Exercícios de Álgebra Linear e Geometria Analítica

6 - Valores e vectores próprios. Diagonalização.

6.1 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (ax+3y, -2y+4z, -x+y+2z)$.

(a) Determine todos os valores reais de a para os quais 1 é valor próprio de f.

(b) Considere $a = -1$. Prove que o vector $(-3,-3,-3)$ é vector próprio de f e calcule o valor próprio associado.

6.2 Considere o endomorfismo g de $\mathbb{R}^3$ definido por $g(x,y,z) = (x-y, y+z, x+z)$.

(a) Calcule os valores e vectores próprios de g.

(b) Determine os subespaços próprios de g.

6.3 Seja $M_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ a matriz canónica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) Prove que existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituida por vectores próprios de T.

(b) Indique uma matriz de T que seja uma matriz diagonal.

(c) Quantas matrizes diagonais semelhantes a M_T existem?

6.4 Considere a função linear $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(x,y,z) = (x-2z, 0, -2x+4z)$.

(a) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ de tal forma que a matriz de h escrita em relação a esta base é uma matriz diagonal.

(b) Indique a matriz de h em relação à base encontrada na alínea anterior.

6.5 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x+2y+z, y+z, 4y-2z)$.

(a) Prove que 2 é valor próprio de T e calcule a sua multiplicidade geométrica.

(b) Prove que T não é diagonalizável.

6.6 Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ d & 1 \end{bmatrix}$. Determine d de modo que:

(a) -3 seja um valor próprio de A.

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ seja um vector próprio de A.

6.7 Seja f o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é

$$M_f = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Determine a e b sabendo que $\overrightarrow{v}_1 = (1,1)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (-2,1)$ são vectores próprios de f.

6.8 Seja g um automorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $g(1,3) = (2,6)$. Mostre que $(1,3)$ é um vector próprio de g^{-1} associado ao valor próprio $\lambda = 1/2$.

6.9 Seja h um automorfismo de um espaço vectorial real E. Mostre que, se $\overrightarrow{v}$ é um vector próprio de h, associado ao valor próprio λ, então $\overrightarrow{v}$ é também vector próprio de h^{-1}, associado ao valor próprio λ^{-1}.

6.10 Considere o endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Por observação da matriz M_T, e sem efectuar cálculos, indique um valor próprio de T e um vector próprio associado ao mesmo.

(b) Determine os restantes valores próprios e todos os subespaços próprios de T.

(c) Será T bijectiva? Justifique.

(d) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que $D = P^{-1}M_T P$.

6.11 Determine a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tem valores próprios $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ e tal que $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios associados a λ_1 e λ_2, respectivamente.

6.12 Determine a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tem valores próprios $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$, com vectores próprios associados $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

6.13 Determine a matriz A que tem valores próprios 1 e -1 e tal que

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : x = 0 \wedge y - z = 0 \right\},$$

$$E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} : y + z = 0 \right\}.$$

6.14 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cujo espectro é $\mathcal{E} = \{0, 1\}$ e cujos subespaços próprios são:

$$E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\},$$

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

(a) Determine o polinómio caracaterístico de f.

(b) Mostre que f é diagonalizável e determine uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz de f é diagonal D e, relativamente a essa base, exiba a matriz D.

6.15 Seja A uma matriz real, quadrada de ordem 4 tal que $r(A - I_4) = 2$, $r(A + 3I_4) = r(A - 2I_4) = 3$. Determine, justificando, os valores próprios de A e mostre que a matriz é diagonalizável.

6.16 Seja $A_{6\times 6}$ uma matriz com polinómio característico $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$. Indique, justificando:

(a) As multiplicidades algébricas e as possíveis multiplicidades geométricas dos valores próprios de A.

(b) As dimensões dos subespaços próprios de A de modo a que A seja diagonalizável.

6.17 Determine as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios das seguintes matrizes. Indique quais, de entre elas, são diagonalizáveis e, para essas, determine a matriz diagonalizante e a matriz diagonal:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.