Álgebra Linear e Geometria Analítica

Teste 1 – 21 de abril de 2023

Leia atentamente *o enunciado antes de iniciar a sua resolução. Apresente* **todos os cálculos** *que efetuar.*

---

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z:

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ ax + y + z = b \\ -ax + 2y + z = 0 \end{cases}$$

   (a) Classifique o sistema em função dos parâmetros reais a e b.

   (b) Sabendo que $\left(3, \dfrac{5}{2}, -4\right)$ é uma solução do sistema, verifique se esta solução é única.

   (c) Considere $a = 1$. Prove que o sistema é de Cramer e calcule a primeira coordenada da solução através da regra de Cramer.

2. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 - 3A + 2I = 0$, onde I é uma matriz identidade.

   (a) Justifique que neste caso A tem inversa e explicite algebricamente a sua inversa em função de A.

   (b) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Mostre que $A^2 - 3A + 2I = 0$ e apresente a inversa de A.

3. Considere as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 2x & 2x^2 & 2 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 + x^2 & 2x & 1 & 0 \\ 4 + y^2 & 2y & 1 & 0 \\ 4 + z^2 & 2z & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Defina o determinante da matriz N em função do determinante da matriz M.

4. Considere os vetores $v_1 = (1, -3, 2)$, $v_2 = (2, -1, -1)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$ e $v_4 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Sem efetuar cálculos, prove que os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente dependentes. Escreva um dos vetores como combinação linear dos restantes vetores.

   (b) Justifique se o conjunto $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ e se existe um subconjunto de C que é base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1, v_2, v_3.

      i. Defina analiticamente o subespaço S.

      ii. Considere o subespaço $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine uma base e a dimensão do subespaço $S \cap E$ de $\mathbb{R}^3$.

Todas as questões têm cotação de 2 valores.