ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2016-20
Parcial 3 – Mayo 12, 2017
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [10/100]
Demuestre que si `a|b` y `a|(b+c)` entonces `a|c`, para `a,b,c:int`.

Teo: `a|b ∧ a|(b+c) ⇒ a|c`
Dem: Por hipótesis
`Hip:  a|b, a|(b+c)      // A demostrar: a|c`

Como `a|b`, existe `k1:int`, tal que `a*k1 = b`.

Como `a|(b+c)`, existe `k2:int`, tal que `a*k2 = b+c`.

Por tanto: `a*(k2-k1) = a*k2-a*k1 = b+c-b = c`.

Es decir, `a*(k2-k1) = c`, de modo que `a|c`.

[]

[10/10]

Variante:

```
   a|b ∧ a|(b+c)
⇒     ⟨a divide a combinaciones lineales enteras de b y b+c⟩
   a|((-1)*b + 1*(b+c))
=     ⟨aritmética⟩
   a|c
```

[]

[10/10]

2 [25/100]
Pruebe que el producto de 3 números naturales consecutivos es divisible por 6.

Dem:

Sea `n∈nat`. Se quiere mostrar que `6|n*(n+1)*(n+2)`.

[3/25]

Variante 21

Para esto basta mostrar que
(1) `2|n*(n+1)*(n+2)`
(2) `3|n*(n+1)*(n+2)`

[4/25]

Lema 1: `2|n*(n+1)*(n+2)`
Dem:
Casos: $n =_2 0 \lor n =_2 1$

Caso: $n =_2 0$

```
   true
=     ⟨Caso: n =₂ 0⟩
   2|n
⇒     ⟨ x|y ⇒  x|y*z⟩
   2|n*(n+1)*(n+2)

Caso:  n =₂ 1
   true
=     ⟨Caso: n =₂ 1 ⇒ n+1 =₂ 0⟩
   2|(n+1)
⇒     ⟨ x|y ⇒  x|y*z⟩
   2|n*(n+1)*(n+2)
```

[]

[9/25]

Lema 2: `3|n*(n+1)*(n+2)`

Dem:

```
Casos: n =₃ 0 ∨ n =₃ 1 ∨ n =₃ 2

Caso:  n =₃ 0
   true
=     ⟨Caso: n =₃ 0⟩
   3|n
⇒     ⟨ x|y ⇒  x|y*z⟩
   3|n*(n+1)*(n+2)

Caso:  n =₃ 1
   true
=     ⟨Caso: n =₃ 1 ⇒ n+2 =₃ 0⟩
   3|(n+2)
⇒     ⟨ x|y ⇒  x|y*z⟩
   3|n*(n+1)*(n+2)

Caso:  n =₃ 2
   true
=     ⟨Caso: n =₃ 2 ⇒ n+1 =₃ 0⟩
   3|(n+1)
⇒     ⟨ x|y ⇒  x|y*z⟩
   3|n*(n+1)*(n+2)
```

[]

[9/25]

Variante 22

Dem: Inducción sobre **`nat`**.

```
PI: P.n ≡ 6|n*(n+1)*(n+2), n≥0
```

[4/25]

```
CB: P.0
   6|0*(0+1)*(0+2)
```

```
=     ⟨aritmética⟩
   6|0
=
   true
```

[6/25]

```
CI: P(n+1), n≥0
HI: P.n
   6|(n+1)*(n+2)*(n+3)
=     ⟨aritmética⟩
   6|((n+1)*(n+2)*n + (n+1)*(n+2)*3)
⇒     ⟨HI; x|y ∧ x|(y+z) ⇒ x|z (Problema 1)⟩
   6|(n+1)*(n+2)*3
=     ⟨Aritmética: 2*3*z = x*3  ≡  2*z = x⟩
   2|(n+1)*(n+2)
=     ⟨n+1 es par ∨ n+2  es par⟩
   true
```

[]

[12/25]

Variante 23

Dem:

Sean $r_2 = n \bmod 2$, $r_3 = n \bmod 3$. Nótese que $0 \le r_2 < 2$ y $0 \le r_3 < 3$, o bien $0 < 2-r_2 \le 2$ y $0 < 3-r_3 \le 3$. Entonces, $n < n+2-r_2 \le n+2$, i.e., $n+2-r_2$ es $n+1$ o $n+2$.

También: $n < n+3-r_3 \le n+3$, i.e., $n+3-r_3$ es $n+1$ o $n+2$ o $n+3$.

Entonces: $(n+2-r_2) =_2 0$ y $(n+3-r_3) =_3 0$. Nótese que si $n+3-r_3 = n+3$, vale que $n =_3 0$.

En cualquier caso: $n*(n+1)*(n+2)$ es divisible por 2 y por 3, porque alguno de los tres números es divisible por 2 y alguno es divisible por 3.

[]

[22/25]

3 **[30/100]**

Carlos (0), Ulises (1), Daniel (2) y Tobías (3) trabajan en una compañía de vigilancia haciendo turnos de 8 horas. Los turnos de cada día se numeran 0, 1 y 2, y los vigilantes siempre siguen el mismo orden de alternancia de turnos (…, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, …) .

La compañía usa la notación `turno(d,k)` para referirse al encargado del turno `k` del día `d`. En realidad, `d` es la diferencia en días con una fecha de referencia, llamada el día 0. Por ejemplo, si la referencia es "mayo 12", el día 0 es mayo 12, el día 1 es mayo 13, el día -1 es mayo 11.

Si el 12 de mayo `turno(0,0)=1 (Ulises)`, los otros dos turnos del día corresponden a Daniel y Tobías, i.e., `turno(0,1)=2`, `turno(0,2)=3`.

3a (5/30) Defina `turno(0,0)=1`. Llene una tabla `T[0..5,0..2]` en la que `T[d,k] = turno(d,k)`.

T	**0**	**1**	**2**
0	1		
1			
2			
3			
4			
5			

T	**0**	**1**	**2**
0	1	2	3
1	0	1	2
2	3	0	1
3	2	3	0
4	1	2	3
5	0	1	2

[5/5]

3b (10/30) Proponga una fórmula para `turno(d+n,0)`, $n \geq 0$, dependiendo de `turno(d,0)`. Demuestre su resultado.

AYUDA: *use congruencias*

turno(d+n,0) $=_4$ turno(d,0) + 3*n, $n \geq 0$

[5/10]

Por inducción sobre $n \geq 0$.

PI: turno(d+n,0) $=_4$ turno(d,0) + 3*n, $n \geq 0$

CB: P.0

turno(d+0,0)

= ⟨Aritmética⟩

turno(d,0)

= ⟨Aritmética⟩

turno(d,0) + 3*0

[1/10]

CI: P(n+1), $n \geq 0$

HI: P.n

turno(d+n+1,0)

$=_4$ ⟨turno(x,0) $=_4$ turno(x-1,2)+1 (reglas del trabajo)⟩

turno(d+n,2)+1

$=_4$ ⟨turno(x,2) $=_4$ turno(x,1)+1 (reglas del trabajo)⟩

turno(d+n,1)+2

$=_4$ ⟨turno(x,1) $=_4$ turno(x,0)+1 (reglas del trabajo)⟩

turno(d+n,0)+3

$=_4$ ⟨HI⟩

turno(d,0)+3*n+3

$=_4$ ⟨Aritmética⟩

turno(d,0)+3*(n+1)

[4/10]

3c (5/30) Proponga un fórmula para `turno(0,k+m)` dependiendo de `turno(0,k)`. Su fórmula debería valer para $0 \le k+m < 3$.

$\text{turno}(d,k+m) =_4 \text{turno}(d,k) + m,\ 0 \le k+m < 3$

[5/5]

3d (5/30) Resuma sus propuestas en una fórmula para calcular `turno(d+n,k+m)`, con $n \ge 0$, $0 \le k+m < 3$, a partir de `turno(d,k)`. Demuestre su resultado suponiendo que valen 3b y 3c.

$\text{turno}(d+n,k+m) =_4 \text{turno}(d,k) + 3*n + m,\ n \ge 0,\ 0 \le k+m < 3.$

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{turno}(d+n,k+m) \\
=_4 & \langle 2c \rangle \\
 & \text{turno}(d+n,k) + m \\
=_4 & \langle 2c \rangle \\
 & \text{turno}(d+n,0) + m + k \\
=_4 & \langle 2b \rangle \\
 & \text{turno}(d,0) + m + k + 3*n \\
=_4 & \langle 2c \rangle \\
 & \text{turno}(d,k) + m + 3*n
\end{array}
$$

[5/5]

3e (5/30) Calcule `turno(101,2)` con la fórmula de 3d.

$\text{turno}(101,2) =_4 \text{turno}(0,2) + 303 =_4 \text{turno}(0,2)+3 =_4 3+3 =_4 2$

[5/5]

4 **[20/100]**

Sea n un número natural. Demuestre que $4|n$ si y solo si las dos cifras menos significativas de su notación en sistema decimal representan un número divisible por 4.

Sea $n = (d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0)_{10}$ una expresión de n en base 10, $m \ge 2$ (puede haber 0s a la izquierda). Entonces:

$$
\begin{array}{ll}
 & n \\
= & \langle \text{Def de notación decimal} \rangle \\
 & (+k|\ 0 \le k \le m : 10^k d_k) \\
= & \langle \text{Partir rango a la izquierda} \rangle \\
 & (+k|\ 2 \le k \le m : 10^k d_k) + 10*d_1 + d_0 \\
= & \langle 10^k = 10^2*10^{k-2} \rangle \\
 & (+k|\ 2 \le k \le m : 10^2*10^{k-2} d_k) + 10*d_1 + d_0 \\
= & \langle \text{factorizar } 10^2 = 100 \rangle \\
 & 100*(+k|\ 2 \le k \le m : 10^{k-2} d_k) + 10*d_1 + d_0
\end{array}
$$

[10/20]

$$
\begin{array}{ll}
= & \langle \text{factorizar } 10^2 = 100;\ \text{cambio de variable } k:=k-2 \rangle \\
 & 100*(+k|\ 0 \le k \le m-2 : 10^k d_{k+2}) + 10*d_1 + d_0 \\
=_4 & \langle 4|100*(+k|\ 0 \le k \le m-2 : 10^k d_{k+2}) \rangle
\end{array}
$$

$10*d_1 + d_0$

[10/20]

Variante:

n

$=$

$(d_m d_{m-1} \dots d_1 d_0)_{10}$

$=$

$100*(d_m d_{m-1} \dots d_2)_{10} + (d_1 d_0)_{10}$

[10/20]

$=_4 \quad \langle 4 | 100*(d_m d_{m-1} \dots d_2)_{10} \rangle$

$(d_1 d_0)_{10}$

[10/20]

5 **[20/100]**

La junta directiva de una empresa tiene un jefe y 12 subalternos. La junta va a tener una cena y quiere estimar de cuantas formas se puede acomodar, dependiendo de algunas condiciones que pueden variar. Dos formas se consideran diferentes si un subalterno se sienta a diferente distancia del jefe -contando del jefe a la derecha- en una que en otra.

5a (5/20) Si el jefe se sienta en el centro y la mesa tiene 13 puestos en línea.

Los 12 subalternos se deben sentar en cualquiera de los 12 puestos no ocupados.
En total:

$12!$

[5/5]

Variante

Hay 6 puestos a cada lado del jefe. El total de formas de sentarse es (escoger 6 para la derecha, los otros 6 van a la izquierda, en cada lado se pueden sentar de cualquier forma):

$$\binom{12}{6}*6!*6! = \frac{12!}{6!\ 6!}*6!*6! = 12!$$

[5/5]

5b (5/20) Si el jefe se sienta en cualquier sitio y la mesa es redonda.

Los 12 subalternos se deben sentar en cualquiera de los 12 puestos no ocupados.
En total:

$12!$

[5/5]

Variante

Hay 13 puestos para todos, incluido el jefe. Otra manera de contar es calcular la manera en que todos se sientan, pero dividiendo por 13, para igualar las configuraciones que son rotaciones entre sí:

$$\frac{13!}{13} = 12!$$

[5/5]

5c (10/20) Si el jefe se sienta en cualquier sitio y la mesa es redonda, pero 3 de los subalternos quieren sentarse en puestos consecutivos.

Los 3 que se sientan juntos actúan como una persona en una situación en la hay un jefe y 10 subalternos. Una vez que se sienten, hay que considerar las permutaciones entre los 3 que se sientan juntos:

```
10!*3!
```

[10/10]