

Soluções - 6 - Valores e vectores próprios. Diagonalização.

- 6.1 (a) $a = -5/7$;
 (b) $f(-3, -3, -3) = (-6, -6, -6) = 2(-3, -3, -3)$, logo o vector $(-3, -3, -3)$ é vector próprio de f associado ao valor próprio 2.
- 6.2 (a) Vectores próprios de g associados ao valor próprio 0 : $\vec{v} = (-z, -z, z)$, $z \neq 0$;
 (b) $E_0 = \langle (-1, -1, 1) \rangle (= \text{Nuc}(g))$.
- 6.3 (a) Existem 3 valores próprios distintos, $-1, 1$ e 3 logo existem 3 vectores próprios linearmente independentes e assim existe uma base de \mathbb{R}^3 constituída por vectores próprios de T .
 (b) Seja \mathcal{B}_{vp} uma base de \mathbb{R}^3 constituída por vectores próprios de T ;

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}, \mathcal{B}_{vp}) = [B]^{-1} M_T [B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

 (c) Tendo em conta que T tem 3 valores próprios distintos, existem $3! = 6$ matrizes diagonais diferentes semelhantes a M_T .
- 6.4 (a) $\mathcal{B}_{vp} = ((2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -2))$ é uma base de \mathbb{R}^3 constituída por vectores próprios de h .
 (b) $M(h; \mathcal{B}_{vp}, \mathcal{B}_{vp}) = [B]^{-1} M_h [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$
- 6.5 (a) $\dim(E_2) = 1$; $\{(1, 0, 0)\}$ é uma base de E_2 .
 (b) 2 e -3 são os valores próprios de T ; $m.g.(2) + m.g.(-3) = \dim(E_2) + \dim(E_{-3}) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, logo, não existe uma base de \mathbb{R}^3 constituída por vectores próprios de T e assim T não é diagonalizável.
- 6.6 (a) -3 é um valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ d & 1 \end{bmatrix}$ sse $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ d & 4 \end{vmatrix} = 0$ sse $d = 5$.
 (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 2d+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 4 \wedge d = 3/2.$
- 6.7 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \wedge a+b = 3$
 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 \\ -2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_2 = 3 \wedge -2a+b = 3$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$$

$$6.8 \quad g(1,3) = (2,6) \Rightarrow g(1,3) = 2(1,3) \Rightarrow g^{-1}(g(1,3)) = g^{-1}(2(1,3)) \Rightarrow (1,3) = 2g^{-1}(1,3) \\ \Rightarrow g^{-1}(1,3) = \frac{1}{2}(1,3).$$

$$6.9 \quad h(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \Rightarrow h^{-1}(h(\vec{v})) = h^{-1}(\lambda \vec{v}) \Rightarrow \vec{v} = \lambda h^{-1}(\vec{v}) \Rightarrow h^{-1}(\vec{v}) = \frac{1}{\lambda} \vec{v}.$$

6.10 (a) $T(0,1,0) = (0,-3,0) \Rightarrow T(0,1,0) = (-3)(0,1,0)$. Donde, -3 é um valor próprio de T e $(0,1,0)$ um vector próprio associado ao mesmo.

$$(b) \quad |M_T - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) \\ |M_T - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (-3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \vee \lambda = 3 \vee \lambda = -1 \\ \text{m.a.}(-3) = \text{m.a.}(-1) = \text{m.a.}(3) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(-3) = \text{m.g.}(-1) = \text{m.g.}(3) = 1$$

Como $\text{m.g.}(-3) = 1$ e $(0,1,0) \in E_{-3}$, $E_{-3} = \langle (0,1,0) \rangle$.

$$(M_T - (-1)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = -x \wedge y = 0. \text{ Donde, } E_{-1} = \langle (1,0,-1) \rangle$$

$$(M_T - 3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow z = x \wedge y = 0. \text{ Donde, } E_3 = \langle (1,0,1) \rangle$$

(c) Como $\lambda = 0$ não é valor próprio de T , $\text{Nuc}(T) = \{(0,0,0)\}$, logo, T é bijectiva [alternativamente, $r(M_T) = 3 \Rightarrow \dim \text{Im}(T) = 3 \Rightarrow \dim \text{Nuc}(T) = 0$]

$$(d) \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6.11 \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6.12 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow \\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6.13 \quad E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : x = 0 \wedge y - z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} : y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow \\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.14 $E_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\} = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$

(a) $\dim E_0 = \text{m.g.}(0) = 1$ e $\dim E_1 = \text{m.g.}(1) = 2$. Por se tratar de um endomorfismo de \mathbb{R}^3 , o polinómio característico de f tem grau 3 e, tendo em conta os valores próprios de f , com as raízes 0 e 1. Donde, $p(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^2$.

(b) $\text{m.g.}(0) + \text{m.g.}(1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donde, f é diagonalizável. Uma base de \mathbb{R}^3 relativamente à qual a matriz de f é diagonal D é formada por vectores próprios de f .

Por exemplo, $\mathcal{B}_{vp} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$. Relativamente a esta, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.15

6.16 (a) $\text{m.a.}(0) = 2$, logo, $\text{m.g.}(0) = 1$ ou $\text{m.g.}(0) = 2$;

$\text{m.a.}(1) = 1$, donde, $\text{m.g.}(1) = 1$;

$\text{m.a.}(2) = 3$, logo, $\text{m.g.}(2) = 1$, $\text{m.g.}(2) = 2$ ou $\text{m.g.}(2) = 3$;

(b) A é diagonalizável sse $\text{m.g.}(\lambda) = \text{m.a.}(\lambda)$, com $\lambda \in \{0, 1, 2\}$. Donde, $\dim(E_0) = 2$, $\dim(E_1) = 1$ e $\dim(E_2) = 3$.

6.17 (a) $\text{m.a.}(2) = 2 \neq 1 = \text{m.g.}(2)$, logo, a matriz A não é semelhante a uma matriz diagonal;

(b) $\text{m.a.}(1) = 1 = \text{m.g.}(1)$; $\text{m.a.}(-1) = 1 = \text{m.g.}(-1)$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\text{m.a.}(3) = 1 = \text{m.g.}(3)$; $\text{m.a.}(2) = 2 \neq 1 = \text{m.g.}(2)$, por isso, a matriz C não é semelhante a uma matriz diagonal;

(d) $\text{m.a.}(3) = 2 = \text{m.g.}(3)$; $\text{m.a.}(2) = 1 = \text{m.g.}(2)$; $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(e) $\text{m.a.}(-2) = 1 = \text{m.g.}(-2)$; $\text{m.a.}(-1) = 1 = \text{m.g.}(-1)$; $\text{m.a.}(1) = 2 = \text{m.g.}(1)$;

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}EP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$