Universidad de los Andes

ISIS-1104-01 Matemática Estructural y Lógica
Parcial 2
Fecha: 6 de octubre de 2015

- Esta prueba es INDIVIDUAL.
- Está permitido el uso de las hojas de teoremas publicadas en sicua+.
- Está prohibido el uso de cualquier dispositivo electrónico.
- El intercambio de información con otro estudiante está terminantemente prohibido.
- Cualquier irregularidad con respecto a estas reglas podría ser considerada fraude.
- Responda el examen en los espacios proporcionados. No se aceptarán hojas adicionales.
- No olvide marcar el examen antes de entregarlo.

IMPORTANTE: Soy consciente de que cualquier tipo de fraude en los exámenes es considerado como una falta grave en la Universidad. Al firmar y entregar este examen doy expreso testimonio de que este trabajo fue desarrollado de acuerdo con las normas establecidas. Del mismo modo, aseguro que no participé en ningún tipo de fraude.

Nombre	Carné
Firma	Fecha

NO ESCRIBIR NADA BAJO ESTA LÍNEA

1.1	15 %	
1.2	20 %	
2.1.1	5 %	
2.1.2	10 %	
2.2	20 %	
3.1	15 %	
3.2	15 %	
Total	100 %	

1. [35 %] Demostraciones de Conjuntos

Definimos este nuevo predicado operador entre conjuntos

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1.1. [15 %] Demuestre o refute la siguiente equivalencia:

$$A \oplus B = ((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B))$$

$$\begin{array}{ll}
 & (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B) \\
= & \quad \langle \text{ Distributividad } \cup/\cap \ \rangle \\
 & ((A \cap \sim B) \cup \sim A) \cap ((A \cap \sim B) \cup B) \\
= & \quad \langle \text{ Absorción} \sim \text{dos veces } \rangle \\
 & (\sim A \cup \sim B) \cap (A \cup B) \\
= & \quad \langle \text{ Conmutatividad } \rangle \\
 & (A \cup B) \cap (\sim A \cup \sim B) \\
= & \quad \langle \text{ de Morgan } \rangle \\
 & (A \cup B) \cap \sim (A \cap B) \\
= & \quad \langle \text{ definición } \setminus \ \rangle \\
 & (A \cup B) \setminus (B \cap A) \\
= & \quad \langle \text{ Definición } \rangle \\
 & A \oplus B
\end{array}$$

1.2. [20 %] Demuestre o refute la siguiente equivalencia

$$((A \oplus B) \cup (C \setminus (A \cap B)) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$$

$$\begin{array}{ll}
 & (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \\
= & \quad \langle \text{ Asociatividad } \rangle \\
 & ((A \cup B) \cup C) \setminus (A \cap B) \\
= & \quad \langle \text{ Definicón } \setminus \ \rangle \\
 & ((A \cup B) \cup C) \cap \sim (A \cap B) \\
= & \quad \langle \text{ Distrib. } \cap/\cup \ \rangle \\
 & ((A \cup B) \cap \sim (A \cap B)) \cup (C \cap \sim (A \cap B)) \\
= & \quad \langle \text{ Definición } \setminus \ \rangle \\
 & ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap B)) \\
= & \quad \langle \text{ Definición } \rangle \\
 & (A \oplus B) \cup (C \setminus (A \cap B))
\end{array}$$

2. Relaciones[35 %]

2.1. [15 %]Considere los siguientes conjuntos y relaciones:

$Actores$**:** Conjunto de actores (hombres y mujeres).

$Peliculas$**:** Conunto de películas

$Estudias$**:** Conjunto de estudios cinematográficos

$ActuaEn$**:** Entre $Actores$ y $Peliculas$, donde $(a, p) \in ActuaEn$ si el actor a actuó en la película b.

$CasadoCon$**:** Entre $Actores$, $Actores$ y $fechas$, donde $(p, q, y) \in CasadoCon$ si p y q se casaron en el la fecha y.

$Produccion$**:** Entre $Peliculas$, $Estudias$ y $fechas$ donde $(p, s, y) \in Produccion$ si la pélicula p fue producida por el estudio s en la fecha y.

Defina las siguientes relaciones:

2.1.1. [5 %] Una Relación R1 Entre $Actores$, $Peliculas$ y $Fechas$, donde $(a, p, y) \in R1$ si el actor a actuó en la película p que fue producida en la fecha y.

$$R1 = Join_1(ActuaEn, Produccion)_{\langle Actores, Peliculas, Fechas\rangle}$$

2.1.2. [10 %] Una Relación R2 Entre $Actores$ y $Actores$, donde $(t, b) \in R2$ si el t y b actuaron juntos en una película antes de casarse.

Primero definimos una relación entre actores y actores y fechas que indique que los dos actores coprotagonizaron la una película en una fecha dada.

$$CP = Join_1(R1_{\langle Actores, Fechas, Peliculas\rangle}, R1_{\langle Peliculas, Fechas, Actores\rangle}))_{\langle Fechas, Actores, Actores\rangle}$$

Ahora hacemos un Join con casados para ver las parejas de casados que han actuado juntos, de esas escogemos los de las fechas que nos sirven y luego se toman las películas.Suponemos que fc es la fecha de casados y fp es la fecha de la producción

$$(S_{fp<fc}(Join_2(CP, Casados)))_{\langle Actores, Actores\rangle}$$

2.2. [20 %]Considere la siguiente relación

la relación binaria R entre entre enteros positivos donde:

$$(x, y)R(a, b) \equiv (x \leq a) \wedge (a \leq b) \wedge (b \leq y)$$

Es esta relación:

1. simétrica? No $(3, 8)$ R $(4, 6)$ pero $(4, 6)$ R $(3, 8)$
   - $(3, 8)$ R $(4, 6)$
   - pero $(4, 8)$ $\not R$ $(3, 5)$
   - Vemos que: $(3 \leq 4) \wedge (4 \leq 6) \wedge (6 \leq 8)$ es cierto
   - Pero: $(4 \leq 3) \wedge (3 \leq 8) \wedge (8 \leq 6)$ es falso ya que es una conjunción y para que sea verdadera, todas deben ser verdaras y $3 \leq 8$ es falso!
2. antisimétrica? Sí. Hay que probar: Sí. Entonces hay que probar: $(x, y)R(a, b) \wedge (a, b)R(x, y) \Rightarrow (a, b) = (x, y)$ O lo que es equivalente: $(x, y)R(a, b) \wedge (a, b)R(x, y) \Rightarrow a = x \wedge b = y$

	Expresión	Justificación
1	$(x, y)R(a, b)$	Hipótesis
2	$(a, b)R(x, y)$	Hipótesis
3	$(x \leq a) \wedge (a \leq b) \wedge (b \leq y)$	Def. R (1)
4	$(a \leq x) \wedge (x \leq y) \wedge (y \leq b)$	Def. R (2)
5	$(x \leq a)$	simplificación (3)
6	$(a \leq x)$	simplificación (4)
7	$(y \leq b)$	simplificación (4)
8	$(b \leq y)$	simplificación (3)
9	$x = a$	aritmética (5,6)
10	$y = b$	aritmética (7,8)
11	$(x = a) \wedge (y = b)$	Composición (9,10)

3. Transitiva? Sí. Hay que probar: Sí. Entonces hay que probar: $(x, y)R(a, b) \wedge (a, b)R(c, d) \Rightarrow (x, y)R(c, d)$

	Expresión	Justificación
1	$(x, y)R(a, b)$	Hipótesis
2	$(a, b)R(x, y)$	Hipótesis
3	$(x \leq a) \wedge (a \leq b) \wedge (b \leq y)$	Def. R (1)
4	$(a \leq c) \wedge (c \leq d) \wedge (d \leq b)$	Def. R (2)
5	$(x \leq a)$	simplificación (3)
6	$(a \leq c)$	simplificación (4)
7	$(b \leq y)$	simplificación (3)
8	$(d \leq b)$	simplificación (4)
9	$(x \leq c)$	Transitividad (5,6)
10	$(d \leq y)$	Transitiviadad (7,8)
11	$(c \leq d)$	simplificación (4)
11	$(x \leq c) \wedge (c \leq d) \wedge (d \leq y)$	Composición (9,10,11)
12	$(x, y)R(c, d)$	Definición R

3. Funciones y Secuencias [30 %]

3.1. [15 %] Considere la siguiente función:

La función `foo`

$$\texttt{foo} : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

donde:

$$\texttt{foo(x,y)} = 5 \cdot \texttt{x} + 2 \cdot \texttt{y}$$

Indique (demostrando o refutando) si esta función es:

inyectiva No es inyectiva $foo(2,0) = foo(0,5)$ pero $(2,0) \neq (0,5)$

sobreyectiva Sí es sobreyectiva: para todo entero z existen x y y tales que $foo(x,y) = z$. Hay que mostrár qué valoeres de x y y sirven: $y = -2 \cdot z$, $x = z$.

$$
\begin{array}{ll}
 & foo(x,y) \\
= & \quad \langle \text{ Valores de } x \text{ y de } y \ \rangle \\
 & foo(z, -2 \cdot z) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } foo \ \rangle \\
 & 5 \cdot z + 2 \cdot (-2z) \\
= & \quad \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
 & z
\end{array}
$$

3.2. [15 %]Considere la función *goo* entre parejas secuencias de enteros y secuencias.

$$\texttt{goo} : Seq_{\mathbb{Z}} \times Seq_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}(\mathbb{Z})$$

Que da como resultado, la secuencia que tiene como primer elemento, la suma del primer elemento de la primera con el primer elemento de la segunda, como segundo elemento, la suma del segundo elemento de la primera con el segundo elemento de la segunda y así sucesivamente. La longitud de la cadena resultante, es el mínimo de las dos longitudes.

Los siguientes ejemplos ilustran el comportamiento de la función:

- $goo(\langle 1,0,3,4\rangle, \langle 1,2,3,4\rangle) = \langle 2,2,6,8\rangle$
- $goo(\langle 1,-2,1,4\rangle, \langle 1,2,3,3\rangle) = \langle 2,0,4,7\rangle$
- $goo(\langle 2,3,4\rangle, \langle 1,2,3,4\rangle) = \langle 3,5,7\rangle$
- $goo(\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 1,2,3\rangle) = \langle 2,4,6\rangle$

Indique (demostrando o refutando) si esta función es:

inyectiva No es inyectiva :

- $goo(\langle 1,0,3,4\rangle, \langle 1,2,3,4\rangle) = \langle 2,2,6,8\rangle$
- $goo(\langle 1,1,3,12\rangle, \langle 1,1,3,-4\rangle) = \langle 2,2,6,8\rangle$
- y los dos argumentos son distintos

sobreyectiva Sí es sobreyectiva: Para cualquier secuencia S, $goo(S,Z) = S$ donde Z es una secuencia de la misma longitud de S compuesta sólo por ceros.