ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2018-10 - Sección 3
Parcial 2 – Abril 12, 2018
Prof. Rodrigo Cardoso

1 **[20/100]**

Sea U un conjunto universal. Considere la operación $F : 2^U \times 2^U \times 2^U \to 2^U$ definida así:

$$F(X,Y,Z) = (X\cup Y)\setminus Z.$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si es falsa o verdadera y justifique su respuesta.

1a (10/20) $F(A,B,C) \subseteq F(A,C,C)$

FALSO

Contraejemplo:

U = **nat**, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \varnothing$.

Entonces:

$$
\begin{array}{ll}
 & F(A,B,C) \\
= & \quad \langle \text{Def } F\rangle \\
 & (A\cup B)\setminus C \\
= & \quad \langle C = \varnothing\rangle \\
 & (A\cup B)\setminus\varnothing \\
= & \quad \langle \text{Def } \setminus;\ X\cap U = X\rangle \\
 & A\cup B \\
= & \\
 & \{1,2\}
\end{array}
$$

Por otro lado:

$$
\begin{array}{ll}
 & F(A,C,C) \\
= & \quad \langle \text{Lema 1a1}\rangle \\
 & A\setminus C \\
= & \quad \langle C = \varnothing;\ \ldots\rangle \\
 & A \\
= & \\
 & \{1\}
\end{array}
$$

[10/10]

1b (10/20) $A \subseteq B \Rightarrow F(A,B,C) \subseteq B$

VERDADERO

Prueba por hipótesis.

Hip: $A \subseteq B$ // A demostrar: $F(A,B,C) \subseteq B$

$$
\begin{array}{ll}
 & F(A,B,C) \\
= & \quad \langle \text{Def } F\rangle \\
 & (A\cup B)\setminus C \\
= & \quad \langle \text{Hip: } A \subseteq B \equiv A\cup B=B\rangle \\
 & B\setminus C \\
= & \quad \langle \text{Def } \setminus\rangle \\
 & B\cap C^c \\
\subseteq & \quad \langle X\cap Y \subseteq X\rangle \\
 & B
\end{array}
$$

[10/10]

Variante:

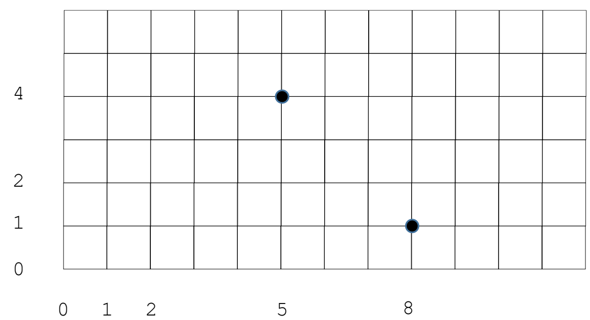
$$
\begin{array}{ll}
 & F(A,B,C) \subseteq B \\
= & \quad \langle X \subseteq Y \equiv X \cap Y = X \rangle \\
 & F(A,B,C) \cap B = F(A,B,C) \\
= & \quad \langle \text{Def } F,\ 2 \text{ veces} \rangle \\
 & (A \cup B) \cap C^c \cap B = (A \cup B) \cap C^c \\
= & \quad \langle \text{SAP, absorción} \rangle \\
 & B \cap C^c = (A \cup B) \cap C^c \\
= & \quad \langle \text{Hip: } A \subseteq B \text{ (o, equivalentemente: } A \cup B = B) \rangle \\
 & B \cap C^c = B \cap C^c \\
= & \\
 & true
\end{array}
$$

[10/10]

2 **[30/100]**

En una ciudad cuadriculada las esquinas se denotan (a,b), con $0 \le a,b$. De hecho , la esquina (a,b) se encuentra en la intersección de la calle a con la carrera b. El origen de la ciudad es la esquina denotada $(0,0)$.

Sea Esq el conjunto de las esquinas de la ciudad.



Sobre Esq se define la relación $eqo : E \leftrightarrow E$, de manera que dos esquinas están relacionadas si son equidistantes en cuadras al origen. Por ejemplo, debe valer que

$$(5,4) \ eqo \ (8,1)$$

ya que ambas esquinas están a 9 cuadras del origen.

2a (5/30) Establezca una expresión formal que defina cuándo

$$(a,b) \ eqo \ (c,d)$$

y justifique su definición.

El número de cuadras de la esquina (x,y) al origen es, precisamente, $x+y$.

[2/5]

Entonces, se tiene que

$$(a,b) \ eqo \ (c,d) \equiv a+b = c+d$$

[3/5]

2b (15/30) Muestre que eqo es una relación de equivalencia

eqo *es reflexiva*

$(a,b) \ eqo \ (a,b)$

```
=     ⟨Def eqo⟩
   a+b = a+b
=
   true
```

[5/15]

eqo *es simétrica*

```
    (a,b) eqo (c,d)
=     ⟨Def R⟩
   a+b = c+d
=     ⟨aritmética⟩
   c+d = a+b
=     ⟨Def eqo⟩
   (c,d) eqo (a,b)
```

[5/15]

eqo *es transitiva*

```
    (a,b) eqo (c,d) ∧  (c,d) eqo (e,f)
=     ⟨Def eqo, 2 veces⟩
   a+b = c+d  ∧  c+d = e+f
⇒     ⟨= - transitividad⟩
   a+b = e+f
=     ⟨Def eqo⟩
   (a,b) eqo (e,f)
```

[5/15]

2c (5/30) Sea (x,y) un elemento de la eqo-clase de equivalencia de (a,b). Exprese y en términos de x, a y b.

Debe tenerse que:

```
    (a,b) eqo (x,y)
=     ⟨Def eqo⟩
   a+b = x+y
=     ⟨aritmética⟩
   y = -x+a+b
```

[5/5]

2d (5/30) Basándose en la respuesta de 2c: ¿qué figura sirve para describir la clase de equivalencia de la esquina (a,b)?

De acuerdo con 2b, la clase de equivalencia de un punto (x,y) es la recta y = -x + a+b.

Entonces, $[(a,b)]_R$ es la recta de pendiente −1 que pasa por (a,b).

[5/5]

Variante

Entonces, $[(a,b)]_R$ es la recta que pasa por (a,b) y (0,a+b).

[5/5]

3 **[30/100]**

Sea $B=\{0,1\}$ el conjunto de los bits (valores binarios). Se define el orden $.<.$ en B, de manera que $0<1$. Para $n>0$, sea B_n el conjunto de palabras binarias de n bits. Una *palabra* $s \in B_n$ se representa con una n-secuencia de bits:

$$s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$$

Con s_k se denota el k-simo bit de la secuencia s.

Sobre B_n se define la relación

$$\text{menq}(s,t) \equiv (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le t_k)$$

3a (15/30) Pruebe que menq es una relación de orden parcial.

menq *es reflexiva*

A demostrar: menq(s,s)

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{menq}(s,s) \\
= & \quad \langle \text{def menq} \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le s_k) \\
= & \quad \langle s_k \le s_k \equiv \text{true} \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : \text{true}) \\
= & \\
 & \text{true}
\end{array}
$$

[5/15]

menq *es transitiva*

Teo: menq(s,t) ∧ menq(t,u) ⇒ menq(s,u)

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{menq}(s,t) \wedge \text{menq}(t,u) \\
= & \quad \langle \text{def menq} \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le t_k) \wedge (\forall k \mid 0 \le k < n : t_k \le u_k) \\
= & \quad \langle \text{Distr } \forall/\wedge \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le t_k \wedge t_k \le u_k) \\
\Rightarrow & \quad \langle s_k \le t_k \wedge t_k \le u_k \Rightarrow s_k \le u_k \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le u_k) \\
= & \quad \langle \text{Def menq} \rangle \\
 & \text{menq}(s,u)
\end{array}
$$

[5/15]

menq *es antisimétrica*

Teo: menq(s,t) ∧ menq(t,s) ⇒ s=t

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{menq}(s,t) \wedge \text{menq}(t,s) \\
= & \quad \langle \text{def menq} \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le t_k) \wedge (\forall k \mid 0 \le k < n : t_k \le s_k) \\
= & \quad \langle \text{Distr } \forall/\wedge \rangle \\
 & (\forall k \mid 0 \le k < n : s_k \le t_k \wedge t_k \le s_k) \\
\Rightarrow & \quad (\text{Antisimetría} - \le \rangle
\end{array}
$$

$(\forall k|\ 0\le k<n:\ s_k=t_k)$

$=$

$s=t$

[5/5]

3b (5/30) Diga si menq es o no un orden total y explique su respuesta.

No es un orden total.

Por ejemplo, para $n=2$, si $s=\langle 0,1\rangle$ y $t=\langle 1,0\rangle$, no se tiene menq(s,t) ni menq(t,s).

[5/5]

3c (10/30) Diga si menq es o no un orden bien fundado y explique su respuesta.

Sea mene el orden estricto correspondiente a menq, i.e.
$\text{mene}(s,t) \equiv \text{menq}(s,t) \wedge s\ne t.$
Entonces:

$$\text{mene}(s,t) \equiv (\forall k|\ 0\le k<n:\ s_k\le t_k) \wedge (\exists k|\ 0\le k<n:\ s_k\ne t_k)$$

Es decir, si mene(s,t)¸ todos los bits de s son menores o iguales a los correspondientes de t y, además, al menos uno es estrictamente menor. Para los bits que no son iguales: $0=s_k<t_k=1$.

Entonces, al construir una cadena mene-descendente, se anulan uno o más bits de un paso a otro de la cadena. Como hay -a lo sumo- n bits por anular, la cadena no puede descender infinitamente. Por tanto, el orden es bien fundado.

[10/10]

4 **[20/100]**
En un universo de personas P, se definen una relación de *amistad* $A:\ P \leftrightarrow P$ y una relación de *conocimiento* $C:\ P \leftrightarrow P$. La relación de amistad se supone simétrica pero no reflexiva. La relación de conocimiento no tiene que ser simétrica.

4a (10/20) A partir de las relaciones A y C, se define una relación de *recomendabilidad* $R:\ P \leftrightarrow P$, de manera R(p,q) signifique que la persona p puede ser recomendada a la persona q. Esto sucede si p no es q y si hay un amigo de q que conoce a p.

Exprese la relación R en términos de las relaciones A y C (solo operaciones entre relaciones, sin mencionar variables de personas ni cuantificadores)

$R(p,q)$

$=$

$I^c(p,q) \wedge (\exists x|\ A(q,x) \wedge C(x,p))$

$=$

$I^c(p,q) \wedge A\circ C(q,p)$

$=$

$I^c(p,q) \wedge (A\circ C)^T(p,q)$

Es decir:

$$R = I^c \cap (A\circ C)^T = I^c \cap C^T\circ A^T = I^c \cap C^T\circ A$$

[10/10]

(cualquiera de las variantes de respuesta anteriores es correcta; en la última se usa que A es simétrica).

4b (10/20) Con respecto a 4a, sean

```
P = {1,2,3}
A = {(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)}
C = A ∪ {(1,2)}
```

Calcule M_R , la matriz booleana que representa la relación R.

Se definen

$$A: \begin{array}{c|ccc|} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad C: \begin{array}{c|ccc|} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{3} & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

[5/10]

Ahora:

$$\underset{I^C}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}}} \cap \underset{C^T}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}}} \underset{A}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}}} = \underset{I^C}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}}} \cap \underset{C^T \circ A}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}} = \underset{R}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}}$$

[5/10]