Álgebra Linear e Geometria Analítica – ISEL - DM

LEIC -LEETC **1º Teste - 9 de maio de 2022** Versão A

Leia com atenção:

A duração do teste é de 1,5 horas.

Não é permitido o uso de calculadora.

Justifique todas as suas respostas.

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -a & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ b \end{bmatrix}.$$

   (a) Classifique o sistema $AX = B$ em função dos parâmetros reais a e b.

   (b) Determine os valores reais dos parâmetros a, b e c de modo que $C = \begin{bmatrix} c & -3 & 1 \end{bmatrix}^T$ seja uma solução do sistema $AX = B$. Para os valores encontrados justifique se a solução dada é a única solução.

   (c) Determine todos os valores reais de a para os quais o sistema homogéneo associado ao sistema AX=B tem soluções não nulas e calcule duas dessas soluções.

   (d) Considere $a = 0$. Prove que o sistema $AX = B$ é um sistema de Cramer e determine a incógnita z através da regra de Cramer.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$, $i, j \in \{1, 2\}$, matrizes reais de ordem 2 invertíveis tais que

$$a_{ij} = i + j - 1 \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule as matrizes A e B.

   (b) Utilizando as propriedades dos determinantes, defina o determinante da matriz $-5A^{-1}B^T$ em função dos determinantes de A e B e calcule-o.

3. Em $\mathbb{R}^3$, considere o conjunto $V = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$.

   (a) Averigue se V é uma base de $\mathbb{R}^3$. **[1.5]**

   (b) Caracterize por meio de equações o subsespaço S gerado por V. **[1.5]**

   (c) Indique o valor de $k \in \mathbb{R}$ de forma a que $(1, k, 0)$ pertença a S? **[1.0]**

   (d) Determine duas bases diferentes para S e indique q dimensão de S. **[1.5]**

Nome:	**Curso:**	
Número:		Versão A

Escolha Múltipla

Em cada uma das questões escolha APENAS uma opção, rodeando a letra correspondente.

I. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ considere as matrizes reais: $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e as proposições seguintes, envolvendo as matrizes anteriores:

a. A matriz A_α é invertível para $\alpha \in \{0, 1\}$.

b. O sistema $A_\alpha X = B$ é de Cramer para $\alpha = 2$.

c. $A_0^{-1}B$ é uma matriz do tipo (3,1) onde a entrada (1,1) é igual a 2.

d. Considere $A = A_0$. A matriz $A^T BB^T$ é solução da equação matricial $X^{-1}(A + I)^T - (BB^T)^{-1} A^{-1} = (BB^T)^{-1}$.

A lista completa das proposições verdadeiras é:

A. $\{a, c, d\}$ B. $\{a, c\}$ C. $\{b, d\}$ D. $\{b, c, d\}$ **[2.0]**

II. Sejam $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x+3 & 1 & 9 \\ y & 1 & 0 \\ z+2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} x & y & z & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ y & z & x & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Considere as seguintes afirmações:

a.) $|2A^T A^{-1}| = 2$.

b.) $|B| = -3|A|$.

c.) A é invertível, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

d.) $|D| = -4|A|$.

A lista completa das proposições verdadeiras é:

A. $\{a, c, d\}$ B. $\{a, c\}$ C. $\{b, d\}$ D. $\{b, c\}$ **[2.0]**

[2.0]

III. Considere os conjuntos: $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y + z\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z^2\}$ e as seguintes afirmações:

a. S_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b. S_2 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

c. S_1 é gerado pelo vetor $(2, 1, 0)$.

d. $(4, 1, 2) \in S_1 \cap S_2$.

A lista completa das proposições verdadeiras é:

A. $\{a, c, d\}$ B. $\{b, c\}$ C. $\{a, b, d\}$ D. $\{c, d\}$ **[2.0]**