ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2015-1 - Sección 2
Parcial 1 – Marzo 5, 2015
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 **[40 puntos]**

En el cálculo proposicional,defina el operador ternario B así:

$$B(p,q,r) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)$$

1a **(20/40)** Considere la regla de inferencia:

$$B1: \quad \frac{p \not\equiv q}{B(p,q,r)}$$

Diga si B1 es una regla correcta y explique su respuesta.

CORRECTA

[2/20]

Tabla de verdad: $(p \not\equiv q \Rightarrow B(p,q,r))$ es tautología.

			[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
p	**q**	**r**	**¬p**	**¬q**	**¬r**	**p∧[2]**	**q∧[3]**	**r∧[1]**	**[4]∨[5]∨[6]**	**p ≢ q**	**[8] ⇒ [7]**
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	**1**
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	**1**
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	**1**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**

[18/20]

Variante 1a: (Deducción formal)

Teo: $p \not\equiv q \Rightarrow B(p,q,r)$

Dem: Por hipótesis

Hip: $p \not\equiv q$ // A demostrar: $B(p,q,r)$

$B(p,q,r)$

$=$ ⟨Def B⟩

$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)$

$=$ ⟨Hip: $p \not\equiv q$ (o bien: $\neg q \equiv p$; o bien: $q \equiv \neg p$)⟩

$(p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)$

$=$ ⟨$p \wedge p \equiv p$⟩

$p \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)$

$=$ ⟨Distr. ∧/∨⟩

$p \vee (\neg p \wedge (\neg r \vee r))$

$=$ ⟨Medio excluido⟩

$p \vee (\neg p \wedge true)$

$=$ ⟨$x \wedge true \equiv x$⟩

```
   p ∨ ¬p
=      ⟨Medio excluido⟩
   true
```

[18/20]

1b **(10/40)** Pruebe que:

`B(true,q,r) ≡ ¬q ∨ ¬r`

Tabla de verdad: `B(true,q,r) ≡ ¬q ∨ ¬r` es tautología.

		[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[8]	[9]	[10]
q	**r**	**¬q**	**¬r**	**true∧[2]**	**q∧[3]**	**r∧false**	**B(true,q,r)**	**[2]∨[3]**	**[8]≡[9]**
0	0	1	1	1	0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	1	1	**1**
1	0	0	1	0	1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**

[10/10]

Variante 1b: (Deducción formal)

Teo: `B(true,q,r) ≡ ¬q ∨ ¬r`

Dem:

```
   B(true,q,r)
=      ⟨Def B⟩
   (true ∧ ¬q) ∨ (q ∧ ¬r) ∨ (r ∧ ¬true)
=      ⟨true ∧ x ≡ x; x ∧ ¬true ≡ false⟩
   ¬q ∨ (q ∧ ¬r) ∨ false
=      ⟨x ∨ false ≡ x⟩
   ¬q ∨ (q ∧ ¬r)
=      ⟨Doble ¬; Absorción ¬⟩
   ¬q ∨ ¬r
```

[10/10]

1c **(10/40)** Pruebe que:

`B(p,p,q) ⇒ B(p,q,r)`

			[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	
p	**q**	**r**	**¬p**	**¬q**	**¬r**	**p ∧ [2]**	**q ∧ [3]**	**r ∧ [1]**	**B(p,q,r)**	**B(p,p,r)**	**[8] ⇒ [7]**
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	**1**
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	**1**
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	**1**
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**

[10/10]

Variante 1c1: (Deducción formal)

Teo: B(p,p,q) ⇒ B(p,q,r)

Dem:

```
    B(p,p,q)
=       ⟨Def B⟩
    (p ∧ ¬p) ∨ (p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ ¬p)
=       ⟨x ∧ ¬x ≡ false; false ∨ x ≡ x⟩⟩
    (p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ ¬p)
=       ⟨Def ≢⟩
    p ≢ q
⇒       ⟨Regla B1⟩
    B(p,q,r)
```

[10/10]

Variante 1c2: (Deducción formal)

Teo: B(p,p,q) ⇒ B(p,q,r)

Dem:

```
   Lema 1: (q ∧ ¬p) ⇒ (q ∧ ¬r) ∨ (r ∧ ¬p)
   Dem: Casos
   Casos: r, ¬r
       r ∨ ¬r
   =          ⟨Medio excluido⟩
       true

   Caso r:
       (q ∧ ¬r) ∨ (r ∧ ¬p)
   =          ⟨Caso r⟩
       (q ∧ ¬true) ∨ (true ∧ ¬p)
   =          ⟨¬true ≡ false; x ∧ false ≡ false; true ∧ x ≡ x⟩
       false ∨ ¬p
   =          ⟨false ∨ x ≡ x⟩
       ¬p
   ⇐          ⟨x ∧ y ⇒ y⟩
       q ∧ ¬p

   Caso ¬r:
       (q ∧ ¬r) ∨ (r ∧ ¬p)
   =          ⟨Caso ¬r: ¬r ≡ true, r ≡ false⟩
       (q ∧ true) ∨ (false ∧ ¬p)
   =          ⟨x ∧ true ≡ x; false ∧ x ≡ false⟩
       q ∨ false
   =          ⟨x ∨ false ≡ x⟩
       q
   ⇐          ⟨x ∧ y ⇒ y⟩
       q ∧ ¬p
```

Ahora:

```
    B(p,p,q)
=       ⟨Def B⟩
    (p ∧ ¬p) ∨ (p ∧ ¬q) ∨ (q ∧ ¬p)
=       ⟨x ∧ ¬x ≡ false; false ∨ x ≡ x⟩⟩
```

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \land \neg q) \lor (q \land \neg p) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Lema 1} \rangle \\
 & (p \land \neg q) \lor (q \land \neg r) \lor (r \land \neg p) \\
= & \quad \langle \text{Def B} \rangle \\
 & B(p,q,r)
\end{array}
$$

[10/10]

2 **[40 puntos]**

Considere el siguiente argumento:

"El gobierno hace la paz exactamente si las fuerzas militares hacen la paz.
Si las fuerzas militares hacen la paz, el ejército hace la paz.
Pero no es cierto que si el ejército hace la paz, las fuerzas militares la hagan.
Entonces, que el gobierno haga la paz no equivale a que el ejército la haga".

2a **(5/40)** Defina variables booleanas que representen las diferentes partes del argumento.

g : el gobierno hace la paz
m : las fuerzas militares hacen la paz
e : el ejército hace la paz.

[5/5]

2b **(15/40)** Exprese las frases del argumento con expresiones booleanas. Así mismo, exprese el argumento como tal.

[h1] $g \equiv m$
[h2] $m \Rightarrow e$
[h3] $\neg(e \Rightarrow m)$
[c] $g \not\equiv e$

El argumento es:

$h1 \land h2 \land h3 \Rightarrow c$

[15/15]

2c **(20/40)** Demuestre que el argumento es correcto, sin usar tablas de verdad.

Dem: Por hipótesis.
Hip: h1, h2, h3 // A demostrar: c

Lema A: $g \Rightarrow e$
Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & true \\
= & \quad \langle \text{Hip h2: } m \Rightarrow e \rangle \\
 & m \Rightarrow e \\
= & \quad \langle \text{Hip h1: } g \equiv m \rangle \\
 & g \Rightarrow e
\end{array}
$$

Ahora:

$$
\begin{array}{ll}
 & g \not\equiv e \\
= & \quad \langle \text{Def } \not\equiv \rangle \\
 & \neg((g \Rightarrow e) \land (e \Rightarrow g)) \\
= & \quad \langle \text{Lema A} \rangle \\
 & \neg(true \land (e \Rightarrow g)) \\
= & \quad \langle x \land true \equiv x \rangle
\end{array}
$$

$\neg$(e $\Rightarrow$ g)
= ⟨Hip h1: g $\equiv$ m⟩
$\neg$(e $\Rightarrow$ m)
= ⟨Hip h3: $\neg$(e $\Rightarrow$ m)⟩
true.

[20/20]

3 [20 puntos]

Exprese en lógica de predicados el siguiente argumento:

"No hay personas que sean pelirrojas tales que, si son mentirosas, deban ser hipócritas. Ana es pelirroja y también es mentirosa. Entonces, Ana no es hipócrita,"

***BONO**: demostración de que el argumento es correcto.*

Dominio o universo del discurso:

Personas

[2/20]

Símbolos de constante (funciones 0-arias):

Ana

[2/20]

Simbolos de predicado:

p.x : "x es pelirrojo"
m.x : "x es mentiroso"
h.x : "x es honrado"

[3/20]

Argumento:

	[a] $\neg$($\exists$x| p.x : m.x $\Rightarrow$ h.x)	*No hay personas que sean pelirrojas tales que, si son mentirosas, deban ser hipócritas.* **[4/20]**
	[b] p.Ana	*Ana es pelirroja* **[2/20]**
	[c] m.Ana	*Ana es mentirosa* **[2/20]**
Entonces	[d] $\neg$h.Ana	*Ana no es hipócrita* **[2/20]**

Formalmente:

[a] $\wedge$ [b] $\wedge$ [c] $\Rightarrow$ [d]

[3/20]

Bono:

true
= ⟨Hip [a]⟩
$\neg$($\exists$x\| p.x : m.x $\Rightarrow$ h.x)
= ⟨Trueque⟩
$\neg$($\exists$x\|: p.x $\wedge$ (m.x $\Rightarrow$ h.x))
= ⟨De Morgan general

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x|: \neg(p.x \wedge (m.x \Rightarrow h.x))) \\
= & \quad \langle \text{De Morgan} \rangle \\
 & (\forall x|: \neg p.x \vee \neg(m.x \Rightarrow h.x)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Instanciación: } x := \text{Ana} \rangle \\
 & \neg p.Ana \vee \neg(m.Ana \Rightarrow h.Ana) \\
= & \quad \langle \text{Hip [b]: } p.Ana\text{; Hip [c]: } m.Ana \rangle \\
 & \neg true \vee \neg(true \Rightarrow h.Ana) \\
= & \quad \langle \neg true \equiv false\text{; } false \vee x \equiv x \rangle \\
 & \neg(true \Rightarrow h.Ana) \\
= & \quad \langle true \Rightarrow x \equiv x \rangle \\
 & \neg h.Ana
\end{array}
$$

[+10]