Álgebra Linear e Geometria Analítica – ISEL - DM

LEIC -LEETC **2º Teste - 15 de junho de 2022** Versão A

Leia com atenção:

A duração do teste é de 1,5 horas.

Não é permitido o uso de calculadora.

Justifique todas as suas respostas.

1. Calcule a matriz canónica e a expressão analítica da aplicação linear h que verifica:

$$h(1,3) = (4,-2,11) \text{ e } h(-1,1) = (0,-2,1).$$

[2.0]

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & a \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

e a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y,z) = (x+z, y+z)$.

(a) Determine o valor de a para o qual f não é sobrejetiva. Neste caso, determine:

i. a dimensão e uma base da Imagem de f;

ii. os valores de b para os quais $(b,1,0)$ não pertence à Imagem de f. **[4.0]**

(b) Utilizando a **definição de vector próprio**, determine os valores reais de a e c para os quais $(c,-1,1)$ é vector próprio de f e calcule o respetivo valor próprio. **[2.0]**

(c) Determine a dimensão e uma base do Núcleo de g e conclua que g é sobrejetiva. **[2.0]**

(d) Seja $a = 1$. Defina a aplicação linear $g \circ f$ e calcule $(g \circ f)(1,-1,3)$. **[2.0]**

3. Considere o endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios de f e indique as respetivas multiplicidades algébricas. **[1.5]**

(b) Averigue se f é diagonalizável. **[2.0]**

Nome:	**Curso:**
Número:	Versão A

Escolha Múltipla

Em cada uma das questões escolha APENAS uma opção, rodeando a letra correspondente.

I. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(a,b,c) = (-3a-2b, b+c)$. Suponha fixas as bases $B = ((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ e $B' = ((1,1),(2,0))$ de $\mathbb{R}^2$. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ a & -\frac{3}{2} & d \end{bmatrix}$, a matriz que representa T relativamente às bases anteriores.

Assinale a resposta correta:

A. $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, $d = -\frac{3}{2}$.

B. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -\frac{3}{2}$, $d = 0$.

C. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -\frac{3}{2}$.

D. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -\frac{2}{3}$.

[1.5]

II. Considere o endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nuc}f = \langle (1,1,1),(1,0,0) \rangle$ e $f(1,0,1) = (5,-1,2)$. Considere as seguintes afirmações:

a. $\text{Im}f = \langle (5,-1,2) \rangle$.

b. $f(6,0,1) = f(1,0,1)$.

c. A matriz canónica de f é $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

d. 0 não é valor próprio de f.

A lista completa das proposições verdadeiras é:

A. $\{a,c,d\}$ B. $\{a,b,c\}$ C. $\{b,d\}$ D. $\{b,c\}$ **[1.5]**

III. Seja A uma matriz de ordem 3 cujo polinómio característico é: $p(\lambda) = -\lambda(3+\lambda)^2$. Considere as seguintes afirmações:

a. -3 é valor próprio de A e se a sua multiplicidade geométrica é 2 então A é diagonalizável.

b. $|A - 2I_3| = 0$.

c. $|A + 3I_3| = 0$.

d. A é invertível.

A lista completa das proposições verdadeiras é:

A. $\{a,c,d\}$ B. $\{b,c\}$ C. $\{a,b,d\}$ D. $\{a,c\}$ **[1.5]**