
Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a sua resolução.

Apresente **todos os cálculos** que efetuar.

Duração da prova: 1h30m

1. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do tipo 2 por 2 tais que $a_{ij} = i^2 - 3j$ e $b_{ij} = ij$, $i, j \in \{1, 2\}$.
- (a) Determine a forma geral das matrizes C que comutam com A , ou seja, tais que $AC = CA$.
- (b) Explícite e calcule a matriz D tal que $2DA + B = -3A$.

2. Considere o sistema de equações lineares com incógnitas x, y, z :

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x - y + z = b \\ -ax + 2y + z = -1 \end{cases}.$$

- (a) Classifique o sistema para todos os valores reais de a e b .
- (b) Resolva o sistema num caso em que existem infinitas soluções e determine duas soluções distintas.
- (c) Determine todos os valores reais de a, b e c de modo que $(2, 1, -c)$ seja solução do sistema e, para esses valores, verifique se esta solução é única.

3. Sejam $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ m & 0 & -1 & m \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e N a matriz que se obtém de M depois de efetuar as seguintes operações nas linhas/colunas de M :

- troca das linhas 2 e 4 ($L_2 \leftrightarrow L_4$);
- substituição da coluna 1 pela soma da coluna 1 com a coluna 3 ($C'_1 = C_1 + C_3$);
- substituição da linha 2 pela subtração da linha 2 com o triplo da linha 4 ($L'_2 = L_2 - 3L_4$).

- (a) Calcule o determinante da matriz M e indique todos os valores de m para os quais M é invertível.
- (b) Seja $m = 0$. Calcule o determinante das matrizes N e $-(N^{-1})^T$, em função do determinante de M .
4. Considere os vetores $u_1 = (1, 0, 1, 2)$, $u_2 = (0, 1, -1, -1)$, $u_3 = (2, 3, -1, 1)$ de \mathbb{R}^4 .
- (a) Justifique se existe k de modo que o vetor $u = (1, -1, 2, k)$ seja combinação linear dos vetores u_1, u_2, u_3 , e, em caso afirmativo, escreva u como combinação linear desses vetores.
- (b) Seja S o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado por u_1, u_2, u_3 .
- Defina o conjunto S analiticamente.
 - Determine uma base de \mathbb{R}^4 que contenha uma base de S .

Todas as questões têm cotação de 2 valores.