

# Mô hình hóa và điều khiển quadcopter bám quỹ đạo tự động

Trương Đạt Thành<sup>1</sup>, Lê Thành Khương<sup>1</sup>, Nguyễn Trần Minh Kha<sup>1</sup>, Trương Quốc Trí<sup>2</sup>  
và Trương Quang Trí<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP. HCM

<sup>2</sup> Trường Đại học Văn Lang

\*Email: [tri.truongquang@hcmute.edu.vn](mailto:tri.truongquang@hcmute.edu.vn)

**Tóm tắt.** Bài báo trình bày mô hình động lực học của quadcopter có kể đến sự sai lệch giữa khối tâm và tâm hình học cũng như ảnh hưởng của hiệu ứng gyroscope do cánh quạt gây ra. Dựa trên mô hình động lực học, luật điều khiển được thiết kế để điều khiển quadcopter bám quỹ đạo cho trước. Trong việc mô hình hóa bài toán, quaternion được sử dụng để biểu diễn hướng của quadcopter nhằm tránh hiện tượng suy biến (Gimbal Lock) như thường gặp khi sử dụng phương pháp Euler. Phương trình vi phân chuyển động của quadcopter được xây dựng dựa trên phương trình Newton-Euler. Sau đó, phương pháp hình học vi phân được sử dụng đối với mô hình động học để định nghĩa hàm Lyapunov nhằm thiết kế luật điều khiển hướng cho quadcopter. Đồng thời, dựa trên mô hình động lực học đã dẫn ra, gia tốc gốc của quadcopter được điều khiển bằng phương pháp INDI (Incremental Nonlinear Dynamic Inversion). Phương pháp INDI được chọn vì bộ điều khiển khi đó sẽ có tính bền vững với nhiễu và sai lệch của các tham số mô hình. Ngoài ra, mô hình động lực học của quadcopter cũng được sử dụng trong phương pháp phân tích hệ phẳng để thiết lập mối quan hệ đại số giữa quỹ đạo cho trước và vận tốc gốc mong muốn của quadcopter nhằm nâng cao chất lượng bám quỹ đạo. Đáp ứng của hệ thống, tính bền vững và hiệu quả của các luật điều khiển được kiểm chứng thông qua mô hình mô phỏng được xây dựng trên Simulink/Matlab.

**Từ khóa:** Động lực học, hệ phẳng, INDI, hình học vi phân, quaternion.

## 1. Mở đầu

Bài báo tập trung vào vấn đề mô hình hóa và điều khiển quadcopter bám quỹ đạo tự động. Đã có một số nghiên cứu liên quan, trong đó, với hướng tiếp cận cổ điển, luật điều khiển được thiết kế dựa trên mô hình tuyến tính hóa của phương trình chuyển động quanh trạng thái mà quadcopter có các góc roll – pitch là nhỏ [1]. Với hướng tiếp cận hiện đại, kỹ thuật học máy cũng đã được sử dụng để nhận dạng mô hình động lực học của quadcopter thông qua dữ liệu bay thử công. Sau đó, kỹ thuật học tăng cường (reinforcement learning) được sử dụng để huấn luyện điều khiển quadcopter bám quỹ đạo trên mô hình mô phỏng đã nhận dạng được nhằm cải thiện được chất lượng điều khiển [2, 3].

Ngoài hai hướng trên, hướng tiếp cận của điều khiển tối ưu cũng đã trình bày trong một số nghiên cứu. Ở đó, luật điều khiển được thiết lập để tối ưu hàm mục tiêu với ràng buộc là mô hình động lực học và dựa trên phương pháp điều khiển dự báo mô hình MPC (Model Predictive Control). Kết quả cho thấy cách tiếp cận này đạt được hiệu quả cao hơn so với PID [4, 5].

Một cách tiếp cận khác trong hướng điều khiển tối ưu này là dựa vào mô hình động học quaternion của quadcopter. Khi đó, trong bài toán điều khiển, hàm Lyapunov được định nghĩa là khoảng cách ngắn nhất giữa vị trí kỳ vọng và vị trí thực tế trên đa tạp thông qua công cụ hình học vi phân. Với cách định nghĩa hàm Lyapunov như vậy, các ràng buộc trên đa tạp sẽ không bị bỏ qua, giúp cho việc mô tả bài toán điều khiển được chính xác hơn cách định nghĩa khoảng cách thông thường [6]. Trong [6], bộ điều khiển hướng theo lý thuyết nhóm Lie kết hợp bộ điều khiển dự báo trễ Smith [7] cho thấy được tính bền vững cao trước tác động của nhiễu và sai lệch mô hình. Quaternion cũng được sử dụng với kỹ thuật điều khiển thích nghi theo mô hình mẫu (MRAC), kết quả cho thấy hệ thống có tính ổn định cao dù có các thành phần không chắc chắn trong tham số của mô hình động lực học [8].

Ngoài phương pháp thiết kế luật điều khiển dựa trên mô hình đã kể trên, một số phương pháp tiếp cận dựa vào cảm biến cũng được sử dụng, trong đó có phương pháp INDI (Incremental Nonlinear

Dynamic Inversion) [9, 10]. INDI được phát triển dựa trên phương pháp hồi tiếp tuyến tính hóa [11, 12] bằng việc xấp xỉ tuyến tính phương trình động lực học quanh điểm làm việc. Các thành phần chưa mô hình hóa và không chắc chắn tồn tại trong mô hình được bổ sung thông qua các giá trị gia tốc góc đo được từ các cảm biến. Từ đó, bộ điều khiển PID được thiết kế nhằm điều khiển bền vững với nhiễu và sai lệch mô hình trong điều kiện gió tác động mạnh vào quadcopter và hư hỏng motor [13, 14, 15].

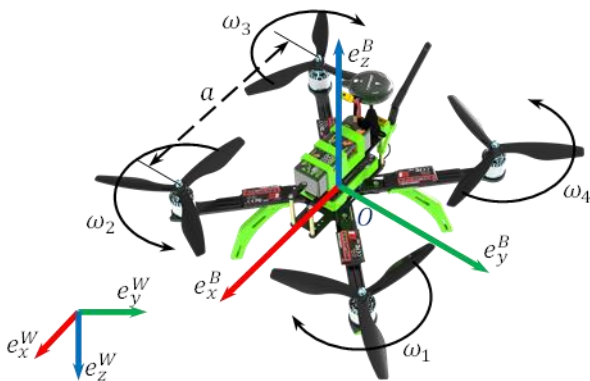
Thêm nữa, [16] chỉ ra rằng quadcopter là hệ phẳng, khi đó từ một quỹ đạo phẳng cho trước, vận tốc góc của quadcopter phải được điều khiển theo một quy luật phù hợp để tăng chất lượng bám quỹ đạo. Mô hình này được tiếp tục cải tiến bằng cách kể đến hiện tượng lực cản do gió trong mô hình động lực học [17]. Nhờ vào tính chất này, mà bài toán bám quỹ đạo có thể được thực hiện như bài toán bám trạng thái [18, 19]. Ngoài ra, để tăng tính bền vững khi quadcopter di chuyển với tốc độ cao, hồi tiếp vận tốc góc từ bốn motor thông qua encoder quang nhằm kiểm soát hoàn toàn các cơ cấu chấp hành [20].

Trong các nghiên cứu trên, hiện tượng sai lệch trọng tâm chưa được đề cập, trong khi hiện tượng này ảnh hưởng lớn đến khả năng bám quỹ đạo của quadcopter trong quá trình vận chuyển hàng hóa [24]. Bài báo [24]-mô hình hóa hiện tượng sai lệch trọng tâm, mô tả hướng thông qua tham số Euler và sử dụng phương pháp cuộn chiếu (back stepping) thiết kế luật điều khiển. Tuy nhiên, một cách tổng quát hơn, bài báo này dẫn ra mô hình động lực học của quadcopter có kể đến hiện tượng sai lệch trọng tâm, hiệu ứng gyroscope do cánh quạt gây ra, hiện tượng trễ ở cơ cấu chấp hành (bốn motor) và đồng thời sử dụng quaternion cho việc biểu diễn hướng của quadcopter. Sử dụng phương pháp trong [6] với luật điều khiển dựa trên cơ sở của phương pháp hình học vi phân, kết hợp phương pháp INDI [9, 10] vào mô hình động lực học, cùng với phân tích hệ phẳng [16] nhằm ràng buộc tín hiệu điều khiển vận tốc góc đầu vào để nâng cao chất lượng bám quỹ đạo. Nội dung của cách tiếp cận này được trình bày chi tiết trong bài báo như sau: mục 2 trình bày mô hình động lực học và mô hình động học của quadcopter trên cơ sở quaternion; mục 3 chỉ ra rằng quadcopter là hệ phẳng để tìm ra mối quan hệ đại số giữa quỹ đạo và vận tốc góc; mục 4 trình bày thiết kế các luật điều khiển dựa trên phương pháp phân tích Lyapunov và INDI; mục 5 trình bày mô phỏng trên phần mềm Simulink/Matlab nhằm kiểm chứng đáp ứng của quadcopter dưới sự điều khiển của các luật điều khiển đã trình bày.

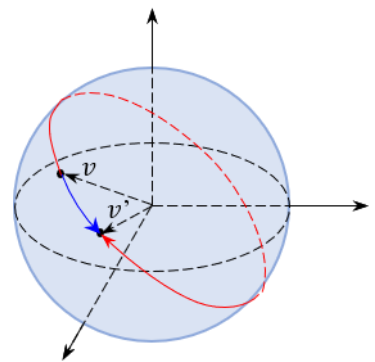
## 2. Mô hình động lực học

### 2.1. Mô tả hướng và động lực học của quadcopter

Mô hình động học của quadcopter được mô tả như trên Hình 1. Quadcopter được quan sát trong hệ quy chiếu cố định  $\mathbf{e}^W$  với các vector cơ sở  $\{\mathbf{e}_x^W, \mathbf{e}_y^W, \mathbf{e}_z^W\}$  và hệ quy chiếu động  $\mathbf{e}^B$  gắn chặt vào quadcopter với các vector cơ sở  $\{\mathbf{e}_x^B, \mathbf{e}_y^B, \mathbf{e}_z^B\}$  có gốc tọa độ  $O$  là tâm hình học của khung được mô tả như Hình 1.



Hình 1. Mô hình động học quadcopter.



Hình 2. Hiện tượng Double Cover.

Hướng của quadcopter được mô tả dưới dạng quaternion  $\mathbf{q} = [q_s \quad \mathbf{q}_v^T]^T \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$  [8], trong đó,  $q_s$  là thành phần vô hướng,  $\mathbf{q}_v$  là thành phần vector. Cấu trúc đại số  $\mathbf{q}$  này mô tả phép quay một vector từ  $\mathbf{e}^W$  sang  $\mathbf{e}^B$ . Ngoài ra,  $\mathbf{q}$  còn liên hệ với ma trận cosine chỉ hướng  $\mathbf{R}$  như một ánh xạ  $\mathbf{R}: S^3 \rightarrow SO(3)$  [22]:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = 2\tilde{\mathbf{q}}_v\tilde{\mathbf{q}}_v + 2q_s\tilde{\mathbf{q}}_v + \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (1)$$

Trong đó,  $(\tilde{\cdot}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sao cho:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Cho trước hai quaternion đơn vị  $\mathbf{q}$  và  $\mathbf{p}$  thì tích Hamilton giữa chúng có dạng:

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_s p_s - \mathbf{q}_v^T \mathbf{p}_v \\ p_s \mathbf{q}_v + q_s \mathbf{p}_v + \tilde{\mathbf{q}}_v \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \quad (3)$$

Do đó, nếu phần tử đơn vị trong  $S^3$  là  $\mathbf{q}_I = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  và phần tử liên hợp của  $\mathbf{q}$  là  $\mathbf{q}^* = [q_s \quad -\mathbf{q}_v^T]^T$  thì phần tử nghịch đảo của  $\mathbf{q}$  là  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*/|\mathbf{q}|$  thỏa mãn  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}_I$ . Lúc này, một vector  $\mathbf{v}$  có các thành phần của nó trong  $\mathbf{e}^W$  và  $\mathbf{e}^B$  sẽ có mối liên hệ như sau:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^W \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}^B \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}^{-1} \quad (4)$$

Khi sử dụng quaternion, ta chú ý đến sự tồn tại của hiện tượng Double Cover [23],  $\mathbf{q}$  và  $-\mathbf{q}$  mô tả cùng một hướng của vật rắn. Như Hình 2 cho thấy, hai quỹ đạo khả dĩ ngắn nhất để quay vector  $\mathbf{v}$  thành vector  $\mathbf{v}'$ , tuy nhiên quỹ đạo khả dĩ ngắn nhất là đường gạch đứt. Vì vậy, sử dụng một hàm rẽ nhánh để sao cho luôn chọn quỹ đạo khả dĩ ngắn nhất

$$\mathbf{q}^+ = \begin{cases} \mathbf{q} & q_s \geq 0 \\ -\mathbf{q} & q_s < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Lúc này, mô hình hóa động lực học của quadcopter được mô tả thông qua định luật II Newton và phương trình Newton – Euler có kể đến hiện tượng tâm hình học và trọng tâm không trùng nhau như sau:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (6.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{c/o} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{c/o}) = \mathbf{g} + \mathbf{c} \begin{bmatrix} 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \quad (6.3)$$

$$[\mathbf{I}_o + m\tilde{\mathbf{r}}_{c/o}\tilde{\mathbf{r}}_{c/o}]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{I}_o + m\mathbf{r}_{c/o}\mathbf{r}_{c/o}^T]\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_{i/o} - \mathbf{r}_{c/o}) \times \mathbf{f}_i - \boldsymbol{\tau}_g \quad (6.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{Y}(\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}) \quad (6.5)$$

Trong đó,  $\mathbf{r} = [x \quad y \quad z]^T$  là tọa độ tâm  $O$ ,  $\mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$  là vận tốc tâm  $O$ ,  $\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad -9.81]^T$  là vector gia tốc trọng trường, quaternion miêu tả hướng của vật rắn  $\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T$  là vector vận tốc góc của khung khai triển trong hệ quy chiếu  $\mathbf{e}^B$ ,  $\mathbf{I}_o$  là tensor quán tính bậc 2 của khung khai triển trong hệ quy chiếu  $\mathbf{e}^B$ , vector đại số  $\mathbf{r}_{c/o} = [r_x \quad r_y \quad r_z]^T$  là vector tọa độ trọng tâm  $C$  đối với tâm hình học  $O$ , tổng lực nâng theo phương  $z$  trên

một đơn vị khối lượng là  $c = m^{-1}(f_1^z + f_2^z + f_3^z + f_4^z)$ .  $\tau_g$  là momen do hiệu ứng gyroscope khi cánh quạt quay sinh ra [13]:

$$\tau_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{rz} & J_{rz} & -J_{rz} & J_{rz} \end{bmatrix} \dot{\omega} + J_{rz} \begin{bmatrix} -\Omega_y & \Omega_y & -\Omega_y & \Omega_y \\ \Omega_x & -\Omega_x & \Omega_x & -\Omega_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \omega \quad (7)$$

Vận tốc quay của bốn motor được thể hiện bởi vector  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4]^T$ , trong đó,  $\omega_i$  là vận tốc góc của motor thứ  $i$  được đánh số tương ứng như trên Hình 1.

## 2.2. Lực nâng và động lực học của ESC, motor và cánh quạt

Motor thứ  $i$  quay với vận tốc góc  $\omega_i$  sẽ làm cho cánh quạt sinh ra lực nâng  $f_i$ , theo lý thuyết chong chóng [21], ta có:

$$f_i = C_T \rho A r_i^2 \omega_i^2 \quad (8)$$

Bên cạnh tạo ra lực nâng, khi cánh quạt quay, một momen cản sẽ tạo ra chống lại chuyển động quay của cánh quạt. Moment cản  $M_i$  này sẽ tác dụng lên quadcopter thông qua cánh quạt. Trong thực tế, lực nâng  $f_i$  (8) và tương tự momen  $M_i$  sinh ra bởi cánh quạt được viết lại dưới dạng:

$$f_i = c_T \omega_i^2 \quad M_i = c_M \omega_i^2 \quad (9)$$

Trong đó,  $c_T$  và  $c_M$  là các hằng số có thể xác định từ thực nghiệm. Lúc đó, tín hiệu điều khiển tác dụng vào hệ thống có thể chọn là  $u = [c \ \tau^T]^T$ , trong đó  $a$  là chiều dài khung như trên Hình 1.

$$\begin{bmatrix} c \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1}c_T & m^{-1}c_T & m^{-1}c_T & m^{-1}c_T \\ ac_T & -ac_T & -ac_T & ac_T \\ ac_T & ac_T & -ac_T & -ac_T \\ -c_M & c_M & -c_M & c_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

## 3. Phân tích hệ phẳng

Ở mục này, vì quadcopter là hệ phẳng [6], nên ta có thể tìm được phương trình đại số liên hệ giữa đạo hàm các cấp của quỹ đạo  $r$  mong muốn và vận tốc góc  $\Omega$  của quadcopter. Chính nhờ đặc điểm này, ta có thể chuyển bài toán bám quỹ đạo thành bài toán bám trạng thái. Nếu trọng tâm trùng với tâm hình học thì phương trình (6.2) trở thành:

$$\dot{v} = g + ce_z^B \quad (11)$$

Đạo hàm hai vế của (11) với lưu ý rằng  $e_z^B$  là một vector quay, sau đó tiếp tục nhân vô hướng hai vế với  $e_z^B$  ta được:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= -\frac{1}{c} h e_y^{z,B} \\ \Omega_y &= \frac{1}{c} h e_x^{z,B} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Omega_z = 0$$

$$h = \dot{v} - (\ddot{v} e_z^B) e_z^{z,B}$$

Để tìm  $\dot{\Omega}$ , đạo hàm cấp hai hai vế của (11) và sau đó tiếp tục nhân vô hướng hai vế với  $e_z^B$  ta được:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_x &= -\frac{1}{c} k e_y^{z,B} \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{1}{c} k e_x^{z,B} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\Omega}_z = 0$$

$$k = \ddot{v} - [\ddot{v}e_z^{z,B} + c\Omega^2]e_z^{z,B} - 2(\ddot{v}e_z^B) + c\Omega^2 e_z^{z,B}$$

Như vậy, với một quỹ đạo tham chiếu cho trước  $\mathbf{r}_{\text{ref}}$  cùng với đạo hàm các cấp  $\mathbf{r}_{\text{ref}}^{(1)}, \mathbf{r}_{\text{ref}}^{(2)}, \mathbf{r}_{\text{ref}}^{(3)}, \mathbf{r}_{\text{ref}}^{(4)}$  được xác định từ (12) và (13), ta tính được  $\mathbf{\Omega}_{\text{ref}}$  và  $\dot{\mathbf{\Omega}}_{\text{ref}}$  để yêu cầu quadcopter phải đạt được.

### 3. Thiết kế luật điều khiển

Vì hệ thống quadcopter có thể được chia ra làm hai hệ thống con: hệ thống liên quan đến vị trí  $\mathbf{v}$  và hệ thống liên quan đến hướng  $\mathbf{\Omega}$ . Do đó, kiến trúc điều khiển cho quadcopter có thể được phân tầng gồm bộ điều khiển vị trí và bộ điều khiển gia tốc góc như Hình 3.

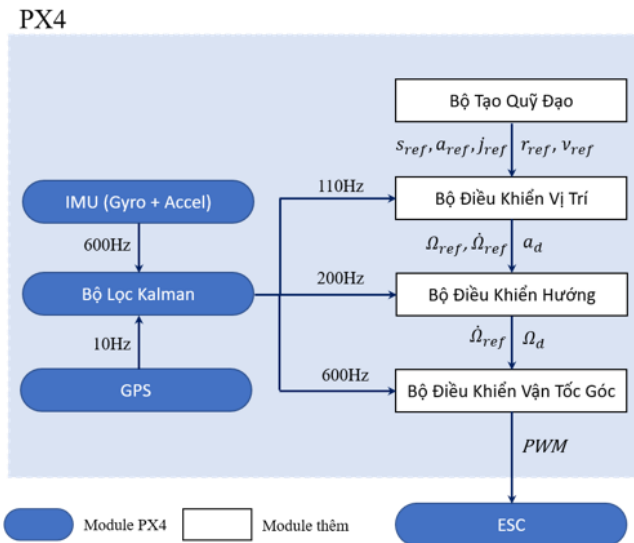
#### 3.1. Bộ điều khiển vị trí

Để quadcopter bám theo được  $\mathbf{r}_{\text{ref}}$ , từ (12) coi  $\mathbf{a}_d = c\mathbf{e}_z^B$  là tín hiệu điều khiển, áp dụng phương pháp hồi tiếp tuyến tính hóa, ta có quy luật thay đổi của  $\mathbf{a}_d$  như sau:

$$\mathbf{a}_d = \mathbf{P}(\mathbf{r}_{\text{ref}} - \hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{D}(\mathbf{v}_{\text{ref}} - \hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{a}_{\text{ref}} - \mathbf{g} \quad (14)$$

$$c_d = \mathbf{a}_d \widehat{\mathbf{e}}_z^B \quad (15)$$

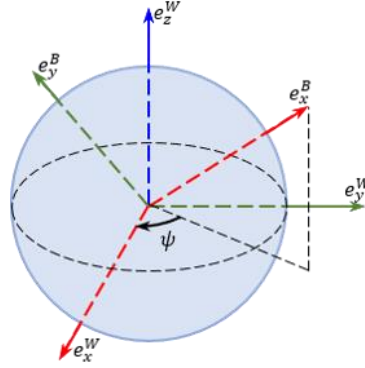
Trong đó,  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{e}}_z^B$  là các giá trị ước lượng nhận được từ bộ lọc Kalman như trong Hình 3. Ngoài ra,  $\mathbf{\Omega}_{\text{ref}}, \dot{\mathbf{\Omega}}_{\text{ref}}$  được tính như (12), (13) cùng với  $\mathbf{a}_d, c_d, \psi$  (là góc định hướng). Các thông tin này sẽ được gửi cho bộ điều khiển gia tốc góc.



Hình 3. Kiến trúc bộ điều khiển được nhúng trong mạch điều khiển bay thương mại PixHawk 4.

#### 3.2. Bộ điều khiển gia tốc góc

Hướng của  $\mathbf{a}_d$  cùng với góc  $\psi$  như Hình 4 là đủ để dựng hướng mong muốn  $\mathbf{q}_d$ . Vì chuyển động quay quanh trục  $\mathbf{e}_z^B$  không ảnh hưởng đến chuyển động tịnh tiến của quadcopter, nên ta muốn  $\mathbf{e}_z^B$  phải trùng với hướng của  $\mathbf{a}_d$ . Thực tế, hệ số  $c_T \gg c_M$ , nên để tăng nhanh đáp ứng của hệ thống thì ta phải điều chỉnh  $\mathbf{e}_z^B$  thông qua việc ưu tiên tạo ra momen  $\tau_x$  và  $\tau_y$  hơn so với  $\tau_z$ . Do việc tạo momen  $\tau_x$  và  $\tau_y$  dễ dàng thực hiện được thông qua điều khiển sự chênh lệch lực nâng của các rotor. Trong khi đó, việc tạo momen thông qua sự chênh lệch momen quay của các rotor là khó hơn, do các giá trị này thường nhỏ hơn nhiều so với momen  $\tau_x$  và  $\tau_y$ .



Hình 4. Định nghĩa góc định hướng heading  $\psi$ .

Để dựng hướng mong muốn  $\mathbf{q}_d$ , trước tiên, ta gọi  $\varphi, \theta$  là hai tham số góc Euler chưa biết. Lúc này,  $\mathbf{e}_z^{\mathbf{B}^W}$  là vector  $\mathbf{e}_z^{\mathbf{B}}$  trong hệ quy chiếu  $\mathbf{e}^{\mathbf{W}}$  và  $\mathbf{e}_z^{\mathbf{B}^B} = [0 \ 0 \ 1]^T$  là vector  $\mathbf{e}_z^{\mathbf{B}}$  trong hệ quy chiếu  $\mathbf{e}^{\mathbf{B}}$ . Ta có:

$$\mathbf{e}_z^{\mathbf{B}^W} = \frac{\mathbf{a}_d}{|\mathbf{a}_d|} = \mathbf{Rot}_z(\psi) \mathbf{Rot}_y(\varphi) \mathbf{Rot}_x(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Để giải tìm  $\varphi$ , từ (16) ta có:

$$\mathbf{e}_K = \mathbf{Rot}_z(\psi)^T \frac{\mathbf{a}_d}{|\mathbf{a}_d|} = \mathbf{Rot}_y(\varphi) \mathbf{Rot}_x(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{e_K^x}{e_K^z} \right)$$

Với  $\varphi$  vừa tìm được, tương tự, từ (16) ta có:

$$\mathbf{e}_L = \mathbf{Rot}_y(\varphi)^T \mathbf{Rot}_z(\psi)^T \frac{\mathbf{a}_d}{|\mathbf{a}_d|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\theta = \text{atan2}(-e_L^y, e_L^z)$$

Khi đó, hướng mong muốn  $\mathbf{q}_d$  có dạng là:

$$\mathbf{q}_d = \mathbf{q}^+(\theta, \varphi, \psi) \quad (19)$$

Sai lệch giữa hướng mong muốn  $\mathbf{q}_d$  và hướng hiện tại ước lượng được  $\hat{\mathbf{q}}$  được định nghĩa bởi [24]:

$$\mathbf{q}_e = \hat{\mathbf{q}}^{-1} \otimes \mathbf{q}_d \quad (20)$$

Trong đó, theo [24]:

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_{xy} \otimes \mathbf{q}_z \quad (21)$$

Với:

$$\mathbf{q}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \mathbf{n}^B \end{bmatrix} \quad \alpha = \cos^{-1} \left( \widehat{\mathbf{e}}_z^{\mathbf{B}} \cdot \frac{\mathbf{a}_d}{|\mathbf{a}_d|} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}^B \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n}^W \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q} \quad \mathbf{n}^W = \frac{\mathbf{e}_z^B \times \frac{\mathbf{a}_d}{|\mathbf{a}_d|}}{\|\mathbf{e}_z^B \times \frac{\mathbf{a}_d}{|\mathbf{a}_d|}\|} \quad (21)$$

$$\mathbf{q}_z = \mathbf{q}_{xy}^{-1} \otimes \mathbf{q}_e = \left[ \cos \frac{\beta}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \sin \frac{\beta}{2} \right]^T$$

Để ưu tiên  $\tau_x$  và  $\tau_y$  cần hiệu chỉnh  $\mathbf{q}_e$ , bằng cách giảm độ chính xác của  $\mathbf{q}_z$  như sau

$$\mathbf{q}_z^{\text{adjust}} = \left[ r \cos \frac{\beta}{2} \quad 0 \quad 0 \quad r \sin \frac{\beta}{2} \right]^T \quad (22)$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_{xy} \otimes \mathbf{q}_z^{\text{adjust}}$$

Trong đó  $r \in [0,1]$ , khi  $r = 0$  thì lúc này  $\mathbf{q}_d$  sẽ nằm hoàn toàn về  $\mathbf{q}_{xy}$  ưu tiên quay góc Roll – Pitch, khi  $r = 1$  thì lúc này  $\mathbf{q}_d$  sẽ được lấy chính xác.

Không giống như [25], định nghĩa hàm Lyapunov chỉ đơn thuần là bình phương độ lớn Euler của quaternion  $\mathbf{q}_e$ , làm cho thiếu hụt sự ràng buộc trên đa tạp. Tận dụng hiểu biết về hình học vi phân, quan sát đa tạp của hệ động học mô tả hướng của quadcopter bởi quaternion, kế thừa kết quả từ [8], ta có định nghĩa về khoảng cách ngắn nhất trên đa tạp (6), cùng với tính chất của nó

$$d(\mathbf{q}) = \log_v(\mathbf{q}) = \theta \mathbf{n} \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log_v(\mathbf{q})^2 = \mathbf{n}^T \log_v(\mathbf{q}) \quad (24)$$

Đến đây, từ động học sai số hướng  $\mathbf{q}_e$  như (25), ta định nghĩa hàm Lyapunov là bình phương khoảng cách ngắn nhất trên đa tạp như (26), kết hợp phương pháp phân tích Lyapunov ta có quy luật thay đổi của  $\dot{\mathbf{\Omega}}_e$  như (27).

$$\dot{\mathbf{q}}_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Omega}_e \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_d \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$V = \frac{1}{2} k_q \frac{d}{dt} \log_v(\mathbf{q})^2 + \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}_e^T \mathbf{\Omega}_e \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_e = -k_q \log_v(\mathbf{q}_e^+) - k_\omega \mathbf{\Omega}_e \quad (27)$$

Lúc này, nhiệm vụ đặt ra là tạo ra momen  $\tau$  tác động vào quadcopter thông qua 4 rotor sao cho cho sai số vận tốc góc  $\mathbf{\Omega}_e$  của quadcopter có quy luật như (27). Đây là một nhiệm vụ khó khăn trong thực tế lẫn trong lý thuyết, bởi vì tồn tại các thành phần không chắc chắn trong mô hình hệ thống (6) như khối lượng  $m$ , mô men quán tính  $\mathbf{J}_v$ , và độ sai lệch giữa tâm hình học  $O$  và trọng tâm  $C$ . Để khắc phục vấn đề này, phương pháp INDI [9] (phương pháp dựa vào cảm biến để bù sự không chắc chắn của mô hình) được sử dụng. Khi đó, quy luật thay đổi của momen ngoại lực  $\tau$  được thiết kế như (28)

$$\tau = \hat{\tau}_0 + \hat{\mathbf{J}}_v \cdot (\dot{\mathbf{\Omega}}_e + \dot{\mathbf{\Omega}}_d - \dot{\mathbf{\Omega}}) \quad (28)$$

$$\hat{\tau}_0 = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_{i/o} - \hat{\mathbf{r}}_{c/o}) \times \mathbf{f}_i - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_{rz} & J_{rz} & -J_{rz} & J_{rz} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} - J_{rz} \begin{bmatrix} -\Omega_y & \Omega_y & -\Omega_y & \Omega_y \\ \Omega_x & -\Omega_x & \Omega_x & -\Omega_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}$$

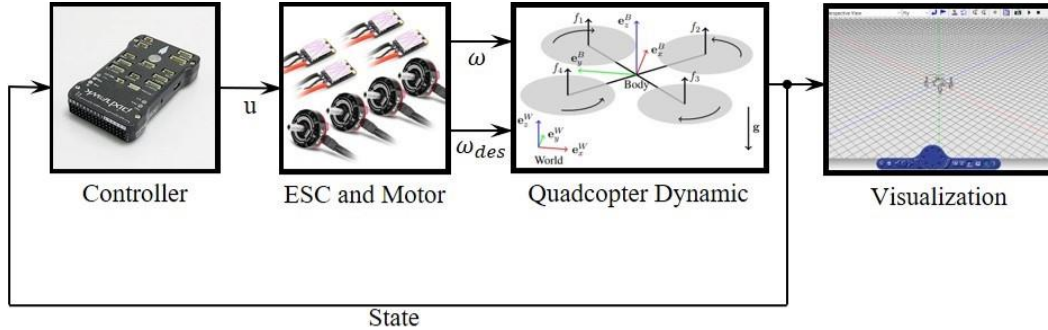
Với  $\dot{\mathbf{\Omega}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  và  $\boldsymbol{\omega}$  là các giá trị có được từ cảm biến,  $\hat{\mathbf{r}}_{c/o}$  là khoảng sai lệch tâm hình học và trọng tâm ước lượng ban đầu.

#### 4. Mô phỏng

Để kiểm chứng các luật điều khiển được trình bày trong phần 3, mô hình điều khiển quadcopter được mô phỏng trên Matlab/Simulink như trên Hình 5. Trong đó, khối Controller sẽ chứa các luật điều khiển trong mục 3, khối Quadcopter Dynamic chứa phương trình (6). Trong mô phỏng này, quadcopter



được yêu cầu thực hiện bám quỹ đạo có phương trình tham số là đường tròn bán kính 1.5 m, và có vận tốc tiếp tăng dần từ 0 – 1.5 m/s trong khoảng 3 s; đường tròn này là nằm trong mặt phẳng có phương trình  $z = 1.5$  m.



Hình 5. Mô hình điều khiển quadcopter được xây dựng trong Matlab/Simulink.

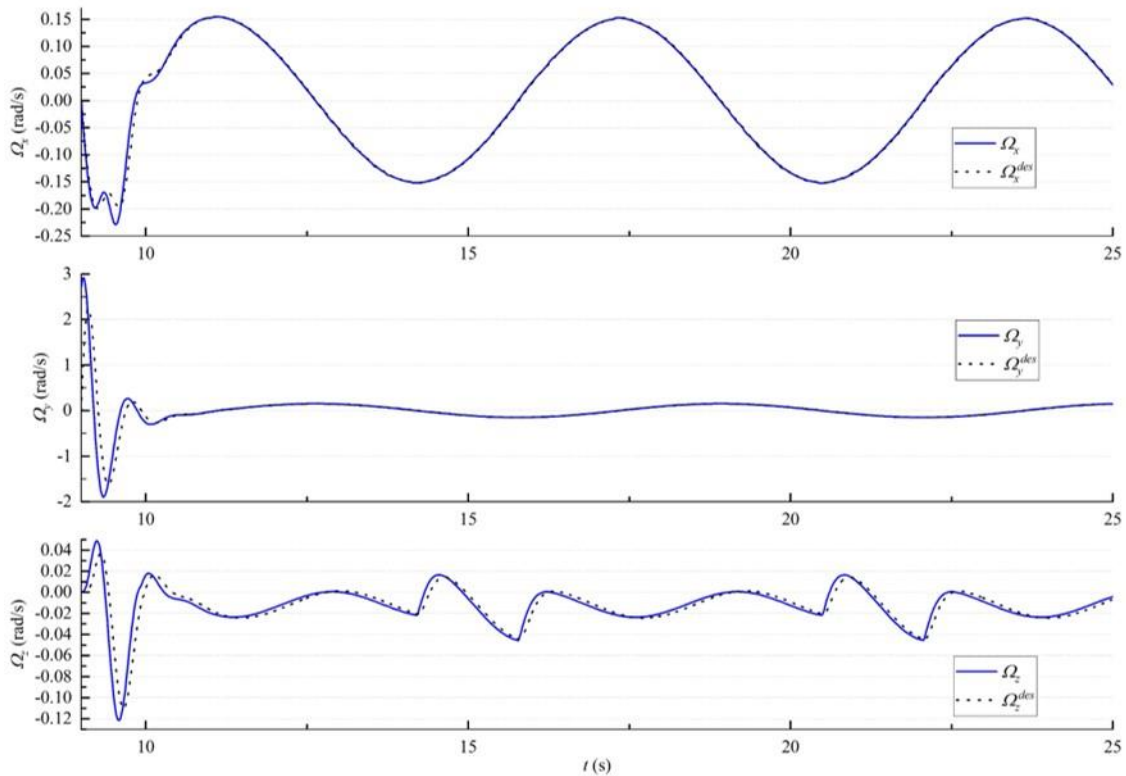
Giá trị của các tham số được sử dụng trong bài toán mô phỏng tương ứng với mô hình ở Hình 5 được trình bày như trong Bảng 1. Trong bảng này, các kích thước và các momen quán tính khối lượng được ước lượng theo dữ liệu của mô hình quadcopter do nhóm thiết kế thông qua phần mềm Solidworks®; các hệ số  $c_T$  và  $c_Q$  được ước lượng thông qua kết quả thực nghiệm đo lực sinh ra từ các cánh quạt.

Bảng 1. Các tham số dùng trong mô phỏng.

$m$	1,18 kg
$J_{xx}$	$14,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_{yy}$	$14,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_{zz}$	$15,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_{rz}$	$8,67 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_T$	$1,34 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}^2$
$c_Q$	$7,36 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
$r_x$	3,00 cm
$r_y$	3,00 cm
$r_z$	-5,00 cm

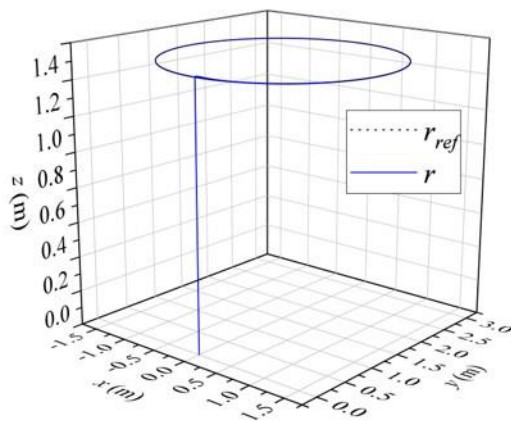
Kết quả mô phỏng đáp ứng vận tốc góc của quadcopter như Hình 6. Đáp ứng vận tốc góc  $\Omega$  bám theo được  $\Omega_d$ . Tuy nhiên, trong khoảng từ giây thứ 9 – 10,  $\Omega_d$  có giá trị thay đổi nhanh làm cho  $\Omega$  không bám theo kịp. Sau đó, do  $\Omega_d$  có tần số thay đổi thấp, lúc này  $\Omega$  bám tốt theo được  $\Omega_d$ . Nếu  $\Omega$  đã bám tốt theo  $\Omega_d$  chất lượng của bộ điều khiển vị trí cũng được đảm bảo. Như trên Hình 7 là đáp ứng vị trí của quadcopter, có thể thấy rằng ở giai đoạn đầu do  $\Omega_d$  thay đổi nhanh làm vị trí của quadcopter lệch so với quỹ đạo tham chiếu, sau đó hai đường đã gần như trùng khít với nhau.



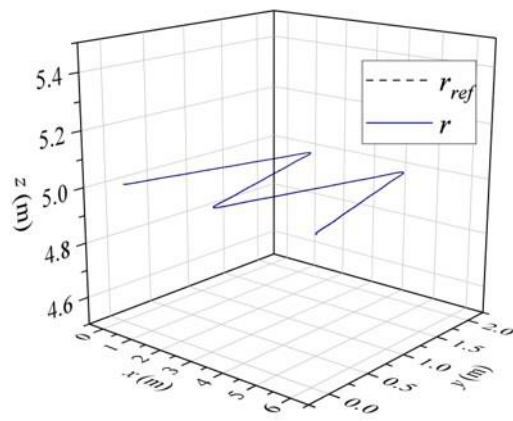


Hình 6. Kết quả mô phỏng vận tốc góc: đường liền (mô phỏng), nét đứt (tham chiếu).

Để kiểm chứng tính bền vững của luật điều khiển (26), quadcopter được mô phỏng bám theo quỹ đạo là hình zigzag (dạng hàm tam giác với khoảng cách giữa 2 đỉnh liên tiếp là 3 m và chiều cao của tam giác là 1.5 m) và có kết quả mô phỏng như Hình 8. Với mô hình mô phỏng có hiện tượng sai lệch giữa tâm hình học  $O$  và trọng tâm  $C$  thì quadcopter vẫn bám tốt quỹ đạo so với bộ điều khiển PID thông thường và không kể đến sự sai lệch giữa  $O$  và  $C$ . Mặc dù, tại những điểm cong trên quỹ đạo đó, gia tốc của quadcopter thay đổi nhiều cả hướng và độ lớn.



Hình 7. Quadcopter bám theo đường tròn.



Hình 8. Quadcopter bám theo hình zigzag.

## 5. Kết luận

Bài báo này đã dẫn ra mô hình động lực học của quadcopter có kể đến hiện tượng không trùng nhau giữa tâm hình học và trọng tâm, và hiệu ứng gyroscope do cánh quạt sinh ra. Trong mô tả động học, quaternion được sử dụng thay thế cho cách biểu diễn Euler nhằm tránh hiện tượng suy biến (Gimbal Lock). Từ mô hình động lực học, luật điều khiển được thiết kế dựa trên hình học vi phân để định nghĩa khoảng cách ngắn nhất trên đa tạp, cùng với phương pháp thiết kế bền vững dựa trên cảm biến INDI. Tiếp theo, mô hình động lực học và các luật điều khiển được mô hình hóa trên Matlab/Simulink để đánh giá chất lượng của bộ điều khiển. Để kiểm chứng mô hình, hai trường hợp bám quỹ đạo là đường tròn và đường zigzag đã được khảo sát. Kết quả mô phỏng cho thấy quadcopter có thể bám tốt quỹ đạo mong muốn, mặc dù có sự sai lệch về trọng tâm trong điều kiện gia tốc thay đổi nhiều về hướng và độ lớn. Mô hình thật của quadcopter đã được chế tạo. Tương lai, mô hình này sẽ được thực nghiệm để kiểm chứng các nghiên cứu lý thuyết đã trình bày.

## 6. Tài liệu tham khảo

- [1] G.M. Hoffmann, S.L. Waslander, and C.J. Tomlin. Quadrotor helicopter trajectory tracking control. In *Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Hawaii, (August 2008), pp. 7410.
- [2] P. Abbeel. *Apprenticeship learning and reinforcement learning with application to robotic control*. PhD dissertation, Stanford University, (2008).
- [3] S. Lupashin, A. Schollig, M. Sherback, and R. D’Andrea. A simple learning strategy for high-speed quadcopter multi-flips. In *Proceeding of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Anchorage-AK, (May 2010), pp. 1642–1648.
- [4] D. Mellinger, N. Michael, and V. Kumar. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *The International Journal of Robotics Research*, **31**, (5), (2012), pp. 664–674.
- [5] D. Hanover, P. Foehn, S. Sun, E. Kaufmann, D. Scaramuzza. Performance, Precision, and Payloads: Adaptive Nonlinear MPC for Quadrotors. *IEEE Robotics and Automation Letters*, **7**, (2), (2021), pp. 690 - 697.
- [6] T. Lee, M. Leok, and N. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor uav on SE(3). In *Proceeding of the 49<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, Atlanta, (December 2010), pp. 5420–5425.
- [7] Y. Yu, S. Yang, M. Wang, C. Li, and Z. Li. High performance full attitude control of a quadrotor on SO(3). In *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Seattle, (May 2015), pp. 1698–1703.
- [8] D. Mihailescu-Stoica, R. Acuna, and J. Adamy. High Performance Adaptive Attitude Control of a Quadrotor. In *Proceeding of the 18<sup>th</sup> European Control Conference (ECC)*, Naples, (June 2019), pp. 3462–3469.
- [9] S. Sieberling, Q.P. Chu, and J.A. Mulder. Robust flight control using incremental nonlinear dynamic inversion and angular acceleration prediction. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **33**, (6), (2010), pp. 1732–1742.
- [10] P. Simplicio, M.D. Pavel, E. van Kampen, and Q.P. Chu. An acceleration measurements-based approach for helicopter nonlinear flight control using incremental nonlinear dynamic inversion. *Control Engineering Practice*, **21**, (8), (2013), pp. 1065–1077.
- [11] P. Smith. A simplified approach to nonlinear dynamic inversion based flight control. In *Proceeding of the 23<sup>rd</sup> Atmospheric Flight Mechanics Conference*, Boston, (August 1998), pp. 4461–4469.
- [12] E.J. Smeur, Q.P. Chu, and G.C. de Croon. Adaptive incremental nonlinear dynamic inversion for attitude control of micro air vehicles. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **38**, (12), (2015), pp. 450–461.
- [13] E.J. Smeur, G.C. de Croon, and Q.P. Chu. Cascaded incremental nonlinear dynamic inversion control for MAV disturbance rejection. *Control Engineering Practice*, **73**, (2018), pp. 79–90.
- [14] B. Bacon and A. Ostroff. Reconfigurable flight control using nonlinear dynamic inversion with a special accelerometer implementation. In *Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Denver, (August 2000), pp. 4565–4579.
- [15] P. Simplicio, M. Pavel, E. van Kampen, and Q.P. Chu. An acceleration measurements-based approach for helicopter nonlinear flight control using Incremental Nonlinear Dynamic Inversion. *Control Engineering Practice*, **21**, (8), (2013), pp. 1065–1077.
- [16] D. Mellinger and V. Kumar. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. In *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Shanghai, (May 2011), pp. 2520–2525.
- [17] M. Faessler, A. Franchi, and D. Scaramuzza. Differential flatness of quadrotor dynamics subject to rotor drag for accurate tracking of high-speed trajectories. *IEEE Robotics and Automation Letters*, **3**, (2), (2017), pp. 620–626.
- [18] T. Koo and S. Sastry. Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. In *Proceedings of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, (December 1998), pp. 3635–3640.

- [19] P. Martin. Aircraft control using flatness. In *Proceeding of the IMACS/IEEE-SMC Multiconference CESA '96 - Symposium on Control, Optimization and Supervision*, Lille, (July 1996), pp. 194–199.
- [20] E. Tal and S. Karaman. Accurate tracking of aggressive quadrotor trajectories using incremental nonlinear dynamic inversion and differential flatness. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **29**, (3), (2021), pp. 1203-1218.
- [21] J.G. Leishman, *Principles of Helicopter Aerodynamics*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [22] N.V. Khang, *Động Lực Học Hệ Nhiều Vật (Dynamics of Multibody Systems)*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, (2007).
- [23] B.T. Lopez and J.J.E. Slotine. Sliding on manifolds: geometric attitude control with quaternions. In *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Xi'an, (June 2021), pp. 11140-11146.
- [24] M. Faessler, F. Fontana, C. Forster, and D. Scaramuzza. Automatic re-initialization and failure recovery for aggressive flight with a monocular vision-based quadrotor. In *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Seattle, (2015), pp. 1722-1729.
- [25] D. Brescianini, M. Hehn, and R. D'Andrea. *Nonlinear quadcopter attitude control-Technical Report*, ETH Library, ETHZ, (2013).

## PHIẾU GIẢI TRÌNH Ý KIẾN PHẢN BIỆN

**Kính gửi: - Hội cơ học Việt Nam**

**- Thầy Phản biện**

Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn sự hỗ trợ của Ban Biên tập và thầy Phản biện đã có những ý kiến đóng góp thiết thực cho bài báo.

**Bài báo: Mô hình hóa và điều khiển quadcopter bám quỹ đạo tự động**

Nhóm tác giả đã chỉnh sửa theo các ý kiến phản biện của thầy Phản biện, cụ thể như sau:

Stt	Ý kiến phản biện	Giải trình
1	Các tác giả cần thống nhất kí hiệu trong bài báo: $J_v$ (Trang 3) được mô tả nhưng không thấy xuất hiện trong bất cứ công thức nào, các lực $f_1, f_2, f_3, f_4$ (trang 4) không thấy được nhắc đến trong các công thức triển khai về sau và cũng không định nghĩa là lực gì (khả năng là lực đẩy cánh quạt ở công thức 8, nhưng công thức 8 lại dùng kí hiệu khác), Công thức 10 không rõ tham số $a$ là tham số gì	Đã hiệu chỉnh ở những dòng: 110, 120, 124 và 126.
2	Các tác giả cần làm rõ góc $\psi$ (góc định hướng) được xác định thế nào? trong bài báo có vẽ góc này được biết trước nhưng không nói rõ tính cụ thể từ đâu.	Đã bổ sung hình ảnh định nghĩa cho góc $\psi$ : Hình số 4 (dòng 172).
3	Các tác giả xem lại công thức 17 tìm góc phi từ việc biến đổi công thức 16, khả năng công thức 17 bị sai, trong công thức 17 không có thành phần $\text{Rot}(\theta)$ , là ma trận chưa được xác định do $\theta$ chưa tính được.	Biểu thức đã có sai sót trong lúc trình bày, đã chỉnh sửa lại phương trình số 17 (dòng 178).
4	Các tác giả cần xem lại kết luận là "nếu bám được vận tốc góc thì đảm bảo bám về hướng" điều này không đúng nếu điều kiện ban đầu về góc mong muốn và góc thực tế không bằng nhau. Các tác giả cần đưa thêm đồ thị thể hiện hướng quadcopter bám theo hướng mong muốn để minh chứng cho kết luận này, nếu không	Đã chỉnh sửa (dòng 238 - 239) và đồng ý với ý kiến của thầy Phản biện rằng "quadcopter chỉ bám được quỹ đạo và vận tốc góc chứ không phải

	quadcopter chỉ bám được quỹ đạo và vận tốc góc chứ không phải bám cả về hướng chuyển động.	bám cả về hướng chuyển động”
--	--	------------------------------

365

366 Các nội dung chỉnh sửa, bổ sung đã được nhóm tác giả thể hiện **màu chữ xanh** trong bài  
367 báo.

368 Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Biên tập và thầy Phản biện.

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

385

386

387

388

389

390

391

392

393

394