Análisis I

Basado en las lecturas de César Luis García García
Notas tomadas por Daniel Vélez Moyado

Primavera 2026

Índice

1. Los números reales

1.1. Conjuntos finitos, conjuntos numerables y no-numerables

Def Un conjunto es una colección de objetos (llamados elementos del conjunto) definidos por alguna propiedad.
Observación: Denotamos a los conjuntos con letras mayúsculas, podmos denotar un conjunto como

$$A = \{a, b, c\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

- Si P es una propiedad: $\{x|P(x)\}$ se lee: "el conjunto de elementos x tales que $P(x)$ es verdadera"

- Si tenemos algún conjunto de referencia U: $\{x \in U|P(x)\}$
- Existe un conjunto sin elementos llamado el conjunto vació: $\emptyset$
- Si A es un conjunto y a es un elmento de A lo denotamos $a \in A$
- Relación de contención entre conjuntos:
Si A y B son conjuntos, diremos que A es subconjunto de B, denotando $A \subset B$ si $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.
- Dos conjuntos son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$

Conjunto potencia: Si A es un conjunto, se denotá $\mathcal{P}(A)$ al conjunto cuyos elementos son elementos son subconjunto de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{B|B \subset A\}$$

Observación: Se puede demostrar que $\mathcal{P}(A)$ tiene $2^{|A|}$ elementos. Usando una función $\mathscr{F}$, tal que e

Def Si A, B son conjuntos
- Unión de A y B : $A \cup B = \{x|x \in A \text{ ó } x \in B\}$
- Intersección de A y B : $A \cap B = \{x|x \in A \text{ y } x \in B\}$
- Complemento relativo de B : $A|B = \{x|x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Conjunto vació: Es un conjunto que carece de elementos, lo denotamos como $\emptyset$, este conjunto es único. Ya que si suponemos otro conjunto vació $\emptyset^*$ tendríamos $\emptyset^* \subset \emptyset$ y $\emptyset \subset \emptyset^*$, por lo tanto son iguales. Además se sostiene $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Producto cartesiano: Si A, B son subconjuntos de algún conjunto X, el producto cartesiano de A con B es:

$$A \times B = \{\{\{a\}, \{a, b\}\} \quad | \quad a \in A, b \in B\}$$

De este producto podemos observar que $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$ y $\{a, b\} \in \mathcal{P}(X)$ por lo que $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Está notación es la manera conjuntista de observar dicho producto, solemos simplificar este producto así $(a, b) \in A \times B$.

Definición Considerar A, B conjuntos no vacíos, una función $f : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$ que cumple :

a. $\forall a \in A, \exists B$ tal que $(a, b) \in f$

b. Si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f \Rightarrow b = b'$

Nota: Si $a \in A$ y $(a, b) \in f$, denotamos b como $f(a)$.

Definición Si A, B son conjuntos no vacios y sea la función $f : A \to B$

a. Si $C \subset A, C \neq \emptyset$, la imagen bajo f de C es un subconjunto de B dado por

$$f(C) = \{f(a) | a \in C\} \subset B$$

b. Si $D \subset B, B \neq \emptyset$ la imagen inversa de D bajo f es el subconjunto de A dado por

$$[f \in D] = f^{-1}(D) := \{a \in A | f(a) \in D\}$$

Si $f : A \to B$ es una función, A_1, A_2 son subconjuntos no vaciós de A y definimos $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2)$, observamos los siguientes casos

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
3. $[f \in B_1 \cup B_2] = [f \in B_1] \cup [f \in B_2]$
4. $[f \in B_1 \cap B_2] = [f \in B_1] \cap [f \in B_2]$

Definición Sea una relación $f : A \to B$, dicha relación f es una función:

1. f es inyectiva sii $\forall b \in B$, $[f \in \{b\}]$ tiene a lo más un elemento
2. f es suprayectiva sii $\forall b \in B, [f \in \{b\}] \neq \emptyset$
   En otras palabaras $f(A) = B$

1.2. Conjuntos equivalentes (cardinalidad). No-numerabilidad de (0, 1)

Definición Si A y B son conjuntos diremos que A y B son **equivalentes** ($A \sim B$) si existe una función biyectiva entre ellas.

Observación: $\sim$ es una relación de equivalencia en la clase de los conjuntos

La clase de equivalencia se etiqueta con lo que se llama el **cardinal** de los conjuntos en la clase y se denota $\#(A)$ o $|A|$.

Proposición: Si A es un conjunto y $g : A \to \mathcal{P}(A)$ es una función inyectiva y no sobreyectiva. Por lo que $\#(A) \leq \#(\mathcal{P}(A))$.

Sea A un conjunto, decimos que A es **contable** sii A es finito o A es numerable. En otras palabras que $A \sim \mathbb{N}$.

Observación:

1 A es contable y $B \subseteq A$ entonces B es contable.

2 Si A es infinito entonces A contiene algún subconjunto numerable

3 Para un conjunto A infinito, las siguientes son equivalentes:

   a. A es numerable
   b. $\exists \phi : A \to \mathbb{N}$ inyectiva
   c. $\exists \psi : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva

4 Si $\mathcal{Q}$ es una colección numerable de conjutnos numerabales digamos que $\mathcal{Q} = \{A_1, A_2, ...\}$ entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ es un conjunto numerable}$$

1.3. El campo ordenado de los números reales

1.4. Axioma del supremo y propiedad arquimediana

1.5. Densidad de diversos subconjuntos de $\mathbb{R}$

1.6. Principio de intervalos anidados

1.7. Conjunto de Cantor

2. Topología en $\mathbb{R}^n$ y en espacios métricos

2.1. El espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$

2.2. Normas y nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$

2.3. Principio de las celdas anidadas en $\mathbb{R}^n$ y teorema de Bolzano-Weierstrass