995)}{16.240.652,067 - 2.887.643,995} \\ &\approx 50.000 \cdot 0,020860 \\ &= 1.043,00 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

(Anmerkung: $\ddot{a}_{30:\overline{35}} \approx 24,71104$)

2. Aus dem Ansatz

$$NP_{30:\overline{5}} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{5}} = 100.000 \cdot A_{\overline{30:\overline{20}}}$$

folgt

$$NP_{30:\overline{5}} = 100.000 \cdot \frac{A_{\overline{30:\overline{20}}}}{\ddot{a}_{30:\overline{5}}} = 100.000 \cdot \frac{M_{30} - M_{50}}{N_{30} - N_{35}} .$$

Da in der Sterbetafel im Anhang nur Kommutationszahlen für die Lebenden tabelliert sind, nutzt man die Beziehung

$$M_x = D_x - d \cdot N_x$$

(Erinnerung: $d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$) und erhält

$$\begin{aligned} NP_{30:\overline{5}} &= 100.000 \cdot \frac{D_{30} - D_{50} + \frac{0,02}{1,02} \cdot (N_{30} - N_{50})}{N_{30} - N_{35}} \\ &\approx 100.000 \cdot \frac{\left(540.366,196 - 487.478,565 + \frac{0,02}{1,02} \cdot (16.240.652,067 - 7.314.352,063) \right)}{16.240.652,067 - 13.646.642,610} \\ &\approx 100.000 \cdot 0,087861 \\ &= 8.786,10 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

(Anmerkung: $\ddot{a}_{30:\overline{5}} \approx 4,80047$)

Lösung 42. Gemischte Kapitallebensversicherung mit abweichender Todesfallsumme

Die Nettoeinmalprämie für diese Versicherung lautet

$$NEP_{x:\overline{n}} = \theta \cdot A_{\overline{x:\overline{n}}} + {}_nE_x$$

und die Nettojahresprämie

$$NP_{x:\overline{n}} = \frac{NEP_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} = \frac{\theta \cdot A_{\overline{x:\overline{n}}} + {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} .$$

Lösung 43. Risikolebensversicherung mit steigender Todesfallleistung
Der Ansatz zur Bestimmung der Nettojahresprämie lautet wie folgt:

$$NP_{30:\overline{21}} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{21}} = 9.500 \cdot A_{\frac{1}{30:\overline{21}}} + 500 \cdot (IA)_{\frac{1}{30:\overline{21}}} .$$

Damit ist

$$\begin{aligned} NP_{30:\overline{21}} &= \frac{\frac{9.500 \cdot (M_{30} - M_{51})}{D_{30}} + 500 \cdot \frac{R_{30} - R_{51} - 21 \cdot M_{51}}{D_{30}}}{\frac{N_{30} - N_{51}}{D_{30}}} \\ &= \frac{9.500 \cdot (M_{30} - M_{51}) + 500 \cdot (R_{30} - R_{51} - 21 \cdot M_{51})}{N_{30} - N_{51}} \end{aligned}$$

bzw.

$$NP_{30:\overline{21}} = \frac{9.500 \cdot M_{30} + 500 \cdot (R_{30} - R_{51}) - 20.000 \cdot M_{51}}{N_{30} - N_{51}} .$$

Da in der Sterbetafel im Anhang nur Kommutationszahlen für die Lebenden tabelliert sind, nutzt man die bekannten Beziehungen

$$M_x = D_x - d \cdot N_x \quad \text{und} \quad R_x = N_x - d \cdot S_x$$

aus (Erinnerung: $d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$) und erhält

$$\begin{aligned} NP_{30:\overline{21}} &= \frac{9.500 \cdot D_{30} - \left(9.500 \cdot \frac{i}{1+i} - 500\right) \cdot N_{30} - 500 \cdot \frac{i}{1+i} \cdot S_{30}}{N_{30} - N_{51}} \\ &\quad - \frac{20.000 \cdot D_{51} - \left(20.000 \cdot \frac{i}{1+i} - 500\right) \cdot N_{51} - 500 \cdot \frac{i}{1+i} \cdot S_{51}}{N_{30} - N_{51}} . \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Kommutationswerte ergibt sich für einen 30-jährigen Mann eine Nettojahresprämie von

$$NP_{30:\overline{21}} \approx 747,39 - 721,68 = 25,71 \text{ EUR}$$

und für eine 30-jährige Frau

$$NP_{30:\overline{21}} \approx 729,85 - 713,73 = 16,12 \text{ EUR} .$$

Da Frauen eine geringere Sterblichkeit aufweisen, ist die Nettoprämie niedriger als für einen gleichaltrigen Mann.

Lösung 44. Risikolebensversicherung mit variierenden Kostensätzen

Gemäß des Äquivalenzprinzips ergibt sich für die Versicherungssumme 1 folgende Bruttojahresprämie:

$$\begin{aligned} BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} &= A_{\frac{1}{x:\bar{t}}} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \left(\beta_1 \cdot \ddot{a}_{x:4} + \beta_2 \cdot {}_{4|}\ddot{a}_{x:4} + \beta_3 \cdot {}_{8|}\ddot{a}_{x:\overline{t-8}} \right) \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}) . \end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} &BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} \\ &= A_{\frac{1}{x:\bar{t}}} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \left(\beta_1 \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + (\beta_2 - \beta_1) \cdot {}_{4|}\ddot{a}_{x:\overline{t-4}} + (\beta_3 - \beta_2) \cdot {}_{8|}\ddot{a}_{x:\overline{t-8}} \right) \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}) . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$BP_{x:\bar{t}} = \frac{A_{\frac{1}{x:\bar{t}}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}})}{\ddot{a}_{x:\bar{t}} - \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x:4} - \beta_2 \cdot {}_{4|}\ddot{a}_{x:4} - \beta_3 \cdot {}_{8|}\ddot{a}_{x:\overline{t-8}} - \alpha \cdot t_\alpha}$$

bzw.

$$BP_{x:\bar{t}} = \frac{A_{\frac{1}{x:\bar{t}}} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}})}{(1 - \beta_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - (\beta_2 - \beta_1) \cdot {}_{4|}\ddot{a}_{x:\overline{t-4}} - (\beta_3 - \beta_2) \cdot {}_{8|}\ddot{a}_{x:\overline{t-8}} - \alpha \cdot t_\alpha} .$$

Lösung 45. Termfix-Versicherung mit besonderem Kostensystem

Zunächst bestimmt man die Nettojahresprämie mit Hilfe des Äquivalenzprinzips. Mit

$$\ddot{a}_{45:\overline{20}} = \frac{N_{45} - N_{65}}{D_{45}} = \frac{9.201.471,385 - 2.887.643,995}{394.577,410} \approx 16,00149$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} NP_{45:\overline{20}} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} &= 50.000 \cdot v^{20} \Leftrightarrow \\ NP_{45:\overline{20}} &= 50.000 \cdot \frac{v^{20}}{\ddot{a}_{45:\overline{20}}} \end{aligned}$$

und somit

$$NP_{45:\overline{20}} \approx 50.000 \cdot \frac{0,67297}{16,00149} \approx 50.000 \cdot 0,042057 = 2.102,85 \text{ EUR} .$$

Die Bruttojahresprämie erhält man aus dem folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} BP_{45:\overline{20}} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} &= NP_{45:\overline{20}} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} \\ &\quad + 0,065 \cdot BP_{45:\overline{20}} + 0,035 \cdot BP_{45:\overline{20}} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} \\ &\quad + 18 + 2 \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} . \end{aligned}$$

Dabei wurden die einmaligen Kosten i.H.v. 10% der Bruttoprämie in einen Teil von 6,5% und einen Teil von 3,5% zerlegt, so dass man laufende Kosten i.H.v. 3,5% über die gesamte Dauer hat. Analog wurden die einmaligen Fixkosten i.H.v. 20 EUR in 18 und 2 aufgeteilt.

Daraus ergibt sich

$$BP_{45:\overline{20}} \cdot (0,965 \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} - 0,065) = (NP_{45:\overline{20}} + 2) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} + 18$$

bzw.

$$BP_{45:\overline{20}} = \frac{(NP_{45:\overline{20}} + 2) \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} + 18}{0,965 \cdot \ddot{a}_{45:\overline{20}} - 0,065} ,$$

so dass

$$BP_{45:\overline{20}} \approx \frac{(2.102,85 + 2) \cdot 16,00149 + 18}{0,965 \cdot 16,00149 - 0,065} \approx \frac{33.698,7362}{15,376438} \approx 2.191,58 \text{ EUR} .$$

Für Lebensversicherungen mit einer garantierten Erlebensfallleistung ist es sinnvoll, die Summe der insgesamt vom Kunden zu zahlenden Prämien, also die Bruttoprämiensumme, zu berechnen. Hier im Beispiel beträgt die Beitragssumme $20 \cdot 2.191,58 = 43.831,60$ EUR und ist somit kleiner als die Versicherungssumme i.H.v. 50.000 EUR. Abhängig vom Rechnungszins und von der Laufzeit kann es jedoch vorkommen, dass die Summe der gezahlten Prämien die garantierte Leistung übersteigt, so dass der Kunde in diesen Fällen de facto mehr zahlt, als er am Ende erhält. Diese als **Überzahlung** bezeichnete Situation sollte nach Möglichkeit vermieden werden, da der Abschluss einer solchen Versicherung für den Kunden unattraktiv erscheint.

Lösung 46. Kapitallebensversicherung mit Teilauszahlungen

Die Bestimmungsgleichung für die Nettojahresprämie lautet

$$NP_{x:\overline{30}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{30}} = A_{\frac{1}{x:\overline{30}}} + 0,4 \cdot {}_{10}E_x + 0,3 \cdot {}_{20}E_x + 0,3 \cdot {}_{30}E_x .$$

Folglich ist

$$NP_{x:\overline{30}} = \frac{A_{\frac{1}{x:\overline{30}}} + 0,4 \cdot {}_{10}E_x + 0,3 \cdot {}_{20}E_x + 0,3 \cdot {}_{30}E_x}{\ddot{a}_{x:\overline{30}}} .$$

Lösung 47. Prämienpektrum mit drei Beitragsstufen

Für die Kommutationszahl N_x^π ergibt sich in diesem Fall die Darstellung

$$N_x^\pi = \sum_{j=0}^{t_1-1} \pi_1 \cdot D_{x+j} + \sum_{j=t_1}^{t_2-1} \pi_2 \cdot D_{x+j} + \sum_{j=t_2}^{\omega-x} D_{x+j} .$$

Dies lässt sich schreiben als

$$N_x^\pi = \pi_1 \cdot (N_x - N_{x+t_1}) + \pi_2 \cdot (N_{x+t_1} - N_{x+t_2}) + N_{x+t_2}$$

oder auch

$$N_x^\pi = \pi_1 \cdot N_x + (\pi_2 - \pi_1) \cdot N_{x+t_1} + (1 - \pi_2) \cdot N_{x+t_2} .$$

Ergänzung der „nahrhaften Nullen“

$$N_x - N_x \quad \text{und} \quad N_{x+t_1} - N_{x+t_1}$$

sowie Umsortieren und Zusammenfassung der Terme führt schließlich zu

$$N_x^\pi = N_x - (1 - \pi_1) \cdot (N_x - N_{x+t_1}) - (1 - \pi_2) \cdot (N_{x+t_1} - N_{x+t_2}) .$$

Kapitel 9

Deckungskapital und weitere Reserven

Durch den Verkauf einer Lebensversicherung gibt das VU ein Garantiever sprechen ab. Im Falle einer Kapitallebens- oder Risikoversicherung sagt der Versicherer eine Leistung bei Tod oder Erleben zu. Im Falle einer Rentenversicherung besteht die Garantie in der regelmäßigen, meist lebenslangen Zahlung eines vorab festgelegten Betrags. Die Garantie erstreckt sich also nicht selten über einen langen Zeitraum von 40, 60 oder noch mehr Jahren.

Für das Leistungsversprechen und sämtliche damit verbundenen, während der Vertragslaufzeit entstehenden Kosten erhebt das VU eine Prämie. Wie sich diese berechnet, haben wir im vorangegangenen Kapitel erfahren. Die Prämie dient einerseits zur Deckung der im jeweiligen Versicherungsjahr entstehenden Aufwände, welche sich aus Verwaltungskosten und den Kosten für das getragene Risiko zusammensetzen. Andererseits werden – nicht nur bei abgekürzter Beitragszahlungsdauer – Teile der eingenommenen Prämien beiseite gelegt und dazu verwendet, eine Reserve aufzubauen, aus welcher die in der fernen Zukunft zugesagte Leistungszahlung sowie in beitragsfreien Zeiten anfallende Kosten beglichen werden können. Diese vertragsindividuell gebildete Reserve wird als **Deckungskapital** – oder seltener auch als **Prämienreserve** – bezeichnet.

Vom Deckungskapital abzugrenzen ist der Begriff der **Bilanzreserve** oder auch **(Bilanz)Deckungsrückstellung**. Das Deckungskapital entspricht demjenigen Betrag, der vorgehalten werden *sollte*, um die zugesagten Garantieleistungen erbringen zu können. Die Bilanzgröße hingegen ist der – entsprechend der Bilanz – *tatsächlich* vorgehaltene Betrag. Die beiden Beträge können übereinstimmen, müssen es jedoch nicht.

Häufig werden die Begriffe Deckungskapital und Deckungsrückstellung synonym verwendet, jedoch wollen wir hier die getrennte Sprechweise benutzen.

9.1 Gesetzliche Bestimmungen

Die gesetzliche Grundlage zur Stellung einer derartigen Reserve findet sich im HGB (vgl. Abschn. 3.4). § 341e HGB enthält allgemeine Bilanzierungsgrundsätze und verlangt von den VU, dass diese zur Sicherstellung der dauerhaften Erfüllbarkeit der im Rahmen der Versicherungsverträge eingegangenen Verpflichtungen versicherungstechnische Rückstellungen bilden. Dazu zählt neben Beitragsüberträgen und der Rückstellung für Beitragsrückerstattung (kurz: RfB), auf welche wir in Kap. 10 eingehen werden, auch die Deckungsrückstellung. Wie diese zu berechnen ist, wird in § 341f HGB geregelt. Dort ist festgelegt, dass die Deckungsrückstellung – sofern möglich – prospektiv zu berechnen ist und bereits zugeteilte Überschussanteile mit Ausnahme der Verzinslichen Ansammlung ebenfalls zu berücksichtigen sind.

§ 341f HGB fordert darüber hinaus die Berücksichtigung der sog. Zinszusatzreserve, d.h. einer zusätzlich zur Deckungsrückstellung zu bildenden Reserve für „gegenüber den Versicherten eingegangene Zinssatzverpflichtungen [...], sofern die derzeitigen oder zu erwartenden Erträge der Vermögenswerte des Unternehmens für die Deckung dieser Verpflichtungen nicht ausreichen.“ Die Zinszusatzreserve wird weiter unten in Abschn. 9.4.2 behandelt.

Für die Ermittlung der Deckungsrückstellung sind zudem die DeckRV sowie die RechVersV (vgl. Abschn. 3.4) relevant.

9.2 Deckungskapital

Das Deckungskapital einer Versicherung zum Zeitpunkt m , d.h. nach Ablauf von m Versicherungsjahren, wird im Folgenden mit $_m V_x$ notiert. In der Literatur werden Deckungskapitalien zu bestimmten Lebensversicherungsprodukten manchmal entsprechend des zugehörigen erwarteten Leistungsbarwertes notiert, bspw. wird das Deckungskapital einer n -jährigen gemischten Kapitallebensversicherung mit $_m V_{x:\overline{m}}$ (in Anlehnung an den Barwert $A_{x:\overline{m}}$) notiert. Hier wird jedoch unabhängig von der zugrunde liegenden Deckung einheitlich die Notation $_m V_x$ verwendet.

Entsprechend der beiden in Abschn. 8.1 dargestellten Varianten des Äquivalenzprinzips werden auch bei der Berechnung des Deckungskapitals eine **prospektive Methode** und eine **retrospektive Methode** unterschieden.

Wie in § 341f HGB erläutert, wird bei der prospektiven Berechnungsmethode ermittelt, welcher Betrag notwendig ist, um die zukünftigen Verpflichtungen des Versicherers (d.h. Leistungen und Kosten) erfüllen zu können. Dabei werden zukünftige Prämieneingänge in Abzug gebracht.

Das retrospektiv ermittelte Deckungskapital hingegen ist vergangenheitsgerichtet und blickt auf den bisherigen Versicherungsverlauf zurück. Es gibt an, welcher Betrag – beim angenommenen, rechnungsmäßigen Verlauf – aus den bislang eingenommenen Prämien abzugliedern der bisher gezahlten Leistungen und Kosten übrig geblieben bzw. akkumuliert worden ist.

Das Äquivalenzprinzip, welches zur Bestimmung der Prämie herangezogen wurde, verlangt die Gleichheit des erwarteten Barwerts der Prämieneinnahmen und des erwarteten Barwerts der Leistungen des Versicherers (inklusive Kosten) zum Zeitpunkt des Vertragsbeginns $m = 0$ (vgl. *Milbrodt und Helbig (1999)*, S. 377):

Erwarteter Barwert der Leistungen (und Kosten)	Erwarteter Barwert der Prämien
$m = 0$	

Dieses anfängliche Gleichgewicht geht jedoch im Laufe des Vertrags verloren (den Grund dafür werden wir in Abschn. 9.3 sehen). Zur Wiederherstellung dieses Gleichgewichts auch während der Vertragsdauer, d.h. für $m > 0$, muss das VU die Versicherung bewerten und einen entsprechenden Betrag, nämlich das Deckungskapital, stellen.

Bei prospektiver Betrachtungsweise kann das Gleichgewicht während der Vertragslaufzeit anschaulich dargestellt werden als

Erwarteter Barwert der zukünftigen Leistungen (und Kosten)	<i>Prospektives Deckungskapital</i>
	Erwarteter Barwert der zukünftigen Prämien
$m > 0$	

Auflösen dieser bildhaften Gleichung nach dem prospektiven Deckungskapital ergibt:

$${}_m V_x^{\text{prosp}} := \frac{\text{Erwarteter Barwert zum Zeitpunkt } m \text{ der zukünftigen Leistungen (und Kosten), zahlbar durch das VU}}{\text{Erwarteter Barwert zum Zeitpunkt } m \text{ der zukünftigen Prämien, zahlbar durch den VN}}.$$

Der alternative Ansatz eines retrospektiven Deckungskapitals führt zu

<i>Retrospektives Deckungskapital</i>	Erwarteter Endwert der vergangenen Prämien
Erwarteter Endwert der vergangenen Leistungen (und Kosten)	
$m > 0$	

und somit zur Definition

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{retro}} := & \text{ Erwarteter Endwert zum Zeitpunkt } m \text{ der bislang} \\ & \text{ vom VN bereits gezahlten Prämien} \\ - & \text{ Erwarteter Endwert zum Zeitpunkt } m \text{ der bislang} \\ & \text{ vom VU bereits gezahlten Leistungen (und Kosten).} \end{aligned}$$

Durch finanzmathematische Umformungen lässt sich zeigen, dass das retrospektive Deckungskapital (mit Hilfe des Barwertes ${}_m E_x$, vgl. Abschn. 6.2.1.1) auch dargestellt werden kann als

$${}_m V_x^{\text{retro}} := \frac{\begin{array}{l} \text{Erwarteter Barwert} \\ \text{zum Zeitpunkt 0 der} \\ \text{in den ersten } m \text{ Jahren} \\ \text{vom VN zu zahlenden} \\ \text{Prämien} \end{array} - \begin{array}{l} \text{Erwarteter Barwert} \\ \text{zum Zeitpunkt 0 der} \\ \text{in den ersten } m \text{ Jahren} \\ \text{vom VU zu zahlenden} \\ \text{Leistungen (und Kosten)} \end{array}}{ {}_m E_x} . \quad (9.1)$$

Mit Ausnahme des Zeitpunktes $m = 0$ korrespondieren die Werte von m mit dem Ende des jeweiligen (m -ten) Versicherungsjahres. In den vorangehenden Darstellungen der Deckungskapital-Ermittlung ist daher die präzise Abgrenzung der erfolgten bzw. nicht erfolgten Zahlungen zu beachten:

- In der prospektiven Definition des Deckungskapitals werden sowohl Leistungen und Kosten als auch Prämien, die zum Zeitpunkt m fällig sind, in der Zukunftsbetrachtung nicht mit berücksichtigt, so dass sie als bereits gezahlt gelten. Für den Barwert zukünftiger Prämien bedeutet dies, dass er nur diejenigen Prämien beinhaltet, die ab Beginn des $(m+1)$ -ten Versicherungsjahres gezahlt werden (und verschwindet daher für $m \geq t$). Gleiches gilt für den Barwert zukünftiger Leistungen, welcher folglich nur Leistungen berücksichtigt, die in den Zeitraum fallen, der mit Beginn des $(m+1)$ -ten Versicherungsjahres anfängt.
- Innerhalb der retrospektiven Sichtweise gelten Todesfallleistungen zum Zeitpunkt m als bereits gezahlt und fließen in die Endwert-Bestimmung mit ein, während Prämien, Kosten und Erlebensfallleistungen zum Zeitpunkt m nicht berücksichtigt werden, d.h., sie gelten als noch nicht eingegangen.

Analog zur Unterscheidung der Prämiengrößen differenziert man auch zwischen den auf Basis dieser jeweiligen Prämie berechneten Deckungskapitalien. So gibt es auf der einen Seite das Nettodeckungskapital, andererseits das geziilmerte Deckungskapital. Darüber hinaus kann auch ein Bruttodeckungskapital ermittelt werden, welches vereinfachend oftmals nur als Deckungskapital bezeichnet wird.

9.2.1 Rechnungsgrundlagen

Im Allgemeinen ist es möglich, die Prämie und das Deckungskapital auf Basis unterschiedlicher Rechnungsgrundlagen zu ermitteln. Aus den vorherigen Kapiteln kennen wir bereits die Rechnungsgrundlagen für die Beitragsberechnung. Bei der Berechnung des Deckungskapitals werden erneut Annahmen über den Zins, die Sterblichkeit und die Kosten getroffen, welche als Rechnungsgrundlagen für die Reserveberechnung bezeichnet werden. Ob die beiden Sätze von Rechnungsgrundlagen übereinstimmen (müssen) oder nicht, hängt von der Gesetzgebung des jeweiligen Landes ab. In Deutschland dürfen sie seit der Deregulierung im Jahr 1994 zwar unterschiedlich sein, jedoch verwenden die meisten Versicherer nach wie vor identische Rechnungsgrundlagen für die Prämien- und Reserveberechnung.

Zwei wichtige Anmerkungen seien an dieser Stelle gemacht:

- Genau dann, wenn die Prämien auf Basis des Äquivalenzprinzips bestimmt werden und die Rechnungsgrundlagen für Prämien- und Deckungskapitalberechnung identisch sind, stimmen das propsektive und das retrospektive Deckungskapital für alle Zeitpunkte $m \geq 0$ überein. Daraus folgt insbesondere, dass der erwartete Barwert des Gewinns Null ist.
- Sofern die Rechnungsgrundlagen für die Prämienberechnung von denen der Deckungskapitalberechnung abweichen, ist nur die Ermittlung eines prospektiven Deckungskapitals sinnvoll bzw. erlaubt.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die beiden Sätze von Rechnungsgrundlagen übereinstimmen.

9.2.2 Nettodeckungskapital

Das **Nettodeckungskapital** wird auf Basis der Nettoprämie berechnet. Da keine Kosten berücksichtigt werden, liegt der Fokus allein auf dem Verhältnis von Beiträgen zu Leistungen. Dieser Ansatz kann auch als reine Risikobewertung bezeichnet werden, da ausschließlich Sterblichkeit und Zins betrachtet werden.

Gemäß des Äquivalenzprinzips stimmen bei Vertragsbeginn (d.h. unmittelbar vor Zahlung des ersten Beitrags) der Barwert der erwarteten Leistungen sowie der Barwert der erwarteten (Netto)Prämien überein, so dass für $m = 0$ stets

$$_m V_x^{\text{Netto}} = 0$$

gilt.

Das prospektive Nettodeckungskapital berechnet sich als

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} = & E[\text{Barwert der zukünftigen Leistungen}] \\ & - E[\text{Barwert der zukünftigen (Netto)Prämien}] . \end{aligned}$$

In Formeln bedeutet dies:

$${}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} = NEP_{x+m:\overline{n-m}} - NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}$$

falls $m < t$ (d.h. solange der Vertrag beitragspflichtig ist), und

$${}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} = NEP_{x+m:\overline{n-m}}$$

falls $m \geq t$ (d.h. in der beitragsfreien Zeit bzw. im Rentenbezug).

Bei retrospektiver Betrachtungsweise gilt für das Nettodeckungskapital:

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto, retro}} = & E[\text{Endwert der bisherigen (Netto)Prämien}] \\ & - E[\text{Endwert der bisherigen Leistungen}] . \end{aligned}$$

9.2.2.1 Rekursive Berechnung

Ausgehend von einem Kollektiv gleichartiger Verträge (d.h., alle Policien haben eine identische Deckung, dasselbe Eintrittsalter und dasselbe Geschlecht) kann für das Nettodeckungskapital eine Rekursionsgleichung hergeleitet werden. Die Deckung wird durch die Todesfallleistungen $TFL_m := \theta_m^T$ und die Erlebensfallleistungen $EFL_m := \theta_m^E$ im Versicherungsjahr $m = 1, \dots, n$ beschrieben (siehe Abschn. 6.2.4).

Zwischen zwei aufeinander folgenden Jahren $m-1$ und m entwickelt sich die kollektive Reserve wie folgt:

1. Zu Beginn des m -ten Versicherungsjahres sind l_{x+m-1} Lebende des Alters $x+m-1$ vorhanden, und für jede dieser Personen wird ein Nettodeckungskapital in Höhe von ${}_m V_x^{\text{Netto}}$ gestellt.
2. Ebenfalls zu Beginn des Jahres entrichtet jedes der l_{x+m-1} Individuen eine Nettoprämie in Höhe von

$$NP_m = \begin{cases} NP_{x:\bar{t}} & \text{falls } 1 \leq m \leq t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Für die l_{x+m-1} Lebenden wird außerdem jeweils eine Erlebensfallleistung in Höhe von EFL_{m-1} fällig, wobei $EFL_0 := 0$ gesetzt wird.
4. Im Laufe des Versicherungsjahres m entstehen auf den verbleibenden Betrag (rechnungsmäßige) Zinsen entsprechend des Rechnungszinssatzes i .

5. Weiterhin sterben im Laufe des Jahres d_{x+m-1} Personen, so dass am Ende des Versicherungsjahres nur noch l_{x+m} Personen übrig sind. Für jeden im Laufe des Jahres Verstorbenen wird eine Todesfallleistung in Höhe von TFL_m am Ende des Jahres m gezahlt.
6. Für jedes der l_{x+m} Individuen verbleibt dann ein Nettodeckungskapital in Höhe von ${}_{m+1}V_x^{\text{Netto}}$.

Die Fortschreibung des Nettodeckungskapitals vom Zeitpunkt $m - 1$ zum Zeitpunkt m lässt sich demnach zusammenfassen als

$$\begin{aligned} & l_{x+m-1} \cdot {}_{m-1}V_x^{\text{Netto}} \\ & + l_{x+m-1} \cdot NP_m \\ & - l_{x+m-1} \cdot EFL_{m-1} \\ & + i \cdot l_{x+m-1} \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Netto}} + NP_m - EFL_{m-1}) \\ & - d_{x+m-1} \cdot TFL_m \\ = & l_{x+m} \cdot {}_mV_x^{\text{Netto}} \end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} l_{x+m} \cdot {}_mV_x^{\text{Netto}} &= (1+i) \cdot l_{x+m-1} \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Netto}} + NP_m - EFL_{m-1}) \\ &\quad - d_{x+m-1} \cdot TFL_m. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Todesfallleistung TFL_m des m -ten Versicherungsjahres am Ende desselben ausgezahlt wird, während die Erlebensfallleistung EFL_m unmittelbar zu Beginn des darauffolgenden, sprich $(m+1)$ -ten Jahres zur Auszahlung kommt.

Eine Division der voranstehenden Gleichung durch l_{x+m-1} liefert einerseits die Darstellung

$$\begin{aligned} p_{x+m-1} \cdot {}_mV_x^{\text{Netto}} &= (1+i) \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Netto}} + NP_m - EFL_{m-1}) \\ &\quad - q_{x+m-1} \cdot TFL_m \end{aligned} \tag{9.2}$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\text{Netto}} &= \frac{(1+i)}{p_{x+m-1}} \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Netto}} + NP_m - EFL_{m-1} \\ &\quad - v \cdot q_{x+m-1} \cdot TFL_m). \end{aligned}$$

Diese Rekursionsgleichung wird auch als **versicherungsmathematische Bilanzgleichung** bezeichnet.

Andererseits ergibt sich durch iteratives Einsetzen der Rekursionsbeziehung die Darstellung

$$\begin{aligned}
 l_{x+m} \cdot {}_m V_x^{\text{Netto}} &= (1+i)^m \cdot l_x \cdot \underbrace{{}_0 V_x}_{=0} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m (1+i)^j \cdot l_{x+m-j} \cdot NP_{m-(j-1)} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^m (1+i)^{j-1} \cdot d_{x+m-j} \cdot TFL_{m-(j-1)} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^m (1+i)^j \cdot l_{x+m-j} \cdot EFL_{m-j}
 \end{aligned}$$

bzw. nach Indexverschiebung

$$\begin{aligned}
 l_{x+m} \cdot {}_m V_x^{\text{Netto}} &= \sum_{j=0}^{m-1} (1+i)^{m-j} \cdot l_{x+j} \cdot NP_{j+1} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^m (1+i)^{m-j} \cdot d_{x+j-1} \cdot TFL_j \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{m-1} (1+i)^{m-j} \cdot l_{x+j} \cdot EFL_j .
 \end{aligned}$$

Die anschließende Division durch die Anzahl l_{x+m} führt zu der retrospektiven Berechnungsweise des Deckungskapitals, indem

$$\begin{aligned}
 {}_m V_x^{\text{Netto}} &= \sum_{j=0}^{m-1} (1+i)^{m-j} \cdot \frac{l_{x+j}}{l_{x+m}} \cdot NP_{j+1} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^m (1+i)^{m-j} \cdot \frac{d_{x+j-1}}{l_{x+m}} \cdot TFL_j \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{m-1} (1+i)^{m-j} \cdot \frac{l_{x+j}}{l_{x+m}} \cdot EFL_j
 \end{aligned}$$

die Differenz aus erwartetem Endwert der bisher gezahlten (Netto-)Prämien und erwartetem Endwert der bisherigen (Todes- und Erlebensfall-)Leistungen repräsentiert.

Eine Erweiterung mit dem Ausdruck $l_x \cdot (1+i)^m$ liefert

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto}} &= \overbrace{\frac{l_x}{l_{x+m}} \cdot (1+i)^m}^{= {}_m E_x} \cdot \left[\sum_{j=0}^{m-1} v^j \cdot \frac{l_{x+j}}{l_x} \cdot NP_{j+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^m v^j \cdot \frac{d_{x+j-1}}{l_x} \cdot TFL_j - \sum_{j=1}^{m-1} v^j \cdot \frac{l_{x+j}}{l_x} \cdot EFL_j \right] \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_{x+j}}{D_x} \cdot NP_{j+1} - \sum_{j=1}^m \frac{C_{x+j}}{D_x} \cdot TFL_j - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{D_{x+j}}{D_x} \cdot EFL_j}{{}_m E_x} \end{aligned}$$

und verdeutlicht die alternative Berechnungsvariante (9.1) bei retrospektiver Sichtweise.

Beispiel 23. Wir betrachten eine n -jährige gemischte Kapitallebensversicherung mit Versicherungssumme 1 und durchgehender Beitragszahlungsdauer (d.h. $t = n$).

1. Zeigen Sie, dass das prospektive Nettodeckungskapital gegeben ist durch

$${}_m V_x^{\text{Netto, prospt}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} .$$

2. Leiten Sie eine Formel für das retrospektiv ermittelte Nettodeckungskapital her und zeigen Sie, dass die beiden Berechnungsmethoden zu identischen Ergebnissen führen.

Lösung:

1. Als Differenz des erwarteten Barwerts der zukünftigen Leistungen und des erwarteten Barwerts der zukünftigen (Netto-)Prämien entspricht das prospektive Nettodeckungskapital für $m = 0, \dots, n$ dem Ausdruck

$${}_m V_x^{\text{Netto, prospt}} = A_{x+m:\overline{n-m}} - NP_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} .$$

Da die Nettojahresprämie gegeben ist durch $NP_{x:\overline{n}} \stackrel{t=n}{=} \frac{A_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$ und $A_{x:\overline{n}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}$ (vgl. Abschn. 6.2.3), folgt

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto, prospt}} &= A_{x+m:\overline{n-m}} - \frac{A_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} \\ &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} - \frac{1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(d + \frac{1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \right) \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{n}-m} \\
&= 1 - \left(\frac{d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}} + 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \right) \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{n}-m}
\end{aligned}$$

und schließlich

$${}_m V_x^{\text{Netto, prospektiv}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m:\bar{n}-m}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}}.$$

Speziell ist ${}_0 V_x = 0$ und ${}_n V_x = 1$.

2. Bei der retrospektiven Berechnung des Nettodeckungskapitals ist zu beachten, dass $TFL_j = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$ und $EFL_j = 1_{\{j=n\}}$. Gemäß Gleichung (9.1) ist daher

$${}_m V_x^{\text{Netto, retro}} = \frac{NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{m}} - A_{x:\bar{m}}}{{}_m E_x}.$$

Wegen $A_{x:\bar{m}} = A_{x:\bar{m}} - {}_m E_x$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
{}_m V_x^{\text{Netto, retro}} &= \frac{\frac{A_{x:\bar{m}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{m}} - (A_{x:\bar{m}} - {}_m E_x)}{{}_m E_x} \\
&= \frac{\frac{1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{m}} - (1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{m}} - {}_m E_x)}{{}_m E_x} \\
&= \frac{\frac{\ddot{a}_{x:\bar{m}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} - d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{m}} - 1 + d \cdot \ddot{a}_{x:\bar{m}} + {}_m E_x}{{}_m E_x} \\
&= \frac{\frac{\ddot{a}_{x:\bar{m}}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} - 1}{{}_m E_x} + 1 \\
&= -\frac{\ddot{a}_{x+m:\bar{n}-m}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}}} + 1 \\
&= {}_m V_x^{\text{Netto, prospektiv}}.
\end{aligned}$$

9.2.2.2 Natürliche Prämie

Der erwartete Barwert der Leistungen des jeweiligen Versicherungsjahres wird als **natürliche Prämie** bezeichnet, d.h., die natürliche Prämie im m -ten Versicherungsjahr entspricht dem Ausdruck

$$v \cdot q_{x+m-1} \cdot TFL_m + v \cdot p_{x+m-1} \cdot EFL_m.$$

Sie kann daher als Nettoprämie für eine Versicherung mit einjähriger Dauer angesehen werden.

Da die Sterblichkeit mit dem Alter der VP variiert, schwankt das Risiko für Tod bzw. Erleben im Zeitlauf, und folglich auch die natürliche Prämie. Theoretisch wäre es möglich, das (mehrjährige) Äquivalenzprinzip zu ignorieren bzw. es zu Beginn eines jeden Versicherungsjahres immer wieder neu anzuwenden. Auf diese Weise würden nicht-konstante (natürliche) Prämien erhoben – wie es übrigens für integrierte Leistungen bei Fondsprodukten durchaus geschieht. Bei einer Risikolebensversicherung etwa müsste sich der VN insbesondere auf steigende Beiträge einstellen, da die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten mit zunehmendem Alter immer größer werden (siehe Abschn. 5.2.5.4). Darüber hinaus kann der Versicherungscharakter verloren gehen, da bspw. bei einer gemischten Kapitallebensversicherung mit $VS = 1$ im letzten Vertragsjahr eine natürliche Prämie von $v \cdot (q_{x+n-1} + p_{x+n-1}) = v$ zu zahlen ist, was dem (deterministischen) Barwert der Leistung 1 nach einem Jahr entspricht und somit gar kein biometrisches Risiko besteht.

Anstatt der natürlichen Prämie wird während der Beitragszahlungsdauer in den meisten Fällen eine konstante Prämie erhoben, welche in den ersten Vertragsjahren üblicherweise höher als die natürliche Prämie ist. Umgekehrt zahlt der VN in den letzten Vertragsjahren weniger als den zur Deckung des vom VU getragenen Risikos notwendigen Betrag. Dies führt dazu, dass das anfängliche Gleichgewicht zwischen erwartetem Barwert zukünftiger Leistungen und dem zukünftigen Prämien verloren geht. Für alle Zeitpunkte $m \geq 0$ entspricht die erwartete Differenz zwischen den beiden erwarteten Barwerten (von Prämien und Leistungen) genau dem prospektiven Nettodeckungskapital.

9.2.2.3 Beitragszerlegung

Aus der Rekursionsgleichung (9.2) lässt sich eine Beitragszerlegung der Nettoprämie ableiten. Durch Multiplikation mit $v = \frac{1}{1+i}$ und anschließender Umordnung der Gleichungsterme erhält man für die Nettoprämie NP_m im m -ten Versicherungsjahr die folgende Aufteilung:

$$\begin{aligned} NP_m &= \underbrace{v \cdot q_{x+m-1} \cdot (TFL_m - {}_m V_x^{\text{Netto}})}_{=: RP_m} \\ &\quad + \underbrace{v \cdot {}_m V_x^{\text{Netto}} - {}_{m-1} V_x^{\text{Netto}} + EFL_{m-1}}_{=: SP_m}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Sie zerfällt demnach in zwei Teile:

- Die Größe $TFL_{m-1}V_x$ wird als **riskiertes Kapital** im Jahr m bezeichnet und repräsentiert denjenigen (über das aktuelle Deckungskapital hinausgehenden) Mehrbetrag, der am Jahresende benötigt wird, um die für die im Laufe des Jahres Verstorbenen fällige Todesfallleistung erbringen zu können. Der Ausdruck $q_{x+m-1} \cdot (TFL_m - V_x)$ stellt das erwartete risikierte Kapital dar, so dass die **Risikoprämie** RP_m folglich dem erwarteten Barwert des riskierten Kapitals zu Beginn des m -ten Versicherungsjahrs entspricht.
- Der verbleibende Teil der Nettoprämie wird **Sparprämie** SP_m genannt und stellt denjenigen Betrag dar, der zur Sicherstellung des Deckungskapitalanstiegs und zur Begleichung der Erlebensfallleistung benötigt wird. Falls $EFL_{m-1} = 0$ ist, entspricht die Sparprämie $v \cdot V_x - V_{x-1}$ genau demjenigen Betrag, der nötig ist, damit das Nettodeckungskapital V_x vom Jahresanfang – abgesehen von der rechnungsmäßigen Verzinsung – auf den am Jahresende benötigten Wert V_x ansteigen kann. Im zeitstetigen Fall für die Entwicklung des Deckungskapitals entspräche die Sparprämie genau der Ableitung des Nettodeckungskapitals.

Die Nettoprämie ist zwar während der Dauer der Versicherung in der Regel konstant, jedoch variiert ihre Zusammensetzung, indem sich die Anteile von Risiko- und Sparprämie aus den im vorherigen Abschnitt aufgeführten Gründen im Zeitablauf verschieben. Dabei können mehrere Konstellationen auftreten:

- Ist das riskierte Kapital im Jahr m positiv, so wird eine positive Risikoprämie erhoben. Ist diese Risikoprämie kleiner als die Nettoprämie, so ist auch die Sparprämie im Jahr m positiv, und das Nettodeckungskapital wächst. Ist die Risikoprämie hingegen größer als die Nettoprämie oder genauso groß wie diese, so ist die Sparprämie nicht-positiv. Bei einer Sparprämie von Null beruht ein Anstieg des Nettodeckungskapitals allein auf der (rechnungsmäßigen) Verzinsung. Ist die Sparprämie jedoch negativ, so bedeutet dies eine Reduzierung des Nettodeckungskapitals. Dieser Vorgang wird als **Entsparung** bezeichnet.
- Ist das riskierte Kapital im m -ten Versicherungsjahr gleich Null, so verschwindet auch die Risikoprämie. In diesem Fall wird die gesamte Nettoprämie (= Sparprämie) zum weiteren Aufbau des Nettodeckungskapitals verwendet.

Dieser Fall tritt ein, wenn als Todesfallleistung genau das vorhandene Deckungskapital gezahlt wird oder wenn – wie bei Riester-Verträgen in der Aufschubphase – keine Sterblichkeit 1. Ordnung einkalkuliert ist.

- Ist das riskierte Kapital eines Jahres negativ, so gilt dies entsprechend für die Risikoprämie. Folglich ist die Sparprämie also größer als die Nettoprämie. Anders ausgedrückt: Das negative Vorzeichen der Risikoprämie

bedeutet, dass auch dieser Teil zur Erhöhung des Deckungskapitals verwendet wird.

Die Situation einer negativen Risikoprämie tritt auf, falls keine Todesfallleistung vereinbart ist oder die gewährte Todesfallleistung niedriger als das Deckungskapital ist. Dieser Effekt wird **Vererbung** genannt, da der frei werdende, nicht benötigte Teil des Deckungskapitals der Toten eines Versicherungsjahrs den am Jahresende vorhandenen Lebenden zugute kommt; die Verstorbenen vererben quasi ihr übrig gebliebenes Deckungskapital an die Überlebenden.

Es klingt vielleicht etwas ungewöhnlich, aber selbst wenn keine Beitragszahlung erfolgt, d.h. nach Ablauf der vereinbarten Prämienzahldauer, nach einer vorzeitigen Beitragsfreistellung oder in der Rentenbezugsphase, kann von Risiko- und Sparbeiträgen gesprochen werden. Diese werden dann jedoch nicht durch eine eingehende Prämie finanziert, sondern aus dem Deckungskapital entnommen.

9.2.2.4 Prämiendifferenzformel

Während die Rekursionsgleichung für das Deckungskapital in direktem Zusammenhang mit der retrospektiven Berechnung steht, folgt aus der prospektiven Sichtweise eine andere Darstellungsvariante des Deckungskapitals.

Am Ende des m -ten Versicherungsjahres ist das (prospektive) Deckungskapital gegeben durch

$${}_m V_x^{\text{Netto}} = NEP_{x+m} - NP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} .$$

Würde nun dieselbe Versicherung zum Zeitpunkt m mit derselben Versicherungssumme, jedoch mit dem aktuellen Alter $x + m$ als neuem Eintrittsalter und mit den verbleibenden Restlaufzeiten für die Versicherungs- und Prämienzahlungsdauer $n - m$ bzw. $t - m$ als neue Versicherungsdauer bzw. neue Prämienzahlungsdauer abgeschlossen, so ergäbe sich hierfür eine Nettoprämie von

$$NP_{x+m:\overline{t-m}} = \frac{NEP_{x+m}}{\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}} .$$

Auflösen nach NEP_{x+m} und Einsetzen in die Deckungskapitalgleichung liefert

$${}_m V_x^{\text{Netto}} = \left(NP_{x+m:\overline{t-m}} - NP_{x:\overline{t}} \right) \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} .$$

Diese Darstellung ist als **Prämiendifferenzformel** geläufig und ist insbesondere im Kontext von Vertragsänderungen oder Reserveauffüllungen von Bedeutung.

9.2.2.5 Typische Verläufe

In diesem Abschnitt soll beispielhaft anhand ausgewählter Versicherungsprodukte veranschaulicht werden, wie sich das Nettodeckungskapital im Laufe der Versicherungsdauer auf- und ggf. auch wieder abbaut.

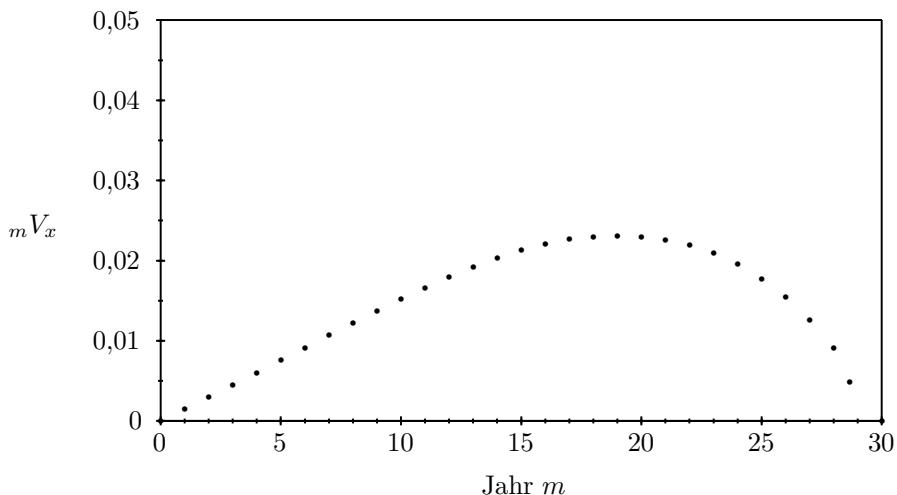
Zur Vereinfachung wird angenommen, dass Prämienzahldauer und Versicherungsdauer (bzw. Aufschubdauer) übereinstimmen, also $t = n$.

Wir betrachten jeweils eine bei Vertragsbeginn 30 Jahre alte Person. Die garantierte Versicherungssumme bzw. Jahresrente ist normiert, d.h. $VS = 1$ bzw. $JR = 1$.

Temporäre Risikolebensversicherung

Die Versicherungsdauer betrage 30 Jahre. Das Nettodeckungskapital dieser n -jährigen Risikolebensversicherung berechnet sich wie folgt:

$${}_m V_x = VS \cdot \left(A_{x+1:m:\overline{n-m}} - NP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \right).$$



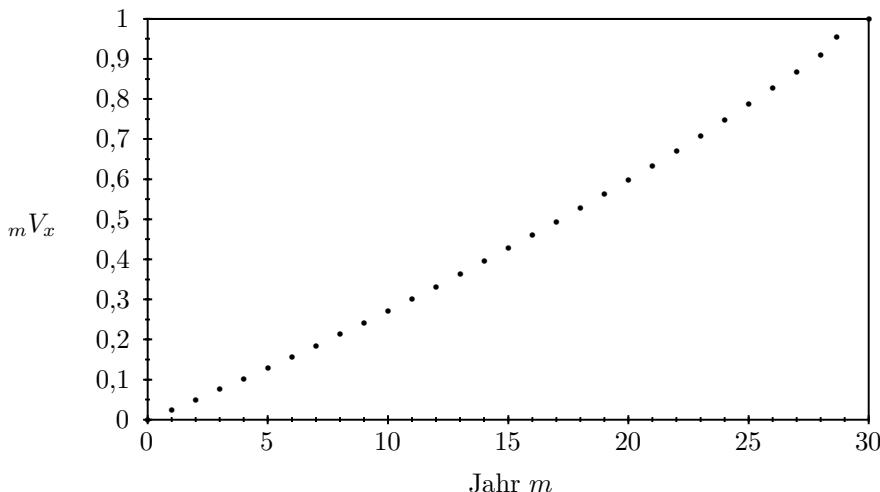
Wie die Kurve zeigt, ist es dem Versicherer möglich, in den ersten Jahren eine Reserve aufzubauen. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Versicherungsnehmer zunächst eine höhere Prämie zahlt, als für das versicherte Risiko eigentlich nötig wäre, und dieser über die Risikoprämie hinausgehende Betrag (nämlich die Sparprämie) wird zum Aufbau einer Reserve verwendet. In den späteren Jahren der Versicherungsdauer ist das Risiko, dass die versicherte Person stirbt, höher als der während der gesamten Versicherungsdauer gleichbleibende Beitrag. In diesem Fall wird die Sparprämie gegen Ende hin negativ, und die aufgebaute Reserve wird wieder auf Null entspart.

Gemischte Kapitallebensversicherung

Auch hier beträgt die Versicherungsdauer wiederum $n = 30$ Jahre.

Das Nettodeckungskapital für die gemischte Kapitallebensversicherung bestimmt sich gemäß

$${}_m V_x = VS \cdot \left(A_{x+m:\overline{n-m}} - NP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} \right).$$



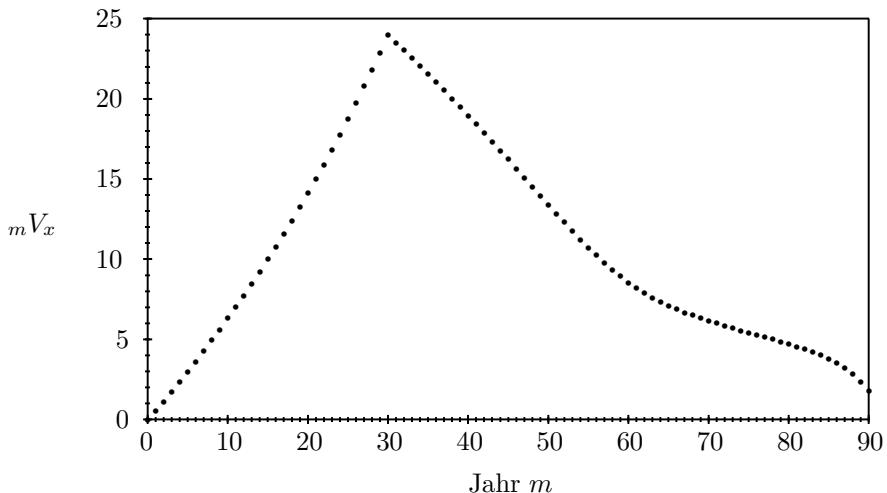
Der Deckungskapitalverlauf ist kontinuierlich steigend und erreicht zum Ende hin exakt die garantierte Ablauf- bzw. Erlebensfallleistung, welche eine logische Sekunde später an die Überlebenden ausgezahlt wird.

Aufgeschobene Rentenversicherung

Die Versicherung habe eine Aufschubdauer von $n = 30$ Jahren, so dass die Leistung in Form der jährlich zahlbaren Rente mit Erreichen des Alters 60 einsetzt. Eine Beitragsrückgewähr oder eine Rentengarantiezeit sind nicht vereinbart.

Das Nettodeckungskapital dieser Versicherung berechnet sich als

$${}_m V_x = \begin{cases} JR \cdot \left({}_{n-m} | \ddot{a}_{x+m} - NP_{x:\bar{t}} | \cdot \ddot{a}_{x+m: \bar{t}-m} \right) & \text{für } 0 \leq m < n , \\ JR \cdot \ddot{a}_{x+m} & \text{für } m \geq n . \end{cases}$$



Bis zum Beginn der Rentenphase wird ein beachtliches Nettodeckungskapital aufgebaut. Ab dem Rentenübergang sinkt das Deckungskapital aufgrund der auszuzahlenden Renten wieder ab, bis schließlich mit Erreichen des Endalters der Sterbetafel der Wert Null erzielt ist. Sofern die versicherte Person zu diesem Zeitpunkt noch lebt, bedeutet dies jedoch nicht das Ende der Rentenzahlungen. Vielmehr gehen die Rentenzahlungen durch den Versicherer weiter (schließlich hat er dies vertraglich zugesagt bzw. ein derartiges Garantiever sprechen gegeben) bis zum tatsächlichen Tod der versicherten Person. Die Kluft zwischen der kalkulatorischen und tatsächlichen Sterblichkeit bzw. die Gefahr, dass die VP älter wird als angenommen, wird als **Langlebigkeitsrisiko** bezeichnet.

9.2.3 Gezillmertes Deckungskapital

Das **gezillmerte Deckungskapital**, auch **Zillmerreserve** genannt, wird unter Verwendung der gezillmerten Nettoprämie (siehe Abschn. 8.2.5) berechnet. Es berücksichtigt somit denjenigen Teil der einmaligen Abschlusskosten, der mit den ersten Prämien wird, und verteilt diese kalkulatorisch auf die gesamte Prämienzahlungsdauer t .

Diese besondere Vorgehensweise bei der (prospektiven) Deckungskapitalberechnung wird als **Zillmerung** oder **Zillmer(ungs)-Verfahren** bezeichnet (benannt nach dem deutschen Versicherungsmathematiker August Zillmer) und ist nach § 25 RechVersV explizit erlaubt.

Zillmerung bedeutet, dass der Vertrag sofort mit einmaligen Abschlusskosten belastet wird. Durch ihre unmittelbare Berücksichtigung ist die Zillmerreserve in den ersten Vertragsjahren negativ. Hintergrund dieses Verfahrens ist folgender: Für die erfolgreiche Vermittlung des Vertrags wird bei Versicherungsbeginn eine einmalige (Abschluss-)Provision gezahlt. Sofern der VN jedoch innerhalb der ersten zwei oder drei Jahre wieder kündigen sollte, entstünde dem VU durch die angefallenen Abschlusskosten ein Verlust. Das VU hat also eine Forderung in Höhe der gezahlten Abschlusskosten gegenüber dem VN, welche dieser durch seine ersten Prämienzahlungen zunächst tilgen muss, bevor ein erstmals positives Deckungskapital entsteht.

Wie hoch die im Rahmen des Zillmer-Verfahrens angesetzten Abschlusskosten sein dürfen, ist in § 4 DeckRV geregelt. Danach ist der Zillmersatz gesetzlich nach oben beschränkt und darf derzeit „25 Promille der Summe aller Prämien nicht überschreiten“. Dieser Promille-Satz wurde zuletzt 2008 im Zuge der VVG-Reform geändert, indem der Wert von der viele Jahre lang geltenden Grenze i.H.v. 40 Promille auf den aktuellen Wert abgesenkt wurde.

Das gezillmerte Deckungskapital nach m Jahren wird mit ${}_m V_x^Z$ notiert.

Bei Vertragsbeginn, d.h. für $m = 0$, ist (wegen $\alpha^Z = \alpha$)

$${}_0 V_x^Z = -\alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\overline{t}} < 0 .$$

Für $0 < m < t$ ergibt sich die Zillmerreserve als

$$\begin{aligned} {}_m V_x^Z &= NEP_{x+m:\overline{n-m}} - NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \\ &= {}_m V_x^{\text{Netto, prospl}} - \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\overline{t}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} , \end{aligned}$$

und für $t \leq m \leq n$ ist

$${}_m V_x^Z = {}_m V_x^{\text{Netto, prospl}} .$$

9.2.4 Bruttodeckungskapital

Das **Bruttodeckungskapital** – oder **ausreichendes Deckungskapital** – wird auf Basis der Bruttoprämie berechnet und berücksichtigt neben den Leistungen auch sämtliche Kosten, die während der Vertragsdauer (kalkulatorisch) anfallen. Für Rentenversicherungen bedeutet dies, dass im Leistungsbarwert (und folglich in der Prämie) nun auch die Verwaltungskosten im Rentenbezug (γ_4) eingerechnet werden.

Im Gegensatz zum Nettodeckungskapital, welches prospektiv und retrospektiv ermittelt werden kann, ist beim Bruttodeckungskapital nur die prospektive Sichtweise sinnvoll. Diese führt zu dem Ansatz

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Brutto, prosp}} = & E[\text{Barwert der zukünftigen Leistungen}] \\ & + E[\text{Barwert der zukünftigen Kosten}] \\ & - E[\text{Barwert der zukünftigen (Brutto)Prämien}]. \end{aligned}$$

Falls $t = n$, d.h., falls die Beitragszahlungsdauer genauso lang ist wie die Versicherungs- oder Aufschubdauer, werden die Verwaltungskosten über die durchgängig gezahlten (Brutto-)Prämien beglichen. Im Falle einer abgekürzten Beitragszahlung, d.h. $t < n$, wie sie insbesondere bei Einmalbeiträgen vorkommt, müssen die gesamten, über n Jahre anfallenden Verwaltungskosten bereits mit den Prämien innerhalb der ersten t Vertragsjahre bezahlt werden. Bezogen auf die Kosten bedeutet dies jedoch, dass in der beitragspflichtigen Phase ein höherer Kostenanteil zu zahlen ist. Dieser Mehrbeitrag wird zum Aufbau einer **Verwaltungskostenreserve** verwendet, welche zur Deckung der in den $n-t$ beitragsfreien Jahren (ohne eingehende Prämien) anfallenden Verwaltungskosten dient und in diesem Zeitraum demnach wieder abgebaut wird. Die Verwaltungskostenreserve nach m Jahren notieren wir mit ${}_m U_x$.

Bevor wir das Bruttodeckungskapital herleiten, betrachten wir zunächst noch einmal die Bruttoprämie. Anstelle der geschlossenen Darstellung für $BP_{x:\bar{t}}$ aus Abschn. 8.2.3 ist es sinnvoller, die vorausgehende Bestimmungsgleichung (im selben Abschnitt) zu verwenden, d.h.

$$\begin{aligned} BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} &= NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \beta \cdot BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Durch Erweiterung von Gleichung (9.4) mit $\frac{\ddot{a}_{x+m:t-m}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}}$ gilt allgemeiner für $0 \leq m \leq t$:

$$\begin{aligned} BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} &= NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \\ &\quad + \beta \cdot BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} - 1 \right) \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}. \end{aligned}$$

Nun leiten wir das Bruttodeckungskapital her. Für $m = 0$ sind die einmaligen Abschlusskosten $\alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}$ bereits angefallen, so dass sie in der zukunftsgerichteten Betrachtung nicht mehr berücksichtigt werden. Somit ist

$$\begin{aligned} {}_0V_x^{\text{Brutto, prospl}} &= NEP_{x:\bar{n}} + \beta \cdot BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x:\bar{t}}) - BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}}. \end{aligned}$$

Aufgrund von Gleichung (9.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_0V_x^{\text{Brutto, prospl}} &= NEP_{x:\bar{n}} - NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &= {}_0V_x^Z. \end{aligned}$$

Während der beitragspflichtigen Zeit (d.h. $0 < m \leq t \leq n$) hat man die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\text{Brutto, prospl}} &= NEP_{x+m:\overline{n-m}} + \beta \cdot BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \\ &\quad + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot \left(\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} - \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \right) - BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}. \end{aligned}$$

Die allgemeinere Gleichung liefert

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\text{Brutto, prospl}} &= NEP_{x+m:\overline{n-m}} - NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} - \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot \left(\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} - \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \right) \\ &\quad - \gamma_2 \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} - 1 \right) \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \\ &= {}_mV_x^Z + \gamma_2 \cdot \left(\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} - \frac{\ddot{a}_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \right). \end{aligned}$$

In der tariflich beitragsfreien Zeit (d.h. $t \leq m < n$) ist schließlich

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{\text{Brutto, prospl}} &= NEP_{x+m:\overline{n-m}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} \\ &= {}_mV_x^{\text{Netto, prospl}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}. \end{aligned}$$

Bei planmäßigem Vertragsverlauf lässt sich die Verwaltungskostenreserve definieren als

$${}_mU_x := \begin{cases} 0 & \text{falls } t = n \text{ oder } m \geq n, \\ \gamma_2 \cdot \left(\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \right) & \text{falls } t < n \text{ und } 0 \leq m < t, \\ \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} & \text{falls } t < n \text{ und } t \leq m < n. \end{cases} \quad (9.5)$$

Wird die Versicherung zum Zeitpunkt m_{vbfr} vorzeitig beitragsfrei gestellt, berechnet sich die Verwaltungskostenreserve mit dem abweichenden Kosten- satz γ_3 , so dass für alle $m_{vbfr} \leq m < n$

$${}_mU_x := \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}.$$

Abgesehen von einer evtl. Berücksichtigung der γ_4 -Kosten innerhalb der Rentenbezugsphase gilt für das Bruttodeckungskapital für alle Zeitpunkte m die Beziehung

$${}_mV_x^{\text{Brutto, prosp}} = {}_mV_x^Z + {}_mU_x.$$

Sofern nichts anderes erwähnt ist, setzen wir fortan

$${}_mV_x := {}_mV_x^{\text{Brutto, prosp}}$$

und schreiben kurz $_mV_x$ für das (Brutto-)Deckungskapital.

9.2.4.1 Rekursive Berechnung

Die Fortschreibung des Bruttodeckungskapitals vom Zeitpunkt $m-1$ zum Zeitpunkt m entspricht grundsätzlich derjenigen des Nettodeckungskapitals, wobei neben der Bruttoprämie zusätzlich die einkalkulierten Kosten berücksichtigt werden:

1. Zu Beginn des m -ten Versicherungsjahres sind l_{x+m-1} Lebende des Alters $x+m-1$ vorhanden, und für jede dieser Personen wird ein Bruttodeckungskapital in Höhe von ${}_mV_x^{\text{Brutto}}$ gestellt.
2. Die l_{x+m-1} Individuen entrichten am Jahresanfang jeweils eine Bruttoprämie in Höhe von

$$BP_m = \begin{cases} BP_{x:\overline{t}} & \text{falls } 1 \leq m \leq t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Für die l_{x+m-1} Lebenden werden zu Beginn des Versicherungsjahres m die individuellen anfallenden Kosten KP_m entnommen.

4. Darüber hinaus wird wiederum eine Erlebensfallleistung in Höhe von EFL_{m-1} pro Person l_{x+m-1} fällig.
5. Anschließend wird der verbleibende Betrag (rechnungsmäßig) mit dem Rechnungszinssatz i verzinst.
6. Für die im Jahr m verstorbenen d_{x+m-1} Personen wird am Jahresende jeweils eine Todesfallleistung in Höhe von TFL_m gezahlt.
7. Schließlich verbleibt für die l_{x+m} Überlebenden jeweils ein Bruttodeckungskapital in Höhe von ${}_{m+1}V_x^{\text{Brutto}}$.

Die Fortschreibung kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} & l_{x+m-1} \cdot {}_{m-1}V_x^{\text{Brutto}} \\ & + l_{x+m-1} \cdot BP_m \\ & - l_{x+m-1} \cdot KP_m \\ & - l_{x+m-1} \cdot EFL_{m-1} \\ & + i \cdot l_{x+m-1} \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Brutto}} + BP_m - KP_m - EFL_{m-1}) \\ & - d_{x+m-1} \cdot TFL_m \\ \hline & = l_{x+m} \cdot {}_mV_x^{\text{Brutto}} \end{aligned}$$

Dies lässt sich umschreiben als

$$\begin{aligned} & l_{x+m} \cdot {}_mV_x^{\text{Brutto}} \\ & = (1+i) \cdot l_{x+m-1} \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Brutto}} + BP_m - KP_m - EFL_{m-1}) \\ & \quad - d_{x+m-1} \cdot TFL_m, \end{aligned}$$

und nach Division durch l_{x+m-1} ergibt sich für das Bruttodeckungskapital wieder die **versicherungsmathematische Bilanzgleichung**

$${}_mV_x^{\text{Brutto}} = \frac{(1+i)}{p_{x+m-1}} \cdot ({}_{m-1}V_x^{\text{Brutto}} + BP_m - KP_m - EFL_{m-1} - v \cdot q_{x+m-1} \cdot TFL_m). \quad (9.6)$$

9.2.4.2 Beitragszerlegung

Aus der rekursiven Fortschreibung des Bruttodeckungskapitals kann wiederum eine Beitragszerlegung abgeleitet werden. Durch Multiplikation mit dem Diskonfaktor v und anschließender Umordnung der Gleichungsterme erhält man für die Bruttoprämie BP_m im m -ten Versicherungsjahr die folgende Aufteilung:

$$BP_m = RP_m + SP_m + KP_m.$$

Die von der Zerlegung der Nettoprämie bekannte Risiko- sowie Sparprämie sind selbstverständlich auch in der Bruttoprämie enthalten. Sie werden jedoch auf Basis des Bruttodeckungskapitals ermittelt, so dass

$$RP_m = v \cdot q_{x+m-1} \cdot (TFL_m - {}_m V_x^{\text{Brutto}})$$

und

$$SP_m = v \cdot {}_m V_x^{\text{Brutto}} - {}_{m-1} V_x^{\text{Brutto}} + EFL_{m-1}$$

ist.

Zusätzlich gibt es eine Kostenprämie KP_m , welche zur Deckung der anfallenden Abschluss- und Verwaltungskosten dient. In dem als Standard definierten, bislang verwendeten Kostenmodell und einer versicherten Leistung der Höhe 1 entspricht diese Kostenprämie der Summe

$$KP_m = \beta \cdot BP_{x:\overline{t}} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) + \gamma_2 \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} - 1 \right).$$

Wie bereits im Zusammenhang mit der Nettoprämie erwähnt, sind die Bestandteile der Bruttoprämie auch für Zeiträume ohne eingehende Prämienzahlung definiert, indem diese aus dem Deckungskapital finanziert werden. Für die Kostenprämie bedeutet dies, dass in der planmäßig beitragsfreien Zeit

$$KP_m = \gamma_2 ,$$

nach vorzeitiger Beitragsfreistellung

$$KP_m = \gamma_3$$

und in der Rentenbezugsphase

$$KP_m = \gamma_4 .$$

9.2.4.3 Negatives Deckungskapital

Abgesehen von der Zillmerung, welche zu einem negativen Deckungskapital in den ersten Vertragsjahren führt, kann das Deckungskapital auch in anderen Konstellationen negativ sein. Insbesondere bei Risikolebensversicherungen mit fallender Todesfallleistung tritt nicht selten das Phänomen auf, dass das Deckungskapital phasenweise unterhalb der Nulllinie verläuft. Bei Berufsunfähigkeitsversicherungen (siehe Kap. 14) ist es ebenfalls möglich, dass das Deckungskapital gegen Ende der Versicherungsdauer negativ wird, da mit zunehmendem Alter der VP die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt des Versicherungsfalls stark ansteigen.

Ein negatives Deckungskapital stellt immer eine Forderung des VU gegenüber dem VN dar. Würde sich der Kunde zu diesem Zeitpunkt für eine Beitragsfreistellung oder die Kündigung des Vertrags entscheiden, fehlten dem VU ggf. noch notwendige Prämien (z.B. für ein bereits während der bisher abgelaufenen Dauer getragenes höheres Risiko), um das Deckungskapital wieder auszugleichen, und das VU würde einen versicherungstechnischen Verlust erleiden.

Als eine Möglichkeit zur Vermeidung eines negativen Deckungskapitals kann bspw. die Prämienzahlungsdauer begrenzt werden, so dass die zu zahlenden Prämien die erwarteten Risikokosten des Versicherers übersteigen und dieser eine (positive) Reserve aufbauen kann.

9.3 Bilanzdeckungsrückstellung

Das Deckungskapital mV_x ($= mV_x^{\text{Brutto, prosp}}$) einer Versicherung wird jeweils zum Versicherungsstichtag, d.h. am Ende eines jeden Versicherungsjahres, berechnet. Die Bilanzdeckungsrückstellung mV_x^{Bilanz} hingegen wird am Bilanzstichtag, also i.d.R. am Ende des Kalenderjahres, benötigt und wird durch lineare Interpolation der beiden „benachbarten“ Deckungskapitalien ermittelt.

Da in der Bilanz gemäß § 246 HGB keine negative Reserve ausgewiesen wird, ist das Deckungskapital zunächst mit Null zu maximieren, was zu der Zwischengröße

$$mV'_x := \max \{0; mV_x\}$$

führt. Ein durch die Anhebung auf Null entstehender Fehlbetrag wird – sofern er auf der Zillmerung beruht – in der Bilanz auf der Aktivseite unter den „Forderungen aus dem selbst abgeschlossenen Versicherungsgeschäft“ innerhalb der Position „noch nicht fällige Ansprüche an den Versicherungsnehmer“ ausgewiesen.

Sofern der gesetzliche oder vertragliche Rückkaufswert (siehe Abschn. 11.4) größer als die gemäß § 341f HGB ermittelte Deckungsrückstellung ist, bedarf es nach § 25 RechVersV einer weiteren Anhebung auf eben diesen Rückkaufswert, so dass

$$mV''_x := \max \{RKW_m^{\text{gar}}; mV'_x\} .$$

Dabei repräsentiert der Term RKW_m^{gar} den Rückkaufswert für die garantierte Leistung.

Bezeichnet h den Monat des Versicherungsstichtags, d.h. $h \in \{1; 2; \dots; 12\}$, so berechnet sich die Bilanzdeckungsrückstellung im m -ten Versicherungsjahr (mit $m = 1, \dots, n$) als

$${}_m V_x^{\text{Bilanz}} := {}_{m-1} V_x'' + \frac{13-h}{12} \cdot ({}_m V_x'' - {}_{m-1} V_x'')$$

bzw.

$${}_m V_x^{\text{Bilanz}} := \frac{h-1}{12} \cdot {}_{m-1} V_x'' + \frac{13-h}{12} \cdot {}_m V_x'' .$$

9.4 Zusätzliche Reserven

Wie eingangs in Abschn. 9.1 ausgeführt hat das VU hinreichend hohe Reserven für die Erfüllbarkeit seiner Verpflichtungen zu stellen. Ob die Reserven ausreichen und angemessen sind, ist durch den Verantwortlichen Aktuar regelmäßig zu überprüfen. Sofern festgestellt wird, dass die Deckungsrückstellung aufgrund veränderter Rahmenbedingungen zu niedrig ist, besteht Handlungsbedarf. Da die mit dem Kunden vereinbarte Prämie gemäß § 163 VVG jedoch nicht angepasst werden kann, muss das VU die Deckungsrückstellung durch Stellen eines zusätzlichen Kapitals auffüllen; es wird eine sog. **Nachreservierung** durchgeführt.

Die Notwendigkeit einer Nachreservierung kann verschiedene Ursachen haben. Auffüllungsbedarf entsteht insbesondere dann, wenn sich eine oder auch mehrere der Rechnungsgrundlagen für die Reserveberechnung im Zeitablauf grundlegend ändern. Auf Basis der aktuelleren Rechnungsgrundlagen wird die Deckungsrückstellung – unter Verwendung der bisherigen Prämie – neu berechnet. Die Differenz aus dieser erwartungsgemäß höheren und der bisherigen Originaldeckungsrückstellung entspricht dann dem **Auffüllkapital**.

9.4.1 Rentennachreservierung

Aufgrund der anhaltenden Sterblichkeitsverbesserungen ist die Lebenserwartung in Deutschland in den vergangenen Jahrzehnten kontinuierlich angestiegen. Für Rentenversicherungen mit lebenslanger Rentenleistung hat dies zur Folge, dass die Renten tendenziell länger zu zahlen sind als früher, da die Versicherten im Durchschnitt immer länger leben.

Die Einführung aktueller Tafeln für neu abzuschließende Versicherungen mit Erlebensfallcharakter führt in der Regel gleichzeitig zu einem Anhebungsbedarf der Deckungsrückstellungen von bereits bestehenden Verträgen.

Bislang gab es in Deutschland zwei branchenweite Reserveauffüllungen aufgrund biometrischer Änderungen, welche als **Rentennachreservierung** (kurz: **RNR**) bezeichnet werden.

Zunächst erfolgte Mitte der 1990er-Jahre ein Übergang von älteren Tafeln, bspw. DAV 1987 R, auf die Sterbetafel DAV 1994 R. Allerdings erwies sich auch diese Tafel im Laufe des folgenden Jahrzehnts als nicht mehr ausreichend sicher bzw. vorsichtig, so dass für das Neugeschäft seit dem Jahr 2005 die Sterbetafel DAV 2004 R (siehe Abschn. 5.2.5.2) verwendet wird. Für bereits im Bestand befindliche Versicherungen erfolgt seit Ende 2004 eine schrittweise Reserveanhebung mittels eigens für diesen Zweck bereitgestellter Tafeln DAV 2004 R-Bestand bzw. – entsprechend des mit 20 Jahren veranschlagten Übergangszeitraums – mittels der Tafeln DAV 2004 R-B01 bis DAV 2004 R-B20.

Bei der Berechnung des benötigten Auffüllbedarfs (für aufgeschobene Rentenversicherungen) werden auch Stornowahrscheinlichkeiten angesetzt. Eine ausführliche Begründung findet sich in einer DAV-Richtlinie (siehe *DAV (2005b)*). Die Anhebung der Reserve ist im Langlebigkeitsrisiko begründet und zielt somit auf die Rentenbezugsphase ab. Sofern der VN jedoch während der Aufschubzeit kündigt oder bei Rentenübergang die Kapitalabfindung wählt, entfällt die Notwendigkeit für eine Auffüllung. Folglich bedarf es einer Auffüllung nur für diejenigen Verträge, die erwartungsgemäß auch tatsächlich in den Rentenbezug übergehen. Durch die Einrechnung von Kündigungs- und Kapitalwahlwahrscheinlichkeiten (2. Ordnung) lässt sich der Nachreservierungsbedarf entsprechend reduzieren.

Anhand einer aufgeschobenen Rentenversicherung mit normierter Jahresrente 1, jährlicher Prämien- und Rentenzahlweise (ohne sonstige Besonderheiten wie Rentengarantiezeit oder Beitragsrückgewähr) soll das Vorgehen zur Ermittlung des Nachreservierungsbedarfs dargestellt werden. Wir betrachten die Nachreservierung auf die Sterbetafel DAV 2004 R, und der Index *RNR* deute im Folgenden an, dass die jeweilige Größe auf Basis dieser Sterbetafel berechnet wurde. Der Rechnungszins i bleibt hingegen unverändert.

Das Deckungskapital $_m V_x$ nach m Jahren, berechnet mit den originären Rechnungsgrundlagen des Vertrags, hat die bekannte Form

$${}_m V_x = \begin{cases} (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} - NP_{x:t}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} & \text{falls } 0 \leq m < t , \\ (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} & \text{falls } t \leq m < n , \\ (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+m} & \text{falls } m \geq n . \end{cases}$$

Dabei wird der Faktor $(1 + \gamma_4)$ auch in der Zillmerprämie berücksichtigt.

Das Deckungskapital ${}_m V_x^{\text{RNR}}$ nach m Jahren, welches auf Basis der Nachreservierungstafel berechnet wird, hat dann die Gestalt

$${}_m V_x^{\text{RNR}} = \begin{cases} (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m}^{\text{RNR}} - NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}^{\text{RNR}}| & \text{falls } 0 \leq m < t, \\ (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m}^{\text{RNR}}| & \text{falls } t \leq m < n, \\ (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+m}^{\text{RNR}} & \text{falls } m \geq n. \end{cases}$$

Bezeichne KW_m^{RNR} den Anteil Verträge, der vom Zeitpunkt m an bis zum Beginn der Rentenbezugsphase erwartungsgemäß abgehen wird (aufgrund von Vertragsstorno während der Aufschubphase oder durch Ausübung des Kapitalwahlrechts bei Rentenübergang). Für $m > n$ gilt $KW_m^{\text{RNR}} = 0$.

Unter Berücksichtigung dieser angenommenen Abgänge kann das **Auffüllkapital aufgrund Biometrie** definiert werden als

$$AK_m^{\text{Biometrie}} := \max \{ {}_m V_x^{\text{RNR}} - {}_m V_x ; 0 \} \cdot (1 - KW_m^{\text{RNR}}).$$

9.4.2 Zinszusatzreserve

Nicht nur Änderungen der biometrischen Rechnungsgrundlagen, sondern auch Änderungen des Marktzinsniveaus können die Bildung einer zusätzlichen Reserve erfordern.

Der Versicherer garantiert dem Kunden bei Vertragsabschluss eine Verzinsung zu einem bestimmten Zinssatz, nämlich dem Rechnungszins. Diese Garantie gilt für die gesamte Dauer der Versicherung. Ändern sich während dieses langen Zeitraums nun die Bedingungen am Kapitalmarkt derart, dass das VU diesen von ihm garantierten Zins nicht mehr erwirtschaften kann, ergibt sich ein Auffüllbedarf, welcher durch eine **Zinszusatzreserve** (kurz: **ZZR**) gedeckt wird.

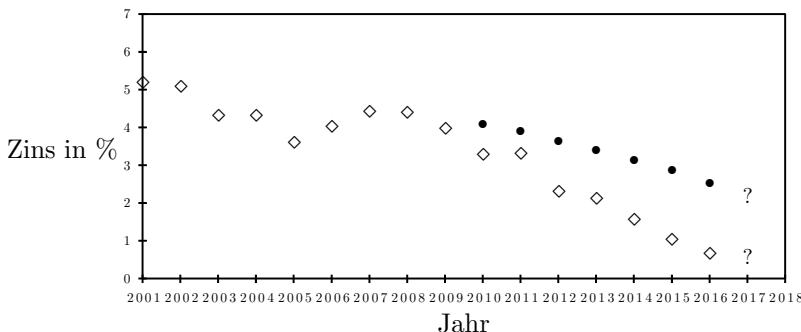
Im Jahr 2011 wurde die Zinszusatzreserve in der aktuellen Form gesetzlich verankert. Neben § 341f HGB ist insbesondere § 5 DeckRV, welcher die versicherungsmathematischen Rechnungsgrundlagen für die Deckungsrückstellung darlegt, maßgeblich. Danach basiert die Fragestellung, ob eine ZZR zu stellen ist, auf dem Vergleich zweier Zinssätze, nämlich dem Rechnungszins sowie einem vorgegebenen **Referenzzins**.

Als Referenzzinssatz wird ein arithmetisch gemittelter Zinssatz aus den jeweils vergangenen zehn Kalenderjahren berechnet. Seit dem LVRG basiert dieser Mittelwert auf Null-Kupon-Euro-Zinsswapsätzen mit einer Laufzeit

von zehn Jahren, zuvor wurden Umlaufrenditen von europäischen Staatsanleihen mit höchster Bonität und einer Restlaufzeit von zehn Jahren herangezogen.

Wenn der Rechnungszins i größer ist als besagter Referenzzins i_{ref} , dann ist eine ZZR zu bilden. Dieser Abgleich hat jährlich zum Bilanzstichtag und auf einzelvertraglicher Ebene zu erfolgen. Die ZZR ergibt sich als Differenz aus einem **Referenz-Deckungskapital** und dem originären Deckungskapital des einzelnen Vertrags. Dabei wird das Referenz-Deckungskapital derart berechnet, dass für die Restlaufzeit des Vertrags (ab dem Bilanzstichtag) der Rechnungszins für den Zeitraum der nächsten 15 Jahre durch das Minimum aus Referenz- und Rechnungszins ersetzt wird und danach wieder der Rechnungszins angesetzt wird. Je größer die Differenz $i - i_{\text{ref}}$ ist, desto größer fällt die ZZR aus. Falls der Referenzzins größer als der Rechnungszins ist, stimmen Referenz- und Original-Deckungsrückstellung überein, und die Zusatzreserve verschwindet. Der Ansatz von 15 Jahren für den Referenzzins beruht auf der Annahme, dass eine Niedrigzinsphase spätestens nach diesem Zeitraum wieder vorüber ist.

Die Entwicklung des Referenzzinssatzes (\bullet) und der in seine Berechnung einfließenden Basiszinssätze (\diamond) ist in der folgenden Grafik dargestellt:



Es zeigt sich deutlich, dass der jährlich ermittelte Referenzzinssatz seit Einführung der ZZR kontinuierlich gesunken ist. Ende 2015 betrug der Referenzzins $i_{\text{ref}} = 2,88\%$, ein Jahr später lag sein Wert bereits bei $i_{\text{ref}} = 2,54\%$. Folglich sind immer mehr Rechnungszins-Generationen von der Notwendigkeit betroffen, eine ZZR vorzuhalten. Gleichzeitig wird der Auffüllbedarf für höhere Rechnungszinsen immer größer, so dass die Zinsverstärkung derzeit immer weiter aufgestockt werden muss und insgesamt ein beachtliches Volumen erreicht.

Vor diesem Hintergrund existieren inzwischen diverse, von der Aufsichtsbehörde BaFin erlaubte bzw. genehmigungsfähige Maßnahmen, um den steigenden Nachreservierungsbedarf abzumildern und die Dotierung der ZZR zu erleichtern.

Die Anwendung eines oder mehrerer der folgenden Hilfsmittel wird auch als **Rekalibrierung** der ZZR bezeichnet:

- Da erfahrungsgemäß ein deutlicher Teil der Verträge vor dem vereinbarten Ablauf bzw. vor dem Erreichen der Rentenbezugsphase gekündigt wird, können – wie von der Rentennachreservierung bekannt – Storno- und Kapitalwahrscheinlichkeiten angesetzt werden. Dies ist für alle Arten von Versicherungen möglich, nicht nur für aufgeschobene Rentenversicherungen, und die verwendeten Abgangswahrscheinlichkeiten unterscheiden sich i.d.R. von denjenigen im Rahmen der RNR.

Die Berücksichtigung von Stornowahrscheinlichkeiten kann auf zwei Wege erfolgen. Entweder wird der ermittelte Aufzählpunkt pauschal (und somit analog zur RNR) mit einem Faktor $(1 - KW_m^{ZZR})$ multipliziert. Oder die Stornowahrscheinlichkeiten fließen detailliert in die Berechnung des Referenz-Deckungskapitals ein, indem Storno (neben der Sterblichkeit) als zusätzliche Ausscheideursache betrachtet und über veränderte Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung abgebildet wird (analog zu Abschn. 5.3.3).

- Aufgrund der im Zeitablauf immer weiter sinkenden Sterblichkeit vergrößern sich die in Sterbetafeln mit Todesfallcharakter enthaltenen Sicherheitszuschläge. Für Kapital- und Risikolebensversicherungen mit älteren Tafeln (d.h. vor Einführung der DAV 2008 T) eröffnet dies die Möglichkeit, die wachsenden Sterblichkeitsgewinne vorwegzunehmen, indem bei der Berechnung des Referenz-Deckungskapitals die originäre Sterbetafel durch eine weniger vorsichtige ausgetauscht wird, deren enthaltene Sicherheitsmargen aber nach wie vor angemessen hoch sind.
- Ähnliche Überlegungen wie zur Anpassung der biometrischen Rechnungsgrundlagen können auch für die Kosten angestellt werden, indem bei der Berechnung des Referenz-Deckungskapitals abweichende Kostensätze mit niedrigeren Gewinnmargen angesetzt werden.

In allen Fällen ist sicherzustellen, dass die Deckungsrückstellung eines einzelnen Vertrags durch die ZZR nicht niedriger wird, d.h., eine negative ZZR ist mit Null zu maximieren. Außerdem ist bei der biometrischen Rekalibrierung zu beachten, dass die Reduktion der ZZR, welche aus dem Austausch der Sterbetafel resultiert, eine Erhöhung der ZZR aufgrund eines gesunkenen Referenzzinses nicht überkompensiert.

Während sich die „neuen“ Barwerte bei einer Rentennachreservierung einfach durch Austauschen der Sterbetafel ergeben, besteht bei der Zinszusatzreserve die Notwendigkeit, zu jedem Zeitpunkt m die Barwerte unter Verwendung des Zinsvektors $(\underbrace{i_{ref}, \dots, i_{ref}}_{15 \text{ Jahre}}, i, \dots)^T$ zu ermitteln.

Dies hat zur Folge, dass ihre Berechnung deutlich aufwändiger als vorher ist. Möglich ist es, die Barwerte in zwei Teile zu zerlegen, einen für den Zeitraum von 15 Jahren und einen für die verbleibende Versicherungsdauer. Alternativ

kann aber auch eine rekursive Berechnung erfolgen, entweder auf Basis der Rekursionsgleichungen für die Barwerte selbst (siehe Abschn. 6.4), oder man nutzt direkt die Rekursionsgleichung (9.6) für das Deckungskapital.

Anhand einer gemischten Versicherung mit normierter Leistung 1 und jährlicher Prämienzahlweise soll das Vorgehen zur Ermittlung der Zinszusatzreserve dargestellt werden. Der Index ZZR deutet an, dass die Größe unter Verwendung des (für die nächsten 15 Jahre angesetzten) Referenzzinses berechnet wurde. Die Sterblichkeiten (1. Ordnung) q_x bleiben hingegen unverändert. Eine Rekalibrierung erfolgt durch pauschale Berücksichtigung der in der Zukunft erwarteten Storni.

Das Deckungskapital ${}_mV_x$ nach m Jahren, berechnet mit den originären Rechnungsgrundlagen des Vertrags, lautet

$${}_mV_x = \begin{cases} A_{x+m:\overline{n-m}} - NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} & \text{falls } 0 \leq m < t, \\ A_{x+m:\overline{n-m}} & \text{falls } t \leq m \leq n. \end{cases}$$

Das Referenz-Deckungskapital ${}_mV_x^{ZZR}$ nach m Jahren, welches auf Basis des für die nächsten 15 Jahre angesetzten Referenzzinses berechnet wird, lässt sich schreiben als

$${}_mV_x^{ZZR} = \begin{cases} A_{x+m:\overline{n-m}}^{ZZR} - NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}^{ZZR} & \text{falls } 0 \leq m < t, \\ A_{x+m:\overline{n-m}}^{ZZR} & \text{falls } t \leq m \leq n. \end{cases}$$

Bezeichne wiederum KW_m^{ZZR} den Anteil Verträge, der vom Zeitpunkt m an bis zum Vertragsablauf (aufgrund von Kündigung) erwartungsgemäß abgehen wird. Für $m \geq n$ gilt $KW_m^{ZZR} = 0$.

Das **Auffüllkapital aufgrund Zins** kann somit dargestellt werden als

$$AK_m^{\text{Zins}} := \max \{ {}_mV_x^{ZZR} - {}_mV_x ; 0 \} \cdot (1 - KW_m^{ZZR}) .$$

Sofern zu einem (Rentenversicherungs-)Vertrag bereits eine Rentennachversicherung durchgeführt wurde, ist für diese zusätzliche Reserve ebenfalls eine Zinszusatzreserve zu ermitteln. Man hat quasi auch eine ZZR auf die RNR. Ausgehend vom originären Deckungskapital ${}_mV_x$ hat man also drei zusätzliche Referenz-Deckungskapitale zu betrachten, nämlich ${}_mV_x^{\text{RNR}}$, ${}_mV_x^{ZZR}$ und auch ${}_mV_x^{\text{RNR, ZZR}}$.

Die Veränderungen der Zinszusatzreserve, d.h. Aufwände durch die Erhöhung oder Erträge durch den Abbau der ZZR, werden als rechnungsmäßige Zinsen erfasst.

Eng verbunden mit der ZZR ist der **Sicherungsbedarf**. Dieser Begriff wurde mit dem LVRG im Zuge einer Neuregelung zu den Bewertungsreserven (siehe Abschn. 10.2.3) eingeführt und ist in § 139 VAG verankert.

Beim Sicherungsbedarf handelt es sich näherungsweise um denjenigen Betrag, den ein VU zusätzlich benötigt, um die gegebenen Zinsgarantien sicher erfüllen zu können. Der Unterschied zur ZZR besteht darin, dass diese Größe nicht auf Basis des Referenzzinses berechnet wird, sondern auf Basis des jeweils aktuellen Bezugszinses. Dieser **Bezugszinssatz** entspricht dem Monatsendstand des zehnjährigen Null-Kupon-Euro-Zinsswapsatzes, also demjenigen Zinssatz, welcher zum Berechnungszeitpunkt aktuell am Kapitalmarkt sicher erzielt werden kann. Der Sicherungsbedarf sollte daher i.d.R. monatlich berechnet werden, mindestens jedoch einmal pro Kalenderjahr.

9.4.3 Auffüllung aufgrund abweichender Prämien-Rechnungsgrundlagen

Während für die Berechnung der Deckungsrückstellung maximal der Höchstrechnungszins angesetzt werden darf, können die Prämien durchaus auf Basis eines höheren Zinssatzes kalkuliert werden.

Bezeichne i_{Reserve} den (Rechnungs-)Zinssatz für die Reserveberechnung und $i_{\text{Prämie}} > i_{\text{Reserve}}$ den Zinssatz, welcher bei der Prämienkalkulation verwendet wird. Die übrigen Rechnungsgrundlagen (Biometrie und Kosten) seien unverändert bzw. identisch. Auch in dieser Situation entsteht ein Auffüllbedarf, und zwar nicht erst im Laufe der Versicherungsdauer, sondern bereits von Vertragsbeginn an.

Wir betrachten die nachfolgenden Größen jeweils in Abhängigkeit vom Zins. Da der höhere Zinssatz $i_{\text{Prämie}}$ eine stärkere Diskontierung bewirkt, gilt für die Bruttoprämie

$$BP^{\text{Prämie}} := BP_{x:\bar{t}}(i_{\text{Prämie}}) < BP_{x:\bar{t}}(i_{\text{Reserve}}) =: BP^{\text{Reserve}} .$$

Die Deckungsrückstellung, welche auf Basis von i_{Reserve} zu berechnen ist, wird auf Basis der tatsächlich zur Verfügung stehenden Prämie $BP^{\text{Prämie}}$ ermittelt, und das Ergebnis sei mit ${}_mV_x^{\text{Prämie}}$ bezeichnet. Verwendet man zum Vergleich die höhere, auf dem Rechnungszins basierende Prämie BP^{Reserve} , so ist die sich ergebende Deckungsrückstellung ${}_mV_x^{\text{Reserve}}$ kleiner, da der in Abzug zu bringende, erwartete Barwert der zukünftigen Prämien aufgrund der höheren Prämie größer ist.

Die Entscheidung für einen höheren Zins im Rahmen der Prämienberechnung führt somit zu einer höheren Deckungsrückstellung als eigentlich nötig, d.h. als wenn man in Prämien- und Reserveberechnung konsistent denselben Zins wählen würde.

Das Auffüllkapital entspricht der Differenz

$$AK_m := \max \left\{ {}_m V_x^{\text{Prämie}} - {}_m V_x^{\text{Reserve}} ; 0 \right\} .$$

9.4.4 Rentenüberträge

Analog zu Beitragsüberträgen gibt es bei fälligen Rentenleistungen auch sog. Rentenüberträge. Die Ausführungen aus Abschn. 8.3.4 bzgl. der Abgrenzung zwischen Versicherungs- und Kalenderjahr gelten gleichermaßen auch für gezahlte Renten.

Bezeichne $h \in \{1; 2; \dots; 12\}$ wieder den Monat des Versicherungsstichtags. Repräsentiert $\Delta(k)$ – abhängig von der Rentenzahlweise k – die Anzahl derjenigen Monate des laufenden Versicherungsjahres, für welche die Jahresrente JR noch nicht fällig geworden ist, so beschreibt der Ausdruck

$$JR \cdot \frac{h - \Delta(k) - 1}{12}$$

den Rentenübertrag. Der Quotient sorgt dafür, dass von der letzten, vor dem Bilanztermin gezahlten Jahresrente entsprechend ihrer Zahlweise diejenigen Teile, die auf das nächste Geschäftsjahr entfallen, auch erst zum nächsten Bilanzstichtag berücksichtigt werden.

Rentenüberträge werden zusammen mit den eigentlichen Beitragssüberträgen in der gemeinsamen Bilanzgröße „Beitragssüberträge“ ausgewiesen. Dabei handelt es sich zwar nicht um eine zusätzliche Reserve, aber sie haben den Charakter einer Rückstellung, so dass sie hier aufgeführt wurden.

9.5 Übungen

9.5.1 Aufgaben

Übung 48. Wir betrachten eine lebenslange Risikolebensversicherung mit Versicherungssumme 1 und lebenslanger Prämienzahlungsdauer. Zeigen Sie, dass das Nettodeckungskapital gegeben ist durch

$${}_m V_x^{\text{Netto}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} .$$

Übung 49. Wir betrachten eine um n Jahre aufgeschobene lebenslange Leibrente der Jahreshöhe 1. Eine Beitragsrückgewähr oder eine Rentengarantiezeit ist nicht eingeschlossen, und für die Prämienzahlungsdauer gilt $t = n$. Wir nehmen an, dass die Rechnungsgrundlagen für die Prämien- und für die Reserveberechnung übereinstimmen. Zeigen Sie, dass prospektives und retrospektives Deckungskapital dieser Versicherung übereinstimmen.

Übung 50. Geben Sie das prospektive Nettodeckungskapital für eine Termfix-Versicherung mit Versicherungsdauer n und Prämienzahlungsdauer $t = n$ für alle möglichen Vertragszustände an.

Übung 51. Wir betrachten noch einmal die Teilauszahlungsversicherung aus Übungsaufgabe 46. Konkret sei nun: Eintrittsalter 35 Jahre, Geschlecht männlich, Versicherungssumme 10.000 EUR, Rechnungszins 2%, Sterbetafel DAV 2008 T.

1. Geben Sie das prospektive Nettodeckungskapital ${}_m V_x^{\text{Netto, prosp}}$ dieser Versicherung für $m \in \{9; 10; 11\}$ an.
2. Verwenden Sie die Rekursionsgleichung (9.2), um das Nettodeckungskapital nach $m = 11$ Jahren aus demjenigen nach $m = 10$ Jahren herzuleiten.

Übung 52. Ein 30-jähriger Mann schließt eine gemischte Kapitallebensversicherung ab. Die Laufzeit beträgt 35 Jahre, ebenso die Prämienzahlungsdauer. Es ist eine Todes- und Erlebensfallsumme von 50.000 EUR versichert. Der Rechnungszins dieser Versicherung beträgt 2%. Verwenden Sie die Sterbetafel DAV 2008 T.

1. Berechnen Sie das Nettodeckungskapital nach $m = 5$ und $m = 6$ Jahren.
2. Leiten Sie durch Verwendung der Rekursionsgleichung (9.2) das Nettodeckungskapital nach $m = 6$ Jahren aus demjenigen nach $m = 5$ Jahren her.
3. Wie hoch sind die Spar- und die Risikoprämie zu Beginn des sechsten Versicherungsjahres (d.h. zum Zeitpunkt $m = 5$)?

Übung 53. Eine 30-jährige Frau möchte eine aufgeschobene Rentenversicherung abschließen. Versicherungsbeginn ist im Jahr 2017. Die Rentenaufschubdauer beträgt 30 Jahre, eine Rentengarantiezeit ist nicht gewünscht, die Rente soll lebenslang gezahlt werden. Die Frau will eine Bruttoprämie i.H.v. 1.000 EUR jährlich durchgängig zahlen.

Wir unterstellen folgendes Kostenmodell: einmalige Abschlusskosten i.H.v. 3% der Bruttobeitragssumme, laufende Verwaltungskosten während der Aufschubzeit i.H.v. 5% der jährlichen Bruttoprämie, laufende Verwaltungskosten während des Rentenbezugs i.H.v. 1,5% der jährlich zahlbaren Rente.

Als Sterbetafel wird die DAV 2004 R (Grundtafel mit Altersverschiebung) verwendet, und der Rechnungszins beträgt 2%.

1. Berechnen Sie die gezillmerte Nettoprämie für den Fall, dass während der gesamten Aufschubdauer eine Beitragsrückgewähr eingeschlossen ist. Berechnen Sie die gezillmerte Nettoprämie ohne Einschluss dieser Todesfallleistung.
2. Berechnen Sie in beiden Fällen die Kapitalabfindung zum Rentenübergang, d.h. die Höhe des jeweiligen Deckungskapitals am Ende der Aufschubdauer.
3. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

9.5.2 Lösungen

Lösung 48. Wir berechnen das Nettodeckungskapital prospektiv als Differenz der erwarteten zukünftigen Leistungen und den erwarteten zukünftigen (Netto)Prämienv. Für $m \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto, prospt}} &= A_{x+m} - NP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m} \\ &= A_{x+m} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+m} . \end{aligned}$$

Wegen $A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x$ (siehe Abschn. 6.2.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto, prospt}} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+m} - \frac{1 - d \cdot \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+m} \\ &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+m} - \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} + d \cdot \ddot{a}_{x+m} \\ &= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_x} . \end{aligned}$$

Lösung 49. Da $t = n$ ist, gilt für die um n Jahre aufgeschobene, lebenslang zahlbare Leibrente:

$${}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} = \begin{cases} {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} - NP_{x:\bar{n}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}} & \text{für } 0 \leq m < n \\ \ddot{a}_{x+m} & \text{für } m \geq n \end{cases}$$

und

$${}_m V_x^{\text{Netto, retro}} = \begin{cases} \frac{NP_{x:\bar{n}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}}{{}_m E_x} & \text{für } 0 \leq m < n \\ \frac{NP_{x:\bar{n}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}} - {}_n|\ddot{a}_{x:\bar{m-n}}}{{}_m E_x} & \text{für } m \geq n . \end{cases}$$

Die Nettoprämie dieser Versicherung entspricht

$$NP_{x:\bar{n}} = \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{{}_n|\ddot{a}_{x:\bar{n}}} .$$

Aus Abschn. 6.2.1.4 ist bekannt, dass

$${}_n|\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\bar{n}} = {}_n E_x \cdot \ddot{a}_{x+n} .$$

Ersetzt man x und n durch $x + m$ bzw. $n - m$, so ergibt sich

$${}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} = {}_{n-m} E_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+n} ,$$

selbstverständlich ist auch (Austauschen von n durch m)

$${}_m|\ddot{a}_x = {}_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m} .$$

Außerdem lässt sich zeigen, dass für $0 \leq m \leq n$ die Gleichheit

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}} = \ddot{a}_{x:\bar{m}} + {}_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}}$$

gilt. Dann ist für $0 \leq m < n$

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} &= {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} - NP_{x:\bar{n}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}} \\ &= {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} - \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{{}_n|\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}} \\ &= \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{{}_n|\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \cdot \left(\frac{{}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}}}{{}_n|\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \right) \\ &= \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{{}_n|\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \cdot \left(\frac{{}_{n-m} E_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+n} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}} - \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}}}{{}_n E_x \cdot \ddot{a}_{x+n}} \right) \\ &= \frac{{}_n|\ddot{a}_x}{{}_n|\ddot{a}_{x:\bar{n}}} \cdot \left(\frac{{}_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m} - \ddot{a}_{x+m:\bar{n-m}}}{{}_m E_x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n|\ddot{a}_x|}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{m}}}{_m E_x} \\
&= \frac{NP_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}}}{_m E_x} \\
&= {}_m V_x^{\text{Netto, retro}}.
\end{aligned}$$

Und für $m \geq n$ hat man

$$\begin{aligned}
{}_m V_x^{\text{Netto, retro}} &= \frac{NP_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - {}_n |\ddot{a}_{x:\overline{m-n}}|}{_m E_x} \\
&= \frac{\frac{n|\ddot{a}_x|}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} - ({}_n |\ddot{a}_x| - {}_m |\ddot{a}_x|)}{_m E_x} \\
&= \frac{{}_m |\ddot{a}_x|}{_m E_x} \\
&= \ddot{a}_{x+m} \\
&= {}_m V_x^{\text{Netto, prosp}}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Gleichheit ${}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} = {}_m V_x^{\text{Netto, retro}}$ für alle $m \geq 0$ bewiesen.

Lösung 50. Bei der Termfix-Versicherung ist danach zu unterscheiden, ob die VP lebt oder bereits verstorben ist.

Der erwartete Barwert der zukünftigen Leistungen entspricht dem (deterministischen) Barwert v^{n-m} der versicherten Leistung 1, da diese unabhängig vom Überleben der VP fällig wird.

Der erwartete Barwert der zukünftigen (Netto-)Prämien ist (wegen $t = n$) gegeben durch $NP_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}$, da die Prämien nur so lange gezahlt werden, wie die VP lebt.

Für alle $0 \leq m \leq n$ hat das Nettodeckungskapital somit folgende Darstellung:

$${}_m V_x^{\text{Netto, prosp}} = \begin{cases} v^{n-m} - NP_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} & \text{falls die VP lebt,} \\ v^{n-m} & \text{falls die VP tot ist.} \end{cases}$$

Man sieht übrigens, dass das Deckungskapital bei Tod der VP einen Sprung nach oben macht, da der Abzugsterm der zukünftigen Prämienzahlungen mit sofortiger Wirkung wegfällt.

Lösung 51. Die Nettojahresprämie dieser Versicherung ist gemäß Übungsaufgabe 46

$$NP_{35:\overline{30}} = 10.000 \cdot \frac{A_{\frac{1}{35:\overline{30}}} + 0,4 \cdot {}_{10}E_{35} + 0,3 \cdot {}_{20}E_{35} + 0,3 \cdot {}_{30}E_{35}}{\ddot{a}_{35:\overline{30}}}.$$

Wir berechnen zunächst die benötigten Barwerte:

$$\ddot{a}_{35:\overline{30}} = \frac{N_{35} - N_{65}}{D_{35}} \approx \frac{13.646.642,610 - 2.887.643,995}{487.478,565} \approx 22,07071$$

$${}_{10}E_{35} = \frac{D_{45}}{D_{35}} \approx \frac{394.577,410}{487.478,565} \approx 0,80943$$

$${}_{20}E_{35} = \frac{D_{55}}{D_{35}} \approx \frac{311.197,787}{487.478,565} \approx 0,63838$$

$${}_{30}E_{35} = \frac{D_{65}}{D_{35}} \approx \frac{229.697,129}{487.478,565} \approx 0,47119$$

$$A_{\frac{1}{35:\overline{30}}} = 1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} - {}_{30}E_{35} \approx 0,09605 .$$

Damit ergibt sich für die Nettojahresprämie ein Wert von

$$NP_{35:\overline{30}} \approx 10.000 \cdot 0,03410 = 341,00 \text{ EUR} .$$

1. Das Nettodeckungskapital nach $0 \leq m \leq n$ Jahren entspricht

$$\begin{aligned} {}_mV_{35}^{\text{Netto, prosp}} &= A_{\frac{1}{35+m:\overline{30-m}}} + 1_{\{0 \leq m \leq 10\}} \cdot 0,4 \cdot {}_{10-m}E_{35+m} \\ &\quad + 1_{\{0 \leq m \leq 20\}} \cdot 0,3 \cdot {}_{20-m}E_{35+m} \\ &\quad + 1_{\{0 \leq m \leq 30\}} \cdot 0,3 \cdot {}_{30-m}E_{35+m} \\ &\quad - NP_{35:\overline{30}} \cdot \ddot{a}_{35+m:\overline{30-m}} . \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle zeigt die relevanten Barwerte und das daraus resultierende Nettodeckungskapital für die drei geforderten Zeitpunkte:

Barwerte	$m = 9$	$m = 10$	$m = 11$
$\ddot{a}_{35+m:\overline{30-m}}$	16,65508	16,00149	15,33778
$A_{\frac{1}{35+m:\overline{30-m}}}$	0,10390	0,10412	0,10408
${}_{10-m}E_{35+m}$	0,97835	1,00000	—
${}_{20-m}E_{35+m}$	0,77161	0,78869	0,80637
${}_{30-m}E_{35+m}$	0,56953	0,58213	0,59518
${}_mV_{35}^{\text{Netto, prosp}}$	3.296,40 EUR	3.697,20 EUR	15,30 EUR

Man sieht, dass das Nettodeckungskapital aufgrund der Auszahlung des ersten Teilbetrags i.H.v. 4.000 EUR nach 10 Jahren einen deutlichen Sprung nach unten macht (und zu Beginn des 11. Jahres sogar negativ wird).

2. Die Entwicklung des Nettodeckungskapitals vom Ende des 10. Jahres bis zum Ende des 11. Jahres wird nun über die Rekursionsgleichung nachvollzogen.

Dabei ist zu beachten, dass die Erlebensfallleistung $EFL_{10} = 4.000$ EUR beträgt und unmittelbar zu Beginn des 11. Jahres zur Auszahlung kommt:

$${}_{11}V_{35}^{\text{Netto}} = \frac{1+i}{p_{45}} \cdot \left({}_{10}V_{35}^{\text{Netto}} + NP_{35:\overline{30}} - EFL_{10} - v \cdot q_{45} \cdot TFL_{11} \right) .$$

Einsetzen der errechneten Werte liefert

$$\begin{aligned} {}_{11}V_{35}^{\text{Netto}} &\approx \frac{1,02}{1 - 0,002364} \cdot \left(3.697,20 + 341,00 - 4.000 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1,02} \cdot 0,002364 \cdot 10.000 \right) \\ &\approx \frac{1,02}{0,997636} \cdot 15,02353 \\ &\approx 15,36 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Lösung 52. Die Nettojahresprämie beträgt (vgl. Übungsaufgabe 41)

$$NP_{30:\overline{35}} = 50.000 \cdot \frac{A_{30:\overline{35}}}{\ddot{a}_{30:\overline{35}}} \approx 1.043,00 \text{ EUR} .$$

1. Das prospektive Nettodeckungskapital zum Zeitpunkt $m = 5$ entspricht

$$\begin{aligned} {}_5V_{30}^{\text{Netto, prosp}} &= 50.000 \cdot A_{35:\overline{30}} - NP_{30:\overline{35}} \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} \\ &= 50.000 \cdot (1 - d \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}}) - NP_{30:\overline{35}} \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} \end{aligned}$$

und nach $m = 6$ Jahren

$$\begin{aligned} {}_6V_{30}^{\text{Netto, prosp}} &= 50.000 \cdot A_{36:\overline{29}} - NP_{30:\overline{35}} \cdot \ddot{a}_{36:\overline{29}} \\ &= 50.000 \cdot (1 - d \cdot \ddot{a}_{36:\overline{29}}) - NP_{30:\overline{35}} \cdot \ddot{a}_{36:\overline{29}} . \end{aligned}$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{35:\overline{30}} &= \frac{N_{35} - N_{65}}{D_{35}} \approx \frac{13.646.642,610 - 2.887.643,995}{487.478,565} \\ &\approx 22,07071 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{36:\overline{29}} &= \frac{N_{36} - N_{65}}{D_{36}} \approx \frac{13.159.164,045 - 2.887.643,995}{477.492,424} \\ &\approx 21,51138 \end{aligned}$$

und erhält

$$\begin{aligned} {}_5V_{30}^{\text{Netto, prosp}} &\approx 50.000 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 22,07071\right)}_{=0,56724} - 1.043,00 \cdot 22,07071 \\ &\approx 5.342,25 \text{ EUR} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} {}_6V_{30}^{\text{Netto, prosp}} &\approx 50.000 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 21,51138\right)}_{=0,57821} - 1.043,00 \cdot 21,51138 \\ &\approx 6.474,13 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

2. Gemäß der Rekursionsgleichung erhält man (mit $EFL_5 = 0$)

$${}_6V_{30}^{\text{Netto}} = \frac{1,02}{p_{35}} \cdot ({}^5V_{30}^{\text{Netto}} + NP_{30:\overline{35}} - EFL_5 - v \cdot q_{35} \cdot TFL_6)$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_6V_{30} &\approx \frac{1,02}{1 - 0,000895} \cdot (5.342,25 + 1.043,00 - 0 - 0,000895 \cdot 50.000) \\ &\approx 1,02091 \cdot 6.340,50 \\ &\approx 6.473,08 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

3. Die Nettoprämie $NP_{m=5}$ lässt sich zerlegen in

$$\begin{aligned} 1.043,00 &\approx \underbrace{\frac{1}{1,02} \cdot 0,000895 \cdot (50.000 - 6.474,13)}_{= \text{Risikoprämie}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{1,02} \cdot 6.474,13 - 5.342,25 + 0}_{= \text{Sparprämie}} \\ &\approx \underbrace{38,19}_{= RP_{m=5}} + \underbrace{1.004,94}_{= SP_{m=5}} . \end{aligned}$$

Lösung 53. Vorab berechnen wir die benötigten Barwerte. Da die Frau im Jahr 1987 geboren ist, beträgt die Altersverschiebung -5 Jahre, so dass sich ein technisches Eintrittsalter von $y = 25$ Jahren ergibt. Der Prämienbarwert zum Zeitpunkt $m = 0$ ist somit

$$\ddot{a}_{25:\overline{30}} = \frac{N_{25} - N_{55}}{D_{25}} \approx \frac{23.062.324,901 - 9.258.053,938}{607.765,054} \approx 22,71317 .$$

Der Leistungsbarwert der aufgeschobenen Rente zum Zeitpunkt $m = 0$ beträgt

$${}_{30|}\ddot{a}_{25} = \frac{N_{55}}{D_{25}} \approx \frac{9.258.053,938}{607.765,054} \approx 15,23295$$

und zum Zeitpunkt des Rentenübergangs (d.h. $m = n$)

$$\ddot{a}_{55} = \frac{N_{55}}{D_{55}} \approx \frac{9.258.053,938}{328.924,494} \approx 28,14644 .$$

Der Barwert der Beitragsrückgewähr zum Zeitpunkt $m = 0$ entspricht (mit $d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$)

$$\begin{aligned} (IA)_{\frac{1}{25:30]} &= \frac{R_{25} - R_{55} - 30 \cdot M_{55}}{D_{25}} \\ &= \frac{N_{25} - d \cdot S_{25} - (N_{55} - d \cdot S_{55}) - 30 \cdot (D_{55} - d \cdot N_{55})}{D_{25}} \\ &\approx \frac{23.062.324,901 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 648.767.819,242}{607.765,054} \\ &\quad - \frac{9.258.053,938 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 178.029.622,859}{607.765,054} \\ &\quad - 30 \cdot \frac{328.924,494 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 9.258.053,938}{607.765,054} \\ &\approx 17,01544 - 9,48932 - 7,27554 \\ &= 0,25058 . \end{aligned}$$

1. Die Höhe der garantierten Jahresrente JR ist unbekannt. Unter Anwendung des Äquivalenzprinzips erhält man bei eingeschlossener Beitragsrückgewähr die Gleichung

$$\begin{aligned} BP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} &= JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x + (IA)_{\frac{1}{x:\overline{n}}} \cdot BP_{x:\overline{t}} \\ &\quad + \alpha \cdot t \cdot BP_{x:\overline{t}} + \beta \cdot BP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} BP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} &= JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x \\ &\quad + \alpha \cdot t \cdot BP_{x:\overline{t}} + \beta \cdot BP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} , \end{aligned}$$

falls diese Todesfalleistung ausgeschlossen ist.

Zur Ermittlung der Jahresrente löst man diese Gleichungen jeweils nach JR auf und erhält

$$JR = BP_{x:\overline{t}} \cdot \frac{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}} - \alpha \cdot t - (IA)_{\frac{1}{x:\overline{n}}}}{(1 + \gamma_4) \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x}$$

bzw.

$$JR = BP_{x:\bar{t}} \cdot \frac{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t}{(1 + \gamma_4) \cdot {}_{n|\ddot{a}_x}} .$$

Einsetzen der bekannten Größen liefert bei Einschluss der Beitragsrückgewähr

$$JR \approx 1.000 \cdot \frac{0,95 \cdot 22,71317 - 0,9 - 0,25058}{1,015 \cdot 15,23295} \approx 1.321,15 \text{ EUR}$$

und andernfalls

$$JR \approx 1.000 \cdot \frac{0,95 \cdot 22,71317 - 0,9}{1,015 \cdot 15,23295} \approx 1.337,36 \text{ EUR} .$$

Jetzt berechnet man die gezillmerte Nettoprämie inkl. der γ_4 -Kosten für den Rentenbezug als

$$\begin{aligned} NP_{x:\bar{t}}^Z &= \frac{JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n|\ddot{a}_x} + BP_{x:\bar{t}} \cdot (IA)_{\bar{x}:\bar{n}} + \alpha \cdot t \cdot BP_{x:\bar{t}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \\ &= BP_{x:\bar{t}} \cdot (1 - \beta) \end{aligned}$$

bzw. bei ausgeschlossener Beitragsrückgewähr

$$\begin{aligned} NP_{x:\bar{t}}^Z &= \frac{JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n|\ddot{a}_x} + \alpha \cdot t \cdot BP_{x:\bar{t}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \\ &= BP_{x:\bar{t}} \cdot (1 - \beta) . \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist also $NP_{25:\bar{30}}^Z = 1.000 \cdot 0,95 = 950 \text{ EUR}$.

2. Das Deckungskapital bei Rentenübergang entspricht in beiden Fällen der Darstellung

$${}_nV_x = JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n} .$$

Bei eingeschlossener Beitragsrückgewähr ergibt sich folglich

$${}_{30}V_{25} \approx 1.321,15 \cdot 1,015 \cdot 28,14644 \approx 37.743,45 \text{ EUR} ,$$

und ohne hat man

$${}_{30}V_{25} \approx 1.337,36 \cdot 1,015 \cdot 28,14644 \approx 38.206,55 \text{ EUR} .$$

3. Bei vorgegebener Brutto-prämie erhält man die gezillmerte Nettoprämie einfach durch Abzug der eingerechneten Kosten, in diesem Kostenmodell also nur der β -Kosten. Dies hätte man auch direkt angeben können – ohne den Umweg über die versicherte Leistung zu gehen. Aber der „Umweg“ zeigt, dass der Einschluss einer Todesfallleistung zu Lasten der Rentenleistung geht. Die Beitragsrückgewähr während der Aufschubphase kostet Geld, so dass die garantierte Rente niedriger ausfällt.

Das Beispiel soll auch einen weiteren Aspekt noch einmal verdeutlichen: Die Tatsache, dass die gezillmerte Nettoprämie in beiden Fällen identisch ist, bedeutet nicht, dass der Verlauf des Deckungskapitals derselbe ist. Der Barwert der zukünftigen Prämien ist zwar identisch, aber der Barwert der zukünftigen Leistungen nicht (wegen des Fehlens oder des Einschlusses der Beitragsrückgewähr). Dementsprechend kommen die beiden Deckungskapitalverläufe am Ende der Aufschubphase bei unterschiedlichen Kapitalabfindungen aus.

Kapitel 10

Überschussbeteiligung

Da der erwartete Barwert der Prämieneingänge mit dem erwarteten Barwert der Auszahlungen (für Leistungen und Kosten) übereinstimmt, folgt aus der Gültigkeit des Äquivalenzprinzips kalkulatorisch ein erwarteter Gewinn von Null.

Durch Anlage auf dem Kapitalmarkt wird jedoch eine abweichende (im Idealfall höhere) Verzinsung erzielt als der gegenüber den Kunden garantierte Rechnungszins. In den Sterbe- oder allgemeiner in den Ausscheidewahrscheinlichkeiten sind einerseits Sicherheitszuschläge berücksichtigt, gleichzeitig bzw. andererseits stimmt die reale Sterblichkeitserfahrung des VU in den seltensten Fällen mit der eingerechneten Sterblichkeit überein. Und schließlich werden Kostensätze eingepreist, die sich von den tatsächlich anfallenden Kosten unterscheiden.

Die im Rahmen der Prämien- bzw. Reserveberechnung verwendeten Zinsen, biometrischen Annahmen und Kosten, d.h. die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung, sind vorsichtig gewählt und weichen daher i.d.R. von der tatsächlich erlebten oder aus langjähriger Beobachtung resultierenden Zins-, Sterblichkeits- und Kostenerfahrung, d.h. den Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung, ab. Am Ende eines jeden Geschäftsjahres, nach Auszahlung aller Leistungen und Kosten sowie nach Ermittlung der benötigten Deckungsrückstellungen, entsteht daher entweder ein Gewinn oder ein Verlust für das VU, der sog. **Rohüberschuss**. Durch geeignete Wahl der Rechnungsgrundlagen kann der Aktuar die Höhe dieses Überschusses beeinflussen; umgekehrt können widrige, unvorhersehbare Umstände, z.B. ein Absinken des Marktzinsniveaus, eine Naturkatastrophe, eine Epidemie oder eine Kosteninflation, zu einem Verlust in dem jeweiligen Geschäftsjahr führen.

Entsprechend der drei Komponenten der Rechnungsgrundlagen lassen sich drei wesentliche **Gewinnquellen** identifizieren, nämlich Zins- bzw. genauer Kapitalanlagegewinne, Sterblichkeits- oder allgemeiner Risikogewinne und übrige Gewinne, worunter alle sonstigen inkl. der Kostengewinne fallen.

Die Zerlegung des Rohüberschusses in seine einzelnen Bestandteile bzw. Quellen wird auch als **Gewinnzerlegung** bezeichnet. Da erst in Kap. 17 genauer darauf eingegangen wird, nehmen wir die drei „Ergebnistöpfe“ Kapitalanlageergebnis, Risikoergebnis und Übriges Ergebnis sowie ihre zugehörige Summe, den Rohüberschuss, hier zunächst als gegeben hin.

Die erwirtschafteten Gewinne des VU beruhen vorrangig auf einer vorsichtigen Kalkulation und werden maßgeblich unter Verwendung der von den Kunden eingezahlten Prämien erzielt. Folglich partizipieren die VN an dem Unternehmensgewinn, indem ihnen ein gewisser Teil der Prämie zurückerstattet wird. Diese Beitragsrückerstattung heißt **Überschussbeteiligung** oder **Gewinnbeteiligung**.

Die Höhe der Überschussbeteiligung wird i.d.R. in Form von Prozentsätzen, die sich auf bestimmte Bezugsgrößen beziehen, angegeben. Der jährlich stattfindende Prozess der Festlegung dieser Überschusssätze heißt **Deklaration** und wird bereits vor dem Ende des Geschäftsjahres auf Basis des (voraussichtlichen) Unternehmensergebnisses durchgeführt. Die Ergebnisse werden auch veröffentlicht. Die Deklaration gilt jedoch erst für das darauffolgende Geschäftsjahr, in welchem die Überschüsse dann zugeteilt und gutgeschrieben werden, so dass präziser von Voraus- oder Vorabdeklaration die Rede ist. Ob das VU die gewählte Deklaration in der Zukunft beibehalten bzw. es sich diese auch mittelfristig weiter „leisten“ kann, wird durch eine gesonderte Berechnung, den **Finanzierbarkeitsnachweis**, überprüft und belegt.

10.1 Gesetzliche Bestimmungen

Die Teilhabe der VN an den Unternehmensgewinnen ist gesetzlich in § 153 VVG verankert. Sofern im Vertrag nicht ausdrücklich und insgesamt ausgeschlossen, steht den Versicherten eine Beteiligung am (Roh-)Überschuss und an den sog. Bewertungsreserven zu. Für die Durchführung der Überschussbeteiligung fordert die Gesetzgebung ein verursachungsorientiertes oder anderweitig angemessenes Verfahren.

Dafür werden gleichartige Verträge, d.h. hinsichtlich Kapitalausstattung, Risikotragung und Kostenstruktur einander ähnliche Verträge, zu möglichst homogenen Gruppen zusammengefasst, welche für den Altbestand **Abrechnungsverband** und für den Neubestand **Bestandsgruppe** genannt werden. Die **Versicherungsberichterstattungs-Verordnung** (kurz: **BerVersV**), welche ausführlich „Verordnung über die Berichterstattung von Versicherungsunternehmen gegenüber der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht“ heißt, legt in ihrer Anlage 1, Abschnitt D, fest, welche Bestandsgruppen zu bilden sind.

Danach werden Einzel- und Kollektivversicherungen voneinander abgegrenzt, ebenso verschiedene Produktarten wie Kapital- oder Risikolebensversicherungen, Rentenversicherungen, Berufs- und Erwerbsunfähigkeitsversicherungen sowie Fondsgebundene Versicherungen.

Die Abrechnungsverbände (für den Altbestand) wurden jeweils in den genehmigungspflichtigen Geschäftsplänen festgelegt; sie haben jedoch eine ähnliche Einteilung wie die Bestandsgruppen.

Die Aufteilung in Abrechnungsverbände bzw. Bestandsgruppen lässt sich durch Bildung weiterer Teilbestände, die als **Gewinnverband** bezeichnet werden, verfeinern. Gewinnverbände entstehen regelmäßig bei der Einführung einer neuen Tarifgeneration bzw. wenn sich im Neugeschäft der Rechnungszins ändert oder aktuellere Ausscheideordnungen verwendet werden.

Für jedes Portfolio ist der Überschuss getrennt zu ermitteln und innerhalb dessen zu verteilen, so dass Querverrechnungen zwischen diesen ausgeschlossen sind.

Die Überschussbeteiligung erfolgt gemäß § 139 VAG auf zwei Wegen. Ein Teil des für die Überschussbeteiligung bestimmten Betrags wird dem Vertrag unmittelbar zugeteilt; dieser Vorgang heißt daher auch **Direktgutschrift**. Der verbleibende, meist überwiegendere Teil des Überschussbetrags wird in die sog. **Rückstellung für Beitragsrückerstattung** (kurz: **RfB**) eingestellt; man sagt auch, dass eine Zuführung zur RfB stattfindet. Auf diese beiden Instrumente werden wir weiter unten in Abschn. 10.4 noch näher eingehen.

§ 140 VAG regelt Besonderheiten im Hinblick auf die RfB. Danach dürfen die in dieser Bilanzposition enthaltenen Beträge nur für die Überschussbeteiligung der Versicherten verwendet werden. Mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde können noch nicht festgelegte Überschussanteile aus der RfB auch anderweitig verwendet werden, bspw. um einen drohenden Notstand abzuwenden oder um eine Erhöhung der Deckungsrückstellung zu finanzieren, „wenn die Rechnungsgrundlagen auf Grund einer unvorhersehbaren und nicht nur vorübergehenden Änderung der Verhältnisse angepasst werden müssen“ (wie etwa bei einer biometrischen Nachreservierung, siehe Abschn. 9.4.1).

In § 140 VAG wird ebenfalls die Angemessenheit der Überschussbeteiligung definiert. Danach muss einerseits die Zuführung zur RfB – unter Berücksichtigung der rechnungsmäßigen Zinsen und der Direktgutschrift – gewissen Mindestgrenzen genügen. Andererseits müssen die in der RfB enthaltenen Mittel auch verwendet werden bzw. dürfen nicht unbegrenzt angehäuft werden; genauer gesagt dürfen die ungebundenen Mittel der RfB eine festgelegte Höchstgrenze nicht überschreiten.

10.2 Überschussentstehung

Die vorsichtige Kalkulation der Prämien führt also zur Entstehung von Überschüssen, deren maßgebliche Quellen die drei Rechnungsgrundlagen Zins, Biometrie und Kosten sind.

Idealerweise wird jeder überschussberechtigte Vertrag in demjenigen Maße an den Überschüssen beteiligt, in welchem er zu diesen beigetragen hat. Ein solches Vorgehen wird als **natürliches System der Überschussverteilung** bezeichnet. Bezugsgrößen sind in diesem Fall bspw. die Deckungsrückstellung für Zinsgewinne oder das riskierte Kapital für Risikogewinne. Da die Bezugsgrößen nach außen jedoch vielfach unbekannt sind, werden natürliche Systeme als intransparent empfunden.

Eine transparentere und in der technischen Umsetzung weniger aufwändige Alternative stellt ein **mechanisches System der Überschussverteilung** dar. Hierbei wird der Überschuss bspw. relativ zum Beitrag, zur versicherten Leistung (Versicherungssumme, Jahresrente) oder zur Vertragsdauer zugeteilt. Auch wenn die Bezugsgrößen nachvollziehbar sind (weil es sich dabei um vertraglich festgelegte Größen handelt), ist diese Art von Verteilungssystem meist nur im Durchschnitt „gerecht“.

10.2.1 Kontributionsformel

Die Aufteilung des Rohüberschusses eines Jahres auf die drei Gewinnquellen Zins, Biometrie und Kosten lässt sich mittels der sog. Kontributionsformel oder auch Kontributionsgleichung nachvollziehen. Diese verdeutlicht, wie und in welchem Maße die drei Rechnungsgrundlagen zum Gewinn des VU beitragen.

Ausgehend von der Rekursionsgleichung (9.6) für das (Brutto)Deckungskapital

$${}_m V_x = \frac{(1+i)}{p_{x+m-1}} \cdot ({}_{m-1} V_x + BP_m - KP_m - EFL_{m-1} - v \cdot q_{x+m-1} \cdot TFL_m)$$

(siehe Abschn. 9.2.4) lassen sich für das m -te Versicherungsjahr Erträge und Aufwendungen wie folgt separieren:

$$\begin{aligned} ({}_{m-1} V_x + BP_m) \cdot (1+i) &= (1 - q_{x+m-1}) \cdot {}_m V_x \\ &\quad + EFL_{m-1} \cdot (1+i) + q_{x+m-1} \cdot TFL_m \\ &\quad + KP_m \cdot (1+i). \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Gleichung stehen die Erträge 1. Ordnung des Jahres m , EIN_m , welche sich aus dem zu Jahresbeginn vorhandenen Deckungskapital, der am Jahresanfang eingehenden Bruttoprämie und den auf diese beiden Größen anfallenden Zinsen zusammensetzen.

Die Aufwendungen 1. Ordnung, AUS_m , auf der rechten Seite der Gleichung bestehen aus dem für die Überlebenden am Jahresende zu stellenden Deckungskapital, den ausgezahlten (und ggf. aufgezinsten) Leistungen sowie den aufgezinsten Kosten.

Wie eingangs erwähnt, führt die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips zu einem erwarteten Gewinn von Null, da die Erträge und Aufwendungen 1. Ordnung innerhalb eines Jahres übereinstimmen, d.h. $EIN_m = AUS_m$.

Durch einen Vergleich mit den tatsächlich im Jahr m entstandenen Erträgen und Aufwendungen 2. Ordnung, EIN'_m bzw. AUS'_m , lässt sich der Überschuss im m -ten Jahr ermitteln. Dazu bezeichnet q'_{x+m-1} die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit 2. Ordnung (vgl. Abschn. 5.3.3), KP'_m die tatsächlich angefallenen Kosten und i' die vom VU tatsächlich erzielte Verzinsung, so dass

$$EIN'_m = ({}_{m-1}V_x + BP_m) \cdot (1 + i')$$

und

$$\begin{aligned} AUS'_m &= (1 - q'_{x+m-1}) \cdot {}_mV_x \\ &\quad + EFL_{m-1} \cdot (1 + i') + q'_{x+m-1} \cdot TFL_m \\ &\quad + KP'_m \cdot (1 + i') . \end{aligned}$$

Eine Differenzbildung der Erträge und Aufwendungen 1. und 2. Ordnung liefert folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} &(EIN'_m - EIN_m) - (AUS'_m - AUS_m) \\ &= ({}_{m-1}V_x - EFL_{m-1} + BP_m - KP'_m) \cdot (i' - i) \quad \blacktriangleright \text{Zinsgewinn} \\ &\quad + (q_{x+m-1} - q'_{x+m-1}) \cdot (TFL_m - {}_mV_x) \quad \blacktriangleright \text{Risikogewinn} \\ &\quad + (KP_m - KP'_m) \cdot (1 + i) . \quad \blacktriangleright \text{Kostengewinn} \end{aligned}$$

Hinsichtlich der Gewinnquellen gelten tendenziell die folgenden Aussagen:

- Wenn die tatsächlich erzielte Verzinsung i' größer als die rechnungsmäßige Verzinsung i , ergibt sich bei positivem Zinsträger ein Zinsgewinn. Sofern das Deckungskapital aufgrund der Zillmerung zu Vertragsbeginn negativ ist, ergeben sich in den ersten Jahren Zinsverluste.
- Ob ein Risikogewinn oder -verlust entsteht, hängt sowohl davon ab, ob die kalkulatorisch angesetzte Sterbewahrscheinlichkeit größer ist als die tatsächliche Sterblichkeitserfahrung des VU, als auch vom Vorzeichen des risikierten Kapitals.

Bei Versicherungen mit Todesfallcharakter, als typisches Beispiel sei die temporäre Risikolebensversicherung genannt, ist die Differenz aus Todesfallleistung und Deckungskapital während des Vertragsverlaufs positiv. Da gleichzeitig die Sterblichkeiten 1. Ordnung größer sind als diejenigen 2. Ordnung, ergeben sich Risikogewinne.

Bei Versicherungen mit Erlebensfallcharakter, bspw. einer aufgeschobenen Rentenversicherung ohne Beitragsrückgewähr, ist das riskierte Kapital hingegen negativ. Da aber auch die Sterblichkeiten 1. Ordnung i.d.R. niedriger als die Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung sind, entstehen auch bei diesen Risikogewinne.

- Sofern die eingerechneten Kosten KP_m größer sind als die tatsächlich entstandenen Kosten KP'_m , entsteht ein Kostengewinn.

Es sei darauf hingewiesen, dass je nach Versicherungsart die Bedeutung der verschiedenen Gewinnquellen unterschiedlich stark ist. Bei Risikoversicherungen ist aufgrund des relativ niedrigen Deckungskapitals das Zinsergebnis weniger relevant als das Risikoergebnis. Bei kapitalbildenden Versicherungen, deren Deckungskapital im Laufe der Zeit ansteigt, gewinnt das Zinsergebnis zunehmend an Bedeutung, während das Risikoergebnis immer mehr an Bedeutung verliert.

10.2.2 Überschussanteile

Die Zuteilung der Überschüsse erfolgt grundsätzlich auf zweierlei Arten, als **laufende Überschussbeteiligung** sowie als **Schlussüberschussbeteiligung**.

Die laufende Überschusszuteilung dient der zeitnahen Beteiligung der VN an den entstandenen Überschüssen. Sobald die Überschüsse zugeteilt sind, sind sie unwiderruflich garantiert und gehören somit dem VN. Sofern im Rahmen der Überschussverwendung (siehe Abschn. 10.3) ein Deckungskapital gebildet wird, ist dieses wiederum selbst überschussberechtigt.

Die Zuteilung von Schlussüberschüssen erfolgt ebenfalls regelmäßig während der Vertragslaufzeit, jedoch werden die Schlussüberschüsse angesammelt und mit zeitlichem Abstand erst zum Ablauf des Vertrags bzw. bei Erreichen des Rententübergangs in voller Höhe ausgezahlt. Diese Art der Überschüsse ist jedoch nicht garantiert, sondern kann gekürzt werden oder ganz entfallen.

Im Folgenden wollen wir eine Notation für die wesentlichen Größen im Kontext der Überschussbeteiligung einführen. Dabei ist zu beachten, dass sich die Angaben zur Überschussdeklaration i.d.R. nur auf einen Gewinnverband beziehen. Die Höhe der deklarierten Überschussbeteiligung eines einzelnen Vertrags richtet sich nach den Überschüssen, die im zugehörigen Gewinnverband generiert wurden.

10.2.2.1 Laufende Überschussbeteiligung

Der gesamte **laufende Überschussanteil** oder **laufende Gewinnanteil** (kurz: **LGA**) einer Hauptversicherung im m -ten Versicherungsjahr wird mit LGA_m bezeichnet.

Dieser besteht aus mehreren Komponenten, die aus den drei bekannten Gewinnquellen resultieren, nämlich dem Zinsüberschussanteil LGA_m^{Zins} , dem Risikoüberschussanteil LGA_m^{Risiko} und dem Kostenüberschussanteil LGA_m^{Kosten} . In der Praxis findet sich beizeiten auch die Bezeichnung Grundüberschussanteil, worunter meist Risiko- und/oder Kostenüberschussanteile subsummiert werden.

Insgesamt gilt also

$$LGA_m = LGA_m^{\text{Zins}} + LGA_m^{\text{Risiko}} + LGA_m^{\text{Kosten}} .$$

Die für das m -te Versicherungsjahr **deklarierten laufenden Überschussanteilsätze** werden mit z_m^{Zins} für den Zinsüberschuss, z_m^{Risiko} für den Risikoüberschuss und z_m^{Kosten} für den Kostenüberschuss notiert. Sie beziehen sich jeweils auf eine geeignete (verursachungsgerechte) Bemessungsgrundlage, wie folgende Beispiele verdeutlichen:

- Sofern die Bezugsgröße für den Zinsüberschussanteil das Deckungskapital am Ende des Vorjahres ist, hat man

$$LGA_m^{\text{Zins}} = \max \{0; {}_{m-1}V_x\} \cdot z_m^{\text{Zins}}$$

für alle $m \geq 1$.

- Bezieht sich der Risikoüberschussanteilsatz auf das riskierte Kapital, ergibt sich für alle $m \geq 1$ ein zugehöriger Überschussanteil von

$$LGA_m^{\text{Risiko}} = \max \{0; TFL_m - {}_mV_x\} \cdot z_m^{\text{Risiko}} .$$

- Ein Kostenüberschuss in Prozent der Bruttoprämie führt für alle $m \geq 1$ zu

$$LGA_m^{\text{Kosten}} = \max \{0; BP_m\} \cdot z_m^{\text{Kosten}} ,$$

wobei $BP_m = 1_{\{1 \leq m \leq t\}} \cdot BP_{x:\overline{t}}$ ist.

Für die Zuteilung der laufenden Überschüsse können Wartezeiten vorgesehen sein, so dass ein laufender Überschussanteil oder einzelne seiner Komponenten frühestens nach der entsprechenden Anzahl Jahre erstmals fällig wird. Die (einheitliche) **Wartezeit** für die laufenden Überschussanteile wird mit w^{LGA} notiert.

Übrigens: Der Zinsüberschussanteilsatz z_m^{Zins} ist auch unter dem Begriff **Überzins** geläufig, da er die über die garantierte, rechnungsmäßige Verzinsung hinausgehenden Teil der gewährten Gesamtverzinsung repräsentiert.

10.2.2.2 Schlussüberschussbeteiligung

Der **Schlussüberschussanteil** oder **Schlussgewinnanteil** (wenn auch häufiger **SÜA**, hier kurz: **SGA**) einer Hauptversicherung im m -ten Versicherungsjahr wird mit SGA_m bezeichnet.

Der für das Jahr m deklarierte Schlussüberschussanteilsatz sei z_m^{Schluss} .

Auch für die erstmalige Zuteilung von Schlussüberschussanteilen kann eine **Wartezeit** vereinbart sein, welche wir mit w^{SGA} angeben.

Die Schlussgewinnanteile fallen während der Vertragslaufzeit jährlich an und werden (zinslos) angesammelt. Bei Ablauf oder Rententübergang, d.h. nach n Jahren, werden die akkumulierten Schlussgewinnanteile ausgezahlt.

Bezieht sich der SGA-Satz bspw. auf die Versicherungssumme VS , so lässt sich der jährliche Schlussgewinnanteil für alle $1 \leq m \leq n$ schreiben als

$$SGA_m = z_m^{\text{Schluss}} \cdot VS .$$

Die Summe der bis zum Ende des m -ten Jahres angesammelten Schlussüberschussanteile ist dann

$$SGA_m^{\text{Summe}} := \sum_{j=\max\{1; w^{\text{SGA}}\}}^m SGA_j = VS \cdot \sum_{j=\max\{1; w^{\text{SGA}}\}}^m z_j^{\text{Schluss}} .$$

Das beschriebene Verfahren der Schlussüberschussbeteiligung dürfte sehr weit verbreitet sein. Ein alternatives Vorgehen ist jedoch das folgende:

Der deklarierte SGA-Satz bezieht sich auf eine zum Auszahlungszeitpunkt fixierte Größe. Zur Anwendung gelangt er nur bei denjenigen Verträgen, die jeweils im Jahr m ablaufen oder in den Rentenbezug wechseln.

Ist z.B. die Versicherungssumme VS die Bezugsgröße für den zu gewährenden SGA, so gilt bei dieser Variante

$$SGA_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n , \\ z_m^{\text{Schluss}} \cdot VS & \text{für } m = n . \end{cases}$$

Der Unterschied zum vorher beschriebenen Verfahren besteht zum einen darin, dass ein SGA nur zu einem einzigen Zeitpunkt (bei Ablauf oder Rententübergang) entsteht. Auch wenn die formelmäßige Darstellung von SGA_m bei identischer Bezugsgröße dieselbe ist, hat der deklarierte Satz

z_m^{Schluss} zum anderen eine deutlich abweichende Höhe, denn bei Ansammlung der SGA ist er wesentlich kleiner als bei der einmaligen Zuteilung im Jahr der Auszahlung.

10.2.2.3 Zusatzversicherungen

Im Falle einer Zusatzversicherung notieren wir den laufenden Überschussanteil im Jahr m mit LGA_m^{Zusatz} . Analog zur Hauptversicherung ergibt sich eine Zusammensetzung der Form

$$LGA_m^{\text{Zusatz}} = LGA_m^{\text{Zusatz,Zins}} + LGA_m^{\text{Zusatz,Risiko}} + LGA_m^{\text{Zusatz,Kosten}} .$$

Entsprechend ist der Schlussüberschussanteil im m -ten Jahr SGA_m^{Zusatz} .

Die getroffene Unterscheidung zwischen Haupt- und Zusatzversicherung wird hier vollzogen, weil nicht selten die Regelung existiert, dass die Überschussanteile der Zusatzversicherung zur Erhöhung der Überschussbeteiligung in der Hauptversicherung verwendet werden, so dass in diesen Fällen

$$LGA_m = LGA_m^{\text{Zins}} + LGA_m^{\text{Risiko}} + LGA_m^{\text{Kosten}} + LGA_m^{\text{Zusatz}} + SGA_m^{\text{Zusatz}}$$

gilt. Dabei fließt eine fällige Schlussüberschussbeteiligung der Zusatzversicherung ebenfalls in die laufende Überschussbeteiligung der Hauptversicherung mit ein.

10.2.2.4 Zusammenfassung

Abschließend werden noch einmal die Überschussanteile, die zugehörigen Überschussanteilsätze sowie gängige Bezugsgrößen aufgeführt:

Überschuss-anteil	Überschuss-anteilsatz	Beispiele für Bezugsgrößen
LGA_m^{Zins}	z_m^{Zins}	Deckungskapital am Anfang, am Ende oder zur Mitte des Jahres
LGA_m^{Risiko}	z_m^{Risiko}	riskiertes Kapital, Risikoprämie, versicherte Leistung
LGA_m^{Kosten}	z_m^{Kosten}	Bruttoprämie, Prämiensumme, versicherte Leistung
SGA_m	z_m^{Schluss}	Prämiensumme, versicherte Leistung, Ansammlungsguthaben

10.2.3 Bewertungsreserven

Seit der VVG-Reform im Jahr 2008 sind die VN gemäß § 153 VVG auch an den **Bewertungsreserven** (kurz: **BWR**) zu beteiligen.

Bei Bewertungsreserven handelt es sich um stille Reserven. Diese entstehen dadurch, dass der aktuelle Marktwert einer Kapitalanlage bzw. eines Wertpapiers (z.B. einer Aktie) zum Bewertungstichtag größer ist als ihr Buchwert, d.h. dem Preis bei Anschaffung (ggf. abzeitiglich bereits erfolgter Abschreibungen), mit dem diese Kapitalanlage in die Bilanz eingeht. Sofern die Differenz aus Markt- und Buchwert negativ ist, ergeben sich stille Lasten. Stille Reserven oder Lasten stellen nur einen theoretischen Wertzuwachs oder -verlust dar. Erst wenn das VU die Kapitalanlage bzw. das Wertpapier wieder verkauft, wird der Gewinn oder Verlust tatsächlich realisiert. Die Bewertungsreserven zu einem bestimmten Zeitpunkt ergeben sich durch Summation der stillen Reserven über alle Kapitalanlagen eines VU; stille Lasten dürfen hingegen nicht eingerechnet werden.

Aufgrund der gesunkenen und anhaltend niedrigen Zinsen sind insbesondere die Marktwerte von festverzinslichen Wertpapieren gestiegen und somit auch die Bewertungsreserven. In einem derartigen Zinsumfeld würden die Versicherer durch die Auszahlung höherer Beteiligungen an den BWR jedoch stark und vor allem einseitig belastet.

Um dem entgegenzuwirken, wurde im Jahr 2014 mit dem LVRG der Begriff des Sicherungsbedarfs eingeführt und in § 139 VAG ergänzend geregelt, dass diejenigen Bewertungsreserven, die aus den vorgenannten Kapitalanlagen resultieren, im Zuge der Beteiligung an den BWR nur in dem Maße zu berücksichtigen sind, wie sie einen evtl. bestehenden Sicherungsbedarf aus den Versicherungsverträgen mit Zinsgarantie übersteigen.

Denn gleichzeitig hat die Zinsentwicklung des letzten Jahrzehnts auch dazu geführt, dass der Wert der vom jeweiligen VU eingegangenen Verpflichtungen ansteigt und dementsprechend eine zusätzliche Reserve, die Zinszusatzreserve, vom VU gestellt werden muss. Wie in Abschn. 9.4.2 bereits ausgeführt wurde, entspricht der Sicherungsbedarf eines einzelnen Vertrags derjenigen zusätzlichen Reserve, die sich analog zur Zinszusatzreserve berechnet, wobei man jedoch den Referenzzins (10-Jahres-Durchschnitt der Bezugszinsen) durch den aktuellen Bezugszins ersetzt.

Der Sicherungsbedarf des gesamten Bestands ist demnach die Summe aller Sicherungsbedarfe von Versicherungsverträgen mit Zinsgarantie, deren Rechnungszins über dem zum Zeitpunkt der Ermittlung der Bewertungsreserven aktuellen Bezugszins liegt. Die zuvor beschriebene, mit dem LVRG eingeführte Regelung des § 139 VAG führt also zu einer gewissen Entlastung der VU, indem der benötigte Sicherungsbedarf bei der Ermittlung der Bewertungsreserven angerechnet werden darf.

Laut Gesetz sind die Bewertungsreserven jedes Jahr neu zu ermitteln und müssen nach einem verursachungsorientierten Verfahren den einzelnen Verträgen rechnerisch zugeordnet werden. Für die Berechnung der Beteiligung an den BWR gibt es allerdings kein verbindlich vorgeschriebenes Verfahren, so dass auf eine allgemeine Darstellung verzichtet wird.

10.3 Überschussverwendung

Während die Schlussüberschussanteile unverzinst angesammelt und erst bei bestimmten Vertragsereignissen wie Ablauf, Tod oder Rückkauf – ggf. in verminderter Höhe – zur Auszahlung kommen, können laufende Überschussanteile dem VN auf verschiedene Weisen zugute kommen. So wird die laufende Überschussbeteiligung entweder dazu verwendet, die bei Eintritt des Versicherungsfalls zugesagte Leistung zu erhöhen, oder die Überschussanteile dienen dazu, die vom Kunden zu zahlende Prämie zu reduzieren. Auch Sonderformen wie z.B. die Verkürzung der Vertragsdauer (Laufzeitverkürzung) werden von manchen VU angeboten.

Die Überschussanteilsätze verschiedener Formen der Überschussverwendung werden idealerweise derart deklariert, dass die unterschiedlichen Verwendungsformen in etwa äquivalent zueinander sind, d.h., dass sich der VN bei Wahl einer bestimmten Verwendungsform (im Barwert) nicht schlechter steht als bei Wahl einer anderen.

10.3.1 Laufende Überschussbeteiligung

Im Folgenden werden die bekanntesten Formen zur Verwendung laufender Überschüsse vorgestellt. Dabei ist zu beachten, dass nicht alle der genannten Überschussverwendungsformen auch bei jeder Produktart zur Verfügung stehen.

10.3.1.1 Bonus

Bei der Gewinnverwendung in Form des Bonus oder Bonussystems werden die jährlich anfallenden Überschussanteile zur Erhöhung der versicherten Leistung verwendet, so dass im Versicherungsfall neben der garantierten Leistung zusätzlich eine Bonusleistung fällig wird. Je nach versicherter Leistung heißt diese Form der Überschussverwendung daher auch **Summenzuwachs (Summenerhöhung)** oder **Rentenzuwachs (Rentenerhöhung)**.

Die technische Umsetzung im Verwaltungssystem des VU geschieht derart, dass zum Stammbaustein der originären Versicherung ein sog. Bonusbaustein hinzukommt, über welchen die zusätzliche Leistungserhöhung aus Bonus abgebildet wird.

Der laufende Gewinnanteil wird am Ende des Versicherungsjahres zugeteilt und dann als Einmalprämie für die Bildung einer zusätzlichen Versicherungsleistung verwendet, deren Höhe sich nach dem für den Bonus geltenden Leistungsspektrum richtet.

Üblicherweise wird für die hinzukommende Bonusleistung dasselbe Leistungsspektrum wie für die zugrunde liegende Versicherung herangezogen. Das bedeutet bspw., dass aus dem Überschussanteil zu einer gemischten Kapitallebensversicherung sowohl eine Todes- als auch eine Erlebensfallssumme entsteht. Oder im Falle einer aufgeschobenen Rentenversicherung mit eingeschlossener Beitragsrückgewähr, dass die hinzukommende Bonusrente unter Berücksichtigung des Leistungsbarwerts für die Beitragsrückgewähr ermittelt wird.

Eine besondere Variante ist der **Erlebensfall-Bonus**, bei dem die Leistungserhöhung aus Bonus nur auf die Erlebensfalleistung abzielt, nicht aber die Todesfalleistung betrifft. So würde der laufende Überschussanteil im Beispiel der gemischten Versicherung ausschließlich zur Erhöhung der Ablaufleistung verwendet, und bei der aufgeschobenen Rentenversicherung mit Beitragsrückgewähr würde letztere bei der Bestimmung der zusätzlichen Bonusrente ignoriert.

In Formeln stellt sich dieses Vorgehen wie folgt dar:

$V S_m^{\text{Bonus}}$ bezeichnet die nach m Jahren insgesamt erreichte Bonusleistung.

Für $m = 0$ ist $V S_0^{\text{Bonus}} = 0$.

Die in Jahr m hinzukommende Bonusleistung wird mit $\Delta V S_m^{\text{Bonus}}$ notiert. Sofern vertraglich vereinbart, dürfen für Leistungen aus Überschüssen bzw. für Bonusguthaben abweichende Rechnungsgrundlagen angesetzt werden. Wir unterstellen, dass der Rechnungszins und die biometrischen Annahmen identisch sind, der Kostensatz für die planmäßige beitragsfreie Zeit der aus LGA_m entstehenden Einmalbeitragsversicherung sei jedoch γ_{Bonus} . Weitere Kosten fallen hingegen nicht an.

Der Barwert der zukünftigen Leistungen und Kosten zum Zeitpunkt m wird – unabhängig von der Deckung – durch A_{x+m}^{Bonus} repräsentiert, so dass bspw.

- für eine gemischte Versicherung

- und Bonus nach dem Leistungsspektrum der Stammversicherung

$$A_{x+m}^{\text{Bonus}} = A_{x+m:\overline{n-m}} + \gamma_{\text{Bonus}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}$$

- und Erlebensfall-Bonus

$$A_{x+m}^{\text{Bonus}} = {}_{n-m}E_{x+m} + \gamma_{\text{Bonus}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}$$

- für eine aufgeschobene Rentenversicherung mit vereinbarter Rentengarantiezeit g sowie eingeschlossener Beitragsrückgewähr innerhalb der Aufschubphase
 - während der Aufschubphase und Bonus nach dem Leistungsspektrum der Stammversicherung

$$A_{x+m}^{\text{Bonus}} = \frac{(1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n-m}\ddot{a}_{\overline{g}} + {}_{n+g-m}\ddot{a}_{x+m}) + \gamma_{\text{Bonus}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}}{1 - A_{x+m:\overline{n-m}}}$$

- während der Aufschubphase und Erlebensfall-Bonus

$$A_{x+m}^{\text{Bonus}} = (1 + \gamma_4) \cdot ({}_{n-m}\ddot{a}_{\overline{g}} + {}_{n+g-m}\ddot{a}_{x+m}) + \gamma_{\text{Bonus}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}$$

- während des Rentenbezugs innerhalb der Rentengarantiezeit

$$A_{x+m}^{\text{Bonus}} = (1 + \gamma_4) \cdot (\ddot{a}_{\overline{n+g-m}} + {}_{n+g-m}\ddot{a}_{x+m})$$

- während des Rentenbezugs nach Ablauf der Rentengarantiezeit

$$A_{x+m}^{\text{Bonus}} = (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+m} .$$

Durch den laufenden Überschussanteil LGA_m erhöht sich die Bonussumme am Ende des m -ten Jahres um

$$\Delta VS_m^{\text{Bonus}} = \frac{LGA_m}{A_{x+m}^{\text{Bonus}}} ,$$

und die Gesamt-Bonussumme nach m Jahren beträgt

$$VS_m^{\text{Bonus}} = VS_{m-1}^{\text{Bonus}} + \Delta VS_m^{\text{Bonus}} .$$

Im Falle von Rentenversicherungen gilt für die Bonusrente JR_m^{Bonus} analog

$$\Delta JR_m^{\text{Bonus}} = \frac{LGA_m}{A_{x+m}^{\text{Bonus}}} ,$$

und die nach m Jahren insgesamt erreichte Bonusrente ist

$$JR_m^{\text{Bonus}} = JR_{m-1}^{\text{Bonus}} + \Delta JR_m^{\text{Bonus}} .$$

Die Verwendungsform (Erlebensfall-)Bonus führt zur Bildung eines zusätzlichen Deckungskapitals für die aus den Überschussanteilen generierte Versicherungsleistung. Dieses Bonus-Deckungskapital $_m V_x^{\text{Bonus}}$ erhöht die Bilanzdeckungsrückstellung des Vertrags und ist selbst wieder überschussberechtigt. Deckungskapital für Bonusleistungen bewirkt zusätzliche Zinsgarantien und führt somit zu einem erhöhten Bedarf an Solvenzmitteln.

Für Risiko- und Kapitallebensversicherungen lässt sich das Bonus-Deckungskapital darstellen als

$$_m V_x^{\text{Bonus}} = V S_m^{\text{Bonus}} \cdot A_{x+m}^{\text{Bonus}} .$$

Für Rentenversicherungen im Rentenbezug oder mit der Überschussverwendung Erlebensfall-Bonus ist

$$_m V_x^{\text{Bonus}} = J R_m^{\text{Bonus}} \cdot A_{x+m}^{\text{Bonus}} .$$

Befindet sich die Rentenversicherung hingegen in der Aufschubphase und ist Bonus nach dem Leistungsspektrum der Stammversicherung vereinbart, so ergibt sich durch die Berücksichtigung der Beitragsrückgewähr

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{Bonus}} &= (1 + \gamma_4) \cdot J R_m^{\text{Bonus}} \cdot ({}_{n-m} | \ddot{a}_{\overline{g}} | + {}_{n+g-m} | \ddot{a}_{x+m} |) \\ &\quad + \gamma_{\text{Bonus}} \cdot J R_m^{\text{Bonus}} \cdot \ddot{a}_{x+m:n-\overline{m}} \\ &\quad + L G A_m^{\text{Summe}} \cdot A_{x+1:m:\overline{n-m}} , \end{aligned}$$

wobei

$$L G A_m^{\text{Summe}} = \sum_{j=\max\{1; w^{\text{LGA}}\}}^m L G A_j$$

die Summe der bisher zugeteilten laufenden Überschussanteile, d.h. die Summe der für Bonuserhöhungen gezahlten Einmalprämien, ist.

10.3.1.2 Todesfall-Bonus

Ebenfalls zu einer Erhöhung der versicherten Leistung führt die Überschussverwendung in Form des Todesfall-Bonus. Hierbei wird ausschließlich die Todesfallleistung erhöht, eine evtl. versicherte Erlebensfallleistung bleibt davon unberührt.

Die Besonderheit und gleichzeitig der wesentliche Unterschied zum (Erlebensfall-)Bonus ist jedoch, dass die Erhöhung der Todesfallleistung nur für ein Jahr gilt. Aus dem laufenden Überschussanteil wird also eine einjährige Risikolebensversicherung generiert.

Stirbt die VP im Laufe des $(m + 1)$ -ten Versicherungsjahres, so erhöht sich die Todesfallleistung sofort um $\Delta VS_m^{\text{Bonus}}$, andernfalls wird keine zusätzliche Leistung fällig. Der Gewinnanteil ist quasi als natürliche Prämie für die Bonusleistung im Todesfall innerhalb des nächsten Versicherungsjahres anzusehen, d.h.

$$LGA_m = v \cdot q_{x+m} \cdot \Delta VS_m^{\text{Bonus}}$$

bzw.

$$\Delta VS_m^{\text{Bonus}} = \frac{LGA_m}{v \cdot q_{x+m}} .$$

Ein Bonus-Deckungskapital wird nicht gebildet.

Alternativ kann ein Todesfall-Bonus als Prozentsatz der garantierten Todesfallleistung deklariert werden. Dieser Satz gilt vielfach bereits vom Beginn des Vertrags an, so dass sich auch die Bezeichnung **Sofort-Bonus** findet.

Aufgrund der Fokussierung auf die Todesfallleistung ist diese Überschussverwendungsform ausschließlich bei Risikolebensversicherungen sinnvoll bzw. wählbar.

10.3.1.3 Verzinsliche Ansammlung

Bei der Verwendungsform der verzinslichen Ansammlung (kurz: VZA) werden die laufenden Überschussanteile in einem separaten Konto geführt, in welchem sie wie auf einem Sparbuch angesammelt und verzinst werden. Das **Ansammlungsguthaben** wächst also jedes Jahr um den am Jahresende zugeteilten Überschussanteil sowie durch die auf das bereits vorhandene Guthaben gewährte Verzinsung.

Der Prozentsatz für die Verzinsung des Ansammlungsguthabens, der **Ansammlungszinssatz** i_{VZA} , wird als separater Überschussanteilsatz deklariert. Vielfach gilt

$$i_{VZA} = i + z_m^{\text{Zins}} ,$$

d.h., das Ansammlungsguthaben wird mit der deklarierten Gesamtverzinsung und folglich mindestens mit dem Rechnungszins i verzinst.

Grundsätzlich ist bei entsprechender, vertraglicher Vereinbarung aber auch $i_{VZA} \leq i$ möglich, so dass das Ansammlungsguthaben in diesen Fällen eine niedrigere Zinsgarantie als die zugrunde liegende Police hat.

Bezeichne VZA_m den Stand des Ansammlungskontos am Ende des m -ten Versicherungsjahres. Für $m = 0$ ist $VZA_0 = 0$, und für $m \geq 1$ entwickelt sich das Ansammlungsguthaben gemäß

$$\begin{aligned} VZA_{m+1} &= VZA_m \cdot (1 + i_{VZA}) + LGA_m \\ &= VZA_m \cdot (1 + i + (i_{VZA} - i)) + LGA_m . \end{aligned} \quad (10.1)$$

Auch wenn das Ansammlungsguthaben grundsätzlich gegenüber dem VN garantiert ist, so hat es dennoch nicht den Charakter einer Deckungsrückstellung.

Bei Eintritt des Versicherungsfalls, bei Rückkauf oder Ablauf wird das zum jeweiligen Zeitpunkt vorhandene Ansammlungsguthaben ausgezahlt, bei aufgeschobenen Rentenversicherungen wird es bei Rentenübergang üblicherweise in eine Bonusrente umgewandelt.

10.3.1.4 Fondsanlage

Wählt der VN die Überschussverwendung Fondsanlage, werden seine laufenden Überschussanteile in Fonds investiert.

Ähnlich der verzinslichen Ansammlung werden die Überschüsse also in einem separaten (Fonds-)Konto geführt. Ein wesentlicher Unterschied ist, dass die Entwicklung des Fondsguthabens ungewiss ist. Bei einer positiven, über dem deklarierten Ansammlungszins liegenden Fondsperformance hat der VN zwar die Chance auf ein höheres Überschussguthaben. Dem entgegen steht jedoch das Risiko, dass die investierten Überschussanteile bei einer negativen Fondsentwicklung teilweise (oder im schlimmsten Fall sogar komplett) verloren sind. Außerdem fallen für die Verwaltung des Fondsguthabens i.d.R. zusätzliche Gebühren an, welche die Rendite dieser Form der Überschussverwendung mindern.

Auf die Fortschreibung des Fondskontos werden wir in Kap. 13 im Rahmen der Fondsgebundenen Versicherung genauer eingehen.

Bis dahin können wir uns in vereinfachter Weise eine Entwicklung analog zum Ansammlungsguthaben vorstellen, indem

$$FG_m = FG_{m-1} \cdot (1 + i_{\text{Fonds}}) + LGA_m .$$

Dabei ist FG_m (mit $FG_0 = 0$) das Fondsguthaben am Ende des m -ten Versicherungsjahres und i_{Fonds} die Netto-Fondsperformance im Jahr m , d.h. die effektive Fondsentwicklung nach Berücksichtigung von Kosten.

Die Auszahlungsmodalitäten entsprechen denen der verzinslichen Ansammlung, indem bei Tod, Rückkauf oder Ablauf das zum jeweiligen Zeitpunkt vorhandene Fondsguthaben ausgezahlt wird. Bei aufgeschobenen Rentenversicherungen wiederum wird bei Rentenübergang eine Bonusrente daraus ermittelt.

10.3.1.5 Beitragssofortabzug

Die Überschussverwendung in Form des Beitragssofortabzugs ist auch unter dem Namen **Sofortrabatt** geläufig. Hierbei werden die laufenden Überschussanteile nicht zur Erhöhung der versicherten Leistungen, sondern zur Reduktion der zu zahlenden Prämie herangezogen. Üblicherweise wird ein Überschussanteilsatz deklariert, um den sich die Zahlprämie auf die effektiv zu zahlende Prämie (Effektivprämie) verringert.

Während die vorgenannten Verwendungsformen Bonus, Verzinsliche Ansammlung und Fondsanlage im Nachhinein gewährt werden, erfolgt der Beitragssofortabzug vorschüssig und entsprechend der vereinbarten Prämienzahlweise entweder vollständig zu Beginn oder ratierlich während des jeweiligen Versicherungsjahres. Der VN erhält die Überschussgutschrift bereits vorab und folglich bevor sie eigentlich entsteht. Inhaltlich handelt es sich beim Sofortrabatt um vorweg gewährte Risikogewinne, indem die in den biometrischen Rechnungsgrundlagen enthaltenen Sicherheitszuschläge in Teilen sofort wieder an den VN zurückgegeben werden.

Problematisch an dieser Form der Überschussverwendung ist, dass sich bei einer Änderung der deklarierten Überschussanteilsätze während der Vertragslaufzeit auch die Effektivprämie ändert. Auch wenn die VU versuchen, eine gleichbleibende Überschussbeteiligung zu halten, so muss sich der Kunde prinzipiell auf in der Höhe schwankende (Effektiv-)Prämien einstellen. Die Brutto- bzw. Zahlprämie wird von einer Änderung der Deklaration unberührt und stellt auf diese Weise eine Obergrenze für die maximal zu zahlende Effektivprämie dar.

Häufig wird anstelle von Beitragssofortabzug auch die Bezeichnung **Beitragsverrechnung** verwendet. Auch wenn diese beiden Formen ähnlich funktionieren, besteht dennoch ein Unterschied zwischen ihnen. Die Abgrenzung der Beitragsverrechnung vom Beitragssofortabzug besteht darin, dass die im Laufe eines Versicherungsjahres entstandenen und am Jahresende zugeteilten Überschussanteile erst mit den Prämien des darauf folgenden Jahres verrechnet werden.

Falls eine abgekürzte Beitragszahlung vereinbart ist, werden die laufenden Überschussanteile in der beitragsfreien Zeit nach einer der anderen Formen, meist nach der Verzinslichen Ansammlung, verwendet. Gleiches gilt im Zuge der Beitragsverrechnung auch für einen über die im Folgejahr zu zahlende Prämie ggf. hinausgehenden Teil des laufenden Überschussanteils.

10.3.1.6 Barauszahlung

Hierbei werden die laufenden Überschussanteile per Überweisung direkt an den VN ausgeschüttet.

Zu finden ist diese Form der Überschusswendung vorrangig bei Rentenversicherungen im Rentenbezug, wo die Auszahlung der Überschussanteile zu einer Erhöhung der fälligen Rentenleistungen führt.

Da das Deckungskapital in der Rentenbezugsphase sinkt, reduziert sich üblicherweise auch der Zinsüberschussanteil und somit der bar ausgezahlte, laufende Überschussanteil. Gelegentlich wird die Überschussverwendung in Form der Barauszahlung während des Rentenbezugs daher unter dem Namen „fallende Gewinnrente“ angeboten.

10.3.1.7 Rentenzuschlag

Für Rentenversicherungen im Rentenbezug existiert noch eine weitere, besondere Form der Überschussverwendung, welche als Rentenzuschlag (oder beziehen als „konstante Gewinnrente“) geläufig ist.

Bei der Überschussverwendung in Form der Bonusrente steigt die aus den laufenden Überschussanteilen des Rentenbezugs finanzierte Rente jedes Jahr um einen gewissen Prozentsatz an, so dass hierfür auch die Begriffe „steigende Gewinnrente“ oder „Rentenzuwachs“ gebräuchlich sind.

Beim Rentenzuschlag hingegen wird eine konstante Zusatzrente aus Überschüssen gezahlt. Der Rentenzuschlag ist daher zu Beginn der Rentenzahlungen zunächst höher als die Bonusrente. Nach hinten raus kehrt sich das Verhältnis jedoch um, da die jährlich steigende Bonusrente irgendwann die konstante Zusatzrente ein- und schließlich überholt. Für den Rentenzuschlag wird – analog zum Schlussüberschussanteilfonds – i.d.R. eine gesonderte Rückstellung (Gewinnrenten-Fonds) gebildet.

Unter der Prämisse einer gleichbleibenden Deklaration wird die Höhe des Rentenzuschlags derart bestimmt, dass er – im Barwert betrachtet – äquivalent zur Bonusrente ist.

Sofern sich die Überschussdeklaration während der Rentenbezugsphase ändert, geht die Gleichheit der beiden Gewinnrenten verloren. Für die Bonusrente ergibt sich in diesem Fall ein neuer Steigerungssatz, aber sie sinkt nicht. Der Rentenzuschlag hingegen muss auf Basis des erwähnten Barwert-Kalküls neu bestimmt werden und kann daher auch abgesenkt werden.

Es bleibt zu erwähnen, dass es auch Mischformen gibt, bei denen bspw. ein Teil der Zusatzrente aus Überschüssen als Rentenzuschlag und der andere Teil als Bonusrente gewährt wird. Die zugehörigen deklarierten Überschussanteilsätze sind dann entsprechend (niedriger) zu wählen.

10.3.1.8 Zusammenfassung

Die nachfolgende Tabelle gibt noch einmal einen Überblick darüber, welche der verschiedenen Formen zur Verwendung laufender Überschüsse bei welchen Produktarten typischerweise zur Verfügung stehen:

Überschussverwendung	Risiko-LV	gemischte V	RentenV
Bonus(system)	—	✓	✓ (Aufschub- und Rentenphase)
Erlebensfall-Bonus	—	(✓)	✓ (Aufschubphase)
Todesfall-Bonus	✓	—	—
Verzinsliche Ansammlung	(✓)	✓	✓ (Aufschubphase)
Fondsanlage	—	✓	✓ (Aufschubphase)
Beitragssofortabzug	✓	—	—
Barauszahlung	—	—	✓ (Rentenphase)
Rentenzuschlag	—	—	✓ (Rentenphase)

10.3.2 Schlussüberschussbeteiligung

Die Schlussüberschussbeteiligung wird bei regulärem Ablauf des Vertrags oder am Ende der Aufschubphase in voller Höhe ausgezahlt. Dabei kann, ergänzend zu den angesammelten Schlussgewinnanteilen, eine zusätzliche Schlusszahlung ausgeschüttet werden. Auch bei Tod oder vorzeitigem Rückkauf wird i.d.R. eine Leistung aus Schlussüberschüssen fällig, jedoch wird diese nur anteilig gewährt.

Da die tatsächliche Auszahlung erst mit zeitlicher Verzögerung im Verlauf des Vertrags erfolgt, erhöht eine Verschiebung von der laufenden in die Schlussüberschussbeteiligung die Profitabilität eines Produkts mit beiden Überschussarten.

Auch wenn bereits zugeteilte Schlussüberschussanteile nicht unwiderruflich garantiert und erst am Ende der Vertrags- bzw. Aufschubdauer regulär fällig sind, besteht während des verbleibenden Zeitraums dennoch eine Art Anwartschaft auf die spätere Auszahlung. Für eben diese Anwartschaft wird während der Vertragslaufzeit bereits eine Rückstellung gebildet, welche als **Schlussüberschussanteilfonds** (kurz: **SÜA-Fonds** oder **SGA-Fonds**) bezeichnet wird. Auf ihre Berechnung wird in Abschn. 10.4.2.2 eingegangen.

Aufgrund ihrer potenziellen Widerrufbarkeit oder Kürzbarkeit übernimmt die Schlussüberschussbeteiligung eine Art Pufferfunktion. Im Gegensatz zu Deckungskapital bildenden Verwendungsformen wie Bonus zieht die Schlussgewinnbeteiligung keine Erhöhung von Solvenzanforderungen nach sich. Im Gegenteil, der SÜA-Fonds kann stattdessen sogar als Mittel zur Erfüllung der Solvenzanforderungen eingesetzt werden.

10.3.3 Beteiligung an den Bewertungsreserven

Eine Beteiligung an den BWR wird bei Ablauf der Versicherung, bei aufgeschobenen Rentenversicherungen am Ende der Aufschubphase, (mindestens) zur Hälfte ausgezahlt.

Darüber hinaus wird sie i.d.R. anteilig fällig, wenn der Vertrag vorzeitig aufgrund von Tod oder Storno endet. Bei Rentenversicherungen im Rentenbezug fließt die Beteiligung an den BWR zudem auch in Rentensteigerungen aufgrund Überschussbeteiligung ein.

Analog zur Schlussüberschussbeteiligung ist eine Beteiligung an den BWR nicht garantiert.

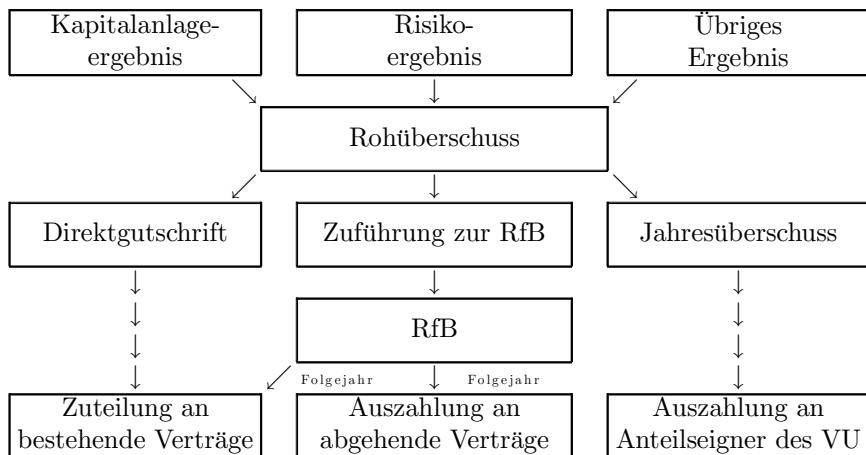
10.4 Instrumente der Überschussbeteiligung

Ausgehend vom Rohüberschuss, welcher sich aus den drei Ergebnisquellen Kapitalanlage-, Risiko- und Übriges Ergebnis zusammensetzt, werden sowohl die Versicherten als auch die Anteilseigner am wirtschaftlichen Erfolg des VU beteiligt.

Den Versicherten kommen die zur Verteilung stehenden Überschüsse einerseits als Direktgutschrift und andererseits über eine Zuführung zur RfB zugute. Die gesamten VN-bezogenen Überschüsse eines Jahres werden auf diese beiden Instrumentarien aufgeteilt bzw. durch diese finanziert.

Der verbleibende Teil des Rohüberschusses wird entweder in Form einer Dividendenzahlung an die Anteilseigner ausgeschüttet oder zur Erhöhung des Eigenkapitals des VU verwendet.

Das folgende Schaubild zeigt eine schematische Darstellung der Überschussbeteiligung:



10.4.1 Direktgutschrift

Die Überschussbeteiligung als Direktgutschrift wurde im Jahr 1984 eingeführt. Dabei wird ein Teil der laufenden Überschüsse den Versicherten direkt, d.h. ohne zeitliche Verzögerung, noch im selben Jahr gutgeschrieben; der verbleibende Teil wird der RfB zugeführt und zu einem späteren Zeitpunkt an die VN ausgeschüttet.

Die Aufteilung, wie viel als Direktgutschrift gewährt wird und welcher Betrag der RfB zugeführt wird, obliegt dem VU und kann von Jahr zu Jahr variieren. Da die Direktgutschrift unmittelbar zu Lasten des Geschäftsjahrs geht, in dem die Ausschüttung erfolgt, orientiert sich die Entscheidung über das Aufteilungsverhältnis maßgeblich am zu erzielenden Geschäftsergebnis des betreffenden Jahres.

10.4.2 Rückstellung für Beitragsrückerstattung

Bei der RfB handelt es sich um ein Konstrukt, das spezifisch für die deutsche Lebensversicherung ist.

Die RfB entwickelt sich, ausgehend vom Wert der RfB zu Jahresbeginn, indem zunächst im Laufe des Geschäftsjahres Überschusszuweisungen, die bereits in vorherigen Jahren der RfB zugeführt und nun an die VN ausgeschüttet werden, aus der RfB entnommen werden. Dabei handelt es sich sowohl um laufende Überschussanteile, aber auch Auszahlungen von Schlussüberschussanteilen und Beteiligungen an den BWR für Verträge, die regulär ablaufen oder vorzeitig (durch Tod oder Rückkauf) enden. Am Ende des Geschäftsjahrs wird die nach Abzug der Direktgutschrift verbleibende Überschussbeteiligung des ablaufenden Geschäftsjahrs zugeführt.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{array}{l}
 \text{RfB zu Beginn des Geschäftsjahres} \\
 ./\text{ Entnahme aus der RfB während des Geschäftsjahres} \\
 + \text{ Zuführung zur RfB am Ende des Geschäftsjahres} \\
 \hline
 = \text{RfB zum Ende des Geschäftsjahres} .
 \end{array}$$

Die Überschussbeteiligung eines bestimmten Jahres besteht also aus der Direktgutschrift desselben Jahres sowie einem bereits früher der RfB zugeführten und mit zeitlicher Verzögerung aus der RfB wieder entnommenen Zuweisungsbetrag. Zur Verdeutlichung sei ein kurzes Zahlenbeispiel für die laufende Überschussbeteiligung gegeben (Angaben in EUR):

Ende des Jahres	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
Rohüberschuss davon 90% an die VN	100	120	75	...
	90	108	67,5	...
deklarierte Überschussbeteiligung davon als Direktgutschrift	90	90	90	...
	18	18	18	...
Entnahme aus RfB	0	72	72	72
Zuführung zur RfB	72	90	49,5	...
RfB davon gebundene RfB davon freie RfB	122	140	117,5	...
	72	72	72	...
	50 [†]	68	45,5	...
Ausschüttung an die VN	—	90	90	90

[†] Startwert für freie RfB (bereits vorhandene Mittel des VU)

Der erwirtschaftete Rohtüberschuss schwankt von Jahr zu Jahr. 90% dieses Gewinns werden an die Versicherten zurückerstattet.

Das VU gibt dennoch jedes Jahr eine konstante Überschussbeteiligung i.H.v. 90 EUR. Die Deklaration bezieht sich immer auf das Folgejahr, in welchem die Gutschrift beim VN erfolgt. Der jährliche Überschussanteil wird jeweils durch eine gleichbleibende Direktgutschrift i.H.v. 18 EUR sowie durch eine Entnahme aus der RfB i.H.v. 72 EUR finanziert. Die im Jahr m erfolgende Entnahme spiegelt sich im Vorjahr $m - 1$ bereits in der gebundenen RfB wider.

Die gleichbleibende Überschussbeteiligung wird durch Auf- und Abbau der freien RfB ermöglicht. Zum Zeitpunkt $m = 1$ hätte man eine höhere Überschussbeteiligung geben können, stattdessen wurde der Mehrertrag zur Erhöhung der freien RfB verwendet. Im nächsten Jahr (zu $m = 2$) hätte man die Überschussbeteiligung eigentlich absenken müssen. Dass die Deklaration dennoch stabil bleibt, geht zu Lasten der freien RfB.

Das Beispiel zeigt auch, warum es Wartezeiten für die Überschussbeteiligung geben kann, denn zur ersten Deklaration (zum Zeitpunkt $m = 0$) hat der Bestand noch gar nichts beigetragen.

Der „Umweg“ über die RfB führt einerseits dazu, dass der Aufwand für die Überschussbeteiligung und die Auszahlung zeitlich voneinander entkoppelt werden. In den meisten Fällen ergibt sich eine zeitliche Diskrepanz von bis zu drei Jahren zwischen der eigentlichen Gewinnentstehung und der finalen Gutschrift der Überschüsse beim VN.

Andererseits, und das ist der wesentliche Punkt, wird das VU dadurch in die Lage versetzt, eine möglichst stabile Überschussbeteiligung zu deklarieren, was nicht zuletzt in der Marktwahrnehmung durch die Kunden durchaus von Bedeutung ist.

Jährliche Schwankungen im Geschäftsergebnis ziehen grundsätzlich eine schwankende Überschussdeklaration nach sich. Die RfB übernimmt nun eine Pufferfunktion, indem in Jahren mit einer eigentlich niedrigeren Überschussbeteiligung dennoch eine – aufgrund von in Vorjahren zugeführten und noch nicht ausgegebenen Überschussbeträgen – gleichbleibende Ausschüttung an die VN vorgenommen werden kann. In Jahren, in denen eine höhere Überschussbeteiligung anfällt, können die der RfB zugeführten Beträge in gewissem Umfang für schlechtere Zeiten zurückgestellt werden.

Somit hat die RfB also einen glättenden Effekt auf die vom VU gewährte Überschussbeteiligung.

Die RfB setzt sich aus den folgenden Komponenten zusammen:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{gebundene RfB} \\
 + & \text{SÜA-Fonds} \\
 + & \text{freie RfB} \\
 \hline
 = & \text{RfB} .
 \end{array}$$

- Die **gebundene RfB** oder auch **Festlegungsschicht** enthält sämtliche Beträge, die für eine Ausschüttung von laufenden oder Schlussüberschüssen sowie der Beteiligung an den BWR in den folgenden (meist ein bis zwei) Jahren bereits festgelegt sind. Diese Geldmittel sind demnach in ihrer Verwendung gebunden und somit nicht mehr frei verfügbar. Die gebundene RfB zählt – wie auch die Deckungsrückstellung – zu den versicherungstechnischen Rückstellungen und ist gemäß § 125 VAG durch das Sicherungsvermögen zu bedecken.
- Der SÜA-Fonds stellt eine Teilrückstellung innerhalb der RfB dar, welche der Anfinanzierung der zukünftigen Schlussüberschussbeteiligung sowie der Beteiligung an den Bewertungsreserven dient.
- Alle übrigen in der RfB enthaltenen finanziellen Mittel werden in der **freien RfB** zusammengefasst. Hierbei handelt es sich ebenfalls um Mittel, die für die Überschussbeteiligung der Versicherten zwar vorgesehen, aber noch nicht festgelegt sind. Genau dieser ungebundene Teil der RfB ist es, der die beschriebene Pufferfunktion ausübt und ausgleichend auf die Überschussdeklaration in aufeinanderfolgenden Jahren wirkt. Die freie RfB hat somit den Charakter einer Schwankungsrückstellung, welche in Jahren hoher erwirtschafteter Überschüsse aufgebaut und in Jahren mit geringeren Überschusseinkünften wieder abgebaut wird.

Die ungebundenen Teile der RfB (freie RfB und SÜA-Fonds) stellen Mittel dar, über deren konkrete Verwendung das VU noch nicht entschieden hat und auf welche somit noch keine Ansprüche seitens der VN bestehen.

Die RfB wird grundsätzlich für den Alt- und den Neubestand getrennt geführt. Die Tatsache, dass die zum Zeitpunkt der Trennung im Jahr 1994 vorhandene RfB vollständig dem Altbestand zugeordnet wurde, hatte seitdem eine Ungleichbehandlung der beiden Teilbestände zufolge. Bei einer derartigen Bestandstrennung vererben nämlich die vor 1994 abgeschlossenen Verträge bei ihrem Ausscheiden aus dem Versichertenkollektiv keine RfB-Mittel an die ab 1995 hinzugekommenen Kunden weiter, sondern nur an ihren eigenen Teilbestand. Da die Anzahl Verträge des Altbestands kontinuierlich abnimmt, führt dies zu einem überproportionalen Aufbau der RfB dieses Teilbestands (siehe *GDV (2014)*).

Mit der „Verordnung über den kollektiven Teil der Rückstellung für Beitragsrückerstattung“ (kurz: **RfB-Verordnung** bzw. **RfBV**) wurde im Jahr 2015 eine **kollektive RfB** eingeführt. Diese Komponente der ungebundenen RfB ist dem Gesamtbestand zugeordnet und stellt die Vererbung zwischen Alt- und Neubestand wieder her. Sie ermöglicht also einen Ausgleich zwischen den Teilbeständen, indem der Mechanismus für beide vorsieht, Mittel an die kollektive RfB abzugeben und auch wieder von ihr zu erhalten.

10.4.2.1 Mindestzuführungsverordnung

Wie hoch die der RfB zugeführten Überschüsse mindestens sein müssen, wird in der „Verordnung über die Mindestbeitragsrückerstattung in der Lebensversicherung“ geregelt. Seit Ablösung der Vorgänger-Version im Jahr 2008, welche unter der Abkürzung ZRQuotenV geläufig war, wird diese Verordnung auch als **Mindestzuführungsverordnung** (kurz: **MindZV**) bezeichnet.

Während die ZRQuotenV unterschiedliche Regelungen für Alt- und Neubestand vorsah, werden diese beiden Teilbestände des Versicherungspportfolios im Rahmen der MindZV zwar nach wie vor getrennt, aber nun einheitlich behandelt.

Früher galt für den Altbestand ein sog. Rückgewährrechtsatz. Für den Neubestand galt eine Mindestzuführungsquote bzw. Rückerstattungsquote i.H.v. 90% der anzurechnenden Kapitalerträge abzüglich der Direktgutschrift und der rechnungsmäßigen Zinsen. Zwar wurde gemäß der Verordnung auch eine angemessene Beteiligung der Versicherten an den verbleibenden Ergebnissen (Risiko, Kosten und sonstige) gefordert – sofern diese positiv waren. Es waren allerdings keine Mindestquoten spezifiziert, so dass nur das Kapitalanlageergebnis im Fokus stand.

Aufgrund des rückläufigen Zinsniveaus und damit einhergehend sinkenden Kapitalerträgen haben die anderen Überschussquellen jedoch zunehmend an Bedeutung gewonnen.

Im Rahmen der MindZV sind die Vorschriften zur Mindestbeteiligung auf das Risiko- und das Übrige Ergebnis in dem Sinne ausgedehnt worden, dass für diese beiden Ergebnisse ebenfalls Mindestquoten festgesetzt wurden.

Die Mindestzuführung zur RfB für die überschussberechtigten Versicherungsverträge des Alt- bzw. Neubestands setzt sich in Abhängigkeit der drei Ergebnisse wie folgt zusammen (§§ 6 bis 8 MindZV):

$$\begin{aligned}
 & \max \{0 ; 90\% \text{ der anzurechnenden Kapitalerträge} \\
 & \quad ./. \text{ rechnungsmäßige Zinsen}\} \\
 + & \max \{0 ; 90\% \text{ des Risikoergebnisses}\} \\
 + & \max \{0 ; 50\% \text{ des Übrigen Ergebnisses}\} \\
 ./. & \text{ Direktgutschrift} \\
 = & \text{ Mindestzuführung zur RfB .}
 \end{aligned}$$

Zu dieser kurz gefassten und vereinfachten Übersicht sind ein paar Anmerkungen notwendig.

- Die drei Ergebnisse sind jeweils einzeln und getrennt nach Alt- und Neubestand zu ermitteln. Die im Übrigen Ergebnis zusammengefassten Gewinnquellen dürfen saldiert werden. Die drei Ergebnisse untereinander dürfen hingegen nicht miteinander verrechnet werden. Eine Ausnahme bildet der im nächsten Absatz beschriebene Fall negativer Kapitalerträge.

- Zum Kapitalanlageergebnis:

Die dargestellte Maximierung mit Null gilt für den Fall, dass die anzurechnenden Kapitalerträge (ohne den Faktor 0,9) größer als die rechnungsmäßigen Zinsen sind und sich folglich nur durch Anwendung des Prozentsatzes ein negativer Betrag ergibt.

Sind bereits die anzurechnenden Kapitalerträge (ohne den Faktor 0,9) kleiner als die rechnungsmäßigen Zinsen, so wird keine Anhebung auf Null vollzogen. Stattdessen wird die Differenz aus den ungekürzten anzurechnenden Kapitalerträgen und den rechnungsmäßigen Zinsen als (negative) Mindestzuführung aus Kapitalerträgen angesetzt und mit den Mindestzuführungen aus den verbleibenden beiden Ergebnissen verrechnet.

Zur Bestimmung der anzurechnenden Kapitalerträge wird zunächst die Differenz aus den Erträgen und Aufwendungen aller Kapitalanlagen berechnet, wobei Kapitalanlageerträge und -aufwendungen zu Lebensversicherungen auf Rechnung und Risiko der VN (d.h. fondsgebundene Versicherungen) ausgenommen sind. Besagter Saldo wird anschließend auf den Alt- und auf den Neubestand aufgeteilt, indem dieser mit dem Quotienten aus den mittleren zinstragenden Passiva des Alt- bzw. Neubestands im Zähler und den mittleren zinstragenden Passiva des Gesamtbestandes im Nenner multipliziert wird.

Die rechnungsmäßigen Zinsen sind, genau genommen, um Zinsen auf Pensionsrückstellungen zu vermindern.

- Zum Risikoergebnis:

Sofern das Risikoergebnis negativ ist, wird die daraus resultierende, ebenfalls negative Mindestbeteiligung durch Null ersetzt.

Mit dem LVRG wurde die Mindestbeteiligungsquote für das Risikoergebnis von vorher 75% auf den derzeit aktuellen Satz i.H.v. 90% angehoben.

- Zum Übrigen Ergebnis:

Sofern das Übrige Ergebnis negativ ist, wird die daraus resultierende, ebenfalls negative Mindestbeteiligung durch Null ersetzt.

- Direktgutschrift:

Die Direktgutschrift umfasst auch Schlusszahlungen aufgrund der Beteiligung an den BWR, soweit letztere als Direktgutschrift gewährt werden.

- Sofern sich nach Abzug der Direktgutschrift eine negative Mindestzuführung zur RfB ergibt, wird diese durch Null ersetzt.

- In bestimmten Ausnahmefällen kann die Mindestzuführung zur RfB mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde reduziert werden, bspw. zwecks Ausgleich eingetretener, unvorhersehbarer Verluste oder falls diese Mittel zur Deckung des Solvabilitätsbedarfs benötigt werden.

Die Tatsache, dass die Versicherten nur an positiven Gewinnen des VU partizipieren, während negative Gewinne, sprich Verluste, voll zu Lasten der Eigentümer bzw. Anteilseigner des VU gehen, wird als **Asymmetrie des Geschäftsmodells der Lebensversicherung** bezeichnet.

Neben der Höhe der Mindestzuführung regelt die MindZV auch, dass der ungebundene Teil der RfB nicht über eine in § 13 MindZV formelmäßig definierte Höchstgrenze hinaus ansteigen darf. Dies bedeutet insbesondere, dass die der RfB zugeführten Mittel nicht unbegrenzt lange dort „geparkt“ werden dürfen, sondern irgendwann auch tatsächlich ausgeschüttet und den Versicherten gutgeschrieben werden müssen.

10.4.2.2 Schlussüberschussanteilfonds

Auch wenn der Begriff „Fonds“ im Namen vorkommt, handelt es sich beim SÜA-Fonds nicht um eine in Fondsanteilen geführte, sondern konventionell vorgehaltene Rückstellung. Für seine Ermittlung gibt es keine explizit vorgeschriebene Berechnungsformel. Maßgebliche Regelungen bzw. Orientierungshilfen finden sich jedoch in § 28 RechVersV (siehe Abschn. 3.4).

Danach ist der SÜA-Fonds so zu berechnen, dass sich zum Stichtag seiner Ermittlung „die abgezinsten anteiligen Endwerte der Schlussüberschussanteile, Schlusszahlungen und der Mindestbeteiligung an Bewertungsreserven nach Maßgabe der jeweils geltenden Deklaration zum regulären Fälligkeitszeitpunkt (Ablauf der Versicherung oder Rentenbeginn bei aufgeschobenen Rentenversicherungen) ergeben“.

Für die Diskontierung wird üblicherweise ein vom Rechnungszins abweichender Zinssatz i_{SGA} in Höhe der mittleren Umlaufrendite öffentlicher Anleihen, bezogen auf einen Referenzzeitraum von zehn Kalenderjahren, herangezogen.

Die weiteren Vorschriften des § 28 RechVersV münden in die Berechnung des SÜA-Fonds auf Basis einer als $m-n$ -tel Regelung bezeichneten Vorgehensweise, bei der das Verhältnis der abgelaufenen zu der gesamten Versicherungsdauer von zentraler Bedeutung ist. Außerdem muss gewährleistet sein, dass der Wert des SÜA-Fonds bei Ablauf oder Rentenübergang mit der dann fälligen Schlussüberschussbeteiligung übereinstimmt.

Bezeichne $\ddot{SÜA}^{\text{Ablauf}}$ die bei planmäßigem Versicherungsverlauf erzielbare Schlussüberschussbeteiligung, welche am Ende der Versicherungs- bzw. Aufschubdauer ausgezahlt wird. Mit den Bezeichnungen aus Abschn. 10.2.2.2 ist

$$\ddot{SÜA}^{\text{Ablauf}} = \widehat{SGA}_n^{\text{Summe}},$$

wobei das Dach „ \wedge “ andeuten soll, dass es sich hierbei um eine geschätzte Größe handelt. Da nämlich zum aktuellen Betrachtungszeitpunkt die Deklaration zukünftiger Versicherungsjahre unbekannt ist, wird eine Prognose des Wertes SGA_n^{Summe} vorgenommen basierend auf der Annahme, dass die letzte bekannte Deklaration auch in den Folgejahren bis zum Erreichen des Fälligkeitstermins durchgängig gültig ist.

An dieser Stelle wird eine gängige Berechnungsvorschrift angegeben. Danach ergibt sich der SÜA-Fonds $SÜAF_m$ nach m Versicherungsjahren als

$$SÜAF_m = \frac{\max\{0; m - w^{\text{SGA}}\}}{\max\{1; n - w^{\text{SGA}}\}} \cdot \frac{SÜA^{\text{Ablauf}}}{(1 + i_{\text{SGA}})^{n-m}},$$

sofern die Wartezeit w^{SGA} für die Zuteilung von Schlussgewinnanteilen berücksichtigt wird, bzw.

$$SÜAF_m = \frac{m}{n} \cdot \frac{SÜA^{\text{Ablauf}}}{(1 + i_{\text{SGA}})^{n-m}} \quad (10.2)$$

ohne Einfluss einer Wartezeit.

10.5 Übungen

10.5.1 Aufgaben

Übung 54. Am 1.1.2010 hat ein Lebensversicherer eine große Anzahl gemischter Kapitallebensversicherungen für eine Gruppe von seinerzeit 25-jährigen Männern poliert. Jede dieser Versicherungen hat eine Versicherungssumme von 5.000 EUR und eine Laufzeit von 40 Jahren. Die Prämienzahlungsdauer stimmt mit der Laufzeit überein. Der Rechnungszins beträgt 2% und die zugrunde liegende Sterbetafel ist die DAV 2008 T. Am 31.12.2015 waren noch 9.465 dieser Verträge im Bestand. Im Laufe des Jahres 2016 starben sechs der versicherten Personen. Berechnen Sie auf Basis des Netto-deckungskapitals den Sterblichkeitsgewinn oder -verlust für das Jahr 2016.

10.5.2 Lösungen

Lösung 54. Mit

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{25:\overline{40}} &= \frac{N_{25} - N_{65}}{D_{25}} \\ &\approx \frac{19.115.693,037 - 2.887.643,995}{598.959,953} \\ &\approx 27,09371\end{aligned}$$

ergibt sich eine Nettojahresprämie von

$$\begin{aligned}NP_{25:\overline{40}} &= 5.000 \cdot \frac{A_{25:\overline{40}}}{\ddot{a}_{25:\overline{40}}} = 5.000 \cdot \frac{1 - d \cdot \ddot{a}_{25:\overline{40}}}{\ddot{a}_{25:\overline{40}}} \\ &\approx 5.000 \cdot \frac{1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 27,09371}{27,09371} \\ &\approx 5.000 \cdot 0,01730 \\ &\approx 86,50 \text{ EUR ,}\end{aligned}$$

und aus

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{32:\overline{33}} &= \frac{N_{32} - N_{65}}{D_{32}} \\ &\approx \frac{15.170.913,478 - 2.887.643,995}{518.593,956} \\ &\approx 23,68572\end{aligned}$$

folgt ein Nettodeckungskapital am Ende des Jahres 2016, d.h. zum Zeitpunkt $m = 7$, von

$$\begin{aligned} {}_7V_{25} &= 5.0000 \cdot A_{32:\overline{33}} - NP_{25:\overline{40}} \cdot \ddot{a}_{32:\overline{33}} \\ &\approx 5.000 \cdot \left(1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 23,68572\right) - 86,50 \cdot 23,68572 \\ &\approx 2.677,87 - 2.048,81 \\ &= 629,06 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Dann beträgt das riskierte Kapital im Jahr 2016 (vgl. Abschn. 9.2.2.3)

$$TFL_7 - {}_7V_{25} \approx 5.000 - 629,06 = 4.370,94 \text{ EUR} .$$

Das erwartete riskierte Kapital pro Vertrag ist

$$q_{31} \cdot (TFL_7 - {}_7V_{25}) \approx 0,000768 \cdot 4.370,94 \approx 3,36 \text{ EUR} ,$$

so dass für das bestehende Kollektiv insgesamt

$$9.465 \cdot 3,36 = 31.802,40 \text{ EUR}$$

an Risikoprämie kalkuliert wurden.

Die tatsächlich vom VU benötigte Risikoprämie betrug

$$6 \cdot 4.370,94 = 26.225,64 \text{ EUR} .$$

Für das Jahr 2016 ergibt sich demnach ein Sterblichkeitsgewinn in Höhe von 5.576,76 EUR.

Teil III

Weiterführende Versicherungstechnik

Kapitel 11

Vertragsänderungen und Garantiewerte

Während der langen Dauer eines Lebensversicherungsvertrags kommt es häufig zu Veränderungen der persönlichen Umstände beim VN oder zu Veränderungen auf den Finanzmärkten, welche auch Auswirkungen auf das bestehende Vertragsverhältnis haben können. So kann bspw. das Vertrauen in den Kundenbetreuer oder sogar das VU selbst schwinden. Oder der Kunde präferiert eine Anlageform mit höherer Rendite. Die häufigste Ursache für Vertragsänderungen sind jedoch Änderungen der persönlichen Finanz- bzw. Risikosituation des VN.

Das Vorliegen eines oder mehrerer der vorgenannten Gründe kann dazu führen, dass der VN an den Versicherer herantritt und eine der nachfolgenden Vertragsänderungen wünscht:

- Verlängerung oder Verkürzung der Vertragslaufzeit,
- Erhöhung oder Reduzierung der versicherten Leistung,
- Erhöhung oder Reduzierung der zu zahlenden Prämie – bis hin zur vorzeitigen Einstellung der Prämienzahlung (Beitragsfreistellung),
- Kündigung des Vertrags.

Dabei ist zu beachten, dass manche der Vertragsänderungen zu einer sog. **Novation** führen und für den VN unter steuerlichen Aspekten schädlich sind.

Neben diesen unvorhergesehenen Ereignissen gibt es selbstverständlich auch die eigentlichen, durch die Versicherung abgedeckten und somit erwarteten Ereignisse wie Tod, Ablauf oder Übergang in die Rentenbezugsphase.

Nachfolgend wird dargestellt, was in all jenen Situationen geschieht, wie sich Änderungen an der Vertragskonstellation auf Prämien, Leistungen bzw. Reserven auswirken, welche Zahlungen im Leistungsfall erfolgen und wie sich diese zusammensetzen.

11.1 Änderung von Dauer, Leistung oder Beitrag

Änderungen der Versicherungsdauer, der Prämienzahlungsdauer, der versicherten Leistung oder der Prämienhöhe führen dazu, dass die Versicherung auf Basis der abgeänderten Vertragsgrößen neu kalkuliert werden muss. Für die technische Umsetzung derartiger Vertragsänderungen kommen verschiedene Verfahren zum Einsatz, die im Folgenden kurz erläutert werden.

Das Eintrittsalter der VP sei x , und die Vertragsänderung erfolge m_{aend} Jahre nach dem Versicherungsbeginn (mit $0 < m_{\text{aend}} < n$).

- Vor der Vertragsänderung beträgt die Brutto Prämie $BP_{x:\bar{t}}$. Das Deckungskapital vor Vertragsänderung zum Zeitpunkt m_{aend} lässt sich darstellen als

$${}_{m_{\text{aend}}} V_x = LBW_{m_{\text{aend}}} - PBW_{m_{\text{aend}}} .$$

Dabei repräsentiert $LBW_{m_{\text{aend}}}$ den erwarteten Barwert der zukünftigen Leistungen sowie Kosten, und $PBW_{m_{\text{aend}}}$ den erwarteten Barwert der zukünftigen (Brutto)Prämien.

- Die entsprechenden, neu kalkulierten Größen nach der Vertragsänderung werden mit $BP^{\text{nach Aend}}$ bzw. ${}_{m_{\text{aend}}} V_x^{\text{nach Aend}}$ notiert, und

$${}_{m_{\text{aend}}} V_x^{\text{nach Aend}} = LBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}} - PBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}}$$

setzt sich aus den geänderten Teilgrößen $LBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}}$ und $PBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}}$ zusammen.

Bei der Umsetzung durch sog. **konstruktive Prämien** wird die neue Brutto Prämie zum Zeitpunkt der Änderung nach dem Äquivalenzprinzip ermittelt, indem für die geänderte Vertragskonstellation die (erwarteten) Barwerte von zukünftigen Leistungen und Kosten sowie von zukünftigen Prämien gleichgesetzt werden. Da zum bisherigen Vertrag bereits ein Deckungskapital i.H.v. ${}_{m_{\text{aend}}} V_x$ aufgebaut wurde, ist dieses vorhandene Kapital als Einmalprämie anzurechnen. Für die Brutto Prämie $BP^{\text{nach Aend}}$ ergibt sich somit die folgende Bestimmungsgleichung:

$$LBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}} = PBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}} + {}_{m_{\text{aend}}} V_x .$$

Dabei ist zu beachten, dass in $LBW_{m_{\text{aend}}}^{\text{nach Aend}}$ ggf. enthaltene, einmalige Abschlusskosten nur auf die Differenz $BP^{\text{nach Aend}} - BP_{x:\bar{t}}$ anfallen, so dass in diesen Fällen ${}_{m_{\text{aend}}} V_x^{\text{nach Aend}} \neq {}_{m_{\text{aend}}} V_x$ gilt.

Die Umsetzung der Vertragsänderung durch einen **Neuabschluss** bedeutet, dass zum Zeitpunkt m_{aend} ein zweiter, neu beginnender Vertrag angelegt wird, welcher die Differenz zwischen der ursprünglichen und der abgeänderten Vertragskonstellation abbildet. Der bereits bestehende Vertrag wird also technisch gar nicht angefasst, sondern bleibt als Stammbaustein unverändert bestehen, und stattdessen wird ein zusätzlicher Vertragsbaustein angelegt (siehe Abschn. 3.6). Der Differenzvertrag ist an den originären Vertrag geknüpft und wird gegenüber dem VN nicht explizit dargestellt, so dass der Kunde nach wie vor nur einen einzigen Vertrag hat bzw. sieht. Die Bruttoprämie BP_x^{diff} jenes zweiten Vertrags wird wiederum auf Basis des Äquivalenzprinzips ermittelt, wobei ausschließlich die Vertragsparameter (zusätzliche Leistung, verbleibende Laufzeit etc.) des neuen Vertrags berücksichtigt werden.

Bezeichnet $BP^{\text{nach Aend}}$ die Bruttoprämie, die sich durch das Verfahren der konstruktiven Prämien ergibt, so gilt zum Änderungszeitpunkt

$$BP^{\text{diff}} = BP^{\text{nach Aend}} - BP_{x:\bar{t}}$$

und für das Deckungskapital gleichermaßen

$${}_{m_{\text{aend}}} V_x^{\text{diff}} = {}_{m_{\text{aend}}} V_x^{\text{nach Aend}} - {}_{m_{\text{aend}}} V_x .$$

Insgesamt ist für alle $m \geq m_{\text{aend}}$

$$BP_{x:\bar{t}} + BP^{\text{diff}} = BP^{\text{nach Aend}}$$

sowie

$${}_m V_x + {}_m V_x^{\text{diff}} = {}_m V_x^{\text{nach Aend}} .$$

Schließlich findet auch die Umsetzung durch eine **Beginnverlegung** Anwendung, bei welcher der tatsächliche Beginn der ursprünglichen Versicherung auf ein technisches Beginndatum verlegt wird. Dies geschieht, indem zu der geänderten Vertragskonstellation ein (fiktives) Eintrittsalter $x + \kappa$ bzw. ein (fiktives) Jahr des Versicherungsbegins gesucht wird, so dass dieser neue Vertrag – hochgerechnet von seinem (fiktiven) Beginn auf den Änderungszeitpunkt – dasselbe Deckungskapital aufweist wie der originäre, bestehende Vertrag. Das Verfahren beruht also auf dem Vergleich zweier Deckungskapitalien, so dass die Gleichheit

$${}_{m_{\text{aend}} - \kappa} V_{x+\kappa}^{\text{nach Aend}} = {}_{m_{\text{aend}}} V_x$$

(zumindest näherungsweise) erfüllt ist. Die Verschiebung um κ Jahre kann dabei positiv oder negativ sein.

11.2 Dynamische Erhöhung

Eine besondere Variante der Änderung der Prämien stellt die dynamische Erhöhung oder auch **Beitragsdynamik** dar, so dass diese in einem eigenen Abschnitt dargestellt wird.

Die Dynamisierung der Prämie wird bereits bei Vertragsabschluss vereinbart und bewirkt, dass sich die Bruttojahresprämie planmäßig zu jedem Versicherungsstichtag um einen vorab festgelegten Prozentsatz erhöht. Der VN kann an jedem dieser Termine entscheiden, ob er die Option der Prämiensteigerung ausübt oder nicht. Er hat also das Recht, jeder einzelnen dynamischen Erhöhung zu widersprechen. Wird die Dynamisierung allerdings zu oft abgelehnt, führt dies zu einer Beendigung der Beitragsdynamik, und es erfolgen zukünftig keine automatischen Erhöhungen mehr. Eine gängige Regelung für das Erlöschen der Beitragsdynamik ist, dass die anstehende Erhöhung dreimal in Folge abgelehnt wurde.

Da die erste Dynamisierung frühestens ein Jahr nach Versicherungsbeginn und die letzte Steigerung spätestens ein Jahr vor Ablauf der Prämienzahlungsdauer t geschehen kann, sind maximal $t - 1$ Prämienanhöhungen möglich. Technisch umgesetzt werden dynamische Erhöhungen i.d.R. durch das im vorherigen Abschnitt beschriebene Verfahren des Neuabschlusses, so dass mit jeder einzelnen Erhöhung eine weitere Vertragsscheibe hinzukommt.

Jede Prämiensteigerung führt auch zu einer Erhöhung der versicherten Leistung, so dass beizeiten von einer „dynamischen Erhöhung der Beiträge und Leistungen“ die Rede ist. Dies darf jedoch nicht mit dem ebenfalls existierenden Begriff der **Leistungsdynamik** verwechselt werden (siehe Abschn. 6.2.4). Letztere ist vorrangig bei Produkten anzutreffen, die als Leistung eine Rentenzahlung vorsehen. Leistungsdynamik bedeutet dann, dass die versicherte Rente regelmäßig um einen festgelegten Prozentsatz ansteigt. Diese Erhöhungen werden bei Vertragsabschluss direkt vereinbart und erfolgen nach Eintritt des Leistungsfalls automatisch (d.h., ohne dass der VN ein wiederkehrendes Wahlrecht hat). Die Vereinbarung der Leistungsdynamik hat eine einmalige Auswirkung auf die Prämie in dem Sinne, dass diese höher ist als bei Verzicht auf diese Produkteigenschaft. Das Feature Leistungsdynamik ist in der Prämie also bereits eingepreist, die Prämienhöhe an sich bleibt während ihrer Zahlungsdauer somit konstant.

Dynamische Erhöhungen besitzen nicht automatisch dieselben Rechnungsgrundlagen wie die originäre Stammversicherung. Es kann vertraglich vereinbart sein, dass die aus einer Prämiensteigerung resultierende Leistungserhöhung auf Basis der zum jeweiligen Dynamik-Zeitpunkt aktuellen Rechnungsgrundlagen bestimmt wird. In diesem Fall können sogar die Dynamikscheiben untereinander unterschiedliche Rechnungsgrundlagen haben.

Im Folgenden wird dargestellt, was zum Zeitpunkt einer dynamischen Erhöhung geschieht und wie sich Bruttojahresprämie, versicherte Leistung und Deckungskapital ändern. Dazu betrachten wir eine Prämiensteigerung zum Zeitpunkt m_{dyn} mit $0 < m_{\text{dyn}} < t \leq n$.

Vorab ein Hinweis zur Notation und zu Bezugsgrößen:

Bezeichne ds den vereinbarten Prozentsatz für die dynamische Steigerung, welcher auch als **Dynamiksatz** bezeichnet wird. Dieser kann entweder in gewissen Grenzen gewählt werden (und liegt häufig bei 1%, 3% oder 5%), oder die Dynamik orientiert sich an anderen Größen wie z.B. dem Steigerungssatz der Beitragsbemessungsgrenze in der Gesetzlichen Rentenversicherung.

Die tatsächliche versicherte Leistung vor der Erhöhung sei VS .

Die Prämengrößen $NP_{x:\overline{t}}$, $NP_{x:\overline{t}}^Z$ und $BP_{x:\overline{t}}$ vor der Erhöhung, die Prämie $BP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}$ und Barwerte wie $\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}$ beziehen sich jeweils auf eine versicherte Leistung der Höhe 1.

Hingegen beziehen sich Prämengrößen nach der Erhöhung – gekennzeichnet durch ein hochgestelltes „nach Dyn“ ($NP^{\text{nach Dyn}}$, $NP_Z^{\text{nach Dyn}}$ oder $BP^{\text{nach Dyn}}$) – auf die tatsächliche (erhöhte) versicherte Leistung $VS^{\text{nach Dyn}}$. Der Grund für diese uneinheitliche Skalierung ist, dass auf diese Weise die Zerlegung der neuen Prämie verdeutlicht werden kann, nämlich in einen Teil, der sich auf die bisherige Leistung bezieht, und in einen zweiten Teil, der als Bezugsgröße die hinzukommende Leistung hat.

Die gezielmerten Deckungskapitalien und die Verwaltungskostenreserven sind immer auf die tatsächliche versicherte Leistung VS bzw. $VS^{\text{nach Dyn}}$ ausgelegt.

Bei Rentenversicherungen ist im Übrigen VS durch JR zu ersetzen, und die Größen $NEP_{x:\overline{n}}$ bzw. $NEP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{n-m_{\text{dyn}}}}$ sind jeweils um die γ_4 -Kosten während des Rentenbezugs anzupassen.

Da die Bruttoprämie um den festgelegten Prozentsatz ds steigt, ist

$$BP^{\text{nach Dyn}} = (1 + ds) \cdot VS \cdot BP_{x:\overline{t}}$$

bzw. die eigentliche Prämienerhöhung

$$\Delta_{BP} = BP^{\text{nach Dyn}} - VS \cdot BP_{x:\overline{t}} = ds \cdot VS \cdot BP_{x:\overline{t}}.$$

Die resultierende Erhöhung der versicherten Leistung Δ_{VS} ergibt sich durch Anwendung des Äquivalenzprinzips: Die zusätzliche Prämie Δ_{BP} wird mit der Bruttojahresprämie einer zum Zeitpunkt m_{dyn} beginnenden gleichartigen, jedoch entsprechend kürzer laufenden Versicherung mit der Versicherungssumme Δ_{VS} gleichgesetzt, d.h.

$$\Delta_{BP} = \Delta_{VS} \cdot BP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}$$

bzw.

$$\Delta_{VS} = \frac{\Delta_{BP}}{BP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}} = ds \cdot VS \cdot \frac{BP_{x:\overline{t}}}{BP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}}.$$

Die versicherte Leistung nach der dynamischen Erhöhung beträgt dann

$$VS^{\text{nach Dyn}} = VS + \Delta_{VS} = VS \cdot \left(1 + ds \cdot \frac{BP_{x:\overline{t}}}{BP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}} \right).$$

An dieser Darstellung wird deutlich, dass die versicherte Leistung um einen von ds abweichenden Prozentsatz steigt.

Mit der Erhöhung der Bruttoprämie und der versicherten Leistung ändern sich auch die Nettoprämie $NP_{x:\overline{t}}$ sowie die Zillmerprämie $NP_{x:\overline{t}}^Z$. Für die Nettoprämie zur neuen Leistung $VS^{\text{nach Dyn}}$ gilt

$$\begin{aligned} NP^{\text{nach Dyn}} &= VS \cdot \frac{NEP_{x:\overline{m}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} + \Delta_{VS} \cdot \frac{NEP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{n-m_{\text{dyn}}}}}{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}} \\ &= VS \cdot NP_{x:\overline{t}} + \Delta_{VS} \cdot NP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{n-m_{\text{dyn}}}}, \end{aligned}$$

und für die Zillmerprämie zur neuen Leistung $VS^{\text{nach Dyn}}$ ergibt sich

$$NP^{Z, \text{nach Dyn}}$$

$$\begin{aligned} &= VS \cdot \frac{NEP_{x:\overline{m}} + \alpha \cdot \min(t^*, t) \cdot BP_{x:\overline{t}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} \\ &\quad + \frac{\Delta_{VS} \cdot NEP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{n-m_{\text{dyn}}}} + \alpha \cdot \min(t^*, t - m_{\text{dyn}}) \cdot \Delta_{BP}}{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}} \\ &= VS \cdot NP_{x:\overline{t}}^Z + \Delta_{VS} \cdot NP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}^Z, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} NP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}^Z &= \frac{NEP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{n-m_{\text{dyn}}}} + \alpha \cdot \min(t^*, t - m_{\text{dyn}}) \cdot BP_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}}{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}} \end{aligned}$$

die Zillmerprämie für die zum Zeitpunkt m_{dyn} hinzukommende Vertrags-scheibe mit einer Leistung der Höhe 1 ist.

Für das gezillmerte Deckungskapital vor und nach einer dynamischen Erhöhung zum Zeitpunkt m_{dyn} gilt Folgendes:

- Vor Ausübung der Dynamik:

$${}_{m_{\text{dyn}}} V_x^Z = VS \cdot NEP_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{n-m_{\text{dyn}}}} - VS \cdot NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}} .$$

- Nach Ausübung der Dynamik:

$$\begin{aligned} & {}_{m_{\text{dyn}}} V_x^{\text{Z, nach Dyn}} \\ &= VS^{\text{nach Dyn}} \cdot NEP_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{n-m_{\text{dyn}}}} - NP_{x+\overline{m_{\text{dyn}}}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}} \\ &= (VS + \Delta_{VS}) \cdot NEP_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{n-m_{\text{dyn}}}} \\ &\quad - \left(VS \cdot NP_{x:\overline{t}}^Z + \Delta_{VS} \cdot NP_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}}^Z \right) \cdot \ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}} \\ &= {}_{m_{\text{dyn}}} V_x^Z \\ &\quad + \Delta_{VS} \cdot \left(NEP_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{n-m_{\text{dyn}}}} - NP_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}} \right) \\ &= {}_{m_{\text{dyn}}} V_x^Z + \Delta_{VS} \cdot \left(-\alpha \cdot \min(t^*, t - m_{\text{dyn}}) \cdot \frac{\Delta_{BP}}{\Delta_{VS}} \right) \\ &= {}_{m_{\text{dyn}}} V_x^Z - \alpha \cdot \min(t^*, t - m_{\text{dyn}}) \cdot \Delta_{BP} . \end{aligned}$$

Zum Dynamikzeitpunkt m_{dyn} unterscheiden sich die Zillmerreserven also nur um die einmaligen Abschlusskosten, welche auf die hinzukommende Prämiensumme anfallen. Für $m > m_{\text{dyn}}$ verläuft ${}_{m_{\text{dyn}}} V_x^Z$ steiler als die bisherige Zillmerreserve ${}_m V_x^Z$ (ohne dynamische Erhöhung).

Eine im Fall $t < n$ vorhandene Verwaltungskostenreserve ${}_m U_x$ wird durch die dynamische Erhöhung ebenfalls beeinflusst. Für $m_{\text{dyn}} \leq m < t$ ist die Verwaltungskostenreserve vor der Erhöhung

$${}_m U_x = VS \cdot \gamma_2 \cdot \left(\ddot{a}_{x+m : \overline{n-m}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} \cdot \ddot{a}_{x+m : \overline{t-m}} \right) .$$

Durch die Beitragsdynamik (und die damit einhergehende Erhöhung der versicherten Leistung um Δ_{VS}) ist eine zusätzliche Verwaltungskostenreserve zu stellen, welche in der prämienpflichtigen Zeit (d.h. für $m_{\text{dyn}} \leq m < t$) gegeben ist durch

$${}_m U_x^\Delta = \Delta_{VS} \cdot \gamma_2 \cdot \left(\ddot{a}_{x+m : \overline{n-m}} - \frac{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{n-m_{\text{dyn}}}}}{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}} : \overline{t-m_{\text{dyn}}}}} \cdot \ddot{a}_{x+m : \overline{t-m}} \right) .$$

Speziell für $m = m_{\text{dyn}}$ ist ${}_m U_x^\Delta = 0$.

Insgesamt entspricht die Verwaltungskostenreserve nach der dynamischen Erhöhung für $m_{\text{dyn}} \leq m < t$

$$\begin{aligned} {}_m U_x^{\text{nach Dyn}} = & \gamma_2 \cdot V S^{\text{nach Dyn}} \cdot \left[\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} - \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \right] \cdot \\ & \left(\frac{V S}{V S^{\text{nach Dyn}}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{m}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} + \frac{\Delta_{V S}}{V S^{\text{nach Dyn}}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{n-m_{\text{dyn}}}}}{\ddot{a}_{x+m_{\text{dyn}}:\overline{t-m_{\text{dyn}}}}} \right) \end{aligned}$$

und

$${}_m U_x^{\text{nach Dyn}} = \gamma_2 \cdot V S^{\text{nach Dyn}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}$$

für $t \leq m \leq n$.

11.3 Beitragsfreistellung

Wird die Höhe der zu zahlenden Prämie vor dem planmäßigen Ablauf der vereinbarten Prämienzahlungsdauer ganz auf Null abgesenkt, so handelt es sich um eine vorzeitige Einstellung der Prämienzahlung oder kurz Beitragsfreistellung. Nach § 165 VVG hat der VN das Recht, die Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung zu verlangen. Als Gründe hierfür kommen bspw. in Betracht, dass der VN nicht den kompletten Versicherungsschutz verlieren möchte oder dass der VN aufgrund steuerlicher bzw. gesetzlicher Aspekte den Vertrag gar nicht auflösen will oder darf. Letzteres gilt insbesondere für Riester-Versicherungen oder Versicherungen in der Basisversorgung (siehe Abschn. 3.3).

Grundsätzlich besteht der Vertrag über die ursprünglich vereinbarte Versicherungsdauer weiter. Die versicherte Leistung wird jedoch aufgrund des vorzeitigen Wegfalls der benötigten, noch ausstehenden Prämien (nach unten) angepasst. Die neue, reduzierte Versicherungssumme oder Jahresrente wird **beitragsfreie** (oder **prämienfreie**) **Leistung** genannt. Ausgangspunkt für deren Bestimmung ist gemäß § 165 VVG der Rückkaufswert der Versicherung, welcher im nachfolgenden Abschnitt 11.4 behandelt wird.

Die beitragsfreie Leistung wird auf Basis des Äquivalenzprinzips ermittelt, indem der erwartete, mit den Rechnungsgrundlagen der Prämienberechnung ermittelte Barwert der zukünftigen Leistungen und Kosten mit dem zum Zeitpunkt der Beitragsfreistellung vorhandenen Kapital gleichgesetzt wird. Letzteres stimmt i.d.R. mit dem garantierten Rückkaufswert des (noch beitragspflichtigen) Vertrags überein und wird wie eine Einmalprämie für eine dann beginnende Versicherung desselben Typs angesehen.

Das Vorgehen entspricht also dem in Abschn. 11.1 vorgestellten Verfahren der konstruktiven Prämien (wobei außer den Verwaltungskosten üblicherweise keine weiteren Kosten angesetzt werden).

Wir betrachten eine Beitragsfreistellung zum Zeitpunkt m_{vbfr} mit $0 < m_{\text{vbfr}} < t \leq n$, und es wird das Standard-Kostenmodell aus Abschn. 7.1.5 unterstellt.

Zwecks Abgrenzung vom Deckungskapital $_m V_x$ bei planmäßigem Verlauf wird das Deckungskapital einer vorzeitig beitragsfrei gestellten Versicherung im Folgenden mit $_m V_x^{\text{vbf}}$ notiert. Da keine Prämien mehr fließen, setzt sich das beitragsfreie Deckungskapital nur noch aus dem erwarteten Barwert der zukünftigen Leistungen und Kosten zusammen. Für eine beitragsfreie Leistung der Höhe 1 ist daher für alle $m \geq m_{\text{vbfr}}$

$$_m V_x^{\text{vbf}} = NEP_{x+m:\overline{n-m}} + {}_m U_x^{\text{vbf}}$$

mit der Verwaltungskostenreserve

$${}_m U_x^{\text{vbf}} = \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}} .$$

Bezeichnet RKW_m^{gar} den Rückkaufswert bezogen auf die ursprüngliche garantierte versicherte Leistung VS und $_m V_x^{\text{vbf}}$ das Deckungskapital bezogen auf die gesuchte beitragsfreie Leistung VS^{vbf} , so muss zum Zeitpunkt m_{vbfr} nach dem Äquivalenzprinzip die Gleichung

$$RKW_{m_{\text{vbfr}}}^{\text{gar}} = {}_{m_{\text{vbfr}}} V_x^{\text{vbf}}$$

gelten, woraus sich die beitragsfreie Leistung

$$VS^{\text{vbf}} = \frac{RKW_{m_{\text{vbfr}}}^{\text{gar}}}{NEP_{x+m_{\text{vbfr}}:\overline{n-m_{\text{vbfr}}}} + \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{x+m_{\text{vbfr}}:\overline{n-m_{\text{vbfr}}}}}$$

ergibt.

Ein bereits vorhandenes Guthaben aus Überschussbeteiligung bleibt durch die Beitragsfreistellung unberührt.

Es sei wiederum erwähnt, dass bei Rentenversicherungen VS durch JR zu ersetzen ist und dass in der Größe $NEP_{x+m:\overline{n-m}}$ die im Rentenbezug anfallenden γ_4 -Kosten zu berücksichtigen sind.

Je nach Tarifwerk kann sich der Kunde zu einem späteren Zeitpunkt entscheiden, die Versicherung aufleben zu lassen und die Prämienzahlung wieder aufzunehmen. Diese sog. **Wiederinkraftsetzung** geht üblicherweise mit einer erneuten Gesundheitsprüfung einher und erfolgt zu den dann gültigen Rechnungsgrundlagen (d.h., die Versicherung wird wie ein Neuvertrag behandelt).

In der Regel muss die beitragsfreie Leistung eine vereinbarte Mindesthöhe erreichen. Liegt jene unterhalb dieser Grenze, so wird anstelle einer Beitragsfreistellung der Vertrag beendet und durch Auszahlung des Rückkaufswertes abgefunden.

11.4 Rückkauf

Sofern der VN die Versicherung nicht mehr fortführen möchte, kann er den Vertrag unter bestimmten Voraussetzungen kündigen und auf diese Weise vorzeitig beenden. Dieser Vorgang wird **Rückkauf** genannt.

Für Versicherungen gegen laufende Prämien und für Versicherungen gegen Einmalprämie, bei denen der Eintritt der Leistungspflicht des Versicherers gewiss ist, besteht ein in § 168 VVG gesetzlich verankertes Recht auf vorzeitige Kündigung.

Grundsätzlich hat der Kunde also während der Vertragsdauer jederzeit das Recht, die Aufhebung des Vertrags zum nächstmöglichen Zeitpunkt zu beantragen. Jedoch ist nicht jede Versicherung zu jedem Zeitpunkt stornierbar bzw. **rückkaufsfähig**. So gibt es einerseits gesetzliche Regelungen, z.B. für Versicherungen der Basisversorgung (siehe Abschn. 3.3), die das Recht zur Vertragsstornierung eingrenzen bzw. ganz ausschließen. Darüber hinaus gibt es gewisse Einschränkungen derart, dass sich der Vertrag zum Zeitpunkt der Kündigung in einer anwartschaftlichen Phase befinden muss. So ist es bspw. nicht möglich, eine aufgeschobene Rentenversicherung während des Rentenbezugs zu kündigen, sondern lediglich während der Aufschubphase.

Eine Kündigung des Vertrags oder der Rücktritt von diesem ist in bestimmten Fällen auch seitens des VU möglich. Wird die Erstprämie nicht rechtzeitig gezahlt (§ 37 VVG) oder verletzt der VN seine vorvertragliche Anzeigepflicht (§ 19 VVG), d.h., verschweigt der VN für die Risiko-Einschätzung durch das VU relevante Gefahrenumstände, so hat der Versicherer das Recht, vom Vertrag zurückzutreten. Während der Vertragsdauer kann der Versicherer den Vertrag fristlos kündigen, falls der Zahlungsverzug einer Folgeprämie über eine vom VU gesetzte Frist hinaus anhält (§ 38 VVG) oder falls der VN eine unerlaubte Gefahrerhöhung vornimmt (§§ 23 und 24 VVG).

Statistisch findet eine Abgrenzung zwischen Frühstorno und Spätstorno statt. Frühstorno umfasst Policien, die in den ersten 24 Monaten nach Vertragsbeginn gekündigt werden. Alle Versicherungen, deren Stornierung nach Ablauf der ersten zwei Jahre geschieht, werden unter Spätstorno subsummiert.

11.4.1 Rückkaufswert

Im Falle der Kündigung wird gemäß § 169 VVG ein sog. Rückkaufswert gewährt – jedoch nur bei solchen Versicherungen, bei denen der Eintritt der Leistungspflicht des Versicherers gewiss ist.

In allen anderen Fällen, dazu zählen z.B. temporäre Risikolebensversicherungen und aufgeschobene Rentenversicherungen ohne Beitragsrückgewähr, wird kein Rückkaufswert gezahlt, sondern stattdessen eine Beitragsfreistellung durchgeführt.

Somit zieht eine Kündigung nicht automatisch die Zahlung eines Rückkaufswertes nach sich. Bei Risikoversicherungen, deren Deckungskapital ohnehin vergleichsweise gering ist, beträgt der Rückkaufswert häufig von vornherein Null. Mit der Auszahlung eines Rückkaufswertes erlischt die Versicherung.

Wie der Rückkaufswert zu ermitteln ist, wird ebenfalls in § 169 VVG spezifiziert. Danach ist der Rückkaufswert nach anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik auf Basis der Rechnungsgrundlagen für die Prämienkalkulation zu berechnen. Seine Höhe orientiert sich an dem maßgeblichen Deckungskapital der Versicherung. In der alten Fassung des VVG vor der Reform im Jahr 2008 war der Rückkaufswert als „Zeitwert der Versicherung“ zu berechnen. Problematisch daran ist, dass keine gesetzliche Definition existiert, was denn überhaupt der Zeitwert ist. Die Formulierung als Zeitwert wird derzeit nur noch für fondsgebundene Versicherungen verwendet, deren Zeitwert durch den Wert der Fondsanteile (siehe Kap. 13) eindeutig bestimmt ist. Eventuell bestehende Prämienrückstände werden bei der Berechnung des Rückkaufswertes in Abzug gebracht.

Eine natürliche Obergrenze für den Rückkaufswert der garantierten Leistung stellt die Bilanzdeckungsrückstellung dar, da ansonsten ein Anreiz zur Kündigung bestehen würde. Per Gesetz ist die Höhe des zu zahlenden Rückkaufswertes begrenzt auf diejenige Leistung, welche bei Eintritt des Versicherungsfalls zum Zeitpunkt der Kündigung fällig wäre. Wird bspw. eine aufgeschobene Rentenversicherung mit Beitragsrückgewähr während der Aufschubphase gekündigt und ist der ermittelte Rückkaufswert größer als die Summe der bislang gezahlten Beiträge, so wird als Rückkaufswert nur die Beitragsrückgewähr ausgezahlt. Aus dem verbleibenden Differenzbetrag wird dann eine beitragsfreie Leistung generiert.

Der nach Ablauf von m Jahren insgesamt gewährte Rückkaufswert, kurz **Gesamtrückkaufswert** und im Folgenden mit RKW_m^{gesamt} notiert, besteht aus dem Rückkaufswert für die garantierte Leistung RKW_m^{gar} . Hinzukommen bereits zugeteilte Überschüsse aus der laufenden Gewinnbeteiligung

RKW_m^{LGA} (z.B. Guthaben aus verzinslicher Ansammlung oder Deckungskapital für Bonusleistungen) sowie Zahlungen aus der Schlussgewinnbeteiligung RKW_m^{SGA} und der Beteiligung an Bewertungsreserven RKW_m^{BWR} , so dass

$$RKW_m^{\text{gesamt}} = RKW_m^{\text{gar}} + RKW_m^{\text{LGA}} + RKW_m^{\text{SGA}} + RKW_m^{\text{BWR}}.$$

11.4.2 Verteilung von Abschlusskosten

Das in Abschn. 9.2.3 beschriebene Verfahren der Zillmerung hat zur Folge, dass das Deckungskapital in den ersten Jahren negativ ist.

Für den Rückkaufswert der garantierten Leistung bedeutete dies lange Zeit, dass dieser anfänglich Null war und erst in späteren Vertragsjahren ein positiver Rückkaufswert gewährt wurde. Im Falle einer frühzeitigen Kündigung durch den VN waren die bis dahin gezahlten Prämien somit vollständig oder zumindest teilweise verloren.

Im Zuge der VVG-Reform im Jahr 2008 wurde diese Regelung zugunsten der Kunden geändert. Seitdem sind die einmaligen Abschlusskosten im Rahmen der Ermittlung des Rückkaufswertes über die ersten fünf Vertragsjahre zu verteilen, so dass im Falle einer frühzeitigen Stornierung die noch nicht fällig gewordenen Abschlusskosten an den VN zurückerstattet werden. Genauer gesagt muss der Rückkaufswert mindestens demjenigen Deckungskapital entsprechen, welches sich „bei gleichmäßiger Verteilung der angesetzten Abschluss- und Vertriebskosten auf die ersten fünf Vertragsjahre ergibt“. In § 169 VVG wird zudem die Vereinbarung eines Abzugs für noch nicht getilgte Abschluss- und Vertriebskosten explizit für unwirksam erklärt. Wie die Verteilung der Abschlusskosten erfolgt (mit/ohne Biometrie oder Zins), ist den VU freigestellt.

Die beschriebene Regelung implementiert einen **Mindestrückkaufswert** RKW_m^{\min} , d.h. eine untere Grenze für den Rückkaufswert. Bereits in früheren Zeiten gab es Mindestrückkaufwerte, indem bei Kündigung bspw. mindestens die Hälfte der bisher gezahlten Beiträge zurückzuzahlen war.

Beispiel 24. Wir betrachten eine n -jährige gemischte Kapitallebensversicherung mit $t = n$ und $VS = 1$. Um den Effekt der Verteilung der Abschlusskosten α herauszustellen, werden alle übrigen Kosten vernachlässigt.

Das (Brutto-)Deckungskapital dieser Versicherung berechnet sich als

$$\begin{aligned} {}_mV_x &= A_{x+m:\overline{n-m}} - BP_{x:\overline{t}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \\ &= {}_mV_x^{\text{Netto}} - \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\overline{t}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}} , \end{aligned}$$

wobei die Bruttoprämie mit Hilfe des Ansatzes

$$BP_{x:\bar{t}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} = A_{x:\bar{n}} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}$$

ermittelt wird, so dass

$$BP_{x:\bar{t}} = \frac{A_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}} - \alpha \cdot t_\alpha} .$$

Für die Bestimmung des Rückkaufswertes ist nun dasjenige Deckungskapital maßgeblich, welches sich bei gleichmäßiger Verteilung der Abschlusskosten auf die ersten fünf Jahre ergibt. Dafür ist zunächst eine geänderte Bruttoprämie $BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}}$ zu berechnen. Der Ansatz

$$BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{t}} = A_{x:\bar{n}} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\bar{5}}}{5}$$

führt zu

$$BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} = \frac{A_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}} - \frac{\alpha \cdot t_\alpha}{5} \cdot \ddot{a}_{x:\bar{5}}} .$$

Das für den Rückkaufswert maßgebliche Deckungskapital, welches häufig auch als **Kundenguthaben** bezeichnet wird, entspricht dann

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{RKW}} &= A_{x+m:\bar{n-m}} + \frac{\alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}}}{5} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{5-m}} - BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{t-m}} \\ &= {}_m V_x^{\text{Netto}} - \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\bar{5}} - \ddot{a}_{x+m:\bar{5-m}}}{5} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\bar{t-m}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \end{aligned}$$

für $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ und

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{\text{RKW}} &= A_{x+m:\bar{n-m}} - BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{t-m}} \\ &= {}_m V_x^{\text{Netto}} - \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\bar{5}}}{5} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\bar{t-m}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \end{aligned}$$

für $m \geq 5$.

Bei einem positiven Rechnungszins ist $\frac{\ddot{a}_{x:\bar{5}}}{5} < 1$, so dass für die Bruttoprämien $BP_{x:\bar{t}}^{\text{RKW}} < BP_{x:\bar{t}}$ gilt. Daraus folgt für alle $m \geq 0$, dass

$${}_m V_x^{\text{RKW}} > {}_m V_x .$$

Insbesondere ist ${}_0 V_x^{\text{RKW}} = 0$.

Gemäß jüngster Rechtsprechung im Jahr 2016 dürfen übrigens laufende Abschlusskosten nicht innerhalb der ersten fünf Jahre erhoben werden. Eine Verteilung laufender Abschlusskosten über die Vertragslaufzeit ist somit erst ab dem 6. Jahr zulässig.

11.4.3 Stornoabschlag

Gemäß § 169 VVG ist das VU dazu berechtigt, einen Betrag vom Rückkaufswert abzuziehen, welcher als Stornoabschlag oder Stornoabzug bezeichnet wird.

Stornoabschläge müssen mit dem VN vertraglich vereinbart sein, und ihre Höhe muss gegenüber dem Kunden beziffert werden. Gleichzeitig fordert das Gesetz, dass der Stornoabschlag angemessen sein muss, allerdings ohne näher zu spezifizieren, was als „angemessen“ gilt.

Für die Erhebung von Stornoabschlägen und ihre Bemessung existieren mehrere Kriterien bzw. Gründe:

- Einerseits verursacht der Geschäftsvorfall des Rückkaufs einen zusätzlichen Verwaltungsaufwand. Die damit verbundenen Kosten hat der VN (zumindest anteilig) zu tragen, so dass der Stornoabschlag unter diesem Aspekt den Charakter einer Gebühr hat.
- Andererseits entstehen dem VU Opportunitätskosten (Kosten für entgangene Gewinne), indem durch die Kündigung und die resultierende Auszahlung des Rückkaufswertes vorzeitig Kapital abfließt, welches für eine Wiederanlage nicht mehr zur Verfügung steht. Der vom VU gestellten Deckungsrückstellung auf der Passivseite der Bilanz stehen auf der Aktivseite Kapitalanlagen gegenüber. Diese sind meist langfristig investiert, wodurch i.d.R. eine höhere Verzinsung erzielt wird. Um den vorzeitigen Kapitalbedarf bedienen zu können, müssen diese Anlagen jedoch vor Fristablauf verkauft werden, so dass die höheren Zinsgewinne nun verloren gehen.
- Bei Kündigungen besteht die Gefahr einer negativen Risikoauslese bzw. einer Antiselektion, indem gute Risiken den Bestand verlassen und schlechte Risiken bleiben. Auf diese Weise würde sich allerdings die Diversifikation im Portfolio des Versicherers reduzieren. Der Stornoabschlag entspricht somit einer Ausgleichszahlung des VN für die verschlechterte Risikosituation des VU.

Stornoabschläge werden üblicherweise in Prozent des Rückkaufswertes oder als Absolutbetrag erhoben, aber auch andere Bezugsgrößen wie z.B. das riskierte Kapital sind grundsätzlich möglich.

Da die beitragsfreie Leistung auf dem Rückkaufswert basiert, wird der VN bereits bei einer Beitragsfreistellung mit einem Stornoabschlag „bestraft“. Sollte der Vertrag später dann gekündigt werden, fallen jedoch keine erneuten Stornoabschläge an.

In der Vergangenheit gab es immer wieder Rechtsstreitigkeiten hinsichtlich der Stornoabschläge. Die Urteile der Gerichtsprozesse, die bis auf die höchste Ebene des Bundesgerichtshofs (kurz: BGH) führten, fielen i.d.R. zugunsten der Kunden aus, so dass die vom Versicherer erhobenen Stornoabschläge als rechtswidrig bzw. deren Vereinbarung als unwirksam eingestuft wurden. Aufgrund derartiger Rechtsunsicherheiten verzichten manche VU inzwischen auf Stornoabschläge.

11.4.4 Schmidt-Tobler-Effekt

Im Zusammenhang mit der Höhe von Rückkaufswerten sowie der Bemessung von Provisionen und zugehörigen Haftungszeiträumen (siehe Abschn. 7.2.3) wird häufig der sog. Schmidt-Tobler-Effekt genannt. Dieser Name steht für das Phänomen, dass durch vorzeitige Vertragskündigung ein Gewinn erzielt werden kann, wenn nämlich die Summe aus Rückkaufswert und verdienter Abschlussprovision größer ist als die Summe der gezahlten Prämien.

Vor allem Verträge mit hohen Versicherungssummen und langen Laufzeiten sind dafür geeignet: Anfangs streicht der Vermittler aufgrund der hohen Versicherungssumme eine relativ große Abschlussprovision ein, die nach nur wenigen Jahren vollständig verdient ist. Umgekehrt ist die zu zahlende Prämie aufgrund der langen Laufzeit relativ gering. Übersteigt der Rückkaufswert nun in den ersten Jahren die Summe aus verdienter Provision und den bis dahin gezahlten Prämien, so kann durch frühzeitige Stornierung ein Gewinn generiert werden.

Der Versicherungsmakler Reinhard Schmidt-Tobler erkannte eine solche Schwachstelle in der Gestaltung des Provisionssystems und nutzte diese in den 1980er- und 1990er-Jahren systematisch aus. Der Betrug bestand allerdings nicht in der Ausnutzung dieser vertraglichen Fehlgestaltung, sondern in der Tatsache, dass besagter Makler Versicherungsverträge für Personen abschloss, die nichts davon wussten und deren Einverständnis somit nicht vorlag.

Spätestens seit diesem Skandal sollte ein besonderes Augenmerk darauf gelegt werden, dass die Konstellation aus Provisionshöhe sowie -haftungszeitraum, gewährtem Rückkaufswert und zu zahlender Prämie eine derartige Ausnutzung verhindert.

11.4.5 Satz von Cantelli

Ebenfalls im Kontext von Rückkaufswerten taucht der Satz von Cantelli auf, welcher auf den italienischen Mathematiker Francesco Paolo Cantelli zurückgeht. Dieses allgemeinere Theorem wird zumeist verkürzt ausgedrückt bzw. auf den folgenden Spezialfall reduziert: Die Ausscheideursache Storno kann bei der Kalkulation unberücksichtigt bleiben, wenn im Kündigungsfall als Rückkaufwert das prospektive Deckungskapital ausgezahlt wird. Sowohl die Prämie als auch das Deckungskapital können dann ohne den Ansatz von Stornowahrscheinlichkeiten berechnet werden. Wird jedoch ein abweichender Rückkaufswert gewährt (wie z.B. in der privaten Krankenversicherung), so ist Storno als Ausscheideursache im Rahmen der Kalkulation unverzichtbar.

Nachfolgend soll die Idee dieses Satzes auf einer Netto-Basis verdeutlicht werden. Dieselben Überlegungen lassen sich aber auch auf einer Brutto-Basis anstellen.

Dazu betrachten wir zwei hinsichtlich Rechnungszins i , Dauer n , Biometrie q_x sowie versicherter Leistungen TFL_m und EFL_m identische Versicherungen (1) und (2), die sich nur darin unterscheiden, dass bei Versicherung (2) zusätzlich zum Tod die Ausscheideursache Storno existiert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Vertrag im Laufe des m -ten Jahres gekündigt wird, sei analog zu Abschn. 5.3.3 mit w_{x+m} notiert. Bei Wahl eines additiven Ansatzes ist die Verbleibswahrscheinlichkeit bei Versicherung (2) gleich $p_{x+m}^{(2)} = 1 - q_{x+m} - w_{x+m}$.

Als Stornoleistung werde am Ende des Jahres m , in dem der Vertrag gekündigt wurde, der Betrag RKW_m ausgezahlt.

Die Rekursionsgleichung für das Deckungskapital $_m V_x^{(1)}$ der Versicherung (1) entspricht der aus Gleichung 9.2 bekannten Darstellung

$$\begin{aligned} p_{x+m-1 \cdot m} V_x^{(1)} &= (1 + i) \cdot \left({}_{m-1} V_x^{(1)} + NP_m^{(1)} - EFL_{m-1} \right) \\ &\quad - q_{x+m-1} \cdot TFL_m . \end{aligned}$$

Die analoge Gleichung für das Deckungskapital $_m V_x^{(2)}$ der Versicherung (2) lautet

$$\begin{aligned} p_{x+m-1 \cdot m} V_x^{(2)} &= (1 + i) \cdot \left({}_{m-1} V_x^{(2)} + NP_m^{(2)} - EFL_{m-1} \right) \\ &\quad - q_{x+m-1} \cdot TFL_m - w_{x+m-1} \cdot RKW_m . \end{aligned}$$

Wenn nun als Rückaufswert das (Netto)Deckungskapital gewährt wird, d.h. $RKW_m = {}_m V_x^{(2)}$, folgt für die zweite Versicherung

$$\begin{aligned} \left(p_{x+m-1}^{(2)} + w_{x+m-1} \right) \cdot {}_m V_x^{(2)} &= (1+i) \cdot \left({}_{m-1} V_x^{(2)} + NP_m^{(2)} - EFL_{m-1} \right) \\ &\quad - q_{x+m-1} \cdot TFL_m \Leftrightarrow \\ p_{x+m-1} \cdot {}_m V_x^{(2)} &= (1+i) \cdot \left({}_{m-1} V_x^{(2)} + NP_m^{(2)} - EFL_{m-1} \right) \\ &\quad - q_{x+m-1} \cdot TFL_m . \end{aligned}$$

Da die Rekursionsgleichungen für alle Zeitpunkte gelten, lässt sich daraus ein quadratisches lineares Gleichungssystems konstruieren, welches auch als **Thiele'sches Gleichungssystem** bekannt ist. Die Prämie und die Deckungskapitalien ergeben sich als eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems. Offensichtlich stimmen die Rekursionsgleichungen und die daraus resultierenden Gleichungssysteme für die beiden Versicherungen überein. Folglich haben sie auch identische Lösungen.

Aufgrund dieser Argumentation gilt mit ${}_0 V_x^{(1)} = {}_0 V_x^{(2)} = 0$ für alle Zeitpunkte $m = 1, \dots, n$

$$NP_m^{(1)} = NP_m^{(2)} \quad \text{sowie} \quad {}_m V_x^{(1)} = {}_m V_x^{(2)} .$$

11.4.6 Flexible Ablaufphase

Die flexible Ablaufphase, welche auch als **Abrufphase** bezeichnet wird, ist ein Zeitraum gegen Ende der Versicherungs- bzw. Aufschubdauer, in welchem der VN den Vertrag kündigen kann, ohne dass ein Stornoabschlag erhoben wird.

Die flexible Ablaufphase umfasst i.d.R. die letzten fünf Jahre der Versicherungs- bzw. Aufschubdauer und ist zusätzlich daran geknüpft, dass die VP dann bereits ein bestimmtes Alter, bspw. 60 Jahre, erreicht hat.

11.5 Leistung bei Tod

Bei Eintritt des Todesfalls wird die vertraglich festgelegte Todesfallleistung ausgezahlt. Diese entspricht bei Rentenversicherungen mit Beitragsrückgewähr der Summe der bisher gezahlten Beiträge, ggf. abzüglich der Summe bereits gezahlter Renten.

Die garantierte Leistung bei Tod kann sich um Leistungen aus der Überschussbeteiligung erhöhen, indem entweder eine zusätzliche Versicherungssumme oder ein bereits vorhandenes Ansammlungs- oder Fondsguthaben ausgeschüttet werden. Üblicherweise werden auch die Schlussüberschussbeteiligung sowie eine Beteiligung an Bewertungsreserven anteilig fällig.

11.6 Leistung bei Ablauf

Der Ablauf entspricht dem planmäßigen Ende der Versicherungsdauer. Sofern vereinbart, wird zum Laufzeitende die garantierte Erlebensfallleistung fällig.

Die auszuzahlende Gesamtleistung erhöht sich um Leistungen aus der Überschussbeteiligung, welche sich aus verschiedenen Komponenten zusammensetzen kann. Während der Vertragslaufzeit zugeteilte, laufende Überschüsse können in Form einer zusätzlichen versicherten Leistung oder als zusätzliches Guthaben aus verzinslicher Ansammlung oder Fondsanlage ausgeschüttet werden. Hinzu kommen ggf. eine Schlussüberschussbeteiligung sowie eine Beteiligung an den Bewertungsreserven.

Bei aufgeschobenen Rentenversicherungen kommt dem Ende der Aufschubphase eine besondere Bedeutung zu, welche mit dem regulären Ablauftermin anderer Versicherungen vergleichbar ist. Sofern es keine gesetzlichen Einschränkungen gibt (wie bspw. bei Riester-Verträgen oder Versicherungen der Basisversorgung), kann der VN zum Zeitpunkt des Rentenübergangs entscheiden, ob er anstelle der dann einsetzenden Rentenzahlungen eine Einmalzahlung in Höhe der Kapitalabfindung nimmt. Dieses Wahlrecht des Kunden wird Kapitaloption genannt. Übt der VN diese Option aus, wird das gesamte Vertragsguthaben inklusive der o.g. Leistungen aus der Überschussbeteiligung ausgezahlt, und der Vertrag ist somit beendet.

11.7 Leistung im Rentenbezug

Die im Leistungsfall zu zahlende Rente setzt sich aus der garantierten Rente und einer zusätzlichen Rente aus Überschussbeteiligung zusammen.

Wählt der VN einer aufgeschobenen Rentenversicherung bei Rentenübergang anstelle der Kapitalabfindung den Bezug der Rentenleistungen, so wird die vorhandene Überschussbeteiligung aus der Aufschubphase in eine garantierte Zusatzrente umgewandelt. Wenn während der Aufschubphase bereits die Überschussverwendung Bonusrente vereinbart war (siehe Abschn. 10.3), steht ein Teil der Höhe dieser Zusatzrente bereits fest. Andernfalls bzw.

darüber hinaus wird das gesamte bzw. noch verbleibende Vertragsguthaben aus laufender und Schlussüberschussbeteiligung durch den bei Rentenübergang gültigen Leistungsbarwert dividiert, um die (restliche) Zusatzrente zu bestimmen. Je nach vertraglicher Regelung kann die Verrentung nach den dann gültigen Rechnungsgrundlagen erfolgen.

Eine vereinbarte Rentengarantiezeit bewirkt, dass die vereinbarte Rente inkl. Erhöhungen aus Überschussbeteiligung nach Eintritt des Leistungsfalls unabhängig vom Überleben der VP für die vereinbarte Mindestdauer gezahlt wird. Somit verkörpert die Rentengarantiezeit in gewissem Sinne eine Todesfallleistung und wird auch häufig als Ersatz für eine Beitragsrückgewähr innerhalb der Rentenbezugsphase gewählt.

11.8 Übungen

11.8.1 Aufgaben

Übung 55. Eine 30-jährige Frau hat eine Sterbegeldversicherung (= lebenslange Risikolebensversicherung) mit einer Versicherungssumme i.H.v. 10.000 EUR abgeschlossen. Die Prämienzahlungsdauer ist auf $t = 30$ Jahre begrenzt. Nach 10 Jahren entschließt sie sich, die Versicherung beitragsfrei zu stellen. Der Rechnungszins der Versicherung beträgt 2%, und als Sterbetafel liegt die DAV 2008 T zugrunde. Die Betrachtung erfolgt auf einer reinen Netto-Basis, d.h., sämtliche Kosten o.ä. werden vernachlässigt.

1. Bestimmen Sie die beitragsfreie Leistung für den Fall, dass die ursprüngliche Versicherungsdauer beibehalten wird.
2. Alternativ wird der Kundin eine temporäre Risikolebensversicherung mit der ursprünglichen Versicherungssumme angeboten. Bestimmen Sie die Laufzeit dieser temporären Risiko-LV.

Übung 56. Wir betrachten die gemischte Kapitallebensversicherung aus Übungsaufgabe 52.

Es gelte das folgende Kostenmodell: einmalige Abschlusskosten i.H.v. 3% der Bruttobruttotprämie, laufende Verwaltungskosten während der beitragspflichtigen Zeit i.H.v. 4% der Bruttojahresprämie sowie i.H.v. 0,1% der Versicherungssumme, laufende Verwaltungskosten während der planmäßig beitragsfreien Zeit i.H.v. 0,2% der Versicherungssumme.

1. Nach fünf Jahren soll die Versicherungssumme um 20% aufgestockt werden. Bestimmen Sie nach dem Verfahren der konstruktiven Prämie die neue Bruttoaprämie, wenn die Prämienzahlungsdauer unverändert bleibt.
2. Nach fünf Jahren soll die Prämienzahlungsdauer auf 30 Jahre reduziert werden. Bestimmen Sie nach dem Verfahren der konstruktiven Prämie die neue Bruttoaprämie, wenn die Versicherungssumme unverändert bleibt. Wie hoch wäre stattdessen die neue Versicherungssumme, wenn weiterhin dieselbe Bruttoaprämie gezahlt werden soll?
3. Wie hoch sind der garantierte Rückkaufswert und die beitragsfreie Leistung nach fünf Jahren? Vernachlässigen Sie Stornoabschläge sowie die Verteilung der Abschlusskosten über fünf Jahre. Die laufenden Verwaltungskosten nach vorzeitiger Einstellung der Prämienzahlung betragen 0,4% der Versicherungssumme.

Übung 57. Wir betrachten die aufgeschobene Rentenversicherung aus Übungsaufgabe 53 mit eingeschlossener Beitragsrückgewähr.

1. Es ist eine Beitragsdynamik vereinbart, wonach die Bruttoaprämie jährlich um 5% steigt. Um welchen Betrag würde sich die garantierte Rente ein Jahr nach Versicherungsbeginn erhöhen, wenn die Kundin der Ausübung nicht widerspricht?

2. Ignorieren Sie nun den vorherigen Aufgabenteil. Nach der Hälfte der Aufschubdauer soll die Versicherung vorzeitig beitragsfrei gestellt werden. Es wird ein Stornoabschlag i.H.v. 100 EUR erhoben, und als laufende Verwaltungskosten während der vorzeitig beitragsfreien Zeit werden 2,5% der versicherten Jahresrente angesetzt. Ermitteln Sie die Höhe des garantierten Rückkaufswertes (unter Vernachlässigung der Abschlusskostenverteilung über fünf Jahre), und geben Sie die beitragsfreie Leistung an.

11.8.2 Lösungen

Lösung 55. Die Nettojahresprämie der Sterbegeldversicherung beträgt

$$\begin{aligned} NP_{30:\overline{30}} &= 10.000 \cdot \frac{A_{30}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}}} = 10.000 \cdot \frac{\frac{M_{30}}{D_{30}}}{\frac{N_{30}-N_{60}}{D_{30}}} \\ &= 10.000 \cdot \frac{D_{30} - d \cdot N_{30}}{N_{30} - N_{60}} \\ &\approx 10.000 \cdot \frac{545.450,754 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 17.389.782,763}{17.389.782,763 - 5.092.050,754} \\ &\approx 10.000 \cdot 0,01663 \\ &= 166,30 \text{ EUR} \end{aligned}$$

und das Nettodeckungskapital nach $m = 10$ Jahren

$$\begin{aligned} {}^{10}V_{30} &= 10.000 \cdot A_{40} - NP_{30:\overline{30}} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}} \\ &= 10.000 \cdot \frac{M_{40}}{D_{40}} - 166,30 \cdot \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} \\ &\approx 10.000 \cdot \frac{445.244,647 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 12.400.812,506}{445.244,647} \\ &\quad - 166,30 \cdot \frac{12.400.812,506 - 5.092.050,754}{445.244,647} \\ &\approx 10.000 \cdot 0,45389 - 166,30 \cdot 16,41516 \\ &\approx 1.809,06 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

1. Nach der Methode der konstruktiven Prämie ist

$$VS^{\text{vbf}} \cdot A_{40} = {}^{10}V_{30}$$

und damit

$$VS^{\text{vbf}} = \frac{{}^{10}V_{30}}{A_{40}} \approx \frac{1.809,06}{0,45389} \approx 3.985,68 \text{ EUR} .$$

2. Gesucht ist ein Wert für die (Rest)Laufzeit n , so dass gilt

$$10.000 \cdot A_{\frac{1}{40:\bar{n}}} = {}^{10}V_{30} .$$

Die Gleichung

$$\frac{M_{40} - M_{40+n}}{D_{40}} = \frac{{}^{10}V_{30}}{10.000}$$

ist nach n aufzulösen:

$$\begin{aligned} M_{40+n} &= M_{40} - \frac{{}^{10}V_{30}}{10.000} \cdot D_{40} \\ &\approx 445.244,647 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 12.400.812,506 \\ &\quad - \frac{1.809,06}{10.000} \cdot 445.244,647 \\ &\approx 121.544,032 . \end{aligned}$$

Auch ohne lineare Interpolation zwischen $M_{79} = 131.459,134$ und $M_{80} = 121.532,165$ sieht man, dass die Laufzeit der temporären Risiko-LV fast exakt $n = 40$ Jahre beträgt:

$$\frac{40 + n - 79}{80 - 79} = \frac{M_{40+n} - M_{79}}{M_{80} - M_{79}} \Leftrightarrow n = 39,99880 .$$

Lösung 56. Die Nettojahresprämie dieser Versicherung ist bekanntlich $NP_{30:\overline{35}} \approx 1.043,00$ EUR. Die Bruttojahresprämie ergibt sich aus

$$\begin{aligned} BP_{x:\bar{t}} &= NP_{x:\bar{t}} + \frac{\alpha \cdot t}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} \cdot BP_{x:\bar{t}} + \beta \cdot BP_{x:\bar{t}} + \gamma_1 \cdot VS \\ &\Leftrightarrow \\ BP_{x:\bar{t}} &= \frac{NP_{x:\bar{t}} + \gamma_1 \cdot VS}{1 - \beta - \frac{\alpha \cdot t}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}}} , \end{aligned}$$

so dass konkret

$$BP_{30:\overline{35}} \approx \frac{1.043,00 + 0,001 \cdot 50.000}{1 - 0,04 - \frac{0,03 \cdot 35}{24,71104}} \approx 1.191,27 \text{ EUR} .$$

Die gezillmerte Nettojahresprämie beträgt

$$NP_{30:\overline{35}}^Z = NP_{30:\overline{35}} + \frac{0,03 \cdot 35}{24,71104} \cdot BP_{30:\overline{35}} \approx 1.093,62 \text{ EUR} .$$

Das (Brutto-)Deckungskapital nach $m = 5$ Jahren stimmt mit dem gezielterten Nettodeckungskapital überein, da aufgrund der Gleichheit von Prämienzahlungs- und Versicherungsdauer keine Verwaltungskostenreserve zu stellen ist:

$$\begin{aligned} {}_5V_{35} &= {}_5V_{35}^Z \\ &= 50.000 \cdot A_{35:\overline{30}} - NP_{30:\overline{35}}^Z \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} \\ &\approx 50.000 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 22,07071\right)}_{=0,56724} - 1.093,62 \cdot 22,07071 \\ &\approx 4.225,03 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

1. Die neue Versicherungssumme soll $VS^{\text{nach Aend}} = 60.000 \text{ EUR}$ betragen.
Aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} &BP^{\text{nach Aend}} \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} + {}_5V_{35} \\ &= VS^{\text{nach Aend}} \cdot A_{35:\overline{30}} + \alpha \cdot (t - 5) \cdot (BP^{\text{nach Aend}} - BP_{30:\overline{35}}) \\ &\quad + (\beta \cdot BP^{\text{nach Aend}} + \gamma_1 \cdot VS^{\text{nach Aend}}) \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} &BP^{\text{nach Aend}} \\ &= \frac{60.000 \cdot A_{35:\overline{30}} + \gamma_1 \cdot 60.000 \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} - \alpha \cdot (t - 5) \cdot BP_{30:\overline{35}} - {}_5V_{35}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}} - \alpha \cdot (t - 5)} \\ &\approx \frac{60.000 \cdot (0,56724 + 0,001 \cdot 22,07071) - 0,03 \cdot 30 \cdot 1.191,27 - 4.225,03}{(1 - 0,04) \cdot 22,07071 - 0,03 \cdot 30} \\ &\approx 1.481,75 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

2. Die Prämienzahlungsdauer wird um 5 Jahre reduziert, so dass nun γ_2 -Kosten zu berücksichtigen sind, da aufgrund der abgekürzten Prämienzahlung am Ende der Versicherungsdauer eine planmäßigbeitragsfreie Phase entsteht.

Für beide Fälle gilt folgende Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} &BP^{\text{nach Aend}} \cdot \ddot{a}_{35:\overline{25}} + {}_5V_{35} \\ &= VS^{\text{nach Aend}} \cdot A_{35:\overline{30}} + (\beta \cdot BP^{\text{nach Aend}} + \gamma_1 \cdot VS^{\text{nach Aend}}) \cdot \ddot{a}_{35:\overline{25}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot VS^{\text{nach Aend}} \cdot (\ddot{a}_{35:\overline{30}} - \ddot{a}_{35:\overline{25}}) . \end{aligned}$$

Der geänderte Prämienbarwert beträgt

$$\ddot{a}_{35:\overline{25}} = \frac{N_{35} - N_{60}}{D_{35}} \approx \frac{13.646.642,610 - 4.160.831,626}{487.478,565} \approx 19,45893 .$$

Bei gleichbleibender Versicherungssumme ergibt sich als neue (erhöhte) Bruttoprämie:

$$\begin{aligned} BP^{\text{nach Aend}} &= \frac{50.000 \cdot (A_{35:\overline{30}} + (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \ddot{a}_{35:\overline{25}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}}) - {}_5V_{35}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{35:\overline{25}}} \\ &\approx \frac{50.000 \cdot (0,56724 - 0,001 \cdot 19,45893 + 0,002 \cdot 22,07071) - 4.225,03}{(1 - 0,04) \cdot 19,45893} \\ &\approx 1.358,15 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Bei gleichbleibender Bruttoprämie ergibt sich als neue (reduzierte) Versicherungssumme:

$$VS^{\text{nach Aend}} = \frac{(1 - \beta) \cdot BP_{30:\overline{35}} \cdot \ddot{a}_{35:\overline{25}} + {}_5V_{35}}{A_{35:\overline{30}} + (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \ddot{a}_{35:\overline{25}} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}}}$$

bzw. konkret

$$\begin{aligned} VS^{\text{nach Aend}} &\approx \frac{(1 - 0,04) \cdot 1.191,27 \cdot 19,45893 + 4.225,03}{0,56724 - 0,001 \cdot 19,45893 + 0,002 \cdot 22,07071} \\ &\approx 44.733,28 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

3. Da keine Stornoabschläge erhoben werden, ist

$$RKW_5^{\text{gar}} = {}_5V_{30}^Z \approx 4.225,03 \text{ EUR} .$$

Die beitragsfreie Leistung wird unter Berücksichtigung der γ_3 -Kosten berechnet, indem

$$\begin{aligned} VS^{\text{vbf}} &= \frac{RKW_5^{\text{gar}}}{A_{35:\overline{30}} + \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{35:\overline{30}}} \\ &\approx \frac{4.225,03}{0,56724 + 0,004 \cdot 22,07071} \\ &\approx 6.445,28 \text{ EUR} . \end{aligned}$$

Lösung 57. Die Bruttojahresprämie $BP_{25:\overline{30}}$ ist mit 1.000 EUR angegeben, und die gezillmerte Nettojahresprämie beträgt $NP_{25:\overline{30}}^Z = 950$ EUR. Da eine Beitragsrückgewähr eingeschlossen ist, führt dies zu einer versicherten Jahresrente i.H.v. $JR \approx 1.321,15$ EUR.

1. Der Dynamiksatz beträgt $ds = 0,05$. Bei der ersten dynamischen Erhöhung zum Zeitpunkt $m_{\text{dyn}} = 1$ steigt die Bruttojahresprämie daher um

$$\Delta_{BP} = 0,05 \cdot 1.000 = 50 \text{ EUR} .$$

Diese Brutto-Mehrprämie wird für die verbleibende Prämienzahlungsdauer (= Aufschubdauer) gezahlt. Um die Erhöhung der versicherten Leistung zu berechnen, wird die Bruttojahresprämie $BP_{26:\overline{29}}$ für eine Leistung der Höhe 1 benötigt:

$$BP_{x+1:\overline{n-1}} = \frac{(1 + \gamma_4) \cdot {}_{n-1|\ddot{a}_{x+1}}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x+1:t-1} - \alpha \cdot (t - 1) - (IA)_{x+1:\overline{n-1}}} .$$

bzw. konkret

$$BP_{26:\overline{29}} = \frac{1,015 \cdot {}_{29|\ddot{a}_{26}}}{0,95 \cdot \ddot{a}_{26:\overline{29}} - 0,03 \cdot 29 - (IA)_{26:\overline{29}}} .$$

Die einfließenden Barwerte sind

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{26:\overline{29}} &= \frac{N_{26} - N_{55}}{D_{26}} \\ &\approx \frac{22.454.559,848 - 9.258.053,938}{595.714,026} \\ &\approx 22,15242 , \end{aligned}$$

$${}_{29|\ddot{a}_{26}} = \frac{N_{55}}{D_{26}} \approx \frac{9.258.053,938}{595.714,026} \approx 15,54110$$

und

$$\begin{aligned} (IA)_{26:\overline{29}} &= \frac{N_{26} - d \cdot S_{26} - (N_{55} - d \cdot S_{55}) - 29 \cdot (D_{55} - d \cdot N_{55})}{D_{26}} \\ &\approx \frac{22.454.559,848 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 625.705.494,340}{595.714,026} \\ &\quad - \frac{9.258.053,938 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 178.029.622,859}{595.714,026} \\ &\quad - 29 \cdot \frac{328.924,494 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 9.258.053,938}{595.714,026} \\ &\approx 17,09851 - 9,68128 - 7,17530 \\ &= 0,24193 , \end{aligned}$$

so dass

$$BP_{26:\overline{29}} \approx \frac{1,015 \cdot 15,54110}{0,95 \cdot 22,15242 - 0,87 - 0,24193} \approx 0,79137 .$$

Damit erhöht sich die garantierte Jahresrente um

$$\Delta_{JR} = \frac{\Delta_{BP}}{BP_{26:\overline{29}}} \approx \frac{50}{0,79137} \approx 63,18 \text{ EUR} ,$$

so dass nach der ersten dynamischen Erhöhung $JR \approx 1.384,33 \text{ EUR}$ ist (was einer Steigerung um 4,78% entspricht).

2. Die Prämienzahlungs- und die Aufschubdauer stimmen überein, so dass keine Verwaltungskostenreserve existiert. Daher entspricht das Deckungskapital der Zillmerreserve, wobei sämtliche einfließenden Leistungsbarwerte, welche den Rentenbezug betreffen, um die γ_4 -Kosten anzupassen sind. Wie bereits bekannt ist, beträgt die gezillmerte Nettoprämie inkl. γ_4 -Kosten $NP_{25:\overline{30}}^Z = 950 \text{ EUR}$. Das Deckungskapital nach m Jahren beträgt

$$\begin{aligned} {}_mV_x &= JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{n-m}|\ddot{a}_{x+m} \\ &\quad + BP_{x:\overline{t}} \cdot \left(m \cdot A_{x+1:m:\overline{n-m}} + (IA)_{x+1:m:\overline{n-m}} \right) \\ &\quad - NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} \end{aligned}$$

bzw. konkret (wegen der Altersverschiebung um 5 Jahre)

$$\begin{aligned} {}_{15}V_{25} &= JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{15}\ddot{a}_{40} \\ &\quad + BP_{25:\overline{30}} \cdot \left(15 \cdot A_{1:40:\overline{15}} + (IA)_{1:40:\overline{15}} \right) \\ &\quad - NP_{25:\overline{30}}^Z \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}} . \end{aligned}$$

Die benötigten Barwerte sind

$$\begin{aligned} A_{1:40:\overline{15}} &= \frac{M_{40} - M_{55}}{D_{40}} = \frac{D_{40} - d \cdot N_{40} - (D_{55} - d \cdot N_{55})}{D_{40}} \\ &\approx \frac{449.145,504 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 15.111.967,335}{449.145,504} \\ &\quad - \frac{328.924,494 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 9.258.053,938}{449.145,504} \\ &\approx 0,34027 - 0,32817 \\ &\approx 0,01210 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (IA)_{\overline{40:15}} &= \frac{R_{40} - R_{55} - 15 \cdot M_{55}}{D_{40}} \\
 &= \frac{N_{40} - d \cdot S_{40} - (N_{55} - d \cdot S_{55}) - 15 \cdot (D_{55} - d \cdot N_{55})}{D_{40}} \\
 &\approx \frac{15.111.967,335 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 361.468.850,948}{449.145,504} \\
 &\quad - \frac{9.258.053,938 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 178.029.622,859}{449.145,504} \\
 &\quad - 15 \cdot \frac{328.924,494 - \frac{0,02}{1,02} \cdot 9.258.053,938}{449.145,504} \\
 &\approx 17,86580 - 12,84055 - 4,92248 \\
 &\approx 0,10277,
 \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{15}} = \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{40}} \approx \frac{15.111.967,335 - 9.258.053,938}{449.145,504} \approx 13,03345$$

und

$${}_{15}\ddot{a}_{40} = \frac{N_{55}}{D_{40}} \approx \frac{9.258.053,938}{449.145,504} \approx 20,61259.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 {}_{15}V_{25} &\approx 1.321,15 \cdot 1,015 \cdot 20,61259 \\
 &\quad + 1.000 \cdot (15 \cdot 0,01210 + 0,10277) \\
 &\quad - 950 \cdot 13,03345 \\
 &\approx 15,543,30 \text{ EUR}.
 \end{aligned}$$

Nach Abzug des Stornoabschlags ergibt sich somit ein garantierter Rückkaufswert von

$$RKW_{15}^{\text{gar}} = 15,443,30 \text{ EUR},$$

welcher zur Ermittlung der beitragsfreien Rente herangezogen wird. Aus

$$\begin{aligned}
 RKW_{15}^{\text{gar}} &= JR^{\text{vbf}} \cdot (1 + \gamma_4) \cdot {}_{15}\ddot{a}_{40} + JR^{\text{vbf}} \cdot \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}} \\
 &\quad + 15 \cdot BP_{25:\overline{30}} \cdot A_{\overline{40:15}}
 \end{aligned}$$

bzw.

$$JR^{\text{vbf}} = \frac{RKW_{15}^{\text{gar}} - 15 \cdot BP_{25:\overline{30}} \cdot A_{\overline{40:15}}}{(1 + \gamma_4) \cdot {}_{15}\ddot{a}_{40} + \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{40:\overline{15}}}$$

folgt

$$JR^{\text{vbf}} \approx \frac{15,443,30 - 15 \cdot 1.000 \cdot 0,01210}{1,015 \cdot 20,61259 + 0,025 \cdot 13,03345} \approx 718,28 \text{ EUR}.$$

Kapitel 12

Verbundene Leben

Bislang wurde ausschließlich der Fall betrachtet, dass eine einzelne Person dem Sterblichkeitsrisiko ausgesetzt ist. Daher sagt man auch: „ein unter einem Risiko stehendes Leben“. Wie in Abschn. 3.2 beschrieben, kommt es jedoch – insbesondere im Bereich der betrieblichen Altersversorgung bzw. der Pensionsversicherung – häufig vor, dass „mehrere unter einem Risiko stehende Leben“ betrachtet werden, was als **verbundene Leben** bezeichnet wird. Dabei sind also mehrere Personen gleichzeitig demselben Risiko, in diesem Fall Sterblichkeitsrisiko, ausgesetzt. Die nachfolgenden Ausführungen können auf drei oder mehr Leben erweitert werden, gleichwohl beschränken wir uns im Folgenden auf den häufig anzutreffenden Spezialfall von zwei verbundenen Leben.

Seien (x) und (y) die beiden versicherten Personen. Üblicherweise bezeichnet (x) eine männliche Person des Alters x , während (y) eine weibliche Person des Alters y repräsentiert. Sofern nichts anderes erwähnt wird, folgen wir hier dieser Konvention. Selbstverständlich ist die Bedeutung austauschbar, und es ist ebenfalls möglich, dass beide versicherten Personen das gleiche Geschlecht aufweisen.

Entsprechend des bisherigen Vorgehens lassen sich Sterbetafelfunktionen auf mehrere Leben erweitern, ebenso können geeignete Kommutationszahlen definiert werden. Weiterhin lassen sich eine (gemeinsame) zukünftige Lebensdauer definieren und Formeln für die erwarteten Barwerte spezieller Risikolebens-, Kapitallebens- und Rentenversicherungen aufstellen. Da sich die Herleitung der Leistungsbarwerte sowie die anschließende Berechnung von Prämien und Deckungskapital analog zu dem bereits für ein Leben bekannten Vorgehen geschehen, wird auf eine wiederholte ausführliche Darstellung verzichtet.

Hinsichtlich der Auslösung der Leistung – z.B. Todesfallsumme oder Hinterbliebenenrente – kann danach unterschieden werden, ob eine bestimmte der beiden Personen zuerst sterben muss, d.h., die Leistung hängt ggf. von der Reihenfolge ab, in der (x) und (y) sterben. Besteht eine solche Festlegung, wird der Versicherungsvertrag **einseitig** genannt, andernfalls wird der Vertrag als **zweiseitig** bezeichnet. Bei einseitigen Verträgen ist die Leistung also bedingt auf den jeweiligen „Zustand“ des Paars (x, y), und folglich ist die Berechnung des Deckungskapitals aufgrund der möglichen verschiedenen Konstellationen aufwändiger.

Versicherungen auf verbundene Leben treten vorrangig im Kontext der Risikolebens- sowie der Rentenversicherung auf, um die jeweils hinterbliebene Person abzusichern. Während Risikolebensversicherungen oftmals zweiseitig sind, liegt bei der Hinterbliebenenrentenversicherung meistens ein einseitiger Vertrag vor.

In Analogie zu Abschn. 5.1 bezeichnet T_x die stetige Zufallsvariable für die zukünftige Lebensdauer von (x) und T_y die Zufallsvariable, welche die zukünftige Lebensdauer von (y) beschreibt. Weiter seien K_x und K_y die zugehörigen gestützten zukünftigen Lebensdauern von (x) bzw. (y) (siehe Abschn. 5.1.4).

Die beiden Leben werden von Vertragsbeginn an als fest zusammengehöriges Paar angesehen, was durch die Notation (x, y) verdeutlicht wird. Im Folgenden wird angenommen, dass (x) und (y) zwei voneinander unabhängige Leben sind, d.h. insbesondere, dass ihre zukünftigen Lebensdauern stochastisch unabhängig sind.

12.1 Versicherungen auf den Tod der ersten Person

Zunächst werden Versicherungen betrachtet, deren Leistung ausgelöst wird, sobald die erste der beiden versicherten Personen verstirbt.

12.1.1 Sterbetafel-Basisfunktionen

Die Basisfunktionen von Sterbetafeln (vgl. Abschn. 5.2) werden auf folgende Weise auf zwei verbundene Leben erweitert:

- $l_{x,y} = l_x \cdot l_y$ gibt die Anzahl lebender Paare an, von denen die erste Person x und die zweite Person y Jahre alt ist.
- $d_{x,y} = l_{x,y} - l_{x+1,y+1}$ gibt die Anzahl Paare an, die innerhalb eines Jahres gestorben sind, d.h., dass die erste Person im Altersintervall $[x, x + 1[$ und/oder die zweite Person im Altersintervall $[y, y + 1[$ stirbt.

12.1.2 Kommutationszahlen

Für Erlebensfallleistungen wird die Anzahl diskontierter Lebender, genauer: lebender Paare, definiert als

$$D_{x,y} = l_{x,y} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)} .$$

Wie *Isenbart und Münzner (1987)*, S. 82, ausführen, sind auch Kommutationszahlen der Art $D_{x,y} = D_x \cdot l_y$ oder $D_{x,y} = D_y \cdot l_x$ möglich, welche leichter zu berechnen sind. Wir verwenden jedoch die genannte, in x und y symmetrische Definition.

Die aufsummierte Anzahl diskontierter Lebender ist dann

$$N_{x,y} = \sum_{j=0}^{\omega - \max\{x,y\}} D_{x+j,y+j}$$

sowie die doppelt aufsummierte Anzahl diskontierter Lebender

$$S_{x,y} = \sum_{j=0}^{\omega - \max\{x,y\}} N_{x+j,y+j} .$$

Für Todesfallleistungen ist die Anzahl diskontierter Toter, genauer: gestorbener Paare,

$$C_{x,y} = d_{x,y} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}$$

(bzw. $C_{x,y} = d_{x,y} \cdot v^{x+1}$ oder $C_{x,y} = d_{x,y} \cdot v^{y+1}$) und damit

$$M_{x,y} = \sum_{j=0}^{\omega - \max\{x,y\}} C_{x+j,y+j}$$

und

$$R_{x,y} = \sum_{j=0}^{\omega - \max\{x,y\}} M_{x+j,y+j} .$$

Analog zu Abschn. 6.1 gelten zwischen den Kommutationszahlen die folgenden Beziehungen:

$$C_{x,y} = v \cdot D_{x,y} - D_{x+1,y+1} ,$$

$$M_{x,y} = D_{x,y} - d \cdot N_{x,y} ,$$

$$R_{x,y} = N_{x,y} - d \cdot S_{x,y} .$$

Der Beweis der ersten Gleichheit erfolgt in Übungsaufgabe 59. Die beiden anderen Identitäten folgen wiederum durch Summation, denn bspw. ist

$$\begin{aligned}
 M_{x,y} &= \sum_{j=0}^{\omega-\max\{x;y\}} C_{x+j,y+j} \\
 &= \sum_{j=0}^{\omega-\max\{x;y\}} (v \cdot D_{x+j,y+j} - D_{x+j+1,y+j+1}) \\
 &= v \cdot N_{x,y} - N_{x+1,y+1} \\
 &= v \cdot N_{x,y} - (N_{x,y} - D_{x,y}) \\
 &= D_{x,y} - d \cdot N_{x,y} .
 \end{aligned}$$

12.1.3 Zukünftige Lebensdauer

Die Zufallsvariable

$$T_{x,y} := \min \{T_x; T_y\}$$

beschreibt die zukünftige Lebensdauer des Paars (x, y) , welche auch als **gemeinsame zukünftige Lebensdauer** bezeichnet wird. Sobald die erste Person des Paars stirbt, endet die Existenz dieses Paars.

Die Überlebensfunktion der stetigen Zufallsvariable $T_{x,y}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das Paar mindestens t Jahre überlebt, was bedeutet, dass sowohl (x) als auch (y) jeweils mindestens t Jahre überleben. Folglich ist

$$\begin{aligned}
 SF_{x,y}(t) &= P(T_{x,y} > t) \\
 &= P(T_x > t \text{ und } T_y > t) \\
 &= tp_{x,y} .
 \end{aligned}$$

Da (x) und (y) als voneinander unabhängig vorausgesetzt sind, gilt

$$P(T_x > t \text{ und } T_y > t) = P(T_x > t) \cdot P(T_y > t)$$

und damit

$$tp_{x,y} = tp_x \cdot tp_y .$$

Die Verteilungsfunktion von $T_{x,y}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 F_{x,y}(t) &= 1 - SF_{x,y}(t) \\
 &= P(T_{x,y} \leq t) \\
 &= tq_{x,y} ,
 \end{aligned}$$

so dass

$${}^t q_{x,y} = 1 - {}^t p_{x,y} .$$

Zu beachten ist jedoch, dass

$${}^t q_{x,y} \neq {}^t q_x \cdot {}^t q_y .$$

Der Grund hierfür ist, dass die Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit angibt, dass das Paar innerhalb der nächsten t Jahre verstirbt, d.h., dass mindestens eine von beiden Personen innerhalb dieses Zeitraums verstirbt. Dieses Ereignis tritt ein, falls (x) und-oder (y) stirbt, so dass sich stattdessen folgende Gleichung ergibt:

$${}^t q_{x,y} = {}^t q_x + {}^t q_y - {}^t q_x \cdot {}^t q_y .$$

Die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten können in bekannter Weise auch über die Basisfunktionen $l_{x,y}$ und $d_{x,y}$ dargestellt werden, nämlich

$${}^t p_{x,y} = \frac{l_{x+t,y+t}}{l_{x,y}}$$

sowie

$${}^t q_{x,y} = \frac{d_{x+t,y+t}}{l_{x,y}} = \frac{l_{x+t,y+t} - l_{x+t+1,y+t+1}}{l_{x,y}} .$$

Die Dichtefunktion von $T_{x,y}$ ergibt sich als erste Ableitung der Verteilungsfunktion, also

$$f_{x,y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} {}^t q_{x,y} = - {}^t p_{x,y} \cdot \mu_{x+t,y+t} ,$$

wobei $\mu_{x,y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}^h q_{x,y}}{h}$ die in üblicher Form definierte Ausfallrate bezeichnet. Wie in Abschn. 5.1.1 folgt somit

$${}^t p_{x,y} = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+u,y+u} du \right\} .$$

Die **gestutzte gemeinsame zukünftige Lebensdauer** des Paares (x, y) ist wiederum der ganzzahlige Anteil von $T_{x,y}$, d.h.

$$K_{x,y} = \lfloor T_{x,y} \rfloor = \min \{K_x; K_y\} .$$

$K_{x,y}$ ist eine diskrete Zufallsvariable, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(K_{x,y} = c) &= {}_c|q_{x,y} \\ &= {}_c p_{x,y} - {}_{c+1} p_{x,y} . \end{aligned}$$

Diese Darstellung verdeutlicht wiederum die Interpretation, dass nämlich der erste Tod innerhalb des Paars (x, y) zwischen den ganzen Jahren c und $c + 1$ eintritt (und das Paar damit erlischt).

12.1.4 Fernere Lebenserwartung

Die (vollständige) fernere Lebenserwartung des Paars (x, y) ist

$$\mathring{e}_{x,y} = E[T_{x,y}] = \int_0^{\infty} t \cdot f_{x,y}(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot {}_t p_{x,y} \cdot \mu_{x+t, y+t} dt = \int_0^{\infty} {}_t p_{x,y} dt ,$$

und die gestutzte fernere Lebenserwartung berechnet sich als

$$\mathring{e}_{x,y} = E[K_{x,y}] = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot P(K_{x,y} = c) = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot {}_c|q_{x,y} = \sum_{c=1}^{\infty} {}_c p_{x,y} .$$

Unter der Annahme UDD der Gleichverteilung der Todesfälle innerhalb eines Jahres sind diese beiden Größen wiederum über die Beziehung

$$\mathring{e}_{x,y} \approx e_{x,y} + \frac{1}{2}$$

miteinander verknüpft.

12.1.5 Erwartete Barwerte von Erlebensfallleistungen

Für die reine Erlebensfallversicherung ist der erwartete Barwert gegeben durch

$${}_n E_{x,y} = {}_n p_{x,y} \cdot v^n = \frac{D_{x+n, y+n}}{D_{x,y}} .$$

Die Leistung wird fällig, wenn beide Personen n Jahre überleben.

Der Leistungsbarwert einer lebenslang jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente ist

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x,y} &= E \left[\ddot{a}_{\overline{1+K_{x,y}}} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} {}_j E_{x,y} \\ &= \frac{N_{x,y}}{D_{x,y}},\end{aligned}$$

und im Fall einer entsprechenden temporären Leibrente ergibt sich

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x,y:\overline{n}} &= E \left[\ddot{a}_{\min\{1+K_{x,y}, n\}} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} {}_j E_{x,y} \\ &= \frac{N_{x,y} - N_{x+n, y+n}}{D_{x,y}}.\end{aligned}$$

Die Leibrente wird also so lange gezahlt wie das Paar (x, y) existiert, d.h. solange beide Personen leben. Daher wird diese Art der Leibrente auch **Verbindungsrente** genannt.

Ist die lebenslang vorschüssig zahlbare Leibrente um u Jahre aufgeschoben, so lautet ihr erwarteter Barwert

$${}_u \ddot{a}_{x,y} = {}_u E_{x,y} \cdot \ddot{a}_{x+u, y+u} = \frac{N_{x+u, y+u}}{D_{x,y}}.$$

Sofern die lebenslange Leibrente stetig gezahlt wird, gilt für den Leistungsbarwert

$$\begin{aligned}\overline{a}_{x,y} &= E \left[\overline{a}_{T_{x,y}} \right] = \int_0^{\infty} \left(\overline{a}_t \cdot \underbrace{{}_t p_{x,y} \cdot \mu_{x+t, y+t}}_{=-\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_{x,y}} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} ({}_t p_{x,y} \cdot v^t) dt.\end{aligned}$$

Es gelten wiederum bekannte Beziehungen der Form

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x,y} &= \ddot{a}_{x,y:\overline{n}} + {}_n \ddot{a}_{x,y}, \\ \ddot{a}_{x,y}^{(k)} &\approx \ddot{a}_{x,y} - \frac{k-1}{2k}, \\ \overline{a}_{x,y} &\approx \ddot{a}_{x,y} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

12.1.6 Erwartete Barwerte von Todesfallleistungen

Wird die Versicherungsleistung am Ende des Jahres gezahlt, in dem die erste Person von (x, y) verstorben ist, so hat man die folgenden erwarteten Barwerte:

- Lebenslange Risikolebensversicherung:

$$\begin{aligned} A_{x,y} &= E[v^{1+K_{x,y}}] = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_{x,y} \\ &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x,y} \end{aligned}$$

- Gemischte Kapitallebensversicherung:

$$A_{x,y:\bar{n}} == 1 - d \cdot \ddot{a}_{x,y:\bar{n}}$$

- Temporäre Risikolebensversicherung:

$$\begin{aligned} {}_nA_{x,y} &= A_{x,y:\bar{n}} = E[v^{\min\{1+K_{x,y}, n\}}] \\ &= A_{x,y:\bar{n}} - {}_nE_{x,y} \end{aligned}$$

Die lebenslange Risikolebensversicherung lässt sich wiederum als Summe zweier Risikolebensversicherungen darstellen, wobei die erste temporär ist und sofort beginnt, die zweite lebenslang ist und um die Laufzeit der ersten aufgeschoben ist, also

$$A_{x,y} = A_{x,y:\bar{n}} + {}_nE_{x,y} \cdot A_{x+n,y+n}.$$

Der Beweis der ersten beiden Identitäten erfolgt weiter unten in Übungsaufgabe 61.

Ist die Versicherungsleistung hingegen unmittelbar bei Tod der ersten Person von (x, y) fällig, so ergeben sich analog zu Abschn. 6.3 folgende Leistungsbarwerte:

- Lebenslange Risikolebensversicherung:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{x,y} &= E[v^{T_{x,y}}] = \int_0^{\infty} (v^t \cdot {}_tp_{x,y} \cdot \mu_{x+t,y+t}) dt \\ &= 1 - \delta \cdot \overline{a}_{x,y} \end{aligned}$$

- Gemischte Kapitallebensversicherung:

$$\overline{A}_{x,y:\bar{n}} = 1 - \delta \cdot \overline{a}_{x,y:\bar{n}}$$

- Temporäre Risikolebensversicherung:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{x,y:\bar{n}} &= E \left[v^{\min\{T_{x,y}, n\}} \right] = \int_0^n (v^t \cdot {}_t p_{x,y} \cdot \mu_{x+t,y+t}) dt \\ &= \overline{A}_{x,y:\bar{n}} - {}_n E_{xy}\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall gelten bereits bekannte Beziehungen der Form

$$\overline{A}_{x,y:\bar{n}} \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot A_{x,y:\bar{n}}$$

sowie

$$\overline{A}_{x,y} = \overline{A}_{x,y:\bar{n}} + {}_n E_{xy} \cdot \overline{A}_{x+n,y+n}.$$

12.2 Versicherungen auf den Tod der letzten Person

Im Unterschied zum vorherigen Abschnitt werden nun Versicherungen betrachtet, deren Leistung bei Tod der letzten, d.h. zweiten, VP innerhalb des Paares (x, y) fällig wird.

12.2.1 Zukünftige Lebensdauer

Die (gemeinsame) zukünftige Lebensdauer des Paares (x, y) lässt sich in diesem Fall durch die Zufallsvariable

$$T_{\overline{x,y}} := \max \{T_x; T_y\}$$

beschreiben. Die Existenz des Paares endet also erst, wenn die letzte der beiden Personen stirbt.

Die Überlebensfunktion der stetigen Zufallsvariable $T_{\overline{x,y}}$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der letzte Überlebende von (x, y) nach t Jahren noch lebt, d.h., dass nur (x) oder nur (y) oder beide mindestens t Jahre überleben. Unter Ausnutzung der Unabhängigkeitsannahme von (x) und (y) erhält man

$$\begin{aligned}SF_{\overline{x,y}}(t) &= P(T_{\overline{x,y}} > t) \\ &= P(T_x > t) + P(T_y > t) - P(T_x > t \text{ und } T_y > t) \\ &= {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{x,y} \\ &= {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x \cdot {}_t p_y\end{aligned}$$

und somit

$${}^t p_{\overline{x,y}} = {}^t p_x + {}^t p_y - {}^t p_x \cdot {}^t p_y .$$

Die Verteilungsfunktion von $T_{\overline{x,y}}$ ist

$$\begin{aligned} F_{\overline{x,y}}(t) &= P(T_{\overline{x,y}} \leq t) \\ &= P(T_x \leq t \text{ und } T_y \leq t) \\ &= P(T_x \leq t) \cdot P(T_y \leq t) \\ &= {}^t q_x \cdot {}^t q_y \\ &= {}^t q_{\overline{x,y}} \end{aligned}$$

und gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der letzte Überlebende des Paares (x, y) innerhalb der nächsten t Jahre verstirbt, oder anders ausgedrückt, dass beide Personen innerhalb der nächsten t Jahre sterben.

Selbstverständlich ist

$$F_{\overline{x,y}}(t) = 1 - SF_{\overline{x,y}}(t)$$

bzw.

$${}^t q_{\overline{x,y}} = 1 - {}^t p_{\overline{x,y}} .$$

Die Dichtefunktion $T_{\overline{x,y}}$ lautet

$$\begin{aligned} f_{\overline{x,y}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} {}^t q_{\overline{x,y}} \\ &= {}^t p_x \cdot \mu_{x+t} - {}^t p_y \cdot \mu_{y+t} - {}^t p_{x,y} \cdot \mu_{x+t,y+t} , \end{aligned}$$

und für die Ausfallrate ergibt sich

$$\mu_{\overline{x,y}} = \frac{{}^t p_x \cdot \mu_{x+t} - {}^t p_y \cdot \mu_{y+t} - {}^t p_{x,y} \cdot \mu_{x+t,y+t}}{1 - {}^t q_{\overline{x,y}}} .$$

Übrigens lassen sich in diesem Fall Sterbetafel-Basisfunktionen nicht ohne Weiteres konstruieren. Zwar gilt $d_{\overline{x,y}} = l_{\overline{x,y}} - l_{\overline{x+1,y+1}} = l_{\overline{x,y}} \cdot q_{\overline{x,y}}$, aber eine kompakte Darstellung von $l_{\overline{x,y}}$ in Abhängigkeit von l_x und l_y ist nicht möglich.

12.2.2 Fernere Lebenserwartung

Die (vollständige) fernere Lebenserwartung der letzten überlebenden Person des Paars (x, y) ist

$$\mathring{e}_{\overline{x,y}} = E[T_{\overline{x,y}}] = \int_0^{\infty} t \cdot f_{\overline{x,y}}(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot {}_t p_{\overline{x,y}} \cdot \mu_{\overline{x+t,y+t}} dt = \int_0^{\infty} {}_t p_{\overline{x,y}} dt,$$

und die gestutzte fernere Lebenserwartung berechnet sich als

$$e_{\overline{x,y}} = E[K_{\overline{x,y}}] = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot P(K_{\overline{x,y}} = c) = \sum_{c=0}^{\infty} c \cdot {}_c q_{\overline{x,y}} = \sum_{c=1}^{\infty} {}_c p_{\overline{x,y}}.$$

Wegen $T_{\overline{x,y}} = T_x + T_y - T_{x,y}$ gilt

$$\mathring{e}_{\overline{x,y}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{x,y}$$

sowie

$$e_{\overline{x,y}} = e_x + e_y - e_{x,y}.$$

12.2.3 Erwartete Barwerte von Erlebensfallleistungen

Der Leistungsbarwert der reinen Erlebensfallversicherung ist

$${}_n E_{\overline{x,y}} = {}_n p_{\overline{x,y}} \cdot v^n = {}_n E_x + {}_n E_y - {}_n E_{x,y}.$$

Diese wird fällig, wenn mindestens eine der beiden Personen (x) oder (y) n Jahre überlebt.

Der Leistungsbarwert einer lebenslang vorschüssig jährlich zahlbaren Leibrente ergibt sich als

$$\ddot{a}_{\overline{x,y}} = \sum_{j=0}^{\infty} {}_j E_{\overline{x,y}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

bzw. im stetig zahlbaren Fall

$$\overline{a}_{\overline{x,y}} = \overline{a}_x + \overline{a}_y - \overline{a}_{x,y}.$$

Die Leibrente wird also bis zum Tod der letzten Person von (x) und (y) gezahlt. Diese Art der Leibrente wird auch als **Verbindungsrente mit zweiseitigem Übergang** bezeichnet.

Wird die vorschüssige Leibrente nur temporär gezahlt, so gilt für den zugehörigen Leistungsbarwert

$$\ddot{a}_{\overline{x,y:n}} = \ddot{a}_{x:\overline{n}} + \ddot{a}_{y:\overline{n}} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n}} .$$

12.2.4 Erwartete Barwerte von Todesfallleistungen

Sofern die Versicherungsleistung am Ende des Jahres, in dem die letzte Person von (x, y) gestorben ist, gezahlt wird, ergibt sich aufgrund der Beziehung

$$v^{K_x+1} + v^{K_y+1} = v^{\min\{K_x+1; K_y+1\}} + v^{\max\{K_x+1; K_y+1\}}$$

für den Leistungsbarwert der lebenslangen Risikolebenversicherung

$$\begin{aligned} A_{\overline{x,y}} &= A_x + A_y - A_{x,y} \\ &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{\overline{x,y}} . \end{aligned}$$

Sofern die Risikolebensversicherung temporär abgeschlossen wird, lautet der erwartete Barwert

$$\begin{aligned} {}_n A_{\overline{x,y}} &= A_{\frac{1}{x,y:\overline{n}}} \\ &= A_{\frac{1}{x:\overline{n}}} + A_{\frac{1}{y:\overline{n}}} - A_{\frac{1}{x,y:\overline{n}}} . \end{aligned}$$

Für den Leistungsbarwert der gemischten Kapitallebensversicherung gilt dann

$$\begin{aligned} A_{\overline{x,y:\overline{n}}} &= {}_n A_{\overline{x,y}} + {}_n E_{\overline{x,y}} \\ &= A_{x:\overline{n}} + A_{y:\overline{n}} - A_{x,y:\overline{n}} . \end{aligned}$$

Als Beispiel für Versicherungsleistungen, die unmittelbar bei Tod der letzten Person von (x, y) gezahlt werden, wird die lebenslange Risikolebensversicherung betrachtet. Wegen

$$v^{T_x} + v^{T_y} = v^{\min\{T_x, T_y\}} + v^{\max\{T_x, T_y\}}$$

ergibt sich für den Leistungsbarwert

$$\begin{aligned} \overline{A}_{\overline{x,y}} &= \overline{A}_x + \overline{A}_y - \overline{A}_{x,y} \\ &= 1 - \delta \cdot \overline{a}_{\overline{x,y}} . \end{aligned}$$

Bei Versicherungen auf den Tod der letzten Person ist die Berechnung des Deckungskapitals aufwändiger. Das Deckungskapital hängt von dem Zustand der Versicherung ab, nämlich ob bereits eine der beiden VPen verstorben ist, und dies führt somit zu drei unterschiedlichen Konstellationen.

12.3 Einseitige Versicherungen

Die bisherigen Ausführungen spiegeln die Situation von zweiseitigen Versicherungen wider. Der Fokus lag auf der Lebensdauer des Paares (x, y) , dessen Existenz mit dem Tod der ersten bzw. letzten Person erlischt, ganz gleich ob es sich dabei um (x) oder (y) handelt.

Hingegen ist bei einseitigen Versicherungen die Reihenfolge, in der (x) und (y) sterben, sehr wohl relevant für die Fälligkeit einer Leistung. Dies wird durch Ziffern über dem Suffix xy kenntlich gemacht. So ist tq_{xy}^1 die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass (x) zuerst, also vor (y) , innerhalb der nächsten t Jahre verstirbt, d.h.

$$tq_{x,y}^1 = P(T_x < T_y \text{ und } T_x < t) ,$$

und

$$tq_{x,y}^1 = P(T_y < T_x \text{ und } T_y < t)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass (y) vor (x) innerhalb der nächsten t Jahre verstirbt.

Umgekehrt gibt

$$tq_{x,y}^2 = P(T_x > T_y \text{ und } T_x < t)$$

die Wahrscheinlichkeit an, dass (x) als zweites, also nach (y) , innerhalb der nächsten t Jahre stirbt. Analog ist $tq_{x,y}^2$ zu interpretieren.

Es gelten die Beziehungen

$$tq_x = tq_{x,y}^1 + tq_{x,y}^2$$

und

$$tq_{x,y} = tq_{x,y}^1 + tq_{x,y}^2 ,$$

aber

$$tq_{x,y}^1 \neq tq_{x,y}^2$$

bzw.

$$tq_{x,y}^2 \neq tq_{x,y}^1 .$$

Exemplarisch sei der erwartete Barwert einer einseitigen lebenslangen Risikolebensversicherung aufgeführt, bei welcher die Todesfallleistung am Ende des Jahres, in dem (x) verstorben ist, nur dann zur Auszahlung gelangt, falls (x) vor (y) verstirbt:

$$A_{\frac{1}{x},y} = \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j p_{x,y} \cdot q_{x+j,y+j}.$$

12.4 Hinterbliebenenrenten

Bei einer Hinterbliebenenrente handelt es sich um eine sog. **Überlebensrente**. Aus Vereinfachungsgründen nehmen wir an, dass die erste VP ein Mann (x) und die mitversicherte Person (y) weiblichen Geschlechts ist, so dass wir auch von **Witwenrente** sprechen. Die nachfolgenden Formeln sind durch entsprechenden Austausch der Kennzeichnungen x und y auf jede andere Geschlechter-Konstellation übertragbar.

Die Rente an die hinterbliebene Person (y) wird nur dann gezahlt, wenn (x) vor ihr stirbt. Stirbt hingegen (y) vor (x), so wird keine Leistung fällig. Daher spricht man in diesem Zusammenhang häufig auch von einer **Anwartschaft auf Hinterbliebenen-** bzw. **Witwenrente**.

12.4.1 Tarifbeschreibung

Hinterbliebenenrenten werden als Zusatzversicherungen zu aufgeschobenen oder sofort-beginnenden Rentenversicherungen angeboten. Die Regelungen sehen üblicherweise vor, dass bei Tod der hauptversicherten Person (x) vor oder nach dem Rentenbeginn die Hinterbliebenenrente ausgelöst wird.

Sofern eine Rentengarantiezeit vereinbart ist und die hauptversicherte Person während dieses Zeitraums stirbt, beginnt die Zahlung der Witwenrente erst zum ersten Rentenzahlungstermin nach Ablauf der Mindestlaufzeit (weil bis dahin ja noch die reguläre Altersrente der ersten VP gezahlt wird). Die Zahlungsweise der Witwenrente stimmt mit derjenigen der Altersrente überein.

Die Höhe der Witwenrente wird i.d.R. als Prozentsatz der Altersrente festgelegt. Oftmals beträgt die Witwenrente 60% der Altersrente, jedoch sind abweichende Prozentsätze zulässig und gebräuchlich.

Stirbt die mitversicherte Person, so erlischt die Zusatzversicherung, ggf. ohne dass eine Leistung aus diesem Baustein fällig geworden wäre (nämlich wenn die Ehefrau vor ihrem Ehemann verstirbt).

12.4.2 Individuelle Witwenrente

Bei der (Anwartschaft auf) Witwenrente werden zwei Kalkulationsvarianten unterschieden. Ist die versicherte Person bei Abschluss der Versicherung verheiratet, so wird die Witwenrentenversicherung individuell auf Basis des Familienstandes der versicherten Person und des tatsächlichen Alters der mitversicherten Person kalkuliert.

Der Leistungsbarwert einer einseitigen, lebenslang jährlich vorschüssig zahlbaren Überlebensrente wird mit $\ddot{a}_{x|y}$ notiert (vgl. *Isenbart und Münzner (1987)*, S. 88). Dabei wird die den Tod auslösende Person (x) vor dem senkrechten Balken aufgeführt und die bezugsberechtigte Person (y) dahinter. Die Rente wird also nur dann ausgezahlt, falls (x) tot ist und die Ehefrau bzw. Witwe (y) noch lebt.

Im Falle der individuellen Witwenrente gilt für den erwarteten Barwert der Leistung die Gleichung

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y} .$$

Der Beweis dieser Aussage wird in Übungsaufgabe 62 erbracht. Hierbei handelt es sich um eine **einseitige Überlebensrente**.

Bei der Berechnung des Deckungskapitals muss hinsichtlich der verschiedenen Vertragszustände differenziert werden, was in Übungsaufgabe 64 exemplarisch nachvollzogen wird.

Das Konstrukt

$$\ddot{a}_{\frac{[1]}{x,y}} = \ddot{a}_{x|y} + \ddot{a}_{y|x} ,$$

bei welchem der jeweils überlebende Ehegatte nach dem Tod der zuerst gestorbenen VP eine Hinterbliebenenrente erhält, wird **zweiseitige (oder auch wechselseitige) Überlebensrente** genannt.

12.4.3 Kollektive Witwenrente

Im Rahmen der betrieblichen Altersvorsorge kommt es häufig vor, dass alle dem Kollektiv angehörenden Personen dieselbe Versicherung abschließen, unabhängig von ihrer tatsächlichen persönlichen Risiko- und/oder Lebenssituation.

ation. Insbesondere kommt es oft vor, dass in der für das Kollektiv vorgesehenen Deckung der Baustein einer Hinterbliebenenrenten-Zusatzversicherung bzw. eine Anwartschaft auf Witwenrente obligatorisch integriert ist.

Folglich ist aber unbekannt, welche der versicherten Personen verheiratet ist und – falls ja – welches Geschlecht die zugehörige MVP hat und wie alt diese ist.

Die fehlenden Informationen sind im Rahmen eines kollektiven Berechnungsansatzes jedoch irrelevant, bzw. sie werden durch das Treffen gewisser Annahmen ersetzt. Zunächst wird von einem gegenüber der hauptversicherten Person entgegengesetzten Geschlecht der MVP ausgegangen, darüber hinaus wird der Einfachheit halber eine pauschal ermittelte Altersdifferenz zwischen erster und zweiter VP angesetzt. Der Frage, ob die VP verheiratet ist oder nicht, kann durch den Ansatz von **Verheiratungswahrscheinlichkeiten** oder durch pauschale Abschläge auf den Leistungsbarwert begegnet werden. Die in den Annahmen enthaltenen Unsicherheiten können durch einen zusätzlichen Sicherheitszuschlag aufgefangen werden.

Die nachfolgend beschriebene Herleitung des Barwertes der Hinterbliebenenleistung verwendet Verheiratungswahrscheinlichkeiten. Der Ausdruck h_x repräsentiert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die VP im Alter x verheiratet ist. Zu finden sind derartige Wahrscheinlichkeiten z.B. in den (Heubeck-)Richttafeln 2005 G für die betriebliche Altersversorgung, welche von *Heubeck-Richttafeln-GmbH (2005)* herausgegeben wurden. In den Tafeln sind darüber hinaus auch mittlere Alter der 2. VP zum Todeszeitpunkt der 1. VP tabelliert, was eine Alternative zur Verwendung der zuvor erwähnten, pauschalen Altersdifferenz darstellt.

Der Leistungsbarwert der Anwartschaft auf Witwenrente (ohne Rentengarantiezeit der Altersrente) lässt sich schrittweise aufbauen. Mit $z = x + j$ wird das Alter der ersten VP zum Zeitpunkt ihres Todes (j Jahre nach Versicherungsbeginn) notiert, und y ist das (pauschal ermittelte) Alter der mitversicherten Person bei Versicherungsbeginn.

- Der Leistungsbarwert der lebenslang zahlbaren Witwenrente nach Eintritt des Todes der ersten VP entspricht

$$\ddot{a}_z^w = h_z \cdot \frac{1}{2} p_{y+(z-x)+\frac{1}{2}} \cdot \ddot{a}_{y+(z-x)+1}^{(k)}$$

bzw. wegen $z = x + j$

$$\ddot{a}_{x+j}^w = h_{x+j} \cdot \frac{1}{2} p_{y+j+\frac{1}{2}} \cdot \ddot{a}_{y+j+1}^{(k)} \cdot$$

Dabei ist h_z die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste VP zum Todeszeitpunkt verheiratet ist und folglich eine anspruchsberechtigte Witwe hinterlässt. Die Witwenrente wird jedoch erst mit Beginn der nächsten Versicherungsperiode gezahlt (daher die Addition von 1 bei der Altersangabe des Barwertes $\ddot{a}_{y+(z-x)+1}^{(k)}$). Unter der Annahme, dass der Tod der 1. VP zur Jahresmitte eintritt, muss die Witwe bis zum Erhalt der ersten Rentenzahlung folglich noch ein halbes Jahr überleben, was durch den Term $\frac{1}{2}p_{y+(z-x)+\frac{1}{2}}$ ausgedrückt wird. Wie sich letzterer näherungsweise berechnet, hängt von der verwendeten Annahme unterjähriger Sterblichkeiten ab (UDD, CFM oder Balducci, vgl. Abschn. 5.2.2).

- Die Witwenrente für (y) am Ende des Jahres $j + 1$ wird ausgelöst, falls (x) im Laufe (bzw. zur Mitte) des $(j + 1)$ -ten Jahres stirbt. Der Gesamt-Leistungsbarwert für die n -jährige Anwartschaft auf Witwenrente ergibt sich folglich als Summe der einjährigen Anwartschaften, so dass

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:n}^{aw} &= \sum_{j=0}^{\omega-n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \cdot \ddot{a}_{x+j}^w \\ &= \sum_{j=0}^{\omega-n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \cdot h_{x+j} \cdot \frac{1}{2}p_{y+j+\frac{1}{2}} \cdot \ddot{a}_{y+j+1}.\end{aligned}$$

Ist $h_{x+j} \equiv 1$ und verstirbt (x) zum Ende des $(j + 1)$ -ten Jahres, so ergibt sich die in Übungsaufgabe 62 hergeleitete Darstellung (begrenzt auf n Jahre).

12.4.4 Waisenrente

Hinterbliebenenrenten zugunsten eines Kindes der VP werden Waisenrenten genannt. Analog zu Witwenrenten erfolgt der Einschluss dieser zusätzlichen Absicherung meist auf Basis einer kollektiven Kalkulation, indem für das Vorhandensein von Kindern Wahrscheinlichkeiten unterstellt werden.

Eine Waisenrente wird fast ausschließlich als temporäre Leibrente gezahlt, so dass die Zahlung bei Tod des mitversicherten Kindes endet, spätestens jedoch mit Erreichen eines festgelegten Endalters (bspw. 25 oder 27 Jahre). Verstirbt die VP während einer vereinbarten Rentengarantiezeit, so setzt die Waisenrente wiederum erst nach Ablauf dieser Mindestlaufzeit der Altersrente ein.

Die Höhe der versicherten Waisenrente ist i.d.R. deutlich niedriger als die Altersrente. Üblich sind Prozentsätze in der Größenordnung von 20% der versicherten Altersrente. Da die Sterblichkeit von Kindern und Jugendlichen (mit Ausnahme der ersten Lebensjahre) eher gering ist, wird die temporäre Leibrente für die Waise vereinfachend häufig als Zeitrente abgebildet.

12.5 Tabellarische Übersicht

Deckung	Symbol
reine Erlebensfallversicherung (auf das Überleben beider Personen)	$nE_{x,y}$
lebenslange Risikolebensversicherung auf den ersten Tod	$A_{x,y}$
temporäre Risikolebensversicherung auf den ersten Tod	$nA_{x,y}$, $A_{x,y:\overline{n}}$
gemischte Kapitallebensversicherung auf den ersten Tod	$A_{x,y:\overline{n}}$
reine Erlebensfallversicherung (auf das Überleben mindestens einer Person)	$nE_{\overline{x},\overline{y}}$
lebenslange Risikolebensversicherung auf den zweiten Tod	$A_{\overline{x},\overline{y}}$
temporäre Risikolebensversicherung auf den zweiten Tod	$nA_{\overline{x},\overline{y}}$, $A_{\overline{x},\overline{y}:\overline{n}}$
lebenslange, vorschüssig zahlbare Verbindungsrente	$\ddot{a}_{x,y}$
temporäre, vorschüssig zahlbare Verbindungsrente	$\ddot{a}_{x,y:\overline{n}}$
lebenslange, vorschüssig zahlbare Verbindungsrente mit zweiseitigem Übergang	$\ddot{a}_{\overline{x},\overline{y}}$
einseitige, vorschüssig zahlbare Überlebensrente (Anwartschaft auf individuelle Witwenrente)	$\ddot{a}_{x y}$
zweiseitige, vorschüssig zahlbare Überlebensrente	$\ddot{a}_{\overline{x},\overline{y}}^{[1]}$
n -jährige Anwartschaft auf kollektive, vorschüssig zahlbare Witwenrente	$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aw}$

12.6 Übungen

12.6.1 Aufgaben

Übung 58. Zeigen Sie, dass bei Versicherungen auf den Tod der ersten Person gilt:

$$l_{x+1,y+1} = l_{x,y} \cdot (1 - q_{x,y})$$

Übung 59. Zeigen Sie, dass bei Versicherungen auf den Tod der ersten Person gilt:

$$C_{x,y} = v \cdot D_{x,y} - D_{x+1,y+1} .$$

Übung 60. Betrachten Sie den Fall dreier verbundener Leben (x) , (y) und (z) . Drücken Sie die Wahrscheinlichkeiten

$${}_t p_{x,y,z} \text{ und } {}_t q_{x,y,z}$$

sowie

$${}_t p_{\overline{x},\overline{y},\overline{z}} \text{ und } {}_t q_{\overline{x},\overline{y},\overline{z}}$$

jeweils über die Wahrscheinlichkeiten ${}_t p_x$, ${}_t p_y$, ${}_t p_z$ bzw. ${}_t q_x$, ${}_t q_y$, ${}_t q_z$ aus.

Übung 61. Beweisen Sie die Identitäten

$$A_{x,y} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x,y}$$

und

$$A_{x,y:\overline{n}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x,y:\overline{n}} .$$

Übung 62. Zeigen Sie, dass für den Leistungsbarwert einer Anwartschaft auf einseitige, lebenslang jährlich vorschüssig zahlbare Überlebensrente der Jahreshöhe 1 die folgende Darstellung gilt:

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y} .$$

Übung 63. Betrachten Sie eine Risikolebensversicherung auf zwei verbundene Leben, deren Versicherungssumme i.H.v. 1 bei Tod der letzten VP fällig wird. Die Prämienzahlungsdauer t stimme mit der Versicherungsdauer n überein.

1. Geben Sie die Nettoeinmalprämie sowie die laufende Nettoprämie an.
2. Geben Sie das Nettodeckungskapital für alle möglichen Konstellationen an.

Übung 64. Betrachten Sie eine um n Jahre aufgeschobene lebenslange Leibrentenversicherung mit vereinbarter Rentengarantiezeit von g Jahren für die Person (x) . Für die Prämienzahlungsdauer gelte $t < n$. Die versicherte

Jahresrente habe die Höhe 1. Zu dieser Rentenversicherung sei eine Hinterbliebenenrente für die Person (y) abgeschlossen, die im Falle des Todes von (x) eine Jahresrente i.H.v. 60% der versicherten Altersrente gewährt, solange (y) lebt. Sofern die erste VP während der Rentengarantiezeit verstirbt, beginnt die Zahlung der Hinterbliebenenrente erst nach Ablauf der Mindestlaufzeit der Altersrente. Stirbt die mitversicherte Person (y), so erlischt die (Anwartschaft auf) Hinterbliebenenrente. Die Hinterbliebenenrente selbst hat keine Rentengarantiezeit. Es werden keine Kosten berücksichtigt.

1. Geben Sie die Nettojahresprämie für die gesamte Deckung an.
2. Geben Sie das Nettodeckungskapital für alle möglichen Konstellationen dieser Versicherungen an.

12.6.2 Lösungen

Lösung 58. Es ist

$$\begin{aligned} l_{x+1,y+1} &= l_{x+1} \cdot l_{y+1} \\ &= l_x \cdot (1 - q_x) \cdot l_y \cdot (1 - q_y) \\ &= \underbrace{l_x \cdot l_y}_{=l_{x,y}} \cdot \underbrace{(1 - (q_x + q_y - q_x \cdot q_y))}_{=q_{x,y}} \\ &= l_{x,y} \cdot (1 - q_{x,y}) . \end{aligned}$$

Daraus folgt die erwartete Beziehung

$$\begin{aligned} d_{x,y} &= l_{x,y} - l_{x+1,y+1} \\ &= l_{x,y} - l_{x,y} \cdot (1 - q_{x,y}) \\ &= l_{x,y} \cdot q_{x,y} . \end{aligned}$$

Allerdings ist $d_{x,y} \neq d_x \cdot d_y$.

Lösung 59. Es ist

$$\begin{aligned} v \cdot D_{x,y} - D_{x+1,y+1} &= v \cdot l_{x,y} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)} - l_{x+1,y+1} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+1+y+1)} \\ &= l_{x,y} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)+1} - l_{x+1,y+1} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)+1} \\ &= (l_{x,y} - l_{x+1,y+1}) \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)+1} \\ &= d_{x,y} \cdot v^{\frac{1}{2}(x+y)+1} \\ &= C_{x,y} . \end{aligned}$$

Verwendet man z.B. die unsymmetrischen Definitionen

$$D_{x,y} = D_x \cdot l_y = l_{x,y} \cdot v^x \quad \text{und} \quad C_{x,y} = d_{x,y} \cdot v^{x+1} ,$$

so gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} v \cdot D_{x,y} - D_{x+1,y+1} &= v \cdot l_{x,y} \cdot v^x - l_{x+1,y+1} \cdot v^{x+1} \\ &= l_{x,y} \cdot v^{x+1} - l_{x+1,y+1} \cdot v^{x+1} \\ &= (l_{x,y} - l_{x+1,y+1}) \cdot v^{x+1} \\ &= d_{x,y} \cdot v^{x+1} \\ &= C_{x,y} . \end{aligned}$$

Lösung 60. Sofern die Leistung bei Tod der ersten VP ausgelöst wird, ist

$$tp_{x,y,z} = tp_x \cdot tp_y \cdot tp_z$$

und

$$\begin{aligned} tq_{x,y,z} &= 1 - tp_{x,y,z} \\ &= 1 - (1 - tq_x) \cdot (1 - tq_y) \cdot (1 - tq_z) \\ &= tq_x + tq_y + tq_z \\ &\quad - tq_x \cdot tq_y - tq_x \cdot tq_z - tq_y \cdot tq_z \\ &\quad + tq_x \cdot tq_y \cdot tq_z . \end{aligned}$$

Bei Versicherungen auf den Tod der letzten VP ist hingegen

$$tq_{\overline{x,y,z}} = tq_x \cdot tq_y \cdot tq_z$$

sowie

$$tp_{\overline{x,y,z}} = 1 - tq_{\overline{x,y,z}} = 1 - (1 - tp_x) \cdot (1 - tp_y) \cdot (1 - tp_z) .$$

Lösung 61. Es gilt

$$\begin{aligned} A_{x,y} + d \cdot \ddot{a}_{x,y} &= \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j|q_{x,y} + (1-v) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x,y} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j p_{x,y} \cdot q_{x+j,y+j} + \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x,y} - \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j p_{x,y} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x,y} - \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_j p_{x,y} \cdot (1 - q_{x+j,y+j}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x,y} - \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot {}_{j+1} p_{x,y} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x,y} - \sum_{j=1}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{x,y} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung lässt sich analog beweisen:

$$\begin{aligned}
 A_{x,y:\overline{n}} + d \cdot \ddot{a}_{x,y:\overline{n}} &= \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_{x,y} + v^n \cdot {}_n p_{x,y} + (1-v) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v^j \cdot {}_j p_{x,y} \\
 &= \sum_{j=0}^n v^j \cdot {}_j p_{x,y} - \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j+1} p_{x,y} \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^n v^j \cdot {}_j p_{x,y} - \sum_{j=1}^n v^j \cdot {}_j p_{x,y} \\
 &= 1 .
 \end{aligned}$$

Lösung 62. Es ist

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{x|y} &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j q_{x|y} \cdot {}_j p_y = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot (1 - {}_j p_x) \cdot {}_j p_y \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_y - \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot \underbrace{{}_j p_x \cdot {}_j p_y}_{={}_j p_{x,y}} \\
 &= \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y} .
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Gleichheit ${}_j q_x = \sum_{s=0}^{j-1} {}_{s|}q_x$ erhält man für $\ddot{a}_{x|y}$ auch die folgende Darstellung (vgl. Abschn. 12.4.3):

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{x|y} &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j q_{x|y} \cdot {}_j p_y \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot \left(\sum_{s=0}^{j-1} {}_{s|}q_x \right) \cdot {}_j p_y \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} {}_{s|}q_x \cdot \left(\sum_{j=s+1}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_y \right) \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} {}_{s|}q_x \cdot v^{s+1} \cdot {}_{s+1} p_y \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} v^j \cdot {}_j p_{y+s+1} \right) \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} v^{s+1} \cdot {}_{s|}q_x \cdot {}_{s+1} p_y \cdot \ddot{a}_{y+s+1} .
 \end{aligned}$$

Lösung 63. Risikolebensversicherung auf den letzten Tod

1. Die Nettoeinmalprämie der beschriebenen Risikolebensversicherung ist

$$\begin{aligned} NEP_{\frac{1}{x,y:\bar{n}}} &= A_{\frac{1}{x,y:\bar{n}}} \\ &= A_{\frac{1}{x:\bar{n}}} + A_{\frac{1}{y:\bar{n}}} - A_{\frac{1}{x,y:\bar{n}}} \end{aligned}$$

und die Nettojahresprämie

$$NP_{\frac{1}{x,y:\bar{t}}} = \frac{A_{\frac{1}{x,y:\bar{n}}}}{\ddot{a}_{\overline{x,y:\bar{t}}}} .$$

2. Das Nettodeckungskapital nach m Jahren ($0 \leq m \leq n$) beträgt

$${}_m V_{\frac{1}{x,y:\bar{n}}} = \begin{cases} A_{\frac{1}{x+m,y+m:\bar{n}-m}} - NP_{\frac{1}{x,y:\bar{t}}} \cdot \ddot{a}_{\overline{x+m,y+m:\bar{t}-m}} & \text{falls } x \text{ und-oder } y \text{ noch leben ,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ und } y \text{ beide tot sind .} \end{cases}$$

Lösung 64. Aufgeschobene Rentenversicherung mit Rentengarantiezeit und eingeschlossener Hinterbliebenenrente

1. Die Nettoeinmalprämie für die Altersrente von (x) beträgt

$$NEP_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} = {}_n E_x \cdot \ddot{a}_{\bar{g}} + {}_{n+g} E_x \cdot \ddot{a}_{x+n+g} .$$

Für die Hinterbliebenenrente von (y) nach dem Tod von (x) würde man auf den ersten Blick vielleicht die Nettoeinmalprämie

$$0,6 \cdot \ddot{a}_{x|y} = 0,6 \cdot (\ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y})$$

erwarten. Dieser Leistungsbarwert muss jedoch angepasst werden, denn er ist zu groß. Stirbt (x) während der Aufschubdauer der Altersrente oder nach Ablauf der Rentengarantiezeit, wird die Hinterbliebenenrente ausgelöst (sofern (y) noch lebt). Stirbt (x) während der Rentengarantiezeit der Altersrente, so wird während dieser Zeit keine Hinterbliebenenrente gezahlt, sondern die Altersrente. Folglich ist dieser Teil aus dem Leistungsbarwert wieder herauszurechnen:

$$\begin{aligned}
NEP_{x,y}^{\text{HR}} &= 0,6 \cdot (\ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}) \\
&\quad - 0,6 \cdot \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{x,y}} \cdot \\
&\quad \left[\ddot{a}_{y+n} - \ddot{a}_{x+n,y+n} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{D_{y+n+g}}{D_{y+n}} \cdot \ddot{a}_{y+n+g} - \frac{D_{x+n+g,y+n+g}}{D_{x+n,y+n}} \cdot \ddot{a}_{x+n+g,y+n+g} \right) \right] \\
&= 0,6 \cdot [(\ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}) - {}_nE_{x,y} \cdot (\ddot{a}_{y+n:\bar{g}} - \ddot{a}_{x+n,y+n:\bar{g}})] .
\end{aligned}$$

In Summe ergibt sich eine Nettoeinmalprämie von

$$NEP_{x:\bar{n}} = NEP_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} + NEP_{x,y}^{\text{HR}} .$$

Aufgrund der Komplexität empfiehlt es sich jedoch, die beiden Vertragsbestandteile weiterhin getrennt zu betrachten. Die Prämienzahlung endet, falls (x) stirbt, so dass als Prämienbarwert $\ddot{a}_{x:\bar{t}}$ verwendet wird. Daraus folgen die laufenden Nettoprämien

$$NP_{x:\bar{t}}^{\text{AR}} = \frac{NEP_{x:\bar{n}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} .$$

sowie

$$NP_{x,y:\bar{t}}^{\text{HR}} = \frac{NEP_{x,y}^{\text{HR}}}{\ddot{a}_{x:\bar{t}}} .$$

2. Auch die Nettodeckungskapitalia nach m Jahren ($m \geq 0$) betrachten wir getrennt voneinander.

Unabhängig davon, ob (y) noch lebt oder nicht, ist für die Altersrente:

- Falls (x) lebt:

$${}_mV_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} = \begin{cases} NEP_{x+m:\bar{n}-m}^{\text{AR}} - NP_{x:\bar{t}}^{\text{AR}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\bar{t}-m} & \text{falls } 0 \leq m < t , \\ NEP_{x+m:\bar{n}-m}^{\text{AR}} & \text{falls } t \leq m < n , \\ \ddot{a}_{\bar{n}+g-m} + {}_{n+g-m}E_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+n+g} & \text{falls } n \leq m < n+g , \\ \ddot{a}_{x+m} & \text{falls } m \geq n+g . \end{cases}$$

- Falls (x) tot ist:

$${}_mV_{x:\bar{n}}^{\text{AR}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq m < n \text{ oder } m \geq n+g , \\ \ddot{a}_{\bar{n}+g-m} & \text{falls } n \leq m < n+g . \end{cases}$$

Für die Hinterbliebenenrente ist:

- Falls (y) tot ist:

$${}_m V_{\overline{x},y}^{\text{HR}} = 0 \text{ falls } m \geq 0 .$$

- Falls (y) lebt:

- Falls (x) lebt (Anwartschaft):

$${}_m V_{\overline{x},y}^{\text{HR}} = \begin{cases} NEP_{\overline{x+m,y+m}}^{\text{HR}} - NP_{\overline{\overline{x},y,\overline{t}}}^{\text{HR}} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}} & \text{falls } 0 \leq m < t , \\ NEP_{\overline{x+m,y+m}}^{\text{HR}} & \text{falls } t \leq m < n , \\ 0,6 \cdot \left(\frac{n+g-m E_{y+m} \cdot \ddot{a}_{y+n+g}}{n+g-m E_{x+m,y+m} \cdot \ddot{a}_{x+n+g,y+n+g}} \right) & \text{falls } n \leq m < n+g , \\ 0,6 \cdot (\ddot{a}_{y+m} - \ddot{a}_{x+m,y+m}) & \text{falls } m \geq n+g . \end{cases}$$

- Falls (x) tot ist (Leistungsbezug):

$${}_m V_{\overline{x},y}^{\text{HR}} = \begin{cases} 0,6 \cdot \ddot{a}_{y+m} & \text{falls } 0 \leq m < n \text{ oder } m \geq n+g , \\ 0,6 \cdot {}_{n+g-m} E_{y+m} \cdot \ddot{a}_{y+n+g} & \text{falls } n \leq m < n+g . \end{cases}$$

Kapitel 13

Fondsgebundene Versicherungen

Bekannte Versicherungen wie die Kapitallebensversicherung oder die (aufgeschobene) Rentenversicherung werden als klassische oder konventionelle Versicherungen bezeichnet, da ihre Deckungsrückstellung nach dem klassischen bzw. konventionellen Ansatz berechnet und geführt wird. In diesem Kapitel wollen wir eine Produktart betrachten, welche maßgeblich seit der Deregulierung im Jahr 1994 Einzug in die Produktlandschaft der deutschen Lebensversicherung gehalten hat, nämlich fondsgebundene Versicherungen. Aus dem Produktpotential der VU sind sie inzwischen nicht mehr wegzudenken und haben zum Teil ein beachtliches Bestandsvolumen erreicht. Als Hauptvertreter seien die **Fondsgebundene Lebensversicherung** (kurz: **FLV**) sowie die **Fondsgebundene Rentenversicherung** (kurz: **FRV**) genannt. Die Tatsache, dass fondsgebundene Versicherungen unter den Neugeschäftsprodukten inzwischen die Mehrheit bilden, hat dazu geführt, dass sie bereits als „Neue Klassik“ bezeichnet werden.

Fondsgebundene Versicherungen zeichnen sich dadurch aus, dass ein Teil der gezahlten Prämien in Fonds investiert wird. Das hat jedoch zur Folge, dass die Höhe der Leistung, die bei Rückkauf, Ablauf oder Rententübergang fällig wird, aufgrund der nicht vorhersehbaren Fondsentwicklung ungewiss ist. Entwickeln sich die gewählten Fonds positiv, hat der VN die Chance auf eine höhere Leistung als bei Abschluss einer konventionellen Police. Ist die Fondspartition jedoch negativ, so ist die sich ergebende Leistung zuweilen deutlich niedriger als die gezahlten Prämien, oder im schlimmsten Fall sind die Kundenbeiträge vollständig verloren. Das Risiko der Kapitalanlage liegt also beim VN und nicht beim VU.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es auch Indexgebundene Versicherungen gibt. In diesem Fall bemisst sich die Höhe der Versicherungsleistungen nicht in Anteilen eines oder mehrerer Investmentfonds, sondern sie ist an einen Aktienindex, eine andere indizierte Größe oder daraus abgeleitete Werte geknüpft. In den nachfolgenden Ausführungen werden wir diese jedoch nicht mehr betrachten.

13.1 Gesetzliche Bestimmungen

Wie eingangs beschrieben, wird bei fondsgebundenen Versicherungen das **Anlagerisiko** (teilweise) vom VN getragen. Gemäß § 341d HGB, welcher den Anlagestock fondsgebundener Versicherungen behandelt, sind die zugehörigen „Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko von Inhabern von Lebensversicherungsverträgen [...] mit dem Zeitwert unter Berücksichtigung des Grundsatzes der Vorsicht zu bewerten“.

Da die zukünftigen Leistungen des VU aufgrund der volatilen Fondsentwicklung ihrer Höhe nach unbekannt sind, kann eine Bewertung der künftigen Verpflichtungen aus Fondsanlagen ausschließlich durch eine retrospektive Methode vorgenommen werden.

Hinsichtlich der gesetzlichen Anlagegrundsätze gemäß § 124 VAG unterscheiden sich fonds- und indexgebundene Versicherungen von denen für konventionelle Produkte.

Allgemein sind für sämtliche Produktarten diejenigen Vermögenswerte, die zur Bedeckung der versicherungstechnischen Rückstellungen gehalten werden, in einer der Art und Laufzeit der Verbindlichkeiten des VU angemessenen Weise anzulegen.

Darüber hinaus gilt jedoch für Verträge, bei denen das Anlagerisiko vom VN getragen wird und die Leistungen aus dem Vertrag direkt an den Wert von Anteilen eines (oder mehrerer) Investmentfonds gebunden sind, dass die versicherungstechnischen Rückstellungen für diese Leistungen so genau wie möglich durch die betreffenden Anteile abzubilden sind. Gleches gilt für indexgebunde Policen, bei denen die Leistungen direkt an einen Aktienindex gebunden sind; dort sind die Rückstellungen durch die Anteile, die den Referenzwert darstellen, abzubilden. Sofern keine Anteile gebildet werden, müssen die Rückstellungen in beiden Fällen durch die betreffenden Vermögenswerte abgebildet werden.

Sofern fonds- oder indexgebundene Verträge eine Garantie beinhalten (siehe Abschn. 13.2), gelten für diese zusätzlichen versicherungstechnischen Rückstellungen dieselben Anlagegrundsätze wie für rein konventionelle Verträge. Für fonds- und indexgebundene Versicherungen ist nach § 125 VAG außerdem für jede Anlageart eine separate Abteilung des Sicherungsvermögens (Anlagestock) zu bilden.

Aus den vorgenannten Bestimmungen folgt, dass die versicherungstechnischen Rückstellungen auf der Passivseite der Bilanz durch entsprechende Vermögenswerte auf der Aktivseite kongruent zu bedecken sind. Bei konventionellen Versicherungen wird die Deckungsrückstellung (Passivseite) durch ein Portfolio verschiedener Wertpapiere bzw. Anlageformen (Aktivseite) hinterlegt, welches (zumindest grob) dieselben Zahlungsströme generiert wie die vertraglich vorgesehenen. Bei fonds- und indexgebundenen Versicherungen entspricht die Deckungsrückstellung dem Wert des Fondsanteilguthabens,

und die Bedeckung erfolgt eins zu eins durch die zugehörigen Anteile. Das VU verwaltet und bilanziert also die Kapitalanlagen auf Rechnung und Risiko des Kunden, und der Zahlungsstrom wird durch den Kauf und Verkauf von Fondsanteilen reproduziert.

Fondsgebundene Versicherungen oder allgemeiner „Lebensversicherungsprodukte mit Anlagecharakter“ unterliegen einer vom Europäischen Parlament im Jahr 2014 erlassenen „Verordnung über Basisinformationsblätter für verpackte Anlageprodukte für Kleinanleger und Versicherungsanlageprodukte“ (kurz: **PRIIP-Verordnung**). Die Regelungen dieser Verordnung, welche der Verbesserung des Verbraucher- bzw. Anlegerschutzes dient, sind spätestens seit dem 1. Januar 2017 in allen EU-Mitgliedsstaaten anzuwenden.

Die Abkürzung PRIIP steht für die englischsprachige Bezeichnung „Packaged Retail and Insurance-based Investment Products“ und bezeichnet eben diese verpackten Anlageprodukte. Wie es die *BaFin (2015)* formuliert, gelten alle diejenigen Anlageprodukte als verpackt, „bei denen das Geld der Kunden anstatt direkt nur indirekt am Kapitalmarkt angelegt wird oder deren Rückzahlungsanspruch auf andere Weise an die Wertentwicklung bestimmter Papiere oder Referenzwerte gekoppelt ist“. Bspw. werden unter dem Mantel einer Rentenversicherung die vom VN gezahlten Prämien (teilweise) in Fonds investiert.

Die Kunden, die ein derartiges Produkt kaufen wollen, müssen vorab über die damit verbundenen Anlagerisiken und Kosten sowie die Merkmale des Produkts aufgeklärt werden. Zu diesem Zweck wird dem potenziellen Kunden ein Basisinformationsblatt, auf Englisch „Key Information Document“ (kurz: KID) zur Verfügung gestellt. Da die PRIIP-Verordnung Vorgaben zu Art und Inhalt des KID macht, soll auch die Vergleichbarkeit verschiedener Anlageprodukte erhöht werden, so dass z.B. eine FLV mit einer Direktanlage in einen Investmentfonds verglichen werden kann.

13.2 Überblick

Die am Markt angebotenen Fondsprodukte unterscheiden sich insbesondere darin, welche Garantien die Produkte beinhalten und wie diese abgebildet bzw. abgesichert werden.

Dies hat im Laufe der Zeit ein weites Spektrum an fondsgebundenen Tarifen hervorgebracht. Die häufig anzutreffende Aufteilung in Fondsprodukte mit und ohne Garantie bezieht sich allerdings nur auf den Aspekt, ob zusätzlich zum fondsgebundenen Guthaben bzw. **Fondskonto** ein konventionelles Guthaben bzw. **Garantiekonto** geführt wird. Fondsgebundene Versicherungen, bei denen parallel eine konventionelle Reserve gebildet wird, heißen **Hybrid-Produkte** oder kurz **Hybrid**.

Auch wenn die Abkürzungen GMxB auf den Kontext spezieller, sog. Variable-Annuity-Produkte beschränkt sind, können die verschiedenen Arten eingeschlossener Garantien durchaus auf alle Fondsprodukte verallgemeinert werden. Die englischsprachige Abkürzung steht für „Guaranteed Minimum x Benefit“, und „x“ gibt die Art der garantierten Mindestleistung an:

x =	steht für	Garantierte Mindestleistung ...
D	Death	im Todesfall
W	Withdrawal	bei Entnahme bzw. Teilauszahlung
A	Accumulation	bei Ablauf oder Rentenübergang
I	Income	im Rentenbezug

Dabei können auch mehrere dieser Garantien gleichzeitig eingeschlossen sein. Aufgrund der Komplexität sind die wenigsten fondsgebundenen Produkte dazu in der Lage, sämtliche dieser Garantien auch abzubilden bzw. umzusetzen. Das ist aber auch gar nicht notwendig. Im Wesentlichen sehen fondsgebundene Versicherungen eine Mindesttodesfallleistung und/oder eine Mindestablaufleistung vor.

Der Einschluss einer **Mindesttodesfallleistung** bedeutet, dass bei Tod der VP mindestens die festgelegte Summe ausgezahlt wird. Die Umsetzung dieses Features ist i.d.R. unkritisch, da diese Mindestleistung durch Erhebung entsprechender Risikoprämien finanziert wird. Es bedarf keiner zusätzlichen konventionellen Reserve.

Zwecks Vermeidung eines potenziellen Totalverlusts der eingezahlten Prämien bevorzugen Kunden Versicherungen mit einer **Beitragserhaltungsgarantie** oder auch **Bruttobeitragsgarantie**. Diese zielt auf den Erlebensfall ab und sichert zu, dass bei Vertragsablauf oder bei Rentenübergang mindestens die Summe der eingezahlten (Brutto-)Prämien zur Verfügung steht. Die Umsetzung dieser Garantie ist hingegen deutlich schwieriger und erfolgt meistens im Rahmen eines Hybrid-Produkts.

13.2.1 *Statische Hybride*

Bei einem **Zwei-Topf-Hybrid** wird ein Teil der Prämien konventionell angelegt, um die garantierte Leistung abzusichern, und der verbleibende Teil der Prämie wird – nach Abzug von Kosten – zum Kauf von Fondsanteilen verwendet. Da die Aufteilung auf die beiden Töpfe fix ist, sie sich getrennt voneinander entwickeln und kein Austausch zwischen ihnen stattfindet, heißt diese Form auch **statisches Hybrid**.

Im einfachsten Fall finanziert jede Prämie ihre eigene Garantie, indem der Barwert des Prämienbetrags zum Zeitpunkt seiner Zahlung beiseite gelegt wird, so dass sich durch reine Verzinsung mit dem Rechnungszins zum Ablauftermin der gezahlte Prämienbetrag ergibt. Dem einfachen Mechanismus dieses Verfahrens steht der Nachteil entgegen, dass bei niedrigem Rechnungszins die zur Absicherung der Garantie benötigten Prämienteile vergleichsweise hoch sind, die konventionelle Anlage also dominiert. Dadurch, dass nur ein relativ geringer Anteil der Prämie in die Fondsanlage fließt, ist die Partizipation an der Fondsperformance niedrig, und folglich auch die Rendite der Versicherung. Kurze Laufzeiten können das Problem noch verschärfen, indem durch die Belastung mit Kosten u.U. weniger für die konventionelle Anlage übrig bleibt als benötigt wird. Sofern der fehlende Betrag nicht aus dem Fondsguthaben entnommen werden kann, bedeutet dies aus Sicht des VU eine erhöhte Zinsgarantie gegenüber dem VN.

Alternativ wird ein fixer Prozentsatz jeder gezahlten Prämie in eine klassische Versicherung anlegt. Dieser Prozentsatz ist so austariert, dass sich zum Ablauftermin exakt die garantierte Leistung ergibt. Dadurch wird zunächst mehr als nötig in die konventionelle Anlage geschoben; im Laufe der Vertragsdauer dreht sich das Verhältnis jedoch um, und es wird weniger als notwendig konventionell angelegt. Denkbar ist auch, dass mit zwei verschiedenen Prozentsätzen gearbeitet wird, so dass eine Zeit lang $a_1\%$ einer jeden Prämie konventionell angelegt wird und ab einem bestimmten Zeitpunkt dann $a_2\%$ jeder Prämie. Ziel ist in beiden Fällen, dass die Fondsquote gerade zu Beginn erhöht wird, um an möglichen Wertsteigerungen stärker partizipieren zu können.

13.2.2 Garantiefonds

Eine Weiterentwicklung wurde durch die Einführung von **Garantiefonds** ermöglicht. Derartige Fonds geben die Garantie, dass die vom Anleger erworbenen Fondsanteile zu einem definierten Zeitpunkt zu dem dann aktuellen Kurs, mindestens jedoch zu einer definierten Kursuntergrenze, wieder zurückgenommen werden. Demnach unterscheiden sich Garantiefonds darin, zu welchem Zeitpunkt und in welcher Höhe die ausgesprochene Garantie gilt.

Garantiefonds sind üblicherweise Mischfonds, die sowohl in spekulative (risikobehaftete) Kapitalanlagen, z.B. Aktien oder Optionen, als auch in sicherheitsorientierte (risikoneutrale) Kapitalanlagen, z.B. festverzinsliche Wertpapiere, investieren. Um die Garantie im Fonds selbst abzusichern bzw. zu erzeugen, variiert die Aufteilung auf diese beiden Anlageformen im Zeitallauf, indem je nach Kapitalmarktsituation Umschichtungen zwischen ihnen vorgenommen werden.

Ein wesentlicher Kritikpunkt an Garantiefonds ist, dass ihre Rendite deutlich geringer ist als eine vergleichbare Anlage in freie Fonds. Der Grund dafür sind hohe Kosten, die durch die Absicherung der Garantie entstehen. Außerdem bezieht sich die gegebene Garantie nicht auf den Erhalt der Zahlprämien, sondern nur auf die Anlageprämien (die tatsächlich in den Garantiefonds investiert wurden).

Die ersten Fonds dieser Art hatten eine feste Laufzeit und garantierten, dass zum Laufzeitende mindestens der anfängliche Kurs des Fonds wieder erreicht wurde. Bezogen auf den Anlagebetrag bedeutet dies, dass mindestens der anfänglich investierte Betrag am Vertragsende zurückgezahlt wird. Aufgrund ihrer starren Laufzeit waren diese Garantiefonds vornehmlich zur Absicherung von Einmalprämien geeignet; laufende Prämien wurden über eine Serie derartiger Garantiefonds mit unterschiedlichen Laufzeiten abgesichert. Im Zusammenhang mit der Garantiefonds-internen Umschichtung ist auch auf einen Effekt hinzuweisen, der als **Cash-Lock** oder **Monetarisierung** bezeichnet wird. Bei ungünstiger Entwicklung des Kapitalmarktes kann ein Zeitpunkt eintreten, zu dem der Garantiefonds zu 100% in sichere Anlagen investiert ist. Auch wenn sich die Lage am Kapitalmarkt danach wieder erholt, bleibt der Garantiefonds je nach verwendetem Umschichtungs- bzw. Absicherungsmechanismus weiterhin vollständig in der sicheren Anlage und kann folglich nicht mehr an zukünftigen Wertsteigerungen der risikoreichen Anlageform partizipieren. In diesem Fall wird als Ablaufleistung nur der garantierte Betrag erreicht, die Chance auf eine höhere Ablaufleistung besteht nach Eintreten des Cash-Lock nicht mehr.

Neuere Generationen von Garantiefonds kommen den Bedürfnissen einer laufenden Prämienzahlung entgegen. Als Standard gelten inzwischen Garantiefonds, die mit einer sog. Höchststandsgarantie ausgestattet sind. Die **Höchststandsgarantie** enthält zunächst die bekannte Garantie, dass der Kurs bei Fälligkeit mindestens so hoch ist wie der Kurs bei Auflage des Garantiefonds. Zusätzlich gibt es während der Laufzeit regelmäßig (z.B. einmal pro Monat) Stichtage, zu denen die Garantie „überprüft“ wird. Ist der Kurs des Garantiefonds zu diesem Höchststands-Stichtag höher als an allen bisherigen Stichtagen, so wird die Garantie auf das aktuelle Kursniveau angehoben. Zwischen den Stichtagen kann der Kurs des Garantiefonds natürlich schwanken, so dass für Anlageprämien, die zu einem höheren Kurs investiert wurden, ein Verlustrisiko besteht. Anlageprämien, die an einem der Höchststands-Stichtage investiert werden, sind hingegen bei Fälligkeit garantiert.

Wie bereits erwähnt, können sich die von Garantiefonds gewährten Garantien unterscheiden. Davon ausgehend, dass der Kurs des Garantiefonds zwischen zwei Stichtagen sinkt, kann auch eine Garantie derart ausgesprochen werden, dass zum nächsten Stichtag mindestens 80% des Wertes vom vorangegan-

genen Stichtag garantiert sind, so dass dadurch das Verlustrisiko zwischen aufeinanderfolgenden Stichtagen reduziert wird.

13.2.3 Dynamische Hybride

Nach heutigem Stand werden fondsgebundene Versicherungen mit Garantie vorzugsweise als **Drei-Topf-Hybrid** angeboten. Dabei wird die Beitragserhaltungsgarantie über eine Kombination aus konventioneller Anlage und einer Anlage in Garantiefonds mit Höchststandsgarantie (meist in Gestalt der 80%-Vormonatsgarantie) erreicht. Bei günstiger Entwicklung des Garantiefonds kann das konventionell vorgehaltene Garantieguthaben reduziert werden. Die frei werdenden Teile des konventionellen Guthabens können dann in einen dritten Topf mit zusätzlichen, beliebigen Fonds investiert werden. Indem die konventionelle Anlage durch Garantiefonds ersetzt wird und der abgelöste Betrag gleichzeitig in weitere Fonds angelegt wird, ergibt sich insgesamt eine höhere Fondsquote und damit auch die Chance auf eine höhere Rendite. Zur Sicherstellung der Garantie findet zwischen den Töpfen regelmäßig eine Umschichtung statt, so dass dieser Mechanismus **dynamisches Hybrid** genannt wird. Für die Umschichtung existieren verschiedene Algorithmen, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Allen ist gemein, dass das Vermögen so zwischen der konventionellen Anlage und dem Garantiefonds aufgeteilt wird, dass die Garantie bis zum nächsten Umschichtungstermin vollständig abgesichert ist. Ein nicht in diesen beiden Töpfen benötigtes Vermögen fließt zur freien Anlage in den dritten Topf; umgekehrt kann eine auftretende Absicherungslücke mittels Rücktransfer aus dem freien Fondsvermögen wieder geschlossen werden.

13.2.4 Anmerkungen

Insbesondere bei der Beitragserhaltungsgarantie ist zu beobachten, dass immer mehr Versicherer das Garantieniveau deutlich absenken oder bereits abgesenkt haben, indem statt der vollen 100% z.B. nur noch 60% der Beitragssumme zum Ablauf/Rentenübergang zugesichert werden. Hintergründe dieser Entwicklung sind u.a., dass die Erwirtschaftung dieser Garantie aufgrund des sinkenden Zinsniveaus immer schwieriger geworden ist und zur Verbesserung der Rentabilität aus Kundensicht eine höhere Fondsquote ermöglicht werden soll.

Wie gut oder schlecht die Rendite einer fondsgebundenen Versicherung (im Vergleich zu einer klassischen Versicherung) ist, hängt maßgeblich von drei Einflussgrößen ab, nämlich

- von den ausgewählten Fonds, in die investiert wird,
- von der Kostenbelastung des Vertrags, und
- bei fondsgebundenen Rentenversicherungen vom garantierten Rentenfaktor, der angibt, wie hoch die garantierte Jahresrente pro 10.000 EUR Vertragsguthaben ist.

Abschließend eine Ergänzung zu den weiter oben erwähnten **Variable Annuities** (häufig abgekürzt mit **VA**): Hierbei handelt es sich, grob gesagt, um eine fondsgebundene Rentenversicherung, die nicht nur während der Aufschubphase, sondern auch im Rentenbezug nach wie vor fondsgebunden ist. Das bedeutet, dass sich die ausgezahlte Rentenleistung am Wert des zugrundeliegenden Fondsguthabens orientiert und in ihrer Höhe variiert. Eine weitere Besonderheit von VA-Produkten besteht darin, dass die eingeschlossenen Garantien nicht innerhalb des (Garantie-)Fonds, sondern außerhalb durch sog. Hedging generiert werden. Das bedeutet, dass nicht die Kapitalanlagegesellschaft der Garantiegeber ist, sondern das VU selbst. Die Methoden sind jedoch komplex, und in der Vergangenheit haben sich die Kosten zur Absicherung der Garantien als sehr hoch herausgestellt. Variable Annuities lagen eine Zeit lang im Trend, allerdings scheint die Begeisterung dafür inzwischen abgeebbt zu sein.

13.3 Rechnungsgrundlagen

13.3.1 Zins

Auf ein evtl. vorhandenes konventionelles Guthaben, sei es zur Bedeckung der Beitragserhaltungsgarantie oder das Deckungskapital einer FRV im Rentenbezug, wird der Rechnungszins i angewendet.

Das Fondsguthaben entwickelt sich mit einer jährlichen Performance von i_{Fonds} . Diese ist grundsätzlich von Jahr zu Jahr, genauer sogar von Monat zu Monat, verschieden. Aus Vereinfachungsgründen wird hier jedoch eine konstante Fondsentwicklung unterstellt (wie es in Musterberechnungen ebenfalls Usus ist).

13.3.2 Biometrie

Bei der Auswahl und Anwendung von Sterbetafeln ist zu beachten, welchen Charakter die fondsgebundene Versicherung hat. Es kann vorkommen, dass je nach Deckung der Charakter der Versicherung und somit die zu verwendende Sterbetafel wechselt.

13.3.3 Kosten

Bei fondsgebundenen Versicherungen fallen grundsätzlich dieselben Kosten wie für konventionelle Tarife an: Abschlusskosten, Verwaltungskosten inbeitragspflichtiger und beitragsfreier Zeit sowie (bei der FRV) Verwaltungskosten während des Rentenbezugs.

Bezugsgrößen können wiederum die Prämie oder die Prämiensumme sein, oder es werden fixe Kosten erhoben. Häufig werden Kosten auch in Abhängigkeit vom Vertragsguthaben bemessen.

Zusätzlich zu den bekannten Kostenarten treten bei Fondsprodukten die folgenden Kosten auf:

- Beim Kauf von Fondsanteilen kann ein **Ausgabeaufschlag** – auch als **Agio** bezeichnet – anfallen. Dabei handelt es sich um ein Entgelt, welches von der Kapitalanlagegesellschaft erhoben wird und der Finanzierung der Vertriebskosten für die Fondsanteile dient. Der Ausgabeaufschlag bemisst sich i.d.R. in Prozent des Nennwertes eines Fondsanteils.
Theoretisch möglich, aber in der Versicherungspraxis eher selten zu finden, ist der **Rücknahmeabschlag** („umgekehrter Ausgabeaufschlag“) bzw. das **Disagio**. Dieser wird beim Verkauf von Fondsanteilen zur Deckung der Transaktionskosten erhoben und reduziert den Nennwert eines Fondsanteils um einen festgelegten Prozentsatz auf seinen Rücknahmepreis.
- Fonds investieren in verschiedene Anlageklassen (z.B. Aktien, Anleihen, Immobilien oder auch selbst wieder in Fonds). Für die Verwaltung des Fonds (Umschichtungen, Zu- und Verkäufe etc.) erhebt die Kapitalanlagegesellschaft eine jährliche Gebühr, welche als **Fondsmanagementgebühr** bezeichnet wird und sich in Prozent des Fondsguthabens zu einem festgelegten Stichtag bemisst.

Alle eingerechneten bzw. anfallenden Kosten werden entweder von der eingehenden Prämie abgezogen oder aus dem Fondsguthaben entnommen.

Für die Begleichung der einmaligen Abschlusskosten gibt es verschiedene Varianten. Bspw. wird – vergleichbar mit der Zillmerung – ein Abschlusskostenkonto geführt, welches zu Vertragsbeginn mit den Abschlusskosten belastet und dann schrittweise wieder getilgt wird, oder der Prämie werden innerhalb der ersten fünf Jahre entsprechende Beträge (in Höhe eines Fünftels der Abschlusskosten) entnommen. Hier im Buch werden wir Letzteres unterstellen.

Bei fondsgebundenen Versicherungen ist eine monatliche Prämienzahlweise vorherrschend, wobei auch andere Zahlungsintervalle möglich sind. Im Gegensatz zu konventionellen Tarifen werden dennoch keine Ratenzuschläge erhoben, da die Begründungen wie Zinsausfall oder in Vorleistung getragenes Risiko entfallen.

Für die fondsgebundenen Versicherungen unterstellen wir im weiteren Verlauf das folgende Kostenmodell:

Kosten-/Zuschlagsart	Kostensatz	Bezugsgröße
Abschlusskosten – einmalig – Amortisationskosten	α , α^z α^γ	Summe der Bruttoträume Summe der Bruttoträume
Laufende Verwaltungskosten – Inkassokosten – beitragspflichtig (bpfl) – tariflich beitragsfrei (bfr) – vorzeitig beitragsfrei (vbfr) – in Leistung (leist) – Fondsmanagementgebühr	β — γ_2 $\gamma_3 (= \gamma_2)$ γ_4 γ_{Fonds}	Bruttoträume — Summe der Bruttoträume Summe der Bruttoträume versicherte Leistung Fondsguthaben
Stückkosten	ε	—
Ausgabeaufschlag	η	Anlageprämie

Aus Gründen der Übersichtlichkeit bzw. Vereinfachung und da sie in praxi vielfach entfallen, werden die Ausgabeaufschläge im Weiteren auf Null gesetzt, also $\eta = 0$.

13.4 Notation

Die Versicherungstechnik fondsgebundener Produkte zeichnet sich durch eine retrospektive Sichtweise aus, die sich in der Führung von Konten ausdrückt. Fondsgebundene Versicherungen oder allgemeiner „retrospektiv orientierte Versicherungen“ werden daher auch als Konten-basierte Produkte bezeichnet.

Während bei konventionellen Produkten eine jährliche Betrachtungsweise vorherrscht, werden Fondsprodukte auf einer monatlichen Basis fortgeschrieben.

Dies hat insbesondere eine Auswirkung auf die Notation. Bislang bezeichnete die Größe m die bereits verstrichene Vertragsdauer in Jahren.

Bei der monatlichen Betrachtung hat es sich etabliert, dass die zurückgelegte Vertragsdauer durch das Paar $(m; k)$ repräsentiert wird.

Ausgehend vom Zeitpunkt $(0; 0)$ des Versicherungsbeginns (der eigentlich nur zur Initialisierung dient) gibt $m = 0, \dots, n - 1$ die Anzahl zurückgelegter Jahre und $k = 1, \dots, 12$ den laufenden Monat innerhalb des jeweiligen Jahres an. Das bedeutet, dass $(m; k)$ der k -te Monat des $(m + 1)$ -ten Versicherungsjahrs ist; anders ausgedrückt ist $(m; k)$ derjenige Monat, der nach einer zurückgelegten Laufzeit $m + \frac{k-1}{12}$ Jahren beginnt. Der letzte Monat der Versicherungs- oder Aufschubdauer entspricht somit dem Paar $(n - 1; 12)$.

Sofern sich eine Rentenphase anschließt, wäre deren erster Monat dann mit $(n; 1)$ zu bezeichnen. Da eine FRV im Rentenbezug jedoch identisch mit einer aufgeschobenen Rentenversicherung ist und daher konventionell geführt wird, geht man ab dem Zeitpunkt des Rentenübergangs auf die gewohnte, jährliche Schreibweise über.

Anstelle dieser gewöhnungsbedürftigen und oft als verwirrend empfundenen Notation können selbstverständlich einfach die Monate direkt durchgezählt werden, ohne eine Untergliederung nach Jahren vorzunehmen. Eine Vertragsdauer von bspw. 10 Jahren käme dann auf 120 Monate. Zur Abgrenzung von den klassischen Produkten übernehmen wir jedoch den Index $(m; k)$.

Weil die Verwendung des Buchstabens k zur Verwechslung mit der Prämienzahlweise führen kann, wird diese im Kontext fondsgebundener Versicherungen häufig mit u (anstatt bisher k) notiert. Auch diesem Vorgehen folgen wir hier.

Bei allen Größen eines Monats ist wiederum darauf zu achten, zu welchem Zeitpunkt innerhalb des Monats jene angegeben werden. Prämien fließen zu Beginn, Leistungen am Ende eines jeden Monats. Der Stand des Fondsguthabens wird ebenfalls immer zum Ende des Monats ermittelt bzw. angegeben.

Zum Abschluss seien noch einmal die grundlegenden Unterschiede zwischen klassischen und fondsgebundenen Produkten gegenübergestellt:

	klassische Versicherung	fondsgebundene Versicherung
Sichtweise ist Betrachtung erfolgt Vers.-techn. Rückstellung ist Anlagestock ist Kapitalbedeckung erfolgt Kapitalanlagerisiko trägt	prospektiv jährlich Deckungskapital konventionell kollektiv VU	retrospektiv monatlich Fondsanteilguthaben fondsgebunden individuell VN

13.5 Prämien

Bei klassischen, kapitalbildenden Versicherungen ist üblicherweise die versicherte Leistung (Summe oder Jahresrente) vorgegeben, und es wird die dafür benötigte Brutto- bzw. Zahlprämie bestimmt (Leistungsprimat).

Da bei fondsgebundenen Produkten die Höhe der Leistung aufgrund der ungewissen Fondsentwicklung nicht bekannt ist, sind sie stets prämienbasiert (Beitragsprimat). Die von klassischen Tarifen bekannte Herleitung des Bruttobeitrags aus einer Bestimmungsgleichung auf Basis des Äquivalenzprinzips entfällt demnach; stattdessen legt der VN direkt die von ihm zu entrichtende Zahlprämie selbst fest.

Dennoch lässt sich der Beitrag in gewohnter Weise in eine Sparprämie, Risikoprämie und Kostenprämie zerlegen (vgl. Abschn. 9.2.4).

Um die Darstellungen nicht allzu komplex werden zu lassen, betrachten wir im Folgenden nur die beiden Fälle einer rein fondsgebundenen Versicherung und eines statischen Hybrids, bei dem die Beitragserhaltungsgarantie dadurch gesichert wird, dass sich jede gezahlte Prämie selbst garantiert.

Dazu sei $BEP_{x:\bar{n}}$ die Bruttoeinmalprämie und $BP_{x:\bar{t}}$ die Bruttojahresprämie. Da keine Ratenzuschläge erhoben werden, ist die (vom Kunden gewählte) Zahlprämie $ZP_{m;k}^{(u)}$ im Monat $(m; k)$ je nach vereinbarter Prämienzahlweise u und Prämienzahlungsdauer t dann

$$ZP_{m;k}^{(u)} = \begin{cases} BEP_{x:\bar{n}} + \varepsilon & \text{falls } t = 1 \text{ und } (m; k) = (0; 1), \\ \frac{1}{u} \cdot (BP_{x:\bar{t}} + \varepsilon) & \text{falls } t > 1 \text{ und } 0 < m + \frac{k}{12} \leq t \\ & \text{und } (12 \cdot m + k - 1) \bmod u = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Risikoprämie $RP_{m;k}$ im Monat $(m; k)$ berechnet sich auf Basis des risierten Kapitals, welches zunächst bestimmt werden muss.

$TFL_{m;k}$ ist die am Ende des Monats $(m; k)$ fällige Todesfallleistung, und das am Ende des Monats $(m; k)$ vorhandene Vertragsguthaben setzt sich aus dem Garantieguthaben $GG_{m;k}$ und dem Fondsguthaben $FG_{m;k}$ zusammen, also

$$GG_{m;k} + FG_{m;k} .$$

Der Wert des Fondsguthabens am Ende des Monats kann zum Zeitpunkt der Erhebung der Risikoprämie jedoch noch nicht angegeben werden (wegen der unbekannten Fondsentwicklung).

Folglich bedarf es einer Schätzung dieses Wertes, indem als Näherung der Wert des Fondsguthabens zu Beginn des Monats gewählt wird, so dass

$$\widehat{FG}_{m;k} := FG_{m;k-1} .$$

Alternativ könnten auch alle bekannten Zahlungsvorgänge in das bzw. aus dem Fondskonto berücksichtigt werden und nur die Fondsentwicklung vernachlässigen, so dass

$$\widehat{FG}_{m;k} := \max \{0; FG_{m;k-1} + SP_{m;k}^F - KP_{m;k}^F\} .$$

Die Risikoprämie wird entweder monatlich oder gemäß der vereinbarten Zahlweise u bestimmt, so dass im ersten Fall

$$RP_{m;k} = \frac{\frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}}}{1 - \frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}}} \cdot \left(TFL_{m;k} - \left(GG_{m;k} + \widehat{FG}_{m;k} \right) \right)$$

ist und eine Berücksichtigung der Prämienzahlweise

$$RP_{m;k} = \frac{\frac{q_{x+m}}{u} \cdot v^{\frac{1}{u}}}{1 - \frac{q_{x+m}}{u} \cdot v^{\frac{1}{u}}} \cdot \left(TFL_{m;k} - \left(GG_{m;k} + \widehat{FG}_{m;k} \right) \right)$$

liefert.

In der beitragspflichtigen Zeit wird die Risikoprämie von der eingehenden Zahlprämie abgezogen, in der beitragsfreien Zeit wird die Risikoprämie monatlich dem Fondsguthaben entnommen.

Zwei Anmerkungen zur Risikoprämie:

- Die jährliche Sterbewahrscheinlichkeit q_{x+m} (m ist jetzt die Anzahl zurückgelegter Jahre) wird gleichmäßig, genauer linear, auf die Prämienzahlungsabschnitte aufgeteilt.
- Im Vergleich zur jährlichen Betrachtung (siehe Abschn. 9.2.4) taucht in der Risikoprämie anstelle von $q_{x+m} \cdot v^{\frac{1}{12}}$ der sog. **Vererbungsfaktor**

$$vf_{m;k} := \frac{\frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}}}{1 - \frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}}}$$

auf. Grund dafür ist, dass bei der Ermittlung bzw. Schätzung des Fondsguthabens zum Monatsende $\left(\widehat{FG}_{m;k} \right)$ auch die Risikoprämie in Abzug zu bringen ist, so dass eigentlich

$$RP_{m;k} = \frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}} \cdot \left(TFL_{m;k} - \left(GG_{m;k} + \widehat{FG}_{m;k} - RP_{m;k} \right) \right) .$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach der Risikoprämie liefert die obige Formel für $RP_{m;k}$ inklusive des Vererbungsfaktors, und das geschätzte Fondsguthaben $\widehat{FG}_{m;k}$ wird ohne Berücksichtigung der Risikoprämie angegeben.

Die Kostenprämie im Monat $(m; k)$ setzt sich gemäß des im vorangehenden Abschnitt definierten Kostenmodells wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} KP_{m;k} = & \left(\frac{\alpha}{\min\{t; 5\}} \cdot 1_{\{m < t\}} + \alpha^\gamma \right) \cdot t \cdot \max \left\{ 0; u \cdot ZP_{m;k}^{(u)} - \varepsilon \right\} \\ & + \beta \cdot \max \left\{ 0; u \cdot ZP_{m;k}^{(u)} - \varepsilon \right\} \\ & + \frac{1}{u} \cdot \varepsilon . \end{aligned}$$

Von der Zahlprämie verbleibt nach Abzug der Risiko- und der Kostenprämie als Sparprämie im Monat $(m; k)$

$$SP_{m;k} = ZP_{m;k}^{(u)} - RP_{m;k} - KP_{m;k} .$$

Dieser Betrag wird nun auf das Garantie- und Fondsguthaben aufgeteilt. Derjenige Teil der Sparprämie, der ins Garantiekonto fließt, wird im Folgenden als **Garantieprämie** und in Formeln mit $SP_{m;k}^G$ bezeichnet; der ins Fondskonto fließende Teil der Sparprämie heißt **Anlageprämie** oder **Investmentprämie** und wird mit $SP_{m;k}^F$ notiert.

Im Fall des statischen Hybrids ist die Garantieprämie

$$SP_{m;k}^G = ZP_{m;k}^{(u)} \cdot v^{n - (m + \frac{k}{12}) - \frac{1}{12}} ,$$

andernfalls gilt

$$SP_{m;k}^G = 0 .$$

Die Anlageprämie ergibt sich stets als Differenz

$$SP_{m;k}^F = SP_{m;k} - SP_{m;k}^G .$$

Sofern die Versicherung beitragsfrei ist, werden zu Beginn eines jeden Monats Kosten i.H.v.

$$\begin{aligned} KP_{m;k}^F = & \frac{1}{12} \cdot \gamma_2 \cdot t \cdot \max \left\{ 0; u \cdot ZP_{m;k}^{(u)} - \varepsilon \right\} \\ & + \frac{1}{12} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

sowie die Risikoprämie

$$RP_{m;k}^F = \frac{\frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}}}{1 - \frac{q_{x+m}}{12} \cdot v^{\frac{1}{12}}} \cdot \left(TFL_{m;k} - \left(GG_{m;k} + \widehat{FG}_{m;k} \right) \right)$$

aus dem Fondsguthaben entnommen.

13.6 Reserven

13.6.1 Garantieguthaben

Sofern es sich um eine fondsgebundene Versicherung ohne Garantie handelt, wird kein Garantieguthaben gebildet, und es ist

$$GG_{m;k} = 0 .$$

Im Falle des statischen Hybrids enthält das Garantieguthaben den zur Absicherung der Beitragserhaltungsgarantie benötigten Betrag. Bezeichnet

$$\begin{aligned} BRG_{m;k} &= ZP_{m;k}^{(u)} \cdot \left(u \cdot m + \left\lfloor u \cdot \frac{k-1}{12} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= BRG_{m;k-1} + ZP_{m;k}^{(u)} \end{aligned}$$

die Summe der bis zum Ende des Monats $(m; k)$ gezahlten Prämien, so gilt für das Garantiekonto

$$GG_{m;k} = BRG_{m;k} \cdot v^{n-(m+\frac{k}{12})} .$$

Die monatliche Fortschreibung des Garantieguthabens erfolgt durch Zugang der Garantieprämie und anschließender Verzinsung mit dem Rechnungszins, so dass

$$GG_{m;k} = \left(GG_{m;k-1} + SP_{m;k}^G \right) \cdot (1+i)^{\frac{1}{12}} .$$

13.6.2 Fondsguthaben

Beim Kauf und Verkauf von Fondsanteilen kann ggf. ein Ausgabeaufschlag fällig werden (siehe Abschn. 13.3.3). Wie viele Fondsanteile gekauft werden, hängt vom Wert eines einzelnen Anteils ab, welcher durch einen **Bewertungsfaktor** repräsentiert wird.

An- und Verkäufe von Fondsanteilen finden üblicherweise zu einem bestimmten Stichtag statt, zu dem dann auch der Bewertungsfaktor ermittelt wird. Der Wert des Fondsguthabens ergibt sich je Fonds aus dem Produkt von Anteileinheiten und dem zugehörigen Bewertungsfaktor sowie der anschließenden Summation über sämtliche Fonds, die der Kunde ausgewählt hat.

Formeltechnisch kann das wie folgt dargestellt werden:

- J bezeichnet die maximale Anzahl an Fonds, die für eine Anlage ausgewählt werden können.
- $j = 1, \dots, J$ gibt die laufende Nummer des Fonds an.
- $fa_{m;k}(j)$ ist die Anzahl der Fondsanteile von Fonds j , welche sich zum Zeitpunkt $(m; k)$ im Fondsvermögen des VN befinden.
- $bf_{m;k}(j)$ repräsentiert den Bewertungsfaktor für einen einzelnen Anteil des Fonds j im Monat $(m; k)$.
- $FG_{m;k}(j) = fa_{m;k}(j) \cdot bf_{m;k}(j)$ entspricht dem Wert des in Fonds j angelegten Vermögens am Ende des Monats $(m; k)$.

Damit ergibt sich das gesamte Fondsguthaben am Ende des Monats $(m; k)$ als

$$FG_{m;k} = \sum_{j=1}^J FG_{m;k}(j) = \sum_{j=1}^J fa_{m;k}(j) \cdot bf_{m;k}(j) .$$

Falls es mehrere Investmentkonten gibt, bspw. ein separates Konto für die in Fonds angelegten Überschüsse oder ein zusätzliches für Garantiefonds, so ist die gezeigte Zusammensetzung für das jeweilige Fondsguthaben analog. Die Konten unterscheiden sich dann lediglich in der Art ihrer Fortschreibung.

Sofern in mehrere Fonds investiert wird, muss die Anlageprämie $SP_{m;k}^F$ auf die verschiedenen Fonds aufgeteilt werden. Dazu bezeichnet $pa_{m;k}(j)$ den Anteil der Anlageprämie, der in Fonds j investiert wird. Für alle $j = 1, \dots, J$ gilt

$$pa_{m;k}(j) \begin{cases} > 0 & \text{falls Anlage in Fonds } j \text{ erfolgt ,} \\ = 0 & \text{sonst ,} \end{cases}$$

sowie

$$\sum_{j=1}^J pa_{m;k}(j) = 1 .$$

In diesem Kontext fallen häufig auch die beiden Begriffe Switch und Shift, welche unterschiedliche Arten des Anlagewechsels beschreiben.

Switch (auch Switchen oder Switching) bezeichnet den Vorgang, dass der Kunde die zukünftig zu besparnden Fonds wechselt. Das in den bisherigen Fonds angesammelte Vermögen bleibt davon unberührt, künftig werden von diesen Fonds lediglich keine neuen Anteile mehr gekauft. Ein Switch bewirkt

also, dass sich der Vektor $(pa_{m;k}(1), \dots, pa_{m;k}(J))^T$ für die Aufteilung der Anlageprämie ändert.

Shift (auch Shiften oder Shifting) bedeutet, dass Teile oder auch das komplette Fondsvermögen zwischen verschiedenen Fonds verschoben bzw. auf andere Fonds übertragen wird. Ein Shift hat somit zur Folge, dass sich der Vektor $(fa_{m;k}(1), \dots, fa_{m;k}(J))^T$ der Fondsanteile ändert.

Innerhalb der Vertragslaufzeit hat der Kunde üblicherweise das Recht, eine festgelegte Anzahl von Switchings und Shiftings kostenlos durchzuführen, bspw. zwei pro Jahr. Erst wenn er häufiger derartige Änderungen vornimmt, wird pro Vorgang eine Gebühr erhoben.

Die monatliche Fortschreibung des Fondsguthaben erfolgt gemäß

$$FG_{m;k} = \left(FG_{m;k-1} + SPF_{m;k}^F - RP_{m;k}^F - KP_{m;k}^F + LGA_{m;k} \right) \cdot (1 + i_{\text{Fonds}})^{\frac{1}{12}} \cdot (1 - \gamma_{\text{Fonds}}) .$$

Ausgehend vom Fondsguthaben am Ende des Vormonats geht zu Beginn des aktuellen Monats die Anlageprämie zu. Ebenfalls am Monatsanfang werden etwaige Risiko- und Kostenprämien aus dem Fondsguthaben entnommen, und der laufende Überschussanteil wird dem Fondskonto zugeführt. Das nun vorliegende Fondsguthaben entwickelt sich bis zum Ende des Monats mit der Fondsperformance, wobei abschließend die Fondsmanagementgebühren in Abzug gebracht werden.

13.6.3 Rentennachreservierung

Auch bei fondsgebundenen Rentenversicherungen kann eine Nachreservierung erforderlich werden. Je nach tariflicher Regelung kann der bei Rentenübergang anzuwendende Rentenfaktor entweder angepasst werden, oder er ist garantiert. Im Falle eines nicht garantierten Rentenfaktors wird dieser gemäß der dann gültigen Rechnungsgrundlagen ermittelt, und die Reserve hat eine für die Rentenphase ausreichende Höhe. Ist der Rentenfaktor hingegen garantiert und basiert auf einer nicht mehr aktuellen Sterbetafel, so ist eine Auffüllung der Reserve notwendig.

Problematisch ist nun, dass die Höhe des bei Rentenübergang zu verrentenden Kapitals aufgrund der nicht vorhersehbaren Wertentwicklung der Fondsanteile unbekannt ist.

Anhand einer rein fondsgebundenen Rentenversicherung mit jährlicher Prämien- und Rentenzahlweise (ohne sonstige Besonderheiten wie Ausgabeaufschläge, Beitragserhaltungsgarantie, Rentengarantiezeit oder Beitragsrückgewähr) soll das Vorgehen zur Ermittlung des Nachreservierungsbedarfs

dargestellt werden. Wir nehmen vereinfachend an, dass die bisherige Sterbetafel unvorsichtiger ist. Der Index RNR deute im Folgenden an, dass die jeweilige Größe auf Basis der neueren Sterbetafel berechnet wurde. Die Ausführungen lehnen sich an *DAV (2005b)* an.

Bezeichne $FG_{m;k}$ das am Ende des Monats $(m; k)$ vorhandene Fondsguthaben. Aus Vereinfachungsgründen beschränken wir uns auf einen Versicherungsstichtag, d.h. es ist $k = 12$ und somit $FG_{m;12} =: FG_m$.

Zunächst ermitteln wir den voraussichtlichen Betrag, der zum Ende der Aufschubphase zur Verfügung steht. Dazu nimmt man an, dass die jährliche Wertentwicklung des Fonds in Höhe des vertraglich vereinbarten Rechnungszinses i erfolgt:

- Unter dieser Prämisse entwickelt sich das bereits angesammelte Fondsguthaben bis zum Rentenbeginn zu $FG_m \cdot (1 + i)^{n-m}$.
- Zusätzlich zahlt der VN auch weiterhin Prämien, deren Sparanteile wiederum in Fonds angelegt werden und sich annahmegemäß mit dem Rechnungszins entwickeln. Die Summe dieser noch ausstehenden Sparprämien, jeweils gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit bis zum Zahlungszeitpunkt zu überleben, kumuliert sich auf

$$\sum_{s>m} SP_s \cdot (1 + i)^{n-s} \cdot {}_{s-m}p_{x+m},$$

wobei für die Anlageprämie $SP_{m;k}^F$ ebenfalls eine analog zu $FG_{m;k}$ abgekürzte Schreibweise verwendet wird, indem $SP_{m;12}^F =: SP_m$ gesetzt wird.

- Insgesamt steht für die Überlebenden zum Ende der Aufschubphase ein prognostiziertes Fondsguthaben von insgesamt

$${}_{n-m}p_{x+m} \cdot FG_n = FG_m \cdot (1 + i)^{n-m} + \sum_{s>m} SP_s \cdot (1 + i)^{n-s} \cdot {}_{s-m}p_{x+m}$$

bzw. (nach Division durch ${}_{n-m}p_{x+m}$)

$$\begin{aligned} FG_n &= \frac{FG_m \cdot (1 + i)^{n-m}}{{}_{n-m}E_{x+m}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s \cdot (1 + i)^{n-s}}{{}_{n-s}p_{x+s}} \\ &= \frac{FG_m}{{}_{n-m}E_{x+m}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s}{{}_{n-s}E_{x+s}} \end{aligned}$$

zur Verrentung bereit, was durch die Umwandlung in eine konventionelle Versicherung gleichzeitig dem Deckungskapital ${}_nV_x$ nach Original-Rechnungsgrundlagen entspricht. Unter Verwendung des garantierten Rentenfaktors resultiert daraus die Rente

$$JR = \frac{FG_n}{(1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}}.$$

Für diese Rente ist jedoch nach neuen Rechnungsgrundlagen ein Deckungskapital i.H.v.

$${}_nV_x^{\text{RNR}} = FG_n^{\text{RNR}} = JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}$$

zu stellen. Die zum Zeitpunkt m benötigte Reserve erhält man, indem der Betrag ${}_nV_x^{\text{RNR}}$ auf Basis der neuen Sterbetafel zurückgerechnet wird. Man tauscht also die Überlebenswahrscheinlichkeiten aus, zieht die zukünftigen Sparprämien ab und macht die Fondsentwicklung durch entsprechende Diskontierung wieder rückgängig. Mit

$${}_{s-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} := {}_{s-m}p_{x+m}^{\text{RNR}} \cdot v^{s-m}$$

ist daher

$$FG_m^{\text{RNR}} = FG_n^{\text{RNR}} \cdot {}_{n-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} - \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{RNR}}. \quad (13.1)$$

Einsetzen von FG_n^{RNR} und geeignetes Zusammenfassen (vgl. Übungsaufgabe 66) führen zu der Darstellung

$$FG_m^{\text{RNR}} = (1 + NRF_m^{\text{RNR}}) \cdot FG_m + \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} \cdot NRF_s^{\text{RNR}}, \quad (13.2)$$

wobei NRF_s^{RNR} den sog. **Nachreservierungsfaktor** zum Zeitpunkt s bezeichnet, welcher definiert ist als

$$NRF_s^{\text{RNR}} := \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-s p_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-s p_{x+s}} - 1.$$

Sofern das Verhältnis zwischen der originären Sterbetafel und der Nachreservierungstafel nicht klar ist, wird der Nachreservierungsfaktor allgemeiner definiert als

$$NRF_s^{\text{RNR}} := \max \left\{ \max \left\{ \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}}; 1 \right\} \cdot \frac{n-s p_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-s p_{x+s}}; 1 \right\} - 1.$$

Der entstehende Auffüllbedarf entspricht somit

$$FG_m^{\text{RNR}} - FG_m = NRF_m^{\text{RNR}} \cdot FG_m + \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} \cdot NRF_s^{\text{RNR}}$$

bzw. das Auffüllkapital aufgrund Biometrie ist dann

$$AK_m^{\text{Biometrie}} := \max \{ FG_m^{\text{RNR}} - FG_m ; 0 \} .$$

Es wird deutlich, dass das Auffüllkapital aufgrund Biometrie nicht nur als rein konventionelle Zusatzreserve ermittelt wird. Ein Teil des Auffüllbedarfs wird proportional zur aktuellen Fondsreserve bemessen und somit durch zusätzliche Fondsanteile gedeckt; der auf die zukünftigen Sparprämien entfallende Teil wird durch konventionelle Anlage bedeckt und entspricht einer Art Zuschlag auf die künftigen Anlageprämien.

Sei nun KW_m^{RNR} wieder die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Vertrag im Zeitraum vom aktuellen Zeitpunkt m bis zum Erreichen des Rentenübergangs (aufgrund von Storno oder Kapitalwahl) abgeht (vgl. Abschn. 9.4.1). Das bedeutet, dass ein Auffüllbedarf nur dann entsteht, wenn der Vertrag das Ende des Aufschubdauer erreicht und in den Rentenbezug wechselt.

Vereinfachend kann das Auffüllkapital aufgrund Biometrie unter Berücksichtigung der Abgangswahrscheinlichkeit KW_m^{RNR} berechnet werden als

$$AK_m^{\text{Biometrie}} := \max \{ FG_m^{\text{RNR}} - FG_m ; 0 \} \cdot (1 - KW_m^{\text{RNR}}) .$$

Ausführlicher ist hingegen eine Gewichtung der Rentenbarwerte vorzunehmen, so dass

$$(1 + \gamma_4) \cdot (KW_m^{\text{RNR}} \cdot \ddot{a}_{x+n} + (1 - KW_m^{\text{RNR}}) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}})$$

zu einem modifizierten Nachreservierungsfaktor der Gestalt

$$\begin{aligned} NRF_s^{\text{RNR}, \text{KW}} &= \frac{KW_s^{\text{RNR}} \cdot \ddot{a}_{x+n} + (1 - KW_s^{\text{RNR}}) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-sp_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-sp_{x+s}} - 1 \\ &= KW_s^{\text{RNR}} \cdot \left(\frac{n-sp_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-sp_{x+s}} - 1 \right) + (1 - KW_s^{\text{RNR}}) \cdot NRF_s^{\text{RNR}} \end{aligned}$$

führt, welcher dann in die Berechnungsformel 13.2 anstelle von NRF_s einzusetzen ist.

Sofern das Verhältnis zwischen der originären Sterbetafel und der Nachreservierungstafel unklar ist, ist der modifizierte Nachreservierungsfaktor $NRF_s^{\text{RNR}, \text{KW}}$ wieder allgemeiner zu definieren als

$$\max \left\{ \max \left\{ \frac{KW_s^{\text{RNR}} \cdot \ddot{a}_{x+n} + (1 - KW_s^{\text{RNR}}) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}}; 1 \right\} \cdot \frac{n-sp_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-sp_{x+s}} \right\} - 1 .$$

13.6.4 Zinszusatzreserve

Die Bestimmung eines Auffüllbedarfs aufgrund Zins bei fondsgebundenen Versicherungen wird analog zum Vorgehen bei der Rentennachreservierung vorgestellt. Für weitere Bezeichnungen sei auf Kap. 9.4.2 verwiesen, wo die Zinszusatzreserve für klassische Rentenversicherungen erläutert wurde.

Der Referenzzins wird wieder i_{ref} notiert, der zugehörige Diskontfaktor sei $v_{\text{ref}} = \frac{1}{1+i_{\text{ref}}}$. Für Zwecke der Auf- bzw. Abzinsung bis zum bzw. vom Rentenübergang definieren wir für alle $s = 0, \dots, n$ den Aufzinsungsfaktor

$$r_s^{\text{ZZR}} := (1 + i_{\text{ref}})^{\min\{15;s\}} \cdot (1 + i)^{\max\{0;s-15\}}$$

sowie den zugehörigen Abzinsungsfaktor

$$v_s^{\text{ZZR}} := \frac{1}{r_s^{\text{ZZR}}} = v^{\min\{15;s\}} \cdot v^{\max\{0;s-15\}}.$$

Ausgehend vom aktuellen Betrachtungszeitpunkt m wird das Fondsguthaben FG_m wieder auf das Ende der Aufschubdauer hochgerechnet. Dabei wird angenommen, dass sich die Fondsreserve in den nächsten 15 Jahren mit dem Referenzzins und anschließend mit dem Rechnungszins entwickelt. Für die Überlebenden zum Ende der Aufschubphase steht dann ein prognostiziertes Fondsguthaben i.H.v.

$${}_{n-m}p_{x+m} \cdot FG_n = FG_m \cdot r_{n-m}^{\text{ZZR}} + \sum_{s>m} SP_s \cdot r_{n-s}^{\text{ZZR}} \cdot {}_{s-m}p_{x+m}$$

zur Verfügung bzw.

$$\begin{aligned} FG_n &= \frac{FG_m \cdot r_{n-m}^{\text{ZZR}}}{{}_{n-m}p_{x+m}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s \cdot r_{n-s}^{\text{ZZR}}}{{}_{n-s}p_{x+s}} \\ &= \frac{FG_m}{{}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s}{{}_{n-s}E_{x+s}^{\text{ZZR}}}, \end{aligned}$$

wobei

$${}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} := {}_{s-m}p_{x+m} \cdot v_{s-m}^{\text{ZZR}}.$$

Daraus resultiert die Jahresrente

$$JR = \frac{FG_n}{(1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}},$$

für die das Deckungskapital

$${}_nV_x^{\text{ZZR}} = FG_n^{\text{ZZR}} = JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}} = FG_n \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}}$$

zu stellen ist. Dabei ist $\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}$ der Leistungsbarwert der ab Rentenübergang fälligen Rente, der auf Basis des Zinsvektors $(\underbrace{i_{\text{ref}}, \dots, i_{\text{ref}}, i, \dots}_\text{15 Jahre})^T$ berechnet wird.

Dieser Zinsvektor ragt nur dann mit mindestens einem der Werte i_{ref} in den Rentenbezug hinein, wenn die Restaufschubdauer $n - m$ kleiner als 15 Jahre ist. In diesem Fall ist $\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}} > \ddot{a}_{x+n}$, andernfalls gilt $\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}} = \ddot{a}_{x+n}$.

Eine Rückrechnung des Fondsguthabens FG_n^{ZZR} auf den Zeitpunkt m führt zu dem Referenz-Fondsguthaben

$$FG_m^{\text{ZZR}} = FG_n^{\text{ZZR}} \cdot {}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} - \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}}.$$

Einsetzen von FG_n^{ZZR} und FG_m liefert

$$\begin{aligned} FG_m^{\text{ZZR}} &= FG_n^{\text{ZZR}} \cdot {}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} - \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} \\ &= FG_n \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot {}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} - \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} \\ &= \left(\frac{FG_m}{{}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s}{{}_{n-s}E_{x+s}^{\text{ZZR}}} \right) \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot {}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} \\ &\quad - \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} \\ &= FG_m \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}} + \sum_{s>m} SP_s \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{{}_{n-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}}}{{}_{n-s}E_{x+s}^{\text{ZZR}}} - {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}} \right) \\ &= (1 + NRF^{\text{ZZR}}) \cdot FG_m + NRF^{\text{ZZR}} \cdot \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}}. \end{aligned}$$

Der Nachreservierungsfaktor

$$NRF^{\text{ZZR}} := \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}} - 1$$

ist zeitunabhängig; zur Sicherheit kann auch

$$NRF^{\text{ZZR}} := \max \left\{ 0; \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{ZZR}}}{\ddot{a}_{x+n}} - 1 \right\}$$

gesetzt werden.

Es entsteht also ein Auffüllbedarf der Höhe

$$FG_m^{\text{ZZR}} - FG_m = NRF^{\text{ZZR}} \cdot FG_m + NRF^{\text{ZZR}} \cdot \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{ZZR}},$$

und das Auffüllkapital aufgrund Zins ist

$$AK_m^{\text{Zins}} := \max \{ FG_m^{\text{ZZR}} - FG_m ; 0 \} .$$

Die Berücksichtigung der Abgangswahrscheinlichkeit KW_m^{ZZR} ergibt

$$AK_m^{\text{Zins}} := \max \{ FG_m^{\text{ZZR}} - FG_m ; 0 \} \cdot (1 - KW_m^{\text{ZZR}}) .$$

Anders als bei klassischen Kapitallebensversicherungen existiert – bei der hier vorgestellten Berechnungsweise – für fondsgebundene Lebensversicherungen keine Zinszusatzreserve.

13.6.5 Deckungskapital im Rentenbezug

Eine fondsgebundene Rentenversicherung wird im Rentenbezug konventionell geführt. Dazu wird das bei Rentenübergang vorhandene Vertragsguthaben inkl. Guthaben aus Überschussbeteiligung verrentet. Die bei Rentenübergang ermittelte Jahresrente ergibt sich aus dem Vertragsguthaben durch Division mit dem Rentenbarwert:

$$JR = \frac{GG_{n-1;12} + FG_{n-1;12} + \ddot{U}G_{n-1;12}}{(1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}} .$$

Anstelle von \ddot{a}_{x+n} kann natürlich auch ein anderer Leistungsbarwert verwendet werden, etwa $\ddot{a}_{\overline{g}} + {}_g\ddot{a}_{x+n}$ bei einer vereinbarten Rentengarantiezeit von g Jahren.

Das zugehörige Deckungskapital ist dann gegeben durch

$${}_nV_x = JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n} .$$

Einsetzen von JR zeigt übrigens, dass das konventionelle Deckungskapital mit dem Gesamtguthaben am Ende der Aufschubphase übereinstimmt, nämlich

$${}_nV_x = GG_{n-1;12} + FG_{n-1;12} + \ddot{U}G_{n-1;12} .$$

13.7 Überschussbeteiligung

Für die Überschussbeteiligung bei fondsgebundenen Versicherungen gelten grundsätzlich die Ausführungen in Kap. 10.

Zusätzlich bestehen bei Fondsprodukten folgende Besonderheiten.

13.7.1 Überschussentstehung

Während der Aufschubphase der FRV bzw. der Vertragsdauer einer FLV entsteht durch Kickbacks ein zusätzlicher Bestandteil der Kostengewinne. Bei **Kickbacks** handelt es sich um Rückvergütungen der Fondsgesellschaft an das VU, die vergleichbar mit einer Bestandsprovision (siehe Abschn. 7.2.3) sind.

Für die Vermittlung bzw. den Verkauf der Fondsanteile erhält das VU von der Kapitalanlagegesellschaft eine Art Provisionszahlung, deren Höhe sich als Anteil an den Fondsmanagementgebühren bemisst. An den Kickbacks wird der Kunde durch entsprechende (Kosten-)Überschüsse beteiligt und erhält auf diesem Wege eine teilweise Rückerstattung der von ihm gezahlten Gebühren für die Fondsverwaltung.

Der laufende Überschuss- oder Gewinnanteil wird hier mit $LGA_{m;k}$ notiert. Er setzt sich aus den drei bekannten Komponenten für Zins, Risiko und Kosten zusammen, so dass

$$LGA_{m;k} = LGA_{m;k}^{\text{Zins}} + LGA_{m;k}^{\text{Risiko}} + LGA_{m;k}^{\text{Kosten}} .$$

Die für den Monat $(m; k)$ gültigen Überschussanteilsätze sind $z_{m;k}^{\text{Zins}}$ für den Zinsüberschuss, $z_{m;k}^{\text{Risiko}}$ für den Risikoüberschuss und $z_{m;k}^{\text{Kosten}}$ für den Kostenüberschuss. Sofern die Deklaration jährliche Überschussanteilsätze vorsieht, werden diese gleichmäßig auf die Monate verteilt. Für den Zinsüberschussanteilsatz bedeutet dies etwa $z_{m;k}^{\text{Zins}} = \frac{1}{12} \cdot z_{m+1}^{\text{Zins}}$.

Beispiele für mögliche Bemessungsgrundlagen sind:

- Sofern ein Garantieguthaben existiert, entstehen darauf Zinsüberschüsse, und es ist

$$LGA_{m;k}^{\text{Zins}} = \max \{0; GG_{m;k-1}\} \cdot z_{m;k}^{\text{Zins}} .$$

- Der Risikoüberschussanteilsatz bezieht sich auf die Risikoprämien, die entweder der Prämie oder dem Fonds entnommen werden. Dann ist

$$LGA_{m;k}^{\text{Risiko}} = \max \{0; RP_{m;k} + RP_{m;k}^F\} \cdot z_{m;k}^{\text{Risiko}} .$$

- Ein Kostenüberschuss in Prozent der Kostenprämien führt zu

$$LGA_{m;k}^{\text{Kosten}} = \max \{0; KP_{m;k} + KP_{m;k}^F\} \cdot z_{m;k}^{\text{Kosten}} .$$

Für die laufenden Überschussanteile ergibt sich folgende Übersicht:

Überschuss-anteil	Überschuss-anteilsatz	Beispiele für Bezugsgrößen
$LGA_{m;k}^{\text{Zins}}$	$z_{m;k}^{\text{Zins}}$	Garantieguthaben, Bonus-Deckungskapital
$LGA_{m;k}^{\text{Risiko}}$	$z_{m;k}^{\text{Risiko}}$	Risikoprämie, riskiertes Kapital
$LGA_{m;k}^{\text{Kosten}}$	$z_{m;k}^{\text{Kosten}}$	Kostenprämie, Prämiensumme

Selbstverständlich können auch Schlussgewinnanteile gewährt werden. Im Kontext fondsgebundener Versicherungen wird von Schlussüberschüssen allerdings seltener Gebrauch gemacht als bei konventionellen Versicherungen, so dass wir diese hier außen vor lassen.

Ansonsten gelten für die Schlussüberschussbeteiligung und auch für die Beteiligung an den BWR die Ausführungen von Kap. 10.

13.7.2 Überschussverwendung

Die Verwendung der laufend zugeteilten Überschussanteile erfolgt bei fondsgebundenen Versicherungen üblicherweise in Form der Fondsanlage, so dass auch die Überschüsse aus dem konventionellen Guthaben in Fonds investiert werden. Letztere können durchaus auch anderweitig, z.B. in Form der verzinslichen Ansammlung, verwendet werden.

Bei der Anlage der Überschüsse in Fonds werden die laufenden Gewinnanteile meist vorschüssig ausgeschüttet, d.h. zu Beginn eines Monats oder eines Prämienzahlungsabschnitts.

Im hier dargestellten Modell fließen die Überschüsse in das Fondsguthaben $FC_{m;k}$. Sofern eine Trennung zwischen dem prämiengenfinanzierten und dem aus Überschüssen finanzierten Fondsguthaben gewünscht wird, ist ein zusätzliches Fondskonto anzulegen, welches alle Überschüsse aufnimmt.

Mit $\ddot{U}G_{m;k}$ wird daher ein weiteres Guthaben eingeführt, das ausschließlich aus Überschüssen gebildet wird. Dabei kann es sich um ein separates Fondskonto, um ein Bonusdeckungskapital oder Ansammlungsguthaben oder um die Summe aus fondsbasierter und konventioneller Überschussverwendung handeln.

Da eine FRV im Rentenbezug mit einer klassischen aufgeschobenen Rentenversicherung übereinstimmt, stehen dort dieselben Formen der Überschussverwendung (Bonusrente, Rentenzuschlag etc.) zur Verfügung.

13.8 Vertragsänderungen und Garantiewerte

13.8.1 Vertragsänderungen

Aufgrund der retrospektiven Sichtweise sind Vertragsänderungen wie Veränderungen der Laufzeit oder der Prämiehöhe inkl. Vereinbarung einer Beitragsdynamik bei Fondsprodukten ohne Garantie eher unkritisch.

Es kann passieren, z.B. nach einer Beitragsfreistellung, dass das Fondsguthaben aufgrund einer schlechten Fondsentwicklung nicht zur Deckung der Risikoprämien und/oder Kostenentnahmen ausreicht. In diesen Fällen wird der Vertrag automatisch beendet, sobald das Fondsguthaben aufgezehrt ist.

Schwieriger stellt sich die Situation bei Fondsprodukten mit Garantie dar. Die eingeschlossene Beitragserhaltungsgarantie ist auf den Ablauf bzw. Rentenübergang ausgelegt und gilt nur für diesen speziellen Zeitpunkt. Bei Änderungen der Vertragslaufzeit bzw. Aufschubdauer, der Prämienzahlungsdauer oder der Prämienhöhe ist daher zu überprüfen und sicherzustellen, dass die Garantie nach wie vor erfüllbar bleibt. Bei der hier dargestellten Variante eines statischen Hybrids, wo jede Prämie sich selber garantiert, ist eine Beitragsfreistellung problemlos durchführbar, weil jede bis dahin gezahlte Prämie bereits abgesichert ist.

13.8.2 Leistung bei Tod

Bei Tod der VP wird grundsätzlich das vorhandene Vertragsguthaben, d.h. die Summe aus Garantie- und Fondsguthaben sowie evtl. Überschussguthaben, ausgezahlt.

Alternativ kann auch eine Mindesttodesfallsumme vereinbart werden, bspw. ein bestimmter Prozentsatz τ der planmäßigen Bruttobeuragssumme. Dann ist die im Todesfall fällige Leistung

$$TFL_{m;k} = \max \{ \tau \cdot BRG_{n-1;12} ; GG_{m;k} + FG_{m;k} \} + \ddot{G}_{m;k} .$$

13.8.3 Leistung bei Rückkauf

Im Falle der Kündigung wird analog zum Todesfall das vorhandene Vertragsguthaben zurückgezahlt, wobei ein Stornoabschlag abgezogen werden kann.

13.8.4 Leistung bei Ablauf

Bei Erreichen des Ablauftermins oder des Rentenübergangs wird die Summe sämtlicher Guthaben ausgezahlt. Bei Einschluss einer Beitragserhaltungsgarantie entspricht jene Summe mindestens der Summe der gezahlten Prämien (oder einem vereinbarten Prozentsatz davon), denn das Garantieguthaben erreicht dann exakt diesen Wert.

13.8.5 Leistung im Rentenbezug

Bei einer fondsgebundenen Rentenversicherung wird das zum Ende der Aufschubphase vorhandene Gesamtguthaben in eine konventionelle Rentenversicherung umgewandelt.

Bei diesem Vorgang spielt der **Rentenfaktor** eine wichtige Rolle. Diese Größe gibt an, wie viel Jahresrente je Einheit des Verrentungskapitals entsteht. Als Einheiten sind Größenordnungen wie 1.000 EUR oder 10.000 EUR gängig. Der Rentenfaktor ist im Grunde nichts anderes als der Kehrwert des Rentenbarwerts am Ende der Aufschubphase, multipliziert mit der gewählten Einheit, bspw.

$$\frac{1}{(1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}} \cdot 10.000 \text{ EUR} .$$

Die Bedeutung dieses Rentenfaktors liegt darin, dass das VU diesen Umrechnungsfaktor bis zu einer bestimmten Höhe garantiert. Anders als bei konventionellen Produkten ist die Höhe der garantierten Rentenleistung bei Vertragsbeginn – ja sogar bis zum Ende der Aufschubphase – unbekannt, d.h., das VU kann eine Leistung in definierter Höhe nicht zusagen. Das VU kann jedoch eine Garantie geben in der Art, dass es die Rechnungsgrundlagen, die für die Ermittlung der Rentenhöhe bei Rentenübergang verwendet werden, bereits zu Vertragsbeginn in gewissem Umfang garantiert.

Sofern der Rentenfaktor nicht garantiert ist, wird die Jahresrente auf Basis der zum Zeitpunkt des Rentenübergangs aktuell gültigen Rechnungsgrundlagen bestimmt.

13.9 Übungen

13.9.1 Aufgaben

Übung 65. Zeigen Sie, dass im Fall des statischen Hybrids für die Garantieprämie gilt:

$$SP_{m;k}^G = GG_{m;k} \cdot v^{\frac{1}{12}} - GG_{m;k-1} .$$

Übung 66. Zeigen Sie, dass sich die nachreservierte Reserve einer fondsgebundenen Rentenversicherung ausgehend von der Formel (13.1) für $0 \leq m \leq n$ darstellen lässt als

$$FG_m^{\text{RNR}} = (1 + NRF_m^{\text{RNR}}) \cdot FG_m + \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} \cdot NRF_s^{\text{RNR}} .$$

13.9.2 Lösungen

Lösung 65. Das Garantiekonto am Ende des Monats $(m; k)$ ist gegeben durch

$$GG_{m;k} = BRG_{m;k} \cdot v^{n-(m+\frac{k}{12})} .$$

Damit ergibt sich für die Garantieprämie:

$$\begin{aligned} SP_{m;k}^G &= GG_{m;k} \cdot v^{\frac{1}{12}} - GG_{m;k-1} \\ &= BRG_{m;k} \cdot v^{n-(m+\frac{k}{12})} \cdot v^{\frac{1}{12}} - BRG_{m;k-1} \cdot v^{n-(m+\frac{k-1}{12})} \\ &= \left(BRG_{m;k-1} + ZP_{m;k}^{(u)} \right) \cdot v^{n-(m+\frac{k-1}{12})} - BRG_{m;k-1} \cdot v^{n-(m+\frac{k-1}{12})} \\ &= ZP_{m;k}^{(u)} \cdot v^{n-(m+\frac{k-1}{12})} . \end{aligned}$$

Lösung 66. Ausgehend von der Formel

$$\begin{aligned} FG_m^{\text{RNR}} &= FG_n^{\text{RNR}} \cdot {}_{n-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} - \sum_{s>m} SP_s \cdot {}_{s-m}E_{x+m}^{\text{RNR}} . \\ &= FG_n^{\text{RNR}} \cdot {}_{n-m}p_{x+m}^{\text{RNR}} \cdot v^{n-m} - \sum_{s>m} SP_s \cdot v^{s-m} \cdot {}_{s-m}p_{x+m}^{\text{RNR}} \end{aligned}$$

sehen wir zunächst, dass sich FG_n^{RNR} darstellen lässt als

$$\begin{aligned} FG_n^{\text{RNR}} &= JR \cdot (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}} \\ &= \frac{FG_n}{(1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}} \cdot (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}} \end{aligned}$$

und damit

$$FG_n^{\text{RNR}} = \left(\frac{FG_m \cdot (1+i)^{n-m}}{n-m p_{x+m}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s \cdot (1+i)^{n-s}}{n-s p_{x+s}} \right) \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} .$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung führt zu

$$\begin{aligned} & FG_m^{\text{RNR}} \\ &= \left(\frac{FG_m \cdot (1+i)^{n-m}}{n-m p_{x+m}} + \sum_{s>m} \frac{SP_s \cdot (1+i)^{n-s}}{n-s p_{x+s}} \right) \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-m p_{x+m}^{\text{RNR}} \cdot v^{n-m}}{n-m p_{x+m}} \\ &\quad - \sum_{s>m} SP_s \cdot v^{s-m} \cdot \frac{s-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+m}} \\ &= FG_m \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+m}} \\ &\quad + \sum_{s>m} SP_s \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-s p_{x+s}} \cdot v^{n-m} \cdot v^{s-n} - v^{s-m} \cdot \frac{s-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+m}} \right) \\ &= FG_m \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+m}} \\ &\quad + \sum_{s>m} SP_s \cdot v^{s-m} \cdot \frac{s-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+m}} \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-s p_{x+s} \cdot s-m p_{x+m}^{\text{RNR}}} - 1 \right) \\ &= FG_m \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-m p_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+m}} \\ &\quad + \sum_{s>m} SP_s \cdot \frac{s-m E_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+s}} \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-s p_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-s p_{x+s}} - 1 \right) . \end{aligned}$$

Mit der Definition des Nachreservierungsfaktors gemäß

$$NRF_s^{\text{RNR}} := \frac{\ddot{a}_{x+n}^{\text{RNR}}}{\ddot{a}_{x+n}} \cdot \frac{n-s p_{x+s}^{\text{RNR}}}{n-s p_{x+s}} - 1$$

ergibt sich die gewünschte Darstellung

$$FG_m^{\text{RNR}} = (1 + NRF_m^{\text{RNR}}) \cdot FG_m + \sum_{s>m} SP_s \cdot \frac{s-m E_{x+m}^{\text{RNR}}}{n-m p_{x+s}} \cdot NRF_s^{\text{RNR}} .$$

Kapitel 14

Berufsunfähigkeitsversicherung

Die Berufsunfähigkeitsversicherung (kurz: BU-Versicherung oder **BUV**) ist bei den meisten Lebensversicherern ebenfalls fester Bestandteil der angebotenen Produktpalette. Im Folgenden umfasst der Begriff stets auch die Erwerbsunfähigkeitsversicherung (kurz: EU-Versicherung oder **EUV**), welche zwar auf einem anderen Grad der Unfähigkeit, ein Arbeitseinkommen zu erzielen, basiert, ansonsten jedoch identische Charakteristika wie die BU-Versicherung aufweist.

BU-Versicherungen zählen zu den wesentlichen Versicherungen, die jede berufstätige Person haben sollte. Für den Fall, dass der erlernte oder zuletzt ausgeübte Beruf aufgrund von Krankheit nicht mehr ausgeübt werden kann, leistet die BU-Versicherung eine Invalidenrente, um das wegfallende Einkommen – zumindest teilweise – auszugleichen. Vorausgesetzt, dass der Zustand der Berufsunfähigkeit ununterbrochen anhält, ist die Leistungsdauer i.d.R. derart bemessen, dass die BU-Leistung bis zum Beginn der Altersrente gezahlt wird. Gleiches gilt auch für die Erwerbsunfähigkeitsversicherung, bei welcher der Leistungsfall dann eintritt, wenn die VP nicht mehr in der Lage ist, irgendein Arbeitseinkommen zu erzielen. Bei gleichen Voraussetzungen sind EU-Versicherungen daher preislich günstiger als BU-Versicherungen.

Der Zustand der Berufs- oder Erwerbsunfähigkeit wird als **Invalidität** bezeichnet. Während früher Erkrankungen des Bewegungsapparats der vorrangige Auslöser für eine BU bzw. EU waren, so sind in der jüngeren Zeit psychische Erkrankungen der Hauptgrund für den Eintritt einer Invalidität, gefolgt von Erkrankungen des Skeletts, Krebsleiden, Erkrankungen des Herz-Kreislauf-Gefäß-Systems und sonstigen Krankheiten. Eine einmal invalide gewordene Person kann selbstverständlich auch wieder genesen; dieser Vorgang wird **Reaktivierung** genannt. Je länger die Invalidität jedoch anhält, desto unwahrscheinlicher ist erfahrungsgemäß die Chance auf eine Reaktivierung.

Die Leistungen einer BUV bzw. EUV bestehen aus einer **Beitragsbefreiung** sowie ggf. einer zusätzlichen **Barrente**. Die BU-Versicherung selbst ist nach Eintritt des Leistungsfalls ebenfalls von der Beitragszahlung befreit. Die Leistungszahlung durch das VU setzt ein, falls die Invalidität für eine vorab festlegte Anzahl von Monaten (**Karenzzeit**) ununterbrochen bestanden hat und die Leistungspflicht anerkannt wurde. Nach einer Wiedergenesung endet die Zahlung der BU-Leistungen, der Vertrag wechselt zurück in den anwartschaftlichen Zustand, und die Prämienzahlung durch den VN setzt wieder ein. Während der Vertragslaufzeit kann ein Wechsel zwischen Anwartschaft und Leistungsphase durchaus mehrfach auftreten.

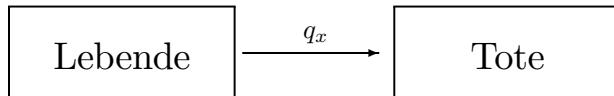
Im Zusammenhang mit der Definition, ob bzw. wann eine Berufsunfähigkeit vorliegt, ist der Begriff **Verweisung** von Bedeutung. Damit ist eine Klausel in den vertraglichen Bedingungen gemeint, die dem VU im Leistungsfall das Recht einräumt, die VP auf einen anderen, dem zuletzt ausgeübten Beruf jedoch vergleichbaren Beruf zu verweisen (abstrakte Verweisung), auch wenn eine derartige Stelle am Arbeitsmarkt gar nicht verfügbar ist. Dabei bedeutet „vergleichbar“, dass der neue Beruf den Fähigkeiten, Kenntnissen und der bisherigen Lebensstellung der VP entsprechen muss. Übt die VP nach Eintritt der Invalidität bereits wieder eine (ggf. andere als die vorherige) Tätigkeit aus, so kann das VU auf diese neue Tätigkeit verweisen (konkrete Verweisung). Im Falle einer erfolgreichen Verweisung ist das VU von der Leistungspflicht befreit. Insbesondere aus Wettbewerbsgründen ist bei vielen Anbietern der **Verweisungsverzicht**, d.h. der Ausschluss des Rechts auf (abstrakte) Verweisung, inzwischen regulärer Bestandteil der Vertragsbedingungen.

Als Alternative zu BU-/EUV-Versicherungen werden diverse andere Produkte zur Existenzabsicherung angeboten und beworben. Das Spektrum reicht von der Dread-Disease-Versicherung, die bei Eintritt einer schweren Krankheit (z.B. Herzinfarkt oder Krebs) eine festgelegte Versicherungssumme zahlt, über die Grundfähigkeitsversicherung, die bei Verlust definierter elementarer Fähigkeiten (wie Sehen, Sprechen, Hände gebrauchen, Gehen oder Treppe steigen) eine Rente gewähren, bis hin zur Multi-Risk-Police, die eine Kombination mehrerer Deckungen aus Dread-Disease-, Grundfähigkeits-, Pflege- und Unfallversicherung darstellt. Die Eignung der jeweiligen Versicherung zur Absicherung der VN-individuellen Bedürfnisse ist für jeden Einzelfall zu prüfen, da in den aufgeführten Beispielen insbesondere Erkrankungen der Psyche oder des Skeletts i.d.R. nicht abgedeckt sind.

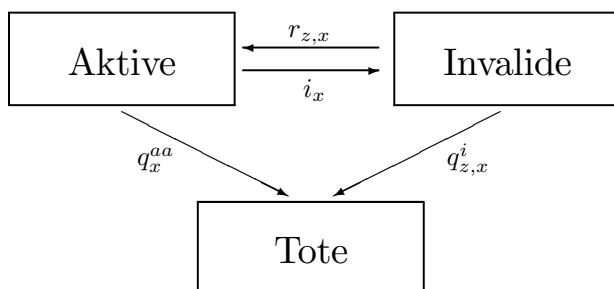
Die einleitenden Worte schließen mit dem Hinweis, dass nachfolgend nur die klassische bzw. konventionelle Variante der BU-Versicherung erläutert wird. Auf die am Markt ebenfalls verfügbare fondsgebundene BU-Versicherung wird hier nicht eingegangen.

14.1 Versicherungstechnik

Bisher stand die VP nur unter dem Risiko „Tod“, so dass das Individuum bei Eintritt des Todesfalls vom Kollektiv der Lebenden in das Kollektiv der Toten überging. Das Ausscheiden aus dem Lebenden-Kollektiv aufgrund von Tod lässt sich durch eine Sterbetafel mit den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x beschreiben, und es ergibt sich folgendes Schaubild für ein **Zwei-Zustände-Modell**:



Bei der BUV tritt neben die Sterblichkeit das zusätzliche Risiko der Invalidität, so dass die einzelne VP nun mehreren Risiken gleichzeitig ausgesetzt ist. Dadurch zerfällt das Kollektiv der Lebenden in zwei Teilkollektive, nämlich das Kollektiv der Aktiven und das der Invaliden. Aus dem Aktiven-Kollektiv kann man durch Tod in das Kollektiv der Toten übergehen, und durch Eintritt von Invalidität wechselt die VP in das Kollektiv der Invaliden. Anstelle von Sterbetafeln wird allgemeiner von Ausscheideordnungen gesprochen, welche hier durch die einjährigen Wahrscheinlichkeiten q_x^{aa} für Tod und die einjährigen Wahrscheinlichkeiten i_x für Invalidisierung gekennzeichnet sind. Aus dem Invaliden-Kollektiv kann ein Individuum ebenfalls durch Tod in das Kollektiv der Toten ausscheiden, was durch die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{z,x}^i$ beschrieben wird. Darüber hinaus ist der Zustand der Invalidität – im Gegensatz zum Tod – nicht absorbierend, sondern umkehrbar, d.h., die VP kann genesen und aus dem Kollektiv der Invaliden wieder in das Aktiven-Kollektiv zurückkehren. Die Reaktivierung wird durch einjährige Reaktivierungswahrscheinlichkeiten $r_{z,x}$ repräsentiert. Alle genannten Wahrscheinlichkeiten werden weiter unten in Abschn. 14.3.1 noch einmal genauer definiert. Im Falle von BU-Versicherungen liegt somit ein **Drei-Zustände-Modell** vor:



14.2 Konkurrierende Risiken

Bei den Risiken „Tod“ und „Invalidität“ handelt es sich um **konkurrierende Risiken**. Die Bezeichnung signalisiert, dass die Risiken in Konkurrenz zueinander stehen, nämlich welches dieser beiden zuerst eintritt und somit das Ausscheiden des Individuums aus dem Hauptkollektiv in eines der Nebenkollektive auslöst. Das Vorhandensein konkurrierender Risiken führt zu Tafeln mit mehreren Ausscheideursachen.

Eine allgemeine Darstellung geht von G Ausscheideursachen aus, welche zur Reduktion des Hauptkollektivs führen. Entsprechend des Vorgehens in Abschn. 5.1 werden stetige Zufallsvariablen $T_x^{(g)}$ ($g = 1, \dots, G$) definiert, welche jeweils die zukünftige Verweildauer im Kollektiv bis zum Eintritt der Ausscheideursache g angeben. Üblicherweise wird vorausgesetzt, dass immer nur eine der Ausscheideursachen zum Verlassen des Kollektiv führt, d.h., zu einem Zeitpunkt kann genau eine Ausscheideursache eintreten und nicht zwei oder mehrere gleichzeitig.

In Anlehnung an die englischsprachige Bezeichnungsweise nennen wir im Folgenden eine (Sterbe-)Tafel mit mehreren Ausscheideursachen **Mehrursachentafel**, während eine (Sterbe-)Tafel, die auf der Betrachtung von nur einer einzigen Ausscheideursache basiert, als **Einursachentafel** bezeichnet wird. Dieser Sprachgebrauch ist zwar unüblich, jedoch für unsere Zwecke nützlich.

14.2.1 Mehrursachentafel

Die Zufallsvariable

$$\tilde{T} := \min \left\{ T_x^{(g)} \mid g = 1, \dots, G \right\}$$

repräsentiert die Verweildauer im Haupt-Kollektiv bis zum Eintritt der ersten Ausscheideursache.

Die nachfolgenden Definitionen für Mehrursachentafeln sind formal identisch mit denjenigen aus Kap. 5 und unterscheiden sich lediglich durch das oberhalb liegende Tilde-Symbol.

Basierend auf der Zufallsvariable \tilde{T} wird die t -jährige Verbleibewahrscheinlichkeit definiert als

$${}_t \tilde{p}_x = P(\tilde{T} > t) = P\left(\bigcap_{g=1}^G \{T_x^{(g)} > t\}\right),$$

welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass (x) mindestens t Jahre lang im Hauptkollektiv verbleibt.

Unter der Voraussetzung, dass die Zufallsvariablen $T_x^{(g)}$ für $g = 1, \dots, G$ stochastisch unabhängig sind, gilt

$${}_t\tilde{p}_x = \prod_{g=1}^G P(T_x^{(g)} > t) .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (x) das Hauptkollektiv innerhalb von t Jahren verlässt (t -jährige Ausscheidewahrscheinlichkeit), ist demnach

$$\begin{aligned} {}_t\tilde{q}_x &= P(\tilde{T} \leq t) \\ &= 1 - {}_t\tilde{p}_x . \end{aligned}$$

Die Anzahl Lebender bzw. Mitglieder des Alters x im Hauptkollektiv sei mit \tilde{l}_x bezeichnet. Dann ist die Anzahl Individuen des Alters x , welche das Hauptkollektiv innerhalb eines Jahres verlassen, gegeben durch

$$\tilde{d}_x = \tilde{l}_x - \tilde{l}_{x+1} .$$

Die Ausscheide- bzw. Verbleibewahrscheinlichkeiten lassen sich in der bekannten Form darstellen als

$$\begin{aligned} {}_t\tilde{q}_x &= \frac{\tilde{d}_x}{\tilde{l}_x} , \\ {}_t\tilde{p}_x &= \frac{\tilde{l}_{x+t}}{\tilde{l}_x} , \\ {}_{s|\tilde{q}_x} &= \frac{\tilde{d}_{x+s}}{\tilde{l}_x} . \end{aligned}$$

Schließlich ist die Ausscheideintensität zum Alter x (für alle Ausscheideursachen gemeinsam) gegeben durch

$$\tilde{\mu}_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\tilde{q}_x}{h} .$$

14.2.2 Zugehörige Einursachentafeln

Jede der verschiedenen Ausscheideursachen kann auch separat, d.h. unter Außerachtlassung der übrigen $G - 1$ Ausscheideursachen, betrachtet werden.

Definiert man die t -jährige Verbleibbewahrscheinlichkeit als

$${}_tp_x^{(g)} = P(T_x^{(g)} > t) ,$$

so repräsentiert diese die Wahrscheinlichkeit, dass (x) nicht aufgrund der Ausscheideursache g innerhalb der nächsten t Jahre aus dem Kollektiv ausscheidet (ganz gleich ob eine der anderen Ausscheideursachen eintritt oder nicht).

Die t -jährige Ausscheidewahrscheinlichkeit – genauer: die Wahrscheinlichkeit dafür, das Hauptkollektiv innerhalb von t Jahren aufgrund der Ursache g zu verlassen – ist dann

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(g)} &= P(T_x^{(g)} \leq t) \\ &= 1 - {}_tp_x^{(g)} . \end{aligned} \tag{14.1}$$

Gemäß des üblichen Vorgehens (vgl. Kap. 5) lassen sich G Einursachentafeln mit der jeweiligen Anzahl Individuen $l_x^{(g)}$ ($g = 1, \dots, G$) konstruieren.

Für $t = 1$ werden die (einjährigen) Wahrscheinlichkeiten $q_x^{(g)}$ als **unabhängige** (auch: **partielle oder absolute**) **Ausscheidewahrscheinlichkeiten** bezeichnet, da sie nur die g -te Ausscheideursache betrachten, unabhängig davon, ob die anderen Ursachen eintreten oder nicht. Im Unterschied dazu werden die nachfolgend definierten Wahrscheinlichkeiten $\tilde{q}_x^{(g)}$ als **abhängige** (auch: **relative**) **Ausscheidewahrscheinlichkeiten** bezeichnet, da sie alle Ausscheideursachen berücksichtigen und darauf abstellen, dass die Ursache g als erste zum Ausscheiden aus dem Kollektiv führt.

In der Praxis sind üblicherweise nur die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten beobachtbar. Entsprechend sind in Sterbe- bzw. Ausscheidetafeln i.d.R. nur die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten tabelliert.

Definiert man für alle $g = 1, \dots, G$

$${}_t\tilde{q}_x^{(g)} := P\left(\left\{T_x^{(g)} \leq t\right\} \cap \bigcap_{u \neq g} \left\{T_x^{(u)} \leq T_x^{(g)}\right\}\right) , \tag{14.2}$$

so gibt dies die Wahrscheinlichkeit an, dass (x) das Kollektiv innerhalb von t Jahren aufgrund der Ursache g verlässt, ohne dass eine der anderen Ursachen bereits vorher eingetreten ist. Eine explizite Definition der entsprechenden Verbleibbewahrscheinlichkeit ${}_t\tilde{p}_x^{(g)}$ ist hingegen nicht ohne weiteres möglich.

14.2.3 Beziehungen zwischen Mehr- und Einursachentafeln

Da die Zufallsvariablen $T_x^{(g)}$ ($g = 1, \dots, G$) als stochastisch unabhängig vorausgesetzt sind, gilt

$${}_t\tilde{p}_x = \prod_{g=1}^G {}_t p_x^{(g)} \quad (14.3)$$

sowie

$${}_t\tilde{q}_x = 1 - {}_t\tilde{p}_x = 1 - \prod_{g=1}^G \left(1 - {}_t q_x^{(g)}\right) .$$

Ausgehend von einem Startalter x_0 der Tafel(n) gilt für die Anzahl Individuen im Hauptkollektiv

$$\frac{\tilde{l}_x}{\tilde{l}_{x_0}} = \prod_{g=1}^G \frac{l_x^{(g)}}{l_{x_0}^{(g)}} ,$$

so dass sich mit der Konstanten $\tilde{K} := \frac{\tilde{l}_{x_0}}{\prod_{g=1}^G l_{x_0}^{(g)}}$ die Beziehung

$$\tilde{l}_x = \tilde{K} \cdot \prod_{g=1}^G l_x^{(g)}$$

ergibt. Durch Wahl von $\tilde{K} = 1$ (was keine Einschränkung darstellt) erhält man die Gleichheit

$$\tilde{l}_x = \prod_{g=1}^G l_x^{(g)} .$$

Während für die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten die multiplikative Beziehung (14.3) gilt, ist für die abhängigen Wahrscheinlichkeiten folgende additive Beziehung gültig:

$${}_t\tilde{q}_x = \sum_{g=1}^G {}_t\tilde{q}_x^{(g)} . \quad (14.4)$$

Für $g = 1, \dots, G$ bezeichne $\tilde{d}_x^{(g)} = \tilde{l}_x \cdot \tilde{q}_x^{(g)}$ die Anzahl Abgänge innerhalb der Mehrursachentafel aufgrund Ausscheideursache g .

Dann gilt für die Gesamtanzahl \tilde{d}_x an Abgängen aus dem Hauptkollektiv

$$\tilde{d}_x = \sum_{g=1}^G \tilde{d}_x^{(g)} .$$

Obwohl sich die unabhängigen und abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten unterscheiden, gilt dies für die zugehörigen Ausfallraten nicht. Man kann zeigen, dass wenn die unabhängigen Ausfallraten $\mu_x^{(g)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig sind, die Gleichheit

$$\tilde{\mu}_x^{(g)} = \mu_x^{(g)}$$

für alle $g = 1, \dots, G$ gilt. Dabei ist die abhängige Ausfallrate $\tilde{\mu}_x^{(g)}$ definiert als

$$\tilde{\mu}_x^{(g)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \tilde{q}_x^{(g)}}{h} .$$

Aus Gleichung (14.4) folgt die Beziehung

$$\tilde{\mu}_x = \sum_{g=1}^G \tilde{\mu}_x^{(g)}$$

und aufgrund der Gleichheit der Ausfallraten ebenfalls

$$\tilde{\mu}_x = \sum_{g=1}^G \mu_x^{(g)} .$$

14.2.4 Gleichverteilung der Abgänge

In Analogie zu Abschn. 5.2.2.1 kann für jede der Einursachentafeln angenommen werden, dass sich die Abgänge gleichmäßig über das Intervall $[x; x+1[$ verteilen. Diese Annahme wird wiederum mit UDD abgekürzt.

Im Fall von $G = 2$ Ausscheideursachen folgen daraus die beiden Beziehungen

$$\tilde{q}_x^{(1)} = q_x^{(1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(2)} \right)$$

sowie

$$\tilde{q}_x^{(2)} = q_x^{(2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(1)} \right)$$

zwischen den abhängigen und unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Der Beweis wird in Übungsaufgabe 69 erbracht.

Auch wenn die Annahme von UDD für die einzelnen Einursachentafeln nicht explizit getroffen wird, so werden die vorstehenden Formeln dennoch als Näherungen verwendet.

14.2.5 Zusammenfassung

Die folgende Tabelle gibt noch einmal eine Übersicht über die Bezeichnungen und Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen:

Größe	Einursachentafel	Mehrursachentafel
Anzahl Individuen	$l_x^{(g)}$	\tilde{l}_x
Ausscheiderate	$\mu_x^{(g)}$	$\tilde{\mu}_x = \sum_{g=1}^G \mu_x^{(g)}$
Verbleibewahrscheinlichkeit	$t p_x^{(g)}$	$t \tilde{p}_x = \prod_{g=1}^G p_x^{(g)}$
Ausscheidewahrscheinlichkeit	$t q_x^{(g)}$	$t \tilde{q}_x = \int_0^t \tilde{p}_x \cdot \tilde{\mu}_{x+s} ds$
Anzahl Abgänge in $[x; x + 1[$	$d_x^{(g)} = l_x^{(g)} \cdot q_x^{(g)}$	$\tilde{d}_x = \tilde{l}_x \cdot \tilde{q}_x$

Im Falle der BU-Versicherung ist $G = 2$ mit den beiden Ausscheideursachen „Tod“ und „Invalidität“. Das Hauptkollektiv entspricht dem Kollektiv der Aktiven. Die Zufallsvariable $T_x^{(1)}$ gibt die Dauer bis zum Eintritt des Todes von (x) an, und $T_x^{(2)}$ repräsentiert die zukünftige Verweildauer im Aktivenkollektiv bis zum Eintritt der Invalidität von (x) . Die Zufallsvariable $\tilde{T} = \min \{T_x^{(1)}; T_x^{(2)}\}$ entspricht dann der zukünftigen Dauer bis zum Ausscheiden aus dem Kollektiv (egal aufgrund welcher der beiden Ausscheideursachen).

14.3 Biometrische Grundlagen

Im Folgenden bezeichnet n die Anspruchsdauer und $t \leq n$ die Prämienzahlungsdauer. Zusätzlich existiert bei der BU-Versicherung eine Leistungsdauer, welche mit l notiert wird. Diese gibt an, über welchen Zeitraum die BU-Leistung gezahlt wird. Dabei kann es vorkommen, dass die Leistungsdauer über die Anspruchsdauer hinausgeht, d.h. $l \geq n$. In diesem Fall spricht man von **verlängerter Leistungsdauer**. Die Karentzeit w wird üblicherweise in Monaten angegeben und nimmt i.d.R. einen der Werte 0, 3, 6, 12, 18, 24, 30 oder 36 (Monate) an.

Die Anspruchsdauer bezeichnet den Zeitraum, in dem ein Anspruch auf die BU-Leistung entstehen kann. Sie ist abzugrenzen vom Begriff der Versicherungsdauer, welche dem Maximum aus Anspruchs- und Leistungsdauer, also $\max\{n; l\}$, entspricht. Folglich stimmen Anspruchs- und Versicherungsdauer nur dann überein, wenn keine verlängerte Leistungsdauer vereinbart ist.

Zusätzlich zum Eintrittsalter bzw. – je nach Kontext – aktuellen Alter x ist auch das Alter bei Eintritt der Invalidität von Bedeutung. Dieses wird mit z notiert. Das Festhalten bzw. Merken dieses Alters ist wichtig, da die Invalidensterblichkeit sowie die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten Selektionseffekten unterliegen (vgl. Abschn. 5.2.4.3).

14.3.1 Ausscheideordnungen

Wie eingangs beschrieben, gliedert sich das Kollektiv der Lebenden in die beiden Teilkollektive der Aktiven und Invaliden. Deren Entwicklung wird mittels der folgenden Wahrscheinlichkeiten fortgeschrieben:

- q_x^{aa} ist die einjährige Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x -jähriger Aktiver im Intervall $[x; x + 1[$ als Aktiver stirbt.
- i_x ist die einjährige Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x -jähriger Aktiver zwischen den Altern x und $x + 1$ berufsunfähig (Invalid) wird.
- $q_{z,x}^i$ ist die einjährige Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x -jähriger Invalid, der mit Alter $z \leq x$ berufsunfähig geworden ist, im Intervall $[x; x + 1[$ als Invalid stirbt.
- $r_{z,x}$ ist die einjährige Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x -jähriger Invalid, der mit Alter $z \leq x$ berufsunfähig geworden ist, zwischen den Altern x und $x + 1$ reaktiviert wird.

Hinweis: Aufgrund des Selektionseffekts sind die Wahrscheinlichkeiten (und auch die resultierenden Kommutationszahlen) für Invaliden zweidimensional, da sie von z und x abhängen.

Es gilt

$$l_x = l_x^{aa} + l_x^i .$$

Je nachdem, ob ein multiplikativer Ansatz (vgl. Abschn. 5.3.3) unterstellt wird oder nicht, entwickelt sich das Kollektiv der Aktiven wie folgt:

$$l_{x+1}^{aa} = \begin{cases} l_x^{aa} \cdot (1 - q_x^{aa}) \cdot (1 - i_x) & \text{falls multiplikativer Ansatz ,} \\ l_x^{aa} \cdot (1 - q_x^{aa} - i_x) & \text{sonst .} \end{cases}$$

Der Unterschied zwischen den beiden Ansätzen besteht in dem Term $q_x^{aa} \cdot i_x$ und ist somit i.d.R. äußerst gering. Zur Erinnerung: Der mutliplikative Ansatz entspricht inhaltlich der Verwendung unabhängiger, der additive Ansatz basiert auf der Verwendung von abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Ausgehend vom Startwert $l_{z,z}^i = 100.000$ wird das Invalidenkollektiv fortgeschrieben als

$$l_{z,x+1}^i = \begin{cases} l_{z,x}^i \cdot (1 - q_{z,x}^i) \cdot (1 - r_{z,x}) & \text{falls multiplikativer Ansatz ,} \\ l_{z,x}^i \cdot (1 - q_{z,x}^i - r_{z,x}) & \text{sonst .} \end{cases}$$

Bei den Wahrscheinlichkeiten $q_{z,x}^i$ und $r_{z,x}$ handelt es sich um selektive Sterbe- bzw. Reaktivierungswahrscheinlichkeiten. Mit der Invalidisierung zum Alter z findet eine Selektion statt, welche nach einer Selektionsperiode von b Jahren in ultimative Wahrscheinlichkeiten übergeht. So ist die Sterblichkeit in den ersten Jahren der Berufsunfähigkeit deutlich erhöht. Gleichzeitig nimmt die Chance einer Reaktivierung mit fortbestehender Invalidität ab.

Im Rahmen der in Abschn. 5.2.4.3 vorgestellten Notation $q_{[x-t]+t}$ mit $0 \leq t < b$ für selektive Wahrscheinlichkeiten und q_x mit $t \geq b$ für ultimative Wahrscheinlichkeiten bezeichnet t den Zeitraum seit der Selektion. Dies entspricht hier der Differenz $x - z$, so dass zwischen den Wahrscheinlichkeiten dieses Abschnitts und jenen des Abschn. 5.2.4.3 die Beziehung

$$q_{z,x} = q_{[x-(x-z)]+x-z} = q_{[z]+x-z}$$

besteht.

Die Summe aller Invaliden (des Alters x) ergibt sich als

$$l_x^i = \sum_{z \leq x} l_{z,x}^i .$$

Im Zusammenhang mit BU-Versicherungen unterstellt man eine Selektionsdauer von $b = 5$ Jahren. Als Standard werden derzeit die folgenden Tafeln für die verschiedenen Ausscheideordnungen verwendet:

- DAV 1997 I : Aggregattafel für die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten der Aktiven;
- DAV 1997 T I : Selektionstafel für die Sterbewahrscheinlichkeiten der Invaliden;
- DAV 1997 R I : Selektionstafel für die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten der Invaliden.

Die aufgeführten Tafeln sind im Anhang A getrennt für Männer und Frauen tabelliert.

Für die Aktivensterblichkeit wird aktuell die Sterbetafel DAV 2008 T verwendet (siehe Abschn. 5.2.5).

Zu den Invalidisierungswahrscheinlichkeiten ist anzumerken, dass diese spätestens ab Alter 60 stark ansteigen, so dass eine Absicherung des BU-Risikos in diesem Bereich relativ „teuer“ ist.

14.3.2 Kommutationszahlen

Aus den Tafelfunktion l_x^{aa} und $l_{z,x}^i$ lassen sich in gewohnter Weise Kommutationszahlen bilden. So erhält man als Kommutationszahlen 1. Ordnung die Größen

$$D_x^{aa} = l_x^{aa} \cdot v^x \quad \text{und} \quad D_{z,x}^i = l_{z,x}^i \cdot v^x$$

sowie als Kommutationszahlen 2. Ordnung die Funktionen

$$N_x^{aa} = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j}^{aa} \quad \text{und} \quad N_{z,x}^i = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{z,x+j}^i .$$

14.4 Erwartete Barwerte

14.4.1 Prämienbarwert

Da die Prämienzahlung nur solange erfolgt, wie die VP zu den Aktiven zählt, berechnet sich der Prämienbarwert gemäß der Formel

$$\ddot{a}_{x:t}^{aa} = \frac{N_x^{aa} - N_{x+t}^{aa}}{D_x^{aa}} .$$

14.4.2 Leistungsbarwerte ohne Karenzzeit

Der Barwert für die maximal l Jahre zu zahlende BU-Leistung wird in mehreren Schritten zusammengesetzt.

- Als erstes betrachtet man den Leistungsbarwert nach Eintritt der BU. Dieser ergibt sich als

$$\ddot{a}_{z,x:l}^i = \frac{N_{z,x}^i - N_{z,x+l}^i}{D_{z,x}^i} .$$

Im Falle unterjähriger Leistungszahlung erfolgt wie üblich die Korrektur bzw. Näherung

$$\ddot{a}_{z,x:l}^{i(k)} \approx \ddot{a}_{z,x:l}^i - \frac{k-1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{D_{z,x+l}^i}{D_{z,x}^i} \right) .$$

- Zur Berechnung des anwartschaftlichen Leistungsbarwertes werden zusätzliche Kommutationszahlen definiert. Zunächst ist

$$D_{x,l}^{ai} = l_x^{aa} \cdot v^{x+\frac{1}{2}} \cdot i_x \cdot \left(1 - \frac{q_x^{aa}}{2} \right) \cdot \max \left\{ 0; \ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}:l-\frac{1}{2}}^{i(k)} - \frac{1}{2k} \right\} ,$$

und die Summation der $D_{x,l}^{ai}$ führt in gewohnter Weise zu

$$N_{x,l}^{ai} = \sum_{j=0}^{\min\{\omega-x;l-1\}} D_{x+j,l-j}^{ai} .$$

Die Zusammensetzung der Größe $D_{x,l}^{ai}$ lässt sich auf folgende Weise erklären: Wesentlich ist die Annahme, dass der Eintritt der Berufsunfähigkeit zur Jahresmitte erfolgt. Daher wird die Anzahl l_x^{aa} lebender Aktiver zum Jahresbeginn mit dem Faktor $1 - \frac{q_x^{aa}}{2}$ multipliziert, wodurch gewährleistet wird, dass die Aktiven bis zur Jahresmitte überleben. Die anschließende Multiplikation mit der Invalidisierungswahrscheinlichkeit i_x liefert die Anzahl neuer BU-Fälle in diesem Jahr. Zum Zeitpunkt des BU-Eintritts ist die VP bereits $x + \frac{1}{2}$ Jahre alt, so dass als Barwert für die Invalidenleistung die Größe $\ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}:l-\frac{1}{2}}^{i(k)}$ angesetzt wird. Diese wiederum ergibt sich als arithmetisches Mittel der beiden benachbarten ganzjährigen Barwerte, d.h.

$$\ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}:l-\frac{1}{2}}^{i(k)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\ddot{a}_{x,x:l}^{i(k)} + \ddot{a}_{x+1,x+1:l-1}^{i(k)} \right) .$$

Die Multiplikation mit dem Faktor $v^{x+\frac{1}{2}}$ bewirkt eine Diskontierung auf den Zeitpunkt Null.

- Der Barwert der Anwartschaft auf eine unterjährig zahlbare BU-Leistung der Jahreshöhe 1 ist dann

$$\ddot{a}_{x:n,l}^{ai} = \frac{N_{x,l}^{ai} - N_{x+n,l-n}^{ai}}{D_x^{aa}} .$$

14.4.3 Leistungsbarwerte mit Karenzzeit

Die Karenzzeit ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Wartezeit. Zwischen den beiden Begrifflichkeiten besteht ein grundlegender Unterschied:

- Die **Wartezeit** gibt denjenigen Zeitraum ab Vertragsbeginn an, innerhalb dessen kein Anspruch auf Invaliditätsleistungen besteht. D.h., wird die VP innerhalb dieses Zeitraums ab Vertragsbeginn invalide, so ist sie erst nach Ablauf der Wartezeit anspruchsberechtigt.
- Im Gegensatz dazu bezeichnet **Karenzzeit** einen Zeitraum, der mit dem Eintritt der Invalidität beginnt. Erst wenn die Invalidität während der ganzen Karenzzeit ununterbrochen bestanden hat, wird die BU-Leistung nach Ablauf dieses Zeitraums fällig.

Sofern eine Karenzzeit von w Monaten vereinbart ist, wird die Darstellung aufwändiger. In den nachfolgenden Formeln findet eine Unterscheidung danach statt, ob die Karenzzeit w ein Vielfaches von 12 (Monaten) beträgt oder ob es sich um eine gebrochene Anzahl von Jahren handelt. Diese Unterscheidung wird durch Verwendung der Restklassen-Funktion mod erreicht, indem entweder $w \bmod 12 = 0$ oder $w \bmod 12 = rw > 0$ ist. Für nicht-ganzjährige Karenzzeiten erfolgt eine lineare Interpolation zwischen den beiden zugehörigen benachbarten Größen mit ganzjähriger Karenzzeit.

- Die Kommutationszahlen für Invalide ändern sich zu

$$D_{z,x+\frac{w}{12}}^i = \begin{cases} l_{z,x+\frac{w}{12}}^i \cdot v^{x+\frac{w}{12}} & \text{falls } w \bmod 12 = 0 , \\ \frac{12 - rw}{12} \cdot D_{z,x+\frac{w-rw}{12}}^i + \frac{rw}{12} \cdot D_{z,x+\frac{w+12-rw}{12}}^i & \text{falls } w \bmod 12 = rw , \end{cases}$$

sowie

$$N_{z,x+\frac{w}{12}}^i = \sum_{j=0}^{\omega-x-\frac{w}{12}} D_{z,x+\frac{w}{12}+j}^i .$$

Bspw. ergibt sich bei einer Karenzzeit von $w = 18$ Monaten ein Rest von $rw = 6$, so dass in diesem Fall

$$D_{z,x+\frac{w}{12}}^i = \frac{D_{z,x+1}^i + D_{z,x+2}^i}{2} .$$

- Der Barwert für die fällige BU-Leistung entspricht demjenigen einer um w Monate aufgeschobenen BU-Rentenleistung und ist somit

$${}_{w|\ddot{a}_{z,x:l}^i} = \begin{cases} \frac{N_{z,x+\frac{w}{12}}^i - N_{z,x+l}^i}{D_{z,x}^i} & \text{falls } w \bmod 12 = 0 , \\ \frac{12 - rw}{12} \cdot {}_{w-rw|\ddot{a}_{z,x:l}^i} + \frac{rw}{12} \cdot {}_{w+12-rw|\ddot{a}_{z,x:l}^i} & \text{falls } w \bmod 12 = rw . \end{cases}$$

Bei unterjähriger Leistungszahlung wird approximiert, indem

$${}_{w|\ddot{a}_{z,x:l}^i}^{(k)} \approx {}_{w|\ddot{a}_{z,x:l}^i} - \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{D_{z,x+\frac{w}{12}}^i}{D_{z,x}^i} \cdot \left(1 - \frac{D_{z,x+l}^i}{D_{z,x+\frac{w}{12}}^i} \right) .$$

- Der Barwert der Anwartschaft basiert nun auf der Größe

$$D_{x,l,w}^{ai} = l_x^{aa} \cdot v^{x+\frac{1}{2}} \cdot i_x \cdot \left(1 - \frac{q_x^{aa}}{2} \right) \cdot \max \left\{ 0; {}_{w|\ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}:l-\frac{1}{2}}^i}^{(k)} - \frac{1}{2k} \right\} ,$$

wobei wiederum die Mittelung

$${}_{w|\ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}:l-\frac{1}{2}}^i}^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \left({}_{w|\ddot{a}_{x,x:l}^i}^{(k)} + {}_{w|\ddot{a}_{x+1,x+1:l-1}^i}^{(k)} \right)$$

angewendet wird.

- Mit der zugehörigen Kommutationszahl 2. Ordnung

$$N_{x,l,w}^{ai} = \sum_{j=0}^{\min\{\omega-x;l-1\}} D_{x+j,l-j,w}^{ai}$$

erhält man schließlich den Anwartschaftsbarwert

$$\ddot{a}_{x:n,l,w}^{ai} = \frac{N_{x,l,w}^{ai} - N_{x+n,l-n,w}^{ai}}{D_x^{aa}} .$$

Beträgt die Karenzzeit $w = 0$, ergeben sich selbstverständlich die Formeln des vorangegangenen Abschnitts.

14.4.4 Rekursive Berechnung

Analog zur Rekursionsformel

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + 1$$

bzw. bei unterjähriger Zahlweise

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(k)} = \left(\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}}^{(k)} + \frac{k-1}{2k} \right) \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \left(1 - \frac{k-1}{2k} \right)$$

für den Barwert einer auf n Jahre abgekürzten Leibrente (vgl. Übungsaufgabe 35) existiert auch für den Invalidenrentenbarwert $\ddot{a}_{z,x:\overline{l}}^i$ eine rekursive Darstellung.

Diese lautet

$$\ddot{a}_{z,x:\overline{l}}^i = \ddot{a}_{z,x+1:\overline{l-1}}^i \cdot \frac{l_{z,x+1}^i}{l_{z,x}^i} \cdot v + 1$$

bzw. bei $\frac{1}{k}$ -tel jährlicher Zahlung der BU-Leistung

$$\ddot{a}_{z,x:\overline{l}}^{i(k)} = \left(\ddot{a}_{z,x+1:\overline{l-1}}^{i(k)} + \frac{k-1}{2k} \right) \cdot \frac{l_{z,x+1}^i}{l_{z,x}^i} \cdot v + \left(1 - \frac{k-1}{2k} \right).$$

Sofern eine garantierte Steigerung der BU-Rente mit Steigerungssatz r ver einbart ist, ergibt sich als Rekursionsformel

$$\tilde{i}\ddot{a}_{z,x:\overline{l}}^{i(k)} = \left(\tilde{i}\ddot{a}_{z,x+1:\overline{l-1}}^{i(k)} + \frac{k-1}{2k} \right) \cdot \frac{l_{z,x+1}^i}{l_{z,x}^i} \cdot \tilde{v} + \left(1 - \frac{k-1}{2k} \right)$$

mit dem neuen Zinssatz $\tilde{i} := \frac{i-r}{1+r}$, und es gilt die bekannte Näherung

$$\tilde{i}\ddot{a}_{z,x:\overline{l}}^{i(k)} \approx \tilde{i}\ddot{a}_{z,x:\overline{l}}^i - \frac{k-1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{D_{z,x+l}^i}{D_{z,x}^i} \right).$$

14.5 Kosten und Zuschläge

Hinsichtlich des Kostenmodells unterscheidet sich die BUV nicht von den bisher kennengelernten konventionellen Produkttypen. Jedoch weisen BU-Versicherungen die Besonderheit auf, dass die versicherten Risiken (= VP) häufig in Berufsgruppen eingeteilt werden. Außerdem findet i.d.R. eine Tren-

nung danach statt, ob die BUV eine Zusatzversicherung oder eine selbstständige Versicherung ist.

14.5.1 Kostenmodell

Es wird das folgende Kostenmodell unterstellt (vgl. Abschn. 8.2.1):

- $\alpha = \alpha^z$ in Prozent der auf die ersten t_α Jahre begrenzten Summe der Bruttoprämien, zahlbar unmittelbar zu Vertragsbeginn;
- α^γ in Prozent der garantierten jährlichen BU-Rente, zahlbar in jedem Jahr der Prämienzahlungsdauer;
- β in Prozent der Bruttoprämie, zahlbar in jedem Jahr der Prämienzahlungsdauer;
- γ_1 in Prozent der garantierten jährlichen BU-Rente, zahlbar in jedem Jahr der Prämienzahlungsdauer;
- γ_2 in Prozent der garantierten jährlichen BU-Rente, zahlbar in jedem Jahr nach plannmäßigem Ablauf der Prämienzahlungsdauer;
- γ_3 in Prozent der garantierten jährlichen BU-Rente, zahlbar in jedem Jahr nach vorzeitiger Beitragsfreistellung;
- γ_4 in Prozent der garantierten jährlichen BU-Rente, zahlbar in jedem Jahr der Leistungsdauer;
- ε in absoluter Höhe;
- Risikozuschlag σ in Prozent der Bruttoprämie;
- Ratenzuschlag $\rho = \rho(k)$ in Prozent der Bruttojahresprämie.

14.5.2 Berufsgruppenzuschläge

Die Unterscheidung von Berufsgruppen findet seit ungefähr Mitte der 1990er-Jahre statt. Waren es lange Zeit nur einige wenige, häufig drei oder vier Berufsgruppen, so ist die Aufteilung heutzutage feiner. Aktuell wird vielfach zwischen sieben oder noch mehr Berufsgruppen unterschieden. Gängig sind Einteilungen wie z.B. „1+, 1, 2+, 2, 3+, 3 und 4“ o.ä..

Die Differenzierung nach Berufsgruppen basiert auf der Erfahrung, dass Ausübende gewisser Berufe entweder ein niedrigeres oder aber ein deutlich erhöhtes Invalidisierungsrisiko als der Durchschnitt aller Versicherten aufweisen. So sind Büroangestellte deutlich weniger gefährdet als bspw. Personen, die im Baugewerbe tätig sind und schwere körperliche Arbeiten ausführen. Allerdings ist zu beachten, dass sich Gründe für den Eintritt von BU verschoben haben. Waren früher eher körperliche Beschwerden Auslöser für Invalidität, so begünstigen inzwischen eher psychische Belastungen das Eintreten von BU.

Die in der Vergangenheit beobachteten Unterschiede hinsichtlich Invalidisierung und Reaktivierung bei einzelnen Berufen führen zur Zusammenfassung in Berufsgruppen, deren zugehörige Berufe eine möglichst homogene Invalidisierungsrate aufweisen. Die Unterschiede zwischen den so gebildeten Risiko-clustern werden im Rahmen der Kalkulation durch **Berufsgruppenzuschläge** berücksichtigt. Diese Zuschläge werden i.d.R. multiplikativ angewendet und können entweder unmittelbar auf die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten oder alternativ auf den Leistungsbarwert wirken. Dabei ist zu beachten, dass diese beiden Vorgehensweisen nicht äquivalent zueinander sind, da der Leistungsbarwert nicht linear in den Invalidisierungswahrscheinlichkeiten ist.

Die Anzahl verschiedener Berufsgruppen wird im Folgenden mit BG bezeichnet. Der Berufsgruppenzuschlag für die Berufsgruppen $bg = 1, \dots, BG$ wird mit $\psi = \psi(bg)$ notiert und wirkt multiplikativ auf den Leistungsbarwert.

14.5.3 Versicherungsart

Die Tatsache, um welche Art von BU-Versicherung es sich handelt, wirkt sich ebenfalls auf die Prämie aus. In der Praxis wird nach Zusatzversicherung (kurz: **BUZ** oder **EUZ**) und selbstständiger BU-(Haupt)Versicherung (kurz: **SBU** oder **SEU**) bzw. nach normalem und erhöhtem Risiko unterschieden.

Eine SBU wird immer als erhöhtes Risiko angesehen, da die subjektive Neigung, berufsunfähig zu werden, höher ist. Die Beitragsbefreiung im Rahmen einer BUZ stellt hingegen immer ein normales Risiko dar. Ob die zu einer BUZ eingeschlossene Barrente als normales oder erhöhtes Risiko eingestuft wird, hängt von der Höhe der vereinbarten Invalidenrente ab. Übersteigt die BU-Rente einen gewissen Prozentsatz (bspw. 24%) der Beitragsbefreiungsleistung, so wird sie als erhöhtes, andernfalls als normales Risiko betrachtet. Ein erhöhtes Risiko in der beschriebenen Art wird durch Verwendung abweichender (höherer) Invalidisierungswahrscheinlichkeiten berücksichtigt oder durch einen prozentualen Aufschlag i.H.v. ζ auf diejenige Invalidisierungstafel, welche bei normalen Risiken zum Einsatz kommt.

14.5.4 Übersicht

Abschließend werden in gewohnter Weise die beschriebenen Kostenarten und Zuschläge, die verwendete Notation sowie die betreffenden Bezugsgrößen noch einmal tabellarisch zusammengefasst:

Kosten-/Zuschlagsart	Kostensatz (Notation)	Bezugsgröße
Abschlusskosten – Einmalig – Amortisationskosten	α , α^z α^γ	Summe der Bruttoprämien versicherte Leistung
Laufende Verwaltungskosten – Inkassokosten – beitragspflichtig (bpfl) – tariflich beitragsfrei (bfr) – vorzeitig beitragsfrei (vbfr) – in Leistung (leist)	β γ_1 γ_2 γ_3 γ_4	Brutto(jahres)prämie versicherte Leistung versicherte Leistung versicherte Leistung versicherte Leistung
Ratenzuschlag	$\rho = \rho(k)$	Bruttojahresprämie
Stückkosten	ε	—
Risikozuschlag	σ	Brutto(jahres)prämie
Berufsgruppenzuschlag	$\psi = \psi(bg)$	Leistungsbarwert
Zuschlag für erhöhtes Risiko	ζ	Invalidisierungstafel

14.5.5 Sonstiges

Nicht nur dort, aber insbesondere im Kontext der BU-Versicherung ist häufig von objektivem und subjektivem Risiko die Rede.

Objektive Risiken sind Risikomerkmale, die unmittelbar gemessen und erfasst werden können und die von der VP nicht beeinflusst werden können. Dazu zählen bspw. das Alter, der ausgeübte Beruf, der aktuelle Gesundheitszustand, der Raucher-Status sowie praktizierte Sportarten.

Subjektive Risiken sind hingegen solche Risikomerkmale, die durch das Verhalten oder die mentale Einstellung der VP gesteuert werden können und auf diese Weise einen Einfluss auf den Risikoverlauf haben können. Wenn bspw. die beantragte BU-Rente hoch erscheint (etwa im Vergleich zum regulären Nettoeinkommen der VP), kann dies ein Indiz für ein subjektives Risiko, man sagt auch moralisches Risiko, sein.

Moralisches Risiko bzw. **Moral Hazard** bedeutet, dass die VP aufgrund des – in diesem Fall finanziellen – (Fehl)Anreizes versucht sein könnte, die Inanspruchnahme der hohen Rente durch unbedachtes Verhalten herbeizuführen. Da sich die VP nach Vertragsabschluss der Rentenzahlung sicher wäre, könnte sie bewusst leichtsinnig agieren und somit das Risiko eines BU-Eintritts deutlich erhöhen.

Während objektive Risiken gut kalkuliert werden können (u.a. durch Einordnung in eine bestimmte Berufsgruppe), sind subjektive Risiken oft nur schwer einschätzbar bzw. kaum berechenbar. Letzteren wird entweder durch entsprechende Prämienzuschläge oder durch anderweitige restriktive Regelungen (z.B. Beschränkung der Höhe der versicherbaren BU-Rente) begegnet.

14.6 Prämien

Entsprechend der Ausführungen in Abschn. 8.2 werden auch bei der BUV diverse Prämiengrößen für eine versicherte Invalidenleistung der Jahreshöhe 1 unterschieden.

Bei einer Anspruchsdauer von n Jahren, einer Prämienzahlungsdauer von t Jahren, einer Leistungsdauer von l Jahren und einer Karenzzeit von w Monaten entspricht die Nettoeinmalprämie

$$NEP_{x:\overline{n},l,w]} = \ddot{a}_{x:\overline{n},l,w]}^{ai}$$

und die Nettojahresprämie

$$NP_{x:\overline{t},l,w]} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n},l,w]}^{ai}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa}} .$$

Der Ansatz

$$\begin{aligned} BEP_{x:\overline{n},l,w]} &= (1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x:\overline{n},l,w]} \\ &\quad + \alpha \cdot BEP_{x:\overline{n},l,w]} + \beta \cdot BEP_{x:\overline{n},l,w]} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aa} , \end{aligned}$$

liefert die Bruttoeinmalprämie

$$BEP_{x:\overline{n},l,w]} = \frac{(1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x:\overline{n},l,w]} + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aa}}{1 - \beta - \alpha} .$$

Die Bruttojahresprämie bestimmt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned} BP_{x:\overline{t},l,w} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} &= (1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NP_{x:\overline{t},l,w} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} \\ &\quad + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aa} - \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa}) \\ &\quad + \beta \cdot BP_{x:\overline{t},l,w} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} + \alpha \cdot t_\alpha \cdot BP_{x:\overline{t},l,w}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} BP_{x:\overline{t},l,w} &= \frac{(1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NP_{x:\overline{t},l,w} + \alpha^\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 \cdot \left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aa}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa}} - 1 \right)}{1 - \beta - \frac{\alpha \cdot t_\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa}}} \\ &= \frac{(1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x:\overline{n},l,w} + (\alpha^\gamma + \gamma_1) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x:\overline{n}}^{aa} - \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa})}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} - \alpha \cdot t_\alpha}. \end{aligned}$$

Schließlich lautet die Zahlprämie (vor Berücksichtigung einer evtl. Reduktion durch Überschussbeteiligung)

$$ZP_{x:\overline{t},l,w}^{(k)} = BP_{x:\overline{t},l,w} \cdot (1 + \sigma) \cdot (1 + \rho(k)) + \varepsilon.$$

Es sei erwähnt, dass BU-Versicherungen gegen Einmalprämie in der Praxis zwar nicht ausgeschlossen, aber eher unüblich sind (sofern die Anspruchsdauer der BUV länger als ein Jahr ist).

Verarbeitet sind hingegen sog. Einsteiger- oder Starter-Tarife, deren Prämien – ausgehend von einem anfänglich abgesenkten Beitragsniveau – innerhalb der ersten fünf bis zehn Jahre nach einem festgelegten Schema stufenweise auf die für die verbleibende Prämienzahlungsdauer gültige Höhe ansteigen (vgl. Abschn. 8.3.2).

14.7 Reserven

14.7.1 Deckungskapital

Das (Brutto-)Deckungskapital (einschließlich Verwaltungskostenrückstellung) nach m Versicherungsjahren für die jährliche BU-Leistung 1 wird analog zu den Ausführungen in Kap. 9 berechnet.

Die Besonderheit bei der BU-Versicherung ist jedoch, dass der Übergang von der anwartschaftlichen in die leistungspflichtige Phase nicht stetig bzw. vorausschaubar (wie bei einer aufgeschobenen Rentenversicherung) erfolgt, sondern plötzlich bzw. zufällig.

Entsprechend weist der Deckungskapitalverlauf im Falle des BU-Eintritts eine Unstetigkeit auf. Das Deckungskapital macht einen deutlichen Sprung nach oben, da in diesem Moment die Reserve für die ausgelöste Invalidenleistung gestellt werden muss.

Das Deckungskapital einer anwartschaftlichen BUV ist nicht sehr hoch und verläuft – je nach Vertragskonstellation – phasenweise sogar im negativen Bereich. Letzteres kann insbesondere gegen Ende der Anspruchsdauer auftreten, falls die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten in diesem Zeitraum stark ansteigen.

Im Verlauf einer BU-Versicherung sind daher folgende Zeitpunkte bzw. Phasen zu unterscheiden:

- während der Anwartschaft:

- beitragspflichtig

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{ai} &= (1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x+m:\overline{n-m, l-m, w}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot (\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}^{aa} - \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}^{aa}) \\ &\quad - NP_{x:\overline{t, l, w}}^z \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}^{aa} \end{aligned}$$

- planmäßig beitragsfrei

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{ai} &= (1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x+m:\overline{n-m, l-m, w}} \\ &\quad + \gamma_2 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}^{aa} \end{aligned}$$

- unplanmäßig beitragsfrei

$$\begin{aligned} {}_m V_x^{ai} &= (1 + \psi(bg)) \cdot (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x+m:\overline{n-m, l-m, w}} \\ &\quad + \gamma_3 \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}}^{aa} \end{aligned}$$

- während des Leistungsbezugs:

- innerhalb der Karenzzeit

$${}_m V_{z,x}^i = (1 + \gamma_4) \cdot {}_{w-m_z}|\ddot{a}_{z,x+m:\overline{l-m}}^{i(k)}$$

wobei $m_z \leq w$ die Anzahl Monate seit Eintritt der BU angibt

- nach Ablauf der Karenzzeit

$${}_m V_{z,x}^i = (1 + \gamma_4) \cdot \ddot{a}_{z,x+m:\overline{l-m}}^{i(k)}$$

14.7.2 Bilanzdeckungsrückstellung

Die Bilanzdeckungsrückstellung ergibt sich aus dem Deckungskapital wiederum durch Maximierung mit Null und einem evtl. vorhandenen Rückkaufswert für die garantierte Leistung (siehe Abschn. 9.3), so dass

$${}_m V'_x := \max \{0; {}_m V_x\} ,$$

$${}_m V''_x := \max \{RKW_m^{\text{gar}}; {}_m V'_x\}$$

und

$${}_m V_x^{\text{Bilanz}} := \frac{h-1}{12} \cdot {}_{m-1} V''_x + \frac{13-h}{12} \cdot {}_m V''_x .$$

Dabei entspricht $h \in \{1; 2; \dots; 12\}$ wieder dem Monat des Versicherungsstichtags.

14.7.3 Zusätzliche Reserven

Auch bei BU-Versicherungen entsteht die Notwendigkeit von Nachreservierungen. Die Ermittlung eines Auffüllkapitals aufgrund Biometrie (Rentennachreservierung RNR) oder eines Auffüllkapitals aufgrund Zins (Zinszusatzreserve ZZR) erfolgt analog zu dem in Abschn. 9.4.1 bzw. in Abschn. 9.4.2 beschriebenen Vorgehen.

Die Auffüllbedarfe $AK_m^{\text{Biometrie}}$ und AK_m^{Zins} fließen als zusätzliche Reserven in die Bilanzdeckungsrückstellung des einzelnen Vertrags ein.

14.8 Überschussbeteiligung

Für die Überschussbeteiligung bei BU-Versicherungen gelten grundsätzlich die Ausführungen aus Kap. 10. Dennoch sind ein paar Ergänzungen notwendig.

14.8.1 Überschussentstehung

Je nach Vertragszustand der BUV, d.h. anwartschaftlich oder leistungspflichtig, entstehen die Überschüsse aus unterschiedlichen Quellen.

Während der Anwartschaft entstehen vorrangig Risiko- und Kostenüberschüsse, jedoch kaum Zinsüberschüsse, da das Deckungskapital einer anwartschaftlichen BUV vergleichsweise gering ist. Anders sieht es während der Leistungsphase aus: Hier dient das sprunghaft gestiegene Deckungskapital als Zinsträger und generiert folglich Zinsüberschüsse; Risiko- und Kostenüberschüsse hingegen verlieren an Bedeutung.

14.8.2 Überschussverwendung

In welcher Form die Überschüsse verwendet werden, hängt von mehreren Faktoren ab. Zum einen unterscheidet man wiederum die anwartschaftliche Phase von der Leistungsphase. Ausschlaggebend ist auch, ob es sich bei der BU-Versicherung um eine SBU oder um eine BUZ handelt. Darüber hinaus ist relevant, ob im Rahmen der BUZ nur eine Beitragsbefreiung (kurz: BUZ-B) der zugehörigen Hauptversicherung oder zusätzlich eine BU-Barrente (kurz: BUZ-R) versichert ist.

Die laufende Überschussbeteiligung wird sehr oft als Sofortrabatt gewährt und reduziert dadurch unmittelbar die vom Kunden zu zahlende Prämie. Diese Form der Überschussverwendung existiert nur während der Anwartschaft, und selbstverständlich nur in der beitragspflichtigen Zeit. Nachteilig ist, dass der Versicherer einen konstanten Überschussanteilsatz deklariert, der von Beginn der Versicherung an angesetzt wird, aber die tatsächlichen Risiko- oder Kostengewinne i.d.R. erst im späteren Verlauf der BUV entstehen. Dadurch tritt das VU in Vorleistung, und die frühzeitig gutgeschriebenen Überschüsse können im Falle einer Vertragskündigung nicht mehr zurückgefordert werden.

Sowohl während der anwartschaftlichen als auch während der leistungspflichtigen Phase können die laufenden Überschussanteile alternativ verzinslich angezahlt oder in Fonds angelegt werden. In diesen Fällen wird das Überschussguthaben entweder bei Vertragsablauf ausgezahlt, oder die während der Anwartschaft gutgeschriebenen Überschussanteile werden bei Eintritt des Leistungsfalls zur Bildung einer zusätzlichen Bonus-Invalidenrente herangezogen.

Bei BU-Zusatzversicherungen ist es – insbesondere dann, wenn nur eine Beitragsbefreiung versichert wird – nicht unüblich, dass die anfallenden Überschussanteile zur Erhöhung der Überschussbeteiligung in der zugehörigen Hauptversicherung verwendet werden. In diesem Fall kommen sie im Rahmen der eigentlichen BUZ nicht zum Tragen.

BU-Versicherungen können selbstverständlich auch eine Schlussüberschussbeteiligung sowie eine Beteiligung an den BWR erhalten. Die Schlussüberschussbeteiligung wird entweder bei Ablauf der Versicherung ausgezahlt, oder die angesammelten Schlussgewinnanteile werden bei Eintritt des Leistungsfalls zur Erhöhung der Invalidenrente verwendet. Eine Beteiligung an den BWR entsteht üblicherweise erst während einer Leistungsphase (aufgrund des in diesem Zeitraum höheren Deckungskapitals). Sofern ein BU-Vertrag während der gesamten Laufzeit anwartschaftlich geblieben ist, wird i.d.R. keine Beteiligung an den BWR gewährt.

Zusammengefasst werden die laufenden Überschussanteile im Rahmen einer BUV üblicherweise wie folgt verwendet:

	Anwartschaftsphase	Leistungsphase
SBU	Sofortrabatt Verzinsl. Ansammlung Fondsanlage	Bonusrente Verzinsl. Ansammlung Fondsanlage
BUZ	Verzinsl. Ansammlung Fondsanlage Erhöhung der ÜB in HV [†]	Verzinsl. Ansammlung Fondsanlage Erhöhung der ÜB in HV [†]
– nur BUZ-B	Sofortrabatt Verzinsl. Ansammlung Fondsanlage	Bonusrente Verzinsl. Ansammlung Fondsanlage
– und BUZ-R		

([†] Erhöhung der laufenden Überschussbeteiligung in der Hauptversicherung)

14.9 Vertragsänderungen und Garantiewerte

14.9.1 Vertragsänderungen

Für Vertragsänderungen gelten die Ausführungen aus den Abschn. 11.1, 11.2 sowie 11.3.

14.9.2 Rückkauf

Ein Rückkaufswert für die garantierte Leistung wird bei BU-Versicherungen üblicherweise nicht gewährt. Im Falle der Kündigung werden Guthaben aus laufender und Schlussüberschussbeteiligung ausgeschüttet sowie u.U. eine Beteiligung an den BWR.

14.9.3 Leistung bei Tod

Bei Tod wird keine Versicherungsleistung fällig. Es werden lediglich ein evtl. vorhandenes Überschussguthaben sowie eine Schlussüberschussbeteiligung und Beteiligung an den BWR ausgezahlt.

14.9.4 Leistung bei Ablauf

Eine garantierte Ablaufleistung existiert bei BU-Versicherungen nicht. Am Ende der Versicherungsdauer werden vorhandene Überschussguthaben, eine Zahlung aus der Schlussüberschussbeteiligung und ggf. eine Beteiligung an den BWR fällig.

14.9.5 Leistung bei Invalidität

Bei Eintritt des Leistungsfalls wird die versicherte Invalidenrente in Form einer Befreiungs- und/oder Barrente fällig.

Am Markt sind BU-Tarife zu finden, welche bei Eintritt der Invalidität die Möglichkeit vorsehen, dass der VN keine Barrente, sondern stattdessen das zur Barrente gestellte Deckungskapital als einmalige Abfindungsleistung ausgezahlt bekommt.

14.10 Übungen

14.10.1 Aufgaben

Übung 67. Integraldarstellung für abhängige Wahrscheinlichkeiten

Zeigen Sie, dass sich im Fall von $G = 2$ Ausscheideursachen die abhängige Wahrscheinlichkeit $t\tilde{q}_x^{(1)}$ wie folgt darstellen lässt:

$$t\tilde{q}_x^{(1)} = \int_0^t s p_x^{(1)} \cdot s p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} ds .$$

Übung 68. Zeigen Sie, dass im Fall von $G = 2$ Ausscheideursachen gilt:

$$\tilde{\mu}_x = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} .$$

Übung 69. Zeigen Sie, dass im Fall von $G = 2$ Ausscheideursachen unter der Annahme von UDD für die Einursachentafeln folgende Gleichung gilt:

$$\tilde{q}_x^{(1)} = q_x^{(1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(2)}\right) .$$

Übung 70. Ein- und Mehrursachentafeln

Ein Aktivenkollektiv unterliege den beiden Ausscheideursachen Tod und Invalidität. Die unabhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten für die Alter 40 bis 43 seien wie folgt:

x	$q_x^{(1)} = q_x^{aa}$
40	0,00144267
41	0,00162396
42	0,00183145
43	0,00206763

Die unabhängigen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten $q_x^{(2)} = i_x$ betragen 0,001 für jedes Alter x ($40 \leq x \leq 43$).

- Nehmen Sie an, dass in jeder Einursachentafel UDD gilt, und vervollständigen Sie die folgende Mehrursachentafel:

x	$\tilde{q}_x^{(1)}$	$\tilde{q}_x^{(2)}$	\tilde{l}_x	$\tilde{d}_x^{(1)}$	$\tilde{d}_x^{(2)}$
40			100.000		
41					
42					
43					

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine 40-jährige Person innerhalb der nächsten 3 Jahre invalide wird.

14.10.2 Lösungen

Lösung 67. Intergaldarstellung für abhängige Wahrscheinlichkeiten
Sei

$$f_{T^{(1)}}(s) = {}_s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)}$$

bzw.

$$f_{T^{(2)}}(u) = {}_u p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+u}^{(2)}$$

die Dichtefunktion der Zufallsvariable $T^{(1)}$ bzw. $T^{(2)}$.

Dann kann die Wahrscheinlichkeit ${}_t \tilde{q}_x^{(1)}$ ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned} {}_t \tilde{q}_x^{(1)} &= \int_0^t \int_s^\infty f_{T^{(1)}}(s) \cdot f_{T^{(2)}}(u) \, ds \, du \\ &= \int_0^t \int_s^\infty {}_s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \cdot {}_u p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+u}^{(2)} \, ds \, du \\ &= \int_0^t {}_s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \cdot \left(\int_s^\infty {}_u p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+u}^{(2)} \, du \right) \, ds \\ &= \int_0^t {}_s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \cdot \left(1 - \int_0^s {}_u p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+u}^{(2)} \, du \right) \, ds \\ &= \int_0^t {}_s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \cdot \left(1 - {}_s q_x^{(2)} \right) \, ds \\ &= \int_0^t {}_s p_x^{(1)} \cdot {}_s p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \, ds . \end{aligned}$$

Analog folgt die Darstellung

$${}_t \tilde{q}_x^{(2)} = \int_0^t {}_s p_x^{(2)} \cdot {}_s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(2)} \, ds .$$

Lösung 68. Wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_x^{(1)}}{h} = \mu_x^{(1)}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_x^{(2)}}{h} = \mu_x^{(2)}$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \tilde{q}_x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - h q_x^{(1)}) \cdot (1 - h q_x^{(2)})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_x^{(1)} + h q_x^{(2)} - h q_x^{(1)} \cdot h q_x^{(2)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{h q_x^{(1)}}{h}}_{\rightarrow \mu_x^{(1)}} + \underbrace{\frac{h q_x^{(2)}}{h}}_{\rightarrow \mu_x^{(2)}} - \underbrace{\frac{h q_x^{(1)}}{h} \cdot \frac{h q_x^{(2)}}{h}}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)}.\end{aligned}$$

Lösung 69. Die Annahme von UDD für die Einursachentafel bzgl. $g = 1$ ist äquivalent zu $q_x^{(1)} = s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)}$ für alle $0 \leq s \leq 1$. Für $t = 1$ liefert die Integraldarstellung

$$\begin{aligned}\tilde{q}_x^{(1)} &= \int_0^1 s p_x^{(1)} \cdot s p_x^{(2)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} ds \\ &= \int_0^1 s p_x^{(2)} \cdot \underbrace{s p_x^{(1)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)}}_{=q_x^{(1)}} ds \\ &= q_x^{(1)} \cdot \int_0^1 (1 - s q_x^{(2)}) ds \\ &= q_x^{(1)} \cdot \int_0^1 (1 - s \cdot q_x^{(2)}) ds \\ &= q_x^{(1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(2)} \right).\end{aligned}$$

Lösung 70. Ein- und Mehrursachentafeln

1. Die Annahme von UDD führt zu den folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\tilde{q}_x^{(1)} &= q_x^{(1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(2)} \right) = q_x^{aa} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot i_x \right), \\ \tilde{q}_x^{(2)} &= q_x^{(2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{(1)} \right) = i_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{aa} \right).\end{aligned}$$

Damit lassen sich die ersten beiden Spalten der Tabelle berechnen:

x	$\tilde{q}_x^{(1)}$	$\tilde{q}_x^{(2)}$	\tilde{l}_x	$\tilde{d}_x^{(1)}$	$\tilde{d}_x^{(2)}$
40	0,00144195	0,00099928	100.000		
41	0,00162315	0,00099919			
42	0,00183053	0,00099908			
43	0,00206660	0,00099897			

Um die übrigen Spalten zu befüllen, berechnet man die Anzahl Abgänge aufgrund jeder Ausscheideursache in jedem Jahr, d.h.

$$\begin{aligned}\tilde{d}_x^{(1)} &= \tilde{l}_x \cdot q_x^{(1)}, \\ \tilde{d}_x^{(2)} &= \tilde{l}_x \cdot q_x^{(2)}.\end{aligned}$$

Die Anzahl Verbleibende im Kollektiv ein Jahr später ergibt sich dann aus der Beziehung

$$\tilde{l}_{x+1} = \tilde{l}_x - \tilde{d}_x = \tilde{l}_x - \sum_{g=1}^G \tilde{d}_x^{(g)},$$

so dass sich schließlich die folgende Tabelle ergibt:

x	$\tilde{q}_x^{(1)}$	$\tilde{q}_x^{(2)}$	\tilde{l}_x	$\tilde{d}_x^{(1)}$	$\tilde{d}_x^{(2)}$
40	0,00144195	0,00099928	100.000	144,195	99,928
41	0,00162315	0,00099919	99.756	161,919	99,675
42	0,00183053	0,00099908	99.494	182,127	99,402
43	0,00206660	0,00099897	99.212	204,972	99,110

2. Unter Verwendung der Ergebnisse aus dem vorherigen Aufgabenteil beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}3\tilde{q}_{40}^{(2)} &= \frac{\tilde{d}_{40}^{(2)} + \tilde{d}_{41}^{(2)} + \tilde{d}_{42}^{(2)}}{\tilde{l}_{40}} \\ &= \frac{99,928 + 99,675 + 99,402}{100.000} \\ &= 0,00299.\end{aligned}$$

Kapitel 15

Pflegeversicherung

Im Bereich der Lebensversicherung erlebt die Pflegeversicherung seit einigen Jahren eine Renaissance bzw. bekommt innerhalb der Produktpalette der VU neuen Schwung.

In der Krankenversicherung existiert mit der Pflegetagegeldversicherung ein ähnliches Produkt. Gleich ist beiden Produkten, dass es sich jeweils um eine Summenversicherung handelt, welche unabhängig von der medizinischen Inflation ist. Unterschiedlich hingegen sind insbesondere der zugrunde liegende Rechnungszins sowie eine in der Krankenversicherung existierende Beitragsanpassungsklausel. Auch die Kalkulation erfolgt auf andere Weise: Während sich die Lebensversicherung der Inzidenzen – also neu auftretender Krankheits- bzw. Pflegefälle während eines bestimmten Zeitraums – bedient, werden in der Krankenversicherung Prävalenzen – d.h. Gesamtanzahlen aller Krankheits- bzw. Pflegefälle zu einem bestimmten Zeitpunkt – verwendet. Jedoch lassen sich diese abweichenden biometrischen Rechnungsgrundlagen ineinander umrechnen.

Ähnlich wie bei der Berufsunfähigkeitsversicherung (siehe voriges Kap. 14) wird bei der nach Art der Lebensversicherung kalkulierten Pflegerentenversicherung eine Rentenleistung in Gestalt der **Pflegerente** ausgelöst, sobald die VP pflegebedürftig wird. Die Pflegerentenversicherung wird als eigenständige Hauptversicherung (kurz: **SPR**, vgl. SBU) oder als Zusatzversicherung (kurz: **PRZ**, vgl. BUZ) am Markt angeboten. Wie bei der BU-Versicherung spricht man von Aktiven und Invaliden. Gleichermaßen entfällt mit dem Eintritt der Invalidität bzw. der **Pflegebedürftigkeit** die Pflicht zur Beitragszahlung. Unterschiede zur BU-Versicherung sind hingegen, dass bei der Pflegeversicherung keine Karenzzeit angesetzt wird und dass die Zahlung der Pflegerente lebenslang erfolgt.

Im Rahmen der Pflegeversicherung werden drei **Pflegestufen** bzw. seit Beginn des Jahres 2017 fünf **Pflegegrade** differenziert, welche die unterschiedliche Schwere der Pflegebedürftigkeit repräsentieren. Für die Einstufung existieren verschiedene Kriterien, die nicht zwangsweise deckungsgleich sind: Neben dem gesetzlich definierten Merkmalskatalog des **Sozialgesetzbuchs** (kurz: **SGB**) existiert parallel eine Eingruppierung nach dem sog. **ATL-** bzw. **ADL-Punktesystem** („Aktivitäten des täglichen Lebens“ bzw. Englisch „Activities of Daily Living“). Die Leistungspflicht des Versicherers orientiert sich dann entweder an den Kriterien des SGB, den ATL-Kriterien oder auch einer Kombination dieser beiden Anforderungskataloge.

Bei den am Markt angebotenen und auf die aktuelle Einteilung in Pflegegrade umgestellten Tarife ergibt sich folgende Zuordnung zwischen den bisherigen Pflegestufen und den neu eingeführten Pflegegraden:

Pflegestufe	Pflegegrad
I	2 [†]
II	3
III	4 und 5

([†] der Pflegegrad 1 ist derzeit nicht abgedeckt).

Das bedeutet, dass bislang nach wie vor drei Abstufungen für die Schwere der Pflegebedürftigkeit abgebildet werden. Daher verwenden wir hier die herkömmliche Nomenklatur von drei (Pflege-)Stufen.

Ohne auf die beiden Ansätze des SGB bzw. des ADL näher eingehen zu wollen, bleibt festzuhalten, dass je höher die Stufe ist, desto höher ist der Grad der Pflegebedürftigkeit. Demzufolge ist die Höhe der zu zahlenden Pflegerente an die vorliegende Stufe gekoppelt. Auf der höchsten Stufe III wird die volle Pflegerente (d.h. 100%) gezahlt, in den beiden niedrigeren Stufen wird ein ggf. vertragsabhängig variierender Prozentsatz der Pflegerente gezahlt, bspw. 25% bei Stufe I und bei Stufe II 50%.

15.1 Rechnungsgrundlagen

Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich insbesondere an der Herleitung der Rechnungsgrundlagen zur Pflegerentenversicherung durch die DAV im Jahr 2008 (vgl. *DAV (2008c)*). Dabei bezeichnet ps die (Pflege-) Stufe (d.h. $ps = I, II$ oder III), und die versicherten Prozentsätze je Stufe werden mit s_I , s_{II} und s_{III} notiert, wobei $0 \leq s_I \leq s_{II} \leq s_{III} = 1$ gilt.

Wie bei der BU-Versicherung werden Wahrscheinlichkeiten sowohl für gesunde (Aktive) als auch für pflegebedürftige Personen (Invaliden) benötigt. Um im Sprachgebrauch der BU-Versicherung zu bleiben, wird der Eintritt der Pflegebedürftigkeit im Folgenden auch als Invalidisierung bezeichnet.

Begründet in der Herleitung der DAV-Rechnungsgrundlagen, existieren keine Wahrscheinlichkeiten „genau Stufe ps “ betreffend. Stattdessen gelten sämtliche Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit dem Invalidenkollektiv immer nur für „mindestens Stufe ps “, d.h. Stufe ps oder höher. Folglich existiert keine Wahrscheinlichkeit, bei Invalidisierung genau in die Stufe ps zu wechseln, sondern in mindestens Stufe ps zu gelangen.

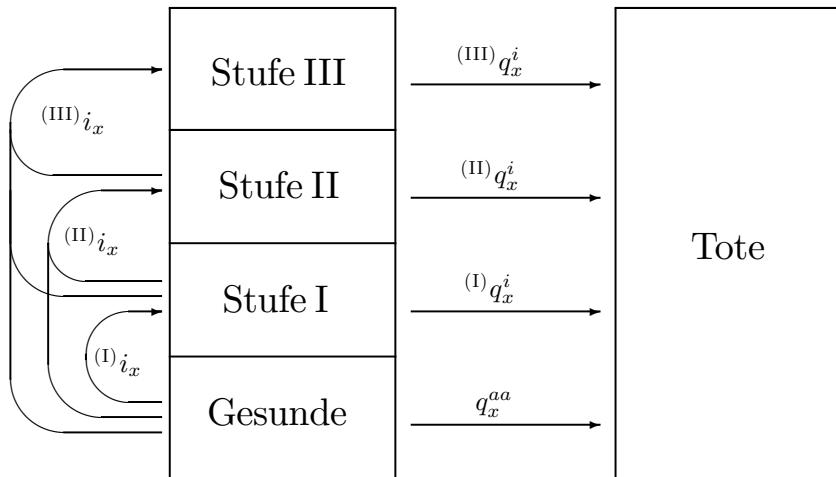
Damit einher geht auch eine wesentliche Änderung des Aktiven-Begriffs: Als Aktive werden nicht nur die tatsächlich noch gesunden Personen (Nicht-Pflegebedürftigen) angesehen, sondern je nach betrachteter Stufe ps zusätzlich diejenigen Invaliden in den darunter liegenden Stufen. Betrachtet man bspw. das Kollektiv der Invaliden in Stufe II, so umfasst das (zugehörige) Aktiven-Kollektiv die noch nicht Pflegebedürftigen sowie die Pflegebedürftigen der Stufe I. Anders ausgedrückt: Aktive im Sinne von Stufe ps sind alle diejenigen Personen, die noch nicht pflegebedürftig in mindestens der Stufe ps sind.

Entsprechend dieser Konvention werden folgende Wahrscheinlichkeiten verwendet (mit $ps = I, II$ oder III):

- $(ps)i_x$ ist die Wahrscheinlichkeit für einen x -jährigen Aktiven (im Sinne von Stufe ps), innerhalb des nächsten Jahres (d.h. bis zum Erreichen des Alters $x + 1$) pflegebedürftig mindestens (und nicht genau) der Stufe ps zu werden.
- $(ps)q_{z,x}^i$ repräsentiert die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x -jährigen Pflegebedürftigen mindestens der Stufe ps , der im Alter z pflegebedürftig geworden ist.
- $(ps)q_x^{aa}$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x -jähriger Aktiver (im Sinne von Stufe ps) innerhalb eines Jahres (d.h. vor Erreichen den Alters $x + 1$) verstirbt.

Im Unterschied zur BU-Versicherung werden hier keine Reaktivierungswahrscheinlichkeiten verwendet bzw. angesetzt. Auch Karenzzeiten werden nicht berücksichtigt. Außerdem beträgt die Dauer der Selektionsphase bei den Invalidensterblichkeiten nicht fünf Jahre, sondern lediglich ein Jahr. Dies bedeutet, dass nur im ersten Jahr der Pflegebedürftigkeit ein erhöhtes Sterberisiko besteht und die Sterblichkeit anschließend wieder auf das „normale“ Niveau absinkt.

Für die Übergänge zwischen den verschiedenen Kollektiven ergibt sich somit folgendes Schaubild:



15.2 Erwartete Barwerte

Die Herleitung des Anwartschaftsbarwertes für die Pflegebedürftigkeit erfolgt analog zum schrittweisen Aufbau bei der BU-Versicherung.

15.2.1 Kommutationszahlen

Ausgehend von den Wahrscheinlichkeiten $(ps) i_x$, $(ps) q_{z,x}^i$ und $(ps) q_x^{aa}$ lassen sich Ausscheideordnungen und Kommutationszahlen für jede Stufe $ps \in \{I, II, III\}$ konstruieren.

Für die jeweilige Stufe ps erhält man ausgehend von Startwerten i.H.v. 100.000 folgende Größen:

- Die Anzahl der lebenden Aktiven des Alters $x + 1$ berechnet sich rekursiv als

$$(ps) l_{x+1}^{aa} = (ps) l_x^{aa} \cdot \left(1 - (ps) q_x^{aa}\right) \cdot \left(1 - (ps) i_x\right),$$

und für die Anzahl der lebenden Invaliden des Alters $x + 1$ gilt

$$(ps) l_{z,x+1}^i = (ps) l_{z,x}^i \cdot \left(1 - (ps) q_{z,x}^i\right).$$

- Daraus lassen sich in gewohnter Weise die folgenden Kommutationszahlen bilden:

$$(ps) D_x^{aa} = (ps) l_x^{aa} \cdot v^x, \quad (ps) N_x^{aa} = \sum_{j=0}^{\omega-x} (ps) D_{x+j}^{aa},$$

$$(ps) D_x^i = (ps) l_x^i \cdot v^x, \quad (ps) N_x^i = \sum_{j=0}^{\omega-x} (ps) D_{x+j}^i.$$

15.2.2 Prämienbarwert

Da die Prämienzahlung nur solange erfolgt, wie die VP zu den Aktiven (im Sinne von Stufe ps) zählt, berechnet sich der Prämienbarwert gemäß der Formel

$$(ps) \ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa} = \frac{(ps) N_x^{aa} - (ps) N_{x+t}^{aa}}{(ps) D_x^{aa}}.$$

15.2.3 Leistungsbarwerte

Der Barwert für die lebenslang zu zahlende Pflegerente wird in mehreren Schritten zusammengesetzt.

- Der Leistungsbarwert nach Eintritt der Pflegebedürftigkeit ergibt sich als

$$(ps) \ddot{a}_{z,x}^i = \frac{(ps) N_{z,x}^i}{(ps) D_{z,x}^i}$$

bzw. bei unterjähriger, $\frac{1}{k}$ -tel-jährlicher Leistungszahlung durch die Näherung

$$(ps) \ddot{a}_{z,x}^{i(k)} \approx (ps) \ddot{a}_{z,x}^i - \frac{k-1}{2k},$$

wobei k wie üblich die Werte 1, 2, 4 oder 12 annimmt.

- Unter der Annahme, dass die Pflegebedürftigkeit zur Jahresmitte eintritt, berechnet man zunächst

$$(ps) \ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}}^{i(k)} = \frac{1}{2} \cdot \left((ps) \ddot{a}_{x,x}^{i(k)} + (ps) \ddot{a}_{x+1,x+1}^{i(k)} \right).$$

- Anschließend wird der anwartschaftliche Leistungsbarwert mittels der zusätzlichen Kommutationszahlen

$$(ps) D_x^{ai} = (ps) l_x^{aa} \cdot v^{x+\frac{1}{2}} \cdot (ps) i_x \cdot \left(1 - \frac{(ps) q_x^{aa}}{2} \right) \cdot (ps) \ddot{a}_{x+\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}}^{i(k)}$$

und

$${}^{(ps)}N_x^{ai} = \sum_{j=0}^{\omega-x-1} {}^{(ps)}D_{x+j}^{ai}$$

bestimmt, so dass

$${}^{(ps)}\ddot{a}_x^{ai} = \frac{{}^{(ps)}N_x^{ai}}{{}^{(ps)}D_x^{aa}} .$$

15.3 Kosten

Das Kostenmodell sei direkt in Form der tabellarischen Übersicht angegeben:

Kosten-/Zuschlagsart	Kostensatz (Notation)	Bezugsgröße
Abschlusskosten – Einmalig – Amortisationskosten	α, α^z α^γ	Summe der Bruttoprämien versicherte Leistung
Laufende Verwaltungskosten – Inkassokosten – beitragspflichtig (bpfl) – tariflich beitragsfrei (bfr) – vorzeitig beitragsfrei (vbfr) – in Leistung (leist)	β γ_1 γ_2 γ_3 γ_4	Brutto(jahres)prämie versicherte Leistung versicherte Leistung versicherte Leistung versicherte Leistung
Ratenzuschlag	$\rho = \rho(k)$	Brutto(jahres)prämie
Stückkosten	ε	—
Risikozuschlag	σ	Brutto(jahres)prämie

15.4 Prämien

Die Nettoeinmalprämie für die Versicherung einer lebenslang zahlbaren Pflegerente der Jahreshöhe 1 entspricht

$$NEP_x = {}^{(I)}\ddot{a}_x^{ai} .$$

Dabei wird unterstellt, dass die Pflegerente in jeder der drei Stufen gleich hoch ist und ab Eintritt von mindestens Stufe I gezahlt wird.

Allgemeiner kann für jede Stufe ps die Nettoeinmalprämie definiert werden:

$${}^{(ps)}NEP_x = {}^{(ps)}\ddot{a}_x^{ai} .$$

Sofern eine entsprechend der drei Stufen gestaffelte Pflegerente gezahlt wird, ergibt sich als Nettoeinmalprämie

$$NEP_x = s_I \cdot {}^{(I)}\ddot{a}_x^{ai} + (s_{II} - s_I) \cdot {}^{(II)}\ddot{a}_x^{ai} + (s_{III} - s_{II}) \cdot {}^{(III)}\ddot{a}_x^{ai} .$$

Die Nettojahresprämie ergibt sich aus der Nettoeinmalprämie mittels Division durch den Prämienbarwert. Entfällt die Prämienzahlung für die Pflegerentenversicherung mit Eintritt (mindestens) der Stufe $ps \in \{I, II, III\}$, so ist

$$NP_{x:\overline{t}} = \frac{NEP_x}{{}^{(ps)}\ddot{a}_{x:\overline{t}}^{aa}} .$$

Ausgehend von der Nettoprämie gelangt man je nach Kostensystematik in gewohnter Weise zu den anderen Beitragsgrößen wie Zillmerprämie, Bruttoprämie etc.

15.5 Deckungskapital

Analog zur BU-Versicherung lässt sich hinsichtlich des Deckungskapitals nach Anwartschaft und Leistungsbezug unterscheiden. Dabei bedeutet Anwartschaft wiederum, dass die VP noch nicht pflegebedürftig mindestens der Stufe ps ist.

Das anwartschaftliche Deckungskapital (einschließlich Verwaltungskostenrückstellung) nach m Versicherungsjahren für die jährliche Pflegerente der Höhe 1 lautet wie folgt:

- beitragspflichtig

$$\begin{aligned} {}_mV_x^{ai} &= (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x+m} \\ &\quad + \gamma_1 \cdot \left({}^{(ps)}\ddot{a}_{x+m}^{aa} - {}^{(ps)}\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}^{aa} \right) \\ &\quad - NP_{x:\overline{t}}^Z \cdot {}^{(ps)}\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}}^{aa} \end{aligned}$$

- tariflich beitragsfrei

$${}_mV_x^{ai} = (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x+m} + \gamma_2 \cdot {}^{(ps)}\ddot{a}_{x+m}^{aa}$$

- vorzeitig beitragsfrei gestellt

$${}_m V_x^{ai} = (1 + \gamma_4) \cdot NEP_{x+m} + \gamma_3 \cdot {}^{(ps)}\ddot{a}_{x+m}^{aa}$$

Ist die Leistungspflicht eingetreten, so liegt Pflegebedürftigkeit gemäß einer der drei Pflegestufen vor. Das im Leistungsfall gestellte Deckungskapital berücksichtigt die Möglichkeit einer weiteren Verschlechterung (jedoch nicht Verbesserung) der Pflegestufe. Daher werden neben dem Leistungsbarwert der entsprechenden Pflegestufe auch Anwartschaftsbarwerte auf zusätzliche Leistungen in den höheren Stufen reserviert. Gemäß DAV (2008c) ergeben sich dann folgende Invaliden-Deckungsrückstellungen:

- für eine pflegebedürftige Person genau der Stufe I, die im Alter von $z^{(I)}$ pflegebedürftig geworden ist

$${}^{(I)} {}_m V_x^i = (1 + \gamma_4) \cdot \left[s_I \cdot {}^{(I)}\ddot{a}_{z^{(I)}, x+m}^i + (s_{II} - s_I) \cdot {}^{(II)}NEP_{x+m} + (s_{III} - s_{II}) \cdot {}^{(III)}NEP_{x+m} \right],$$

- für eine pflegebedürftige Person genau der Stufe II, die im Alter von $z^{(I)}$ pflegebedürftig der Stufe I und im Alter $z^{(II)}$ pflegebedürftig der Stufe II geworden ist

$${}^{(II)} {}_m V_x^i = (1 + \gamma_4) \cdot \left[s_I \cdot {}^{(I)}\ddot{a}_{z^{(I)}, x+m}^i + (s_{II} - s_I) \cdot {}^{(II)}\ddot{a}_{z^{(II)}, x+m}^i + (s_{III} - s_{II}) \cdot {}^{(III)}NEP_{x+m} \right],$$

- für eine pflegebedürftige Person genau der Stufe III, die im Alter von $z^{(I)}$ pflegebedürftig der Stufe I, im Alter $z^{(II)}$ pflegebedürftig der Stufe II und im Alter $z^{(III)}$ pflegebedürftig der Stufe III geworden ist

$${}^{(III)} {}_m V_x^i = (1 + \gamma_4) \cdot \left[s_I \cdot {}^{(I)}\ddot{a}_{z^{(I)}, x+m}^i + (s_{II} - s_I) \cdot {}^{(II)}\ddot{a}_{z^{(II)}, x+m}^i + (s_{III} - s_{II}) \cdot {}^{(III)}\ddot{a}_{z^{(III)}, x+m}^i \right].$$

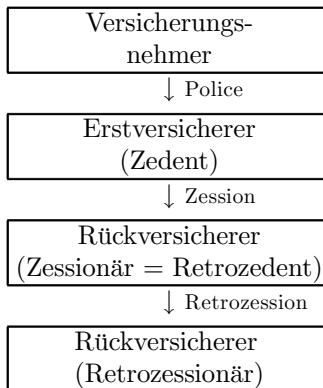
15.6 Sonstiges

Für die Überschussbeteiligung, Vertragsänderungen und Garantiewerte sind keine Besonderheiten zu erläutern.

Kapitel 16

Lebensrückversicherung

Rückversicherung (kurz: RV) bzw. **Zession** beschreibt den Vorgang, dass ein Erstversicherer einen Teil der von ihm übernommenen Risiken an ein anderes VU weitergibt bzw. zedierte. Dabei wird das Erst-VU als **Zedent**, das aufnehmende Rück-VU als **Zessionär** (selten auch **Zessionar**) bezeichnet. Falls ein Rückversicherer wiederum Risiken an ein weiteres Rück-VU abgibt, wird dieser Transfer **Weiterrückversicherung** bzw. **Retrozession**, das abgebende Rück-VU **Retrozedent** und das aufnehmende Rück-VU **Retrozessionär** genannt:



Für unsere Zwecke betrachten wir nur die Beziehung zwischen Erst- und Rück-VU.

Sofern ein Versicherer RV-Schutz nachfragt bzw. einkauft, spricht man von **passiver Rückversicherung**. **Aktive Rückversicherung** liegt vor, falls ein VU Rückversicherungsschutz anbietet bzw. gewährt.

Im Kontext der Rückversicherung spricht man häufig eher von **Schaden** bzw. **Schadenfall** als von Leistungsfall sowie von **Schadensumme** anstelle von Versicherungssumme oder versicherter Leistung. Diesem Usus folgen wir hier ebenfalls.

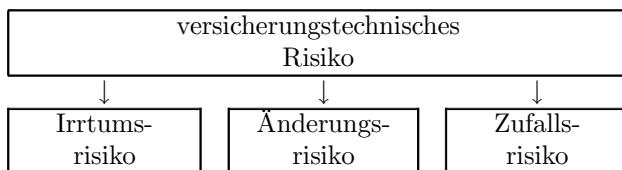
Als weiterführende Literatur zum Thema Rückversicherung seien *Liebwein (2009)* und *Dienst (1988)* genannt.

16.1 Versicherungstechnisches Risiko

Wie in Abschn. 3.1 dargestellt wurde, kann ein VU eine große Anzahl Verträge zur Absicherung biometrischer Risiken eingehen, weil sich mit zunehmender Bestandsgröße Ausgleichseffekte zwischen diesen Risiken ergeben und dadurch zufällige Schwankungen in der Schadenverteilung reduziert werden. Mittels geeigneter Kalkulation gelangt das VU zu einer Schätzung, was es an Schäden – pro Vertrag und insgesamt – zu erwarten hat und welche Prämien es dafür verlangen muss.

Der tatsächliche Aufwand für Schäden bzw. Leistungen kann jedoch vom erwarteten Aufwand abweichen. Das Risiko einer solchen Abweichung wird als **versicherungstechnisches Risiko** (kurz: vers.-techn. Risiko) bezeichnet.

Entsprechend der Gründe für mögliche Abweichungen lässt sich das vers.-techn. Risiko in verschiedene Teilrisiken zerlegen. In der Literatur finden sich diverse Aufteilungen, wobei wir dem verbreiteten Ansatz von *Farny (2011)* folgen. Danach setzt sich das vers.-techn. Risiko aus den drei Komponenten Irrtumsrisiko, Änderungsrisiko und Zufallsrisiko zusammen:



Das **Irrtumsrisiko** besteht in der Gefahr, bei der Prämienkalkulation unangemessene Rechnungsgrundlagen zu verwenden bzw. die Risikoverhältnisse falsch einzuschätzen. Dazu zählt bspw. auch die Möglichkeit, dass das statistische Material, auf Basis dessen die Annahmen hergeleitet wurden, unzureichend oder fehlerhaft war. Insbesondere bei Produkt-Neuentwicklungen kann das Irrtumsrisiko eintreten.

Das **Änderungsrisiko** beschreibt die Gefahr, dass sich Risikofaktoren im Zeitablauf in unvorhersehbarer Weise ändern. Hierunter fallen z.B. Gesetzesänderungen und Fortschritte im technischen oder medizinischen Bereich. Derartige Entwicklungen führen zu einer Veränderung der Rahmenbedingungen bzw. der Risikostruktur, wie sie bei der ursprünglichen Kalkulation vorlag, und haben zur Folge, dass die kalkulierten Prämien nicht mehr ausreichend sind.

Das **Zufallsrisiko**, häufig auch als **Schwankungsrisiko** bezeichnet, steht für die Gefahr zufälliger Schwankungen im Schadenverlauf. Diese grundsätzlich bestehende Ungewissheit kann Ausmaße annehmen, die für ein VU durchaus bedrohlich sind. So können in einem Jahr deutlich mehr und/oder deutlich höhere Schäden als erwartet eintreten. Letzteres ist in der Lebensversicherung zwar vernachlässigbar, da die Leistungshöhe vorab festgelegt ist, jedoch können durch Naturkatastrophen, Epidemien oder Verkehrsunfälle plötzlich eine Vielzahl von Verträgen durch ein einziges Schadenereignis betroffen sein und entsprechende Leistungszahlungen fällig werden. In diesem Kontext spricht man daher auch von Katastrophen- oder Kumulrisiken.

16.2 Funktionen von Rückversicherung

Die Gründe für die Weitergabe von Risiken sind unterschiedlicher Natur. Im originären Sinne dient Rückversicherung dem Zweck, das Portfolio des Erstversicherers hinsichtlich der getragenen Risiken zu homogenisieren und somit zu stabilisieren.

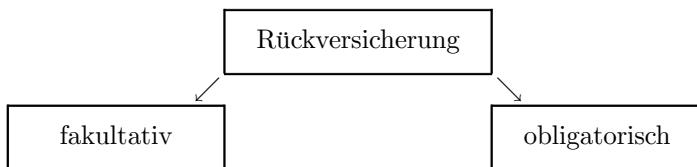
Dies geschieht i.d.R. dadurch, dass vergleichsweise hohe Risiken (sog. Spitzenrisiken, die zum vers.-techn. Ruin führen können) nach oben begrenzt bzw. abgeschnitten werden. Das vers.-techn. Risiko des Erstversicherers wird somit reduziert, und große Schwankungen innerhalb der jährlich auftretenden Leistungsfälle werden auf diese Weise geglättet.

Versicherer mit großen Beständen benötigen unter diesem Aspekt häufig weniger RV-Schutz, da der Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit in einem großen Portfolio gut funktioniert. Hingegen ist Rückversicherung für VU mit kleinen oder auch jungen, im Aufbau befindlichen Beständen durchaus ein geeignetes Mittel, um Schwankungen im Schadenverlauf abzufedern. Werden viele kleine Bestände beim Rückversicherer gebündelt, so ist der Risikoverlauf in dem sich ergebenden großen Rückversicherungsbestand deutlich stabiler als in den kleinen Einzelbeständen.

Sich der Rückversicherung zu bedienen, geschieht jedoch nicht nur aus dem vorgenannten Grund. Zessionäre fungieren auch als Dienstleister, indem sie aufgrund ihrer größeren Erfahrung eine bessere Risikoeinschätzung vornehmen, bei der Entwicklung neuer Produkte oder Erstellung von Annahmegerichtlinien mitwirken sowie bei der Schadenregulierung unterstützen können.

16.3 Formen der Rückversicherung

Hinsichtlich der Weitergabe- bzw. Annahmemodalitäten von Risiken zwischen Erst- und Rückversicherer unterscheidet man die fakultative und die obligatorische Rückversicherung:



Bei der fakultativen RV entscheidet der Erstversicherer, welche Risiken er in Rückdeckung geben möchte. Gleichzeitig kann der Zessionär entscheiden, ob und welche der angebotenen Risiken er annimmt. Fakultative RV wird auch als **freiwillige Einzelrückversicherung** bezeichnet. Sie kommt in erster Linie bei speziellen Risiken zur Anwendung, die aufgrund ihrer Höhe oder Art besonders behandelt und beurteilt werden müssen.

Gängig ist die obligatorische RV, welche auch **Vertragsrückversicherung** genannt wird und i.d.R. für ein ganzes (Teil-)Portfolio des Zedenten gilt. Sofern ein neues Risiko (durch Abschluss einer entsprechenden Police) im Bestand des Zedenten hinzukommt, wird es zu den festgelegten Konditionen automatisch rückversichert. Der Erstversicherer zedierte also sämtliche Risiken des definierten Portfolios, während der Zessionär gezwungen ist, diese Risiken auch alle anzunehmen.

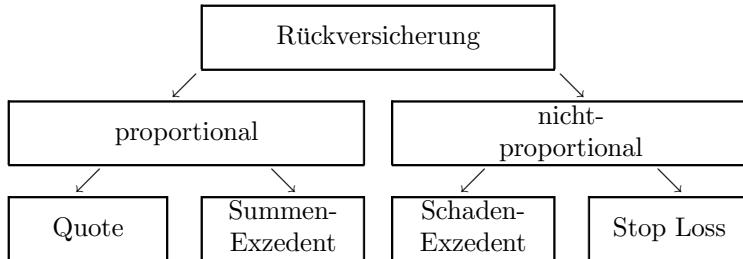
16.4 Rückversicherungsarten

Bei der Rückversicherung wird das Risiko zwischen dem Erst- und dem Rückversicherer aufgeteilt. Der Zedent behält nur denjenigen Teil des Gesamtrisikos, den er selbst verkraften kann bzw. zu tragen bereit ist. Dieser Teil wird **Selbstbehalt** oder **Eigenbehalt** genannt und entweder als prozentualer Anteil am Risiko oder als Absolutbetrag festgelegt.

Der an den Zessionär transferierte Teil wird als **Exzedent** bezeichnet. Dieser lässt sich bei Bedarf in verschiedene **Schichten (Layer)** bzw. **Haftungsstrecken** aufteilen, von denen einzelne wiederum vom Rückversicherer selbst weitergegeben werden können. Es ist außerdem möglich, dass ein Zessionär die von ihm übernommene Haftungsstrecke durch ein **Deckungslimit (Plafond)** begrenzt, so dass ein darüber hinausgehender Teil entweder ebenfalls beim Erstversicherer verbleibt oder vom Zedent im Rahmen eines weiteren Rückversicherungsvertrags mit einem anderen Zessionär in Rückdeckung gegeben wird.

Im Folgenden notieren wir die Höhe der Schadensumme mit X , den Selbstbehalt mit SB und den Exzedenten mit EZ , so dass sich die Darstellung $X = SB + EZ$ ergibt.

Es findet eine Unterscheidung nach proportionaler und nicht-proportionaler Rückversicherung statt:



16.4.1 Proportionale Rückversicherung

Proportionale RV bedeutet, dass das vom Zedenten gezeichnete Risiko anteilig (proportional) zwischen Erst- und Rückversicherer aufgeteilt wird. Bezeichnet $0 < \xi < 1$ den Prozentsatz für den Selbstbehalt des Erstversicherers, so lässt sich die Höhe der Schadensumme zerlegen als

$$X = \underbrace{\xi \cdot X}_{=SB} + \underbrace{(1 - \xi) \cdot X}_{=EZ} .$$

Entsprechend des Verhältnisses $\xi : (1 - \xi)$ werden die Prämien und Schäden jedes einzelnen Vertrags zwischen Zedent und Zessionär aufgeteilt.

Innerhalb der proportionalen RV können zwei Fälle differenziert werden:

- Für das ganze Portfolio wird als Selbstbehalt ein einheitlicher Prozentsatz ξ , die sog. **Quote**, festgesetzt. Entsprechend wird diese Art auch als **Quoten-Rückversicherung** bezeichnet.

Dem Vorteil der einfachen Handhabung und Verwaltung steht der Nachteil gegenüber, dass durch dieses Vorgehen die Gefahr zufälliger Schwankungen nicht wirklich gemindert wird. Stattdessen werden nur das Irrtums- und das Änderungsrisiko reduziert.

- Die wichtigste und im Bereich der Lebensversicherung am häufigsten anzutreffende Art der proportionalen RV ist die **Summen-Exzedenten-Rückversicherung**. Hierbei wird für das gesamte Portfolio zunächst ein absoluter Selbstbehalt (**Surplus**) SB festgelegt, bis zu dem der Zedent den Schaden zu tragen hat. Versicherungssummen X unterhalb dieses Selbstbehalts trägt der Erstversicherer vollständig selbst. Den über SB hinausgehenden Teil der versicherten Leistung trägt hingegen der Zessionär, der auf diese Weise also nur an den größeren Risiken partizipiert. Dadurch ergibt sich jeweils vertragsindividuell ein Anteil ξ , mit dem sich der Rückversicherer an den Schäden dieses Vertrags beteiligt. Folglich ist

$$\xi = \min \left\{ 1; \frac{SB}{X} \right\}$$

der Anteil des Schadens X , der beim Zedent verbleibt, und

$$1 - \xi = 1 - \min \left\{ 1; \frac{SB}{X} \right\} = \max \left\{ 0; \frac{X - SB}{X} \right\} \quad (16.1)$$

der zedierte Anteil des Schadens. Das Aufteilungsverhältnis zwischen Erst- und Rück-VU variiert demnach in Abhängigkeit von der Versicherungssumme X des Vertrags.

Da die Spitzen hoher Risiken durch diese Art der RV abgeschnitten werden, wird eine Reduktion des Zufallsrisikos beim Erstversicherer erreicht. Dagegen ist die Verwaltung des Rückversicherungsvertrags aufwändiger, u.a. auch deshalb, weil der Zessionär Informationen über das jeweilige versicherte Risiko bzw. die VP benötigt.

Die beiden proportionalen RV-Arten können auch zu einer Quoten-Exzedenten-Rückversicherung kombiniert werden, indem eine generelle Quote und ein absoluter maximaler Selbstbehalt vereinbart werden. Bezeichnet ξ_1 die Quote und SB_2 den absoluten Selbstbehalt, so ergibt sich aus der Quote ein Selbstbehalt i.H.v. $SB_1 = \xi_1 \cdot X$, und aus dem absoluten Selbstbehalt resultiert ein Anteil i.H.v. $\xi_2 = \min \left\{ 1; \frac{SB_2}{X} \right\}$, der vom Zedent selbst getragen wird. Der eingetretene Schaden X wird dann wie folgt aufgeteilt:

$$\begin{aligned} X &= \min \{SB_1; SB_2\} + \max \{X - SB_1; X - SB_2\} \\ &= \min \{1; \xi_1; \xi_2\} \cdot X + \max \{0; 1 - \xi_1; 1 - \xi_2\} \cdot X . \end{aligned}$$

16.4.2 Nicht-proportionale Rückversicherung

Die nicht-proportionale RV ist im Bereich der Lebensversicherung eher unüblich. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass der Zedent einen absoluten Selbstbehalt SB , die sog. **Priorität**, festlegt. Bis zu diesem Betrag trägt er die Schäden selbst, den übersteigenden Teil trägt der Zessionär. Es existiert also kein Aufteilungsverhältnis zwischen Erst- und Rückversicherer, sondern die Leistung des Zessionärs richtet sich nach der absoluten Höhe des eingetretenen Schadens. Somit ergibt sich die Zerlegung

$$X = \min \{X; SB\} + \max \{X - SB; 0\} .$$

Diese Darstellung verdeutlicht übrigens einen besonderen Aspekt dieser Rückversicherungsvariante, nämlich die Ähnlichkeit zu finanzmathematischen Optionen.

Bei der nicht-proportionalen RV lassen sich ebenfalls zwei Fälle unterscheiden:

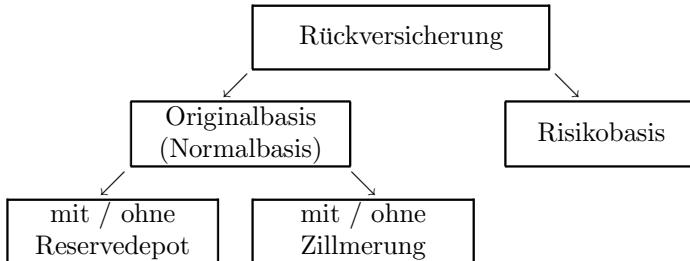
- Wird der Selbstbehalt pro versichertem Einzelrisiko festgelegt, so liegt eine **Einzelschaden-Exzedenten-Rückversicherung** oder **Excess Loss-Deckung (XL-Deckung)** vor.
Sofern der Selbstbehalt pro Schadenereignis festgelegt wird, handelt es sich um eine **Kumulschaden-Exzedenten-Rückversicherung** oder **Cat-XL-Deckung**. Hierbei wird also der Fall abgedeckt, dass durch ein einzelnes Schadenereignis mehrere Policen beim Zedenten betroffen sind und dieser einen Großschaden erfährt.
- Bei der **Jahresüberschaden-Rückversicherung** oder **Stop Loss-Deckung (SL-Deckung)** wird – anstelle einzelner Schäden – die während eines Geschäftsjahres aufgelaufene Summe aller Schäden betrachtet. Der Selbstbehalt bezieht sich dann auf diesen kumulierten Gesamtschaden, und der Zessionär trägt den über die Priorität hinausgehenden Teil des Gesamtschadens.

Anders als bei der proportionalen RV überträgt sich die Aufteilung der Schäden zwischen Erst- und Rückversicherer nicht automatisch auf die Prämien. Stattdessen muss für nicht-proportionale Rückdeckungen vom Zessionär eine aus seiner Sicht angemessene Prämie kalkuliert werden.

Den naheliegenden Fragen, wie denn der optimale Selbstbehalt zu wählen oder die nicht-proportionale RV-Prämie zu bestimmen ist, gehen wir an dieser Stelle nicht nach, sondern sehen diese Größen als gegeben an.

16.5 Prämienberechnung

Die Abrechnung zwischen Erst- und Rückversicherer findet entweder auf **Originalbasis** (auch **Normalbasis** genannt) oder **Risikobasis** statt:



16.5.1 Originalbasis

Bei der RV auf Originalbasis partizipiert der Zessionär an sämtlichen versicherungstechnischen Positionen des Zedenten, welche auf Basis der Werte der Originalversicherung bestimmt werden. Dazu zählen bspw. Prämien, sämtliche Arten von Leistungen (auch Rückkaufswerte), gebildete Reserven oder auch die Überschussbeteiligung.

Grundsätzlich kann danach unterschieden werden, wie der auf die zedierte Versicherungssumme entfallende Teil der Reserve behandelt wird. Wird diese Reserve ebenfalls beim Zedent vorgehalten, so entspricht dies quasi einem Depot, was zu der Namensgebung „mit Reservedepot“ führt. Wird die Reserve jedoch beim Zessionär gebildet und aufbewahrt, so handelt es sich um eine Zession „ohne Reservedepot“. Aufgrund gesetzlicher Regelungen (§ 125 VAG, ehemals § 67 VAG a.F.) muss die Bruttoreserve vollständig beim Erstversicherer verbleiben, so dass RV auf Originalbasis in Deutschland nur mit Reservedepot zulässig ist.

Da der Rückversicherer einen dem Aufteilungsverhältnis entsprechenden Anteil an der Originalprämie der Police erhält, vergütet der Zessionär dem Erstversicherer eine Rückversicherungsprovision, welche zur Deckung der beim Erstversicherer entstandenen Kosten dient. Für den beim Zedent deponierten Teil des Deckungskapitals erhält der Zessionär Depotzinsen.

Zwischen Erst- und Rückversicherer kann auch eine gegenseitige Gewinnbeteiligung stattfinden. Bezugsgröße dafür ist i.d.R. das Rückversicherungsresultat des jeweiligen Geschäftsjahres.

Die Zahlungströme im Rahmen des Rückversicherungsergebnisses stellen sich aus Sicht des Zedenten wie folgt dar:

Einnahmen	Ausgaben
RV-Leistungen	RV-Prämien
RV-Depot	RV-Depotzinsen
RV-Provisionen	RV-Beitragsüberträge

16.5.2 Risikobasis

Bei der RV auf Risikobasis hingegen erfolgt eine Berechnung basierend allein auf dem in Rückdeckung gegebenen Anteil des Risikos.

Der Zessionär erhält gemäß des Aufteilungsverhältnisses einen Teil der Risikoprämie der zugrunde liegenden Police und leistet bei Eintritt des Versicherungsfalls den auf die zedierte Versicherungssumme entfallenden Anteil des riskierten Kapitals, d.h. der Differenz aus Versicherungssumme und Deckungskapital. Hierbei wird also ausschließlich das biometrische Risiko zediert. Alle übrigen Positionen bleiben von den Betrachtungen vollkommen unberührt.

Die Quoten-Rückversicherung wird üblicherweise auf Originalbasis, die Summen-Exzedenten-Rückversicherung i.d.R. auf Risikobasis abgerechnet.

Kapitel 17

Rechnungslegung

Zum Abschluss des Buches werden verschiedene Aspekte betrachtet, die unter dem durchaus allgemeiner zu verstehenden Begriff der Rechnungslegung zusammengefasst sind. So werden wir auf die Erstellung des Jahresabschlusses eines VU eingehen, die gegenüber der Aufsichtsbehörde bestehenden Anzeige- und Berichtspflichten darstellen sowie die Solvabilitätsanforderungen erläutern, denen ein VU unterliegt.

17.1 Gesetzliche Bestimmungen

Für die behandelten Themen sind insbesondere Vorschriften der folgenden Gesetze von Bedeutung:

- Handelsgesetzbuch (kurz: HGB)
- Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung (kurz: RechVersV)
- Versicherungsberichterstattungs-Verordnung (kurz: BerVersV)
- Kapitalausstattungs-Verordnung (kurz: KapAusstV).

Hinsichtlich der Rechnungslegung gelten für VU grundsätzlich die Regelungen der §§ 238 bis 339 HGB. Diese werden durch besondere Vorschriften für VU in den §§ 341 bis 341p HGB ergänzt. Aufgrund der Besonderheiten der Versicherungsbranche existieren darüber hinaus weitere Regelwerke, welche die Anforderungen an die Rechnungslegung und an das Berichtswesen von VU spezifizieren. Dazu zählen insbesondere die RechVersV und die BerVersV.

Die jeweils maßgeblichen Paragraphen oder zusätzlich relevante Gesetze werden in den einzelnen Abschnitten aufgeführt.

17.2 Jahresabschluss

Gemäß § 242 HGB ist am Ende eines jeden Geschäftsjahres ein Jahresabschluss durchzuführen. Dieser setzt sich aus der Aufstellung einer **Bilanz** sowie einer **Gewinn- und Verlustrechnung** (kurz: **GuV**) zusammen. Ggf. ist auch ein **Lagebericht** zu erstellen, auf den hier jedoch nicht eingegangen wird.

17.2.1 Bilanz

Eine Bilanz ist die Aufstellung sämtlicher Vermögensgegenstände, die zu einem bestimmten Stichtag in einem Unternehmen vorhanden sind. Rechtlich fixiert ist der Inhalt der Bilanz in § 247 HGB. Der Stichtag, zu dem die Bilanz erstellt wird, entspricht i.d.R. dem Ende des Geschäftsjahres und wird Bilanzstichtag genannt.

Auf der Aktivseite der Bilanz wird aufgeführt, wie die vorhandenen Vermögensgegenstände verwendet werden (**Aktiva**, Mittelverwendung). Dabei findet eine Aufteilung in Anlagevermögen und Umlaufvermögen statt. Als Anlagevermögen gelten diejenigen Vermögensteile, die zum dauerhaften Verbleib im Unternehmen bestimmt sind und somit der Fortführung des Geschäftsbetriebs dienen. Im Gegensatz dazu verbleibt das Umlaufvermögen nur kurze Zeit im Unternehmen, da es entweder verbraucht, verarbeitet, veräußert oder zur Rückzahlung verwendet wird.

Auf der Passivseite der Bilanz wird aufgeführt, woher die Vermögensgegenstände stammen bzw. durch welche Kapitalquellen sie finanziert wurden (**Passiva**, Mittelherkunft). Man unterscheidet Eigenkapital und Fremdkapital, wobei letzteres auch als Schulden bezeichnet wird und sich aus Verbindlichkeiten und Rückstellungen zusammensetzt. Rückstellungen zählen ebenfalls zu den Schulden, da sie nach § 249 HGB für ungewisse Verbindlichkeiten oder für drohende Verluste aus schwebenden Geschäften gebildet werden.

Zusätzlich sind auf beiden Seiten der Bilanz Rechnungsabgrenzungsposten zu bilden. Für das Verständnis dieser Bilanzposten bedarf es einer Abgrenzung der betriebswirtschaftlichen Termini Einnahme und Ausgabe von den Begriffen Ertrag und Aufwand.

Eine Einnahme (bzw. Ausgabe) stellt einen tatsächlichen Zufluss in das (bzw. Abfluss aus dem) Unternehmensvermögen dar. Davon zu unterscheiden ist der Ertrag (bzw. Aufwand), welcher einen erfolgswirksamen Wertzufluss (bzw. Wertabfluss) innerhalb einer bestimmten Abrechnungsperiode bezeichnet.

Dieses Auseinanderklaffen führt zum Entstehen von Rechnungsabgrenzungsposten. Gemäß § 250 HGB werden Rechnungsabgrenzungsposten auf der Aktivseite durch Ausgaben vor dem Bilanzstichtag gebildet, die einen Aufwand erst für einen bestimmten Zeitraum nach diesem Stichtag darstellen. Rech-

nungsabgrenzungsposten auf der Passivseite entstehen hingegen durch Einnahmen vor dem Bilanzstichtag, die einen Ertrag erst für einen bestimmten Zeitraum nach diesem Stichtag darstellen.

Für die Bewertung von Vermögensgegenständen und Schulden gelten besondere Vorschriften. Nach § 252 HGB sind diese grundsätzlich einzeln zu bewerten. Außerdem ist eine vorsichtige Bewertung (**Vorsichtsprinzip**) durchzuführen, d.h., dass einerseits Gewinne nur dann berücksichtigt werden dürfen, sofern sie zum Abschlusstichtag bereits realisiert sind; andererseits sind vorhersehbare Risiken und Verluste schon zu berücksichtigen, sofern sie zum Stichtag des Jahresabschlusses bereits entstanden sind.

§ 253 HGB zufolge sind Vermögensgegenstände höchstens mit ihren Anschaffungs- oder Herstellungskosten (vermindert um Abschreibungen) zu bewerten. Bei Kapitalanlagen greift eine Unterscheidung nach Anlage- und Umlaufvermögen. Solche Kapitalanlagen, die als Anlagevermögen angesehen werden, können im Falle einer Wertminderung zum Bilanzstichtag mit dem niedrigeren Wert angesetzt werden, sofern diese Wertminderung nicht dauerhaft ist (**gemildertes Niederstwertprinzip**). Ist die Wertminderung jedoch dauerhaft oder zählt die Kapitalanlage zum Umlaufvermögen, so muss der niedrigere Wert aus Anschaffungs- und aktuellem Marktwert bilanziert werden (**strenges Niederstwertprinzip**).

Für Verbindlichkeiten ist deren Erfüllungsbetrag anzusetzen, und Rückstellungen sind „in Höhe des nach vernünftiger kaufmännischer Beurteilung notwendigen Erfüllungsbetrages“ anzusetzen.

Für Kapitalanlagen von VU präzisiert § 341b HGB die vorherigen Bewertungsvorschriften, indem auf Aktien, Anteile oder Aktien an Investmentvermögen sowie sonstige festverzinsliche und nicht festverzinsliche Wertpapiere die für Umlaufvermögen geltenden Vorschriften anzuwenden sind.

Hinsichtlich versicherungstechnischer Rückstellungen ergänzt § 341e HGB die vorgenannten Bewertungsgrundsätze um den Aspekt der Sicherstellung der „dauernden Erfüllbarkeit der Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen“, was eine noch vorsichtigere Bewertung impliziert. Für den Anlagestock fondsgebundener Lebensversicherungen gilt gemäß § 341d HGB, dass die zugehörigen Kapitalanlagen „mit dem Zeitwert unter Berücksichtigung des Grundsatzes der Vorsicht“ anzusetzen sind.

Wie eine Bilanz gegliedert sein muss, ist in § 266 HGB geregelt. Das Gesetz gibt vor, welche Posten in der Bilanz auszuweisen sind und in welcher Reihenfolge dies auf der Aktiv- und Passivseite zu erfolgen hat. Um den versicherungsspezifischen Besonderheiten Rechnung zu tragen, wird gemäß § 2 RechVersV für VU eine abweichende Bilanzgliederung verwendet. Dabei wird auch auf die Unterscheidung nach Anlage- und Umlaufvermögen verzichtet.

Nachfolgend wird eine tabellarische Übersicht über die wesentlichen Bilanzposten gegeben. Dabei orientiert sich die Nummerierung der Bilanzpositionen an dem gesetzlich vorgegebenen Formblatt 1 der RechVersV. Fehlende Nummerierungen sind entweder entfallen oder wurden hier als nicht maßgeblich eingestuft und daher ausgelassen:

Bilanz	
Aktiva	Passiva
B Immaterielle Vermögensgegenstände	A Eigenkapital
C Kapitalanlagen	I Gezeichnetes Kapital
D Kapitalanlagen für Rechnung und Risiko von Inhabern von Lebensversicherungspolicen	II Kapitalrücklage
E Forderungen	III Gewinnrücklagen
I Forderungen aus dem selbst abgeschlossenen VG [†] an	IV Bilanzergebnis
1 Versicherungsnehmer	C Nachrangige Verbindlichkeiten
2 Versicherungsvermittler	E Vers.-techn. Rückstellungen ^{††}
II Abrechnungsforderungen aus dem Rückversicherungsgeschäft	I Beitragsüberträge
III Sonstige Forderungen	II Deckungsrückstellung
F Sonstige Vermögensgegenstände	III Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle
G Rechnungsabgrenzungsposten	IV Rückstellung für erfolgsabhängige und erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung
	V Sonstige vers.-techn. Rückstellungen
	F Vers.-techn. Rückstellungen im Bereich der Lebensversicherung, soweit das Anlagerisiko von den Versicherungsnehmern getragen wird ^{††}
	I Deckungsrückstellung
	II Übrige vers.-techn. Rückstellungen
	G Andere Rückstellungen
	H Depotverbindlichkeiten aus dem in Rückdeckung gegebenen VG [†]
	I Andere Verbindlichkeiten
	I Verbindlichkeiten aus dem selbst abgeschlossenen VG [†] gegenüber
	1 Versicherungsnehmern
	2 Versicherungsvermittlern
	II Abrechnungsverbindlichkeiten aus dem Rückversicherungsgeschäft
	III Sonstige Verbindlichkeiten
	K Rechnungsabgrenzungsposten
Bilanzsumme (Summe der Aktiva)	
Bilanzsumme (Summe der Passiva)	

† VG steht für Versicherungsgeschäft;

†† Der Ausweis der Unterpositionen erfolgt i.d.R. „Brutto“, d.h. vor Abzug des in Rückdeckung gegebenen Anteils. Letzterer wird jeweils separat ausgewiesen.

Einige Anmerkungen zu ausgewählten Bilanzposten (vgl. dazu auch *Sollanek (2004)*, wo weitere Ausführungen zu allen Bilanzposten zu finden sind):

- Aktiva C:

Diese Position stellt die wichtigste auf der Aktivseite der Bilanz dar, weil die Kapitalanlagen zur Bedeckung der aus den Versicherungsverträgen resultierenden Verpflichtungen (und deren dauernder Erfüllbarkeit) dienen. Gemäß der in § 124 VAG formulierten Anlagegrundsätze sind diejenigen Vermögenswerte, welche zur Bedeckung der vers.-techn. Rückstellungen gehalten werden, in einer der Art und Laufzeit der Erstversicherungs- und Rückverbindlichkeiten des VU angemessenen Weise anzulegen.

- Aktiva E I 1:

Gemäß § 248 HGB existiert ein Aktivierungsverbot von Aufwendungen für den Abschluss von Versicherungsverträgen. Durch Verwendung des Zillmer-Verfahrens ist es dennoch möglich, Abschlusskosten zu aktivieren (und somit das Verbot zu umgehen). Das gezielmerte Deckungskapital ist zu Vertragsbeginn negativ, die Bilanzdeckungsrückstellung wird aber (mindestens) auf Null angehoben. Der entstehende Fehlbetrag kann dann aktiviert werden und wird unter dieser Position ausgewiesen. Wendet ein VU die Zillmerung an, ist dieser Bilanzposten in *fällige* und *noch nicht fällige* Ansprüche zu untergliedern. Bei dem aktivierten Betrag handelt es sich de facto um den Barwert der vom VN noch nicht getilgten, rechnungsmäßigen einmaligen Abschlusskosten (siehe Abschn. 7.1.1) bzw. aus Sicht des VU um die „noch nicht fälligen Ansprüche der VU auf Beiträge der VN [...], soweit diese geleistete, rechnungsmäßig gedeckte Abschlussaufwendungen betreffen“ (§ 15 RechVersV).

- Passiva A IV:

Das Bilanzergebnis ergibt sich aus dem Jahresüberschuss durch Berücksichtigung von Gewinn- bzw. Verlustvorträgen aus dem Vorjahr. Anstelle des Saldos können die beiden Positionen auch getrennt (als A IV und A V) ausgewiesen werden.

- Passiva E II:

Hierbei handelt es sich um die bedeutendste Bilanzposition auf der Passivseite. An dieser Stelle wird die konventionelle Deckungsrückstellung ausgewiesen, welche auch Teile umfasst, die aus der Überschussverwendung Bonus resultieren.

- Passiva E III:

Bei der Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle handelt es sich um eine Schadenrückstellung. Diese wird für bereits eingetretene Versicherungsfälle gebildet, welche zwar bekannt, aber noch nicht (vollständig) reguliert sind (kurz: RBNS vom Englischen „Reported But

Not Settled“). Dazu zählen auch noch nicht abgewickelte Rückkäufe. Gemäß § 341g HGB sind dabei auch sämtliche Schadenregulierungsaufwendungen zu berücksichtigen. Zudem beinhaltet der Bilanzposten auch eine Spätschadenreserve für Versicherungsfälle, die vor dem Bilanzstichtag zwar bereits eingetreten, aber noch unbekannt sind, d.h. dem VU noch nicht gemeldet und somit auch noch nicht reguliert wurden (kurz: IBNR vom Englischen „Incurred But Not Reported“). Während für die bekannten Versicherungsfälle eine einzelvertragliche Bewertung zu erfolgen hat, findet für die IBNR-Schäden eine pauschale Bewertung statt.

- Passiva E IV:
§ 28 RechVersV folgend wird hier die RfB ausgewiesen. Eine erfolgsabhängige Beitragsrückerstattung liegt vor, wenn die Überschussbeteiligung vom Geschäftsergebnis des gesamten VU oder eines Versicherungszweiges abhängig ist. Bei Nicht-Lebensversicherern überwiegt die erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung, deren Höhe sich z.B. nach dem Schadenverlauf oder anderen vertraglichen bzw. gesetzlichen Regelungen richtet.
- Passiva F I:
Dieser Posten der Passivseite umfasst das bspw. in Anteileinheiten geführte Guthaben aus fonds- oder indexgebundenen Versicherungen und korrespondiert mit Position D auf der Aktivseite.
- Passiva I I 1:
Gemäß § 28 RechVersV wird hierunter insbesondere das Guthaben aus Verzinslicher Ansammlung ausgewiesen.

17.2.2 Gewinn- und Verlustrechnung

In der GuV werden die Erträge und Aufwendungen eines Geschäftsjahres dargestellt. Im Unterschied zur stichtagsbezogenen Bilanz ist die GuV eine zeitraumbezogene Aufstellung. Als Teilergebnis lässt sich der **Rohüberschuss** berechnen, und als eigentliches Ergebnis wird der **Jahresüberschuss** oder – sofern das Ergebnis negativ ist – der Jahresfehlbetrag ausgewiesen. Nach weiteren Verrechnungen ergibt sich daraus das Bilanzergebnis.

Die GuV ist gemäß den Vorgaben des § 275 HGB zu gliedern und nach dem Gesamt- oder Umsatzkostenverfahren aufzustellen. § 2 RechVersV besagt wiederum, dass für VU eine abweichende Gliederung anzuwenden ist, so dass das Gliederungsschema des HGB durch ein entsprechendes Formblatt (Formblatt 3) der RechVersV ersetzt wird. Danach besteht die GuV eines Lebensversicherers aus einer vers.-techn. sowie einer nichtvers.-techn. Rechnung. Erstere zeigt im Ergebnis den Erfolg des Kerngeschäfts Lebensversicherung, während letztere Erträge und Aufwendungen ergänzt, die nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Versicherungsgeschäft stehen (vgl. Sollanek (2004), S. 40).

Der Ausweis der GuV-Posten erfolgt stets für eigene Rechnung (kurz: f.e.R.). Üblicherweise werden die entsprechenden Unterposten zunächst „Brutto“ aufgeführt, d.h. vor Abzug von auf die Rückversicherung entfallenden Beträgen; der zugehörige Anteil des Rückversicherers wird separat ausgewiesen und dann von der Brutto-Größe abgezogen.

Die GuV setzt sich aus den folgenden Posten zusammen:

Gewinn- und Verlustrechnung	
Erträge	Aufwendungen
I Versicherungstechnische Rechnung	
1 Verdiente Beiträge	6 Aufwendungen für Versicherungsfälle
a Gebuchte Beiträge	a Zahlungen für Versicherungsfälle
b Veränderung der Beitragsüberträge	b Veränderung der Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle
2 Beiträge aus der Rückstellung für Beitragsrückerstattung	7 Veränderung der übrigen vers.-techn. Nettorückstellungen
3 Erträge aus Kapitalanlagen	8 Aufwendungen für erfolgsabhängige und erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung
4 Nicht realisierte Gewinne aus Kapitalanlagen	9 Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb
5 Sonstige vers.-techn. Erträge	a Abschlussaufwendungen b Verwaltungsaufwendungen
	10 Aufwendungen für Kapitalanlagen
	11 Nicht realisierte Verluste aus Kapitalanlagen
	12 Sonstige vers.-techn. Aufwendungen
13 Versicherungstechnisches Ergebnis	
II Nichtversicherungstechnische Rechnung	
1 Sonstige Erträge	2 Sonstige Aufwendungen
3 Ergebnis der normalen Geschäftstätigkeit	
4 Außerordentliche Erträge	5 Außerordentliche Aufwendungen
6 Außerordentliches Ergebnis (Jahresergebnis vor Steuern)	
	7 Steuern vom Einkommen und vom Ertrag
	8 Sonstige Steuern
	10 Aufgrund eines Gewinnabführungsvertrags abgeführte Gewinne
11 Jahresüberschuss/-fehlbetrag (Jahresergebnis nach Steuern)	
12 Gewinnvortrag aus dem Vorjahr	12 Verlustvortrag aus dem Vorjahr
13 Entnahmen aus der Kapitalrücklage	16 Einstellungen in Gewinnrücklagen
14 Entnahmen aus Gewinnrücklagen	
18 Bilanzgewinn/-verlust (Bilanzergebnis)	

Auch hier ein paar Anmerkungen zu ausgewählten GuV-Posten:

- GuV 3:
Entsprechend der Bedeutung der Kapitalanlagen in der Bilanz (Aktiva C) sind die aus ihnen generierten Kapitalerträge – neben den verdienten Beiträgen – der zweite wesentliche Ertragsposten in der GuV.
- GuV 6:
Von den Aufwendungen stellen die ausgeschütteten Versicherungsleistungen die mit Abstand größte Position dar.
- GuV 18:
Ist der Bilanzgewinn höher als der eigentliche Gewinn des Unternehmens (Jahresüberschuss), wurden Gewinne aus vorhergehenden Perioden bzw. Entnahmen aus Rücklagen herangezogen, um so ein attraktiveres Ergebnis zu erzeugen. Zweck solcher Maßnahmen kann sein, die Dividendenauszahlung an die Aktionäre zu erhöhen oder Schwächen eines wenig erfolgreichen Geschäftsjahrs abzufedern.

In deutlich reduzierter Form bestehen die in der GuV dargestellten Zahlungsströme im Wesentlichen aus folgenden Ertrags- und Aufwandsgrößen, die einander inhaltlich gegenübergestellt sind:

Erträge	Aufwendungen
Bruttoprämiens	Versicherungsleistungen (Storno, Tod, Ablauf, Renten) Kosten für Versicherungsbetrieb (Abschluss, Verwaltung, Geschäftsvorfälle) Provisionen
Gewinne aus Kapitalanlagen	Kosten für Kapitalanlage Rechnungsmäßige Zinsen
Entnahme aus der RfB	Zuführung zur RfB Direktgutschrift
Veränderung der Aktivierung	Veränderung der Deckungsrückstellung Steuern
Jahresüberschuss/-fehlbetrag	

17.2.3 Gewinnzerlegung

Die Rückverfolgung, aus welchen Quellen sich der Rohüberschuss zusammensetzt, wird als **Gewinnzerlegung** bezeichnet.

Ausgehend von den drei Rechnungsgrundlagen Zins, Biometrie und Kosten gibt es somit mindestens diese drei Quellen. Entsprechend existieren ein Ergebnis aus Kapitalanlagen, ein Risikoergebnis und ein Kostenergebnis.

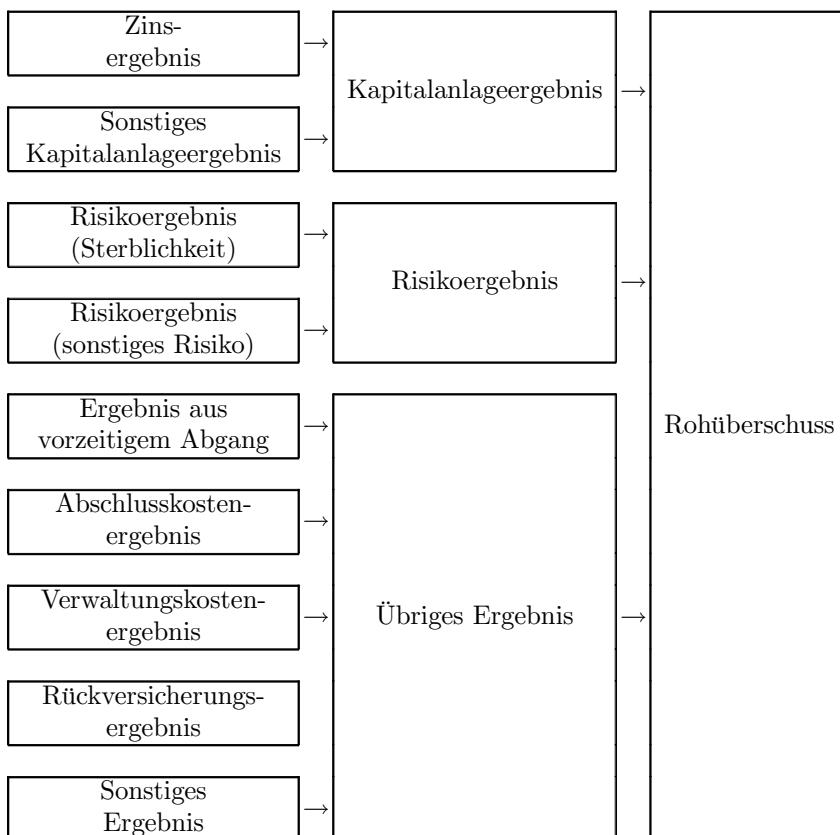
Das Ergebnis aus Kapitalanlagen wird in ein Zinsergebnis und ein sonstiges Kapitalanlageergebnis aufgeteilt.

Beim Risikoergebnis handelt es sich – je nach Produktart – um ein Sterblichkeits-, Langlebigkeits- oder Invaliditätsergebnis, so dass eine Unterscheidung in das Sterblichkeitsergebnis und das Ergebnis aus sonstigem Risiko erfolgt. Das Kostenergebnis zerfällt in ein Ergebnis aus Abschlusskosten und ein Ergebnis aus der laufenden Verwaltung, welches insbesondere Kosten für Geschäftsvorfälle berücksichtigt.

Neben diesen drei Ergebnistöpfen speist sich der Rohüberschuss jedoch noch aus weiteren Quellen.

Das Ergebnis aus vorzeitigem Abgang (man sagt auch kurz Stornoergebnis) entsteht im Wesentlichen durch erhobene Stornoabschläge. Das Ergebnis aus dem in Rückdeckung gegebenen Versicherungsgeschäft zeigt den Saldo aus Rückversicherung, und als Sonstiges Ergebnis werden sämtliche verbleibenden Erträge und Aufwendungen verbucht.

Für Zwecke der Mindestzuführungsverordnung (MindZV) werden alle Ergebnisse außer dem Kapitalanlage- und dem Risikoergebnis zum sog. Übrigen Ergebnis zusammengefasst. Damit ergibt sich folgende Übersicht:

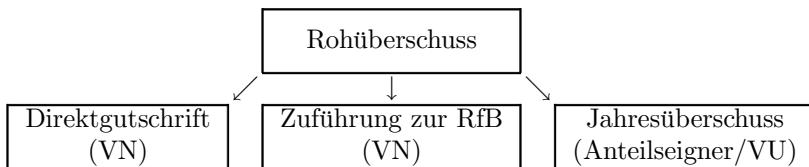


17.3 Mindestzuführung zur RfB

Nachdem nun die Ergebnisse aus der Gewinnzerlegung definiert bzw. bekannt sind, kommen wir an dieser Stelle noch einmal auf die Mindestzuführung zurück.

Steht der Rohüberschuss eines Jahres fest, erfolgt die Gewinnbeteiligung der VN. Aufgrund gesetzlicher Vorgaben (siehe Abschn. 10.4.2.1) ist ein Mindestanteil der Gewinne an die VN weiterzugeben. Prinzipiell kann auch der komplette Rohüberschuss an die VN ausgeschüttet werden, was in praxi jedoch kaum auftreten dürfte. Der Grund dafür liegt vor allem in der Tatsache, dass auch die Anteilseigner des VU eine Dividende für ihre Investition in das Unternehmen erhalten (wollen).

Die Überschussbeteiligung der VN erfolgt einerseits zeitlich sofort in Form der Direktgutschrift und andererseits zeitverzögert, indem ein Teil der Überschüsse zunächst der RfB zugeführt und zu einem späteren Zeitpunkt zwecks Zuteilung wieder entnommen wird. Zusätzlich sind die an die Anteilseigner auszuschüttenden Dividendenzahlungen zu berücksichtigen. Demzufolge zerfällt der Rohüberschuss in drei Komponenten, nämlich die Direktgutschrift, die Zuführung zur RfB sowie die Ausschüttung an die Anteilseigner. Letztere entspricht vereinfacht dem Jahresüberschuss, so dass sich für die Aufteilung des Rohüberschusses folgendes Schaubild ergibt (vgl. Abschn. 10.4):



Da die Direktgutschrift feststeht bzw. festgelegt ist, kann nur der verbleibende Teil des Rohüberschusses zwischen Anteilseignern und Versicherungsnehmern (RfB-Zuführung) aufgeteilt werden.

Falls die Anteilseigner auf ihre Dividende verzichten, wird der gesamte Rohüberschuss (abzüglich Direktgutschrift) der RfB zugeführt. Somit verblieben die gesamten Überschüsse im Unternehmen (in der RfB und kommen so den Versicherten zugute), und der Jahresüberschuss ist Null.

Verlangen die Anteilseigner des VU jedoch eine Dividende, so reduziert diese ausgeschüttete Dividende die Zuführung zur RfB. Anteilseigner haben i.d.R. eine gewisse Vorstellung, wie hoch die an sie ausgezahlte Dividende sein soll. Je höher diese (Ziel-)Dividende ist, desto niedriger ist die tatsächliche Zuführung zur RfB. Ob dieser angestrebte Betrag jedoch in ungekürzter Höhe

an die Aktionäre ausgeschüttet werden kann, ist davon abhängig, ob die Mindestzuführung zur RfB eingehalten bzw. erreicht wird.

Dazu rufen wir uns nun noch einmal die Bestimmungen der MindZV (siehe Abschn. 10.4.2.1) in Erinnerung:

$$\begin{aligned}
 & \max \{0 ; 90\% \text{ der anzurechnenden Kapitalerträge} \\
 & \quad ./. \text{ rechnungsmäßige Zinsen}\} \\
 + & \max \{0 ; 90\% \text{ des Risikoergebnisses}\} \\
 + & \max \{0 ; 50\% \text{ des Übrigen Ergebnisses}\} \\
 ./. & \text{ Direktgutschrift} \\
 \hline
 = & \text{Mindestzuführung zur RfB .}
 \end{aligned}$$

Das Problem, welches nun auftreten kann, resultiert aus einer zu hoch angesetzten Zieldividende im Zusammenspiel mit den auf diese Dividende anfallenden Steuern.

Diese Steuern fließen als Aufwand im Sonstigen Ergebnis in das Übrige Ergebnis und somit in die Berechnung der Mindestzuführung ein, so dass eine höhere Dividende prinzipiell auch die Mindestzuführung reduziert. Die Effekte auf die beiden Größen sind jedoch unterschiedlich stark und hängen insbesondere auch von der Höhe des Steuersatzes ab.

Zur Beurteilung bzw. Beantwortung der Frage, ob eine Kürzung der Zieldividende erforderlich ist, ist daher eine „was wäre wenn“-Betrachtung durchzuführen. Solange die tatsächliche, zunächst aus der Zieldividende resultierende Zuführung oberhalb der geforderten Mindestzuführung liegt, besteht kein Handlungsbedarf. Wenn aber die Mindestzuführung unterschritten wird, ist die Dividendenzahlung so weit zu kürzen, bis die Mindestzuführung wieder erreicht wird.

In der Mathematik ist das potenziell auftretende Phänomen unter dem Paradoxon „Achilles und die Schildkröte“ bekannt. Denn eine Reduktion der Dividende bewirkt, dass die geforderte Mindestzuführung zwar nun erreicht wird, diese aufgrund des geänderten (niedrigeren) Steuerbetrags auf die Dividende jedoch inzwischen weiter gestiegen ist, so dass eine erneute Anpassung der Dividendenzahlung erforderlich ist.

Daher muss der gesuchte Anpassungsbetrag iterativ bestimmt werden. Bezogen auf das Übrige Ergebnis bedeutet dies, dass man sich mit einem geschätzten Übrigen Ergebnis dem tatsächlichen Übrigen Ergebnis von unten nähert, während man ausgehend von der ursprünglichen Zieldividende diese schrittweise reduziert.

Für die wesentlichen Größen betrachten wir exemplarisch und modellartig die ersten beiden Iterationsschritte, wobei es den Ertragsteuersatz bezeichnet und o.B.d.A. eine Direktgutschrift von Null angenommen wird:

Iteration j	0	1	2
Dividende D_j	$D_0 = D_{\text{Ziel}}$	$D_1 = D_0 - \Delta_0$...
Zuführung Z_j	$Z_0 = R\ddot{U} - D_0$	$Z_1 = R\ddot{U} - D_1 = Z_0 + \Delta_0$ $= MZ_0$...
Steuern auf Dividende S_j	$S_0 = es \cdot D_0$	$S_1 = es \cdot D_1 = S_0 - es \cdot \Delta_0$...
Übriges Ergebnis $\ddot{U}E_j$	$\ddot{U}E_0$	$\ddot{U}E_1 = \ddot{U}E_0 + es \cdot \Delta_0$...
Mindestzuführung MZ_j	MZ_0	$MZ_1 = MZ_0 + 0,5 \cdot es \cdot \Delta_0$...
Adjustierung Dividende Δ_j			
– falls $MZ_j \leq Z_j$	$\Delta_0 = 0$	$\Delta_1 = 0$...
– falls $MZ_j > Z_j$	$\Delta_0 = MZ_0 - Z_0$	$\Delta_1 = MZ_1 - Z_1$ $= \Delta_0 - (1 - 0,5 \cdot es) \cdot \Delta_0$ $= 0,5 \cdot es \cdot \Delta_0$...

Anhand dieser Übersicht werden vier Fälle deutlich:

- Ist $MZ_0 \leq Z_0$, erfolgt keine Reduzierung der Dividende ($\Delta_0 = 0$), so dass die Zielpolitik ungekürzt an die Anteilseigner ausgeschüttet werden kann.
- Andernfalls (d.h. $MZ_0 > Z_0$) ist eine Korrektur erforderlich, deren Höhe im ersten Schritt $\Delta_0 = MZ_0 - Z_0$ beträgt.
 - Wenn bereits das Übrige Ergebnis $\ddot{U}E_0$ positiv ist, bewirkt diese Anpassung, dass die Mindestzuführung MZ_0 nun erreicht wird. Die Mindestzuführung selbst ist jedoch aufgrund der Steuern inzwischen um $0,5 \cdot es \cdot \Delta_0$ auf MZ_1 angestiegen, so dass wiederum $MZ_1 > Z_1$ gilt und eine weitere Anpassung i.H.v. $\Delta_1 = 0,5 \cdot es \cdot \Delta_0$ erforderlich wird. Dieses Prozedere wiederholt sich immer wieder. Entsprechend beträgt der Anpassungsbetrag insgesamt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \Delta_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (0,5 \cdot es)^j = \Delta_0 \cdot \frac{1}{1 - 0,5 \cdot es} .$$

- Ist $\ddot{U}E_0$ hingegen negativ und auch $\ddot{U}E_1$ nach der ersten Anpassung i.H.v. Δ_0 immer noch negativ, so spielt das Übrige Ergebnis bei der Ermittlung der Mindestzuführung keine Rolle, da der aus ihm resultierende Beitrag zur Mindestzuführung mit Null maximiert wird. Folg-

lich genügt eine einzige Anpassung, und die Zieldividende wird um den Betrag Δ_0 nach unten korrigiert.

Gleiches gilt auch für den Fall, dass der Steuersatz es Null beträgt, da Anpassungen der Dividendenzahlung dann keine Auswirkung auf das Übrige Ergebnis haben.

- Ist \ddot{UE}_0 negativ und der Steuersatz $es \neq 0$, so kann das Übrige Ergebnis nach der ersten Anpassung positiv sein, d.h. $\ddot{UE}_1 > 0$. Auch dadurch entsteht die Situation, dass die neue, einzuhaltende Mindestzuführung größer als die bisherige ist. Ausgehend davon erfolgen wiederum weitere Anpassungen, und die gesamte Korrektur der Zieldividende beträgt

$$\frac{\Delta_0 + 0,5 \cdot \ddot{UE}_0}{1 - 0,5 \cdot es}.$$

17.4 Anzeige- und Berichtspflichten

VU unterliegen einer Vielzahl an Auflagen, von denen hier exemplarisch zwei vorgestellt werden.

17.4.1 Mitteilung nach § 143 VAG

Für VU im Bereich der Lebensversicherung gibt es besondere Anzeigepflichten dahingehend, dass diese der Aufsichtsbehörde die „Grundsätze für die Berechnung der Prämien und Deckungsrückstellungen einschließlich der verwendeten Rechnungsgrundlagen, mathematischen Formeln, kalkulatorischen Herleitungen und statistischen Nachweise unter deren Beifügung“ anzugezeigen haben.

Das ehemals unter dem Namen „13d-Mitteilung“ bekannte Schriftstück (in Anlehnung an den § 13d Abs. 6 VAG a.F.) ist für sämtliche Tarife des VU einzureichen. Zu regulierten Zeiten waren die Tarife genehmigungspflichtig, seit der Deregulierung ist das Formelwerk nur noch anzeigen- bzw. vorlagepflichtig.

Der Aufbau orientiert sich an einem Muster der BaFin, wonach sich die Mitteilung in die folgenden Abschnitte gliedert:

1. Angaben über den Tarif

In diesem ersten Abschnitt wird festgelegt, ob es sich um einen Einzel- oder Kollektivtarif handelt. Die Tarifbezeichnung wird genannt und die Leistungen des Tarifs beschrieben. Ebenfalls findet man hier Angaben zur Prämienzahlung.

2. Rechnungsgrundlagen

Sowohl für die Prämien- als auch für die Deckungsrückstellungsberechnung werden die jeweils verwendeten Ausscheideordnungen und der Rechnungszins angegeben.

Auch die Kostenstruktur, d.h. die angesetzten Kostensätze inkl. der jeweiligen Bezugsgrößen, sowie weitere Zuschläge (z.B. Ratenzuschläge) oder Nachlässe werden in diesem Abschnitt aufgeführt.

3. Garantiewerte

Hier ist die Ermittlung des garantierten Rückkaufswerts (inkl. Stornoabschlag) sowie der beitragsfreien Leistung darzustellen.

4. Überschussbeteiligung

Unter dieser Rubrik ist anzugeben, welcher Risikoklasse und welcher Bestandsgruppe der Tarif zugeordnet ist. Es wird erläutert, aus welchen Komponenten sich die Überschussbeteiligung zusammensetzt und welche Verwendungsmöglichkeiten bestehen. Darüber hinaus wird dargelegt, welche Regelungen für den Fall des Rückkaufs, der vorzeitigen Beitragsfreistellung und im Leistungsfall bestehen.

5. Formeln

Dieser Abschnitt enthält die Formeln, nach denen sich die (Netto- und Brutto-)Prämien, das Deckungskapital und die Bilanzdeckungsrückstellung berechnen. Sieht der Tarif eine Schlussüberschussbeteiligung vor, ist außerdem anzugeben, wie sich der SÜA-Fonds bestimmt.

6. Sonstiges

Auf freiwilliger Basis kann das VU an dieser Stelle Angaben zu Mindest- und Höchstgrenzen machen, bspw. für die Versicherungssumme, die Prämienhöhe, das Eintrittsalter und die Dauer der Prämienzahlung oder die Versicherungsdauer.

7. Berechnungsbeispiele

Heute zwar nur noch selten zu finden, kann das VU in diesem Abschnitt die Berechnung von Prämie, Deckungskapital, beitragsfreie Leistung und Rückkaufswert für ausgewählte Zeitpunkte darlegen.

17.4.2 Nachweisungen

In der bis zum 31. März 2016 in einer alten und seit 1. August 2017 in einer Neufassung gültigen BerVersV finden sich Regelungen, nach denen ein VU der Aufsichtsbehörde BaFin einen internen jährlichen Bericht vorzulegen hat, der sich aus einer Bilanz, einer GuV sowie formgebundenen Erläuterungen zusammensetzt (§ 1 BerVersV).

Gemäß §§ 9 und 10 BerVersV werden allgemeine und für LebensVU zusätzliche formgebundene Erläuterungen unterschieden. Die formgebundenen Erläuterungen erfolgen in Gestalt von sog. **Nachweisungen** (kurz: **NW**).

In den allgemeinen Nachweisungen sind u.a. die Entwicklung der Kapitalanlagen (NW 101), die Entwicklung des Sicherungs- und restlichen Vermögens (NW 103) sowie die Erträge aus und Aufwendungen für Kapitalanlagen (NW 201) zu beauskunften.

Speziell für LebensVU sind zusätzlich die folgenden Nachweisungen zu befüllen und vorzulegen:

Nachweisung	Inhalt des Formblatts
110	Bewegung der Rückstellung für Beitragsrückerstattung
111	wie NW 110 (nur Neubestand)
112	wie NW 110 (nur Altbestand)
113 [†]	Bewegung der kollektiven Teile der Rückstellung für Beitragsrückerstattung
210	Bewegung des Bestands an Hauptversicherungen (nach Anzahl, Versicherungssumme und Beitrag)
211	Bewegung des Bestands an Zusatzversicherungen (nach Anzahl, Versicherungssumme und Beitrag)
212	Zusammensetzung gebuchten Brutto-Beiträge (Einzel- vs. Kollektivgeschäft, laufende vs. Einmalprämie, konventionelle V mit vs. ohne Überschussbeteiligung vs. fondsgebundene V)
213	Zerlegung des Rohergebnisses nach Ergebnisquellen
214	wie NW 213 (nur Neubestand)
215	wie NW 213 (nur Altbestand)
216	Zusammensetzung der verdienten Bruttobeiträge und der Beiträge aus der RfB (Beitragszerlegung)
217	Entwicklung der Deckungsrückstellung
218	Risikoergebnis und Ergebnis aus vorzeitigem Abgang (getrennt nach Tod, Langlebigkeit, Berufsunfähigkeit)
219 - Seite 1	Kapitalanlageergebnis (getrennt nach Zinsergebnis, sonstigem Kapitalanlageergebnis)
219 - Seite 2	Abschlusskostenergebnis
219 - Seite 3	Verwaltungskostenergebnis
219 - Seite 4	Rückversicherungsergebnis
219 - Seite 5	Sonstiges Ergebnis

([†] mit der Neufassung im Jahr 2017 hinzugekommen)

17.5 Solvabilität

Der Begriff Solvabilität bezeichnet die Ausstattung eines VU mit sog. **Eigenmitteln**. Um die dauerhafte Erfüllbarkeit der seitens des VU eingegangenen Verpflichtungen gegenüber den VN auch in wirtschaftlichen Krisensituationen gewährleisten zu können, muss das VU über Eigenmittel in einer bestimmten (Mindest)Höhe verfügen. Dieser erforderliche Betrag wird als **Solvabilitätskapital** (häufig auch **Solvenzkapital**) bezeichnet.

Ob ein VU über ausreichend Solvabilitätskapital verfügt, wird i.d.R. durch Berechnung der **Solvabilitätsquote** (auch **Bedeckungsquote** oder **Solvenzquote**) gemessen. Diese Kennzahl ergibt sich als der Quotient aus den Eigenmitteln und dem Solvabilitätskapital.

An die Solvabilität, genauer gesagt die Höhe des vorzuhaltenden Solvabilitätskapitals, bestehen gesetzlich verankerte Anforderungen, die in den §§ 89 bis 123 VAG spezifiziert werden.

Die Bestimmungen für die Ermittlung des Solvabilitätskapitals haben sich seit dem 1. Januar 2016 grundlegend geändert. Zu diesem Zeitpunkt ist ein auf Ebene der Europäischen Union verankertes Regelwerk namens **Solvency II** in Kraft getreten, welches neue aufsichtsrechtliche Anforderungen an die VU zur Ermittlung und Sicherstellung ihrer Solvabilität beinhaltet. Die ganzheitliche und risikoorientierte Sichtweise von Solvency II hat zur Folge, dass die Regelungen für die VU sowohl quantitative als auch qualitative Aspekte betreffen, welche durch ein **Drei-Säulen-Modell** beschrieben werden:

Säule 1	Säule 2	Säule 3
Quantitative Anforderungen Kapitalanforderung und Solvenz-Bilanz	Qualitative Anforderungen Risikomanagement und Interne Kontrolle	Offenlegungsanforderungen Berichterstattung und Transparenz

Solvency II ist von zentraler Bedeutung für die Versicherungsbranche und dementsprechend sehr umfänglich. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit dieser groben Übersicht und verweisen für weiterführende Informationen auf die zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema, bspw. online auf den Seiten der BaFin oder des GDV, und als Literatur seien bspw. *Schreiber (2016)* oder *Gründl und Kraft (2016)* genannt.

17.5.1 Solvency I

Vor der Einführung von Solvency II waren die Anforderungen an die Kapitalausstattung von VU in § 53c VAG a.F. formuliert. Danach muss das VU über freie, unbelastete Eigenmittel (Ist-Solvabilität) mindestens in Höhe des geforderten Solvabilitätskapitals (Soll-Solvabilität) verfügen. Letzteres wird in diesem Kontext auch als **Solvabilitätsspanne** bezeichnet.

Als freie, unbelastete Eigenmittel gelten insbesondere das Grundkapital von Versicherungsaktiengesellschaften (abzüglich des Betrags der eigenen Aktien) oder bei Versicherungsvereinen auf Gegenseitigkeit der Gründungsstock, die Kapitalrücklage, Gewinnrücklagen, nachrangige Verbindlichkeiten sowie die freie RfB und der SÜA-Fonds.

In Ergänzung zum VAG wird die Ermittlung der Solvabilitätsspanne in der Kapitalausstattungs-Verordnung geregelt. Danach besteht eine Mindestkapitalanforderung in absoluter Höhe von 2,5 Mio. EUR. Die Solvabilitätskapitalanforderung selbst setzt sich gemäß §§ 9 bis 11 KapAusstV in Verbindung mit § 3 KapAusstV additiv wie folgt zusammen (vereinfachte Darstellung):

- 4% der konventionellen Deckungsrückstellung;
- 1% des Fondsguthabens;
- 0,3% des riskierten Kapitals; abweichend davon
 - 0,1% des riskierten Kapitals bei kurzfristigen Versicherungen auf den Todesfall mit einer Dauer von bis zu drei Jahren, und
 - 0,15% des riskierten Kapitals bei kurzfristigen Versicherungen auf den Todesfall mit einer Dauer vier oder fünf Jahren;
- 18% der Beiträge für Zusatzrisiken zu Lebensversicherungen, sofern das Beitragsvolumen (auf Bestandsebene) nicht größer als 61,3 Mio. EUR ist; von dem Betrag, der diese Grenze übersteigt, werden abweichend 16% der Beiträge angesetzt.

In letzterem Fall wurde eine Regelung aus dem Nicht-Leben-Bereich übernommen.

Da die Solvabilitätsspanne mittels Faktoren auf bestimmte Bezugsgrößen ermittelt wird, spricht man bzgl. Solvency I auch von einer faktorbasierten Bestimmung des Solvabilitätskapitals.

Seit Inkrafttreten von Solvency II gelten die beschriebenen Regelungen für die meisten VU nicht mehr. Ausgenommen davon sind kleine Versicherungsunternehmen. Als *klein* gelten VU (nach § 211 VAG) im Wesentlichen dann, wenn ihre jährlichen, verbuchten Bruttoprämieneinnahmen 5 Mio. EUR nicht übersteigen und ihre gesamten vers.-techn. Rückstellungen höchstens 25 Mio. EUR betragen.

17.5.2 Solvency II

Auf sämtliche Aspekte der Berechnung des Solvabilitätskapitals gemäß Solvency II einzugehen, würde den Rahmen sprengen. Daher werden an dieser Stelle nur die Idee bzw. die Prinzipien erläutert.

Grundsätzlich geht es nach wie vor darum, vorhandene Eigenmittel und ein erforderliches Solvabilitätskapital zu bestimmen. Die Art und Weise, wie dies geschieht, ist jedoch eine vollkommen andere als unter Solvency I. Anstelle des faktorbasierten Ansatzes verfolgt Solvency II einen risikobasierten Ansatz. Dies bedeutet, dass das VU sämtliche Risiken, denen es ausgesetzt ist, identifizieren und bewerten muss. Entsprechend der unternehmensspezifischen Risikosituation ist dann ausreichend viel Risikokapital zu hinterlegen bzw. als Puffer vorzuhalten.

Die beiden geforderten Kapitalbedarfe sind die **Solvabilitätskapitalanforderung** (Englisch „Solvency Capital Requirement“, kurz: SCR) und die **Mindestkapitalanforderung** (Englisch „Minimum Capital Requirement“, kurz: MCR), welche eine Untergrenze des bereitzuhaltenden Solvabilitätskapitals darstellt. Ihre Ermittlung hat mindestens einmal pro Jahr (§ 98 VAG) bzw. vierteljährlich (§ 123 VAG) zu erfolgen.

Für die Berechnung dieser Größen kann nach § 96 VAG entweder eine vom Gesetzgeber vorgegebene Standardformel verwendet werden (§§ 99 bis 110 VAG), oder das VU führt die Berechnung im Rahmen eines VU-spezifischen internen Modells (§§ 111 bis 120 VAG) durch, welches von der Aufsichtsbehörde zertifiziert werden muss.

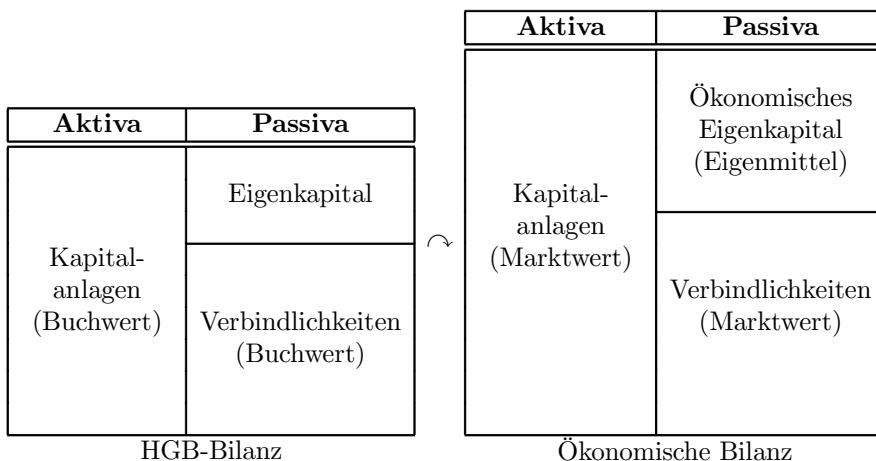
Unter Solvency II findet eine Ein-Jahres-Betrachtung statt. Ziel ist, dass das VU auch in einem Jahr noch über ausreichend finanzielle Mittel verfügt, um die eingegangenen Verpflichtungen erfüllen zu können, selbst wenn äußerst widrige Umstände eintreten sollten.

Die Eigenmittel müssen so bemessen sein, dass das VU auch solche extremen Negativereignisse wie Naturkatastrophen oder einen Aktien-Crash verkraften kann, die – statistisch gesehen – nur einmal in 200 Jahren eintreten (vgl. *GDV (2015)*). Anders ausgedrückt bedeutet dies: Bei Einhaltung des SCR, d.h., falls das VU mindestens über Eigenmittel in der durch das SCR geforderten Höhe verfügt, beträgt die (Ruin)Wahrscheinlichkeit, dass das VU insolvent wird und seine Zusagen gegenüber den Versicherten nicht mehr einhalten kann, höchstens 0,5 Prozent.

Um das Ziel zu erreichen, müssen die Vermögensgegenstände des VU und seine Verbindlichkeiten, insbesondere die vers.-techn. Rückstellungen, gemäß Säule 1 risikoadäquat und marktkonsistent bewertet werden. § 97 VAG listet diejenigen Risiken auf, die im Rahmen der Bewertung mindestens zu betrachten sind und welche somit durch das SCR abzudecken sind. Dazu zählen

insbesondere das Marktrisiko (§ 104 VAG), das Gegenparteiausfallrisiko (§ 105 VAG) und das lebensversicherungstechnische Risiko (§ 102 VAG). Hier schließt sich der Kreis zu Absch. 2.4, wo auf die Risiken bereits kurz eingegangen wurde.

Anhand dieses Katalogs wird deutlich, dass Faktoren auf bestehende Bilanzgrößen nicht mehr genügen, sondern dass stattdessen die Bilanzpositionen selbst anders zu bewerten sind. Anstelle des Ansatzes von Buchwerten, der zu einer Bilanz nach HGB führt, gehen Aktiva und Passiva unter Solvency II zu Marktwerten in die Bilanz ein, so dass man in diesem Zusammenhang auch von einer **ökonomischen Bilanz** spricht. Der Übergang lässt sich schematisch wie folgt verdeutlichen:



Während Marktwerte für Kapitalanlagen weitgehend frei verfügbar sind (z.B. in Form von Aktienkursen oder Preisen von Anleihen und Immobilien), ist ein Marktwert für die vers.-techn. Rückstellungen nicht ohne Weiteres ermittelbar. Für die Verbindlichkeiten wird daher eine bestmögliche Schätzung vorgenommen, indem der erwartete Barwert der aus den Verbindlichkeiten resultierenden, zukünftigen Zahlungsströme berechnet wird. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um folgende Zahlungsströme:

Aufwendungen	Erträge
Versicherungsleistungen (Storno, Tod, Ablauf, Renten)	Bruttoprämiен
Kosten für Versicherungsbetrieb (Abschluss, Verwaltung, Geschäftsvorfälle)	
Provisionen	
Kosten für Kapitalanlage	

In jedem Kapitalmarktszenario werden diese wahrscheinlichkeitsgewichteten Zahlungen entlang der risikofreien Zinskurve diskontiert, so dass sich pro Szenario ein erwarteter Barwert ergibt. Eine Mittelwertbildung dieser Barwerte über alle Szenarien ergibt schließlich den besten Schätzwert für die Verbindlichkeiten, nämlich die BEL (siehe Abschn. 2.2).

Zusammen mit der BEL wird gleichzeitig eine sog. „garantierte BEL“ ermittelt, die ausschließlich auf Basis der aktuell garantierten Leistungen ohne zukünftige Überschussbeteiligung ermittelt wird; die Differenz aus BEL und garantierter BEL ergibt den (erwarteten Bar-)Wert der zukünftigen Überschussbeteiligung. Diese Größe ist von Interesse, da sie eine Art Risikopuffer darstellt. Je nach Entwicklung der ökonomischen Situation des VU können zukünftige Überschüsse gekürzt oder ganz ausgesetzt werden, wodurch u.a. das Entstehen zusätzlicher Verpflichtungen gegenüber den Versicherten vermieden wird und somit eine risikomindernde Wirkung eintritt.

Mit Blick auf die Risiken, die durch das Solvabilitätskapital abgedeckt werden sollen, wird deutlich, dass eine umfassende Bewertung nicht allein durch eine einzige Berechnung bzw. Hochrechnung durchgeführt werden kann. Vielmehr wird eine große Anzahl von Szenarien mit Stressen und Schocks simuliert, und die Höhe des Solvabilitätskapitals ergibt sich aus dem Vergleich der Eigenmittel vor und nach Eintritt eines bestimmten Risikoszenarios.

Der finale Wert des SCR ergibt sich bei Verwendung der Standardformel durch Aggregation der aus den einzelnen Risiken abgeleiteten Solvabilitätskapitale. Bei Verwendung eines Internen Modells, im Rahmen dessen man jeweils verschiedene Konstellationen von zusammen auf- bzw. eintretenden Risiken betrachtet und zu jeder Konstellation ein Solvabilitätskapital errechnet, wird das finale SCR als 0,5%-Quantil aller dieser Kapitalbedarfe bestimmt.

Gemäß § 89 VAG muss ein VU über **anrechnungsfähige Eigenmittel** mindestens in Höhe des SCR verfügen. Aber wie werden diese bestimmt bzw. woraus setzen sie sich zusammen?

Zunächst werden die gesamten Eigenmittel eines VU in Basiseigenmittel und ergänzende Eigenmittel aufgeteilt (§ 89 VAG); gleichzeitig werden sie entsprechend ihrer Werthaltigkeit in drei Qualitätsklassen eingestuft (§ 91 VAG).

Die Basiseigenmittel setzen sich aus dem Überschuss der Vermögenswerte über die Verbindlichkeiten (abzüglich des Betrags der eigenen Aktien) und den nachrangigen Verbindlichkeiten zusammen. Ergänzende Eigenmittel sind solche Eigenmittel, die nicht Basiseigenmittel sind und die zum Ausgleich von Verlusten eingefordert werden können, also bspw. rechtsverbindliche Zahlungsverpflichtungen Dritter gegenüber dem VU (anders ausgedrückt, Forderungen des VU gegenüber Dritten).

Für die Einstufung in die Qualitätsklassen sind (neben weiteren) vornehmlich zwei Merkmale von Bedeutung, nämlich inwieweit die Eigenmittel

1. verfügbar oder einforderbar sind, um Verluste bei Unternehmensfortführung und im Fall der Liquidation vollständig aufzufangen (Verfügbarkeit), und
2. im Fall der Liquidation nachrangig gegenüber allen anderen Verbindlichkeiten sind (Nachrangigkeit).

Im Zusammenspiel dieser Kriterien werden die Eigenmittel wie folgt den Qualitätsklassen zugeordnet (§ 92 VAG):

Qualitätsklasse	Eigenmittel erfüllt beide Merkmale	Eigenmittel erfüllt nur Merkmal 2	sonst
Basis-eigenmittel	1	2	3
Ergänzende Eigenmittel	2	3	3

Ergänzende Eigenmittel können demnach nicht in die höchste Qualitätsklasse eingestuft werden.

Von den Eigenmitteln eines VU sind jedoch nicht alle für die Einhaltung der Solvabilitäts- bzw. Mindestkapitalanforderungen anrechenbar. In den §§ 94 und 95 VAG wird daher spezifiziert, wie sich die jeweils anrechenbaren Eigenmittel zusammensetzen. Die übrigen Eigenmittel sind frei verfügbar.

Die vorgenannte Aufteilung der Eigenmittel in verschiedene Qualitätsklassen ist in erster Linie von theoretischer Bedeutung.

Praktisch ist es so, dass sich das ökonomischen Eigenkapital maßgeblich aus dem nach HGB vorhandenen Eigenkapital des VU, den ungebundenen Teilen der RfB (d.h. SÜA-Fonds und freie RfB), einer sog. Going-Concern-Reserve sowie dem Wert der zukünftigen Gewinne der Anteilseigner (d.h. dem PVFP) zusammensetzt.

Insbesondere die Kennzahl des PVFP reagiert jeweils entsprechend der betrachteten Szenarien, sozusagen „atmet“ sie mit jedem Szenario, und spiegelt auf diese Weise die Schwankungen im Solvabilitätskapitalbedarf wider.

Der Vollständigkeit halber sei kurz der Begriff der **Going-Concern-Reserve** erläutert: Die Bewertung eines VU basiert auf dem bei Projektionsbeginn vorhandenen Portfolio an Versicherungsverträgen. Das bedeutet, dass die Betrachtungen auf einem geschlossenen Versicherungsbestand basieren und

zukünftiges Neugeschäft in der Projektion außen vor bleibt. Da das VU seine normale Geschäftstätigkeit jedoch fortführt (sog. Going-Concern-Annahme), schreibt es naturgemäß in der Zukunft sehr wohl Neugeschäft. Die für dieses zukünftige Neugeschäft anfallenden, überrechnungsmäßigen Abschlusskosten werden i.d.R. aus Überschüssen des Gesamtbestands finanziert und haben somit eine Auswirkung auf die zukünftige Überschussbeteiligung des geschlossenen Bestands. Die vom aktuellen Versicherungsbestand an das zukünftige Neugeschäft weitergegebenen (vererbten) Mittel zur Deckung der Abschlusskosten werden als Going-Concern-Reserve bezeichnet. Die Going-Concern-Reserve steht daher für das im Run Off befindliche Portfolio nicht zur Verfügung, und weil aus ihr folglich keine Leistung bzw. Verpflichtung für das heutige Portfolio generiert wird, ist dieses Kapital verfügbar und kann zur Bedeckung der Solvabilitätsanforderungen herangezogen werden.

Wir schließen mit der schematischen Solvabilitätstübersicht:

Aktiva	Passiva
	freie Eigenmittel
Ökonomischer Wert der Kapitalanlagen	Solvenzkapitalanforderung (inkl. Mindestkapitalanforderung)
	Beste Schätzung der Verbindlichkeiten

Ökonomische Bilanz

Kapitel 18

Projektionsmodelle

Cash Flow Projection Models bzw. **Projektionsmodelle** haben zahlreiche Anwendungsgebiete und kommen bspw. bei folgenden aktuariellen Fragestellungen und Tätigkeiten zur Anwendung:

- Produktentwicklung und Profit Testing
- Bestandscontrolling
- Festlegung und Überprüfung der Überschussbeteiligung (Finanzierbarkeitsnachweis)
- Planungsrechnungen
- Berechnungen für den Jahresabschluss inkl. Erstellung von Bilanz sowie Gewinn- und Verlustrechnung
- Berechnung von Unternehmenskennzahlen, z.B. Market Consistent Embedded Value (MCEV) inkl. Veränderungsanalysen
- Ermittlung von risikobasierten Kapitalanforderungen, bspw. Minimum- oder Zielsolvenzkapital (MCR bzw. SCR) gemäß Solvency II.

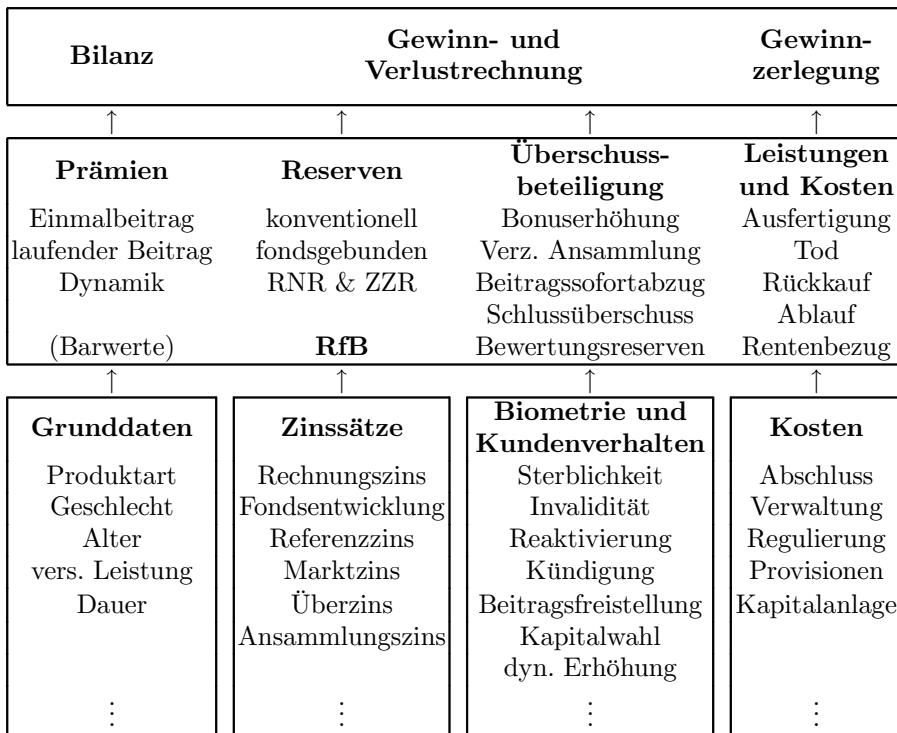
18.1 Struktur

Sämtliche Ergebnisse, die mit Hilfe eines Projektionsmodells produziert werden sollen, resultieren maßgeblich auf der zukünftigen Fortschreibung der Bilanz sowie der Gewinn- und Verlustrechnung des VU über einen Zeitraum von 40 oder noch mehr Jahren. Zusätzlich wird, bspw. für die Einhaltung der MindZV, häufig auch die Gewinnzerlegung benötigt.

Diese Komponenten des Berichtswesens eines VU wiederum werden aus den jährlichen, erwarteten Zahlungsströmen generiert, also im Wesentlichen aus dem Zusammenspiel von eingehenden Prämien, vorhandenen bzw. gebildeten Reserven, zugewiesener Überschussbeteiligung, ausgeschütteten Leistungen und anfallenden Kosten.

Grundlegende Vertragsdaten sowie Annahmen 1. und 2. Ordnung in Form von Zinssätzen, Ausscheideordnungen, Wahrscheinlichkeiten für die Ausübung von Wahlrechten (Optionen) seitens des Kunden und angesetzten Kostenparametern bilden schließlich die Basis für die Ermittlung der genannten Zahlungsströme und Kapitalien.

Der Aufbau eines Projektionsmodells lässt sich ganz allgemein wie folgt darstellen und die Berechnungsgrößen bis auf die grundlegenden Einflussfaktoren herunterbrechen (dabei beschränken wir uns auf eine passivseitige Sichtweise):



18.2 Variablenblöcke

Entsprechend der vorangegangenen Ausführungen lassen sich die zur Implementierung eines Projektionsmodells notwendigen Größen bzw. Variablen zu thematischen Blöcken zusammenfassen. Die nachfolgende Einteilung ist frei gewählt und je nach Sichtweise auch nicht eindeutig bzw. trennscharf. So kann bspw. der Rechnungszins einer Versicherung unter dem Block Zinssätze, aber auch unter der Rubrik Basisgrößen eingeordnet werden. Die Einteilung kor-

respondiert jedoch im Wesentlichen mit den Themen der fachlichen Kapitel dieses Buches und soll auf diese Weise die Wiedererkennung erhöhen:

Variablenblock
Basisgrößen (inkl. Startwerte)
Anzahlen (1. und 2. Ordnung)
Zinssätze (1. und 2. Ordnung)
Ausscheideordnungen (1. und 2. Ordnung)
Kommunikationszahlen
Barwerte
Kosten (1. und 2. Ordnung)
Prämien
Leistungen
Reserven
Überschussbeteiligung
Rückstellung für Beitragsträgerrückerstattung
Beteiligung an den Bewertungsreserven
Bilanz
Gewinn- und Verlustrechnung
Gewinnzerlegung
Solvabilität

18.3 Datensätze

Datensätze bilden die Basis für die in einem Projektionsmodell durchgeführten Berechnungen. Bei den Datensätzen kann es sich um einen einzelnen, echten Vertrag aus dem Bestand des Versicherers handeln, aber auch um einen vom Anwender – z.B. im Rahmen der Produktentwicklung – selbst erstellten Mustervertrag.

Darüber hinaus kann ein Datensatz auch eine Gruppe von Verträgen repräsentieren. Derartige Datensätze entstehen, indem viele gleichartige Verträge nach bestimmten Kriterien (bspw. Produktart und Alter-Dauer-Kombination) zusammengefasst werden. Der Vorgang des Zusammenfassens wird auch als **(Bestands-)Verdichtung** bezeichnet.

Die Datensätze enthalten vertragsindividuelle, relevante Informationen. Dazu zählen u.a.:

- Geschlecht der versicherten Person;
- rechnerisches bzw. technisches Eintrittsalter der versicherten Person;
- Vertrags- bzw. Versicherungsdauer;
- versicherte Leistung;
- vereinbarte Rentenzahlweise;
- Prämienzahlungsdauer;

- vereinbarte Prämienzahlweise;
- Jahresbruttobeitrag;
- Dauer der Aufschubphase;
- vereinbarte Rentengarantiezeit;
- gewähltes Überschussverwendungssystem während der Anwartschaft und im Leistungsfall;
- bislang abgelaufene Vertragsdauer in Jahren;
- Information, ob es sich um den Stammbaustein oder einen Zusatz- bzw. Erhöhungsbaustein handelt.

Darüber hinaus enthält ein Datensatz üblicherweise weitere Startwerte wie z.B.

- die Anzahl Verträge, die der Datensatz repräsentiert,
- den aktuellen Vertragszustand der Police (beitragspflichtig, beitragsfrei, leistungspflichtig) sowie
- erreichte Stände von Leistungen, Reserven und Überschussguthaben.

Zu beachten ist, dass innerhalb eines Projektionsmodells üblicherweise keine Plausibilisierung erfolgt. Sofern die Datensätze aus dem Bestandsverwaltungssystem stammen, wurden die Datenfelder i.d.R. bereits dort einer Plausibilitätsprüfung unterzogen. Bei der eigenen Erstellung muss der Anwender selbst auf die korrekte und plausible Befüllung der einzelnen Felder achten, damit der Datensatz in sich konsistent ist.

18.4 Berechnungen

Viele Betrachtungen im Rahmen der Lebensversicherungsmathematik erfolgen auf einer jährlichen Basis. Insbesondere konventionelle Produkte wie Kapitallebens- oder Rentenversicherungen basieren auf dieser Sichtweise. Einschränkungen (teilweise aufgrund gesetzlicher Vorgaben) derart, dass ein Vertrag höchstens bis zu einem festgelegten Datum (z.B. Geburtstag) laufen darf, führen zu **gebrochenen Dauern**. Beginnt der Vertrag bspw. nicht an einem Geburtstag der VP, soll aber an einem bestimmten Geburtstag enden, führt diese Konstellation zu einer nicht ganzzahligen Versicherungs- oder Aufschubdauer. Wie geht man damit in der Praxis um? Man setzt den Stichtag der Versicherung auf den ersten Geburtstag der VP innerhalb der originären Versicherungsdauer, so dass der Vertrag ab diesem Zeitpunkt eine ganzzahlige Restlaufzeit hat. Die vorher liegende Anzahl Monate ab Vertragsbeginn bis zum ersten Geburtstag, das **Rumpfjahr**, wird dann gesondert betrachtet. Möglich ist auch, dass der Stichtag der Versicherung auf dem Datum des Vertragsbeginns verbleibt und das sich ergebende Rumpfjahr (vom letzten

Stichtag bis zum definierten Vertragsende) hinten angefügt wird. Bei fondsgebundenen Produkten hingegen erfolgt üblicherweise eine monatliche Fortschreibung des Vertrags, so dass Rumpfjahre hierbei keine Rolle spielen.

Berechnungen im Rahmen eines Projektionsmodells können unabhängig von der zugrunde liegenden Produktart grundsätzlich auf einer monatlichen oder jährlichen Basis erfolgen. Dabei kann die zuvor beschriebene Rumpfjahres-Problematik ausgeblendet werden, indem vereinfachend stets von einer ganzzahligen Versicherungs-, Aufschub- oder Prämienzahlungsdauer ausgegangen wird.

Bei manchen Variablen ist inhaltlich darauf zu achten, ob es sich um den Wert zu Beginn oder am Ende des jeweiligen Berechnungsabschnitts handelt. So fallen Prämien üblicherweise zu Beginn einer Periode an, während bspw. Todesfallleistungen am Ende des Zeitabschnitts ausgezahlt werden.

Für die Berechnungen kann es erforderlich sein, bestimmte Variablen zunächst für einen einzelnen Vertrag zu berechnen und die erhaltenen Werte anschließend durch Multiplikation mit einer geeigneten Anzahl in eine Bestandsgröße zu überführen. So wird z.B. der Rückaufwert zunächst auf einzelvertraglicher Ebene bestimmt; für die Ermittlung der vom VU ausgeschütteten Stornoleistungen findet eine Bestandsgewichtung (mit der Anzahl erwarteter Storni 2. Ordnung) statt. Sämtliche Betrachtungen im Zusammenhang mit der RfB, der Bilanz sowie GuV erfolgen i.d.R. ausschließlich auf Bestandsebene.

Sofern die Berechnungen innerhalb des Projektionsmodells ungerundet erfolgen, ist dies insbesondere bei Abgleichen zu Referenzsystemen, z.B. in Microsoft Excel erstellte Tarifrechner, zu beachten.

18.5 Konsistenz und Güte

Dazu, wie mit einfachen Mitteln die Konsistenz und Güte eines Projektionsmodells überprüft bzw. sichergestellt werden kann, dass kein unerwünschter Kapitalabfluss (Englisch „leakage“) aus dem Modell erfolgt, seien hier kurz ein paar Hinweise gegeben.

Immer, wenn für Fortschreibungen oder Variablen eine gleichzeitige Zerlegung in Teilgrößen existiert, empfiehlt sich in Anlehnung an die jeweilige Nachweisung die Durchführung folgender Überprüfungen:

- NW 110: Abgleich der RfB-Entwicklung insgesamt gegen die Summe der einzelnen Quellen der Veränderung;

- NW 110: Abgleich der Gesamtentnahme aus der RfB gegen die Summe der Einzelentnahmen nach Überschussverwendung;
- NW 210: Abgleich der Bestandsveränderung insgesamt gegen die Summe der Veränderungskomponenten (getrennt nach Anzahlen, Versicherungs- summe und Prämien);
- NW 213: Abgleich des Rohüberschusses gegen die Summe der einzelnen Teilergebnisse;
- NW 216: Überprüfung der Beitragszerlegung;
- NW 217: Abgleich der Deckungskapital-Veränderung insgesamt gegen die Summe der einzelnen Bestandteile der Veränderung.

Die Güte der Implementierungen lässt sich häufig durch kanonische Tests sicherstellen. Ob bspw. die Berechnung der Zinszusatzreserve korrekt im Modell abgebildet ist, lässt sich i.d.R. einfach dadurch prüfen, ob sich bei Übereinstimmung des Referenzzinses mit dem Rechnungszins eine ZZR von Null ergibt. Auch würde man erwarten, dass bei Gleichheit der Annahmen erster und zweiter Ordnung bestimmte Teilergebnisse des Rohüberschusses (z.B. das Risikoergebnis) verschwindet (also den Wert Null annimmt).

18.6 Ergebnisse

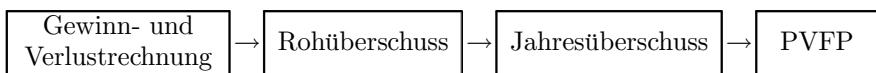
Neben der Bilanzprojektion an sich, als Ergebnis einer Hochrechnung, und vielen weiteren, möglichen Resultaten einer Projektion betrachten wir zum Abschluss noch einmal die bedeutsame Kennzahl des PVFP.

Vereinfacht ausgedrückt entspricht der PVFP der Summe der diskontierten (erwarteten) Jahresüberschüsse $JÜ_t$ über den Projektionszeitraum T , d.h.

$$PVFP = \sum_{t=0}^T v(t) \cdot JÜ_t$$

mit einer Diskontierungsfunktion $v(t)$.

Der Jahresüberschuss $JÜ_t$ im Jahr $t \in \{0; 1; \dots; T\}$ entspricht der Ausschüttung an den Anteilseigner und hängt folglich vom Rohüberschuss des jeweiligen (Geschäfts)Jahres ab, der wiederum im Rahmen der (projizierten) GuV ermittelt wird. Anknüpfend an die Übersicht aus Abschn. 18.1 ergibt sich somit folgende Berechnungskette:



Teil IV

Anhang

Anhang A

Biometrische Rechnungsgrundlagen

In diesem Anhang sind die im Rahmen des Buches verwendeten biometrischen Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung tabelliert. Sofern Kommutationszahlen angegeben sind, wurden diese auf Basis eines fiktiven Rechnungszinses von $i = 2\%$ berechnet.

A.1 DAV 2008 T

An dieser Stelle sind ausschließlich die Sterbewahrscheinlichkeiten unter Verwendung des vollen Irrtumszuschlags angegeben (d.h. bei einem Gesamtzuschlag von 34% auf die Sterblichkeiten 2. Ordnung). Eine Trennung nach Raucher/Nichtraucher ist möglich, jedoch sind die entsprechenden Werte hier nicht tabelliert.

A.1.1 Männer

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
0	0,006113	1.000.000	1.000.000,000	38.854.794,492	1.139.528.771,292
1	0,000423	993.887	974.399,020	37.854.794,492	1.100.673.976,800
2	0,000343	993.467	954.889,067	36.880.395,473	1.062.819.182,308
3	0,000275	993.126	935.844,648	35.925.506,405	1.025.938.786,835
4	0,000220	992.853	917.242,441	34.989.661,758	990.013.280,430
5	0,000182	992.634	899.059,459	34.072.419,316	955.023.618,673
6	0,000155	992.454	881.270,422	33.173.359,857	920.951.199,357
7	0,000139	992.300	863.856,691	32.292.089,435	887.777.839,499
8	0,000129	992.162	846.800,603	31.428.232,745	855.485.750,064
9	0,000125	992.034	830.089,574	30.581.432,142	824.057.517,319

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
10	0,000129	991.910	813.711, 581	29.751.342, 568	793.476.085, 178
11	0,000143	991.782	797.653, 542	28.937.630, 986	763.724.742, 610
12	0,000173	991.640	781.901, 448	28.139.977, 445	734.787.111, 624
13	0,000222	991.469	766.437, 431	27.358.075, 997	706.647.134, 179
14	0,000303	991.248	751.242, 433	26.591.638, 566	679.289.058, 182
15	0,000417	990.948	736.289, 026	25.840.396, 133	652.697.419, 617
16	0,000557	990.535	721.550, 974	25.104.107, 107	626.857.023, 483
17	0,000709	989.983	707.008, 892	24.382.556, 133	601.752.916, 376
18	0,000850	989.281	692.654, 532	23.675.547, 241	577.370.360, 243
19	0,000953	988.440	678.495, 859	22.982.892, 709	553.694.813, 002
20	0,001012	987.498	664.558, 090	22.304.396, 850	530.711.920, 293
21	0,001022	986.499	650.868, 194	21.639.838, 760	508.407.523, 443
22	0,001004	985.491	637.453, 928	20.988.970, 566	486.767.684, 683
23	0,000963	984.501	624.327, 377	20.351.516, 638	465.778.714, 116
24	0,000911	983.553	611.496, 225	19.727.189, 262	445.427.197, 478
25	0,000856	982.657	598.959, 953	19.115.693, 037	425.700.008, 216
26	0,000808	981.816	586.712, 983	18.516.733, 085	406.584.315, 179
27	0,000772	981.023	574.744, 038	17.930.020, 101	388.067.582, 094
28	0,000752	980.265	563.039, 545	17.355.276, 063	370.137.561, 993
29	0,000745	979.528	551.584, 450	16.792.236, 518	352.782.285, 930
30	0,000752	978.799	540.366, 196	16.240.652, 067	335.990.049, 413
31	0,000768	978.063	529.372, 393	15.700.285, 871	319.749.397, 345
32	0,000791	977.311	518.593, 956	15.170.913, 478	304.049.111, 474
33	0,000820	976.538	508.023, 282	14.652.319, 523	288.878.197, 995
34	0,000855	975.738	497.653, 631	14.144.296, 241	274.225.878, 473
35	0,000895	974.903	487.478, 565	13.646.642, 610	260.081.582, 232
36	0,000945	974.031	477.492, 424	13.159.164, 045	246.434.939, 622
37	0,001005	973.110	467.687, 444	12.681.671, 621	233.275.775, 577
38	0,001083	972.132	458.056, 293	12.213.984, 177	220.594.103, 956
39	0,001181	971.079	448.588, 449	11.755.927, 884	208.380.119, 779
40	0,001301	969.933	439.273, 202	11.307.339, 435	196.624.191, 895
41	0,001447	968.671	430.099, 713	10.868.066, 234	185.316.852, 460
42	0,001623	967.269	421.056, 234	10.437.966, 521	174.448.786, 226
43	0,001833	965.699	412.130, 255	10.016.910, 287	164.010.819, 705
44	0,002082	963.929	403.308, 647	9.604.780, 032	153.993.909, 418
45	0,002364	961.922	394.577, 410	9.201.471, 385	144.389.129, 386
46	0,002669	959.648	385.926, 107	8.806.893, 975	135.187.658, 001
47	0,002983	957.087	377.349, 088	8.420.967, 868	126.380.764, 026
48	0,003302	954.232	368.846, 526	8.043.618, 780	117.959.796, 158
49	0,003630	951.081	360.420, 191	7.674.772, 254	109.916.177, 379

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
50	0, 003981	947.629	352.070, 456	7.314.352, 063	102.241.405, 125
51	0, 004371	943.856	343.793, 004	6.962.281, 607	94.927.053, 061
52	0, 004812	939.731	335.578, 710	6.618.488, 604	87.964.771, 454
53	0, 005308	935.209	327.415, 594	6.282.909, 893	81.346.282, 851
54	0, 005857	930.244	319.291, 835	5.955.494, 300	75.063.372, 957
55	0, 006460	924.796	311.197, 787	5.636.202, 465	69.107.878, 658
56	0, 007117	918.822	303.124, 950	5.325.004, 678	63.471.676, 193
57	0, 007831	912.283	295.066, 284	5.021.879, 728	58.146.671, 515
58	0, 008604	905.138	287.015, 314	4.726.813, 444	53.124.791, 787
59	0, 009454	897.351	278.966, 504	4.439.798, 130	48.397.978, 344
60	0, 010404	888.867	270.910, 936	4.160.831, 626	43.958.180, 214
61	0, 011504	879.619	262.835, 665	3.889.920, 690	39.797.348, 588
62	0, 012818	869.500	254.717, 651	3.627.085, 024	35.907.427, 898
63	0, 014429	858.355	246.522, 235	3.372.367, 374	32.280.342, 874
64	0, 016415	845.970	238.201, 143	3.125.845, 138	28.907.975, 501
65	0, 018832	832.083	229.697, 129	2.887.643, 995	25.782.130, 362
66	0, 021704	816.413	220.952, 424	2.657.946, 867	22.894.486, 367
67	0, 025016	798.694	211.918, 502	2.436.994, 443	20.236.539, 500
68	0, 028738	778.714	202.565, 833	2.225.075, 940	17.799.545, 058
69	0, 032822	756.335	192.886, 760	2.022.510, 108	15.574.469, 117
70	0, 037219	731.511	182.897, 874	1.829.623, 347	13.551.959, 010
71	0, 041880	704.285	172.637, 841	1.646.725, 474	11.722.335, 662
72	0, 046597	674.789	162.164, 479	1.474.087, 633	10.075.610, 189
73	0, 051181	643.346	151.576, 569	1.311.923, 154	8.601.522, 556
74	0, 056110	610.419	140.998, 754	1.160.346, 585	7.289.599, 402
75	0, 061477	576.168	130.477, 758	1.019.347, 832	6.129.252, 817
76	0, 067433	540.747	120.055, 272	888.870, 073	5.109.904, 986
77	0, 074160	504.283	109.764, 299	768.814, 801	4.221.034, 912
78	0, 081806	466.885	99.631, 547	659.050, 503	3.452.220, 111
79	0, 090478	428.691	89.687, 342	559.418, 956	2.793.169, 608
80	0, 100261	389.904	79.973, 148	469.731, 613	2.233.750, 652
81	0, 111193	350.812	70.544, 078	389.758, 466	1.764.019, 039
82	0, 123283	311.804	61.470, 658	319.214, 387	1.374.260, 573
83	0, 136498	273.364	52.835, 657	257.743, 730	1.055.046, 186
84	0, 150887	236.050	44.729, 114	204.908, 072	797.302, 456
85	0, 166500	200.433	37.235, 364	160.178, 959	592.394, 384
86	0, 183344	167.061	30.427, 134	122.943, 594	432.215, 425
87	0, 201323	136.432	24.361, 276	92.516, 461	309.271, 831
88	0, 220284	108.965	19.075, 285	68.155, 185	216.755, 370
89	0, 240073	84.962	14.581, 671	49.079, 900	148.600, 185

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
90	0, 260556	64.565	10.863, 731	34.498, 229	99.520, 285
91	0, 281602	47.742	7.875, 609	23.634, 497	65.022, 057
92	0, 303079	34.298	5.546, 884	15.758, 889	41.387, 560
93	0, 324872	23.903	3.789, 941	10.212, 005	25.628, 671
94	0, 346887	16.137	2.508, 525	6.422, 064	15.416, 666
95	0, 369051	10.540	1.606, 226	3.913, 539	8.994, 602
96	0, 391305	6.650	993, 575	2.307, 313	5.081, 063
97	0, 413938	4.048	592, 926	1.313, 738	2.773, 750
98	0, 437313	2.372	340, 678	720, 813	1.460, 011
99	0, 461101	1.335	187, 936	380, 135	739, 198
100	0, 485304	719	99, 293	192, 199	359, 063
101	0, 509924	370	50, 104	92, 906	166, 864
102	0, 534957	181	24, 073	42, 803	73, 958
103	0, 560407	84	10, 976	18, 730	31, 155
104	0, 586265	37	4, 730	7, 754	12, 425
105	0, 612529	15	1, 919	3, 024	4, 671
106	0, 639188	6	0, 729	1, 105	1, 647
107	0, 666233	2	0, 258	0, 377	0, 542
108	0, 693651	1	0, 084	0, 119	0, 165
109	0, 721425	0	0, 025	0, 034	0, 046
110	0, 749533	0	0, 007	0, 009	0, 012
111	0, 777950	0	0, 002	0, 002	0, 003
112	0, 806647	0	0, 000	0, 000	0, 001
113	0, 835585	0	0, 000	0, 000	0, 000
114	0, 864722	0	0, 000	0, 000	0, 000
115	0, 894008	0	0, 000	0, 000	0, 000
116	0, 923382	0	0, 000	0, 000	0, 000
117	0, 952778	0	0, 000	0, 000	0, 000
118	0, 982113	0	0, 000	0, 000	0, 000
119	1, 000000	0	0, 000	0, 000	0, 000
120	1, 000000	0	0, 000	0, 000	0, 000
121	1, 000000	0	0, 000	0, 000	0, 000

A.1.2 Frauen

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
0	0, 005088	1.000.000	1.000.000, 000	40.064.225, 706	1.223.991.753, 930
1	0, 000387	994.912	975.403, 922	39.064.225, 706	1.183.927.528, 223
2	0, 000318	994.527	955.908, 275	38.088.821, 785	1.144.863.302, 517
3	0, 000255	994.211	936.866, 957	37.132.913, 510	1.106.774.480, 733
4	0, 000202	993.957	918.262, 800	36.196.046, 553	1.069.641.567, 223
5	0, 000163	993.756	900.075, 795	35.277.783, 753	1.033.445.520, 670
6	0, 000134	993.594	882.283, 414	34.377.707, 959	998.167.736, 917
7	0, 000115	993.461	864.867, 831	33.495.424, 544	963.790.028, 958
8	0, 000105	993.347	847.812, 129	32.630.556, 713	930.294.604, 414
9	0, 000099	993.243	831.101, 087	31.782.744, 584	897.664.047, 701
10	0, 000102	993.144	814.724, 322	30.951.643, 497	865.881.303, 117
11	0, 000111	993.043	798.667, 863	30.136.919, 175	834.929.659, 620
12	0, 000127	992.933	782.920, 795	29.338.251, 313	804.792.740, 445
13	0, 000153	992.807	767.471, 925	28.555.330, 518	775.454.489, 133
14	0, 000188	992.655	752.308, 335	27.787.858, 593	746.899.158, 615
15	0, 000228	992.468	737.418, 531	27.035.550, 258	719.111.300, 022
16	0, 000271	992.242	722.794, 509	26.298.131, 727	692.075.749, 764
17	0, 000310	991.973	708.430, 031	25.575.337, 218	665.777.618, 037
18	0, 000324	991.666	694.323, 939	24.866.907, 187	640.202.280, 818
19	0, 000330	991.344	680.489, 194	24.172.583, 248	615.335.373, 631
20	0, 000328	991.017	666.926, 110	23.492.094, 054	591.162.790, 383
21	0, 000322	990.692	653.634, 665	22.825.167, 944	567.670.696, 329
22	0, 000314	990.373	640.611, 956	22.171.533, 278	544.845.528, 385
23	0, 000304	990.062	627.853, 729	21.530.921, 322	522.673.995, 107
24	0, 000297	989.761	615.355, 747	20.903.067, 593	501.143.073, 784
25	0, 000293	989.467	603.110, 771	20.287.711, 847	480.240.006, 191
26	0, 000292	989.177	591.111, 823	19.684.601, 076	459.952.294, 345
27	0, 000292	988.888	579.352, 175	19.093.489, 253	440.267.693, 269
28	0, 000296	988.600	567.826, 474	18.514.137, 079	421.174.204, 016
29	0, 000302	988.307	556.527, 841	17.946.310, 604	402.660.066, 937
30	0, 000311	988.009	545.450, 754	17.389.782, 763	384.713.756, 333
31	0, 000327	987.701	534.589, 332	16.844.332, 009	367.323.973, 569
32	0, 000351	987.378	523.935, 806	16.309.742, 677	350.479.641, 560
33	0, 000386	987.032	513.482, 259	15.785.806, 871	334.169.898, 883
34	0, 000433	986.651	503.219, 662	15.272.324, 612	318.384.092, 012
35	0, 000490	986.224	493.138, 988	14.769.104, 950	303.111.767, 400
36	0, 000555	985.740	483.232, 696	14.275.965, 963	288.342.662, 450
37	0, 000624	985.193	473.494, 609	13.792.733, 267	274.066.696, 487
38	0, 000701	984.578	463.920, 734	13.319.238, 657	260.273.963, 220
39	0, 000783	983.888	454.505, 417	12.855.317, 923	246.954.724, 563

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
40	0, 000872	983.118	445.244, 647	12.400.812, 506	234.099.406, 640
41	0, 000972	982.261	436.133, 719	11.955.567, 859	221.698.594, 133
42	0, 001084	981.306	427.166, 468	11.519.434, 141	209.743.026, 274
43	0, 001213	980.242	418.336, 685	11.092.267, 673	198.223.592, 133
44	0, 001359	979.053	409.636, 513	10.673.930, 988	187.131.324, 461
45	0, 001524	977.723	401.058, 644	10.264.294, 475	176.457.393, 473
46	0, 001706	976.232	392.595, 520	9.863.235, 831	166.193.098, 998
47	0, 001903	974.567	384.240, 933	9.470.640, 311	156.329.863, 167
48	0, 002109	972.712	375.989, 924	9.086.399, 377	146.859.222, 857
49	0, 002324	970.661	367.840, 159	8.710.409, 453	137.772.823, 479
50	0, 002546	968.405	359.789, 508	8.342.569, 294	129.062.414, 027
51	0, 002782	965.940	351.836, 749	7.982.779, 786	120.719.844, 732
52	0, 003035	963.252	343.978, 372	7.630.943, 037	112.737.064, 946
53	0, 003306	960.329	336.210, 193	7.286.964, 666	105.106.121, 909
54	0, 003593	957.154	328.528, 120	6.950.754, 473	97.819.157, 243
55	0, 003898	953.715	320.929, 136	6.622.226, 353	90.868.402, 770
56	0, 004228	949.997	313.409, 955	6.301.297, 217	84.246.176, 418
57	0, 004585	945.981	305.965, 547	5.987.887, 262	77.944.879, 201
58	0, 004974	941.643	298.590, 877	5.681.921, 715	71.956.991, 939
59	0, 005402	936.960	291.280, 084	5.383.330, 838	66.275.070, 224
60	0, 005884	931.898	284.026, 068	5.092.050, 754	60.891.739, 386
61	0, 006449	926.415	276.818, 489	4.808.024, 686	55.799.688, 632
62	0, 007126	920.441	269.640, 477	4.531.206, 197	50.991.663, 946
63	0, 007935	913.881	262.469, 626	4.261.565, 720	46.460.457, 749
64	0, 008898	906.630	255.281, 304	3.999.096, 094	42.198.892, 029
65	0, 010025	898.563	248.048, 834	3.743.814, 790	38.199.795, 936
66	0, 011323	889.555	240.747, 200	3.495.765, 956	34.455.981, 146
67	0, 012797	879.482	233.354, 137	3.255.018, 755	30.960.215, 190
68	0, 014460	868.227	225.850, 887	3.021.664, 618	27.705.196, 435
69	0, 016332	855.673	218.220, 669	2.795.813, 732	24.683.531, 817
70	0, 018440	841.698	210.447, 735	2.577.593, 062	21.887.718, 085
71	0, 020813	826.177	202.516, 744	2.367.145, 328	19.310.125, 023
72	0, 023475	808.982	194.413, 493	2.164.628, 584	16.942.979, 696
73	0, 027035	789.991	186.127, 094	1.970.215, 091	14.778.351, 112
74	0, 030413	768.634	177.544, 263	1.784.087, 997	12.808.136, 021
75	0, 034287	745.257	168.769, 225	1.606.543, 734	11.024.048, 023
76	0, 038749	719.704	159.786, 896	1.437.774, 509	9.417.504, 289
77	0, 043937	691.817	150.583, 641	1.277.987, 613	7.979.729, 780
78	0, 049993	661.420	141.144, 557	1.127.403, 972	6.701.742, 167
79	0, 057024	628.354	131.459, 134	986.259, 415	5.574.338, 195

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
80	0, 065113	592.523	121.532, 165	854.800, 281	4.588.078, 779
81	0, 074288	553.942	111.391, 021	733.268, 116	3.733.278, 498
82	0, 084590	512.791	101.094, 122	621.877, 096	3.000.010, 381
83	0, 096095	469.414	90.728, 010	520.782, 973	2.378.133, 286
84	0, 109028	424.305	80.401, 473	430.054, 963	1.857.350, 312
85	0, 123611	378.044	70.230, 844	349.653, 491	1.427.295, 349
86	0, 140022	331.314	60.342, 685	279.422, 647	1.077.641, 859
87	0, 158257	284.922	50.875, 865	219.079, 961	798.219, 212
88	0, 178185	239.832	41.984, 709	168.204, 097	579.139, 251
89	0, 199669	197.097	33.827, 121	126.219, 388	410.935, 155
90	0, 222504	157.743	26.542, 053	92.392, 267	284.715, 767
91	0, 246453	122.645	20.231, 706	65.850, 214	192.323, 500
92	0, 271195	92.418	14.946, 609	45.618, 509	126.473, 286
93	0, 295584	67.355	10.679, 572	30.671, 900	80.854, 777
94	0, 319362	47.446	7.375, 354	19.992, 328	50.182, 877
95	0, 343441	32.294	4.921, 516	12.616, 974	30.190, 549
96	0, 367818	21.203	3.167, 907	7.695, 458	17.573, 575
97	0, 392493	13.404	1.963, 426	4.527, 550	9.878, 117
98	0, 417460	8.143	1.169, 407	2.564, 125	5.350, 567
99	0, 442716	4.744	667, 869	1.394, 718	2.786, 442
100	0, 468258	2.644	364, 895	726, 849	1.391, 724
101	0, 494075	1.406	190, 225	361, 955	664, 874
102	0, 520164	711	94, 353	171, 729	302, 920
103	0, 546514	341	44, 386	77, 377	131, 190
104	0, 573114	155	19, 734	32, 991	53, 814
105	0, 599953	66	8, 259	13, 257	20, 823
106	0, 627014	26	3, 239	4, 998	7, 566
107	0, 654283	10	1, 184	1, 759	2, 568
108	0, 681741	3	0, 401	0, 574	0, 810
109	0, 709364	1	0, 125	0, 173	0, 235
110	0, 737130	0	0, 036	0, 048	0, 063
111	0, 765011	0	0, 009	0, 012	0, 015
112	0, 792974	0	0, 002	0, 003	0, 003
113	0, 820987	0	0, 000	0, 001	0, 001
114	0, 849009	0	0, 000	0, 000	0, 000
115	0, 876998	0	0, 000	0, 000	0, 000
116	0, 904905	0	0, 000	0, 000	0, 000
117	0, 932675	0	0, 000	0, 000	0, 000
118	0, 960249	0	0, 000	0, 000	0, 000
119	0, 987564	0	0, 000	0, 000	0, 000
120	1, 000000	0	0, 000	0, 000	0, 000
121	1, 000000	0	0, 000	0, 000	0, 000

A.2 DAV 2004 R (Grundtafel mit Altersverschiebung)

Die Grundtafel entspricht der Sterblichkeit des Geburtsjahrgangs 1965. Für Personen, die in einem abweichenden Jahr geboren sind, wird deren Eintrittsalter um die entsprechende Altersverschiebung angepasst.

A.2.1 Männer

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
0	0,000083	1.000.000	1.000.000,000	42.053.205,289	1.389.722.082,438
1	0,000083	999.917	980.310,784	41.053.205,289	1.347.668.877,149
2	0,000083	999.834	961.009,234	40.072.894,504	1.306.615.671,861
3	0,000083	999.751	942.087,716	39.111.885,271	1.266.542.777,356
4	0,000083	999.668	923.538,748	38.169.797,555	1.227.430.892,086
5	0,000083	999.585	905.354,994	37.246.258,807	1.189.261.094,531
6	0,000083	999.502	887.529,264	36.340.903,813	1.152.014.835,723
7	0,000083	999.419	870.054,509	35.453.374,549	1.115.673.931,910
8	0,000083	999.336	852.923,818	34.583.320,040	1.080.220.557,361
9	0,000083	999.253	836.130,417	33.730.396,222	1.045.637.237,321
10	0,000083	999.170	819.667,665	32.894.265,805	1.011.906.841,099
11	0,000098	999.087	803.529,052	32.074.598,140	979.012.575,294
12	0,000104	998.989	787.696,378	31.271.069,088	946.937.977,155
13	0,000114	998.886	772.171,037	30.483.372,710	915.666.908,066
14	0,000140	998.772	756.944,127	29.711.201,673	885.183.535,357
15	0,000192	998.632	741.998,191	28.954.257,546	855.472.333,684
16	0,000276	998.440	727.309,537	28.212.259,355	826.518.076,138
17	0,000364	998.165	712.851,764	27.484.949,818	798.305.816,783
18	0,000596	997.801	698.619,888	26.772.098,054	770.820.866,965
19	0,000598	997.207	684.513,246	26.073.478,166	744.048.768,910
20	0,000598	996.610	670.690,105	25.388.964,921	717.975.290,744
21	0,000598	996.014	657.146,110	24.718.274,816	692.586.325,823
22	0,000598	995.419	643.875,624	24.061.128,706	667.868.051,007
23	0,000598	994.823	630.873,124	23.417.253,082	643.806.922,301
24	0,000598	994.228	618.133,198	22.786.379,958	620.389.669,219
25	0,000598	993.634	605.650,543	22.168.246,760	597.603.289,261
26	0,000598	993.040	593.419,965	21.562.596,217	575.435.042,500
27	0,000598	992.446	581.436,372	20.969.176,252	553.872.446,283
28	0,000598	991.852	569.694,778	20.387.739,880	532.903.270,031
29	0,000598	991.259	558.190,294	19.818.045,102	512.515.530,151

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
30	0,000598	990.666	546.918,134	19.259.854,808	492.697.485,049
31	0,000605	990.074	535.873,605	18.712.936,674	473.437.630,241
32	0,000626	989.475	525.048,433	18.177.063,069	454.724.693,568
33	0,000663	988.856	514.431,130	17.652.014,636	436.547.630,499
34	0,000713	988.200	504.009,865	17.137.583,506	418.895.615,863
35	0,000754	987.495	493.775,005	16.633.573,642	401.758.032,357
36	0,000805	986.751	483.728,136	16.139.798,636	385.124.458,715
37	0,000871	985.957	473.861,505	15.656.070,500	368.984.660,079
38	0,000940	985.098	464.165,463	15.182.208,995	353.328.589,579
39	0,001008	984.172	454.636,419	14.718.043,532	338.146.380,585
40	0,001073	983.180	445.272,691	14.263.407,113	323.428.337,053
41	0,001137	982.125	436.073,445	13.818.134,422	309.164.929,939
42	0,001197	981.008	427.036,891	13.382.060,977	295.346.795,517
43	0,001259	979.834	418.162,479	12.955.024,086	281.964.734,540
44	0,001325	978.600	409.447,071	12.536.861,607	269.009.710,454
45	0,001395	977.304	400.886,817	12.127.414,536	256.472.848,847
46	0,001473	975.940	392.478,020	11.726.527,719	244.345.434,311
47	0,001557	974.503	384.215,588	11.334.049,700	232.618.906,592
48	0,001644	972.985	376.095,455	10.949.834,112	221.284.856,892
49	0,001735	971.386	368.114,857	10.573.738,657	210.335.022,780
50	0,001826	969.700	360.270,762	10.205.623,800	199.761.284,123
51	0,001924	967.930	352.561,674	9.845.353,038	189.555.660,322
52	0,002023	966.068	344.983,672	9.492.791,364	179.710.307,284
53	0,002121	964.113	337.535,069	9.147.807,691	170.217.515,920
54	0,002212	962.068	330.214,860	8.810.272,622	161.069.708,229
55	0,002294	959.940	323.023,946	8.480.057,762	152.259.435,607
56	0,002370	957.738	315.963,656	8.157.033,817	143.779.377,844
57	0,002451	955.468	309.034,139	7.841.070,161	135.622.344,028
58	0,002540	953.126	302.232,055	7.532.036,022	127.781.273,866
59	0,002649	950.705	295.553,319	7.229.803,967	120.249.237,844
60	0,002781	948.187	288.990,587	6.934.250,648	113.019.433,877
61	0,002957	945.550	282.536,181	6.645.260,061	106.085.183,230
62	0,003176	942.754	276.177,177	6.362.723,880	99.439.923,169
63	0,003432	939.760	269.901,999	6.086.546,703	93.077.199,289
64	0,003707	936.535	263.701,662	5.816.644,704	86.990.652,587
65	0,003980	933.063	257.572,666	5.552.943,042	81.174.007,883
66	0,004270	929.349	251.517,184	5.295.370,375	75.621.064,841
67	0,004631	925.381	245.532,554	5.043.853,192	70.325.694,465
68	0,004995	921.096	239.603,424	4.798.320,638	65.281.841,273
69	0,005363	916.495	233.731,966	4.558.717,213	60.483.520,636

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
70	0,005744	911.580	227.920,060	4.324.985,247	55.924.803,422
71	0,006150	906.343	222.167,537	4.097.065,187	51.599.818,175
72	0,006605	900.769	216.471,771	3.874.897,650	47.502.752,988
73	0,007122	894.820	210.825,466	3.658.425,880	43.627.855,338
74	0,007722	888.447	205.219,575	3.447.600,414	39.969.429,458
75	0,008460	881.586	199.642,029	3.242.380,839	36.521.829,044
76	0,009337	874.128	194.071,625	3.042.738,810	33.279.448,205
77	0,010403	865.966	188.489,782	2.848.667,185	30.236.709,395
78	0,011693	856.958	182.871,493	2.660.177,403	27.388.042,210
79	0,013259	846.937	177.189,389	2.477.305,909	24.727.864,808
80	0,015167	835.708	171.411,799	2.300.116,520	22.250.558,899
81	0,017450	823.033	165.501,957	2.128.704,721	19.950.442,379
82	0,020162	808.671	159.425,439	1.963.202,764	17.821.737,658
83	0,023324	792.366	153.148,141	1.803.777,324	15.858.534,894
84	0,026970	773.885	146.643,249	1.650.629,183	14.054.757,570
85	0,031142	753.013	139.890,471	1.503.985,935	12.404.128,387
86	0,035854	729.563	132.876,472	1.364.095,464	10.900.142,452
87	0,041159	703.405	125.600,313	1.231.218,992	9.536.046,988
88	0,047090	674.454	118.069,343	1.105.618,679	8.304.827,996
89	0,053666	642.694	110.303,390	987.549,336	7.199.209,317
90	0,060681	608.203	102.337,106	877.245,946	6.211.659,981
91	0,067908	571.297	94.242,341	774.908,841	5.334.414,034
92	0,075209	532.501	86.120,130	680.666,499	4.559.505,194
93	0,082462	492.452	78.081,491	594.546,370	3.878.838,694
94	0,089515	451.844	70.237,976	516.464,879	3.284.292,325
95	0,096209	411.397	62.696,689	446.226,903	2.767.827,446
96	0,102378	371.817	55.553,631	383.530,214	2.321.600,542
97	0,107876	333.751	48.888,393	327.976,583	1.938.070,329
98	0,113045	297.747	42.759,323	279.088,189	1.610.093,746
99	0,118108	264.088	37.181,956	236.328,867	1.331.005,556
100	0,121553	232.897	32.147,519	199.146,911	1.094.676,689
101	0,126442	204.588	27.686,168	166.999,392	895.529,778
102	0,131302	178.720	23.711,249	139.313,223	728.530,387
103	0,136130	155.253	20.194,034	115.601,975	589.217,163
104	0,140927	134.119	17.102,961	95.407,941	473.615,189
105	0,145690	115.218	14.404,600	78.304,980	378.207,248
106	0,150416	98.432	12.064,700	63.900,380	299.902,268
107	0,155105	83.626	10.048,996	51.835,681	236.001,888
108	0,159752	70.655	8.323,869	41.786,685	184.166,207
109	0,164354	59.368	6.856,975	33.462,816	142.379,523

x	q_x	l_x	D_x	N_x	S_x
110	0,168907	49.611	5.617,651	26.605,841	108.916,707
111	0,173407	41.231	4.577,245	20.988,190	82.310,866
112	0,177848	34.081	3.709,332	16.410,945	61.322,676
113	0,182224	28.020	2.989,838	12.701,613	44.911,731
114	0,186528	22.914	2.397,076	9.711,775	32.210,118
115	0,190752	18.640	1.911,720	7.314,699	22.498,343
116	0,194887	15.084	1.516,721	5.402,979	15.183,644
117	0,198923	12.145	1.197,188	3.886,257	9.780,665
118	0,202848	9.729	940,235	2.689,069	5.894,408
119	0,206649	7.755	734,814	1.748,834	3.205,339
120	0,210311	6.153	571,535	1.014,020	1.456,505
121	1,000000	4.859	442,485	442,485	442,485

A.2.2 Frauen

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
0	0,000066	1.000.000	1.000.000,000	42.958.414,715	1.463.468.152,479
1	0,000066	999.934	980.327,451	41.958.414,715	1.420.509.737,763
2	0,000066	999.868	961.041,911	40.978.087,264	1.378.551.323,048
3	0,000066	999.802	942.135,767	40.017.045,353	1.337.573.235,784
4	0,000066	999.736	923.601,555	39.074.909,586	1.297.556.190,431
5	0,000066	999.670	905.431,958	38.151.308,031	1.258.481.280,845
6	0,000066	999.604	887.619,804	37.245.876,073	1.220.329.972,813
7	0,000066	999.538	870.158,059	36.358.256,269	1.183.084.096,740
8	0,000066	999.472	853.039,832	35.488.098,210	1.146.725.840,471
9	0,000066	999.406	836.258,364	34.635.058,378	1.111.237.742,261
10	0,000066	999.340	819.807,031	33.798.800,013	1.076.602.683,883
11	0,000071	999.274	803.679,337	32.978.992,982	1.042.803.883,870
12	0,000075	999.203	787.864,976	32.175.313,646	1.009.824.890,888
13	0,000079	999.128	772.358,712	31.387.448,670	977.649.577,242
14	0,000092	999.049	757.154,604	30.615.089,958	946.262.128,572
15	0,000120	998.958	742.240,142	29.857.935,354	915.647.038,614
16	0,000144	998.838	727.599,092	29.115.695,212	885.789.103,260
17	0,000166	998.694	713.229,723	28.388.096,120	856.673.408,048
18	0,000201	998.528	699.128,752	27.674.866,397	828.285.311,928
19	0,000201	998.327	685.282,575	26.975.737,645	800.610.445,531

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
20	0, 000201	998.127	671.710, 621	26.290.455, 070	773.634.707, 886
21	0, 000201	997.926	658.407, 458	25.618.744, 448	747.344.252, 816
22	0, 000201	997.725	645.367, 763	24.960.336, 990	721.725.508, 368
23	0, 000201	997.525	632.586, 318	24.314.969, 227	696.765.171, 378
24	0, 000222	997.324	620.058, 008	23.682.382, 909	672.450.202, 151
25	0, 000225	997.103	607.765, 054	23.062.324, 901	648.767.819, 242
26	0, 000225	996.879	595.714, 026	22.454.559, 848	625.705.494, 340
27	0, 000235	996.654	583.901, 952	21.858.845, 821	603.250.934, 493
28	0, 000258	996.420	572.318, 367	21.274.943, 870	581.392.088, 672
29	0, 000280	996.163	560.951, 676	20.702.625, 503	560.117.144, 802
30	0, 000291	995.884	549.798, 636	20.141.673, 827	539.414.519, 299
31	0, 000302	995.594	538.861, 417	19.591.875, 191	519.272.845, 472
32	0, 000318	995.294	528.135, 961	19.053.013, 774	499.680.970, 282
33	0, 000344	994.977	517.615, 700	18.524.877, 813	480.627.956, 508
34	0, 000385	994.635	507.291, 804	18.007.262, 113	462.103.078, 695
35	0, 000423	994.252	497.153, 428	17.499.970, 309	444.095.816, 582
36	0, 000464	993.831	487.199, 149	17.002.816, 880	426.595.846, 273
37	0, 000508	993.370	477.424, 597	16.515.617, 731	409.593.029, 393
38	0, 000550	992.866	467.825, 554	16.038.193, 134	393.077.411, 662
39	0, 000593	992.320	458.400, 245	15.570.367, 580	377.039.218, 528
40	0, 000642	991.731	449.145, 504	15.111.967, 335	361.468.850, 948
41	0, 000693	991.094	440.056, 032	14.662.821, 831	346.356.883, 614
42	0, 000743	990.408	431.128, 503	14.222.765, 799	331.694.061, 783
43	0, 000788	989.672	422.360, 955	13.791.637, 296	317.471.295, 984
44	0, 000830	988.892	413.753, 073	13.369.276, 341	303.679.658, 688
45	0, 000874	988.071	405.303, 587	12.955.523, 267	290.310.382, 347
46	0, 000921	987.207	397.009, 168	12.550.219, 681	277.354.859, 080
47	0, 000971	986.298	388.866, 199	12.153.210, 513	264.804.639, 399
48	0, 001022	985.341	380.871, 186	11.764.344, 314	252.651.428, 886
49	0, 001069	984.334	373.021, 505	11.383.473, 128	240.887.084, 572
50	0, 001111	983.281	365.316, 417	11.010.451, 623	229.503.611, 444
51	0, 001149	982.189	357.755, 442	10.645.135, 206	218.493.159, 821
52	0, 001182	981.060	350.337, 628	10.287.379, 765	207.848.024, 614
53	0, 001218	979.901	343.062, 283	9.937.042, 137	197.560.644, 850
54	0, 001259	978.707	335.925, 915	9.593.979, 853	187.623.602, 713
55	0, 001306	977.475	328.924, 494	9.258.053, 938	178.029.622, 859
56	0, 001363	976.198	322.053, 842	8.929.129, 444	168.771.568, 921
57	0, 001430	974.868	315.308, 709	8.607.075, 602	159.842.439, 477
58	0, 001504	973.474	308.684, 135	8.291.766, 893	151.235.363, 876
59	0, 001585	972.010	302.176, 347	7.983.082, 758	142.943.596, 983

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
60	0,001674	970.469	295.781,762	7.680.906,412	134.960.514,224
61	0,001771	968.845	289.496,689	7.385.124,650	127.279.607,813
62	0,001876	967.129	283.317,638	7.095.627,960	119.894.483,163
63	0,001986	965.314	277.241,308	6.812.310,322	112.798.855,203
64	0,002096	963.397	271.265,399	6.535.069,014	105.986.544,881
65	0,002229	961.378	265.389,046	6.263.803,615	99.451.475,866
66	0,002345	959.235	259.605,386	5.998.414,570	93.187.672,251
67	0,002520	956.986	253.918,246	5.738.809,184	87.189.257,681
68	0,002732	954.574	248.312,130	5.484.890,938	81.450.448,497
69	0,002959	951.966	242.778,177	5.236.578,808	75.965.557,559
70	0,003199	949.149	237.313,526	4.993.800,631	70.728.978,751
71	0,003478	946.113	231.916,039	4.756.487,105	65.735.178,120
72	0,003780	942.822	226.577,878	4.524.571,065	60.978.691,015
73	0,004090	939.258	221.295,503	4.297.993,188	56.454.119,950
74	0,004446	935.417	216.069,024	4.076.697,684	52.156.126,763
75	0,004864	931.258	210.890,570	3.860.628,660	48.079.429,078
76	0,005328	926.728	205.749,802	3.649.738,090	44.218.800,419
77	0,005823	921.791	200.640,752	3.443.988,287	40.569.062,329
78	0,006429	916.423	195.561,197	3.243.347,535	37.125.074,041
79	0,007203	910.532	190.494,053	3.047.786,338	33.881.726,506
80	0,008215	903.973	185.413,652	2.857.292,285	30.833.940,168
81	0,009536	896.547	180.284,783	2.671.878,633	27.976.647,883
82	0,011237	887.997	175.064,301	2.491.593,851	25.304.769,250
83	0,013343	878.019	169.703,043	2.316.529,550	22.813.175,400
84	0,015844	866.304	164.155,583	2.146.826,507	20.496.645,850
85	0,018792	852.578	158.386,963	1.982.670,924	18.349.819,343
86	0,022273	836.556	152.363,289	1.824.283,961	16.367.148,420
87	0,026353	817.924	146.048,727	1.671.920,671	14.542.864,459
88	0,031049	796.369	139.411,672	1.525.871,944	12.870.943,788
89	0,036366	771.642	132.434,391	1.386.460,272	11.345.071,843
90	0,042123	743.581	125.115,963	1.254.025,882	9.958.611,571
91	0,048071	712.259	117.495,787	1.128.909,919	8.704.585,690
92	0,054145	678.020	109.654,556	1.011.414,132	7.575.675,771
93	0,060268	641.309	101.683,637	901.759,576	6.564.261,639
94	0,066351	602.658	93.681,733	800.075,938	5.662.502,063
95	0,072275	562.671	85.750,840	706.394,205	4.862.426,125
96	0,077904	522.004	77.993,331	620.643,365	4.156.031,919
97	0,083095	481.338	70.507,195	542.650,034	3.535.388,554
98	0,087727	441.341	63.380,784	472.142,839	2.992.738,520
99	0,091681	402.624	56.686,841	408.762,056	2.520.595,680

y	q_y	l_y	D_y	N_y	S_y
100	0, 100158	365.711	50.480, 132	352.075, 215	2.111.833, 625
101	0, 104765	329.082	44.533, 474	301.595, 083	1.759.758, 410
102	0, 109394	294.606	39.086, 200	257.061, 609	1.458.163, 328
103	0, 114045	262.377	34.127, 847	217.975, 409	1.201.101, 719
104	0, 118719	232.455	29.642, 879	183.847, 562	983.126, 310
105	0, 123417	204.858	25.611, 477	154.204, 682	799.278, 748
106	0, 128138	179.575	22.010, 378	128.593, 205	645.074, 066
107	0, 132883	156.565	18.813, 737	106.582, 827	516.480, 861
108	0, 137652	135.760	15.993, 835	87.769, 090	409.898, 034
109	0, 142443	117.072	13.521, 815	71.775, 255	322.128, 943
110	0, 147255	100.396	11.368, 360	58.253, 440	250.353, 688
111	0, 152087	85.612	9.504, 228	46.885, 081	192.100, 247
112	0, 156935	72.592	7.900, 743	37.380, 853	145.215, 167
113	0, 161796	61.200	6.530, 235	29.480, 110	107.834, 314
114	0, 166665	51.298	5.366, 343	22.949, 874	78.354, 204
115	0, 171536	42.748	4.384, 276	17.583, 532	55.404, 330
116	0, 176401	35.415	3.560, 995	13.199, 256	37.820, 798
117	0, 181250	29.168	2.875, 325	9.638, 262	24.621, 542
118	0, 186074	23.881	2.308, 012	6.762, 937	14.983, 280
119	0, 190855	19.438	1.841, 717	4.454, 924	8.220, 344
120	0, 195579	15.728	1.460, 996	2.613, 208	3.765, 419
121	1, 000000	12.652	1.152, 212	1.152, 212	1.152, 212

A.2.3 Altersverschiebung

Geburtsjahr	Männer	Frauen	Geburtsjahr	Männer	Frauen
1910	12	11	1950	3	3
1911	12	11	1951	3	2
1912	12	11	1952	3	2
1913	12	11	1953	2	2
1914	12	11	1954	2	2
1915	12	11	1955	2	2
1916	12	11	1956	2	1
1917	12	10	1957	1	1
1918	11	10	1958	1	1
1919	10	9	1959	1	1
1920	9	8	1960	1	1
1921	8	8	1961	0	0
1922	7	7	1962	0	0
1923	7	7	1963	0	0
1924	7	7	1964	0	0
1925	7	6	1965	0	0
1926	6	6	1966	-1	-1
1927	6	6	1967	-1	-1
1928	6	6	1968	-1	-1
1929	6	6	1969	-1	-1
1930	6	6	1970	-2	-2
1931	6	6	1971	-2	-2
1932	6	6	1972	-2	-2
1933	6	6	1973	-2	-2
1934	6	5	1974	-3	-2
1935	5	5	1975	-3	-3
1936	5	5	1976	-3	-3
1937	5	5	1977	-3	-3
1938	5	5	1978	-4	-3
1939	5	5	1979	-4	-3
1940	5	4	1980	-4	-4
1941	5	4	1981	-4	-4
1942	4	4	1982	-5	-4
1943	4	4	1983	-5	-4
1944	4	4	1984	-5	-4
1945	4	4	1985	-5	-5
1946	4	3	1986	-6	-5
1947	4	3	1987	-6	-5
1948	3	3	1988	-6	-5
1949	3	3	1989	-6	-5

Geburtsjahr	Männer	Frauen	Geburtsjahr	Männer	Frauen
1990	-7	-6	2010	-11	-10
1991	-7	-6	2011	-11	-10
1992	-7	-6	2012	-12	-10
1993	-7	-6	2013	-12	-10
1994	-7	-7	2014	-12	-10
1995	-8	-7	2015	-12	-11
1996	-8	-7	2016	-12	-11
1997	-8	-7	2017	-13	-11
1998	-8	-7	2018	-13	-11
1999	-9	-8	2019	-13	-11
2000	-9	-8	2020	-13	-12
2001	-9	-8			
2002	-9	-8			
2003	-10	-8			
2004	-10	-8			
2005	-10	-9			
2006	-10	-9			
2007	-10	-9			
2008	-11	-9			
2009	-11	-9			

A.3 DAV 2004 R (Basistafel mit Trendfunktion)

A.3.1 Aggregat- und Selektionsbasistafel sowie Trendfunktion

Alter	Männer			Frauen		
	q_x^{Agg}	q_x^{Sel}	$F(x)$	q_y^{Agg}	q_y^{Sel}	$F(y)$
0	0,003439	0,002546	0,03303985	0,002694	0,002549	0,03303985
1	0,000317	0,000234	0,03303985	0,000280	0,000265	0,03303985
2	0,000214	0,000158	0,03303985	0,000160	0,000152	0,03303985
3	0,000158	0,000117	0,03303985	0,000124	0,000117	0,03303985
4	0,000122	0,000090	0,03303985	0,000101	0,000095	0,03303985
5	0,000108	0,000080	0,03303985	0,000078	0,000074	0,03303985
6	0,000102	0,000076	0,03303985	0,000081	0,000076	0,03303985
7	0,000087	0,000065	0,03303985	0,000080	0,000076	0,03303985
8	0,000099	0,000073	0,03303985	0,000069	0,000065	0,03303985
9	0,000084	0,000062	0,03303985	0,000068	0,000065	0,03303985
10	0,000083	0,000061	0,03303985	0,000066	0,000062	0,03303985
11	0,000098	0,000073	0,03303985	0,000071	0,000067	0,03303985
12	0,000104	0,000077	0,03303985	0,000075	0,000071	0,03303985
13	0,000114	0,000084	0,03303985	0,000079	0,000075	0,03303985
14	0,000140	0,000103	0,03303985	0,000092	0,000087	0,03303985
15	0,000192	0,000142	0,03303985	0,000120	0,000114	0,03303985
16	0,000276	0,000205	0,03303985	0,000144	0,000137	0,03303985
17	0,000364	0,000270	0,03303985	0,000166	0,000157	0,03303985
18	0,000596	0,000442	0,03303985	0,000235	0,000223	0,03303985
19	0,000630	0,000467	0,03303985	0,000238	0,000225	0,03303985
20	0,000627	0,000464	0,03303985	0,000230	0,000218	0,03303985
21	0,000636	0,000471	0,03303985	0,000211	0,000199	0,03303985
22	0,000625	0,000463	0,03303985	0,000215	0,000203	0,03303985
23	0,000642	0,000475	0,03301381	0,000201	0,000190	0,03298816
24	0,000622	0,000460	0,03138903	0,000222	0,000210	0,03287161
25	0,000617	0,000457	0,03009490	0,000225	0,000213	0,03278166
26	0,000616	0,000456	0,02911046	0,000225	0,000213	0,03268512
27	0,000627	0,000471	0,02839963	0,000235	0,000222	0,03252693
28	0,000613	0,000485	0,02793402	0,000258	0,000244	0,03226875
29	0,000603	0,000502	0,02765640	0,000280	0,000265	0,03193675

Alter	Männer			Frauen		
	q_x^{Agg}	q_x^{Sel}	$F(x)$	q_y^{Agg}	q_y^{Sel}	$F(y)$
30	0,000598	0,000515	0,02750067	0,000291	0,000275	0,03152501
31	0,000605	0,000546	0,02740031	0,000302	0,000292	0,03094365
32	0,000626	0,000568	0,02730804	0,000318	0,000329	0,03014668
33	0,000663	0,000601	0,02719391	0,000344	0,000357	0,02914996
34	0,000713	0,000653	0,02706035	0,000385	0,000401	0,02801054
35	0,000775	0,000697	0,02695565	0,000434	0,000445	0,02682974
36	0,000850	0,000751	0,02691229	0,000488	0,000498	0,02567995
37	0,000944	0,000821	0,02690961	0,000547	0,000561	0,02464377
38	0,001047	0,000878	0,02690928	0,000605	0,000606	0,02377300
39	0,001153	0,000968	0,02688675	0,000666	0,000656	0,02305650
40	0,001261	0,001083	0,02684974	0,000735	0,000743	0,02248214
41	0,001372	0,001169	0,02682919	0,000809	0,000823	0,02207810
42	0,001483	0,001288	0,02681278	0,000885	0,000903	0,02185396
43	0,001603	0,001403	0,02679602	0,000959	0,001000	0,02178902
44	0,001732	0,001532	0,02675173	0,001033	0,001079	0,02185910
45	0,001871	0,001719	0,02666774	0,001113	0,001200	0,02202052
46	0,002025	0,001872	0,02654651	0,001203	0,001291	0,02225316
47	0,002194	0,002074	0,02638875	0,001301	0,001395	0,02252168
48	0,002373	0,002268	0,02620949	0,001406	0,001553	0,02280602
49	0,002563	0,002526	0,02602928	0,001512	0,001650	0,02310876
50	0,002762	0,002838	0,02587807	0,001616	0,001823	0,02341569
51	0,002981	0,003029	0,02577098	0,001720	0,001965	0,02372758
52	0,003212	0,003358	0,02567549	0,001822	0,002089	0,02401966
53	0,003449	0,003684	0,02558704	0,001931	0,002262	0,02425692
54	0,003684	0,004054	0,02550013	0,002052	0,002470	0,02442806
55	0,003911	0,004419	0,02540298	0,002186	0,002623	0,02453498
56	0,004134	0,004872	0,02528317	0,002340	0,002877	0,02457210
57	0,004370	0,005388	0,02514256	0,002516	0,003106	0,02455016
58	0,004627	0,005888	0,02499636	0,002706	0,003391	0,02447892
59	0,004932	0,006541	0,02486849	0,002914	0,003731	0,02436478
60	0,005299	0,007226	0,02479571	0,003145	0,004121	0,02424808
61	0,005777	0,007922	0,02480715	0,003402	0,004492	0,02417359
62	0,006383	0,008590	0,02492644	0,003692	0,004862	0,02418705
63	0,007119	0,009229	0,02515644	0,004021	0,005195	0,02432563
64	0,007963	0,009933	0,02549022	0,004384	0,005504	0,02459119
65	0,008886	0,010714	0,02591357	0,004830	0,005827	0,02494674
66	0,009938	0,011662	0,02639617	0,005278	0,006266	0,02535629
67	0,011253	0,012834	0,02690595	0,005905	0,006904	0,02580147
68	0,012687	0,014099	0,02741577	0,006674	0,007701	0,02627101
69	0,014231	0,015456	0,02788177	0,007548	0,008612	0,02675603

Alter	Männer			Frauen		
	q_x^{Agg}	q_x^{Sel}	$F(x)$	q_y^{Agg}	q_y^{Sel}	$F(y)$
70	0,015887	0,016920	0,02826066	0,008525	0,009637	0,02722831
71	0,017663	0,018547	0,02851318	0,009679	0,010869	0,02765966
72	0,019598	0,020408	0,02862041	0,010965	0,012266	0,02802468
73	0,021698	0,022511	0,02856339	0,012341	0,013782	0,02831732
74	0,023990	0,024873	0,02833777	0,013909	0,015522	0,02851150
75	0,026610	0,027614	0,02795026	0,015706	0,017516	0,02859209
76	0,029533	0,030689	0,02741783	0,017672	0,019686	0,02854652
77	0,032873	0,034200	0,02675811	0,019722	0,021922	0,02837159
78	0,036696	0,038203	0,02599351	0,022102	0,024477	0,02806358
79	0,041106	0,042787	0,02514346	0,024975	0,027510	0,02763160
80	0,046239	0,048081	0,02423250	0,028535	0,031211	0,02706955
81	0,052094	0,054068	0,02327100	0,032947	0,035743	0,02637873
82	0,058742	0,060821	0,02227796	0,038340	0,041240	0,02556878
83	0,066209	0,068363	0,02129226	0,044665	0,047641	0,02465783
84	0,074583	0,076782	0,02034403	0,051737	0,054741	0,02366759
85	0,083899	0,086113	0,01943234	0,059541	0,062514	0,02261230
86	0,094103	0,096295	0,01855670	0,068187	0,071076	0,02151662
87	0,105171	0,107306	0,01770100	0,077684	0,080444	0,02039770
88	0,116929	0,118973	0,01684261	0,087911	0,090508	0,01927338
89	0,129206	0,131124	0,01597498	0,098662	0,101071	0,01814674
90	0,141850	0,143616	0,01516333	0,109614	0,111814	0,01707808
91	0,154860	0,156454	0,01446271	0,120510	0,122478	0,01612386
92	0,168157	0,169564	0,01387288	0,131383	0,133104	0,01528376
93	0,181737	0,182946	0,01339365	0,142265	0,143725	0,01455749
94	0,195567	0,196568	0,01302486	0,153185	0,154369	0,01394480
95	0,209614	0,210397	0,01276639	0,164128	0,165023	0,01344549
96	0,223854	0,224411	0,01261815	0,175065	0,175662	0,01305938
97	0,238280	0,238604	0,01257878	0,185958	0,186250	0,01278634
98	0,252858	0,252947	0,01257878	0,196824	0,196808	0,01262629
99	0,267526	0,267377	0,01257878	0,207667	0,207342	0,01257878
100	0,278816	0,278816	0,01257878	0,229739	0,229739	0,01257878
101	0,293701	0,293701	0,01257878	0,243350	0,243350	0,01257878
102	0,308850	0,308850	0,01257878	0,257319	0,257319	0,01257878
103	0,324261	0,324261	0,01257878	0,271655	0,271655	0,01257878
104	0,339936	0,339936	0,01257878	0,286368	0,286368	0,01257878
105	0,355873	0,355873	0,01257878	0,301467	0,301467	0,01257878
106	0,372069	0,372069	0,01257878	0,316962	0,316962	0,01257878
107	0,388523	0,388523	0,01257878	0,332860	0,332860	0,01257878
108	0,405229	0,405229	0,01257878	0,349169	0,349169	0,01257878
109	0,422180	0,422180	0,01257878	0,365896	0,365896	0,01257878

Alter	Männer			Frauen		
	q_x^{Agg}	q_x^{Sel}	$F(x)$	q_y^{Agg}	q_y^{Sel}	$F(y)$
110	0,439368	0,439368	0,01257878	0,383046	0,383046	0,01257878
111	0,456782	0,456782	0,01257878	0,400622	0,400622	0,01257878
112	0,474411	0,474411	0,01257878	0,418626	0,418626	0,01257878
113	0,492237	0,492237	0,01257878	0,437055	0,437055	0,01257878
114	0,510241	0,510241	0,01257878	0,455906	0,455906	0,01257878
115	0,528401	0,528401	0,01257878	0,475170	0,475170	0,01257878
116	0,546689	0,546689	0,01257878	0,494832	0,494832	0,01257878
117	0,565074	0,565074	0,01257878	0,514872	0,514872	0,01257878
118	0,583517	0,583517	0,01257878	0,535264	0,535264	0,01257878
119	0,601976	0,601976	0,01257878	0,555969	0,555969	0,01257878
120	0,620400	0,620400	0,01257878	0,576942	0,576942	0,01257878
121	1,000000	1,000000	0,00000000	1,000000	1,000000	0,00000000

A.3.2 Selektionsfaktoren

Selektionsjahr	Faktor	Männer	Frauen
1	f^1	0,670538	0,712823
2	f^2	0,876209	0,798230
3	f^3	0,876209	0,798230
4	f^4	0,876209	0,798230
5	f^5	0,876209	0,798230
> 5	—	1,000000	1,000000

A.4 DAV 1997 I

Alter	Männer i_x	Frauen i_y	Alter	Männer i_x	Frauen i_y
15	0,0007490	0,0009245	50	0,0081259	0,0105028
16	0,0010288	0,0009363	51	0,0095007	0,0119495
17	0,0013064	0,0009464	52	0,0112013	0,0135635
18	0,0015749	0,0009568	53	0,0132062	0,0153174
19	0,0018206	0,0009704	54	0,0155535	0,0171766
20	0,0020282	0,0009898	55	0,0182793	0,0190882
21	0,0021829	0,0010111	56	0,0213377	0,0215467
22	0,0022678	0,0010388	57	0,0246920	0,0242570
23	0,0022807	0,0010775	58	0,0282059	0,0272921
24	0,0022807	0,0011190	59	0,0317913	0,0306883
25	0,0022807	0,0011571	60	0,0353828	0,0344857
26	0,0022807	0,0012028	61	0,0403322	0,0387280
27	0,0022807	0,0012566	62	0,0454595	0,0434633
28	0,0022807	0,0013239	63	0,0510343	0,0487439
29	0,0022807	0,0013958	64	0,0570642	0,0546268
30	0,0022807	0,0014808	65	0,0635517	0,0611742
31	0,0022807	0,0015882	66	0,0704939	0,0684529
32	0,0022807	0,0017230	67	0,0778820	0,0765351
33	0,0022807	0,0018848	68	0,0857010	0,0854985
34	0,0022807	0,0020537	69	0,0939290	0,0954258
35	0,0023012	0,0022212			
36	0,0024604	0,0023908			
37	0,0026587	0,0025592			
38	0,0028520	0,0027505			
39	0,0030383	0,0029852			
40	0,0032306	0,0032737			
41	0,0034725	0,0036134			
42	0,0037716	0,0040140			
43	0,0041007	0,0044868			
44	0,0044404	0,0050157			
45	0,0047767	0,0056054			
46	0,0051541	0,0062894			
47	0,0056249	0,0071055			
48	0,0062273	0,0080782			
49	0,0070534	0,0092114			

A.5 DAV 1997 TI

A.5.1 Männer

x	$q_{[x]}^i = q_{x,x}^i$	$q_{[x-1]+1}^i = q_{x-1,x}^i$	$q_{[x-2]+2}^i = q_{x-2,x}^i$	$q_{[x-3]+3}^i = q_{x-3,x}^i$	$q_{[x-4]+4}^i = q_{x-4,x}^i$	q_x^i
15	0,0020307					
16	0,0021924	0,0019152				
17	0,0024969	0,0021840	0,0018102			
18	0,0029218	0,0025543	0,0021175	0,0015736		
19	0,0034440	0,0030072	0,0024934	0,0018641	0,0011928	
20	0,0040425	0,0035245	0,0029232	0,0021994	0,0014161	0,0006209
21	0,0046949	0,0040880	0,0033915	0,0025662	0,0016632	0,0007357
22	0,0053795	0,0046788	0,0038829	0,0029491	0,0019250	0,0008624
23	0,0062370	0,0054166	0,0044968	0,0034391	0,0022841	0,0010808
24	0,0073535	0,0063707	0,0052920	0,0040901	0,0027902	0,0014336
25	0,0086177	0,0074494	0,0061908	0,0048321	0,0033789	0,0018634
26	0,0099218	0,0085603	0,0071169	0,0055972	0,0039886	0,0023142
27	0,0111552	0,0096117	0,0079926	0,0063161	0,0045556	0,0027279
28	0,0123277	0,0106085	0,0088235	0,0069923	0,0050827	0,0031045
29	0,0135107	0,0116109	0,0096593	0,0076713	0,0056119	0,0034825
30	0,0146930	0,0126133	0,0104944	0,0083489	0,0061390	0,0038612
31	0,0158606	0,0136080	0,0113232	0,0090195	0,0066619	0,0042427
32	0,0170002	0,0145873	0,0121394	0,0096789	0,0071771	0,0046256
33	0,0181216	0,0155610	0,0129493	0,0103313	0,0076846	0,0050099
34	0,0192339	0,0165326	0,0137578	0,0109795	0,0081858	0,0053949
35	0,0203252	0,0174916	0,0145544	0,0116179	0,0086828	0,0057827
36	0,0213815	0,0184233	0,0153307	0,0122409	0,0091735	0,0061740
37	0,0223916	0,0193172	0,0160755	0,0128429	0,0096586	0,0065709
38	0,0233842	0,0201943	0,0168035	0,0134309	0,0101395	0,0069699
39	0,0243712	0,0210637	0,0175224	0,0140084	0,0106162	0,0073696
40	0,0253127	0,0218981	0,0182140	0,0145684	0,0110866	0,0077756
41	0,0261695	0,0226695	0,0188615	0,0151025	0,0115507	0,0081942
42	0,0269003	0,0233492	0,0194474	0,0156023	0,0120064	0,0086296
43	0,0275863	0,0239960	0,0200039	0,0160790	0,0124530	0,0090832
44	0,0282765	0,0246421	0,0205513	0,0165417	0,0128926	0,0095522
45	0,0288806	0,0252203	0,0210511	0,0169778	0,0133259	0,0100380
46	0,0293083	0,0256613	0,0214669	0,0173768	0,0137536	0,0105406
47	0,0294707	0,0258993	0,0217602	0,0177268	0,0141764	0,0110628
48	0,0294616	0,0260050	0,0219751	0,0180425	0,0145957	0,0116102
49	0,0294336	0,0260932	0,0221704	0,0183386	0,0150122	0,0121842

x	$q_{[x]}^i = q_{x,x}^i$	$q_{[x-1]+1}^i = q_{x-1,x}^i$	$q_{[x-2]+2}^i = q_{x-2,x}^i$	$q_{[x-3]+3}^i = q_{x-3,x}^i$	$q_{[x-4]+4}^i = q_{x-4,x}^i$	q_x^i
50	0,0293902	0,0261604	0,0223307	0,0186067	0,0154224	0,0127771
51	0,0293314	0,0262038	0,0224385	0,0188370	0,0158249	0,0133812
52	0,0292600	0,0262185	0,0224784	0,0190204	0,0162183	0,0139874
53	0,0290346	0,0260967	0,0224399	0,0191667	0,0166012	0,0146118
54	0,0285810	0,0257817	0,0223384	0,0192927	0,0169764	0,0152593
55	0,0279951	0,0253484	0,0221935	0,0194019	0,0173439	0,0159075
56	0,0273756	0,0248724	0,0220255	0,0194978	0,0176421	0,0165354
57	0,0268198	0,0244307	0,0218547	0,0195832	0,0180607	0,0171199
58	0,0262493	0,0239372	0,0216209	0,0196679	0,0184632	0,0177345
59	0,0255976	0,0233408	0,0213024	0,0197533	0,0189119	0,0183967
60	0,0249844	0,0227633	0,0209783	0,0198282	0,0193298	0,0190015
61	0,0245294	0,0223265	0,0207263	0,0198807	0,0196371	0,0194425
62	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
63	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
64	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
65	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
66	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
67	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
68	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126
69	0,0243509	0,0221543	0,0206255	0,0199010	0,0197568	0,0196126

A.5.2 Frauen

y	$q_{[y]}^i = q_{y,y}^i$	$q_{[y-1]+1}^i = q_{y-1,y}^i$	$q_{[y-2]+2}^i = q_{y-2,y}^i$	$q_{[y-3]+3}^i = q_{y-3,y}^i$	$q_{[y-4]+4}^i = q_{y-4,y}^i$	q_y^i
15	0,0015161					
16	0,0016368	0,0014298				
17	0,0018641	0,0016305	0,0013514			
18	0,0021813	0,0019070	0,0015809	0,0011748		
19	0,0025712	0,0022451	0,0018615	0,0013917	0,0008905	
20	0,0030180	0,0026313	0,0021824	0,0016420	0,0010572	0,0004635
21	0,0035051	0,0030520	0,0025320	0,0019159	0,0012417	0,0005493
22	0,0040162	0,0034931	0,0028989	0,0022017	0,0014372	0,0006438
23	0,0046564	0,0040439	0,0033572	0,0025675	0,0017052	0,0008069
24	0,0054899	0,0047562	0,0039509	0,0030536	0,0020831	0,0010703
25	0,0064337	0,0055615	0,0046219	0,0036075	0,0025226	0,0013912
26	0,0074073	0,0063909	0,0053133	0,0041787	0,0029778	0,0017277
27	0,0083282	0,0071758	0,0059670	0,0047154	0,0034011	0,0020366
28	0,0092035	0,0079200	0,0065874	0,0052203	0,0037946	0,0023177
29	0,0100867	0,0086684	0,0072114	0,0057272	0,0041897	0,0025999

y	$q_{[y]}^i = q_{y,y}^i$	$q_{[y-1]+1}^i = q_{y-1,y}^i$	$q_{[y-2]+2}^i = q_{y-2,y}^i$	$q_{[y-3]+3}^i = q_{y-3,y}^i$	$q_{[y-4]+4}^i = q_{y-4,y}^i$	q_y^i
30	0,0109694	0,0094167	0,0078348	0,0062331	0,0045832	0,0028827
31	0,0118411	0,0101593	0,0084536	0,0067337	0,0049736	0,0031675
32	0,0126919	0,0108905	0,0090629	0,0072260	0,0053582	0,0034533
33	0,0135291	0,0116174	0,0096676	0,0077131	0,0057371	0,0037402
34	0,0143595	0,0123428	0,0102712	0,0081970	0,0061113	0,0040277
35	0,0151742	0,0130587	0,0108659	0,0086736	0,0064823	0,0043172
36	0,0159628	0,0137543	0,0114455	0,0091387	0,0068487	0,0046093
37	0,0167169	0,0144217	0,0120015	0,0095881	0,0072108	0,0049056
38	0,0174580	0,0150765	0,0125450	0,0100271	0,0075699	0,0052035
39	0,0181948	0,0157256	0,0130817	0,0104583	0,0079258	0,0055019
40	0,0188977	0,0163485	0,0135981	0,0108764	0,0082769	0,0058050
41	0,0195374	0,0169244	0,0140815	0,0112751	0,0086234	0,0061176
42	0,0200830	0,0174318	0,0145189	0,0116482	0,0089636	0,0064426
43	0,0205951	0,0179147	0,0149343	0,0120041	0,0092971	0,0067813
44	0,0211104	0,0183971	0,0153430	0,0123496	0,0096252	0,0071314
45	0,0215614	0,0188288	0,0157161	0,0126751	0,0099487	0,0074941
46	0,0218807	0,0191580	0,0160266	0,0129730	0,0102680	0,0078693
47	0,0220020	0,0193357	0,0162455	0,0132343	0,0105837	0,0082592
48	0,0219952	0,0194146	0,0164060	0,0134700	0,0108967	0,0086678
49	0,0219743	0,0194804	0,0165518	0,0136911	0,0112077	0,0090964
50	0,0219419	0,0195306	0,0166715	0,0138912	0,0115139	0,0095390
51	0,0218980	0,0195630	0,0167519	0,0140632	0,0118144	0,0099900
52	0,0218447	0,0195740	0,0167817	0,0142001	0,0121081	0,0104426
53	0,0216764	0,0194831	0,0167530	0,0143093	0,0123940	0,0109088
54	0,0213378	0,0192479	0,0166772	0,0144034	0,0126741	0,0113922
55	0,0209003	0,0189244	0,0165690	0,0144849	0,0129485	0,0118761
56	0,0204378	0,0185690	0,0164436	0,0145565	0,0131711	0,0123449
57	0,0200229	0,0182393	0,0163161	0,0146203	0,0134836	0,0127812
58	0,0195970	0,0178708	0,0161415	0,0146835	0,0137841	0,0132401
59	0,0191104	0,0174256	0,0159038	0,0147472	0,0141191	0,0137345
60	0,0186526	0,0169944	0,0156618	0,0148032	0,0144311	0,0141860
61	0,0183130	0,0166683	0,0154737	0,0148424	0,0146605	0,0145152
62	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
63	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
64	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
65	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
66	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
67	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
68	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422
69	0,0181797	0,0165398	0,0153984	0,0148575	0,0147499	0,0146422

A.6 DAV 1997 RI

A.6.1 Männer

x	$r_{[x]} = r_{x,x}$	$r_{[x-1]+1} = r_{x-1,x}$	$r_{[x-2]+2} = r_{x-2,x}$	$r_{[x-3]+3} = r_{x-3,x}$	$r_{[x-4]+4} = r_{x-4,x}$	r_x
15	0, 0593504					
16	0, 0593851	0, 0878873				
17	0, 0594823	0, 0877132	0, 1548972			
18	0, 0596333	0, 0874426	0, 1544824	0, 1917457		
19	0, 0598305	0, 0870903	0, 1539438	0, 1901559	0, 2186424	
20	0, 0600637	0, 0866721	0, 1533040	0, 1882682	0, 2153540	0, 1479184
21	0, 0603255	0, 0862036	0, 1525872	0, 1861541	0, 2116690	0, 1443681
22	0, 0606070	0, 0857004	0, 1518168	0, 1838822	0, 2077108	0, 1405533
23	0, 0609912	0, 0849891	0, 1508498	0, 1807862	0, 2020450	0, 1348957
24	0, 0615400	0, 0839603	0, 1495177	0, 1763716	0, 1938116	0, 1265664
25	0, 0622105	0, 0827254	0, 1478096	0, 1709683	0, 1839903	0, 1168056
26	0, 0629605	0, 0813946	0, 1457131	0, 1649048	0, 1735605	0, 1068532
27	0, 0637480	0, 0800788	0, 1432168	0, 1585114	0, 1635019	0, 0979513
28	0, 0648122	0, 0788222	0, 1393225	0, 1512497	0, 1535522	0, 0899973
29	0, 0662048	0, 0775431	0, 1335180	0, 1426966	0, 1430346	0, 0821515
30	0, 0676015	0, 0761600	0, 1265228	0, 1333507	0, 1323049	0, 0745450
31	0, 0686773	0, 0745933	0, 1190544	0, 1237097	0, 1217207	0, 0673084
32	0, 0691084	0, 0727614	0, 1118328	0, 1142726	0, 1116376	0, 0605751
33	0, 0688194	0, 0703725	0, 1045745	0, 1046717	0, 1018864	0, 0542021
34	0, 0680367	0, 0673622	0, 0967776	0, 0945683	0, 0922128	0, 0480508
35	0, 0668848	0, 0639894	0, 0888291	0, 0845084	0, 0828492	0, 0422593
36	0, 0654881	0, 0605139	0, 0811165	0, 0750380	0, 0740262	0, 0369641
37	0, 0639710	0, 0571962	0, 0740262	0, 0667032	0, 0659763	0, 0323020
38	0, 0619181	0, 0540104	0, 0674914	0, 0592885	0, 0585215	0, 0280888
39	0, 0590458	0, 0507824	0, 0612156	0, 0523008	0, 0514182	0, 0241278
40	0, 0556838	0, 0475517	0, 0552391	0, 0458667	0, 0447984	0, 0205387
41	0, 0521594	0, 0443544	0, 0496053	0, 0401132	0, 0387926	0, 0174434
42	0, 0487995	0, 0412284	0, 0443557	0, 0351669	0, 0335328	0, 0149607
43	0, 0455566	0, 0381480	0, 0393530	0, 0308815	0, 0288327	0, 0129635
44	0, 0422076	0, 0350873	0, 0345209	0, 0270096	0, 0244698	0, 0112227
45	0, 0388246	0, 0320817	0, 0299982	0, 0235328	0, 0205258	0, 0097097
46	0, 0354776	0, 0291672	0, 0259230	0, 0204292	0, 0170816	0, 0083939
47	0, 0322368	0, 0263799	0, 0224318	0, 0176793	0, 0142188	0, 0072461
48	0, 0290401	0, 0236626	0, 0193814	0, 0151654	0, 0117667	0, 0062159
49	0, 0258386	0, 0209821	0, 0165716	0, 0128248	0, 0095377	0, 0052795

x	$r_{[x]} = r_{x,x}$	$r_{[x-1]+1} = r_{x-1,x}$	$r_{[x-2]+2} = r_{x-2,x}$	$r_{[x-3]+3} = r_{x-3,x}$	$r_{[x-4]+4} = r_{x-4,x}$	r_x
50	0,0227215	0,0184130	0,0140563	0,0107188	0,0075861	0,0044458
51	0,0197778	0,0160303	0,0118905	0,0089100	0,0059650	0,0037264
52	0,0170986	0,0139094	0,0101279	0,0074596	0,0047287	0,0031314
53	0,0145282	0,0119857	0,0086870	0,0062988	0,0037645	0,0026370
54	0,0119768	0,0101728	0,0074310	0,0052979	0,0029267	0,0022052
55	0,0096342	0,0085109	0,0063342	0,0044261	0,0022195	0,0018251
56	0,0076881	0,0070387	0,0053700	0,0036557	0,0016470	0,0014872
57	0,0063274	0,0057963	0,0045104	0,0029560	0,0012145	0,0011812
58	0,0053428	0,0047165	0,0037196	0,0023011	0,0008595	0,0008956
59	0,0044499	0,0037230	0,0029886	0,0016939	0,0005338	0,0006297
60	0,0037210	0,0028451	0,0023324	0,0011444	0,0002638	0,0003890
61	0,0032293	0,0021134	0,0017680	0,0006637	0,0000768	0,0001775
62	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
63	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
64	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
65	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
66	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
67	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
68	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000
69	0,0030491	0,0015552	0,0013110	0,0002625	0,0000000	0,0000000

A.6.2 Frauen

y	$r_{[y]} = r_{y,y}$	$r_{[y-1]+1} = r_{y-1,y}$	$r_{[y-2]+2} = r_{y-2,y}$	$r_{[y-3]+3} = r_{y-3,y}$	$r_{[y-4]+4} = r_{y-4,y}$	r_y
15	0,0557719					
16	0,0558045	0,0825882				
17	0,0558959	0,0824246	0,1455578			
18	0,0560377	0,0821703	0,1451680	0,1801846		
19	0,0562231	0,0818393	0,1446619	0,1786906	0,2054596	
20	0,0564422	0,0814463	0,1440606	0,1769167	0,2023694	0,1389998
21	0,0566882	0,0810060	0,1433871	0,1749301	0,1989066	0,1356635
22	0,0569528	0,0805332	0,1426631	0,1727952	0,1951870	0,1320787
23	0,0573138	0,0798648	0,1417545	0,1698858	0,1898629	0,1267623
24	0,0578295	0,0788980	0,1405027	0,1657374	0,1821259	0,1189352
25	0,0584596	0,0777375	0,1388975	0,1606599	0,1728968	0,1097629
26	0,0591644	0,0764870	0,1369275	0,1549620	0,1630958	0,1004105
27	0,0599043	0,0752506	0,1345817	0,1489541	0,1536437	0,0920454
28	0,0609044	0,0740697	0,1309222	0,1421302	0,1442939	0,0845710
29	0,0622130	0,0728677	0,1254677	0,1340929	0,1344105	0,0771982

y	$r_{[y]} = r_{y,y}$	$r_{[y-1]+1} = r_{y-1,y}$	$r_{[y-2]+2} = r_{y-2,y}$	$r_{[y-3]+3} = r_{y-3,y}$	$r_{[y-4]+4} = r_{y-4,y}$	r_y
30	0,0635255	0,0715680	0,1188943	0,1253105	0,1243277	0,0700504
31	0,0645364	0,0700957	0,1118761	0,1162507	0,1143816	0,0632501
32	0,0649416	0,0683743	0,1050899	0,1073827	0,1049065	0,0569228
33	0,0646700	0,0661295	0,0982693	0,0983606	0,0957433	0,0509341
34	0,0639345	0,0633006	0,0909425	0,0888664	0,0866529	0,0451537
35	0,0628520	0,0601312	0,0834732	0,0794130	0,0778538	0,0397113
36	0,0615395	0,0568652	0,0762257	0,0705137	0,0695628	0,0347354
37	0,0601139	0,0537476	0,0695628	0,0626814	0,0619983	0,0303544
38	0,0581848	0,0507539	0,0634220	0,0557138	0,0549930	0,0263952
39	0,0554856	0,0477205	0,0575247	0,0491474	0,0483180	0,0226730
40	0,0523264	0,0446846	0,0519085	0,0431012	0,0420973	0,0193004
41	0,0490145	0,0416801	0,0466144	0,0376946	0,0364537	0,0163916
42	0,0458572	0,0387426	0,0416813	0,0330465	0,0315110	0,0140586
43	0,0428098	0,0358479	0,0369802	0,0290195	0,0270942	0,0121819
44	0,0396627	0,0329718	0,0324395	0,0253811	0,0229944	0,0105461
45	0,0364837	0,0301474	0,0281895	0,0221139	0,0192882	0,0091243
46	0,0333385	0,0274086	0,0243600	0,0191975	0,0160517	0,0078878
47	0,0302931	0,0247894	0,0210793	0,0166134	0,0133615	0,0068092
48	0,0272891	0,0222359	0,0182128	0,0142510	0,0110573	0,0058411
49	0,0242807	0,0197170	0,0155724	0,0120515	0,0089626	0,0049612
50	0,0213515	0,0173028	0,0132088	0,0100726	0,0071287	0,0041778
51	0,0185853	0,0150638	0,0111736	0,0083728	0,0056053	0,0035017
52	0,0160677	0,0130707	0,0095173	0,0070098	0,0044436	0,0029426
53	0,0136522	0,0112630	0,0081632	0,0059191	0,0035375	0,0024780
54	0,0112547	0,0095594	0,0069830	0,0049784	0,0027503	0,0020723
55	0,0090534	0,0079977	0,0059523	0,0041593	0,0020857	0,0017151
56	0,0072245	0,0066143	0,0050462	0,0034353	0,0015477	0,0013975
57	0,0059459	0,0054468	0,0042385	0,0027777	0,0011413	0,0011099
58	0,0050206	0,0044321	0,0034953	0,0021624	0,0008077	0,0008416
59	0,0041816	0,0034985	0,0028084	0,0015917	0,0005016	0,0005917
60	0,0034966	0,0026736	0,0021918	0,0010754	0,0002479	0,0003655
61	0,0030346	0,0019860	0,0016614	0,0006237	0,0000722	0,0001668
62	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
63	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
64	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
65	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
66	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
67	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
68	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000
69	0,0028653	0,0014614	0,0012320	0,0002467	0,0000000	0,0000000

Anhang B

Mathematische Grundformeln

In diesem Abschnitt werden bekannte Formeln, die regelmäßig im Kontext finanz- und versicherungsmathematischer Berechnungen Anwendung finden, aufgeführt.

B.1 Folgen und Reihen

Bei den im Folgenden betrachteten mathematischen Objekten wird nicht darauf geachtet, ob diese konvergieren oder nicht.

Eine **Folge** ist eine Funktion, welche jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet, d.h.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{R} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{array}$$

Die Werte a_n werden **Folgenglieder** genannt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Folge zu konstruieren:

1. Man kann die Glieder der Folge direkt angeben, also $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.
2. Die Folge kann als eine Funktion f von n angegeben werden, so dass $a_n = f(n)$.
3. Die Folge entsteht durch eine Rekursionsformel, indem das n -te Folgenglied in Abhängigkeit vom vorangehenden, $(n - 1)$ -ten Folgenglied ermittelt wird, also $a_n = f(a_{n-1})$. In diesem Fall muss zusätzlich ein Startwert a_1 angegeben werden.

Addiert man die ersten n Glieder einer Folge, führt dies zum Begriff der **Partialsumme**

$$s_n := \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n .$$

Die Folge der Partialsummen heißt (**unendliche**) **Reihe** und wird üblicherweise mit $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ notiert.

B.1.1 Arithmetische Folgen und Reihen

Eine **arithmetische Folge** ist eine Folge, bei der die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern immer identisch ist, also

$$a_n - a_{n-1} = d = \text{const.}$$

Durch Angabe des ersten Folgenglieds a_1 und der konstanten Differenz d lässt sich eine arithmetische Folge über die Vorschrift

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

konstruieren, d.h.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2 \cdot d \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für die Partialsummen s_n gilt dann

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) \\ &= n \cdot a_1 + (1 + 2 + \dots + (n-1)) \cdot d \\ &= n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d \quad [\text{siehe } (*)] \\ &= \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) \\ &= \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) . \end{aligned}$$

An der Stelle (*) wurde die **Gauß'sche Summenformel** für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen verwendet, nämlich

$$g_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} .$$

Diese lässt sich anschaulich beweisen:

$$\begin{array}{rcl} g_n & = & 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ + g_n & = & n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 \\ \hline 2 \cdot g_n & = & (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) \end{array}$$

Das vereinfacht sich zu

$$2 \cdot g_n = n \cdot (n + 1) ,$$

so dass

$$g_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} .$$

Als Ergänzung seien die folgenden Summenvereinfachungen erwähnt (auch wenn es sich bei den Summanden nicht um Glieder einer arithmetischen Folge handelt):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j &= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \\ \sum_{j=1}^n j^2 &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} \\ \sum_{j=1}^n j^3 &= \left(\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right)^2 . \end{aligned}$$

B.1.2 Geometrische Folgen und Reihen

Wenn nicht die Differenz, sondern der Quotient zweier jeweils aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist (vorausgesetzt $a_n \neq 0$ für alle n), d.h.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q = \text{const},$$

so spricht man von einer **geometrischen Folge**.

Durch Angabe des ersten Folgengliedes a_1 und des konstanten Quotienten q kann die zugehörige geometrische Folge konstruiert werden als

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} ,$$

d.h.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Partialsumme entspricht dann

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^n a_j \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von

$$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^n$$

sieht man, dass

$$\begin{aligned} q \cdot s_n &= s_n - a_1 + a_1 \cdot q^n \\ &= s_n - a_1 \cdot (1 - q^n). \end{aligned}$$

Dies lässt sich umschreiben zu

$$q \cdot s_n - s_n = -a_1 \cdot (1 - q^n)$$

bzw.

$$s_n \cdot (q - 1) = -a_1 \cdot (1 - q^n),$$

so dass sich schließlich die übersichtliche Formel

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ergibt. Für $|q| < 1$, d.h. $-1 < q < 1$, konvergiert die Folge der Partialsummen s_n gegen einen fixen Wert, den Grenzwert der Folge, denn

$$s_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \cdot \overbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1}}^{\rightarrow 0} = a_1 \cdot \frac{-1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

In praktischen Anwendungen ist häufig $a_1 = 1$, womit sich die geläufige Summenformel für eine geometrische Folge ergibt, nämlich

$$\sum_{j=1}^n q^{j-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

bzw. nach Indexverschiebung

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

B.2 Potenzreihen und Taylor-Entwicklung

Im Zusammenhang mit Zinsen oder Barwerten wird zur Abschätzung bzw. Approximation häufig von der Taylor-Entwicklung einer Funktion Gebrauch gemacht. Eine **Potenzreihe** ist eine unendliche Reihe der Gestalt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (x - x_0)^j .$$

Dabei sind die a_j beliebige reelle Zahlen. Der Wert x_0 wird **Entwickelpunkt** der Potenzreihe genannt.

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige, auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$, so heißt die (Potenz-)Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt x_0 . Falls $x_0 = 0$ ist, wird die Reihe gelegentlich auch als **MacLaurin-Reihe** bezeichnet.

Sofern die Taylor-Reihe konvergiert, stimmt sie im Konvergenzbereich mit der Funktion f überein, so dass man schreiben kann

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j ,$$

Auf die Frage nach der Konvergenz dieser Reihe wird an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen. Dies kann insbesondere vor dem Hintergrund entfallen, dass die Entwicklung einer Funktion in eine Taylor-Reihe oftmals nicht vollständig durchgeführt wird, sondern bereits nach einer geringen Anzahl Glieder abbricht, weil dann eine hinreichend genaue Approximation erreicht scheint.

Dies führt zu der Partialsumme

$$\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j ,$$

welche **Taylor-Polynom n-ter Ordnung** von f genannt wird. Das Taylor-Polynom stellt nur noch eine Annäherung der Funktion f dar (**Taylor-Approximation n-ter Ordnung**), so dass

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

gilt und der verbleibende Teil der Taylor-Reihe in einem Restglied aufgefangen wird. In den meisten Fällen begnügt man sich mit einer Taylor-Approximation 1. (linear), 2. (quadratisch) oder 3. (kubisch) Ordnung.

B.3 Abschätzung von Integralen

Im Kontext von stetigen Versicherungsleistungen werden die auftretenden Integrale häufig approximativ ausgewertet. Im Folgenden sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige, auf dem Intervall $I = [a; b]$ stetige Funktion.

Der **Mittelwertsatz der Integralrechnung** besagt, dass ein Wert $\zeta \in [a; b]$ existiert, so dass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\zeta) \cdot (b - a) .$$

Die **Trapezregel** beschreibt, wie man das Integral von f über dem Intervall I durch den Flächeninhalt eines oder mehrerer Trapeze annähernd bestimmen kann.

Nach der **Sehnen-Trapezregel** gilt die Näherung

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} ,$$

und die **summierte bzw. zusammengesetzte Sehnen-Trapezregel** liefert mit der Schrittweite $h = \frac{b - a}{n}$ die Approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + j \cdot h) + \frac{f(b)}{2} \right) .$$

Ganzzahlige Intervallgrenzen a und b vorausgesetzt sowie eine Schrittweite von $h = 1$ führen zu der Darstellung

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=a}^b f(j) - \frac{f(a) + f(b)}{2} .$$

Dies stellt eine vereinfachte Version der als **Euler'sche Summenformel** oder auch **Euler-MacLaurin-Formel** bekannten Näherungsformel dar, welche jedoch umgekehrt die Approximation einer Summe durch ein Integral beschreibt.

Gemäß der **Tangenten-Trapezregel** oder **Mittelpunktsregel** ergibt sich eine Näherung der Form

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) .$$

Die **summierte** bzw. **zusammengesetzte Tangenten-Trapezregel** führt bei einer Schrittweite von $h = \frac{b-a}{n}$ zu der Näherungsformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{j=1}^n f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot h\right) ,$$

was bei ganzzahligen Intervallgrenzen a und b sowie gleichzeitiger Schrittweite $h = 1$ der speziellen Darstellung

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=a}^{b-1} f\left(j + \frac{1}{2}\right)$$

entspricht.

Der bei den Näherungen entstehende Fehler wird jeweils in einem Restglied aufgefangen.

Anhang C

Wörterbuch Deutsch – Englisch

A

Abgang	withdrawal
Ablauf(termin)	(date of) maturity
Abzinsungsfaktor	discount factor
Aktionär	shareholder
Aktiva	assets
Anteilseigner	shareholder
Anwartschaft	entitlement
Äquivalenzprinzip	equivalence principle
Altersverschiebung	age adjustment, age rating
Ansammlungsguthaben	deposit account
Aufschubdauer	deferment period
Aufsichtsbehörde	supervisory authority
Auftreten	occurrence
Aufzinsungsfaktor	accumulation factor
Ausfallrate	hazard rate, force of mortality
~, kumulierte	cumulated/integrated hazard rate
Ausfallwahrscheinlichkeit	probability of default
Ausgabeaufschlag	issue surcharge
Ausscheideintensität	force of decrement

A

Ausscheideordnung	decrement table
Ausscheidetafel	decrement table
Ausscheideursache	decrement
Ausscheidewahrscheinlichkeit	probability of decrement
Ausschüttung	payout

B

Barwert	present value
~, erwarteter	expected present value
~ der zukünftigen Gewinne	present value of future profits
Beitrag	premium
beitragsbezogen	premium-related
Beitragsbefreiung	waiver of premiums
Beitragsdynamik	increasing premiums
beitragsfrei (gestellt)	(made) paid-up
Beitragsrückgewähr	return of premiums
Beitragszerlegung	decomposition of the premium
Berichtswesen	reporting
Berufsgruppe	occupational category
~ neinteilung	occupational classification
berufsunfähig	(permanently) disabled
Berufsunfähigkeit	(occupational) disability
~ sversicherung	disability insurance
~ szusatzversicherung	disability rider
Bestand	in-force business
betriebliche Altersversorgung	occupational pension scheme
Bewertung	valuation
Bilanz	balance sheet
Bilanzdeckungsrückstellung	statutory policy reserve
Bonus	bonus

D

Darlehen	loan
Dauer	duration
~, gebrochene	fractional duration
Deckungskapital	premium reserve, policy value
~, Brutto-	gross premium policy value
~, Netto-	net premium policy value
~, gezillmertes	zillmerized policy value
~, prospektives	prospective policy value
~, retrospektives	retrospective policy value
Deckungslimit	limit, ceiling
Dichtefunktion	probability density function
disjunkt	disjoint
~, paarweise	pairwise disjoint
Diskontfaktor	discount faktor
diskontierte Lebende	discounted lives
diskontierte Tote	discounted deaths
Dividende	dividend
dynamische Erhöhung	dynamic increase

E

Eigenmittel	own funds
Einmalzahlung	lump sum payment
Eintrittsalter	age at entry
Einursachentafel	single decrement table
Endwert	accumulated value, terminal value
Entnahme	withdrawal
Ereignis	event
~, Gegen-/Komplementär-	complementary event, complement
Erlebensfallversicherung (rein)	pure endowment
Erstversicherung	primary insurance

E

Erwartungswert	expected value, expectation
Exzident	excedent
~, Schaden-	excess of loss
~, Summen-	surplus

F

Faltung	convolution
Faustregel	rule of thumb
Folge	sequence
fondsgebunden	unit linked
Fondsguthaben	unit linked reserve
Fondsmanagementgebühr	fund charge

G

ganzzahliger Teil	integer part
Garantie	guarantee
~ guthaben	guarantee reserve
Gefährdung	exposure, hazard
Geschäftszweig	line of business
gesetzlich (vorgeschrieben)	statutory
Gesundheitsprüfung	medical underwriting
Gewinn	profit, surplus
~, Kosten-	cost profit
~, Sterblichkeitss-	mortality profit
~, Zins-	interest profit
Gewinnquellen	sources of profits
Gewinnzerlegung	analysis of surplus
Gewinn- und Verlustrechnung	profit and loss account
Gleichverteilung der Todesfälle	uniform distribution of deaths
Grenzwertsatz	limit theorem
~, Zentraler	central limit theorem

H

Haftungsstrecke	layer
Hinterbliebene	survivor, bereaved

I, J

Invalidisierungsrate	inception rate
Invalidität	disability
Jahresabschluss	financial statements
Jahresüberschuss	annual net profit

K

Kapitallebensversicherung (gemischt)	endowment assurance
Kapitalwachstum	capital growth
Karenzzeit	waiting period, qualifying period
Kommutationszahl	commutation function
konkurrierende Risiken	competing risks
Kosten	expenses
~, Abschluss-	acquisition costs, initial expenses
~, Abwicklungs-	settlement costs
~, Abwicklungs-	regulation expenses
~, Amortisations-	amortisation costs
~, Inkasso-	collection expenses
~, Kapital(anlage)-	costs of capital allocation
~, Kapital(anlage)-	investment expenses
~, laufende Verwaltungs-	maintenance expenses
~, laufende Verwaltungs-	renewal expenses
~, Neugeschäfts-	new business costs
~, Risikoprüfungs-	underwriting costs
~, jährliche Stück-	annual policy fee

K

Kostenmodell	cost model
Kündigung	surrender, cancellation, lapse

L

Lebenserwartung, (fernere)	expectation of life, life expectancy
~, gestutzte	curtate life expectancy
~, vollständige	complete life expectancy
Lebensversicherung	life insurance
Lebensversicherungsunternehmen	life office
Leibrente	life annuity
~, aufgeschobene	deferred life annuity
~, lebenslang zahlbare	whole life annuity
~, temporäre	temporary life annuity
Leistung	benefit (payment)
~, Ablauf-	maturity benefit
~, beitragsfreie	paid-up benefit
~, Erlebensfall-	survival benefit
~, fallende	decreasing benefit
~, garantierte	guaranteed benefit
~, steigende	increasing benefit
~, Todesfall-	death benefit
leistungsbezogen	benefit-related
Leistungs dauer	benefit (payment) term
Leistungs dynamik	increasing benefits
Leistungsspektrum	varying benefits

M

Mehrursachentafel	multiple decrement table
Mindestkapitalanforderung	minimum capital requirement

N

Nachreservierung	strengthening of reserves
~, Renten-	biometric strengthening of reserves
nachschi ssig	in arrear(s)

N

Nettoprämie	net premium
~, gezillmerte	zillmerized net premium
Neugeborenes	newborn child
Neugeschäft	new business

P

Partialsumme	partial sum
partielle Integration	integration by parts
Passiva	liabilities
Pensionsierung	retirement
Pflegebedürftigkeit	(nursing) care dependency
Pflegestufe	(nursing) care level
Potenzreihe	power series
Potenzreihenentwicklung	power series expansion
Prämie	premium
~, ausreichende	sufficient premium
~, Brutto-	gross premium
~, Einmal-	single premium
~, Kosten-	expense premium
~, laufende	regular premium
~, Netto-	net premium
~, Risiko-	risk premium
~, Spar-	savings premium
~, Tarif-	tariff premium
~, Zahl-	office premium
~, Zillmer-	zillmerized premium
Prämienspektrum	varying premiums
Prämienzahlungsdauer	premium (payment) term
Prämienzahlweise	premium frequency
pro rata temporis	per unit time

P

Provision	commission
~, Abschluss-	initial commission
~, (laufende) Bestandspflege-	renewal commission
Provisionsrückforderung	commission clawback
Provisionssatz	commission rate

Q

Qualitätsklasse	tier
Quote	quota

R

Radix	radix
Raten(zahlungs)zuschlag	premium frequency loading
Reaktivierung	recovery
Rechnungsgrundlagen	actuarial basis, calculation basis
~ erster Ordnung (Prämienberechnung)	pricing basis, premium basis
~ erster Ordnung (Reserveberechnung)	reserving basis, valuation basis
~ zweiter Ordnung	experience basis
Rechnungslegung	reporting
Rechnungswesen	accounting
Reihe	series
Rendite	yield, internal rate of return
~, Bestimmungsgleichung	equation of value
Rente	annuity
~, arithmetisch fallende	decreasing annuity
~, arithmetisch steigende	increasing annuity
~, aufgeschobene	deferred annuity
~, einseitige Überlebens-	reversionary annuity
~, ewige	perpetuity
~, geometrisch steigende	annuity with compound growth
~, Hinterbliebenen-	widow's pension

R

Rente	annuity
~, Jahres-	annual annuity
~, sofort-beginnende	immediate annuity
~, unterjährig in k Raten zahlbare	annuity payable k -thly
~, vorschüssige	annuity-due
~, Waisen-	orphans' pension
~, Witwen-	widow's pension
Rentenbezug	benefit period
Rentengarantiezeit	guarantee period
Rentenzahlweise	annuity frequency
Risiko	risk, hazard, exposure
~, Änderungs-	risk of change
~, erhöhtes	substandard risk, extra risk
~ -faktor	risk factor
~, Irrtums-	risk of error
~, Langlebigkeits-	longevity risk
~, moralisches	moral hazard
~ -prüfung	risk assessment
~ -prüfung (medizinische)	medical underwriting
~, Schwankungs-	risk of random fluctuations
~ -verringerung	risk mitigation
~ versicherungstechnisches	underwriting risk
~, Zufalls-	risk of random fluctuations
~ -zuschlag	risk loading
risikiertes Kapital	sum at risk
Rohüberschuss	gross surplus
Rückkauf	surrender
Rückkaufswert	surrender value
~, Mindest-	minimum surrender value

R

Rückstellung	reserve
~ für Beitragsrückerstattung	provisions for future profits
~, Spätschaden-	IBNR claims reserve
~, versicherungstechnische	technical provisions
Rückversicherung	reinsurance, re-insurance
~, aktive	reinsurance accepted
~ auf Normalbasis	original premium reinsurance
~ auf Originalbasis	original premium reinsurance
~ auf Risikobasis	risk premium reinsurance
~, Einzelschaden-Exzedenten-	working excess of loss reinsurance
~, Jahresüberschaden-	stop loss reinsurance
~, Kumulschaden-Exzedenten-	catastrophe excess of loss reinsurance
~, passive	reinsurance ceded
~, Quoten-	quota share reinsurance
~, Summen-Exzedenten-	surplus reinsurance
Rückzahlungsschema	redemption scheme

S

Säule	pillar
Schätzung (Schätzwert)	estimate
Schiefe	skewness
Schlussüberschussanteilfonds	reserve for terminal bonus
Schwaches Gesetz der großen Zahlen	weak law of large numbers
schwere Krankheit	dread disease
Selbstbehalt	retention (level)
Selektion	selection
~, Anti-	adverse selection
~, Auto-	self-selection
~, temporäre Anfangs-	temporary initial selection

S

Selektionsperiode	select period
Selektionssterbetafel	select life table
Sicherheitszuschlag	safety margin
Solvabilität	solvency
Solvabilitätskapitalanforderung	solvency capital requirement
Sparplan	savings plan
Startalter	initial age
Startwert	initial value
Steigerungssatz	growth rate
Sterbegesetz	death law
Sterbeintensität	force of mortality
Sterbetafel	life table, mortality table
~ mit mehreren Ausscheideursachen	multiple-decrement table
Sterbewahrscheinlichkeit	rate of mortality
~, selektive	select rate of mortality
~, ultimative	ultimate rate of mortality
Sterblichkeit	mortality
Stetigkeitskorrektur	continuity correction
Steuern	tax(es)
stille Reserven	hidden reserves
Storno	surrender, cancellation, lapse
~ -abschlag	surrender penalty
~ -gebühr	surrender fee
Summenrabatt	discount for large sums

T

Tagesgeldkonto	fixed deposit account
Tarif	tariff
~ -stufe	tariff stage
Treppenfunktion	step function

U

Überlebensfunktion	survival function
Überlebensmodell	survival model
Überschuss	surplus
~, -beteiligung	profit sharing, profit participation
~, -entstehung	accrual of bonus
~, laufender	regular bonus
~, Schluss-	terminal bonus
~, -verwendung	bonus system
~, -zuteilung	allocation of surplus
Unabhängigkeit	independence
unabhängig und identisch verteilt	independent identically distributed
Undichtigkeit	leakage
Unfallbuckel	accident hump

V

Verbindlichkeiten	liabilities
Verbraucherpreisindex	consumer price index
verbundene Leben	joint lives
~, zusammengehöriges Paar	fixed couple
Vermögen	assets
~, Anlage-	fixed assets
~, Umlauf-	current assets
versicherte Person	insured life
Versicherung	insurance, assurance
~, beitragsfreie	paid-up insurance
~, einseitige Risikolebens-	contingent insurance
~, Berufsunfähigkeitss-	disability insurance
~, Berufsunfähigkeitszusatz-	disability rider
~, reine Erlebensfall-	pure endowment
~, gemischte	endowment insurance

V

Versicherung	insurance, assurance
~, Haupt-	main insurance
~, Kapitallebens-	endowment insurance
~, lebenslange Risikolebens-	whole life insurance
~, Pflege-	long-term care insurance
~, Risikolebenszusatz-	term rider
~, temporäre Risikolebens-	term insurance
~, Termfix-	capital redemption insurance
~, Zusatz-	insurance rider
Versicherungsdauer	policy term
Versicherungsleistung	(insurance) benefit
Versicherungsmakler	insurance broker
Versicherungsnehmer	policyholder
Versicherungssumme	sum assured
Versicherungsumfang	cover
Versicherungsunternehmen	insurance company, insurer
Versicherungsvertreter	insurance agent
Verteilung	distribution
~, bedingte	conditional distribution
~, diskrete	discrete distribution
~, gemeinsame	joint distribution
~, Gleich-	uniform distribution
~, Rand-	marginal distribution
~, stetige	continuous distribution
Verteilungsfunktion	(cumulative) distribution function
Vertrag	contract
Vertragsabschluss	outset of the contract
Vertriebsweg	distribution channel
Verzinsliche Ansammlung	deposit account

V

Verzinsung	interest
~, einfache	simple interest
~, stetige	continuous interest
~, zusammengesetzte	compound interest
vorschüssig	in advance

W

Wahrscheinlichkeit	probability
~, bedingte	conditional probability
~ -sdichte	probability density function
Waise	orphan
Wartezeit	waiting period
Wiederaufnahme	resumption
Wiederinkraftsetzung	reinstatement, reinforcement
Witwe(r)	widow(er)

X, Y

x -Jähriger	individual aged x
---------------	---------------------

Z

zahlbar in k Raten	convertible k -thly
Zahlungsstrom (diskret)	(discrete) cash flow
Zahlungszeitraum	payment period
Zedent	ceding company, cedent
~, Retro-	retroceding company, retrocedant
Zeitachse	time scale
Zeiteinheit	unit time
Zeitindex	time index
Zeitrente	annuity certain
Zeitwert	time value
Zession	(reinsurance) cession
~, Retro-	retrocession

Z

Zessionär, Zessionar	cessionary, reinsurer
~, Retro-	retrocessionaire
zillmern	zillmerize
Zillmerung	Zillmer method
Zins	interest
Zinsfuß	interest factor
~, interner	internal rate of return
Zinsintensität	force of interest
Zinssatz	interest rate
~, Effektiv-	effective rate of interest
~, Nominal-	nominal rate of interest
Zinszusatzreserve	additional reserve due to low interest rates
Zufallsvariable	random variable
Zufallsvektor	random vector
Zuführung	allocation
zukünftige Lebensdauer	future lifetime
~, gemeinsame	joint future lifetime
~, gestutzte	curtate future lifetime
Zuschlag	loading
Zustand	state

Symbolverzeichnis

$1_{\{\cdot\}}$	Indikatorfunktion
α	Kostensatz für Abschlusskosten
α^γ	Kostensatz für Amortisationskosten
α^Z	Kostensatz für Abschlusskosten
a	Barwert einer jährlich nachschüssig zahlbaren Rente
$a^{(k)}$	Barwert einer unterjährig nachschüssig zahlbaren Rente
$a_{\bar{n}}$	nachschüssiger Rentenbarwertfaktor
\ddot{a}	Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Rente
\ddot{a}^π	Barwert einer vorschüssigen Rente (mit Prämienpektrum π)
\ddot{a}^θ	Barwert einer vorschüssigen Rente (mit Leistungsspektrum θ)
\ddot{a}^{aa}	Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Aktivenrente
\ddot{a}^{ai}	Barwert einer Anwartschaft auf Invalidenleistung
\ddot{a}^{aw}	Barwert einer Anwartschaft auf kollektive Witwenrente
\ddot{a}^i	Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Invalidenrente
$\ddot{a}^{i(k)}$	Barwert einer unterjährig vorschüssig zahlbaren Invalidenrente
$\ddot{a}^{(k)}$	Barwert einer unterjährig vorschüssig zahlbaren Rente
\ddot{a}^w	Barwert einer kollektiven Witwenrente
$\ddot{a}_{\bar{n}}$	vorschüssiger Rentenbarwertfaktor
$(ps)\ddot{a}^{aa}$	Barwert einer jährlich zahlbaren Aktivenrente (Pflege)

$(ps)\ddot{a}^{ai}$	Barwert einer Anwartschaft auf Pflegerente mindestens der Stufe ps
$(ps)\ddot{a}^i$	Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Pflegerente
$(ps)\ddot{a}^{i(k)}$	Barwert einer unterjährig vorschüssig zahlbaren Pflegerente
\bar{a}	Barwert einer stetig zahlbaren Rente
A	Parameter im Sterbegesetz von Gompertz-Makeham
A	Barwert einer Todesfallleistung (zahlbar am Jahresende)
A^θ	Barwert einer Todesfallleistung (mit Leistungsspektrum θ)
$A^{(k)}$	Barwert einer Todesfallleistung (zahlbar unterjährig)
\overline{A}	Barwert einer Todesfallleistung (zahlbar unmittelbar bei Tod)
A_{x+m}^{Bonus}	Barwert der Bonus-Leistung (inkl. Kosten)
$AK_m^{\text{Biometrie}}$	Auffüllkapital aufgrund Biometrie im Jahr m (Rentennachreservierung)
AK_m^{Zins}	Auffüllkapital aufgrund Zins im Jahr m (Zinszusatzreserve)
β	Kostensatz für Inkassokosten
b	Selektionsperiode
$bf_{m;k}(j)$	Bewertungsfaktor für Fonds $j \in \{1, \dots, J\}$ im Monat $(m; k)$
bg	Berufsgruppe
B	Parameter im Sterbegesetz von Gompertz(-Makeham)
$BEP_{x:\overline{n}}$	Bruttoeinmalprämie
BG	Anzahl Berufsgruppen
$BP_{\text{nach Aend}}$	Bruttoprämie nach Vertragsänderung
$BP_{\text{nach Dyn}}$	Bruttoprämie nach dynamischer Erhöhung
BP_m	Bruttoprämie im Jahr m bei klassischen Versicherungen
$BP_{x:\overline{t}}$	Bruttojahresprämie, Tarifprämie
$BP_{x:\overline{t}}^{\text{Norm}}$	Normprämie, Bedarfsprämie
$BRG_{m;k}$	Beitragsrückgewähr im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
c	Summationsindex

c	Parameter im Sterbegesetz von Gompertz(-Makeham)
C_x	Kommutationszahl 1. Ordnung für Tote
\overline{C}_x	Kommutationszahl 1. Ordnung für Tote (stetig)
$C_{x,y}$	Kommutationszahl 1. Ordnung für gestorbener Paare
$CF(t, i)$	Wert eines Zahlungsstroms zum Zeitpunkt t auf Basis des effektiven Zinssatzes i
∂	partielle Ableitung
$\delta(t)$	Zinsintensität zum Zeitpunkt t
d	effektiver Diskontsatz
$d^{(k)}$	nomineller Diskontsatz
d_x	Anzahl gestorbener Personen des Alters x
$d_{x,y}$	Anzahl gestorbener Paare aus Personen der Alter x und y
d_x^w	Anzahl gestorbener Personen des Alters x unter Einrechnung von Storno
\tilde{d}_x	Anzahl Abgänge des Alters x aufgrund irgendeiner Ausscheideursache
$\tilde{d}_x^{(g)}$	Anzahl Abgänge des Alters x aufgrund Ausscheideursache g
ds	Dynamiksatz im Rahmen einer Beitragsdynamik
D_x	Kommutationszahl 1. Ordnung für Lebende
$D_{x,y}$	Kommutationszahl 1. Ordnung für lebende Paare
\overline{D}_x	Kommutationszahl 1. Ordnung für Lebende (stetig)
D_x^{aa}	Kommutationszahl 1. Ordnung für Aktive
D_x^{ai}	Kommutationszahl 1. Ordnung für Anwartschaft auf Invalidenleistung
D_x^i	Kommutationszahl 1. Ordnung für Invaliden
$(ps) D_x^{aa}$	Kommutationszahl 1. Ordnung für Aktive im Sinne der Pflegestufe ps
$(ps) D_x^{ai}$	Kommutationszahl 1. Ordnung für Anwartschaft auf Pflegerente
$(ps) D_x^i$	Kommutationszahl 1. Ordnung für Pflegebedürftige mindestens der Stufe ps

(Da)	Barwert einer arithmetisch fallenden nachschüssigen Rente
$(Dä)$	Barwert einer arithmetisch fallenden vorschüssigen Rente
$\% (Dä)$	Barwert einer geometrisch fallenden vorschüssigen Rente
(DA)	Barwert einer arithmetisch fallenden Todesfallleistung
ε	Kostensatz für Stückkosten (Absolutbetrag)
η	Kostensatz für Ausgabeaufschlag (in Prozent)
e^{\cdot}	Exponentialfunktion
e_x	gestutzte fernere Lebenserwartung der Person (x)
$e_{x,y}$	gestutzte fernere Lebenserwartung des Paars (x, y)
\mathring{e}_x	vollständige fernere Lebenserwartung der Person (x)
$\mathring{e}_{x,y}$	vollständige fernere Lebenserwartung des Paars (x, y)
\exp	Exponentialfunktion
E	Barwert-Symbol einer reinen Erlebensfallleistung
$E[\cdot]$	Erwartungswert (einer Zufallsvariable)
EFL_m	Erlebensfallleistung im Jahr m bei klassischen Versicherungen
EZ	Exzident (Rückversicherung)
$f_x(t)$	Dichtefunktion zum Zeitpunkt t
$f_{x,y}(t)$	Dichtefunktion zum Zeitpunkt t (bei verbundenen Leben)
$f_{am;k}(j)$	Anzahl Fondsanteile von Fonds $j \in \{1, \dots, J\}$ im Monat $(m; k)$
$F_x(t)$	Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t
$F_{x,y}(t)$	Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t (bei verbundenen Leben)
$F_{\overline{x},\overline{y}}(t)$	Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t (bei verbundenen Leben)
FG_m	Guthaben aus Fondsanlage nach m Jahren
$FG_{m;k}$	(Gesamt-)Fondsguthaben am Ende des Monats $(m; k)$
$\widehat{FG}_{m;k}$	geschätztes (Gesamt-)Fondsguthaben am Ende des Monats $(m; k)$
$FG_{m;k}(j)$	Fondsguthaben in Fonds $j \in \{1, \dots, J\}$ am Ende des Monats $(m; k)$

γ_1	Kostensatz für Verwaltungskosten (beitragspflichtige Zeit)
γ_2	Kostensatz für Verwaltungskosten (tariflich beitragsfreie Zeit)
γ_3	Kostensatz für Verwaltungskosten (vorzeitig beitragsfreie Zeit)
γ_4	Kostensatz für Verwaltungskosten (leistungspflichtige Zeit)
γ_{Bonus}	Kostensatz für beitragsfreien Bonus-Baustein (in Prozent)
γ_{Fonds}	Kostensatz für Fondsverwaltung (in Prozent)
g	Rentengarantiezeit, Mindestlaufzeit der Rentenzahlung
g	Ausscheideursache
$g(x, t_0, t)$	Trendfunktion zur Abbildung einer Sterblichkeitsverbesserung
G	Anzahl Zahlungen innerhalb eines (Prämien-)Zahlungsstroms
G	Anzahl Ausscheideursachen
$GG_{m;k}$	Garantieguthaben am Ende des Monats ($m; k$)
h	Versicherungsstichtags-Monat (Bilanzdeckungsrückstellung)
h_x	Verheiratungswahrscheinlichkeit für eine Person des Alters x
$h(t)$	Alterverschiebung zur Abbildung einer Sterblichkeitsverbesserung
i	jährlicher Rechnungszins (in Prozent)
i	jährlicher Effektivzins (in Prozent)
i'	jährlicher Zins 2. Ordnung (in Prozent)
$i^{(k)}$	jährlicher Nominalzins (in Prozent)
\hat{i}	jährlicher modifizierter Zins bei einer geometrisch fallenden Rente (in Prozent)
\tilde{i}	jährlicher modifizierter Zins bei einer geometrisch steigenden Rente (in Prozent)
i_{Fonds}	jährliche Fondsperformance (in Prozent)
i_{SGA}	jährlicher Zins für Schlusstüberschussanteilfonds (in Prozent)
i_{VZA}	jährlicher Ansammlungszinssatz (in Prozent)
i_x	einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit für eine Person des Alters x
i_Z	interner Zinsfuß, Rendite eines Zahlungsstroms (in Prozent)

$(ps)i_x$	einjährige Wahrscheinlichkeit, pflegebedürftig mindestens der Stufe ps zu werden
(Ia)	Barwert einer arithmetisch steigenden nachschüssigen Rente
$(I\ddot{a})$	Barwert einer arithmetisch steigenden vorschüssigen Rente
$\% (I\ddot{a})$	Barwert einer geometrisch steigenden vorschüssigen Rente
$(I\overline{a})$	Barwert einer arithmetisch steigenden stetigen Rente
$(\overline{I}\overline{a})$	Barwert einer kontinuierlich steigenden stetigen Rente
(IA)	Barwert einer arithmetisch steigenden Todesfallleistung (zahlbar am Jahresende)
$(IA)^{(k)}$	Barwert einer arithmetisch steigenden Todesfallleistung (zahlbar unterjährig)
$\% (IA)$	Barwert einer geometrisch steigenden Todesfallleistung (zahlbar am Jahresende)
$(I\overline{A})$	Barwert einer arithmetisch steigenden Todesfallleistung (zahlbar unmittelbar bei Tod)
j	Index für Aufzählung oder Summation
J	Anzahl verschiedener zur Auswahl stehender Fonds
J	Anzahl Zahlungen innerhalb eines (Leistungs-)Zahlungsstroms
JR	versicherte Jahresrente
JR^{vbf}	versicherte Jahresrente nach Beitragsfreistellung
$JR^{\text{nach Dyn}}$	versicherte Jahresrente nach dynamischer Erhöhung
JR_m^{Bonus}	Bonus-Jahresrente nach m Jahren
k	Prämienzahlweise bei klassischen Versicherungen
k	Rentenzahlweise
K_t	Kapitalwachstumsfunktion
K_x	gestützte zukünftige Lebensdauer einer x -jährigen Person
$K_x^{(k)}$	unterjährig gestützte zukünftige Lebensdauer einer x -jährigen Person
$K_{x,y}$	gestützte gemeinsame zukünftige Lebensdauer des Paares (x, y)
KP_m	Kostenprämie im Jahr m bei klassischen Versicherungen

KP'_m	Kostenprämie 2. Ordnung im Jahr m bei klassischen Versicherungen
$KP_{m;k}$	Kostenprämie im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
$KP_{m;k}^F$	Kostenprämie aus Fonds im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
KW_m^{RNR}	Abgangswahrscheinlichkeit zur Erleichterung der Rentennachreservierung
KW_m^{ZZR}	Abgangswahrscheinlichkeit zur Erleichterung der Zinszusatzreserve
λ	Aufteilungsverhältnis zwischen Abgängen aufgrund Tod und Storno
l	Anzahl Erhöhungen/Absenkungen bei steigenden/fallenden Leistungen
l	Leistungsdauer (Berufsunfähigkeitsversicherung)
$l_0 = l_{x_0}$	Radix einer Sterbetafel
l_x	Anzahl lebender Personen des Alters x
$l_{x,y}$	Anzahl lebender Paare aus Personen des Alters x und des Alters y
l_x^{aa}	Anzahl lebender Personen des Alters x im Aktiven-Kollektiv
l_x^i	Anzahl lebender Personen des Alters x im Invaliden-Kollektiv
l_x^w	Anzahl lebender Personen des Alters x unter Einrechnung von Storno
\tilde{l}_x	Anzahl lebender Personen des Alters x im Hauptkollektiv
$\tilde{l}_x^{(g)}$	Anzahl lebender Personen des Alters x im Teilkollektiv g
$(ps)l_x^{aa}$	Anzahl im Sinne der Pflegestufe ps aktiven Personen des Alters x
$(ps)l_{z,x}^i$	Anzahl mindestens der Stufe ps pflegedürftiger Personen des Alters x
\ln	Logarithmus-naturalis-Funktion
\log	Logarithmus-Funktion
LGA_m	laufender Überschussanteil im Jahr m bei klassischen Versicherungen

$LGA_{m;k}$	laufender Überschussanteil im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
LGA_m^{***}	laufender Überschussanteil im Jahr m , $*** \in \{\text{Zins}, \text{Risiko}, \text{Kosten}\}$
$LGA_{m;k}^{***}$	laufender Überschussanteil im Monat $(m; k)$, $*** \in \{\text{Zins}, \text{Risiko}, \text{Kosten}\}$
LGA_m^{Summe}	Summe zugeteilter laufender Überschussanteile im Jahr m
μ_x	Ausfallrate, Hazardrate, Ausscheideintensität
$\mu_{x,y}$	Ausfallrate, Hazardrate, Ausscheideintensität (bei verbundenen Leben)
$\mu_x^{(g)}$	unabhängige Ausfallrate, Ausscheideintensität bei mehreren Ausscheideursachen
$\tilde{\mu}_x$	Ausfallrate, Ausscheideintensität bei mehreren Ausscheideursachen
$\tilde{\mu}_x^{(g)}$	abhängige Ausfallrate, Ausscheideintensität bei mehreren Ausscheideursachen
m	Zeitpunkt während der Vertragsdauer bei klassischen Versicherungen
m_{aend}	Zeitpunkt der Vertragsänderung
m_{BU}	Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität
m_{dyn}	Zeitpunkt der Ausübung einer dynamischen Erhöhung
m_{vbfr}	Zeitpunkt der vorzeitigen Beitragsfreistellung
$(m; k)$	Zeitpunkt während der Vertragsdauer bei fondsgebundenen Versicherungen
M_x	Kommutationszahl 2. Ordnung für Tote
$M_{x,y}$	Kommutationszahl 2. Ordnung für gestorbene Paare
M_x^θ	Kommutationszahl 2. Ordnung für Tote inkl. Leistungsspektrum θ
\overline{M}_x	Kommutationszahl 2. Ordnung für Tote (stetig)
mod	Restklassen-Funktion (modulo)
n	Betrachtungszeitraum
n	Versicherungsdauer

n	Rentenaufschubdauer
n	Anspruchsdauer (Berufsunfähigkeitsversicherung)
$n^{\text{Rü}}$	Dauer der Beitragsrückgewähr
N_x	Kommutationszahl 2. Ordnung für Lebende
$N_{x,y}$	Kommutationszahl 2. Ordnung für lebende Paare
N_x^π	Kommutationszahl 2. Ordnung für Lebende inkl. Prämienpektrum π
N_x^θ	Kommutationszahl 2. Ordnung für Lebende inkl. Leistungsspektrum θ
N_x^{aa}	Kommutationszahl 2. Ordnung für Aktive
N_x^{ai}	Kommutationszahl 2. Ordnung für Anwartschaft auf Invalidenleistung
N_x^i	Kommutationszahl 2. Ordnung für Invaliden
\overline{N}_x	Kommutationszahl 2. Ordnung für Lebende (stetig)
$(ps) N_x^{aa}$	Kommutationszahl 2. Ordnung für Aktive im Sinne der Pflegestufe ps
$(ps) N_x^{ai}$	Kommutationszahl 2. Ordnung für Anwartschaft auf Pflegerente
$(ps) N_x^i$	Kommutationszahl 2. Ordnung für Pflegebedürftige mindestens der Stufe ps
$NEP_{x:\overline{n}}$	Nettoeinmalprämie
$NP_{x:\overline{t}}$	Nettojahresprämie
$NP_{x:\overline{t}}^Z$	gezillmerte Nettojahresprämie, Zillmerprämie
NRF_m^{RNR}	Nachreservierungsfaktor aufgrund Biometrie bei fonds- gebundenen Versicherungen
NRF_m^{ZZR}	Nachreservierungsfaktor aufgrund Zins bei fondsgebundenen Versicherungen
ψ	Berufsgruppenzuschlag
π_j	Höhe der in Jahr j gezahlten (Brutto-)Prämie (Prämienpektrum)
π	Prämienpektrum (Vektor für Prämienzahlungen)
Π	Produktzeichen

p_x	einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$p_{x,y}$	einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$\bar{p}_{x,y}$	einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$p_x^{(g)}$	einjährige unabhängige Verbleibewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
\tilde{p}_x	einjährige Verbleibewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$\tilde{p}_x^{(g)}$	einjährige abhängige Verbleibewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
\bar{p}_x	monatliche Überlebenswahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$t p_x$	mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$t p_{x,y}$	mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$t \bar{p}_{x,y}$	mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$t p_x^{(g)}$	mehrjährige Verbleibewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$t \tilde{p}_x$	mehrjährige Verbleibewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$p_{am;k}(j)$	Anteil der Anlageprämie im Monat ($m; k$), der in Fonds $j \in \{1, \dots, J\}$ angelegt wird
ps	Pflegestufe
$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeit
(\mathbf{P}, \mathbf{B})	Finanztransaktion
$PV(i)$	Barwert eines Zahlungsstroms zum effektiven Zinssatz i
q_x	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
q'_x	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit 2. Ordnung
$q_{x,y}$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$\bar{q}_{x,y}$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$q_x^{(g)}$	einjährige unabhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
\tilde{q}_x	einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$\tilde{q}_x^{(g)}$	einjährige abhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
\bar{q}_x	monatliche Sterbewahrscheinlichkeit für eine Person (x)

q_x^{aa}	einjährige Aktiven-Sterbewahrscheinlichkeit für (x)
$q_{z,x}^i$	einjährige Invaliden-Sterbewahrscheinlichkeit für eine Person
q_x^U	einjährige Unisex-Sterbewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
	des Alters x , die im Alter z invalide geworden ist
tq_x	mehrjährige Sterbewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$tq_x^{(g)}$	mehrjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$t\tilde{q}_x$	mehrjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$t\tilde{q}_x^{(g)}$	mehrjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit für eine Person (x)
$tq_{x,y}$	mehrjährige Sterbewahrscheinlichkeit für ein Paar (x, y)
$tq_{\overline{x},\overline{y}}$	mehrjährige Sterbewahrscheinlichkeit für ein Paar $(\overline{x}, \overline{y})$
$tq_{x,y}^1$	mehrjährige bedingte Sterbewahrscheinlichkeit
$tq_{x,y}^2$	mehrjährige bedingte Sterbewahrscheinlichkeit
$(ps)q_x^{aa}$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit für eine im Sinne der Pflegestufe ps aktive Person
$(ps)q_{z,x}^i$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit für eine mindestens der Stufe ps pflegebedürftige Person
ρ	Raten(zahlungs)zuschlag
r	Steigerungs-/Absenkungssatz einer geometrisch steigenden oder fallenden Rente
$r_{z,x}$	einjährige Reaktivierungswahrscheinlichkeiten für eine Person des Alters x , die im Alter z invalide geworden ist
r_s^{ZZR}	mehrjähriger Aufzinsungsfaktor für Berechnung der Zinszusatzreserve
rw	Restmonate der Karenzzeit in Jahren $\frac{w}{12}$ (BU-Versicherung)
R_x	Kommutationszahl 3. Ordnung für Tote
\overline{R}_x	Kommutationszahl 3. Ordnung für Tote (stetig)
$R_{x,y}$	Kommutationszahl 3. Ordnung für gestorbene Paare
RKW_m^{BWR}	Rückkaufswert aus der Beteiligung an den Bewertungsreserven
RKW_m^{gar}	Rückkaufswert für die garantierte Leistung
RKW_m^{gesamt}	Gesamtrückkaufswert (inkl. Überschussbeteiligung)

RKW_m^{LGA}	Rückkaufswert aus laufender Überschussbeteiligung
RKW_m^{\min}	Mindestrückkaufswert (wegen Verteilung der Abschlusskosten)
RKW_m^{SGA}	Rückkaufswert aus Schlussüberschussbeteiligung
RP_m	Risikoprämie im Jahr m bei klassischen Versicherungen
$RP_{m;k}$	Risikoprämie im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
$RP_{m;k}^F$	Risikoprämie aus Fonds im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
$RÜ$	Rohüberschuss am Ende eines Geschäftsjahres
σ	Risikozuschlag
Σ	Summenzeichen
s	Zeitindex, Summationsindex
s	Endwert einer jährlich nachschüssig zahlbaren Rente
$s^{(k)}$	Endwert einer unterjährig nachschüssig zahlbaren Rente
s_l	Zeitpunkt innerhalb eines (Prämien-)Zahlungsstroms
$s_{\overline{n}}$	nachschüssiger Rentenendwertfaktor
s_{ps}	versicherter Prozentsatz für Pflegestufe ps
s_x^w	Anzahl stornierter Verträge im Alter x unter Einrechnung von Sterblichkeit
\ddot{s}	Endwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Rente
$\ddot{s}^{(k)}$	Endwert einer unterjährig vorschüssig zahlbaren Rente
$\ddot{s}_{\overline{n}}$	vorschüssiger Rentenendwertfaktor
\bar{s}	Endwert einer stetig zahlbaren Rente
S_x	Kommutationszahl 2. Ordnung für Lebende
$S_{x,y}$	Kommutationszahl 2. Ordnung für lebende Paare
\overline{S}_x	Kommutationszahl 2. Ordnung für Lebende (stetig)
SB	Selbstbehalt, Priorität (Rückversicherung)
$SF_x(t)$	Überlebensfunktion zum Zeitpunkt t
$SF_{x,y}(t)$	Überlebensfunktion zum Zeitpunkt t (verbundene Leben)
$SF_{\overline{x},y}(t)$	Überlebensfunktion zum Zeitpunkt t (verbundene Leben)

SGA_m	Schlussüberschussanteil im Jahr m bei klassischen Versicherungen
SGA_m^{Summe}	Summe angesammelter Schlussüberschussanteile im Jahr m
$\widehat{SGA}_n^{\text{Summe}}$	geschätzte Summe angesammelter Schlussüberschussanteile bei Ablauf
SP_m	Sparprämie im Jahr m bei klassischen Versicherungen
$SP_{m;k}$	Sparprämie im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
$SP_{m;k}^F$	Anlageprämie im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
$SP_{m;k}^G$	Garantieprämie im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen
$SÜA^{\text{Ablauf}}$	Schlussüberschussbeteiligung bei Ablauf
$SÜAF_m$	Schlussüberschussanteilfonds im Jahr m
τ	Satz für Höhe die der Beitragserhaltungsgarantie (in Prozent)
ζ	Zuschlag für erhöhtes Risiko (Berufsunfähigkeitsversicherung)
θ_j	Höhe der in Jahr j gezahlten Leistung (Leistungsspektrum)
$\boldsymbol{\theta}^E$	Leistungsspektrum (Vektor für Erlebensfallleistungen)
$\boldsymbol{\theta}^T$	Leistungsspektrum (Vektor für Todesfallleistungen)
t	Prämienzahlungsdauer
t	Zeitindex
t_j	Zeitpunkt innerhalb eines (Leistungs-)Zahlungsstroms
T_x	zukünftige Lebensdauer einer x -jährigen Person
$T_{x,y}$	gemeinsame zukünftige Lebensdauer eines Paars (x, y)
$T_{\overline{x},y}$	(gemeinsame) zukünftige Lebensdauer eines Paars (x, y)
$T_x^{(g)}$	zukünftige Verweildauer einer x -jährigen Person bei Ausscheideursache g
\tilde{T}_x	zukünftige Verweildauer einer x -jährigen Person bei mehreren Ausscheideursachen
TFL_m	Todesfallleistung im Jahr m bei klassischen Versicherungen
$TFL_{m;k}$	Todesfallleistung im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen

$TV(i)$	Endwert eines Zahlungsstroms zum effektiven Zinssatz i
u	Prämienzahlweise bei fondsgebundenen Versicherungen
u	Rentenaufschubdauer
$_mU_x$	Verwaltungskostenreserve am Ende des Jahres m
$\ddot{U}G_{m;k}$	Fondsguthaben aus Überschüssen am Ende des Monats ($m; k$)
v	Diskontfaktor zum (Rechnungs-)Zins i
v_s^{ZZR}	mehrjähriger Diskontfaktor für Berechnung der Zinszusatzreserve
$vf_{m;k}$	Vererbungsfaktor im Monat ($m; k$)
$V[.]$	Varianz (einer Zufallsvariable)
$_mV_x$	(Brutto-)Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV'_x$	mit Null maximiertes Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV''_x$	mit dem Rückkaufswert maximiertes Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV_x^{ai}$	(Brutto-)Deckungskapital während der Anwartschaft auf Invalidenrente
$_mV_x^i$	(Brutto-)Deckungskapital während der Leistungsphase der Invalidenrente
$(ps) \ _mV_x^i$	(Brutto-)Deckungskapital während der Leistungsphase der Pflegerente
$_mV_x^{\text{Bilanz}}$	Bilanz-Deckungsrückstellung am Ende des Jahres m
$_mV_x^{\text{Brutto}}$	Brutto-Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV_x^{\text{nach Aend}}$	Deckungskapital am Ende des Jahres m nach einer Vertragsänderung
$_mV_x^{\text{Netto}}$	Netto-Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV_x^{\text{prosp}}$	prospektives Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV_x^{\text{retro}}$	retrospektives Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_mV_x^{\text{RKW}}$	für den Rückkaufswert maßgebliches Deckungskapital
$_mV_x^{\text{RNR}}$	Deckungskapital nach m Jahren auf Basis von Rechnungsgrundlagen der Rentennachreservierung
$_mV_x^{\text{vbfr}}$	Deckungskapital am Ende des Jahres m nach vorzeitiger Beitragsfreistellung

$_m V_x^Z$	gezillmertes Deckungskapital am Ende des Jahres m
$_m V_x^{\text{ZZR}}$	Referenz-Deckungskapital nach m Jahren im Rahmen der Ermittlung der Zinszusatzreserve
VS	Versicherungssumme
$VS^{\text{nach Dyn}}$	Versicherungssumme nach dynamischer Erhöhung
VS^{bfr}	Versicherungssumme nach Beitragsfreistellung
VS_m^{Bonus}	Bonus-Versicherungssumme nach m Jahren
VZA_m	Guthaben aus Verzinslicher Ansammlung nach m Jahren
ω	Endalter einer Sterbetafel
w	Karenzzeit (BU-Versicherung)
w'_x	einjährige Stornowahrscheinlichkeit 2. Ordnung
w^{LGA}	Wartezeit für die Zuteilung von laufenden Überschussanteilen
w^{SGA}	Wartezeit für die Zuteilung von Schlussüberschussanteilen
ξ	Quote (Prozentsatz für Selbstbehalt bei proportionaler Rückversicherung)
x	(technisches) Alter einer männlichen Person
x'	rechnerisches Alter einer männlichen Person
(x)	männliche Person des Alters x
$[x]$	Selektionsalter einer männlichen Person
x_0	Startalter einer Sterbe- bzw. Ausscheidetafel
(x, y)	zusammengehöriges Paar zweier verbundener Leben aus einer Person des Alters x und einer des Alters y
X	Schaden(höhe)
y	(technisches) Alter einer weiblichen Person
y'	rechnerisches Alter einer weiblichen Person
(y)	weibliche Person des Alters x
$[y]$	Selektionsalter einer weiblichen Person
z	Alter zum Zeitpunkt der Selektion
z	Alter bei Eintritt der Invalidität

z_m^{***}	deklarierter Überschussanteilsatz im Jahr m , $*** \in \{\text{Zins,Risiko,Kosten,Schluss}\}$
$z_{m;k}^{***}$	deklarierter Überschussanteilsatz im Monat $(m; k)$, $*** \in \{\text{Zins,Risiko,Kosten,Schluss}\}$
$z(t)$	Zahlung innerhalb eines Zahlungsstroms zum Zeitpunkt t
$ZP_m^{(k)}$	Zahlprämie gemäß Zahlweise im Jahr m bei klassischen Versicherungen
$ZP_{m;k}^{(u)}$	Zahlprämie gemäß Zahlweise im Monat $(m; k)$ bei fondsgebundenen Versicherungen

Abkürzungsverzeichnis

Abschn.	Abschnitt
ADSt	Allgemeine Deutsche Sterbetafel
a.F.	alte Fassung
AGG	Allgemeines Gleichbehandlungsgesetz
AltEinkG	Alterseinkünftegesetz
AltZertG	Altersvorsorgeverträge-Zertifizierungsgesetz
AoS	Gewinnzerlegung
APE	Annual Premium Equivalent
ATL	Aktivitäten des täglichen Lebens
AVB	Allgemeine Versicherungsbedingungen
AVmG	Altersvermögensgesetz
BaFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
bAV	betriebliche Altersversorgung
BAV	Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen
BEL	Best Estimate (of) Liabilities
BerVersV	Versicherungsberichterstattungs-Verordnung
BetrAVG	Betriebsrentengesetz
bspw.	beispielsweise
BU	Berufsunfähigkeit

BUV	Berufsunfähigkeitsversicherung
BUZ	Berufsunfähigkeitszusatzversicherung
BWR	Bewertungsreserven
CFM	konstante Ausfallrate
CFPM	Cash Flow Projection Model
DAV	Deutsche Aktuarvereinigung e.V.
DeckRV	Deckungsrückstellungsverordnung
DGVM	Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik e.V.
d.h.	das heißt
EStG	Einkommensteuergesetz
etc.	et cetera
EU	Erwerbsunfähigkeit, Europäische Union
EUR	Euro
EUV	Erwerbsunfähigkeitsversicherung
EUZ	Erwerbsunfähigkeitszusatzversicherung
EV	Embedded Value
FLV	fondsgebundene Lebensversicherung
FRV	fondsgebundene Rentenversicherung
GDV	Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V.
ggf.	gegebenenfalls
GMxB	Guaranteed Minimum x Benefit
GRV	Gesetzliche Rentenversicherung
GuV	Gewinn- und Verlustrechnung
GWZ	Gewinnzerlegung
HGB	Handelsgesetzbuch
HV	Hauptversicherung
i.d.R.	in der Regel
i.H.v.	in Höhe von
inkl.	inklusive

IRR	interner Zinsfuß
i.S.v.	im Sinne von
Kap.	Kapitel
KapAusstV	Kapitalausstattungs-Verordnung
KID	Key Information Document
LGA	laufender Überschussanteil
LV	Lebensversicherung
LVRG	Lebensversicherungsreformgesetz
LVU	Lebensversicherungsunternehmen
MCR	Minimum Capital Requirement
MindZV	Mindestzuführungs-Verordnung
Mio.	Millionen
Mrd.	Milliarden
MVP	mitversicherte Person
NW	Nachweisung
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
o.g.	oben genannt
p.a.	per annum
pAV	private Altersversorgung
PRIIP	Packaged Retail and Insurance-based Investment Products
p.r.t.	pro rata temporis
PRZ	Pflegerentenzusatzversicherung
PVFP	Barwert der zukünftigen Gewinne
RechVersV	Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung
RfB	Rückstellung für Beitragsträgerrückerstattung
RGL	Rechnungsgrundlagen
RIY	Reduction in Yield
RNR	Rentennachreservierung
RV	Rückversicherung

RVU	Rückversicherungsunternehmen
SAA	Strategische Asset-Allokation
SBU	selbstständige Berufsunfähigkeitsversicherung
SCR	Solvency Capital Requirement
SEU	selbstständige Erwerbsunfähigkeitsversicherung
SGA	Schlussüberschussanteil
SGB	Sozialgesetzbuch
sog.	sogenannt
SPR	selbstständige Pflegerentenversicherung
SÜA	Schlussüberschussanteil
SUM	stochastisches Unternehmensmodell
u.a.	unter anderem
UDD	Gleichverteilung der Todesfälle
ÜB	Überschussbeteiligung
u.i.v.	unabhängig und identisch verteilt
usw.	und so weiter
VA	Variable Annuity
VAG	Versicherungsaufsichtsgesetz
vers.-techn.	versicherungstechnisch
vgl.	vergleiche
VN	Versicherungsnehmer
VP	(haupt)versicherte Person
VU	Versicherungsunternehmen
VVG	Versicherungsvertragsgesetz
VVG-InfoV	VVG-Informationspflichtenverordnung
VZA	verzinsliche(s) Ansammlung(sguthaben)
z.B.	zum Beispiel
ZV	Zufallsvariable
ZZR	Zinzusatzreserve

Literaturverzeichnis

- BaFin (2015):** Basisinformationsblatt: PRIIPs-Verordnung – Neuer EU-weiter Standard der Produktinformationen für Verbraucher. https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Fachartikel/2015/fa_bj_1508_basisinformationsblatt_priips_verordnung.html (abgerufen am 01.06.2017)
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. und C.J. Nesbitt (1997):** Actuarial Mathematics (2. Auflage). Society of Actuaries, London.
- Buttler, A. (2012):** Einführung in die betriebliche Altersversorgung (6. Auflage). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- DAV (1997):** Neue Rechnungsgrundlagen für die Berufsunfähigkeitsversicherung DAV 1997. <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/1997-Kolster-Loebus-Moertlbauer-DAV-1997I.pdf> (abgerufen am 01.06.2017).
- DAV (2005a):** Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen. <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/2004-UAG-Rentnersterblichkeit-DAV-2004R.pdf> (abgerufen am 01.06.2017).
- DAV (2005b):** Reservierung und Überschussbeteiligung von Rentenversicherungen des Bestandes. <https://aktuar.de/custom/download/Reserveauffuellung-Renten-160905.pdf> (abgerufen am 01.06.2017).
- DAV (2008a):** Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter. <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/2008-12-04-DAV-2008-T.pdf> (abgerufen am 01.06.2017).
- DAV (2008b):** Raucher- und Nichtrauchersterbetafeln für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter. <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/2008-12-04-DAV-2008-T-R-NR.pdf> (abgerufen am 01.06.2017).
- DAV (2008c):** Herleitung der Rechnungsgrundlagen DAV 2008 P für die Pflegerenten(zusatz)versicherung. <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/2008-12-04-Herleitung-der-DAV-2008P.pdf> (abgerufen am 01.06.2017).

- DAV (2011):** Folien zum Werkstattgespräch „Beurteilung des Anpassungsbedarfs des Rechnungszinses in der Lebensversicherung“. Stand: 28.04.2011. https://aktuar.de/custom/download/dav/presse/2011-04-28-Werkstatt_LV_HRZ-final.pdf (abgerufen am 03.11.2012).
- DGVM (1955):** Internationale versicherungsmathematische Bezeichnungsweise. *Blätter der DGVM*, Band 2, Heft 3, S. 367 – 376.
- Dickson, D.C.M., Hardy, M.R., und H.R. Waters (2009):** Actuarial Insurance Mathematics for Life Contingent Risks. Cambridge University Press, Cambridge.
- Dienst, H.-R. (1988):** Mathematische Verfahren der Rückversicherung. *Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik*, Heft 19. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Farny, D. (2011):** Versicherungsbetriebslehre (5. Auflage). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Führer, C., und A. Grimmer (2010):** Einführung in die Lebensversicherungsmathematik (2. Auflage). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Gerber, H.U. (1997):** Life Insurance Mathematics (3. Auflage). Springer, Berlin.
- GDV (2014):** Worum geht es bei Verordnung über den kollektiven Teil der Rückstellung für Beitragsträger? <http://www.gdv.de/2014/07/worum-geht-es-bei-verordnung-ueber-den-kollektiven-teil-der-rueckstellung-fuer-beitragstraege> (abgerufen am 01.06.2017)
- GDV (2015):** Neuer Blick auf Solvency II. http://www.gdv.de/wp-content/uploads/2015/12/GDV-Plakat-Solvency_II-nn.pdf (abgerufen am 01.06.2017)
- GDV (2016):** Statistisches Taschenbuch der Versicherungswirtschaft 2016. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Gründl, H., und M. Kraft (2016):** Solvency II – Eine Einführung: Grundlagen der neuen Versicherungsaufsicht (2. Auflage). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Heubeck-Richttafeln-GmbH (2005):** Richttafeln 2005 G. Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln.
- Isenbart, F., und H. Münzner (1987):** Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium (2. Auflage). Gabler, Wiesbaden.
- Koller, M. (2010):** Stochastische Modelle in der Lebensversicherung (2. Auflage). Springer, Berlin.
- Kurzendörfer, V. (2000):** Einführung in die Lebensversicherung (3. Auflage). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Liebwein, P. (2009):** Klassische und moderne Formen der Rückversicherung (2. Auflage). Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Milbrodt, H., und M. Helbig (1999):** Mathematische Methoden der Personenversicherung. de Gruyter, Berlin.
- Mosler, K., und F. Schmid (2010):** Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik (4. Auflage), Springer, Berlin.

- Neuburger, E. (1990):** Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise. *Blätter der DGVM*, Band 19, Heft 3, S. 257 – 267.
- Ortmann, K.M. (2016):** Praktische Lebensversicherungsmathematik (2. Auflage). Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Rockel, W., Helten, E., Ott, P., und R. Sauer (2012):** Versicherungsbilanzen – Rechnungslegung nach HGB und IFRS (3. Auflage). Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- Schmidt, K.D. (2009):** Versicherungsmathematik (3. Auflage). Springer, Berlin.
- Schreiber, G. (2016):** Solvency II: Grundlagen und Praxis. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- Sollanek, A. (2004):** Versicherungsbilanzen nach deutschem Handelsrecht – Betriebswirtschaftliche Handlungshilfen, Jahresabschluss und Bilanzanalyse. Hans-Böckler-Stiftung, Düsseldorf.
- Statistisches Bundesamt (2012):** Berechnung von Generationensterbetafeln – Methodische Erläuterungen zur Berechnung von Generationensterbetafeln für Deutschland 19871 bis 2004. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden.
- Wolfsdorf, K. (1997):** Versicherungsmathematik, Teil 1: Personenversicherung (2. Auflage). Teubner, Stuttgart.

Stichwortverzeichnis

- Abrechnungsverband, 260
Abrupphase, 307
Äquivalenzprinzip
 der Finanzmathematik, 67
 der Versicherungsmathematik, 188
Aktiva, 424
Altbestand, 70
Anlagerisiko, 33, 346
Ansammlungsguthaben, 273
Ansammlungszins, 273
Anwartschaft, 18, 332
Asymmetrie, 10
Auffüllkapital, 240
 aufgrund Biometrie, 242, 363
 aufgrund Zins, 245, 366
Aufschubdauer, 29
Aufzinsungsfaktor, 43
Ausbildungsversicherung, 29
Ausfallrate, 89, 323
 kumulierte, integrierte, 91
Ausgabeaufschlag, 353
Ausscheideintensität, 323, 379
 Sterbeintensität, 89
Ausscheidewahrscheinlichkeit
 abhängige, 115, 380
 absolute, 380
 partielle, 380
 relative, 380
 selektive, 385
 ultimative, 385
 unabhängige, 115, 380
Beitrag, 18
 gebuchter, 201
 verdienter, 202
Beitragsüberträge, 201
Beitragsdynamik, 197, 294
 Dynamiksatz, 295
Beitragseingang, 193
Beitragserhaltungsgarantie, 34, 348
beitragsfrei
 planmäßig, tariflich, 18
 unplanmäßig, vorzeitig, 18
beitragsfreie Leistung, 298
Beitragsfreistellung, 18, 298
beitragspflichtig, 18
Beitragsprimat, 195
Beitragsrückgewähr, 30, 198
Beitragsunderschuss, 194
Beitragszerlegung, 227, 237
Beitragszuschlag, 194
Berufsgruppenzuschlag, 391
Berufsunfähigkeit, 31
 Barrente, 32, 376
 Beitragsbefreiung, 32, 376
Berufsunfähigkeitsversicherung, 31
 selbstständige, 32
 Zusatzversicherung, 32
Best Estimate of Liabilities (BEL), 10, 442
Bestand, 27
Bestandsabbau, 114
Bestandsgruppe, 260
Bestandspflegegeld, 185
Bewertungsfaktor, 359
Bewertungsreserven, 268
 Beteiligung an, 278
Bezugszins, 246
Bilanz, 424
 ökonomische, 441
Bilanzdeckungsrückstellung, 239, 397
Bilanzgleichung
 versicherungsmathematische, 223
Cash Flow Projection Model, 7

- Charakter einer Lebensversicherung, 109
 Erlebensfallcharakter, 109
 Todesfallcharakter, 109
- Dauer
 gebrochene Dauer, 448
- Deckungskapital, 217, 218, 395, 411
 ausreichendes, 234
 Brutto-, 234
 gezillmertes, 233
 Netto-, 221
 prospektiv, 219
 rekursive Berechnung, 223, 237
 retrospektiv, 219
- Deckungslimit, 417
- Deckungsrückstellung, 69, 217
 Bilanz-, 217
- Deklaration, 260
- Deregulierung, 70
- Dichtefunktion, 86, 323, 328
- Direktgutschrift, 261, 279
- Diskontfaktor, 43
- diskontierte Lebende, 130
- diskontierte Tote, 130
- Diskontsatz
 effektiver, 45
 nomineller, 48
- Drei-Säulen-Modell, 438
- Drei-Zustände-Modell, 377
- Durchführungsweg, 21
- Dynamik
 Leistungs-, 152
- Eintrittsalter, 17
 Geburtsjahrmethode, 113
 Halbjahresmethode, 113
 rechnerisches, 113
 technisches, 113
- Einursachentafel, 378, 379
- Einzelgeschäft, 26
- Embedded Value, 8
- Entsparung, 228
- Erlebensfallleistung
 reine
 verbundene Leben, 329
- Erlebensfallversicherung
 reine, 28, 132
 verbundene Leben, 324
- Erwerbsunfähigkeit, 31
- Erwerbsunfähigkeitsversicherung, 31
- Exponentialverteilung, 88
- Exzedent, 417
- Finanzierbarkeitsnachweis, 260
- fondsgebundene Lebensversicherung, 345
- fondsgebundene Rentenversicherung, 345
- Fondsgebundene Versicherung, 33, 345
- Fondsguthaben, 359
 Fortschreibung, 361
- Fondskonto, 347
- Fondsmanagementgebühr, 353
- Garantiefonds, 34, 349
 Cash-Lock, 350
 Höchststandsgarantie, 34, 350
 Monetarisierung, 350
- Garantieguthaben, 359
- Garantiekonto, 347
- Garantiewerte, 307, 370, 400
- gebrochene Dauer, 448
- gemischte Versicherung, 28, 145
 Deckungskapitalverlauf, 231
 verbundene Leben, 326, 330
 zahlbar unmittelbar bei Tod, 160
- Gesetz
 Allgemeines Gleichbehandlungsgesetz, 111
 Alterseinkünftegesetz, 23
 Altersvermögensgesetz, 23
 Altersvorsorgeverträge
 Zertifizierungsgesetz, 23
 Betriebsrentengesetz, 23
 Einkommensteuergesetz, 23
 Handelsgesetzbuch, 22, 423
 Lebensversicherungsreformgesetz, 24
 Sozialgesetzbuch, 406
 Versicherungsaufsichtsgesetz, 22
 Versicherungsvertragsgesetz, 23
- Gewinn- und Verlustrechnung (GuV), 428
- Gewinnbeteiligung, 260
- Gewinnverband, 261
- Gewinnzerlegung, 260, 430
- Going-Concern-Reserve, 443
- Höchststandsgarantie, 34, 350
- Haftungsstrecke, 417
- Hazardrate, 89, 323
- Heiratsversicherung, 29
- Hinterbliebenenrente, 332
- Hinterbliebenenrentenversicherung, 30
- Hybrid, 34, 347
 Drei-Topf-, 34, 351
 dynamisches, 34, 351
 statisches, 34, 348
 Zwei-Topf-, 34, 348
- Invalidisierungswahrscheinlichkeit
 Pflegerente, 407

- Invalidität, 31, 375
Investmentfonds, 33
- Jahresüberschuss, 428
Jahresabschluss, 424
- Kündigungswahrscheinlichkeit
 2. Ordnung, 114
Kapitalabfindung, 30
Kapitaldeckungsverfahren, 20
Kapitallebensversicherung, 28
 mit festem Auszahlungstermin, 29
Kapitalwahlrecht, 30
Kapitalwahlwahrscheinlichkeit, 114
Karenzzeit, 33, 376, 384, 388
Kickbacks, 368
Kollektivgeschäft, 26
Kommutationszahlen, 129, 155, 321, 386
Pflegebedürftigkeit, 408
konkurrierende Risiken, 378
Kontentarif, 34
Kontributionsformel, 262
Kosten
 Abschluss-, 178
 Amortisations-, 179
 Geschäftsvorfall-bezogene, 183
 Kapitalanlage-, 183
 Stück-, 178
 Verwaltungs-, 178
Kostenausweis, 202
Kostenmodell, 177, 190, 391, 410
Kostenquote, 204
Kostensatz, 177
Kostenstufe, 181
Kundenguthaben, 303
- Langlebigkeitsrisiko, 232
Lebensdauer
 (gemeinsame) zukünftige, 327
 gemeinsame zukünftige, 322
 gestutzte gemeinsame zukünftige, 323
 gestutzte zukünftige, 95
 zukünftige, 85, 320
Lebenserwartung
 gestutzte fernere, 95, 324, 329
 vollständige fernere, 95, 101, 324, 329
Lebensversicherung
 Asymmetrie, 284
 fondsgebundene, 33
 kapitalbildende, 28
Leibrente
 arithmetisch steigende, 136
 aufgeschobene, 135
 geometrisch steigende, 138
- lebenslange, 132
mit Rentengarantiezeit, 139
stetige, 156
temporäre, 134
unterjährige, 139
verbundene Leben, 325, 329
- Leistungsbarwert, 129
Erlebensfalleistung, 132, 156
Invaliditätsleistung, 386
Todesfalleistung, 143, 158
- Leistungsdauer
 verlängerte, 32
- Leistungsdynamik, 152, 294
- Leistungsprimat, 195
- Leistungsspektrum, 152
- Mehrursachentafel, 378
Mindesttodesfalleistung, 348
- Nachreservierung, 240
Nachreservierungsfaktor, 363
Nachweisung, 436
Nettoprämie, 410
Neubestand, 70
Neugeschäft, 27
Niederstwertprinzip, 425
- Optionen und Garantien, 10
- Passiva, 424
Pflegebedürftigkeit, 405
Pflegegrad, 406
Pflegerentenversicherung
 selbstständige, 405
 Zusatzversicherung, 405
Pflegestufe, 406
- Prämie, 18
 Anlage-, 358
 ausreichende, 191
 Bedarfs-, 194
 Brutto-, 191, 394
 Effektiv-, 195
 Einmalbeitrag, 18
 Garantie-, 358
 gezillmerte Netto-, 194
 Investment-, 358
 Kosten-, 238, 356
 laufender Beitrag, 18
 natürliche, 226
 Netto-, 190, 394
 Norm-, 194
 Risiko-, 228, 238, 356
 Spar-, 228, 238, 356
 Tarif-, 191
 Zahl-, 193, 395

- Zillmer-, 194
- Prämiendepot, 196
- Prämiendifferenzformel, 230
- Prämienreserve, 217
- Prämienspektrum, 196
- Prämienzahlungsdauer, 18
- Preferred Lives, 27
- Present Value of Future Profits (PVFP), 10, 443, 450
- Priorität, 419
- Produkt, 25
- Projektionsmodell, 445
- prospektiv, 188
- Provision, 184
 - Abschluss-, 184
 - Bestands-, 184
 - Haftungszeitraum, 184
- Provisionsordnung, 184
- Provisionsrückforderung, 185
- Provisionssatz, 184
- Quote, 417
- Rückkauf, 300
- Rückkaufswert, 239, 301
 - Gesamt-, 301
 - Mindest-, 302
- Rückstellung für Beitragsrückerstattung (RfB), 261, 280
 - freie, 282
 - gebundene, 282
 - kollektive, 282
- Rückversicherung, 413
 - aktive, 413
 - auf Originalbasis, 420
 - auf Risikobasis, 421
 - Einzelschaden-Exzedenten-, 419
 - Exzedenten-, 418
 - fakultative, 416
 - freiwillige Einzel-, 416
 - Jahrestüberschaden-, 419
 - Kumulschaden-Exzedenten-, 419
 - nicht-proportionale, 419
 - obligatorische, 416
 - passive, 413
 - proportionale, 417
 - Quoten-, 417
 - Vertrags-, 416
 - Weiter-, 413
- Rürup-Rente, 23
- Ratenzuschlag, 179
- Reaktivierung, 32, 375
- Rechnungsgrundlagen, 24
 - erster Ordnung, 24
 - zweiter Ordnung, 25
- Rechnungszins, 69
 - Höchst-, 71
- Reduction in Yield, 203
- Referenzzins, 242
- Rendite, 67
- Rente, 18
 - Leibrente, 29
 - temporäre Leibrente, 29
 - Zeitrente, 30
- Rentenüberträge, 247
- Rentenbarwertfaktor
 - nachschüssiger, 55
 - vorschüssiger, 54
- Rentenbeginn, 29
- Rentenbezug, 18
- Rentenbezugsdauer, 18
- Rentenendwertfaktor
 - nachschüssiger, 56
 - vorschüssiger, 55
- Rentenfaktor, 371
- Rentengarantiezeit, 30, 139
- Rentennachreservierung, 240, 361, 397
- Rentenversicherung, 29
 - aufgeschobene, 29
 - Deckungskapitalverlauf, 232
 - fondsgebundene, 33
 - sofort beginnende, 29
- Rentenzahlung
 - abgekürzte, 29
 - unterjährige, 56
- Rentenzahlweise, 56
- Restschuldversicherung, 27
- retrospektiv, 188
- Riester-Rente, 23
- Risiko, 15
 - Änderungs-, 415
 - Irrtums-, 414
 - moralisches, 394
 - objektives, 393
 - Schwankungs-, 415
 - subjektives, 393
 - versicherungstechnisches, 414
 - Zufalls-, 415
- Risikoausgleich im Kollektiv, 17
- Risikofaktor, 181
- Risikolebensversicherung, 27
 - arithmetisch steigende, 145
 - Deckungskapitalverlauf, 230
 - geometrisch steigende, 148
 - lebenslange, 143
 - verbundene Leben, 326, 330
 - temporäre, 144
 - verbundene Leben, 326, 330

- zahlbar unmittelbar bei Tod, 158
Risikolebenversicherung
 zahlbar unterjährig, 148
Risikotransfer, 15
Risikoversicherung, 28
Risikozuschlag, 181
riskiertes Kapital, 228
Rohüberschuss, 259, 428
Rumpfjahr, 448
- Satz von Cantelli, 306
Schaden, 414
Schlussüberschussanteilfonds, 278, 285
 m-n-tel-Regelung, 285
Schmidt-Tobler-Effekt, 305
Schock, 116
Selbstbehalt, 416
Selektion, 385
 Autoselektion, 107
 Schlusstafel, 108
 Selektionsperiode, 108, 385
 temporäre Anfangsselektion, 107
Shift, 34, 361
Sicherungsbedarf, 246
Solvabilität, 13, 438
Solvabilitätskapital, 438
Solvabilitätsquote, 438
Solvabilitätsspanne, 439
Solvency II, 13, 440
Spartentrennung, 22
Stationaritätsbedingung, 87
Sterbegeldversicherung, 27
Sterbegesetz
 de Moivre, 92
 Gompertz, 92
 Gompertz-Makeham, 92
Sterbetafel, 96
 Aggregattafel, 107
 Altersverschiebung, 106
 Balducci, 103
 Basisfunktionen, 96, 320
 Basisfunktionen, nicht-ganzzahlig, 100
DAV 2004 R, 110
DAV 2008 T, 110
DAV-Tafeln, 109
Endalter, Schlussalter, 99
Generationentafel, 105
Gleichverteilung der Toten, 100
Kohortentafel, 105
konstante Ausfallrate, 102
Längsschnitttafel, 105
Periodentafel, 105
Querschnitttafel, 105
Radix, 96
- Selektionstafel, 107
Sterblichkeitsverbesserung, 105
Trendfunktion, 106
Unfallbuckel, 113
Unisex-Tafel, 111
Sterbewahrscheinlichkeit
 aufgeschobene, 94
 einjährige, 93
 mehrjährige, 93, 323
 monatliche, 103
 Pflegerente, 407
 selektive, 108
 ultimative, 108
Stochastisches Unternehmensmodell, 11
Stornoabschlag, 304
Stornohaftungszeit, 184
Stress, 116
Summenrabatt, 181
Switch, 34, 360
- Tarif, 25
Tarifgeneration, 25
Tarifstufe, 25, 181
Teilauszahlungs-Tarif, 28
Termfix-Versicherung, 29, 145
Todesfallleistung
 verbundene Leben, 326
Todesfallversicherung, 27
- Überlebensfunktion, 86, 322, 327
Überlebensrente, 332
 einseitige, 333
 zweiseitige, 333
Überlebenswahrscheinlichkeit
 aufgeschobene, 94
 einjährige, 93
 mehrjährige, 93, 323
Überschussanteil, 264
 -satz, 265
 laufender, 265
 Schluss-, 266
Überschussbeteiligung, 260
 laufende, 264, 265, 269
 Schluss-, 264, 266, 277
 Wartezeit, 265, 266
Überschussentstehung, 262, 368, 398
Überschussverwendung, 269, 369, 398
 Barauszahlung, 276
 Beitragssofortabzug, 275
 Beitragsverrechnung, 275
 Bonus, 269
 Erlebensfall-Bonus, 270
 Fondsanlage, 274
 Rentenzuschlag, 276

- Rentenzuwachs, 269
- Sofort-Bonus, 273
- Sofortrabatt, 275
- Summenzuwachs, 269
- Todesfall-Bonus, 272
- Verzinsliche Ansammlung, 273
- Überzahlung, 215
- Umlageverfahren, 20

- Variable Annuity, 352
- Verbindungsrente, 325
 - mit zweiseitigem Übergang, 329
- verbundene Leben, 17, 319
 - einseitige Deckung, 320, 331
 - zweiseitige Deckung, 320
- Verdichtung, 447
- Vererbung, 229
- Vererbungsfaktor, 357
- Verheiratungswahrscheinlichkeit, 334
- verlängerte Leistungsdauer, 384
- Verordnung
 - Deckungsrückstellungsverordnung, 23, 218
 - Kapitalausstattungs-Verordnung, 24, 423
 - Mindestzuführungsverordnung, 23, 283
 - PRIIP-Verordnung, 347
 - Versicherungsberichterstattungs-Verordnung, 24, 260, 423
 - Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung, 23, 218, 423
 - VVG-Informationspflichtenverordnung, 202
- versicherte Person, 17
 - mitversicherte, 31, 333
- Versicherung
 - fondsgebundene, 33, 345
 - Hauptversicherung, 26
 - Zusatzversicherung, 26
- Versicherungsdauer, 18
- versicherungsmathematische Bilanzgleichung, 237
- Versicherungsnehmer, 17
- Versicherungsschein, 17
- Versicherungssumme, 18
- Versicherungsunternehmen, 17
- Versicherungsvertrag, 17
- Versorgungsschicht, 21, 25
- Verteilungsfunktion, 85, 322, 328
- Vertragsänderung, 292
 - Beginnverlegung, 293
 - konstruktive Prämien, 292
 - Neuabschluss, 293
- Novation, 291
- Vertragsbaustein, 26
- Verwaltungskostenreserve, 234
- Verweisung, 376
 - sverzicht, 376
- Verzinsung
 - effektive, 44
 - einfache, 40, 41
 - gemischte, 44
 - Momentan-, 49
 - nachschüssige, 40
 - nominelle, 46
 - stetige, 48
 - unterjährige, 46
 - vorschüssige, 40
 - zusammengesetzte, 40, 41
- Vorsichtsprinzip, 425

- Waisenrente, 335
- Wartezeit, 388
- Wertungssumme, 184
- Wiederinkraftsetzung, 299
- Witwenrente, 332
 - individuelle, 333
 - kollektive, 333

- Zahlungsstrom, 50
- äquivalenter, 52
- Barwert, 51
- deterministischer, 51
- Einmalzahlung, 53
- Endwert, 51
- Finanztransaktion, 66
- Rendite, 67
- Wert, 51
- Zeitrente, 53
- Zahlweise, 19
 - nachschüssige, 19
 - unterjährige, 19
 - vorschüssige, 19
- Zedent, 413
 - Retro-, 413
- Zeitrente
 - arithmetisch fallende, 64
 - arithmetisch steigende, 61
 - aufgeschobene, 59
 - ewige, 60
 - geometrisch fallende, 73
 - geometrisch steigende, 63
 - stetige, 58
 - temporäre, 53
 - unterjährig zahlbare, 57
- Zession, 413
 - Retro-, 413

- Zessionär, 413
 - Retro-, 413
- Zillmerreserve, 233
- Zillmerung, 233
- Zins, 39
 - Effektiv-, 44
 - Nominal-, 46
- Zinsfuß, 40
- interner, 67
- Zinsintensität, 48
- Zinsperiode, 40
- Zinszusatzreserve, 242, 364, 397
 - Rekalibrierung, 244
- Zwei-Zustände-Modell, 377
- Zwischenbestand, 70