LEIC e LEETC

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Teste 2 – 14 de junho de 2023

Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a sua resolução e apresente todos os cálculos que efectuar.

---

1. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *a matriz canónica da aplicação linear* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *a aplicação linear tal que* $g(x,y) = (x+y, x-y, x-2y, y)$.

   (a) *Defina analiticamente o conjunto:*

   i. *Núcleo de* f *e determine os valores reais dos parâmetros* a *e* b *de tal modo que o vetor* $(1,a,b)$ *pertença a este conjunto;*

   ii. *Imagem de* g *e verifique se o vetor* $(1,1,-1,0)$ *pertence a este conjunto.*

   (b) *Determine uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *que contenha uma base do Núcleo de* f.

   (c) *Determine a matriz canónica e a expressão geral da aplicação linear* $g \circ f$ *e conclua se* $(g \circ f)$ *é injetiva e/ou sobrejetiva.*

2. *Seja* $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a aplicação linear tal que* $h(1,1) = (1,0,1)$ *e* $h(3,4) = (2,1,-1)$. *Determine a matriz canónica e a expressão geral de* h *e calcule* $h(1,-5)$.

3. *Considere a matriz* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) *Utilizando a definição de vetor próprio, determine todos os valores reais de* m *e* n *para os quais* $\begin{bmatrix} -2 & n & 2 \end{bmatrix}^T$ *é vetor próprio de* M *e calcule o respetivo valor próprio.*

   (b) *Considere* $m = 0$.

   i. *Prove que* 1 *é valor próprio de* M *e calcule a dimensão e uma base do subespaço próprio associado a este valor próprio.*

   ii. *Diagonalize a matriz* M, *isto é, determine uma matriz invertível* P *e uma matriz diagonal* D *tais que* $P^{-1}MP = D$.

Todas as questões têm a cotação de 2.5 valores.