

3 - Determinantes.

3.1 Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ -8 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Indique, justificando, os valores reais de x para os quais a seguinte matriz é invertível:

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & x-1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & k & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Calcule o determinante da matriz A e conclua os valores reais de k para os quais A tem característica máxima.
- Considere $k = 0$. Sem efectuar cálculos, indique, justificando, o determinante da matriz B .

(c) Indique, justificando, 2 operações elementares que se podem efectuar na matriz A de modo a que o determinante da matriz que se obtém é o triplo do determinante de A .

3.4 Sejam A , B e C matrizes quadradas de ordem 3 tais que $\det(A) = 2$, $\det(B) = -5/3$ e $\det(C) = 0$. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\det(A^{-1})$ (b) $\det(AB)$ (c) $\det(ABC)$ (d) $\det(A^T B^{-1})$ (e) $\det(5A)$

3.5 Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 4, invertíveis, tais que

$$\det(2A^{-1}) = \det(A^3(B^T)^{-1}) = 4.$$

Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.

3.6 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & a \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = 2A$ e C uma matriz invertível de ordem 4.

(a) Calcule $\det(A)$

(b) Determine a de modo que $\det(C^T(BC)^{-1}) = \frac{1}{32}$.

3.7 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Exprima o determinante das seguintes matrizes em função do determinante de A :

$$B = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d-3a & 7e-3b & 7f-3c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} d+a & 5g-4d & -2a \\ e+b & 5h-4e & -2b \\ f+c & 5i-4f & -2c \end{bmatrix}$$

3.8 Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e ainda uma matriz real B quadrada de ordem 4 e invertível.

Calcule $\det(X)$, sabendo que $3A^{-1}BX = B^T A$.

3.9 Sejam $A = \begin{bmatrix} y & 1 & x & y \\ x & 0 & y & x \\ a & 0 & 0 & b \\ xz & x & x^2 & xz \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y & x \\ 1 & 0 & 1 \\ y & x & z \end{bmatrix}$. Prove que $\det(A) = (b-a)x \det(B)$.

3.10 Sejam $A = \begin{bmatrix} b & -1 & 0 & a \\ -2b & 1+a & x & 1-a \\ a^2 & 0 & y & ab \\ b & -a & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & b & -1 \\ b & a & b \end{bmatrix}$. Prove que $\det(A) = ax \det(B)$.

3.11 Prove que as seguintes matrizes são invertíveis e calcule, usando a matriz adjunta, as respectivas inversas:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0 \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.12 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Prove que a matriz A é invertível e calcule a terceira coluna da matriz inversa de A ;
 (b) Prove que a matriz B é invertível e calcule a entrada $(3, 4)$ da matriz inversa de B .

3.13 Determine todos os valores reais de a, b para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$ é invertível e, para todos os valores encontrados, calcule, usando a matriz adjunta, a inversa da matriz A .

3.14 Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} 7x + 8y = 19 \\ 6x + 7y = 11 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$

3.15 Prove que os seguintes sistemas de equações lineares são de Cramer

$(S_1) \begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ x + 3y - z = -1 \\ 3x - y + 3z = 1 \end{cases}$ $(S_2) \begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ x - y + z - w = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ $(S_3) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z + w = 2 \\ x + y + z + w = -1 \\ y + w = 3 \end{cases}$ $(S_4) \begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ 2x + y + w = -1 \\ x + z - 2w = 0 \\ 2y - z + 3w = 1 \end{cases}$

e (utilizando a regra de Cramer) calcule o valor da

- (a) primeira coordenada da solução de (S_1) ;
 (b) segunda coordenada da solução de (S_2) ;
 (c) terceira coordenada da solução de (S_3) ;
 (d) quarta coordenada da solução de (S_4) ;

3.16 Considere os sistemas de equações lineares (do exercício 2.4):

$(S_1) \begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y = a + 2a^2 \end{cases}$ $(S_2) \begin{cases} 2x + y = b \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$

Determine todos os valores reais dos parâmetros a, b para os quais o sistema

- (a) (S_1) é de Cramer e, para todos esses valores, calcule a incógnita y ;
 (b) (S_2) é de Cramer e, para todos esses valores, calcule a solução de (S_2) .