Solución ejercicios conjuntos, relaciones y funciones

Conjuntos

1. Demostrar que $(x \in (A \cup B \cup C) \land x \notin A \land x \notin B \Rightarrow x \in C$

$$
\begin{array}{ll}
 & (x \in (A \cup B \cup C) \land x \notin A \land x \notin B \Rightarrow x \in C \\
\equiv & \langle \text{Definición de } \cup \rangle \\
 & (x \in A \lor x \in B \lor x \in C) \land x \notin A \land x \notin B \Rightarrow x \in C \\
\equiv & \langle \text{Conmutatividad } \land \rangle \\
 & x \notin A \land (x \in A \lor x \in B \lor x \in C) \land x \notin B \Rightarrow x \in C \\
\equiv & \langle \text{Absorción } \neg \rangle \\
 & x \notin A \land (x \in B \lor x \in C) \land x \notin B \Rightarrow x \in C \\
\equiv & \langle \text{Conmutatividad } \land \rangle \\
 & x \notin A \land x \notin B \land (x \in B \lor x \in C) \Rightarrow x \in C \\
\equiv & \langle \text{Absorción } \neg \rangle \\
 & x \notin A \land x \notin B \land x \in C \Rightarrow x \in C \\
\equiv & \langle \text{Debilitamiento} \rangle \\
 & \textbf{true}
\end{array}
$$

2. Encuentre las relaciones entre items de la lista de la izquierda con items de la lista de la derecha tales que el item de la izquierda implique el item de la derecha:

a. $A \cup B = A$	i. $A \cap B = \varnothing$
b. $A \setminus B = A$	ii. $B \subseteq A$
c. $A \setminus B = B \setminus A$	iii. $A = B$
d. $A \cap B = A$	iv. $A \subseteq B$

(a, ii), (b, i), (c, ii), (c,iii), (c,iv), (d,iv)

¿Qué propiedades cumple la relación entre los ítems de la izquierda y de la derecha?

Es total porque todos los elementos de la lista de la izquierda están relacionados con al menos un elemento de la lista de la derecha
Es sobreyectiva porque todos los elementos de la lista de la derecha están relacionados con al menos un elemento de la lista de la izquierda

3. Sean A y B dos conjuntos tales que $A \setminus B = \{5,8,10\}$, $B \setminus A = \{4,6,7\}$ y $A \cap B = \{12,19\}$. Determinar los elementos de los conjuntos A y B

$A=\{5,8,10,12,19\}$, $B=\{4,6,7,12,19\}$

4. Para los conjuntos del punto anterior, determinar los conjuntos AxB, $P(A)$ y $P(B)$

$AxB=\{(5,4),(5,6),(5,7),(5,12),(5,19),(8,4),(8,6),(8,7),(8,12),(8,19),$
$(10,4),(10,6),(10,7),(10,12),(10,19),(12,4),(12,6),(12,7),(12,12),$
$(12,19),(19,4),(19,6),(19,7),(19,12),(19,19)\}$

$P(A) = \{\varnothing,\{5\},\{8\},\{10\},\{12\},\{19\},$
$\{5,8\},\{5,10\},\{5,12\},\{5,19\},\{8,10\},\{8,12\},\{8,19\},\{10,12\},\{10,19\},\{12,19\},$
$\{5,8,10\},\{5,8,12\},\{5,8,19\},\{5,10,12\},\{5,10,19\},\{5,12,19\},\{8,10,12\},$
$\{8,10,19\},\{8,12,19\},\{10,12,19\}$
$\{5,8,10,12\},\{5,8,10,19\},\{5,8,12,19\},\{5,10,12,19\},\{8,10,12,19\},$
$\{5,8,10,12,19\}\}$

5. Demostrar o refutar que $A \cap B = \varnothing \;\wedge\; B \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap C = \varnothing$

Falso. Contraejemplo: A={1,2}, B={3,4}, C={2,5}

6. Dados dos conjuntos A y B, se define su diferencia simétrica $A \otimes B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Demostrar que $A \otimes B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$
\begin{aligned}
& A \otimes B \\
= & \langle \text{Definición } \otimes \rangle \\
& (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
= & \langle \text{Definición } \setminus \rangle \\
& (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
= & \langle \text{Distributividad } \cup \rangle \\
& (A \cup (B \cap A^c)) \cap (B^c \cup (B \cap A^c)) \\
= & \langle \text{Distributividad } \cup \rangle \\
& (A \cup A^c) \cap (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\
= & \langle \text{Medio excluido + identidad-}\cap \rangle \\
& (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\
= & \langle \text{De Morgan, SAP} \rangle \\
& (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
= & \langle \text{Definición } \setminus \rangle \\
& (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}
$$

7. Si $A = \{x:\mathbb{N}|(\exists y:\mathbb{N}|: x=6y+9)\}$ y $B = \{x:\mathbb{N}|(\exists z:\mathbb{N}|:x=3z)\}$, demostrar que $A\subseteq B$

$x \in A$
$\equiv$ <Definición A>
$(\exists y:\mathbb{N}|: x=6y+9)$
$\equiv$ <Factorización>
$(\exists y:\mathbb{N}|: x=3(2y+3))$
$\Rightarrow$ <Cambio de variable $z=2y+3$>
$(\exists z:\mathbb{N}|: x=3z)$
$\equiv$ <Definición B>
$x \in B$

8. Si $A = \{x:\mathbb{N}|(\exists y:\mathbb{N}|: x=y+1)\}$ y $B = \{x:\mathbb{N}|(\exists z:\mathbb{Z}|:x\neq z \land x=-z)\}$, demostrar que $A=B$

Parte 1: $A\subseteq B$
$x \in A$
$\equiv$ <Definición A>
$(\exists y:\mathbb{N}|: x=y+1)$
$\Rightarrow$ <Cambio de variable $z=-1-y$. Como y es natural, $z \in \mathbb{Z}$ y $z\leq -1$ >
$(\exists z:\mathbb{Z}|: z\leq -1 \land x=(-1-z)+1)$
$\Rightarrow$ <Aritmética, $z\leq -1$ implica $x\neq z$>
$(\exists z:\mathbb{Z}|: x\neq z \land x=-z)$
$\equiv$ <Definición B>
$x \in B$

Parte 2: $B\subseteq A$
$x \in B$
$\equiv$ <Definición B>
$x \in \mathbb{N} \land (\exists z:\mathbb{Z}|: x\neq z \land x=-z)$
$\equiv$ <Distributividad $\land$ sobre $\exists$>
$(\exists z:\mathbb{Z}|: x \in \mathbb{N} \land x\neq z \land x=-z)$
$\equiv$ <Identidad $\land$ Casos sobre z>
$(\exists z:\mathbb{Z}|: (x \in \mathbb{N} \land x\neq z \land x=-z) \land (z \geq 0 \lor z<0))$
$\equiv$ <Distributividad $\land$ >
$(\exists z:\mathbb{Z}|: (x \in \mathbb{N} \land x\neq z \land x=-z \land z \geq 0) \lor (x \in \mathbb{N} \land x\neq z \land x=-z \land z<0))$
$\Rightarrow$ <Reemplazo $z=-x$>
$(\exists z:\mathbb{Z}|: (x \in \mathbb{N} \land x\neq -x \land x=-z \land -x \geq 0) \lor (x \in \mathbb{N} \land x\neq -x \land x=-z \land -x<0))$
$\Rightarrow$ <Definición orden total de enteros, conmutatividad>
$(\exists z:\mathbb{Z}|: (x \in \mathbb{N} \land x \leq 0 \land \land x\neq -x \land x=-z) \lor (x \in \mathbb{N} \land x>0 \land x\neq -x \land x=-z))$
$\Rightarrow$ <$x \in \mathbb{N}$, debilitamiento >
$(\exists z:\mathbb{Z}|: (x = 0 \land x\neq -x \land x=-z) \lor (x \in \mathbb{N} \land x>0 \land x=-z))$
$\Rightarrow$ <$0=-0$ >
$(\exists z:\mathbb{Z}|: \textbf{false} \lor (x \in \mathbb{N} \land x>0 \land x=-z))$
$\equiv$ <Identidad $\lor$, Distributividad $\land$ sobre $\exists$>
$x \in \mathbb{N} \land x>0 \land (\exists z:\mathbb{Z}|:x=-z)$

```
≡ <Definición de ℤ>
  x ∈ ℕ ∧ x>0 ∧ true
≡ <Todo natural mayor que cero tiene antecesor>
  x ∈ ℕ ∧ (∃y:ℕ|: x=y+1)
≡ <Definición A>
  x ∈ A
```

9. Si $A = \{x:\mathbb{N} \mid \neg p(x)\}$ y $B = \{x:\mathbb{N} \mid p(x) \Rightarrow q(x)\}$, demostrar que $A \subseteq B$

```
  x ∈ A
≡ <Definición A>
  ¬p(x)
⇒ <Fortalecimiento>
  ¬p(x) V q(x)
≡ <Definición ⇒>
  p(x) ⇒ q(x)
≡ <Definición B>
  x ∈ B
```

10. Demostrar que $A \subseteq B \wedge C \nsubseteq B \Rightarrow C \nsubseteq A$

Por contradicción:

```
  A⊆B ∧ C ⊈ B ∧  C ⊆ A
≡ <Conmutatividad ∧>
  C ⊆ A ∧ A⊆B ∧ C ⊈ B
≡ <Transitividad de ⊆>
  C ⊆ B ∧ C ⊈ B
≡ <Contradicción>
  false
```

11. Demostrar que si $A \subseteq A' \wedge B \subseteq B' \Rightarrow A \times B \subseteq A' \times B'$

Se demuestra la conclusión utilizando los antecedentes como hipótesis (Metateorema de la deducción)

```
  (x,y) ∈ A x B
≡ <Hip: A⊆A'>
  (x,y) ∈ A' x B
≡ <Hip: B⊆B'>
  (x,y) ∈ A' x B'
```

Relaciones y funciones

1. Dado el conjunto A = {4,5,6} listar todas las relaciones simétricas $R \subseteq A^2$

2. Dado el conjunto B = {a,c,g,t} listar todas las relaciones transitivas $R \subseteq B^2$

3. Una relación sobre R un conjunto X ($R \subseteq X^2$) es “completa” si $(\exists A|: A \subseteq X \wedge R = A \times A)$. Demostrar que si una relación R es completa, entonces R es simétrica y transitiva.

Simétrica:

```
  (x,y) ∈ R
⇒ <Hip: R es completa>
  (∃A|: A⊆X ∧ (x,y) ∈ AxA)
≡ <El producto cartesiano es simétrico>
  (∃A|: A⊆X ∧ (y,x) ∈ AxA)
⇒ <Hip: R es completa>
  (y,x) ∈ R
```

Transitiva:

```
  (x,y) ∈ R ∧ (y,z) ∈ R
⇒ <Hip: R es completa>
  (∃A|: A⊆X ∧ (x,y) ∈ AxA ∧ (y,z) ∈ AxA)
≡ <El producto cartesiano es trasitivo>
  (∃A|: A⊆X ∧ (x,z) ∈ AxA)
⇒ <Hip: R es completa>
  (x,z) ∈ R
```

4. Demostrar que si R y S son relaciones simétricas, R ∪ S también es una relación simétrica

```
  (x,y) ∈ R ∪ S
≡ <Definición de ∪>
  (x,y) ∈ R ∨ (x,y) ∈ S
≡ <Hipótesis R y S son simétricas>
  (y,x) ∈ R ∨ (y,x) ∈ S
⇒ <Definición de ∪>
  (y,x) ∈ R ∪ S
```

5. Dada una relación $R \subseteq X^2$ se define la relación R^c como $X^2 \setminus R$. Demostrar que si R es reflexiva, entonces R^c es irreflexiva

6. Demostrar que si R es simétrica, entonces R^c es simétrica

7. Demostrar que si R es transitiva, entonces R ∘ R es transitiva

```
  (x,y) ∈ R ∘ R ∧ (y,z) ∈ R ∘ R
≡ <Definición de composición>
  (∃a|: (x,a) ∈ R ∧ (a,y) ∈ R) ∧ (∃b|: (y,b) ∈ R ∧ (b,z) ∈ R)
≡ <Hip: R es transitiva>
  (x,y) ∈ R ∧ (y,z) ∈ R
⇒ <∃-introduccion con y como testigo>
  (∃c|: x R c ∧ c R z)
≡ <Definición de composición>
  (x,z) ∈ R ∘ R
```

8. Dar un contraejemplo para refutar que si R ∘ R es transitiva, entonces R es transitiva

R={(1,2),(2,3)}. El único elemento de R ∘ R sería (1,3). Como toda relación con una sola pareja es transitiva, R ∘ R es transitiva pero R no lo es porque (1,3) no pertenece a R

9. Demostrar que la relación $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ definida por el predicado $a\ R\ b \equiv a*b \geq 0$ es una relación de equivalencia. (Nota: El enunciado original tiene como error que el símbolo mayor debería ser mayor o igual, porque si es mayor estricto, la relación no es reflexiva)

Reflexiva:

```
  (a,a) ∈ R
≡ <Definición R>
  a*a≥0
≡ <El cuadrado de un número siempre es positivo>
  true
```

Simétrica:

```
  (a,b) ∈ R
≡ <Definición R>
  a*b≥0
≡ <La multiplicación es conmutativa>
  b*a≥0
≡ <Definición R>
  (b,a) ∈ R
```

Transitiva:

```
  (x,y) ∈ R ∧ (y,z) ∈ R
≡ <Definición R>
  a*b≥0 ∧ b*c≥0
⇒ <Producto de positivos es positivo>
   a*b*b*c≥0
≡ <Como b*b siempre es positivo, a*c tiene que ser positivo>
  a*c≥0
≡ <Definición R>
  (a,c) ∈ R
```

10. Demostrar que la relación $R \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por el predicado $a\ R\ b \equiv a-b \in \mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia. Determinar $[0]$ y $[\pi]$

11. Demostrar que la relación $R \subseteq \mathbb{N}^2$ definida por el predicado $a\ R\ b \equiv a-b > 5$ es una relación de orden parcial estricto. Demostrar que R no tiene elemento máximo, mínimo, supremo, ni ínfimo. Dar un ejemplo de elemento maximal. (Nota: En el enunciado original decía solo orden parcial lo cual estaba mal).

Irreflexiva:

```
  (a,a) ∉ R
≡ <Definición R>
  a-a≤5
≡ <0≤5>
  true
```

Asimétrica:

```
  (a,b) ∈ R
≡ <Definición R>
  a-b>5
≡ <Orden total de naturales>
  b-a<-5
⇒ <b-a es negativo>
  b-a≤5
≡ <Definición R>
  (b,a) ∉ R
```

Transitiva:

```
  (a,b) ∈ R ∧ (b,c) ∈ R
≡ <Definición R>
  a-b>5 ∧ b-c>5
≡ <Sumando b a ambos lados en la primera cláusula>
  a>5+b ∧ b-c>5
⇒ <Debilitamiento, sumando c a ambos lados en la segunda cláusula>
  a>b ∧ b>5+c
⇒ <Transitividad mayor que>
  a>5+c
≡ <Restando c a ambos lados en la segunda cláusula>
  a-c>5
≡ <Definición R>
  (a,c) ∈ R
```

Probar que R no tiene máximo equivale a probar:

```
  (∀x:ℕ|:(∃y:ℕ |: ¬(y R x))
≡ <Definición R>
  (∀x:ℕ|:(∃y:ℕ |: y-x ≤ 5)
⇐ <Instanciación y=x+1>
  (∀x:ℕ|:x≠x+1 ∧ x+1-x ≤ 5)
≡ <Orden total de naturales>
  true
```

Una cota superior x ∈ ℤ de R debe cumplir el siguiente predicado:

```
  (∀y:ℕ |: y R x)
≡ <Definición R>
  (∀y:ℕ |: y - x > 5)
≡ <Sumando x a ambos lados>
  (∀y:ℕ |: y > 5 + x)
```

Como esto se debe cumplir en particular para y=0, entonces $x < -5$. Se pensaría entonces que el supremo de R es -6, sin embargo, esto no es cierto porque -6 no es realmente un mínimo de las cotas superiores de R como se demuestra a continuación por contradicción

```
  (∀y:ℤ |: y < -5 ⇒ -6 R y)
≡ <Definición R>
  (∀y: ℤ |: y < -5 ⇒  -6 - y > 5)
≡ <Sumando y — 5 a ambos lados>
  (∀y: ℤ |: y < -5 ⇒  -11 > y)
≡ <Orden total de enteros>
  false
```

Un ejemplo de elemento maximal es el 4. Para verificar esto se debe probar:

```
  (∀y:ℕ |: ¬(4 R y))
≡ <Definición R>
  (∀y:ℕ |: 4 - y ≤ 5)
≡ <Sumando y-4 a ambos lados>
  (∀y:ℕ |: 0 ≤ y+1)
≡ <Axioma b Peano>
  true
```

12. Sea S = {1/n | n ∈ ℕ}. Para la relación de orden usual de los números reales determinar si existe un elemento máximo, mínimo, supremo e ínfimo. Determinar una cota superior y una cota inferior diferentes al supremo y al ínfimo

13. Dar un ejemplo de 2 funciones tales que f ∘ g sea inyectiva pero alguna de las dos funciones no lo sea

14. Demostrar que la función `f: ℤ → ℤ` dada por `f(x) = 10 - x` es biyectiva

Inyectiva: Suponga que existen tres números x,y,z tales que f(x)=z y f(y)=z

```
  f(x)=z y f(y)=z
≡ <Definición f>
  10-x = z ∧ 10-y = z
≡ <Transitividad =>
```

```
  10-x = 10-y
≡ <Sumando x+y-10 a ambos lados>
  y = x
```

Sobreyectiva:

```
  (∀y:ℤ |: (∃x:ℤ |: f(x) = y)
≡ <Definición f>
  (∀y:ℤ |: (∃x:ℤ |: y = 10 – x)
⇐ <Instanciación x=10-y>
  (∀y:ℤ |: y = 10 – (10 – y))
≡ <Aritmética>
  (∀y:ℤ |: y = y)
≡ <Reflexividad =>
  true
```

Nota: El último punto está mal porque la relación no es inyectiva. Pueden buscar contraejemplos para mostrar que la función no es ni inyectiva ni sobre.