Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Exercícios de Álgebra Linear e Geometria Analítica

2 - Característica. Sistemas de Equações Lineares.

2.1 Indique quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada e diga qual a característica de cada uma delas:

(a) $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&2&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ (c) $C=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

(d) $D=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (e) $E=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&3&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ (f) $F=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

(g) $G=\begin{bmatrix}0&0&2&3\\0&1&-1&-2\\5&1&0&0\end{bmatrix}$ (h) $H=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ (i) $I=\begin{bmatrix}0&1&2&8\\1&-2&1&0\\3&0&-2&-3\end{bmatrix}$

(j) $J=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$ (k) $K=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (l) $L=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&1&-2\end{bmatrix}$

2.2 Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $A=\begin{bmatrix}2&2&2&2\\2&2&2&3\\2&2&2&4\end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\2&0&3&3\\0&3&1&2\\2&-2&4&4\end{bmatrix}$

(c) $C=\begin{bmatrix}3&0&5&7\\6&1&4&0\\0&1&6&14\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ (d) $D=\begin{bmatrix}0&0&-1&1\\1&1&1&0\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$

2.3 Determine a característica das seguintes matrizes para todos os valores reais dos parâmetros a, b:

(a) $A=\begin{bmatrix}2&2&4\\1&a&b\end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&1\\3&0&2\end{bmatrix}$ (c) $C=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}$

(d) $D=\begin{bmatrix}1&2a+b&a+b\\1&a+b&b\\-1&a&a\end{bmatrix}$ (e) $E=\begin{bmatrix}2&-a^2&-4\\1&0&-1\\1&a&1\end{bmatrix}$ (f) $F=\begin{bmatrix}3&3b&a\\2&1+2b&3\\1&b&2\end{bmatrix}$

(g) $G=\begin{bmatrix}1&a-1&3&a^2+2\\3&a-3&9&6-a\\1&-1&3&2\end{bmatrix}$ (h) $H=\begin{bmatrix}1&1&1&1&4\\1&a&1&1&4\\1&1&a&3-a&6\\2&2&2&a&6\end{bmatrix}$

2.4 Classifique os seguintes sistemas de equações lineares e, caso sejam possíveis, resolva-os:

(a) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x-y+2z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ x-y+z-w=0 \\ x+2y-z=1 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+2z=0 \\ 2x-y+3z=1 \\ 4x+y+8z=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ y-z+w=2 \\ x+y+z+w=-1 \\ y+w=3 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+y-2z=0 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x+2y-z+w=1 \\ 2x+y+z-w=-2 \\ x+z+w=1 \\ 2x+5y-3z+5w=5 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y-z+w=4 \\ -x+y+2z+w=1 \\ -x+z+2w=-2 \\ -2x+y+7z-w=-3 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x-y+z+2w=1 \\ -x+2y+z-w=1 \\ y+2z+w=2 \\ 2x-3y+3w=0 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-2y+4z=-5 \\ -2x+y-3z=4 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 5x-4y+3z=6 \\ -10x+7y-6z=-14 \\ -8x+6y-5z=-11 \end{cases}$ (k) $\begin{cases} x+2z=1 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+y+8z=0 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} 3x+5y+z=-1 \\ x+y+2z+w=1 \\ 2x+z-w=4 \\ 2x+3z+3w=-2 \\ 3x+y+3w=5 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+y-2z=0 \\ 4x+6y-2z=8 \end{cases}$ (n) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-2y+4z=-5 \\ 2x+2y-4z=1 \end{cases}$ (o) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x+3y=6z \\ -2y+4z=2x \end{cases}$

(p) $\begin{cases} 2x-y+w=2 \\ z-2w=-8 \\ -2x+y+2z-3w=-1 \end{cases}$ (q) $\begin{cases} x+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+y+8z=1 \end{cases}$

2.5 Classifique os sistemas de equações lineares $AX=B$ e, caso sejam possíveis, resolva-os:

(a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.6 Considere o seguinte sistema $AX=B$ de equações lineares com parâmetros reais a, b:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Seja $C=\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Calcule AC e diga, justificando, os valores dos parâmetros a, b para os quais C é solução do sistema.

(b) Classifique o sistema para todos os valores reais dos parâmetros a, b.

2.7 Considere os sistemas de equações lineares

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=a+1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y=a+2a^2 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x+y=b \\ 3x+2y+z=0 \\ x+ay+z=2 \end{cases}$$

(a) Discuta-os em função dos parâmetros a, b.

(b) Indique para que valores do parâmetro real a o sistema (S_1) tem infinitas soluções. Calcule todas as soluções de (S_1) para um desses valores de a.

(c) Resolva o sistema (S_2) num caso em que o sistema é possível determinado.

2.8 Determine b_1, b_2, b_3 de modo que $(2, -2, 1)$ seja uma solução do sistema

$$\begin{cases} x-z=b_1 \\ 2x+y+z=b_2 \\ y+2z=b_3 \end{cases}$$

2.9 Discuta, em função dos parâmetros reais a, b, os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-2y+3z=1 \\ x+2y+(a^2-3)z=a \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+z=1+b \\ x+by+z=a \\ bx+y=b(1+2b) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=b \\ ax+y+z=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x+y+w=2 \\ 3x+3y+az+5w=3 \\ 3x-3z-2w=b \end{cases}$ (e) $\begin{cases} ax+y=z-aw \\ ay+y=1+z+w \\ y+(a+1)w=x+b \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ ax+z=2 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases}$

2.10 Um sistema de equações lineares diz-se *homogéneo* se é da forma $AX=0$.

(a) Prove que um sistema homogéneo é sempre possível.

(b) Seja $A=\begin{bmatrix} 1 & -b & 1 \\ b & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

i. Determine b de modo que o sistema $AX=0$ tenha uma solução não nula.

ii. Para um dos valores de b encontrado na alínea anterior, determine uma solução não nula do sistema homogéneo.

2.11 Seja $AX=B$ um sistema de equações lineares. Mostre que a sua solução geral, X_G, é soma de uma sua solução particular, X_P, com a solução geral do sistema homogéneo associado $AX=0$, X_{GH}:

$$X_G = X_P + X_{GH}\,.$$

2.12 Efectuando operações elementares sobre as linhas, a matriz A é transformada na matriz R, sua forma escalonada reduzida:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema $AX=0$.

(b) Seja C_i a coluna i de A, $i=\{1,2,3,4\}$. Suponha que $B=C_1+C_2$. Determine a solução geral de $AX=B$.

2.13 Considere os planos $\alpha_1 \equiv x+y+z=1$, $\alpha_2 \equiv x+ay-z=0$ e $\alpha_3 \equiv (1-a)y+z=b$, $a,b \in \mathbb{R}$.

(a) Prove que, para qualquer valor do parâmetro a, os planos α_1 e α_2 concorrem numa recta.

(b) Calcule as equações da recta referida na alínea anterior.

(c) Determine todos os valores dos parâmetros a,b para os quais os planos α_1, α_2 e α_3 concorrem:

i. numa recta;

ii. num ponto.

(d) Determine as equações da recta e as coordenadas do ponto para um dos valores dos parâmetros a,b encontrados na alínea anterior.

2.14 Considere as rectas $r_1 \equiv (0,6,-6)+k(1,-3,1),\ k \in \mathbb{R}$, $r_2 \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ e $r_3 \equiv \begin{cases} y=2x+1 \\ z=-x-4 \end{cases}$ e os planos $\alpha \equiv x+y+3z+10=0$ e $\beta = (-4,1,1)+k(-2,1,0)+l(1,0,1),\ k,l \in \mathbb{R}$. Determine as posições relativas entre:

(a) r_1 e r_2 (b) r_1 e r_3 (c) r_2 e r_3 (d) r_3 e α (e) r_3 e β (f) α e β

2.15 Determine, em função do parâmetro real a a posição relativa entre:

(a) a recta $r \equiv \begin{cases} x=\frac{3}{2}z+\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ e o plano $\alpha \equiv (a-1)x-y+(2-a)z=0$

(b) as rectas $s_1 \equiv \begin{cases} y=ax-a \\ z=-2x+4 \end{cases}$ e $s_2 \equiv \begin{cases} y=x-1 \\ z=-2x+2+a \end{cases}$

2.16 Considere o sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ (\alpha+1)y+z=2 \\ x+(\alpha+2)y+\beta z=0 \end{cases}$

(a) Usando a discussão de sistemas e supondo que as equações representam, respectivamente, os planos π_1, π_2 e π_3, estude a posição relativa entre os três planos.

(b) Faça $\alpha=\beta=0$

i. Escreva a equação vectorial da recta $r \equiv \pi_1 \cap \pi_2$.

ii. Seja s a recta normal a π_3 que passa na origem. Diga qual a posição relativa entre r e s.

2.17 Determine as inversas das seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & -16 & -5 & 10 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.18 Considere o seguinte sistema de equações lineares, onde a,b são parâmetros reais:

$$\begin{cases} ax+bz=2 \\ ax+ay+4z=4 \\ ay+2z=b \end{cases}$$

(a) Discuta-o em função de a e de b.

(b) Faça $a=b=1$

i. Resolva-o.

ii. Sendo A a matriz simples do sistema, justifique que A é invertível e calcule A^{-1}.

iii. Usando A^{-1}, confirme a solução obtida anteriormente.

2.19 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$. Explicite e calcule X verificando:

(a) $2A + 3X = 4B$

(b) $A^{-1}X = A$

(c) $B(XA - B)^{-1} = BA^{-1}$

(d) $(C^{-1} - X)C = X$

2.20 Considere a equação matricial

$$(B^T X)^T - A[(B^{-1}A)^{-1} - B] = 0,$$

onde A, B e X são matrizes invertíveis. Explicite a matriz X.

2.21 Seja A uma matriz invertível.

(a) Classifique o sistema $AX = B$. Justifique.

(b) Sabendo que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule a solução do sistema $AX = B$.

2.22 Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que:

(a) $(3I_2 + 2X)^{-1} = A$

(b) $(3B^{-1}X)^{-1} = A$

(c) $(3B^{-1}X^{-1})^{-1} = A$

(d) $X = (A^{-1} - X)A$

2.23 Suponha que A, B, C e D são matrizes quadradas invertíveis. Simplifique o mais possível:

(a) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

(b) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

2.24 Sejam A, B, $A + B$ e $A^{-1} + B^{-1}$ matrizes quadradas invertíveis. Prove que

$$A(A + B)^{-1}B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

2.25 Prove que se A e B são matrizes quadradas invertíveis e permutáveis então A^{-1} e B^{-1} são também permutáveis.

2.26 Mostre que se uma matriz quadrada de ordem n, A, satisfaz a equação $A^3 + 2A - I_n = O_n$, então A tem inversa e $A^{-1} = A^2 + 2I_n$.

2.27 Uma matriz P, quadrada de ordem n, diz-se *ortogonal* sse $P^T P = PP^T = I_n$. Sabendo que A e B são matrizes ortogonais de ordem n, mostre que $X = B - I_n$ é solução da equação matricial

$$A^T X^T B + A^{-1}B = A^T.$$

2.28 Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja $A_k = \begin{bmatrix} 1-k & -k \\ k & 1+k \end{bmatrix}$. Prove que:

(a) $\forall k, m \in \mathbb{Z},\ A_k A_m = A_{k+m}$

(b) $\forall k \in \mathbb{Z}\ A_k$ é invertível e $A_k^{-1} = A_{-k}$.

2 - Soluções - Sistemas de Equações Lineares.

2.1 (a) Escalonada; $r(A) = 3$

(b) Escalonada; $r(B) = 2$

(c) Escalonada; $r(C) = 2$

(d) Não escalonada; $r(D) = 2$

(e) Não escalonada; $r(E) = 3$

(f) Não escalonada; $r(F) = 2$

(g) Não escalonada; $r(G) = 3$

(h) Não escalonada; $r(H) = 1$

(i) Não escalonada; $r(I) = 3$

(j) Não escalonada; $r(J) = 2$

(k) Escalonada; $r(K) = 2$

(l) Não escalonada; $r(L) = 3$.

2.2 (a) $r(A) = 2$ (b) $r(B) = 3$ (c) $r(C) = 4$ (d) $r(D) = 3$

2.3 (a) $a \neq 1 \vee b \neq 2 \Rightarrow r(A) = 2$, $a = 1 \wedge b = 2 \Rightarrow r(A) = 1$

(b) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3$, $a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow r(B) = 2$

(c) $a \neq -2 \wedge a \neq 1 \Rightarrow r(C) = 3$, $a = 1 \Rightarrow r(C) = 1$, $a = -2 \Rightarrow r(C) = 2$

(d) $a \neq 0 \Rightarrow r(D) = 3$, $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow r(D) = 2$, $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow r(D) = 1$

(e) $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow r(E) = 3$, $a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow r(E) = 2$

(f) $a \neq 6 \Rightarrow r(F) = 3$, $a = 6 \Rightarrow r(F) = 2$

(g) $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \Rightarrow r(G) = 3$, $a = 0 \Rightarrow r(G) = 1$, $a = -1 \Rightarrow r(G) = 2$

(h) $a \neq 1 \Rightarrow r(H) = 4$, $a = 1 \Rightarrow r(H) = 2$

2.4 (a) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

(b) $r(A) = 4 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$

(c) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $(2, 0, -1)$

(d) $r(A) = 4 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $(-5, -4, 1, 7)$

(e) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $(1, 1, 1)$

(f) $r(A) = 3 \neq r(A|B) = 4 \Rightarrow SI$

(g) $r(A) = 3 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI; G(I) = 1$; Soluções: $\left(\frac{3}{2} + 3w, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2} + w, w\right), w \in \mathbb{R}$

(h) $r(A) = 2 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI; G(I) = 2$; Soluções: $(3-3z-3w, 2-2z-w, z, w), z, w \in \mathbb{R}$

(i) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $(-1, -1, -1)$

(j) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $(1, 2, 3)$

(k) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$; Solução: $(-11, -4, 6)$

(l) $r(A) = 4 \neq r(A|B) = 5 \Rightarrow SI$

(m) $r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI; G(I) = 1$; Soluções: $(-4 + 5z, 4 - 3z, z), z \in \mathbb{R}$

(n) $r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

(o) $r(A) = 1 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI; GI = 2$; Soluções: $(-y + 2z, y, z), y, z \in \mathbb{R}$

(p) $r(A) = 3 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI; G(I) = 1;$ Soluções: $\left(-\frac{13}{4} + \frac{1}{2}y, y, 9, \frac{17}{2}\right), y \in \mathbb{R}$

(q) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD;$ Solução: $(2, 1, -1)$

2.5 (a) $r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD;$ Solução: $X = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

(b) $r(A) = 2 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI; G(I) = 2;$ Soluções: $X = \begin{bmatrix} -1 + z + 2w \\ 2 - 3z - 3w \\ z \\ w \end{bmatrix}, z, w \in \mathbb{R}$

(c) $r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

2.6 (a) $AC = \begin{bmatrix} -1/2 + a & 1 - 2a & 0 \end{bmatrix}^T$. Se C é solução do sistema então $AC = B$ e logo $a = 0 \wedge b = -1/2$.

(b) $a \neq -1/2 \wedge a \neq 1/2 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = -1/2 \wedge b = -1/2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$a = -1/2 \wedge b \neq -1/2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$
$a = 1/2 \wedge b = 1/2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$a = 1/2 \wedge b \neq 1/2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

2.7 (a) (S_1) $a \neq 1 \wedge a \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = 1 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$
$a = 0 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI, GI = 1$

(S_2) $a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = 1 \wedge b = -2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$a = 1 \wedge b \neq -2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

(b) $a = 0.$ Soluções: $(1 - z, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

(c) Por exemplo, considerando $a = 0$ e $b = 0$, $(1, -2, 1)$ é a única solução de (S_2).

2.8 $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 0$

2.9 (a) $a \neq -2 \wedge a \neq 2 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = 2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$a = -2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

(b) $b \neq 0 \wedge b \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$b = 0 \wedge a = 1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$b = 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$
$b = 1 \wedge a = 2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$b = 1 \wedge a \neq 2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

(c) $a \neq -2 \wedge a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = -2 \wedge b = -1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$
$a = -2 \wedge b \neq -1 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$
$a = 1 \Rightarrow r(A) = 1 \neq r(A|B) = 2 \Rightarrow SI$

(d) $a \neq 3 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI, ,\ GI = 1$
$a = 3 \wedge b = 3 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI,\ GI = 2$
$a = 3 \wedge b \neq 3 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

(e) $a \neq -1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI, ,\ GI = 1$
$a = -1 \wedge b = -1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 4 \Rightarrow SPI,\ GI = 2$
$a = -1 \wedge b \neq -1 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3 \Rightarrow SI$

(f) $a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = 1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$

2.10 (a) $X = 0$ é uma solução do sistema $AX = 0$, logo um sistema homogéneo é sempre possível.

(b) i. $b = -5 \vee b = 2$ ii. Por exemplo, $(1, 3, 5)$ é uma solução para $b = 2$.

2.11 Problema teórico. Use a definição de solução de um sistema.

2.12 (a) Soluções: $(y - 2w, y, 2w, w), y, w \in \mathbb{R}$

(b) Tendo em conta o exercício anterior, a solução geral é: $X_G = (1, 1, 0, 0) + (y - 2w, y, 2w, w) = (1 + y - 2w, 1 + y, 2w, w), y, w \in \mathbb{R}$

2.13 (a) Seja $[A|B]$ a matriz ampliada do sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$.

Então $\forall a \in \mathbb{R}, r(A) = 2 = r(A|B) < n \Rightarrow SPI, GI = 1$, logo os planos α_1 e α_2 concorrem numa recta.

(b) $\begin{cases} x = 1/2 - (a + 1)/2\ y \\ z = 1/2 + (a - 1)/2\ y \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}$.

(c) i. $a = 1 \wedge b = 1/2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n \Rightarrow SPI, GI = 1$, logo os três planos concorrem numa recta.

ii. $a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$, logo os três planos concorrem num ponto.

(d) $a = 1 \wedge b = 1/2$; Recta: $\begin{cases} x = 1/2 - y \\ z = 1/2 \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}$;

Por exemplo $a = 0 \wedge b = 0$; Ponto: $(1, -1, 1)$.

2.14 (a) r_1 e r_2 são enviezadas.

(b) r_1 e r_3 são concorrentes (intersecção: $(1, 3, -5)$) .

(c) r_2 e r_3 são estritamente paralelas.

(d) r_3 é estritamente paralela a α.

(e) r_3 é concorrente com β (intersecção: $(-3/2, -2, -5/2)$).

(f) α e β são concorrentes (intersecção: $(-17 - 7z, 7 + 4z, z), z \in \mathbb{R}$).

2.15 (a) Se $a \neq -1$ a recta e plano são concorrentes (intersecção: $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1-a}{1+a}\right), 0, \frac{1-a}{1+a}\right)$;

Se $a = -1$ a recta é estritamente paralela ao plano;

(b) Se $a \neq 1$ e $a \neq 2$ as rectas são enviezadas.
Se $a = 2$ as rectas são concorrentes.
Se $a = 1$ as rectas são estritamente paralelas.

2.16 (a) $\alpha \neq -1 \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$, logo os três planos concorrem num ponto;
$\beta = 0 \Rightarrow r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B) \Rightarrow SI$, logo, os três planos têm intersecção vazia. Intersectam-se dois a dois, segundo rectas distintas;
$\alpha = -1 \wedge \beta = -3/2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n \Rightarrow SPI, GI = 1$, pelo que, os três planos concorrem numa recta;
$\alpha = -1 \wedge \beta \neq -3/2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B) \Rightarrow SI$, logo, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$. Em particular, quando $\alpha = -1 \wedge \beta = -1$ os planos π_1 e π_3 são estritamente paralelos.

i. Equações cartesianas da recta r: $\begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = 2 - z \end{cases}$, $z \in \mathbb{R}$. Destas resulta que
$(x, y, z) = (-1 + 2z, 2 - z, z) = (-1, 2, 0) + (2z, -z, z) = (-1, 2, 0) + z(2, -1, 1)$, $z \in \mathbb{R}$, que é a equação vectorial de r.

ii. Equações cartesianas da recta s: $\begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$; $r \cap s = \varnothing$, donde, as rectas são enviezadas.

2.17 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$ $\quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

2.18 (a) $a \neq 0 \wedge b \neq 2 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B) = n \Rightarrow SPD$
$a = 0 \wedge b = 2 \Rightarrow r(A) = 1 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 2$
$a = 0 \wedge b \neq 2 \Rightarrow r(A) = 1 \neq r(A|B) = 2 \Rightarrow SI$
$a \neq 0 \wedge b = 2 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) < n = 3 \Rightarrow SPI,\ GI = 1$

(b) i. Solução: $(1, -1, 1)$

ii. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

iii. $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.19 (a) $X = 1/3(4B - 2A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4/3 & -2 & 4 \\ 2/3 & -2/3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $X = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $X = (A + B)A^{-1} = I + BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -3 & 3/2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$

(d) $X = (C + I)^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 10 \\ 4 & -3 & -5 \\ -6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

2.20 $X = I - A^T$.

2.21 (a) O sistema é SPD, porque, como a matriz A é invertível, temos $r(A)$ igual ao número de linhas e/ou colunas de A (igual ao número de incógnitas). Como a matriz ampliada $[A|B]$ tem o mesmo número de linhas de A então $r(A|B) = r(A)$ =número de incógnitas.

(b) $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

2.22 (a) $X = 1/2(A^{-1} - 3I_2) = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$

(b) $X = 1/3\, BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $X = 3AB^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

(d) $X = (A + I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

2.23 (a) B^{-1}

(b) CD^{-1}