Universidad de los Andes
Facultad de Ingeniería

Ingeniería de Sistemas y Computación
ISIS1104 – Matemática estructural y lógica
Sección 5. Profesor: Jorge Duitama
Semestre: 2018-10

Accredited ABET Engineering Accreditation Commission

Examen 2

Este examen es individual. Tiene una duración de 1 hora 20 min. Está prohibido usar el libro, apuntes, impresiones y cualquier tipo de dispositivo electrónico (celulares, agendas electrónicas, cámaras digitales, etc.).

Nombre:____ Código: ____________________

1. [20%] Demostrar que los conjuntos `A={x:ℕ|(∃y:ℕ|: x=y+11)}` y `B={x:ℕ|x*x>100}` son iguales

```
A ⊆ B:
  x ∈ A
≡ <Definición de A>
  (∃y:ℕ|: x=y+11)
≡ <Elevando al cuadrado a ambos lados>
  (∃y:ℕ|: x*x=(y+11)*(y+11))
≡ <Resolviendo producto a la derecha>
  (∃y:ℕ|: x*x=y*y+22*y+121)
⇒ <En ℕ a + b ≥  a>
  x*x ≥ 121
⇒ <Orden total de naturales>
  x*x > 100
≡ <Definición de B>
  x ∈ B

B ⊆ A:
  x ∈ B
≡ <Definición de B>
  x*x > 100
≡ <Raiz cuadrada>
 x > 10
≡ <Restando 10 a ambos lados>
x-10>0
≡ <Orden total de naturales>
x-11≥0
⇒ <x∈ℕ y definición de naturales>
x-11 ∈ ℕ
≡ <Usando y=x-11>
```

```
  (∃y:ℕ|: x=y+11)
≡ <Definición de A>
  x ∈ A
```

2. [20%] Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones

$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$

Falso. Contraejemplo: A = {1}, B={2}, C={1,2}

$(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$

```
  (A ∪ B) \ A
= <Definición diferencia >
  (A ∪ B) ∩ A^c
= <Distributividad>
  (A ∩ A^c) ∪ (B ∪ A^c)
= <Definicion complemento y diferencia >
  ∅ ∪ (B \ A)
= <Identidad ∪ >
  B \ A
```

3. Para un campeonato de futbol en el que cada equipo debe jugar una y solo una vez con cada uno de de sus rivales, se define como E el conjunto de equipos que participan y N={0, 1, 2,...,|E|}. Se definen además las siguientes relaciones:

```
R = {(a,b): E^2 | "a perdió con b" )
f: E → N  f(e) = |{a:E | a R e }|
S = {(a,b): E^2 |  f(a) < f(b)}
T = {(a,b): E^2 |  f(a) = f(b)}
```

a. [10%] Determine si R cumple siempre las siguientes propiedades. Justifique brevemente sus respuestas

Propiedad	Respuesta	Razón
Reflexiva	No	Ningún equipo juega consigo mismo
Irreflexiva	Si	Ningún equipo juega consigo mismo
Simétrica	No	Si a pierde con b y solo juegan una vez, b no puede perder con a

Asimétrica	Si	Si a pierde con b y solo juegan una vez, b no puede perder con a
Antisimétrica	Si	Es asimétrica
Transitiva	No	Puede darse que a pierda con b, b pierda con c y a no le gane a c.

b. [5%] ¿La función f puede ser inyectiva? Justificar su respuesta

f puede ser inyectiva si todos los equipos le han ganado a un número diferente de equipos. Por ejemplo si un equipo A le ganó a todos, otro equipo B le ganó a todos, excepto al equipo A, otro equipo C le ganó a todos excepto a los equipos A y B y así sucesivamente

c. [5%] ¿La función f puede ser biyectiva? Justificar su respuesta

f no puede ser biyectiva porque f no puede ser sobreyectiva ya que ningún equipo le puede haber ganado a |N| equipos.

d. [20%] Demostrar que S es un orden parcial estricto

Irreflexiva. Prueba por contradicción:

```
  (∃e:E |: (e,e) ∈ S )
≡ <Definición S>
  (∃e:E |: f(e) < f(e))
≡ <Orden estricto de naturales>
  false
```

Asimétrica:

```
  (∀a,b:E |: (a,b) ∈ S ⇒ ¬ ((b,a) ∈ S))
≡ <Definición S>
  (∀a,b:E |: f(a) < f(b) ⇒ ¬ (f(b) < f(a))
≡ <Asimetría menor que >
  true
```

Transitiva:

```
  (∀a,b,c:E |: (a,b) ∈ S ∧ (b,c) ∈ S ⇒ (a,c) ∈ S)
≡ <Definición S>
  (∀a,b:E |: f(a) < f(b) ∧ f(b) < f(c) ⇒ f(a) < f(c))
≡ <Transitividad menor que >
  true
```

e. [20%] Demostrar que T es una relación de equivalencia

Reflexiva

```
  (∀e:E |: (a,b) ∈ T)
≡ <Definición T>
  (∃e:E |: f(e) = f(e))
≡ <Igualdad de naturales>
  true
```

Simétrica:

```
  (∀a,b:E |: (a,b) ∈ T ⇒ (b,a) ∈ T)
≡ <Definición T>
  (∀a,b:E |: f(a) = f(b) ⇒ f(b) = f(a))
≡ <Simetría = >
  true
```

Transitiva:

```
  (∀a,b,c:E |: (a,b) ∈ T ∧ (b,c) ∈ T ⇒ (a,c) ∈ T)
≡ <Definición T>
  (∀a,b:E |: f(a) = f(b) ∧ f(b) = f(c) ⇒ f(a) = f(c))
≡ <Transitividad = >
  true
```

f. [10%] Demostrar que si f es inyectiva, entonces la clausura reflexiva de S es un orden total

La clausura reflexiva de un orden parcial estricto es un orden parcial. Para probar que es un orden total se debe probar que:

```
  (∀a,b:E |: (a,b) ∈ S ∨ (b,a) ∈ S)
≡ <Definición S>
  (∀a,b:E |: f(a) < f(b) ∨ f(b) < f(a))
≡ <Hip: f es inyectiva, orden total de enteros>
  true
```