LEIC

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Repetição do Teste 2 – 29 de junho de 2023

Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a sua resolução.
Apresente **todos os cálculos** que efetuar.
Duração da prova: 1h30m

1. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+2y+az, 4x-y, -x+y+3z)$.
   (a) Calcule a dimensão e uma base da Imagem de f para todos os valores reais de a.
   (b) Determine todos os valores reais de a e b para os quais $(1,4,b)$ pertence ao Núcleo de f e, nesse(s) caso(s), determine a dimensão e uma base do Núcleo de f.
   (c) Determine a de tal modo que:
      i. 1 seja valor próprio de f e determine a multiplicidade geométrica deste valor próprio;
      ii. $(1,1,2)$ seja vetor próprio de f e determine o respetivo valor próprio assim como uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio obtido.
   (d) Considere $a = 9$.
      i. Defina analiticamente o conjunto Imagem de f e verifique se o vetor $(1,3,-4)$ pertence a este conjunto;
      ii. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base da Imagem de f.

2. Considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(1,0,0) = (1,0),\ g(0,1,1) = (2,2) \text{ e } (0,1,-1) \in \mathrm{Nuc}(g).$$

   (a) Utilize o teorema da dimensão para justificar se g é injetiva e/ou sobrejetiva.
   (b) Utilizando a definição de aplicação linear, determine a imagem do vetor $(3,2,-2)$.
   (c) Determine a matriz de g em relação às bases ordenadas $B = \big((1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\big)$ e $B' = \big((2,0),(2,2)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente.

3. Determine uma matriz do tipo 2 por 2 com vetores próprios $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ associados aos valores próprios 2 e 3, respetivamente.

Todas as questões têm a cotação de 2 valores.