ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2018-20 - Sección 3
Parcial 2 – Octubre 18, 2018
Prof. Rodrigo Cardoso

1 **[20/100]**

Sea U un conjunto universal. Considere la operación $n: 2^U \times 2^U \to 2^U$ definida así:

$$n(X,Y) = (X \cap Y)^c.$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si es falsa o verdadera y justifique su respuesta.

1a (10/20) n es asociativa

FALSO

[2/10]

Contraejemplo: Sean $U = \{1,2,3\}$, $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$, $Z = \{3\}$

Ahora:

$n(n(X,Y),Z)$
$=$ $\langle$Def $X,Y,Z\rangle$
$n(n(\{1\},\{2\}),\{3\})$
$=$ $\langle$Def $n\rangle$
$n((\{1\}\cap\{2\})^c,\{3\})$
$=$ $\langle\{1\}\cap\{2\}=\varnothing\rangle$
$n(\varnothing^c,\{3\})$
$=$ $\langle\varnothing^c = \{1,2,3\}\rangle$
$n(\{1,2,3\},\{3\})$
$=$
$\{1,2\}$

$n(X,n(Y,Z))$
$=$ $\langle$Def $X,Y,Z\rangle$
$n(\{1\},n(\{2\},\{3\}))$
$=$ $\langle$Def $n\rangle$
$n(\{1\},(\{2\}\cap\{3\})^c)$
$=$ $\langle\{2\}\cap\{3\}=\varnothing\rangle$
$n(\{1\},\varnothing^c)$
$=$ $\langle\varnothing^c = \{1,2,3\}\rangle$
$n(\{1\},\{1,2,3\})$
$=$
$\{2,3\}$

[8/10]

¿Cómo intuir un contraejemplo? Al buscar mostrar la asociatividad se encuentra que

$n(n(X,Y),Z)$
$=$ $\langle$Def $n\rangle$
$(n(X,Y) \cap Z)^c$
$=$ $\langle$Def $n\rangle$
$((X\cap Y)^c \cap Z)^c$
$=$ $\langle$De Morgan$\rangle$
$(X\cap Y) \cup Z^c$

Y no hay "simetrías" entre X,Y,Z …

1b (10/20) $A \setminus B \subseteq n(A,B)$

VERDADERO

[2/10]

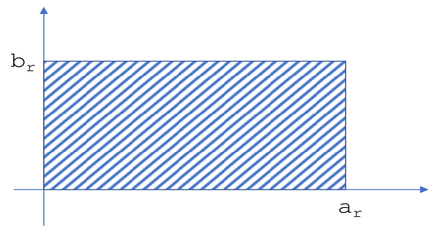
Teo: $A \setminus B \subseteq n(A,B)$
Dem:
$A \setminus B$
$=$ $\langle$Def $\setminus\rangle$
$A \cap B^c$

$\subseteq$ ⟨X∩Y ⊆ Y⟩
B^c
$\subseteq$ ⟨X ⊆ X∪Y⟩
$A^c \cup B^c$
= ⟨De Morgan⟩
$(A \cap B)^c$
= ⟨Def n⟩
n(A,B)

[8/10]

2 **[30/100]**

Un rectángulo r en el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$, con uno de sus vértices en el origen y con lados paralelos a los ejes puede ser representado con un par (a_r,b_r), donde $a_r,b_r \in \mathbf{R}$, $a_r,b_r \neq 0$. El punto (a_r,b_r) corresponde al vértice diagonal al que se encuentra en el origen:



Sea Rect el conjunto de estos rectángulos. Considere la relación en Rect definida por

Q(r,s) ≈ "r tiene lados de la misma longitud que s"

2a (9/30) Establezca una expresión formal, en términos de los elementos de los pares (a_r,b_r) y (a_s,b_s), que establezca cuándo Q(r,s). Justifique su respuesta.

$Q(r,s) = (|a_r|=|a_s| \wedge |b_r|=|b_s|) \vee (|a_r|=|b_s| \wedge |b_r|=|a_s|)$

[9/9]

2b (9/30) Muestre que Q es una relación de equivalencia.

Q es *reflexiva*:
Q(r,r)
=
"r tiene lados de la misma longitud que r"
=
true

[3/9]

Q es *simétrica*:
Q(r,s)
=
"r tiene lados de la misma longitud que s"
=
"s tiene lados de la misma longitud que r"
=
Q(s,r)

[3/9]

Q es *transitiva*:

$Q(r,s) \land Q(s,t)$

=

"r tiene lados de la misma longitud que s" $\land$ "s tiene lados de la misma longitud que t"

$\Rightarrow$

"s tiene lados de la misma longitud que t"

=

$Q(s,t)$

[3/9]

Variante:

Q es *reflexiva*:

$Q(r,r)$

=

$(|a_r|=|a_r| \land |b_r|=|b_r|) \lor (|a_r|=|b_r| \land |b_r|=|a_r|)$

=

true

[3/9]

Q es *simétrica*:

$Q(r,s)$

=

$(|a_r|=|a_s| \land |b_r|=|b_s|) \lor (|a_r|=|b_s| \land |b_r|=|a_s|)$

=

$(|a_s|=|a_r| \land |b_s|=|b_r|) \lor (|a_s|=|b_r| \land |b_s|=|a_r|)$

=

$P(s,r)$

[3/9]

Q es *transitiva*:

Teo: $Q(r,s) \land Q(s,t) \Rightarrow Q(s,t)$

Dem: Por hipótesis

Hip: $(|a_r|=|a_s| \land |b_r|=|b_s|) \lor (|a_r|=|b_s| \land |b_r|=|a_s|)$,

$(|a_s|=|a_t| \land |b_s|=|b_t|) \lor (|a_s|=|b_t| \land |b_s|=|a_t|)$

// a demostrar: $(|a_r|=|a_t| \land |b_r|=|b_t|) \lor (|a_r|=|b_t| \land |b_r|=|a_t|)$

Casos:
(1) $|a_r|=|a_s|$, $|b_r|=|b_s|$, $|a_s|=|a_t|$, $|b_s|=|b_t|$
(2) $|a_r|=|a_s|$, $|b_r|=|b_s|$, $|a_s|=|b_t|$, $|b_s|=|a_t|$
(3) $|a_r|=|b_s|$, $|b_r|=|a_s|$, $|a_s|=|a_t|$, $|b_s|=|b_t|$
(4) $|a_r|=|b_s|$, $|b_r|=|a_s|$, $|a_s|=|b_t|$, $|b_s|=|a_t|$

Casos exhaustivos:

(1) $\lor$ (2) $\lor$ (3) $\lor$ (4) corresponde a la distributividad de la conjunción las dos hipótesis, separada en hipótesis simples.

Caso (1): (1) $\Rightarrow$ $|a_r|=|a_t| \land |b_r|=|b_t|$

Caso (2): (2) $\Rightarrow$ $|a_r|=|b_t| \land |b_r|=|a_t|$

Caso (3): (3) $\Rightarrow$ $|a_r|=|b_t| \land |b_r|=|a_t|$

Caso (4): (4) $\Rightarrow$ $|a_r|=|a_t| \land |b_r|=|b_t|$

En cualquier caso, vale

$(|a_r|=|a_t| \wedge |b_r|=|b_t|) \vee (|a_r|=|b_t| \wedge |b_r|=|a_t|)$

=

$Q(r,t)$.

[3/9 + Bono: 5]

2c (6/30) Determine la clase equivalencia $[(3,5)]_Q$.

$[(3,5)]_Q = \{(3,5),(3,-5),(-3,5),(-3,-5),(5,3),(5,-3),(-5,3),(-5,-3)\}$

[6/6]

2d (6/30) ¿Cuántos elementos tiene $[(a,b)]_Q$?

Si $a \neq b$, hay 8 parejas (x,y) tales que $x=\pm a$, $y=\pm b$.

Si $a=b$, hay 4 parejas (x,y) tales que $x=\pm a$, $y=\pm a$.

[6/6]

3 **[30/100] RO224**

Sean (véase **2**):

$Rect1 = \{r:Rect \mid a_r, b_r > 0\}$

y defínanse las relaciones:

$ma : Rect1 \leftrightarrow Rect1$

$mam: Rect1 \leftrightarrow Rect1$

de modo que:

$ma(r,s) \equiv a_r*b_r \geq a_s*b_s$

$maq(r,s) \equiv a_r*b_r \geq a_s*b_s \wedge a_r \geq a_s$

3a (8/30) Pruebe que ma no es una relación de orden parcial

En Rect1, considere los rectángulos $r=(1,2)$ y $s=(2,1)$. Entonces, $a_r*b_r=a_s*b_s=2$, de modo que $ma(r,s)$ y $ma(s,r)$, pero $r \neq s$.

Es decir, ma no es antisimétrica.

[8/8]

3b (14/30) Pruebe que maq es una relación de orden parcial

maq es *reflexiva* en Rect1:

$maq(r,r)$

=

$a_r*b_r \geq a_r*b_r \wedge a_r \geq a_r$

=

$true \wedge true$

=

$true$

[4/14]

maq es *transitiva* en Rect1:

$maq(r,s) \wedge maq(s,t)$

$=$

$a_r*b_r \geq a_s*b_s \ \wedge\ a_r \geq a_s \ \wedge\ a_s*b_s \geq a_t*b_t \ \wedge\ a_s \geq a_t$

$\Rightarrow$

$a_r*b_r \geq a_t*b_t \ \wedge\ a_r \geq a_t$

$=$

maq(r,t).

[4/14]

maq es *antisimétrica* en Rect1:

maq(r,s) ∧ maq(s,r)

$=$

$a_r*b_r \geq a_s*b_s \ \wedge\ a_r \geq a_s \ \wedge\ a_s*b_s \geq a_r*b_r \ \wedge\ a_s \geq a_r$

$\Rightarrow$

$a_r*b_r = a_s*b_s \ \wedge\ a_r = a_s$

$\Rightarrow$

$b_r = b_s \ \wedge\ a_r = a_s$

$=$

r = s

[6/14]

3c (8/30) ¿Es maq un orden total? Explique su respuesta.

No.

[2/8]

Hay rectángulos que no son maq-comparables. Por ejemplo:

r=(6,1), s=(3,3)

Entonces:

$6*1 \geq 3*3 \ \wedge\ 6 \geq 3 \equiv$ false. Por tanto: ¬maq(r,s)

$3*3 \geq 6*1 \ \wedge\ 3 \geq 6 \equiv$ false. Por tanto: ¬maq(s,r)

[6/8]

4 **[20/100]**

Cada empleado de una empresa está pensado para realizar algunos trabajos. Cada trabajo requiere una capacitación en algunas disciplinas, y el departamento de recursos humanos de la empresa ha diseñado unos cursos para enseñar a sus empleados disciplinas que puedan requerirse para los trabajos.

Sean

- E : conjunto de *empleados* de la empresa
- T : conjunto de *trabajos* que los empleados deben realizar
- D : conjunto de *disciplinas* que los trabajos de la empresa pueden requerir
- C : conjunto de *cursos* diseñados para capacitar a los empleados

Considere las relaciones

- f: E ↔ T , donde: f(e,t) ≈ "el empleado e debería realizar el trabajo t"
- r: T ↔ D , donde: r(t,d) ≈ "el trabajo t requiere conocer la disciplina d"
- s: C ↔ D , donde: s(c,d) ≈ "el curso c capacita en la disciplina d"

Exprese en términos de f, r, s y operaciones relacionales sobre ellas, para definir formalmente las relaciones que a continuación se describen:

4a (6/20) ed: E ↔ D
donde: ed(e,d) ≈ "para realizar su trabajo, el empleado e deben conocer la disciplina d"

```
    ed(e,d)
=
    (∃t:T| f(e,t) ∧ r(t,d))
=
    (f∘r)(e,d)
```

Entonces:
   ed = f∘r

[6/6]

4b (6/20) dc: E ↔ E
donde: dc(e1,e2) ≈ "para realizar sus trabajos, el empleado e1 y el empleado e2 deben conocer alguna disciplina común"

$$
\begin{aligned}
& dc(e1,e2)\\
=\ & (\exists d{:}D \mid ed(e1,d) \wedge ed(e2,d))\\
=\ & (\exists d{:}D \mid ed(e1,d) \wedge ed^{T}(d,e2))\\
=\ & (ed\circ ed^{T})(e1,e2)\\
=\ & f\circ r\circ (f\circ r)^{T}(e1,e2)\\
=\ & (f\circ r\circ r^{T}\circ f^{T})(e1,e2)
\end{aligned}
$$

Resumiendo:
$dc = f\circ r\circ (f\circ r)^{T}$
o bien $dc = f\circ r\circ r^{T}\circ f^{T}$

[6/6]

4c (8/20) cc: E ↔ E
donde: cc(e1,e2) ≈ " el empleado e1 y el empleado e2 pueden coincidir en un curso"

Se puede calcular la relación
   ec: E ↔ C
donde
   ec(e,c) ≈ " el empleado e puede tomar el curso c"

Para definir ec:

```
   ec(e,c)
=
   (∃d:D | ed(e,d) ∧ s(c,d))
```

$=$

$(\exists d{:}D \mid ed(e,d) \wedge s^T(d,c))$

$=$

$(ed \circ s^T)(e,c)$

De modo que:

$ec = ed \circ s^T$

Ahora:

$cc(e1,e2)$

$=$

$(\exists c{:}C \mid ec(e1,c) \wedge ec(e2,c))$

$=$

$(\exists c{:}C \mid ec(e1,c) \wedge ec^T(c,e2))$

$=$

$ec \circ ec^T(e1,e2)$

Así:

$$
\begin{aligned}
cc &= ec \circ ec^T \\
&= (ed \circ s^T) \circ (ed \circ s^T)^T \\
&= (f \circ r \circ s^T) \circ (f \circ r \circ s^T)^T \\
&= f \circ r \circ s^T \circ s \circ r^T \circ f^T
\end{aligned}
$$

[8/8]