ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

---

1 - Soluções - Matrizes. Operações com matrizes.

1.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $AB^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

1.2 $B + A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $AC = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $5A \cdot 4C = 20AC = \begin{bmatrix} 20 & 100 \\ 0 & 140 \end{bmatrix}$,

$(AC)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 40 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$, $(AC)B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} = A(CB)$, $BD = \begin{bmatrix} 27 \\ 4 \end{bmatrix}$, $D^T D = [66]$, $DD^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 16 & 28 \\ 7 & 28 & 49 \end{bmatrix}$,

$ED^T = \begin{bmatrix} -8 & -32 & -56 \\ 3 & 12 & 21 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

1.3 (a) $(AA^T)_{12} = -21$, $(AC)_{21} = 0$, $B^2_{22} = 3$ e $(C^T C)_{11} = 6$

(b) $A^T + C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = (A + C^T)^T$, $(ABC)^T = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 71 & -71 \end{bmatrix} = C^T B^T A^T$

1.4 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

1.5 $a = -\dfrac{1}{2}$ e $b = -\dfrac{1}{2}$.

1.6 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 3a+b \\ c+d & 3c+d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3c = a+b \\ b+3d = 3a+b \\ a+c = c+d \\ b+d = 3c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3c \\ d = a \end{cases}$.

Logo $B = \begin{bmatrix} a & 3c \\ c & a \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$.

1.7 (a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $AC = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad AD = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

1.8 $a = 2$ e $b = 3$

1.9

(a) $X = (BA)^T - C = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} (= A^T B^T - C)$ (b) $X = -B^T - AC^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 13 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

1.10 (a) $X = -2A - B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & 0 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $X = BA - AB = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $X = \dfrac{1}{2}(A^2B - A^2) = \dfrac{1}{2}A^2(B - I) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 7/2 \\ 9 & 0 & 0 \\ 27/2 & 0 & -9/2 \end{bmatrix}$

1.11 (a) Proposição falsa.

(b) Proposição verdadeira.

(c) Proposição falsa.

(d) Proposição falsa.

(e) Proposição verdadeira.

(f) Proposição verdadeira.

1.12 (a) $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ logo $A + A^T$ é simétrica.

(b) $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ logo $A - A^T$ é anti-simétrica.

1.13 Seja A do tipo m por n.

(a) A matriz A^T é do tipo n por m. Assim AA^T é do tipo m por m e A^TA é do tipo n por n logo são ambas quadradas.

(b) $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ logo AA^T é simétrica;
$(A^TA)^T = (A^T)(A^T)^T = A^TA$ logo A^TA é simétrica;

1.14 (a) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots, A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$,

(b) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$

(c) $A^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$

(d) $A^2 = AA = I_2$, $A^3 = A^2A = I_2A = A$, $A^4 = A^3A = AA = I_2, \ldots, A^n = A$ se n ímpar, $A^n = I$ se n par.

1.15 (a) D^k é a matriz diagonal com entradas principais $d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k$:

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$$

(b) D é invertível sse todas as entradas principais são não nulas e, nesse caso,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

1.16 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ são invertíveis e $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é invertível;

(b) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ é invertível e nem $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nem $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ são invertíveis.

1.17 (a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 15 \end{bmatrix}$

(b) $X = A^{-1}(A + 2I_3) = I_3 + 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

1.18 (a) $P_1 A = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \\ e & f \end{bmatrix}$, $P_2 A = \begin{bmatrix} e & f \\ c & d \\ a & b \end{bmatrix}$, $BP_1 = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \end{bmatrix}$ e $BP_2 = \begin{bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \end{bmatrix}$;

(b) i. $P_1 A$ é a matriz que se obtém de A através da **troca das linhas 1 e 2**
$P_2 A$ é a matriz que se obtém de A através da **troca das linhas 1 e 3**;

ii. BP_1 é a matriz que se obtém de B através da **troca das colunas 1 e 2**
BP_2 é a matriz que se obtém de A através da **troca das colunas 1 e 3**.

(c) i. $P_1 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1^{-1} = P_1$

$P_2 P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2^{-1} = P_2$

ii. $P_1^T = P_1 = P_1^{-1}$ e $P_2^T = P_2 = P_2^{-1}$.

1.19 (a) B^{-1}

(b) CD^{-1}

1.20 Sejam A e B matrizes tais que $AB = BA$ (matrizes permutáveis)

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

logo A^{-1} e B^{-1} também são permutáveis.

1.21 Seja A tal que $A^3 + 2A - I_n = O_n \Leftrightarrow A^3 + 2A = I_n$.

$$A(A^2 + 2I_n) = A^3 + 2A = I_n$$

logo $A^{-1} = A^2 + 2I_n$.

1.22 Sejam A e B matrizes ortogonais ($A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$)

$$A^T(B - I_n)^T B + A^{-1}B = A^T \Leftrightarrow A^T(B^T - I_n)B + A^T B = A^T \Leftrightarrow A^T(B^T B - B) + A^T B = A^T \Leftrightarrow$$

$$A^T(I_n - B) + A^T B = A^T \Leftrightarrow A^T - A^T B + A^T B = A^T \Leftrightarrow A^T$$

1.23 $A_k = \begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix}$

(a)
$$\begin{aligned} A_k A_m &= \begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-m & -m \\ m & 1+m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m-k+km-km & -m+km-k-km \\ k-km+m+km & -km+1+m+k+km \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1-(k+m) & -(k+m) \\ k+m & 1+(k+m) \end{bmatrix} = A_{k+m} \end{aligned}$$

(b) $A_k A_{-k} = \begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+k & k \\ -k & 1-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_k^{-1} = A_{-k}$