

## 5 - Aplicações Lineares

5.1 Verifique se as seguintes aplicações são ou não lineares:

- (a)  $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f_1(x, y) = (x - y, 2y, 1)$
- (b)  $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f_2(x, y) = (x - y, 2y, 2x + 3y)$
- (c)  $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_3(x, y) = |x + y|$
- (d)  $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f_4(x, y, z) = (2z + 1, x + 2y)$
- (e)  $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f_5(x, y, z) = (xy, 2y, x + z)$
- (f)  $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f_6(x, y) = (x^2, 0)$
- (g)  $f_7 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_7(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix}$
- (h)  $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f_8(a, b) = (2a - b, a + 6b)$
- (i)  $f_9 : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $f_9 \left( \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + w & y - z \\ 0 & 2z + w \end{bmatrix}$
- (j)  $f_{10} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$  tal que  $f_{10} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3b \\ a^2 \\ c - d \end{bmatrix}$
- (k)  $f_{11} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f_{11} \left( \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = (x + w, y + z)$
- (l)  $f_{12} : \mathbb{R}^{n \times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$  tal que  $f_{12}(X) = AX$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

5.2 Considere a aplicação linear  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$f(1, 0, 0, 0) = (2, -1), \quad f(0, 1, 0, 0) = (-2, 0), \quad f(0, 0, 1, 0) = (3, -2) \quad \text{e} \quad f(0, 0, 0, 1) = (1, 1).$$

Determine a expressão geral de  $f$  e calcule  $f(1, 3, 4, -2)$ .

5.3 Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, 3, -2), \quad T(1, 1, 0) = (4, 1, 4) \quad \text{e} \quad T(1, 1, 1) = (5, 1, -7).$$

Determine a expressão geral de  $T$  e calcule  $T(2, 0, 1)$ .

5.4 Considere a função linear  $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$g(-2, 1) = (-1, 2, 0) \quad \text{e} \quad g(1, 3) = (0, -3, 5).$$

Determine a expressão geral de  $g$  e calcule  $g(2, -3)$ .

5.5 Determine o Núcleo e a Imagem das aplicações lineares do exercício 1.

5.6 Considere a aplicação linear  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$ . Quais dos seguintes vetores:

- (a)  $(1, -4), (5, 0), (-3, 12)$  pertencem à Imagem de  $f$ ?
- (b)  $(5, 10), (3, 2), (1, 1)$  pertencem ao Núcleo de  $f$ ?

5.7 Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$T(x, y, z, w, t) = (x - z + 3w - t, x + 3w - t, 2x - z + 5w - t, -z + w)$$

- (a) Calcule a imagem do vetor  $(1, 0, -1, 2, 3)$ .
- (b) Determine a dimensão e uma base dos subespaços  $\text{Im}(T)$  e  $\text{Nuc}(T)$ .
- (c) Defina analiticamente os subespaços Imagem e Núcleo de  $T$ .
- (d)  $T$  é sobrejetiva? E injetiva? Justifique.
- (e) Determine todos os vetores que têm por imagem o vetor  $(2, 2, 4, 1)$ .

5.8 Defina analiticamente os subespaços Imagem e Núcleo da aplicação linear  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$g(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

Diga, justificando, se  $g$  é um automorfismo (endomorfismo bijetivo) de  $\mathbb{R}^3$ .

5.9 Dada a função linear  $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $h(x, y) = (y, 0)$ , prove que  $\text{Im}(h) = \text{Nuc}(h)$ .

5.10 Seja  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear. Prove que:

- (a) se  $n > m$  então  $f$  não é injetiva;
- (b) se  $n < m$  então  $f$  não é sobrejetiva;
- (c) se  $n = m$  então  $f$  é injetiva se e só se é  $f$  sobrejetiva.

5.11 Considere as transformações lineares  $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  e  $T_3 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tais que

$$T_1(x, y, z) = (x + y - z, -2x + z), \quad T_2(x, y) = (x, x + y, 0, -y) \quad \text{e} \quad T_3(x, y, z, w) = (x - w, 2y - z, 3x + z).$$

Defina as seguintes aplicações lineares:

- (a)  $T_2 \circ T_1$
- (b)  $T_3 \circ T_2$
- (c)  $T_1 \circ T_3$
- (d)  $T_1 \circ T_3 \circ T_2$
- (e)  $T_3 \circ T_2 \circ T_1$

5.12 Seja  $p$  a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ :

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } p(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Prove que:

- (a)  $p \circ p = p$ ;
- (b) a Imagem de  $p$  é um plano e calcule a sua equação geral;
- (c) o Núcleo de  $p$  é uma reta e calcule as suas equações reduzidas.

5.13 Prove que a aplicação linear  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - z, x + 2y - z)$  é:

- (a) bijetiva (injetiva e sobrejetiva);
- (b) invertível e defina a aplicação linear inversa de  $g$ .

5.14 Seja  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  a matriz canônica da aplicação linear  $T$ .

- (a) Calcule a dimensão e uma base da Imagem e do Núcleo de  $T$  para todos os valores reais de  $a$ .
- (b) Considere  $a = 1$ .
  - i. Prove que  $T$  não é injetiva e indique dois vetores que têm a mesma imagem.
  - ii. Determine todos os valores reais de  $k$  para os quais  $(1, 2, k)$  pertence à Imagem de  $T$ . Conclua, com base no resultado obtido, por que razão  $T$  não é sobrejetiva.

5.15 Sejam  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $f_C : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , as aplicações lineares cujas matrizes canônicas são, respetivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine as expressões gerais de  $f_A$ ,  $f_B$  e  $f_C$ .
- (b) Determine a característica e a nulidade de  $f_A$ ,  $f_B$  e  $f_C$ .
- (c) Justifique se  $f_A$ ,  $f_B$  e  $f_C$  são injetivas ou sobrejetivas.
- (d) Calcule uma base da Imagem e do Núcleo de  $f_A$ ,  $f_B$  e  $f_C$ .

5.16 Seja  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e considere o endomorfismo  $g$  de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  definido por

$$g(X) = AX - XA$$

- (a) Determine o Núcleo de  $g$  e indique uma base respetiva.
- (b) Determine a Imagem de  $g$  e exiba uma sua base.
- (c) Diga, justificando, se  $g$  é invertível.

5.17 Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  a aplicação linear tal que  $f(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b - c \\ 2b & a \end{bmatrix}$ .

- (a) Mostre que  $\text{Nuc} f = \{(0, 0, 0)\}$ ;
- (b) Justifique que  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \text{Im} f$ ;
- (c) Sem determinar  $\text{Im} f$ , justifique que  $f$  não é sobrejetiva;
- (d) Indique uma base de  $\text{Im} f$ .

5.18 Considere a aplicação linear  $h : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definida por

$$h\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & x + y \\ z + w & 2w \end{bmatrix}$$

- (a) Escreva a matriz de  $h$  em relação à base canônica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathcal{B}_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ .
- (b) Mostre que  $h$  é invertível e determine a expressão geral de  $h^{-1}$ .

5.19 Considere as aplicações lineares  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$f(2, 0, 0) = (2, 0), \quad f(0, 1, 0) = (2, 1) \quad \text{e} \quad (2, -1, 1) \in \text{Nuc} f$$

e  $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  é a respetiva matriz canónica.

- (a) Mostre que  $f(x, y, z) = (x + 2y, y + z)$ , para todo o  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- (b) Caracterize o Núcleo e a Imagem de  $g$ . Será  $g$  injetiva? E sobrejetiva? Justifique.
- (c) Determine  $(f \circ g)(x, y)$ , qualquer que seja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e mostre que  $f \circ g$  é um automorfismo de  $\mathbb{R}^2$ .

5.20 Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $h$  o endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  cuja matriz canónica é  $A$ .

- (a) Mostre que  $h$  é um automorfismo de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Escreva a matriz de  $h$  em relação à base  $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ .
- (c) Determine  $h^{-1}(x, y, z)$ , qualquer que seja  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

5.21 Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$ . Calcule a matriz de  $T$  relativamente à base:

- (a) canónica de  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$ .

5.22 Considere a função linear  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(x, y, z) = (2x - y, 2y - z)$ . Calcule a matriz de  $g$  relativamente às bases:

- (a) canónicas de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$  e  $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 1))$ .

5.23 Em  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , considere a base canónica,  $\mathcal{B}_c = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ , e o endomorfismo  $f$  cuja matriz canónica é

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine  $f \left( \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right)$  e  $f \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$ .
- (b) Seja  $\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$  uma nova base de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Determine  $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ .

5.24 Seja  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  a matriz canónica de uma aplicação linear  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ . Calcule:

- (a) a matriz de  $f$  relativamente às bases  $\mathcal{B} = ((1, 3), (-2, 4))$  e  $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0))$ ;
- (b)  $[f(1, 3)]$  e  $[f(-2, 4)]$ ;
- (c)  $[f(1, 3)]_{\mathcal{B}'}$  e  $[f(-2, 4)]_{\mathcal{B}'}$ .

5.25 Seja  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  a matriz canónica de uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ .

- (a) Calcule a matriz de  $T$  relativamente à base ordenada  $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 0))$ ;

- (b)  $[T(1, -1, 0)]$ ,  $[T(1, 0, -1)]$  e  $[T(1, 0, 0)]$ ;  
 (c)  $[T(1, -1, 0)]_{\mathcal{B}}$ ,  $[T(1, 0, -1)]_{\mathcal{B}}$  e  $[T(1, 0, 0)]_{\mathcal{B}}$ .

5.26 Considere a matriz  $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = ((1, 3), (2, -1))$  e  $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

Calcule a matriz canónica e defina a aplicação linear  $f$ .

5.27 Considere a matriz  $M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$  e  $\mathcal{B}' = ((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 0))$ . Calcule a matriz canónica e defina a função linear  $g$ .