Parte 1: EJERCICIOS DE COMBINATORIA

Lean y estudien el siguiente **ejercicio de examen** (Septiembre de 2008)

Habitualmente las caras de los dados de juego están numeradas de 1 á 6, de manera que la suma de los números que se hallan en caras opuestas es 7. Sin embargo, en este ejercicio las preguntas se refieren a dados que no cumplen esa condición Se pregunta, cuántos dados pueden existir de modo que:
a) (**2 puntos**) Sólo un par de caras opuestas sume 7.
b) (**1 punto**) Con sólo dos pares de caras que sumen 7.
c) (**1 punto**) Sin ningún par de caras opuestas que sumen 7.

Solución

Este ejercicio admite varias interpretaciones. Sin embargo, **en todas ellas la cuestión b) tiene siempre contestación negativa**: Si se han fijado dos pares de caras opuestas con suma 7, el par restante también sumará 7. Queda, por tanto, contestar a las cuestiones a) y c).
a) Supongamos que hemos fijado un par de caras (arriba y abajo) cuyos números sumen 7, lo cual podemos hacer de **tres maneras**: (1,6), (2,5) y (3,4). No habrá más pares de caras que sumen 7 si en las caras laterales del dado aparecen contiguos dos números que sumen 7. Por ejemplo, si elegimos el par (1,6) para empezar, bastará con saber que 3 y 4 no se hallan enfrentados en los laterales del dado. Esto puede ocurrir de cuatro maneras diferentes: Si la tabla siguiente representa las caras laterales:

3 4 2 5

seleccionemos las dos primeras posiciones para el 3 y el 4 (hay dos formas: 3-4 y 4-3), así que quedan las otras dos para el 5 y el 2 (en las versiones 2-5 y 5-2). Por tanto, hay **cuatro formas** de tener un dado con sólo un par de caras (1,6) que suman 7. Como podemos cambiar (1,6) por (2,5) y (3,4), aplicando la **regla fundamental de la Combinatoria**, hasta ahora habrá en total 12 tipos de dados con sólo un par de caras opuestas que sumen 7. Además, dado que el par (1,6) puede aparecer como 1-6 y 6-1, tendremos en total **24 tipos de dados con sólo un par de caras opuestas que sumen 7**.
c) Usemos el mismo argumento que en el caso a). Elijamos una cara, p. ej. la 1, y hagamos que su opuesta no sea su complementaria a 7 (en el ejemplo, que no sea 6). Eso puede hacerse de **4 maneras diferentes**. Para las cuatro caras laterales queda una pareja que suma 7 y otra que no (en el ejemplo, si tomamos (1,2) para empezar, son (3,4) y (5,6) respectivamente). Pero ya sabemos que hay cuatro modos de conseguir que la pareja que suma 7 no se halle enfrentada. Por tanto, según el principio fundamental de la combinatoria habrá **32 tipos de dados en los que no hay pares de caras opuestas que sumen 7**.

NOTA 1: Si consideramos que (3,4) es lo mismo que (4,3), etc., el ejercicio se reducirá a estudiar un dado coloreado con tres colores, correspondientes a los pares (1,6), (2,5) y (3,4) y estudiar la distribución cromática. Por supuesto, es más fácil y salen números diferentes.
NOTA 2: Aún hay más interpretaciones válidas para el ejercicio…

Otro ejercicio de examen (Enero de 2008)

Un *sudoku* de 16 cuadros es un esquema como el siguiente, donde en cada columna, fila y cuadrado aparece una y sólo una vez cada una de las cifras 1, 2, 3, 4:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Calcule razonadamente el número total de *sudoku*s posibles de 16 cuadros.

Solución.
a) Comenzamos eligiendo la primera fila, que es una permutación de los cuatro elementos $\{1, 2,3, 4\}$. Por tanto, hay 4!=**24 posibilidades para la primera fila**.
b) Para la segunda fila: Los dos primeros puestos han de ser ocupados por los dos números que no se hallan en las dos primeras casillas de la primera fila. Esto puede hacerse de 2 maneras diferentes. Lo mismo puede decirse de las posiciones tercera y cuarta de la segunda fila en el cuadrado superior derecho. Por tanto hay **4 posibilidades de elección para la segunda fila**.
c) Observamos ahora que la tercera fila queda totalmente determinada por las dos primeras casillas (y también el resto del *sudoku*). Pero hay **4 formas diferentes de rellenar esas dos casillas**. Por ejemplo, para la elección de las dos primeras filas dada por la figura de debajo, las posibilidades de rellenar las dos primeras casillas de la tercera fila sin violar las reglas del *sudoku* son estas cuatro: (2-1), (4-3), (4-1) y (2-3).

1	2	3	4
3	4	1	2

Usando ahora el principio básico de la Combinatoria, el número posible de *sudokus* de 16 cuadrados es $24\times 4 \times 4$ **= 384**.

Propuesta de ejercicios del libro de Rosen:

1. Lean (e intenten) los del **Capítulo 4, páginas 287-290**
2. Ídem id**, páginas 301-303**. NOTA IMPORTANTE: En el libro de Rosen se llama ***r*-permutaciones** a lo que en clase hemos denominado **variaciones de *n* elementos tomados de *r* en *r***.

Lecturas del libro de Rosen:

Lean el **apartado 4.4 (páginas 303-308)**, para plantear posibles cuestiones en clase.

Un ejercicio suplementario para pensar un poco.

Habitualmente usamos el sistema decimal para representar números grandes. Con este método, p. ej. el número 314 es una expresión abreviada de la suma siguiente:

$$3 \times 100 + 1 \times 10 + 4 \times 10 = 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0 ,$$

de manera que utilizamos las potencias sucesivas de 10 para escribir números cada vez mayores.

Pero también podríamos emplear, en lugar de la sucesión creciente de potencias de 10, otra también creciente, por ejemplo la sucesión de las factoriales de los números naturales:

$$\{0!, 1!, 2!, 3!, 4!, 5!,...\} = \{1, 1, 2, 6, 24, 120,...\}$$

De este modo, por ejemplo el número 49 quedaría representado como:

$$49 = 2 \times 24 + 1 = 2 \times 4! + 0 \times 3! + 0 \times 2! + 1 \times 1! + 0 \times 0! = 20010$$

Según esto, cualquier número entero *n* se puede escribir así:

$$n = \sum_{k=0}^{k=N_k} a_k k!, \text{ con } a_k \leq k.$$

Cuestiones:

1. Mostrar que en este sistema todos los nombres de los números acaban en 0.
2. Comprobar que *n*! se escribe como un 1 seguido de *n* ceros.
3. Construir los pasos iniciales de una tabla representativa.

… y para pensar aún un poco más:

Intente comprobar que los números entre 0 y 1 se pueden escribir también con este sistema, esto es:

$$\text{Si } 0 < x < 1, \text{ entonces } x = \sum_{k=0}^{k=N_k} a_k \frac{1}{k!}, \text{ con } a_k \leq k.$$

ALGUNOS EJEMPLOS MÁS PRÁCTICOS

Ejemplo 1.
¿Cuántas ristras de 6 bits hay que comiencen con 1 y acaben con 00?

Solución:
Este ejercicio trata claramente de *Variaciones con Repetición*. Las ristras buscadas son del tipo 1-XXX-00, donde X puede ser 0 ó 1. Además hay que tener en cuenta el orden en que aparecen los dígitos binarios, *p. ej.* la ristra 1-001-00 se considera diferente de la 1-010-00. Por tanto, el número de ristras es el de posibles grupos XXX, esto es, $V_3^2 = 2^3 = 8$. Si los escribimos, tendremos: 1-000-00, 1-001-00, 1-010-00, 1-100-00, 1-111-00, 1-011-00, 1-101-00 y 1-110-00.
Notemos que, como 3 > 2, obligatoriamente habrá un bit con nombre repetido en la sucesión XXX. Esta observación se llama a veces "*principio del palomar*", "*del casillero*", o "*principio de Dirichlet*".
Notamos también que el total de ristras de 6 bits es $V_6^2 = 2^6 = 64$.

Ejemplo 2.
A un partido de fútbol asisten 6543 espectadores (de pago). Demostrar que hay por lo menos 17 que cumplen años el mismo día del año.

Solución:
Este ejercicio es una "aplicación del *principio del palomar*". Como el año tiene 365 días (si no es bisiesto, claro), hay que distribuir a los 6543 espectadores en 365 casillas. Como 6543 > 365, en alguna casilla habrá más de uno (he aquí el famoso principio en acción). Dado que 6543:365 = 17,92…, encontraremos al menos un día en el que cumplen años más de 17 espectadores.
Nota importante: El ejercicio asegura que existe algún día en el que hay más de 17 cumpleañeros simultáneos entre los espectadores: Perfectamente, podrían todos cumplir años el mismo día, y lo pedido seguiría siendo cierto.

Ejemplo 3.

Consideremos el conjunto de 3 elementos $\{a,b,c\}$. Sabemos que existen 3! = 6 permutaciones en él. Entre ellas hay algunas que forman *grupos de permutaciones circulares*. Por ejemplo, (*abc*), (*bca*) y (*cab*) forman uno de esos grupos. Se llaman circulares porque las letras siempre conservan sus posiciones relativas:

$$\ldots \to a \to b \to c \to a \to b \to c \to \ldots$$

¿Cuántos grupos hay de permutaciones circulares de 3 elementos?
¿Y de *n* objetos?

Solución:
En este ejercicio, para la primera pregunta, fijemos un elemento, *p. ej.* el a. A partir de él colocamos b y c en cualquiera de las dos formas posibles: bc ó cb y así obtendremos las siguientes pautas:

$$\ldots \to a \to b \to c \to a \to b \to c \to \ldots$$

$$\ldots \to a \to c \to b \to a \to c \to b \to \ldots$$

Luego hay sólo dos posibles grupos de permutaciones circulares con tres objetos. Notamos ahora que 2 = 2!, y pasamos al caso de n objetos. Comencemos fijando el primero, a_1, y pongamos a continuación de él una permutación cualquiera de los $n-1$ restantes. Como de éstas hay $(n-1)!$, éste es número posible de grupos de permutaciones circulares. En fórmulas: $PC_n = (n-1)! = P_{n-1}$.

MÁS EJERCICIOS DE COMBINATORIA, INDUCCIÓN, ETC.

Ejercicio 1.
Demostrar por inducción la siguiente fórmula: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Nótese que x es un número cualquiera, fijo, positivo y distinto de 1 (para no molestar ¿por qué?), y que la inducción hay que hacerla sobre la variable n.

Ejercicio 2.
Calcular el valor de la fórmula $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$. **NOTA**: Usar el desarrollo del binomio $(1+2)^n$.

Solución:
Recuerde, según la NOTA, el desarrollo del binomio: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Elija un valor adecuado para x, y ya está.

Ejercicio 3.

Calcule el coeficiente de x^2yz en el desarrollo del trinomio $(x+2y+3z)^4$.

Solución: Recuerde, para calcular, que el desarrollo de $(a+b+c)^n$ es

$$\sum_{k_1+k_2+k_3=n} P_{k_1k_2k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}.$$

Ejercicio 4.

Los teléfonos fijos españoles poseen una numeración con las siguientes características:

- Tienen 9 cifras.

- La primera puede ser 9 u 8.
- La segunda y tercera representan números entre 11 y 63 (esto no es exactamente así, pero para el ejercicio lo consideraremos cierto)

¿Cuántos números posibles hay para teléfonos fijos?

NOTA: Use el principio fundamental de la Combinatoria.

AÚN MÁS JERCICIOS DE COMBINATORIA

Ejercicio 1.
¿Cuántas "palabras" de longitud *k* se pueden construir con *n* letras?
a) Si cada letra puede aparecer sólo una vez.
b) Si hay una letra repetida, sólo puede aparecer dos veces en la palabra.
Calcularlo en particular para $n = 7, k = 4$.

Ejercicio 2.
Demostrar, usando el llamado *principio del palomar*, que dados *n* números $(n \geq 2)$ enteros, entre ellos hay por lo menos 2 cuya diferencia es múltiplo de $n-1$ ¿Y si hablamos de la suma en lugar de la diferencia?

Ejercicio 3.
Considere la regla de recurreencia $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ junto con las condiciones iniciales $a_1 = 3, a_2 = 5$. Calcule los seis primeros términos de la familia de números a_n e intente hallar una fórmula sencilla y cerrada equivalente a la recurrencia.

Ejercicio 4.
En el Análisis Matemático se usa con frecuencia la llamada "desigualdad de Bernouilli": $(1+x)^n \geq 1 + nx$, válida para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x > 0$.

a) ¿De dónde sale esta fórmula?
b) Demostrarla.
c) Probar que puede *mejorarse* en la forma $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n^2 - n}{2}x^2$ ¿Qué se quiere decir aquí con *mejorar*?

Ejercicio 5.
Considérese la siguiente permutación de 9 elementos:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ f & g & h & d & i & e & c & b & a \end{pmatrix}$$

a) Escribirla como *producto* de **ciclos**.
b) Representarla como *producto* de **transposiciones.**

Y TODAVÍA ALGUNOS EJERCICIOS MÁS DE COMBINATORIA

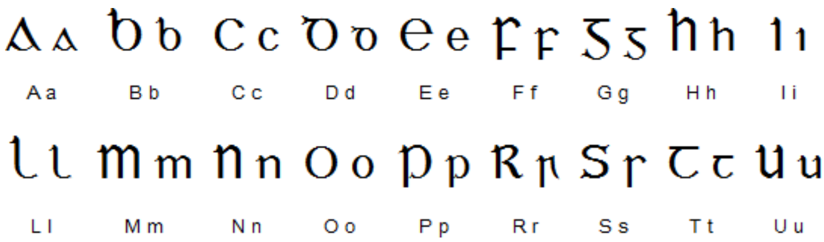
Ejercicio 1.
¿Cuántos ceros hay al final del número **999!**? ¿y del **1000!**?

Ejercicio 2.
Demostrar que los números de Stirling de segunda clase satisfacen las siguientes relaciones:

$$S_{n+1,n} = \binom{n+1}{2} \text{ y } S_{n+1,2} + 1 = 2^n .$$

PISTA: ESTUDIAR EL TRIÁNGULO DE LOS NÚMEROS DE STIRLING.

Ejercicio 3.
La figura siguiente muestra el alfabeto irlandés conocido como *ogham* o *alfabeto uncial*, que sólo tiene 18 letras:



En las largas tardes de invierno, en el célebre pub *An bheoir*[1] se ha planteado un juego que consiste en ordenar lexicográficamente (como en los diccionarios normales) todas las permutaciones de las 18 letras y escribirlas en servilletas. No importa que se mezclen mayúsculas y minúsculas. El ganador de cada ronda recibirá como premio el peso del gato del propietario del pub en cerveza, aunque se le recomienda compartirla con el resto de la clientela, pues el animal es más bien rollizo… En la primera ronda del juego, ganará quien escriba correctamente y en su orden las cuatro palabras centrales de la lista ¿Cuáles son?

[1] Significa “La cerveza”.

Parte 2: EJERCICIOS DE ARITMÉTICA

Primer ejercicio. Calcular las descomposiciones en producto de números primos de $a = 185; b = 950; c = 1000; d = 1155$. A partir de ellas, hallar también: $MCD(a,b); MCM(c,d); MCD(a,b,c); MCM(b,c,d)$.

Segundo ejercicio (CON SOLUCIÓN). Si n es un número entero positivo, representaremos por $d(n)$ el número total de sus divisores. Por ejemplo, $d(6) = 4$ porque los divisores de 6 son $\{1,2,3,6\}$.

a) Mostrar que si *p* es primo, entonces $d(p) = 2$. **Claramente es así porque los números primos sólo pueden tener dos divisores: El 1 y el propio número.**

b) Si *p* es primo, entonces $d(p^k) = k+1$ para cualquier natural *k*. **Es fácil, porque todos los posibles divisores de** p^k **son de la forma** p^j, con $j = 0,1,...,k-1,k$. **Por tanto hay** $k+1$ **divisores**.

c) ¿Cuánto valdrá $d(p^k q^r)$? **Haciendo una tabla se ve de inmediato que** $d(p^k q^r) = (k+1)(r+1)$.

d) Generalizar c). **Dado un número entero positivo no nulo *n*, descompuesto en factores primos,** $n = p^{a_1} p^{a_2} ... p^{a_k}$ **, aplicando repetidas veces el resultado anterior se obtiene que** $d(n) = d(p^{a_1} ... p^{a_k}) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_k + 1)$.

e) Hallar el número total de divisores de 14850. **Puesto que** $14850 = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$, **se tiene**: $d(14850) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$.

Tercer ejercicio (CON SOLUCIÓN). La notación $a|b$ significa que "*a* divide á *b*".
Probar las siguientes implicaciones:

a) De $a|(b+c)$ y $a|b$ se deduce que $a|c$. **Para verlo, recordemos que** $a|(b+c)$ **quiere decir que existe un cierto número entero** q_1 tal que $a \times q_1 = b + c$. **De igual manera, habrá otro entero** q_2 tal que $a \times q_2 = b$. **Así pues, tendremos que:** $a \times q_1 = b + c = a \times q_2 + c$, de donde $c = a \times (q_1 - q_2) = a \times q_3$, **o bien** $a|c$.

b) De $a|bc$ se deduce que $a|b$ ó $a|c$. **Este no necesita casi escribir fórmulas. Si** $a|bc$, **descompongamos *a* y *bc* en factores primos. En la descomposición de *a* habrá sólo factores de los que aparecen en la descomposición del producto, y con exponentes como mucho iguales a los del producto. Si sólo hubiera factores de los de *b*, *a* dividiría a *b* (lo mismo para *c*). Si hubiese de los dos, entonces *a* divide a ambos, *b* y *c*.**

Cuarto ejercicio (CON SOLUCIÓN). Probar que, cualquiera que sea el número natural $n \geq 1$, la expresión $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ representa un número divisible por 133.

Se trata de un ejercicio claro de inducción.

El primer paso es fácil:
$n = 1 \Rightarrow 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133 = 133 \times 1$

$n = 2 \Rightarrow 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 133 \times 23$

Segundo paso: Supongamos ahora que al poner $n-1$ **en lugar de** n **el número obtenido es múltiplo de** 133**, esto es,** 133 **divide á** $11^n + 12^{2(n-1)-1} = 11^n + 12^{2n-3}$.

Tercer paso: Obtengamos que la propiedad dicha es válida también para n**, basándonos en la validez del segundo paso.**
En efecto:

$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11 \times 11^n + 12^2 \times 12^{2n-3} = 11 \times 11^n + 144 \times 12^{2n-3} =$

$= 11 \times 11^n + (144 - 11 + 11) \times 12^{2n-3} = 11 \times 11^n + 11 \times 12^{2n-3} + (144 - 11) \times 12^{2n-3} =$

$= 11 \times (11^n + 12^{2n-3}) + 133 \times 12^{2n-3} =$

$= 11 \times (\text{un múltiplo de } 133) + \text{otro múltiplo de } 133.$

Quinto ejercicio. Aplicar el algoritmo de Euclides para determinar los MCD de todas las parejas de números del ejercicio primero.

Sexto ejercicio (CON SOLUCIÓN). Calcular los coeficientes necesarios para escribir el número 50 como combinación lineal de 25 y 35. ¿Es posible hacer lo mismo con los números 35 y 28? ¿por qué?
Se trata de ver si es posible encontrar dos números enteros R **y** S **(positivos o negativos) tales que** $25 \times R + 35 \times S = 50$.

Notemos, para empezar, que cualquier combinación lineal $25 \times p + 35 \times q$ **con coeficientes enteros es múltiplo del** MCD **de** 25 **y** 35**. Este resulta ser** 5**, que sí es divisor de** 50**. Por tanto, el problema tiene solución.**

Dividamos ahora $25 \times R + 35 \times S = 50$ **entre** 5 **para obtener** $5 \times R + 7 \times S = 10$.
Observamos que 5 **y** 7 **son primos entre sí, luego por el Teorema de Bézout existen dos números** r **y** s **tales que** $5 \times r + 7 \times s = 1$. **Directamente, o mediante el algoritmo de Euclides vemos que** $r = 3$ y $s = -2$, **esto es** $5 \times 3 + 7 \times (-2) = 1$. **Multipliquemos ahora esta ecuación sucesivamente por** 5 **y por** 10**, y tendremos:**

$[5 \times 3 + 7 \times (-2) = 1] \times 5 \quad \Rightarrow \quad 25 \times (3) + 35 \times (-2) = 5$

$[25 \times (3) + 35 \times (-2) = 5] \times 10 \quad \Rightarrow \quad 25 \times (30) + 7 \times (-20) = 50$

Por tanto, se obtiene que $R = 30$ y $S = -20$.

La contestación a la segunda pregunta es negativa, pues el MCD **de** 35 **y** 28 **es** 7**, que NO ES DIVISOR de 50.**

HE AQUÍ OTROS EJERCICIOS MÁS:

Primer ejercicio. Calcular las descomposiciones en producto de números primos de $a = 185; b = 950; c = 1000; d = 1155$. A partir de ellas, hallar también: $MCD(a,b); MCM(c,d); MCD(a,b,c); MCM(b,c,d)$.

Segundo ejercicio. Si n es un número entero positivo, representaremos por $d(n)$ el número total de sus divisores. Por ejemplo, $d(6) = 4$ porque los divisores de 6 son $\{1,2,3,6\}$.

f) Mostrar que si *p* es primo, entonces $d(p) = 2$.
g) Si *p* es primo, entonces $d(p^k) = k+1$ para cualquier natural *k*.
h) ¿Cuánto valdrá $d(p^k q^r)$?
i) Generalizar c).
j) Hallar el número total de divisores de 14850.

Tercer ejercicio. La notación $a|b$ significa que "*a* divide á *b*". Probar las siguientes implicaciones:

c) De $a|(b+c)$ y $a|b$ se deduce que $a|c$.
d) De $a|bc$ se deduce que $a|b$ ó $a|c$.

Cuarto ejercicio. Probar que, cualquiera que sea el número natural *n*, la expresión $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ representa un número divisible por 133.

Quinto ejercicio. Aplicar el algoritmo de Euclides para determinar los MCD de todas las parejas de números del ejercicio primero.

Sexto ejercicio. Calcular los coeficientes necesarios para escribir el número 50 como combinación lineal de 25 y 35. ¿Es posible hacer lo mismo con los números 35 y 28? ¿por qué?

OTROS EJERCICIOS DE ARITMÉTICA…

Primer ejercicio.

Establecer la validez de la llamada "**prueba de los nueves**", usada en las escuelas elementales para comprobar si una operación aritmética está bien realizada.

Segundo ejercicio.

Hasta el año 2005 los libros se codificaban de acuerdo con el *International Standard Book Number* de 10 cifras (ISBN-10). Este código es de 9 cifras, que identifican el país, la editorial y el título, más un último **dígito de control** que se obtiene de la siguiente forma: Dadas las 9 cifras $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$, se calcula el dígito de control a_{10} mediante la congruencia siguiente: $a_{10} \equiv \sum_{i=1}^{9} ia_i \ (11)$.

- Hallar el dígito de control del ISBN-10 del libro en cuyo código las nueve primeras cifras son 844814073 (Solución: mirar el Rosen).
- También se encuentran libros cuyo ISBN-10 tiene por dígito de control una X ¿Por qué?

Tercer ejercicio.

Establecer **razonadamente** el criterio por el cual se puede saber si un número entero dado es divisible por 11 (sin hacer la división, claro está). ¿Es 15752 divisible por 11?

Cuarto ejercicio.

Al construir un sistema de transmisión de datos se intenta agrupar un cierto número de cables en unos conductos. Al agruparlos de 13 en 13 se observa que hay que añadir un conducto extra para tres cables, si se colocan de 7 en 7 resulta que una de las vías queda sólo con 5 cables, mientras que en grupos de 5 cables queda uno con 4. Se pide calcular el número de cables, atendiendo a los siguientes puntos:
•¿Tiene solución el problema planteado? Justificar razonadamente por qué.
•¿Cuál es el número **mínimo** de cables que se están utilizando?

Quinto ejercicio.

Escribir en código la frase “El libro de Rosen es bastante grueso” utilizando la clave 234, esto es, dividiendo tal frase en grupos de tres letras y aplicando a la primera letra un código César-2, a la segunda uno César-3 y a la tercera uno César-3, y así sucesivamente. Efectuarlo de dos formas:

- Contando sólo las letras (alfabeto español de 26).
- Contando también los espacios como si fueran letras.

Parte 3: EJERCICIOS DE CONJUNTOS Y LÓGICA

Primer ejercicio.

En este ejercicio, si A es un conjunto, la notación $|A|$ se lee "el cardinal de A" y se suele interpretar, para conjuntos no infinitos, como "el número de elementos que posee el conjunto A". La regla fundamental para el cálculo con cardinales es la siguiente:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Demostrar dicha regla.
- **Resolver el siguiente enigma**: En la macrofiesta del día de Santa Bibiana (2 de Diciembre), patrona del pueblo ABC, celebrada en la discoteca XYZ, se dejó entrar a 1000 personas. Para animar la fiesta se repartieron al principio, de forma gratuita, 600 refrescos de cola, 450 de zumo de maracuyá con arándanos silvestres y 450 cervezas de una marca nueva que estaba en promoción. No se llevó mucho control, así que poco después se observó gente que se había apropiado de más de una botella o lata. Un recuento de urgencia llevado a cabo por el equipo de relaciones públicas del local mostró que el 20% llevaban cerveza y cola, que el 25% habían conseguido zumo y cola, y que otro 15% estaba provisto de cerveza y cola. Incluso cincuenta avispados se llevaron de las tres cosas. **Se pregunta:**
    - ¿Se quedó alguien sin bebida gratuita? En caso afirmativo ¿cuántos?
    - Bastantes pudieron conseguir sólo una de las tres ¿Cuántos se quedaron sólo con una, según las diferentes clases?
    - ¿Qué porcentaje del total tuvo acceso exactamente a dos tipos de bebida?

Segundo ejercicio.

Se llama **orden lexicográfico** al orden el cual aparecen las palabras en los diccionarios. Para establecer este orden es necesario disponer de un alfabeto previamente bien ordenado para el conjunto de letras individuales, como puede ser el $\{a < b < c < d...\}$, y **con ayuda de él se ordenan todas las palabras**: En primer lugar van las que comienzan por **a**. Dentro de éstas, se mira la segunda letra, y se coloca primero el que tenga la letra más próxima a la **a**. Por ejemplo, **amapola < anguila**, si las segundas letras son iguales, se comparan las terceras, p.ej. **abertura < abierto < abrir**, etc. Al acabar con la **a**, se sigue con la **b**, etc. etc. Se pide:

- ¿Es total el orden lexicográfico? ¿Qué ventaja práctica tiene el que lo sea, en caso afirmativo?
- Si se inventa una nueva palabra, p.ej. "libroderrosen" ¿Cuál es el algoritmo para ubicarla en un diccionario)
- A veces se usa el "orden lexicográfico inverso" ¿en qué puede consistir tal cosa?
- Ordenar lexicográficamente todas las ristras de 12 bits usando como alfabeto auxiliar el $\{0 < 1\}$.

OTRO PAR DE EJERCICIOS

Primer ejercicio (usar libros).

En este ejercicio, sean $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Z} - \{0\}$. Construimos el producto cartesiano de ambos, $\mathbb{Z} \times \left[\mathbb{Z} - \{0\}\right]$, y en él establecemos la relación: $\left[(a,b)R(c,d)\right] \Leftrightarrow \left[ad = bc\right]$.

El conjunto cociente $\left(\mathbb{Z} \times \left[\mathbb{Z} - \{0\}\right]\right)/R$ se denomina "conjunto de los números racionales" y se denota con la letra $\mathbb{Q}$ (la inicial de "*quotient*" o "cociente").

- Comprobar que R es una relación de equivalencia.
- ¿Cuál es la clase de equivalencia del par $(4,1)$? ¿Y del $(3,0)$ y del $(1,3)$, respectivamente?
- Establecer las reglas aritméticas para números racionales.

Segundo ejercicio.

En este ejercicio, sean $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$. Construimos el producto cartesiano de ambos, $A \times B = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

- Representar gráficamente este conjunto.
- Representar en el dibujo anterior la relación $R = \{a \mid -4 \le a \le 4\} \times \{b \mid b \le 5\}$.
    - ¿Se trata de una función?
    - ¿Tal vez una relación de equivalencia?

Sea ahora la relación $R^* = \{a \mid -4 \le a \le 4\} \times \{2\} \subseteq R$. Demostrar que es una función, y además inyectiva, entre un cierto subconjunto de $\mathbb{Z}$ y otro de $\mathbb{N}$ ¿cuáles?

Tercer ejercicio (usar libros, otra vez).

En el conjunto $\mathbb{Z}$ existe la relación de orden "natural" siguiente: $\{... < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3...\}$. Se puede definir una relación de orden sobre $\mathbb{Q}$ de la manera siguiente: $\left[(a,b) < (c,d)\right] \Leftrightarrow \left[ad < bc\right]$.

- Probar que la relación establecida sobre los números racionales es de orden, y además es total.
- **Se puede identificar el conjunto $\mathbb{Z}$ con un subconjunto de $\mathbb{Q}$ mediante el isomorfismo** por el que $n \in \mathbb{Z}$ se corresponde con $\left[(n,1)\right] \in \mathbb{Q}$. Demostrar que con esta identificación se puede extender el orden de los enteros a los arcionales y que entre cada dos enteros hay infinitos racionales.
- A pesar de lo anterior, **el cardinal de los racionales no es mayor que el de los racionales**, esto es: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. Buscar una demostración de este hecho aparentemente contradictorio.

MÁS EJERCICIOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

Primer ejercicio (Rosen, p. 101 y sigs).
Ej. **30**: "Sean $f(x)=ax+b$ y $g(x)=cx+d$ dos funciones reales de variable real, donde *a*, *b*, *c* y *d* son constantes. Hallar los valores de dichas constantes para que se cumpla que $f\circ g=g\circ f$".
Ej. **31**: "Demostrar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax+b$, siendo *a* y *b* constantes, es inversible excepto si **a** es nula. Hallar la función inversa".
Ej. **64**: "Sean *A* y *B* dos conjuntos finitos con el mismo cardinal. Demostrar que toda función inyectiva entre *A* y *B* es epiyectiva, y recíprocamente".

Segundo ejercicio (Rosen, p. 107)
Ejercicios **39** a **44**, ambos inclusive.

Tercer ejercicio.
Sean *A* y *B* dos conjuntos finitos tales que $|A|=n>0$ y $|B|=m>0$. Sea además una función $f:A\to B$. Se pide:

- Considerando *f* como una relación (subconjunto del producto cartesiano $A\times B$) ¿Cuál es el mayor cardinal posible que puede tener *f*?
- Establecer las relaciones que ligan *m* y *n* en los casos en que *f* sea inyectiva, epiyectiva y biyectiva, respectivamente.

Cuarto ejercicio.
Se considera el conjunto $A=\{a,b,c,d\}$. El símbolo A^A representa el conjunto de todas las funciones $f:A\to A$, y el símbolo $f^2(x)$ significa $f(f(x))$. Se pide:

- Hallar $\left|A^A\right|$ y escribir todas las posibles funciones que constituyen A^A.
- ¿Cuántas funciones hay en A^A que satisfagan $f^2(x)=f(x)$?
- ¿Y $f^2(x)=x$?
- ¿Y $f^2(x)=f^3(x)$?

Quinto ejercicio.
La **función característica** de un conjunto *A* se define como $\chi_A:A\to\{0,1\}$, que actúa de la siguiente forma: $\chi_A(x)=\begin{cases}1, \text{ si } x\in A\\ 0, \text{ si } x\notin A\end{cases}$

Se pide:

- Probar que $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\times\chi_B$.
- Ídem íd. $\chi_{A\cap B}=\chi_A\times\chi_B$
- Redacte brevemente qué relación observa entre las fórmulas anteriores y las empleadas para el cálculo del cardinal de la unión de dos conjuntos.