Procesos Estocásticos

Basado en las lecturas de Simón Lunagómez Coria
Notas tomadas por Daniel Vélez Moyado

Primavera 2025

Índice

1. Cadenas de Markov en tiempo discreto **3**

1.1. Estructura de clases 5

1.2. Tiempos de llegada y probabilidades de absorbción 5

1.3. Propiedad fuerte de Markov 5

1.4. Recurrencia y transitividad 5

1.5. Distribución invariante 5

1.6. Tiempos reversibles 5

1.7. Metropolis Hastings 5

2. Procesos estocásticos en tiempo continuo **5**

2.1. Procesos de Poisson 5

2.2. Superposición y adelgazamiento 9

2.3. Proceso Poisson en múltiples dimensiones 10

2.4. Proceso de Poisson Compuesto 11

2.5. Proceso de Poisson no homogéneo 12

2.6. Segunda definición del Proceso Poisson 13

2.7. Cadenas de Markov a Tiempo Continuo 16

3. Movimiento Browniano **22**

3.1. Arbitraje 24

3.2. La fórmula Black-Scholes 26

4. Teoría de colas **28**

1. Cadenas de Markov en tiempo discreto

Sea I un conjunto, de tal forma que I es un espacio de estados, enotnces cada $i \in I$ es un estado.

Definición
Se dice que $\{x_t : t \geq 0\}$ es una cadena de Markov con distribución inicial λ y matriz de transición P si:

1. $\mathbb{P}(x_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$
2. $\mathbb{P}(x_{t+1} = i_{t+1} | x_0 = i_0 \dots x_t = i_t) = \mathbb{P}(x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t) := P_{i_t, i_{t+1}}$

Teorema 1.1.1 Un proceso estocástico a tiempo discreto $\{x_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es Markov(λ, P) sii: $\forall i \in I$

$$\mathbb{P}(x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots x_t = i_t) = \lambda_{i_0} P_{i_0, i_1} \dots P_{i_{T-1}, i_T}$$

Demostración $\Rightarrow$] La demostración consiste en desglozar $\mathbb{P}(x_0 = i_0, \dots, x_t = i_t)$ como un producto de probabilidades condicionales.
[$\Leftarrow$ Acá solo hay que utilizar la definición de probabilidad condicional (2.) y cancelar terminos usando el postulado del teorema 1.1.1.

Teorema 1.1.2 Sea $\{x_t\}_{t \geq 0} \sim$ Markov(λ, P), si condicionamos la cadena en $x_m = j$ entonces $\{x_{m+t}\}_{t \geq 0} \sim$ Markov(δ_j, P) y es independiente de $x_0, x_1, \dots x_m$.
Demostración Alch sigo sin entenderla

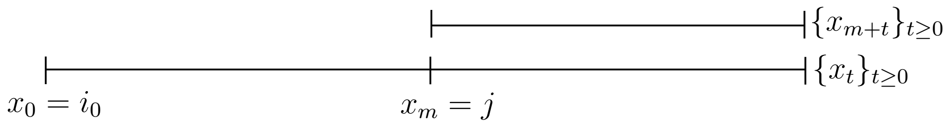


Figura 1: Propiedad de Markov

Probabilidad en n pasos

Teniendo en cuenta que P es la matriz de transición de una cadena de Markov y λ la distribución inicial. Entonces λP es el vector con la distribución de probabilidades de I estados despues de una transición. Sí queremos acceder a la j-ésima entrada de λP (La distribución del j-ésimo estado despúes de la primera transición):

$$(\lambda P)_j = \sum_{i\in I} \lambda_i P_{i,j}$$

Así pues, si nos interesa saber la distribución para n pasos, solo basta:

$$(\lambda P^n)_j = \sum_{i\in I} \lambda_i P_{i,j}^{(n)}, \quad P_{i,j}^{(n)} = (P^n)_{i,j}$$

Teoream 1.1.3 Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ Markov(λ, P) $\quad \forall n, m \geq 0$
a. $\mathbb{P}(x_n = i) = (\lambda P)_i$
b. $\mathbb{P}_j(x_n = i) = \mathbb{P}(x_{m+n} = i | x_m = j) = \mathbb{P}(x_n = i | x_0 = j) = P_{j,i}^{(n)}$

Observación

Supongamos que tenemos una cadena de M estados. Si nos interesa encontrar $P_{i,j}^{(n)}$, esta tendrá la siguiente forma:

$$P_{i,j}^{(n)} = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \cdots + a_M\lambda_M^n$$

Donde las λ's son los eigenvalores de la matriz P y las a's son terminos que obtenemos regresando de la diagonalización de P a P.

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

1.1. Estructura de clases

1.2. Tiempos de llegada y probabilidades de absorción

1.3. Propiedad fuerte de Markov

1.4. Recurrencia y transitividad

1.5. Distribución invariante

1.6. Tiempos reversibles

1.7. Metropolis Hastings

2. Procesos estocásticos en tiempo continuo

2.1. Procesos de Poisson

Definición

Una sucesión en tiempo continuo es un Proceso de Poisson parámetro λ si:

1. El número de llegadas en un intervalo t se distribuye $Po(\lambda t)$
2. El número de llegadas en intervalos disjuntos son independientes.

La idea es que el tiempo inicia en $t = 0$, en cuyo caso el proceos Poisson ocurre en $(0, \infty)$.

Consideremos un proceso Poisson en $(0, \infty)$. Sea N_t el número de llegadas en $(0, t]$, entonces el número de llegadas en $(t_1, t_2]$ es $N_{t_2} - N_{t_1}$ para $0 < t_1 < t_2$.

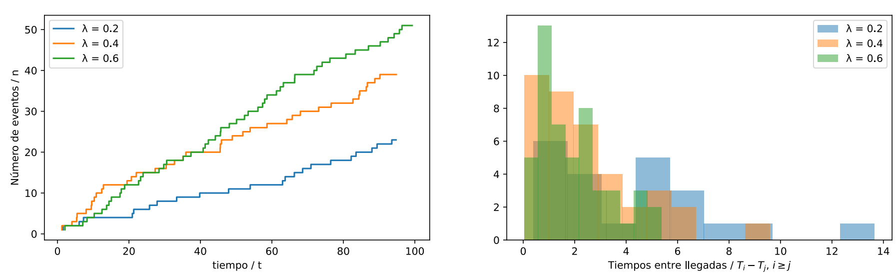
Sea T_j el tiempo de la j-ésima llegada, observemos que:

$$\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\}$$

El evento de que el primero tiempo de llegada sera mayor a t será igual a que no pase nada de 0 a t. A esta dualidad se le conoce como **dualidad tiempo-conteo**. En consequencia estos eventos tienen la misma probabilidad.

Como $N_t \sim Po(\lambda t)$ implica $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{\lambda t}$ en consecuencia $\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - e^{\lambda t}$ lo que significa que $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Comentario: Todos los tiempos de llegada siguen una distribución exponencial, como su nombre lo dice el j-ésimo tiempo de llegada es el tiempo cuando sucede el j-ésimo evento en el proceso de Poisson.



Pero ¿qué tal si nos interesa el no saber el tiempo al j-ésimo evento sino el tiempo entre el j-ésimo evento con el evento anterior?

Por definición dicho tiempo es igual a $T_j - T_{j-1}$, si lo condicionando con con el tiempo pasado T_{j-1} el tiempo entre T_j y T_{j-1} seguirá igualmente una distribución exponencial. $T_j - T_{j-1} | T_{j-1} \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow T_j - T_{j-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$

Comentario: La demostración esta muy fácil se usa usando la definición de probabilidad condicional partiendo de $\mathbb{P}(T_j - T_{j-1}|T_{j-1} = t_{j-1})$

Propiedades del proceso de Poisson

Teorema: Sea $\{N_t : t > 0\}$ un proceso Poisson con parámetro λ y sea $t_1 < t_2$. Entonces la distribución condicional de N_{t_1} dado $N_{t_2} = n$ sigue un distribución binomial.

$$N_{t_1}|N_{t_2} = n \sim \text{Bin}(n, t_1/t_2)$$

Demostración Como $(0, t_1]$ y $(t_1, t_2]$ son disjuntos, N_{t_1} es independiente de $N_{t_2} - N_{t_1}$, por lo que sabiendo que:

$$N_{t_1} \sim \text{Po}(\lambda t_1), \quad N_{t_2} - N_{t_1} \sim \text{Po}(\lambda(t_2 - t_1))$$

Nos será útil para encontrar: $\mathbb{P}(N_{t_1} = k|N_{t_2} = n)$
Utilizando la definición de probabilidad condicional:

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{t_2} - N_{t_1} = n - k|N_{t_1} = k)\mathbb{P}(N_{t_1} = k)}{\mathbb{P}(N_{t_2} = n)}$$

Como sabemos que siguen una distribución poisson:
Considerando $\lambda_1 = \lambda t_1,$ y $\lambda_2 = \lambda(t_2 - t_1)$

$$\frac{\left(\frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}\right)\left(\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}\right)}{\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\right)} = \binom{n}{k}\frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}$$

Luego si reordenamos los λ's de la fracción:

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = k|N_{t_2} = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$$

Visualmente tiene mucho sentido verlo con este diagrama: Así es mucho más fácil entender que si condicionamos con $N_{t_2} = n$ entonces la distribución de N_{t_1} será binomial.

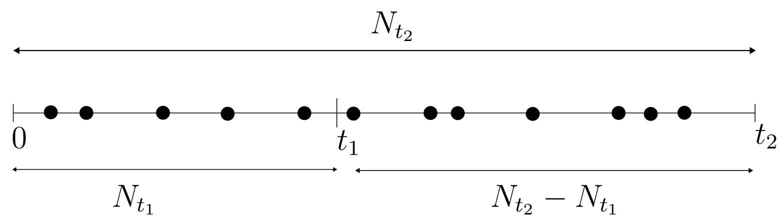


Figura 2: Propiedad del proceso de Poisson

Teorema Sea $\{N_t t > 0\}$ un proceso de poisson con parámetro λ. Si condicionamos con $N_t = N$. Los tiempos de llegada $T_1, ..., T_n$ se distribuyen como las estadísticas de orden n. U(0,t)

2.2. Superposición y adelgazamiento

El concepto gira en torno a la idea de que si tomamos dos proceso poisson independientes y los juntamos para hacer un solo proceso, obtenemos otro proceso de Poisson.

Superposición

Teorema Sea $\{N_t^{(1)} : t > 0\}$ y $\{N_t^{(2)} : t > 0\}$ proceso de Poisson independientes con parametros λ_1 y λ_2, entonces el proceso combinado $\{\hat{N}_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)} : t > 0\}$ es un proceso Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.
Corolario Los tiempos de llegada del nuevo proceso igual seguirá una distribución exponencial, de tal forma que: $\hat{T} \sim \text{Exp}(\lambda 1 + \lambda_2)$

De ahí igual podemos comprender que si dos procesos Poisson son independientes, la probabilidad de que el evento del tipo 1 suceda antes que el evento del tipo 2 en el proceso combinado sería:

$$\mathbb{P}(\text{Evento 1 antes que evento 2}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Adelgazamiento

Teorema Sea $\{N_t : t > 0\}$ un proceso Poisson con parámetro λ. Supongamos que podemos dividir el proceso en dos eventos (Tipo 1 y Tipo 2). La probabilidad de que el evento sea tipo 1 es α mientras que el evento sea de tipo 2 es $1 - \alpha$, entonces podemos construir dos procesos Poisson independientes tal que:

$$N_t^{(1)} \sim \text{Po}(\lambda\alpha), \quad N_t^{(2)} \sim \text{Po}(\lambda(1-\alpha))$$

2.3. Proceso Poisson en múltiples dimensiones

Eventos en un plano $2D$ siguen un proceso de Poisson si:

1. El número de eventos en una región A se define: $N_A \sim \text{Po}(\lambda \cdot \text{Area}(A))$
2. El número de eventos en regiones disjuntas son variables aleatorias independientes.

Las propiedades de un proceso de Poisson se pueden generalizar para cualquier dimensión, por ejemplo para $2D$. Igual como nota, sea N_A el número de eventos en A mientras que N_B el número de eventos en la región B. Si tenemos en cuenta que $B \subseteq A$. Ahora, si condicionamos en $N_A = n$ la distribución de B_A será binombial igual:

$$N_B | N_A = n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\text{Area}(B)}{\text{Area}(A)}\right)$$

2.4. Proceso de Poisson Compuesto

Sumas aleatorias
Recordando, sean $x_1, x_2, \dots$ v.a. iid
Sea N una variable aleatoria $\{0, 1, 2, \dots\}$
También N es independiente de x_i.
Sea $y = \sum_{i_1}^{N} x_i$
Entonces $\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(y|N)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sum_{i_1}^{N} x_i|N)) = \mathbb{E}(N\mathbb{E}(x_i))$
que a su ves es: $\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(x_i)$.

Un proceso estocástico $\{x_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson compuesto si puede ser representado como:

$$x_t = \sum_{i=1}^{N_t} y_i, \quad t \geq 0$$

Donde $\{N_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso Poisson con parámetro λ y $\{y_i\}_{i\geq 1}$ es una familia de v.a.'s iid que también son independientes de $\{N_t\}_{t\geq 0}$. A la variable aleatoria x_t se le llama una v.a. con distribución Poisson compuesta.

Una manera de comprender porque nos referimos a que es un proceso compuesto sería la siguiente. Supongamos que hay un conjunto finito o infinito numerable de y_i. Supongamos que se le puede asignar a y_i una clase α_j :

$$\mathbb{P}(y_i = \alpha_j) = p_j, \quad \Sigma p_j = 1$$

Entonces decimos que el i-ésimo termino de un proceso Poisson es del tipo j si $y_i = \alpha_j$. Si denotamos $N_t^{(j)}$ el número de eventos del tipo j hasta el tiempo t, por adelgazamiento, las variables $N_t^{(j)} \sim Po(\lambda p_j t)$ además las variables $N_t^{(j)}$ serían independientes para toda clase (j). Es posible igual verlo así:

$$x_t = \sum_j \alpha_j N_t^{(j)}$$

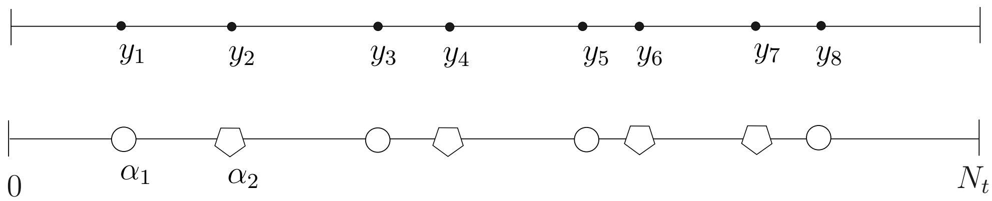


Figura 3: Proceso compuesto

De esta figura, entiende

Teorema Teniendo en cuenta lo de sumas aleatorias entonces para nuestra variable x_t que sigue un proceso de poisson compuesto:
a. $\mathbb{E}[x_t] = \lambda t \mathbb{E}[y]$
b. $Var[x_t] = \lambda t \mathbb{E}[y^2]$
Demostración La demostración de este teorema viene de obtener la varianza y la esperanza condicionando con N_t.
a. $\mathbb{E}[x_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[x_t|N]] = ...$
b. $\mathrm{Var}[x_t] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[x_t|N]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[x_t|N]] = ...$

Ejemplo
Si $x_1, x_2, ...$ es idd
N_t es $PP(\lambda)$ independiente de $\{x_i\}$
Sea $y = \sum_{i=1}^{N_t} x_i$
Pasemos a calcular la función generadora de momentos de y

2.5. Proceso de Poisson no homogéneo

Un proceso $\{N_y\}_{y\geq 0}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(\cdot)$ sii :

a. $N_{t+s} - N_s$ es una variable aleatoria Poisson con media

$$\int_s^{t+s} \lambda(y)dy$$

b. Las ocurrencias en intervalos disjuntos son independientes

Notación: La función $m(t)$ se define como

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)dy$$

Nota: Lo importante de este proceso es que la frecuencia de los eventos ya no se va a mantener constante al cambiar los intervalos. Si usabamos un proceso poisson sencillo para modelar los clientes de una cafetería asumimos que la distribución de clientes es constante para cualquier hora, sin embargo este nuevo modelo nos abre la posibilidad de ajustar la distribución de los clientes dependiendo de la hora del día.

2.6. Segunda definición del Proceso Poisson

Podemos definir el proceso Poisson de tal manera que la distribución Poisson sea un resultado y no un supuesto. Sin embargo , para entender esta definición es importante recordar algo muy sencillo sobre ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones diferencial
Sea la siguiente ecuación: $f'(x) = -\lambda f(x)$. Despejamos $f(x)$ para obtener:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\lambda$$

De ahí se puede observar que esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = -\lambda$$

Integramos:

$$\ln(f(x)) = -\lambda + c \Rightarrow f(x) = e^{-\lambda + c}$$

Tener en cuenta la manera de resolver este tipo de ecuaciones será muy útil para entender de donde surge el proceso de Poisson.

Ahora sí, pensemos en una serie de eventos que van a ocurrir en el tiempo. Supongamos que existe una cantidad positiva λ que satisface:

a. La probabilidad de que exactamente un evento ocurra en un intervalo pequeño de longitud h es aproximadamente $\lambda h + o(h)$.

b. La probabilidad de observar dos o más ocurrencias en el intervalo chiquito será $o(h)$.

c. Si tomanos intervalos disjuntos, el número de ocurrencias en cada intervalo será una variable aleatoria.

Teniendo en cuenta el diagrama:
$\mathbb{P}(0 \text{ eventos en } [0, t+h)) = \mathbb{P}_0(t+h)$, que es lo mismo a decir:
$\mathbb{P}(0 \text{ eventos en } [0, t)) \cap \mathbb{P}(0 \text{ eventos en } [t, h)) = \mathbb{P}_0(t)\mathbb{P}_0(h)$.
Sabemos que $\mathbb{P}_0(h) = 1 - [\mathbb{P}(1 \text{ evento en } [t, t+h)) + \mathbb{P}(2 \text{ o más en } [t, t+h))]$, entonces reemplazando: $\mathbb{P}_0(h) = 1 - [\lambda h + 2o(h)]$.

Como ya conocemos el valor de $\mathbb{P}_0(h)$ ahora solo lo reemplazamos para obtener $\mathbb{P}_0(t+h)$. Dando como resultado:

$$\mathbb{P}_0(t+h) = \mathbb{P}_0(t)(1 - [\lambda h + 2o(h)])$$

Ahora haciendo unos arreglos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(t+h) - \mathbb{P}_0(t) &= -\mathbb{P}_0(t)[\lambda h + 2o(h)] \\
\frac{\mathbb{P}_0(t+h) - \mathbb{P}_0(t)}{h} &= -\frac{\mathbb{P}_0(t)[\lambda h + 2o(h)]}{h} \\
\lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}_0(t+h) - \mathbb{P}_0(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{\mathbb{P}_0(t)[\lambda h + 2o(h)]}{h} \\
\mathbb{P}_0'(t) &= -\mathbb{P}_0(t)\lambda + \lim_{h\to 0} \frac{2o(h)}{h} \\
\mathbb{P}_0'(t) &= -\mathbb{P}_0(t)\lambda \\
\mathbb{P}_0(t) &= e^{-\lambda t}, \quad \mathbb{P}_0(0) = 1
\end{aligned}$$

De aquí podemos comprender que la probabilidad de 0 ocurrencias en un intervalo $[0, t)$ es igual a: $e^{\lambda t}$. Ahora que tal si lo vemos desde una distribución Poisson. Supongamos que $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Si nos interesa encontrar la probabilidad de que hayan 0 ocurrencias en la unidad de tiempo de λ haciendo el formulazo:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

Usando la definición anterior:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}_0(1) = e^{-\lambda}$$

Es exactamente igual, de ahí podemos tener una idea de que el formulazo que hacemos cuando calculamos frecuencias de eventos bajo un proceso Poisson viene del planteamiento inicial de la sección.

Este mismo procedimiento lo podemos repetir para cualquier $X = x$.

La generalización de lo que hicimos se ve de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}_n'(t) = -\lambda \mathbb{P}_n(t) + \lambda \mathbb{P}_{n-1}(t)$$

Interpetación: La derivada de la función de probabilidad de observar n ocurrencias en un intervalo t respecto a t va a ser igual a: $-\lambda \mathbb{P}_n(t) + \lambda \mathbb{P}_{n-1}(t)$. Resolviendo dicha ecuación diferencial llegaremos a la siguiente función:

$$\mathbb{P}_n(t) = \frac{\lambda t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Este fue el descubrimiento de Simeón Denis Poisson, el cuál le asigno su apellido a esta distribución, todo un mamón. Él se dio cuenta de que las ocurrencias de eventos con frecuencia λ van a seguir esta distribución en específico.

2.7. Cadenas de Markov a Tiempo Continuo

Definición
Sea I numerable. Una Q-matriz sobre I es una matriz $Q = (q_{ij} : i, j \in I)$ que satisface:

1. $0 \leq -q_{ii} < \infty, \quad \forall i \in I$
2. $q_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j$
3. $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0, \quad \forall i \in I$

Supongamos ahora que queremos contruir una matriz P^t con $t \in (0, \infty)$ que generalice las potencias enteras. La manera en que lo vamos a hacer será con la siguiente expresión

$$e^Q := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}$$

Propiedades de e^Q
Si Q_1 y Q_2 conmutan, entonces $e^{Q_1+Q_2} = e^{Q_1}e^{Q_2}$
Si Q tiene eigenvalores $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ entonces los eigenvalores de e^Q serán $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_k})$ para los mismos eigenvalores de Q.

Teorema Sea Q una matriz sobre I finito. Haga $P(t) = e^{tQ} \Rightarrow (P(t) : t \geq 0)$, dicho vector tendrá las siguientes propiedades.

a. $P(t+s) = P(t)P(s)$
b. **Ecuación forward**: $(P(t) : t \geq 0)$ es la única solución para

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q$$

c. **Ecuación backward**: $(P(t) : t \geq 0)$ es la única solución para

$$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t)$$

d. Para $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k\Bigg|_{t=0} P(t) = Q^k$$

Igual otra manera de encontrar $P(t)$ sería considerando su factorzación:

$$Q = A \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} A^{-1}$$

A es una matriz con eigenvectores como sus columnas. Ahora si multiplicamos dicha Q-matriz por t obtenemos:

$$Qt = A \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n t \end{bmatrix} A^{-1}$$

Para finalizar:

$$e^{Qt} = A \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} A^{-1} = P(t)$$

De ahí se puede comprender que:

$$P_{ij}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \alpha_2 e^{\lambda_n t}$$

Cabe denotar que los α's serían los coeficientes de la entrada ij de la matriz que obtendremos al aplicar ambas multiplicaciones.

La ventaja de este método es que no te vas a encontrar con ecuaciones diferenciales, sin embargo dependes de que la matriz sea diagonalizable.

Teorema Una matriz Q sobre I finito es una Q-matriz sii $P(t) = e^{tQ}$ es una matriz estocástica para todo $t \geq 0$

Comentario Una cadena de Markov en tiempo continuo $\{X_t :\geq 0\}$ satisface:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_0 = i_0, ..., X_{t_n} = i_n) = P_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$$

$\forall n = 0, 1, 2$ y se cumple $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1}$ para los estados $i_0, ...i_{n+1}$. De una manera intuitiva n representa el n-ésimo estado que adopta la cadena, entonces hace mucho sentido que el tiempo en el que se encuentra en el n-ésimo estado será menor que en el m-ésimo estado si $n < m$. En particular:

$$\mathbb{P}_i(X_t = j) := \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = P_{ij}(t).$$

Definición

Sea I numerable. Un proceso estocástico a tiempo continuo:

$$(x_t)_{t \geq 0} = (x_t : 0 \leq t < \infty)$$

Considere el diagrama:

El cual implica la Q-matrix

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Queremos obtener $P_{ij}(t)$, para hacerlo usaremos la ecuación forward $P'(t) =$

Figura 4:

$P(t)Q$. Al final obtendremos:

$$P_{ij}(t) = e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Teorema Sea $S_1, S_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $S_n \sim \text{Exp}(\lambda_n)$ con $0 < \lambda_n < \infty$. Se cumple $\forall n$:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty) = 1$

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \infty) = 1$

La manera más sencilla de construir un proceso Poisson a partir de la Q-matrix es:

1. Tomar una sucesión $S_1, S_2, ...$ de variables aleatorias iid con distribución $\text{Exp}(\lambda)$

2. Hacer $T_0 = 0$ y $T_n = S_1 + ... + S_n$
3. Hacer $x_t = n$ si $T_n \leq t \leq T_{n+1}$

Sea $x_t = \text{máx}_{n \in \mathbb{N}}\{S_1 + ... + S_n \leq t\}$

Teorema (Propiedad de Markov) : Sea $\{x_t\}_{t\geq 0}$ un proceso Poisson con intensidad λ. Entonces , para todo $s \geq 0$, $\{x_{s+t} - x_s\}_{t\geq 0}$ también es un proceso de Poisson con intensidad λ, independiente de $\{x_r\}_{r\leq s}$.

Una manera visual de entenderlo:

Figura 5:

Teorema: Propiedad fuerte de Markov Sea $\{x_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson con intensidad λ y sea T un tiempo de paro para $\{x_t\}_{t\geq 0}$, entonces si condicionamos en $\{T < \infty\}$ el proceso $\{X_{T+t} - X_T\}_{t\geq 0}$ también será Poisson con parámetro λ independiente del pasado ($\{x_s\}_{s\leq T}$).

3. Movimiento Browniano

El movimiento browniano es un proceso a tiempo continuo con espacio de estados continuo.

Imaginemos, que nos encontramos con una caminata aleatoria infinita. ¿Qué tal si

Sea X_t la posición a tiempo t de la caminata aleatoria, por lo que $X_t = \Delta x(X_1 + ... + X_{[t/\Delta t]})$ donde $X_i \in \{-1, 1\}$.

Los X_i's son independientes con $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = 1/2$ Esto quiere decir que $\mathbb{E}[X_i] = 0$ y $\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}[x_i^2] = 1$ con esta idea se sigue que:

$$\mathbb{E}[X_t] = 0 \text{ y } \text{Var}(X_t) = \Delta x^2 \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor$$

Ahora que tal si $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ para $\sigma > 0$, cuando $\Delta t \to 0$:

$$\mathbb{E}(X_t) = 0 \text{ y } \text{Var}(X_t) = \sigma^2 t$$

Usando el Teorema del Límite Central hace sentido atribuir las siguientes propiedades al proceso:

1. $X_t \sim \text{N}(0, \sigma^2 t)$
2. $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes
3. $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios es decir, la distribución de de $X_{t+s} - X_t$ no depende de t.

Definición Un proceso estocástico se denomina como movimiento Browniano si:

1. $X_0 = 0$
2. $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes
3. $\forall t > 0$, $X_t \sim N(0, \sigma^2 t)$

Comentario Cuando $\sigma = 1$, el proceso es llamado Browniano estándar. Esto porque para cualquier Browniano:

$$B_t = X_t/\sigma$$

Teorema Para $\{X_t : t \geq 0\}$ movimiento Browniano

1. Las trayectorias son continuas: $\lim_{\delta \to 0} X_{t+\delta} - X_t = 0$
2. Las trayectorias no son difernciables en ningún punto.

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{X_{t+\delta} - X_t}{\delta} \text{ no existe}$$

Esto hace sentido considerando que:

$$\frac{X_{t+\delta} - X_t}{\delta} \sim N(0, \sigma^2/\delta)$$

Definición

Decimos que $\{X_t : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano con coeficiente de deriva μ y varianza σ^2 si

1. $X_0 = 0$
2. $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes
3. $\forall t > 0$, $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

Como definición equivalente, sea $\{B_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano estándar y se define:

$$X_t = \sigma B_t + \mu t$$

Definición: Movimiento Browniano geométrico
Sea $\{y_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano con deriva μ y varianza σ^2, el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ definido por $X_t = e^{y_t}$, se le conoce como Browniano geométrico

Teorema Se $\{X_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano geométrico, entonces

$$\mathbb{E}[X_t : X_u, 0 \leq u \leq s] = X_s e^{(t-s)(\mu+\sigma^2/2)}$$

Donde $t > s$. Prácticamente lo que nos interesa es la esperanza del proceso en X_s condicionado a lo que observamos antes del proceso.

$$\mathbb{E}[e^{y_t}|X_u, 0 \leq u \leq s] = \mathbb{E}[e^{y_t+y_s-y_s}|X_u, 0 \leq u \leq s]$$

Que lo podemos separar para conseguir:

$$\mathbb{E}[e^{y_t-y_s}e^{y_s}|X_u, 0 \leq u \leq s] = e^{y_s}\mathbb{E}[e^{y_t-y_s}|X_u, 0 \leq u \leq s]$$

Por lo que esto sería igual a: $X_s\mathbb{E}[e^{y_t-y_s}]$, como $e^{y_t-y_s}$ es la generadora de momentos de $y_t - y_s$, sabiendo que $y_t - y_s \sim N((t-s)\mu, (t-s)\sigma^2)$

3.1. Arbitraje

Para explicar este concepto usaremos un ejemplo:

Objetivo: Determinar el valor apropiado para c, el costo unitario de la opción. A menos de que la opción se venda a dicho valor, siempre se podrá realizar una combinación de compras que garanticen una ganancia positiva.

Teorema de arbitraje
Considere un experimento donde el conjunto de posibilidades resultados es:

$$s = \{1, 2, 3, ..., m\}$$

Supongamos que n apuestas están disponibles. Si el monto x es arriesgado en la apuesta entonces el monto $xr_i(j)$ es ganado si el resultado del experimento es j.

En otras palabras $r_i(\cdot)$ es la función de retorno implicada por la apuesta i. El monto arriesgado en cada apuesta puede ser positivo, negativo o cero.

Sea el esquema de apuestas (portaflio) un vector: $X = (x_1, ..., x_n)$

Con la interpetación de que x_i es el monto de arriesgado en la apuesta (inversión) i. Si el resultado del experimento es j, entonces el retorno del esquema de apuestas X es :

$$\text{retorno de } X \text{ en escenario j} = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j)$$

El siguiente teorema afirma que o existe un vector de probabilidades $P = (p_1, ..., p_m)$ para el conjunto de resultados del experimento bajo el cual cada una de las apuestas tiene un valor esperado 0 o existe un sistema de apuestas que garantizan una ganancia positiva

Bajo esta idea exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
a. existe un vector de probabilidades $p = (p_1, ..., p_m)$ para el cual:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

b. existe un esquema de apuestas $X = (x_1, ..., x_n)$ para el cual:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) > 0, \quad \forall j \in \{1, ..., m\}$$

En otras palabras si s es el resultado del experimento, o bien existe un vector de probabilidades p tal que:

$$\mathbb{E}_p[r_i(s)] = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ...n\}$$

o existe un esquema de apuestas que produce una ganancia positiva en cualquier evento.

3.2. La fórmula Black-Scholes

Supongamos que tenemos un factor de descuento α. Entonces el valor presente del precio a tiempo t es $e^{-\alpha t} X_t$.

Tipo de apuestas disponible: para $s < t$ podemos observar el proceso hasta tiempo s y después comprar o vender unidades del instrumento financiero al precio X_s y después comprar o vender dichas unidades a tiempo t a precio X_t. Supondremos además que podemos comprar cualquiera de las N opciones a tiemo 0.

La opción i con precio c_i por unidad nos da la opción de comprar unidades del instrumento a tiempo t; por un precio fijo k_i por unidad, $i = 1, ..., N$

Supongamos que el teorema del arbitraje puede generalizarse a este escenario. Entonces, queremos determinar los valores c_i para los cuales ninguna estrategia de la apuesta conduce a una ganancia positiva garantizada. Lo que hay que buscar es un modelo que nos impide hacer arbitraje, de esta forma encontramos el "precio justo".

Considera que primero la apuesta que consiste en observar el precio del instrumento hasta tiempo s, se compra la opción en s, para tiempo despúes ejercer la opción en t, para inmediatamente vender o comprar las acciónes que adquiriste con la opción. Es importante tener en cuenta

Para que el retorno de la apuesta sea 0 cuando P es la medida de porbabilidad en X_t, $0 \leq t \leq T$ debemos tener que:

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha t} X_t | X_u, 0 \leq u \leq s] = e^{-\alpha s} X_s$$

Esto tiene que suceder para que yo tenga una esperanza de 0 cuadno se compra el activo en tiempo s. Esto implica que:

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha t} X_t | X_u, 0 \leq u \leq s] = e^{(t-s)\alpha} X_s$$

De aquí se comprende que $\alpha = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$.

Si consideramos que ahora se puede comprar una opción. Supongamos que la opción nos da el derecho de comprar una unidad del instrumentoa tiempo t a un precio k. A tiempo t, el valor de la opción será:

$$\max(X_t - k)$$

Dicha opción tendrá un valor presente:

$$e^{\alpha t} \max(X_t - k)$$

Si c es el precio (a tiempo 0) de la opción, tenemos que, para comprar la opción con retorno esperado 0, se debe de cumplir:

$$\mathbb{E}_P[e^{-\alpha t} \max(X_t - k)] = c$$

Esto implica:

$$e^{-\alpha t}\mathbb{E}_P[\text{máx}(X_t - k)] = c$$

Vamos a obtener $\mathbb{E}_P[\text{máx}(X_t - k)]$, utilizando la definición:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}(x_0 e_t^y - k)\frac{1}{\sqrt{2\pi + \sigma^2}}e^{\frac{-(y-t\mu)^2}{2+\sigma^2}}dy$$

La talacha detrás de esto está diabólica (ver en el apéndice), por algo se ganaron el Nobel con esto, así que ahí va el resultado:

$$\mathbb{E}_P[\text{máx}(X_t - k)] = k\Phi(-a) + x_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}\Phi(\sqrt{t}\sigma - a)$$

donde:

$$a = \frac{\ln(\frac{k}{x_0}) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}$$

4. Teoría de colas

Teorema de Little El teorema consiste en la siguiente ecuación:

$$L = \lambda\mathbb{E}(w_s)$$

Donde L es el número esperado de unidades en el sistema. **Demostración**