Álgebra Linear e Geometria Analítica

4 - Soluções - Espaços vetoriais.

4.1 (a) $S \neq \emptyset$, por exemplo $(0,0,0) \in S$.
Sejam $\overrightarrow{u} = (x,0,0)$, $\overrightarrow{v} = (x',0,0) \in S$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Tem-se:
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x+x',0,0) \in S$;
- $a\overrightarrow{u} = (ax,0,0) \in S$.

Logo, S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) S não é subespaço de $\mathbb{R}^3$ já que $(0,0,0) \notin S$;

(c) $S \neq \emptyset$, por exemplo $(0,0,0) \in S$. Sejam $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$, $\overrightarrow{v} = (x',y',z') \in S$, então $y = x+z$ e $y' = x'+z'$. Seja $a \in \mathbb{R}$. Tem-se:
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x+x',y+y',z+z')$ e $y+y' = (x+z)+(x'+y') = (x+x')+(z+z')$, logo, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in S$;
- $a\overrightarrow{u} = (ax,ay,az)$ e $ay = a(x+z) = ax+az$, logo, $a\overrightarrow{u} \in S$.

Assim S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(d) S não é subespaço de $\mathbb{R}^3$ já que $(0,0,0) \notin S$;

(e) $S \neq \emptyset$, por exemplo $(0,0,0) \in S$. Sejam $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$, $\overrightarrow{v} = (x',y',z') \in S$, então $ax+by+cz = 0$ e $ax'+by'+cz' = 0$. Seja $d \in \mathbb{R}$. Tem-se:
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x+x',y+y',z+z')$ e $a(x+x')+b(y+y')+c(z+z') = (ax+by+cz)+(ax'+by'+cz') = 0+0 = 0$, logo, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in S$;
- $d\overrightarrow{u} = (dx,dy,dz)$ e $a(dx)+b(dy)+c(dz) = d(ax+by+cz) = d \cdot 0 = 0$, logo, $d\overrightarrow{u} \in S$.

Assim S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.
Se $a = b = c = 0$ então S é o espaço $\mathbb{R}^3$;

(f) S não é subespaço de $\mathbb{R}^3$ já que $(0,0,0) \notin S$;

(g) $x^2+y^2+z^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$, pelo que, $S = \{(0,0,0)\}$

(h) $\begin{cases} x+2y = 0 \\ y-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases}$, donde, $S = \{(-2y,y,y) : y \in \mathbb{R}\}$
- fazendo $y = 0$, vem $x = -2y = (-2) \cdot 0 = 0$ e $z = y = 0$, pelo que $(0,0,0) \in S$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (-2y,y,y)$, $\overrightarrow{v} = (-2y',y',y') \in S$. Tem-se: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (-2(y+y'),y+y',y+y') \in S$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (-2y,y,y), \in S$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se: $a\overrightarrow{u} = (-2ay,ay,ay) \in S$.

Assim, S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4.2 (a) reta de equações reduzidas: $\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$;

(b) Origem;

(c) Origem;

(d) reta de equações reduzidas: $\begin{cases} x = -3z \\ y = -2z \end{cases}$

(e) Plano de equação geral: $x - 3y + z = 0$.

4.3 (a) A é subespaço de $\mathbb{R}^4$;

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ w = -y - z \end{cases} \Rightarrow A = \{(-y - z, y, z, -y - z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

- fazendo $y = z = 0$, vem $x = -y - z = 0 = w$, pelo que $(0,0,0,0) \in A$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (-y - z, y, z, -y - z)$, $\overrightarrow{v} = (-y' - z', y', z', -y' - z') \in A$. Tem-se: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (-(y + y') - (z + z'), y + y', z + z', -(y + y') - (z + z')) \in A$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (-y - z, y, z, -y - z), \in A$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se: $a\overrightarrow{u} = (-ay - az, ay, az, -ay - az) \in A$.

(b) B é subespaço de $\mathbb{R}^4$;
$B = \{(x, y, x + y, 2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

- fazendo $x = y = 0$, vem $z = x + y = 0 + 0 = 0 \wedge w = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$, pelo que $(0,0,0,0) \in B$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (x, y, x + y, 2x + 3y)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', x' + y', 2x' + 3y') \in B$. Tem-se: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x + x', y + y', (x + x') + (y + y'), 2(x + x') + 3(y + y')) \in B$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (x, y, x + y, 2x + 3y), \in B$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se: $a\overrightarrow{u} = (ax, ay, ax + ay, 2ax + 3ay) \in B$.

(c) C não é subespaço de $\mathbb{R}^4$;

$$\begin{cases} z = x - y \\ x = y - w + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y \\ w = y - x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \{(x, y, x - y, y - x + 1) : x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ pelo que, } (0,0,0,0) \notin C.$$

(d) D não é subespaço de $\mathbb{R}^2$;
$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x \vee y = -x$, donde,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \vee y = -x\}$$

Por exemplo, $(1,1), (-1,1) \in D$ mas $(1,1) + (-1,1) = (0,2) \notin D$, pelo que D não é fechado para a adição.

(e) E é subespaço de $\mathbb{R}^5$;

$$E = \{(b + d, b, b, d, e) : b, d, e \in \mathbb{R}\}$$

- fazendo $b = d = e = 0$, vem $a = b + d = 0 \wedge c = b = 0$, pelo que $(0,0,0,0,0) \in E$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = (b + d, b, b, d, e)$, $\overrightarrow{v} = (b' + d', b', b', d', e') \in E$. Tem-se:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = ((b + b') + (d + d'), b + b', b + b', d + d', e + e') \in E$$

- Sejam $\overrightarrow{u} = (b + d, b, b, d, e), \in B$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha b + \alpha d, \alpha b, \alpha b, \alpha d, \alpha e) \in E$$

(f) F não é subespaço de $\mathbb{R}^2$;

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x\}$$

$(1,3) \in F$ mas $(-1)(1,3) = (-1,-3) \notin F$ $(-3 < 2 \cdot (-1))$, pelo que F não é fechado para a multiplicação por escalar.

(g) G é subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$;

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- fazendo $a = c = d = 0$, vem $b = 2c = 0$, pelo que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$;
- Sejam $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} a' & 2c' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} a+a' & 2(c+c') \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} \in G$$

- Sejam $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\alpha \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} \alpha a & 2\alpha c \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \in G$$

(h) H não é subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 3}$;

Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin H$.

(i) I é subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$;

- $0_n^T = 0_n \Rightarrow 0_n \in I$;
- Sejam $A, B \in I \Rightarrow A^T = A \wedge B^T = B$. Então, $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$, logo, $A + B \in I$;
- Sejam $A \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se, $A^T = A$ e, por isso, $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$, donde, $\alpha A \in I$.

4.4 (a) $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$: $\overrightarrow{v} = \frac{2}{3}\overrightarrow{v}_1 - \frac{13}{3}\overrightarrow{v}_2$.

(b) $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$: $\overrightarrow{v} = \frac{5}{3}\overrightarrow{v}_1 + \frac{4}{3}\overrightarrow{v}_2 + 0\overrightarrow{v}_3$, por exemplo.

(c) $\overrightarrow{v}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$.

(d) $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$: $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v}_2 = 0\overrightarrow{v}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}_2$.

(e) $\overrightarrow{v}$ é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$: $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{v}_1 + 0\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_3$.

(f) $\overrightarrow{v}$ não é combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$.

4.5 (a) $k = -15/2$;

(b) $k = 2$.

4.6 (a) $3a - b - c = 0$;

(b) $2a - 3b + c = 0$;

(c) $b - 2a = c - 3a = 0$;

(d) não há condições a impor.

4.7 $A = 2B + C + \frac{3}{2}D$.

4.8 (a) Conjunto de vetores linearmente independentes;

(b) Conjunto de vetores linearmente dependentes, $(1,0) = (2,2) - (1,2)$;

(c) Conjunto de vetores linearmente independentes;

(d) Conjunto de vetores linearmente dependentes, $(13,1,0) = (-2)(-5,1,3) + 3(1,1,2)$;

(e) Conjunto de vetores linearmente dependentes, $(0,3,2,1) = (-1)(1,0,0,2) + (-3)(1,1,2,1) + 2(2,3,4,3)$;

(f) Conjunto de vetores linearmente independentes;

(g) Conjunto de vetores linearmente independentes.

4.9 (a) $a \neq 1 \wedge a \neq 2$;

(b) $a \neq -2 \wedge a \neq 2$;

(c) os vetores dados são linearmente independentes para qualquer valor de a.

4.10 (a) Por exemplo, $\overrightarrow{v}_3 = \frac{1}{3}\overrightarrow{v}_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{v}_2$.

(b) $\dim\langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\rangle = 2$ e $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ é uma base de $\langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\rangle$;

(c) $\dim\langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\rangle = 2$ logo $\langle \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\rangle$ é um plano. Equação geral: $x + y - z = 0$.

4.11 (a) É base e gerador.

(b) Não é base mas é gerador.

4.12 Existem escalares a_1, a_2, a_3, a_4 tais que $(x,y,z) = a_1(1,1,0) + a_2(-1,0,1) + a_3(0,1,1) + a_4(-1,1,-1)$, para qualquer vetor (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, logo S é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

$\{(1,1,0),(-1,0,1),(-1,1,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

$\{(1,1,0),(0,1,1),(-1,1,-1)\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^3$.

4.13 Os vetores $(1,-1,1), (-2,2,-1)$ não são múltiplos, logo são linearmente independentes.
$\{(1,-1,1),(0,1,0),(-2,2,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, contendo $(1,-1,1), (-2,2,-1)$.

4.14 (a) Por exemplo, $(0,0,0,0)$, $2\overrightarrow{v}_1 = (0,2,-2,2)$, $\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2 = (-1,0,-1,0)$, $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3 = (2,4,-2,4)$;

(b) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x - y - z = 0 \wedge y - w = 0\}$;

(c) $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$.

4.15 (a) $(4,1,1) \in S$, $\forall k \in \mathbb{R}$: $(4,1,1) = (-1)(0,-1,1) + 2(2,0,1) + 0(0,2,k)$;

(b) Se $k = -2$ então $\dim S = 2$ e $\{0,-1,1),(2,0,1)\}$ é uma base de S;
Se $k \neq -2$ então $\dim S = 3$ e $\{0,-1,1),(2,0,1),(0,2,k)\}$ é uma base de S. Na verdade, tendo em conta que $\dim S = 3$ e que S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, tem-se que $S = \mathbb{R}^3$. Donde, qualquer base de $\mathbb{R}^3$ constitui uma base de S ;

(c) Se $k = -2$ então $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - 2y - 2z = 0\}$;
Se $k \neq -2$ então $S = \mathbb{R}^3$.

4.16 (a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \{(0,0)\}$; $\dim(A) = 0$, $\varnothing$ é a base de A;

(b) $B = \{(2z,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (2,0,1)\rangle$; $\dim(B) = 1$, $\{(2,0,1)\}$ é uma base de B;

(c) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3z - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + z \\ w = 2x + 3z \end{cases} \Rightarrow C = \{(x, -x+z, z, 2x+3z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ e
$(x, -x+z, z, 2x+3z) = (x,-x,0,2x) + (0,z,z,3z) = x(1,-1,0,2) + z(0,1,1,3)$;
$\dim(C) = 2$, $\{(1,-1,0,2),(0,1,1,3))\}$ é uma base de C.

4.17 (a) $A = \{(-y-z, y, z, -y-z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$;

$$(-y-z, y, z, -y-z) = (-y, y, 0, -y) + (-z, 0, z, -z) = y(-1,1,0,-1) + z(-1,0,1,-1)$$

A é o conjunto solução de um SPI (homogéneo) com GI=2 logo $\dim(A) = 2$ e

$$\{(-1,1,0,-1),(-1,0,1,-1)\} \text{ é uma base de } A$$

(b) $B = \{(x,y,x+y,2x+3y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^4$;

$$(x,y,x+y,2x+3y) = (x,0,x,2x) + (0,y,y,3y) = x(1,0,1,2) + y(0,1,1,3)$$

B é o conjunto solução de um SPI (homogéneo) com GI=2 logo $\dim(A) = 2$ e

$$\{(1,0,1,2),(0,1,1,3)\} \text{ é uma base de } B$$

(e) $E = \{(b+d,b,b,d,e) : b,d,e \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^5$;

$$(b+d,b,b,d,e) = (b,b,b,0,0) + (d,0,0,d,0) + (0,0,0,0,e) = b(1,1,1,0,0) + d(1,0,0,1,0) + e(0,0,0,0,1)$$

E é o conjunto solução de um SPI com GI=3 logo $\dim(E) = 3$ e

$$\{(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\} \text{ é uma base de } E$$

(g) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} : a,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$;

$$\begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2c \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As 3 matrizes são l.i. logo $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de G e $\dim(G) = 3$.

(i) I é subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$I = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\}$$

Se $n = 2$,

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é uma base de } I \text{ e } \dim(I) = 3.$$

Se $n = 3$,

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ é uma base de } I \text{ e } \dim(I) = 6.$$

Por um raciocínio idêntico, obter-se-ia uma base para I com:

- n matrizes (diagonais) com a entrada (k,k) igual a 1 e as restantes entradas nulas, $k \in [n]$;
- $\dfrac{n^2-n}{2}$ matrizes com entradas (i,j) e (j,i) iguais a 1 e as restantes entradas nulas, $i \neq j$, $i,j \in [n]$;

$$\dim(I) = n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

4.18 $\{(-1,-1,1)\}$ é uma base do espaço das soluções do sistema homogéneo. Dimensão igual a 1.

4.19 (a) $\dim(F)=2$ e $\{(1,0,1,0),(1,-1,1,0)\}$ é uma base de F.
$\dim(G)=3$ e $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é uma base de G.

(b) $F=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-z=0\wedge w=0\}$.

(c) $\{(1,0,0,0),(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo 3 vetores (linearmente independentes!) de G;

(d) $(x,y,z,w)\in F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ z=x \\ w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=x \\ w=0 \end{cases}$

$$F\cap G=\{(x,-2x,x,0) : x\in\mathbb{R}\}=\langle(1,-2,1,0)\rangle$$

$$\{(1,-2,1,0)\} \text{ é uma base de } F\cap G \text{ e } \dim(F\cap G)=1$$

(e) $\mathcal{B}_1=\big((1,0,1,0),(1,-1,1,0)\big)$ base ordenada de F

$$(1,-2,1,0)=-1(1,0,1,0)+2(1,-1,1,0)\Rightarrow(1,-2,1,0)=(-1,2)_{\mathcal{B}_1}$$

$\mathcal{B}_2=\big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$ base ordenada de G

$$(1,-2,1,0)=-2(-1,1,0,0)+1(-1,0,1,0)+0(-1,0,0,1)\Rightarrow(1,-2,1,0)=(-2,1,0)_{\mathcal{B}_2}$$

4.20 (a) $F=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} : d=-a\right\}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a\end{bmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow F=\left\langle\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$.

Os 3 geradores de F são linearmente independentes (verifique) pelo que formam uma base de F e $\dim(F)=3$.

(b) os 3 geradores de G são linearmente dependentes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Mas $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ são linearmente independentes.

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\} \text{ é uma base de } G \text{ e } \dim(G)=2;$$

Uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nas condições pedidas é $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in G\Leftrightarrow c=d=0$.

(d) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in F\cap G\Leftrightarrow a+d=0\wedge c=d=0\Leftrightarrow a=c=d=0\Rightarrow F\cap G=\left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0\end{bmatrix} : b\in\mathbf{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\} \text{ é uma base de } F\cap G \text{ e } \dim(F\cap G)=1$$

4.21 É falsa a afirmação (d).

4.22 É falsa a afirmação (b).

4.23 É falsa a afirmação (c).

4.24 É falsa a afirmação (a).

4.25 (a) Falso, porque um conjunto linearmente independente de V tem no máximo n vetores.

(b) Falso, porque um conjunto de geradores de V com n vetores é uma base de V, logo o conjunto é linearmente independente.

(c) Falso, um conjunto de geradores de V tem no mínimo n vetores.

(d) Verdadeiro, porque um conjunto linearmente independente de V com n vetores é uma base de V, logo é um conjunto gerador de V.

(e) Falso, porque um conjunto de geradores linearmente independente de V é uma base de V, logo tem exactamente n vetores.

(f) Verdadeiro, basta ampliar o conjunto dado a um conjunto de n vetores linearmente independentes.