Exercícios de Álgebra Linear e Geometria Analítica

---

1 - Matrizes. Operações com matrizes.

1.1 Escreva as matrizes A e B do tipo 3 por 2 tais que $a_{ij} = i + j$, $b_{ij} = (-1)^{i+j}$ e calcule $A + B$, AB^T e $B^T A$. Conclua que o produto de matrizes não é comutativo.

1.2 Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifique quais das seguintes operações são possíveis de calcular e em caso afirmativo calcule-as: $B + A,\ A + C,\ C^T B,\ AC,\ CA, 5A.4C,\ BC^T,\ (AC)^2,\ (AC)B,\ A(CB),\ BD,\ D^T D,\ DD^T,\ ED^T$.

1.3 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule as:

(a) entradas $(AA^T)_{12}$, $(AC)_{21}$, B^2_{22} e $(C^T C)_{11}$

(b) matrizes $A^T + C,\ (A + C^T)^T,\ (ABC)^T, C^T B^T A^T$.

1.4 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Prove que $AB \neq BA$.

Nota: Como já tinhamos observado, o produto de matrizes não é comutativo. Também não verifica a lei do anulamento do produto, como o comprova o exercício, uma vez que $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0$.

1.5 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determine os parâmetros a e b de modo a que as matrizes A e B comutem.

1.6 Determine todas as matrizes B que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.7 Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Prove que $AB = 0$.
Nota: Mais uma vez, tem-se $AB = 0$ e $A \neq 0$ e $B \neq 0$ (B não é, neste caso, quadrada).

(b) Prove que $AC = AD$.
Nota: Nesta alínea tem-se $AC = AD$ e $C \neq D$.

1.8 Determine os valores reais de a e b de modo a que a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ verifique a equação:

$$A^2 + aA - bI_2 = O_2.$$

1.9 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Explicite e calcule a matriz X tal que:

(a) $(BA - X^T)^T = C$

(b) $CA^T + X^T + B = O_{2\times 3}$

1.10 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Resolva as seguintes equações matriciais, calculando a matriz X:

(a) $6A + 3X = -3B$

(b) $BA - X = AB$

(c) $A^2 + 2X = A^2B$

1.11 Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem $n > 1$. Diga se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes:

(a) $A(B + C) = BA + CA$

(b) $(A - B)^2 = (B - A)^2$

(c) $AB + 2B = (A + 2)B$

(d) $(AB)^2 = A^2B^2$

(e) $A^2 + AB = A(A + B)$

(f) $BA + B = B(A + I_n)$

1.12 Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que M é *simétrica* (resp.: *anti-simétrica*) se $M^T = M$ (resp.: $M^T = -M$). Dada uma matriz A, quadrada de ordem n, qualquer, prove que:

(a) $A + A^T$ é simétrica.

(b) $A - A^T$ é anti-simétrica.

1.13 Seja A uma matriz qualquer. Justifique que:

(a) AA^T e A^TA são matrizes quadradas.

(b) AA^T e A^TA são matrizes simétricas.

1.14 Calcule A^2, A^3, A^4 e deduza a matriz A^n, $n \in \mathbb{N}$, com :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

1.15 Seja $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal (de ordem n). Determine:

(a) a potência de ordem k de D com $k \in \mathbf{N}$;

(b) as condições para que D seja invertível e, nesse caso, determine a sua inversa.

1.16 Dê exemplos de matrizes quadradas A e B tais que:

(a) A e B são invertíveis e $A + B$ não é invertível;

(b) $A + B$ é invertível e nem A nem B são invertíveis.

1.17 Sejam A uma matriz invertível tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Prove que existe uma única matriz X tal que:

(a) $XA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e calcule-a;

(b) $AX - A = 2I_3$ e calcule-a.

1.18 Considere as matrizes (de permutação) $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. Calcule os produtos P_1A, P_2A, BP_1 e BP_2;

(b) Sejam A uma matriz do tipo 3 por n e B uma matriz do tipo m por 3. Descreva os produtos:

i. P_1A e P_2A em relação à matriz A;

ii. BP_1 e BP_2 em relação à matriz B.

(c) Prove que:

i. $P_1^{-1} = P_1$ e $P_2^{-1} = P_2$

ii. P_1 e P_2 são ortogonais.

1.19 Suponha que A, B, C e D são matrizes quadradas invertíveis. Simplifique o mais possível:

(a) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

(b) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

1.20 Prove que se A e B são matrizes quadradas invertíveis e permutáveis então A^{-1} e B^{-1} são também permutáveis.

1.21 Mostre que se uma matriz quadrada de ordem n, A, satisfaz a equação $A^3 + 2A - I_n = O_n$, então A tem inversa e $A^{-1} = A^2 + 2I_n$.

1.22 Sabendo que A e B são matrizes ortogonais de ordem n, mostre que $X = B - I_n$ é solução da equação matricial

$$A^T X^T B + A^{-1}B = A^T.$$

1.23 Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $A_k = \begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix}$. Prove que:

(a) $\forall k, m \in \mathbb{Z}$, $A_k A_m = A_{k+m}$

(b) $\forall k \in \mathbb{Z}$ A_k é invertível e $A_k^{-1} = A_{-k}$.