ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2016-10 - Sección 5
Parcial 2 – Abril 5, 2016
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [25/100]

1a Considere la notación

`(∃!x:U|: R.x)`

cuyo significado pretendido sea "existe un único elemento x tal que, R vale". Defina esta nueva notación en términos de la notación estándar de cuantificadores (OJO: este cuantificador *no* proviene de una operación ACU).

`(∃!x:U|: R.x)  ≡  (∃x:U|: R.x) ∧ (∀a,b:U| R.a ∧ R.b : a=b)`

[8/8]

Variante

`(∃!x:U|: R.x)  ≡  #{x:U| R.x} = 1`

[8/8]

1b Utilizando la notación que defina para **1a**, exprese formalmente el teorema
"Para todo n:**int**, existe un único m:**int**, tal que n+m = 0"

`(∀n:int |:(∃!m:int|: n+m=0))`

[5/5]

1c Demuestre formalmente el teorema de **1b**.

Hay que demostrar que vale

`(∀n:nat |:(∃!m:int|: n+m=0))`

o, equivalentemente (según **1a**)

`(∀n:nat |:(∃m:int|: n+m=0) ∧ (∀p,q:int| n+p=0 ∧ n+q=0 : p=q)`

Ahora:

Teo: `(∀n:nat |:(∃m:int|: n+m=0) ∧ (∀p,q:int| n+p=0 ∧ n+q=0 : p=q)`
Dem:
Sea n:**nat**. Por generalización, basta mostrar que vale:

```
   (∃m:int|: n+m=0) ∧ (∀p,q:int|: n+p=0 ∧ n+q=0 : p=q)
=      〈Lema1, Lema 2〉
   true ∧ true
=
   true.
```

Lema 1: `(∃m:int|: n+m=0)`
Dem:

```
    (∃m:int|: n+m=0)
⇐         〈∃-introducción〉
    n+(-n)=0
```

[6/6]

Lema 2: `(∀p,q:int| n+p=0 ∧ n+q=0 : p=q)`

Dem:

$$(\forall p,q:\mathbf{int}|: n+p=0 \wedge n+q=0 : p=q)$$
$$= \quad \langle \text{Trueque} \rangle$$
$$(\forall p,q:\mathbf{int}|: n+p=0 \wedge n+q=0 \Rightarrow p=q)$$

Sean `p,q:`**`int`** tales que `n+p=0` y `n+q=0`. Para mostrar el `Lema 2`, basta probar que `n+p=0` $\wedge$ `n+q=0` $\Rightarrow$ `p=q`

```
Hip: n+p=0, n+q=0          // a demostrar:  p=q
      true
   =     ⟨Hip: n+p=0⟩
      n+p=0
   =     ⟨Hip: n+q=0 ≡ n=-q⟩
      -q+p=0
   =     ⟨aritmética⟩
      p=q
```

[6/6]

Variante

Hay que demostrar que vale

$$(\forall n:\mathbf{int}\ |:(\exists! m:\mathbf{int}|: n+m=0))$$

o, equivalentemente (según 1a)

$$\#\{x:\mathbf{int}|\ n+x=0\} = 1.$$

Teo: $\#\{x:\mathbf{int}|\ n+x=0\} = 1$

Dem:

```
   #{x:int| n+x=0}
=     ⟨Def #⟩
   (+x:int| n+x=0 : 1)
=     ⟨n+x=0 ≡ x=-n⟩
   (+x:int| x=-n : 1)
=     ⟨Ax 1 Pto⟩
   1[x:= -n]
=
   1
```

[]

[12/12]

2 [25/100]

Pruebe o refute las siguientes afirmaciones sobre conjuntos:

2a $A \subseteq B \equiv A \cap B^C = \varnothing$

Verdadero

Dem:

```
   A ⊆ B
=     ⟨Def ⊆⟩
   (∀x| x∈A : x∈B)
```

$=\quad \langle \text{Trueque} \rangle$
$(\forall x|: x\in A \Rightarrow x\in B)$
$=\quad \langle \text{Def } \Rightarrow \rangle$
$(\forall x|: \neg x\in A \vee x\in B)$
$=\quad \langle \text{De Morgan Gral} \rangle$
$\neg(\exists x|: \neg(\neg x\in A \vee x\in B))$
$=\quad \langle \text{De Morgan; Doble negación} \rangle$
$\neg(\exists x|: x\in A \wedge \neg x\in B)$
$=\quad \langle \text{Def } .^c \rangle$
$\neg(\exists x|: x\in A \wedge x\in B^c)$
$=\quad \langle \text{Def } \cap \rangle$
$\neg(\exists x|: x\in A\cap B^c)$
$=\quad \langle \neg(\exists x|: x\in S) \equiv S = \varnothing \rangle$
$A \cap B^c = \varnothing$

[]
[15/15]

Variante:
Por el Metateorema de representación:
$\vdash A \subseteq B \equiv A \cap B^c = \varnothing$ ssi $\vdash A \Rightarrow B \equiv \neg A \wedge \neg B \equiv false$

Ahora:
Dem:
$A \wedge \neg B \equiv false$
$=\quad \langle \text{Def false} \rangle$
$\neg(A \wedge \neg B)$
$=\quad \langle \text{De Morgan; Doble } \neg \rangle$
$\neg A \vee B$
$=\quad \langle \text{Def } \Rightarrow \rangle$
$A \Rightarrow B$

[]
[15/15]

2b $2^{A\times B} = 2^A \times 2^B$
Ayuda: Considere los tamaños de los conjuntos A y B.

Falso.

Contraejemplo:
Sean $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$.
Entonces:
$\#A = 1,\ \#B = 2$
$\#(A\times B) = \#A * \#B = 1*2 = 2$
$\#2^A = 2^{\#A} = 2^1 = 2$
$\#2^B = 2^{\#B} = 2^2 = 4$

Ahora:
$\#2^{A\times B} = 2^{\#(A\times B)} = 2^2 = 4$
$\#(2^A \times 2^B) = 2*4 = 8$

Es decir, $2^{A\times B}$ tiene menos elementos que $2^A \times 2^B$, de modo que los dos conjuntos no son iguales.

[10/10]

3 [25/100]

Sea $R: A \leftrightarrow A$ una relación reflexiva y transitiva sobre A.

3a Pruebe que la relación $E: A \leftrightarrow A$ definida por

$$E = R \cap R^T$$

es una relación de equivalencia.

Dem:

Hip: $R \supseteq I$ (R reflexiva), $R^2 \subseteq R$ (R transitiva)

Lema: $(R^T)^2 \subseteq R^T$ (R^T transitiva)

Dem:

$$\begin{aligned}
& (R^T)^2 \\
= \quad & \langle \text{Def } .^2 \rangle \\
& R^T \circ R^T \\
= \quad & \\
& (R \circ R)^T \\
\subseteq \quad & \langle R^2 \subseteq R;\ x \subseteq y \equiv x^T \subseteq y^T \rangle \\
& R^T.
\end{aligned}$$

(i) E es reflexiva:

$$\begin{aligned}
& E \\
= \quad & \langle \text{Def } E \rangle \\
& R \cap R^T \\
\supseteq \quad & \langle \text{Hip: } R \supseteq I;\ R^T \supseteq I^T = I \rangle \\
& I \cap I \\
= \quad & \langle x \cap x = x \rangle \\
& I
\end{aligned}$$

[4/12]

(ii) E es simétrica:

$$\begin{aligned}
& E^T \\
= \quad & \langle \text{Def } E \rangle \\
& (R \cap R^T)^T \\
= \quad & \langle (x \cap y)^T = x^T \cap y^T \rangle \\
& R^T \cap (R^T)^T \\
= \quad & \langle (x^T)^T = x \rangle \\
& R^T \cap R \\
= \quad & \langle \cap \text{ Simetría} \rangle \\
& R \cap R^T \\
= \quad & \langle \text{Def } E \rangle \\
& E
\end{aligned}$$

[4/12]

(iii) E es transitiva:

$$\begin{aligned}
& E^2 \\
= \quad & \langle \text{Def } E;\ \text{Def } .^2 \rangle \\
& (R \cap R^T) \circ (R \cap R^T) \\
\subseteq \quad & \langle \text{Semidistributividad } \circ/\cap \rangle \\
& ((R \cap R^T) \circ R) \cap ((R \cap R^T) \circ R^T)
\end{aligned}$$

$\subseteq$ ⟨Semidistributividad $\circ/\cap$⟩
$R^2 \cap R^T \circ R \cap R \circ R^T \cap (R^T)^2$
$\subseteq$ ⟨$x \cap y \subseteq x$⟩
$R^2 \cap (R^T)^2$
$\subseteq$ ⟨R, R^T transitivas⟩
$R \cap R^T$
= ⟨Def E⟩
E

[4/12]

Variante *(demostraciones por elementos)*

(i) E es reflexiva:

x E x
= ⟨Def E⟩
$x\ (R \cap R^T)\ X$
= ⟨Def $\cap$⟩
$xRx \wedge xR^TX$
= ⟨Def $.^T$⟩
$xRx \wedge xRX$
= ⟨I Ident⟩
xRx
= ⟨R reflexiva⟩
true

[4/12]

(ii) E es simétrica:

Lema: R^T simétrica

Dem

$(R^T)^T$
= ⟨R simétrica: $R = R^T$⟩
R^T.

$x\ E^T\ y$
= ⟨Def E⟩
$x\ (R \cap R^T)^T\ y$
= ⟨$(x \cap y)^T = x^T \cap y^T$⟩
$x\ (R^T \cap (R^T)^T)\ y$
= ⟨$(R^T)^T = R$⟩
$x\ (R^T \cap R)\ y$
= ⟨Def E⟩
x E y

[4/12]

(iii) E es transitiva. :

Hip: xEy, yEz // A demostrar: xEz

Lema: R transitiva $\Rightarrow$ R^T transitiva (ver arriba)

true
= ⟨Hip xEy, yEz⟩
$xEy \wedge yEz$
= ⟨Def E⟩
$x(R \cap R^T)y \wedge y(R \cap R^T)z$
= ⟨Def $\cap$⟩

$xRy \wedge xR^Ty \wedge yRz \wedge yR^Tz$
$\Rightarrow$ ⟨SAP⟩
$xRy \wedge yRz \wedge xR^Ty \wedge yR^Tz$
$\Rightarrow$ ⟨Debilitamiento⟩
$xRz \wedge xR^Tz$
= ⟨Def $\cap$⟩
$x(R \cap R^T)z$
= ⟨Def E⟩
xEz

[4/12]

3b Considere la relación la relación `h: Familias ↔ Familias` definida por la regla
`h(a,b)` ≡ "la familia a tiene tantos o menos hijos varones que la familia b y la familia b tiene tantas o menos hijas que la familia a"
Pruebe que h es una relación reflexiva y transitiva.

Dem:
Para a, b familias, sean
$a \leq_v b \equiv$ "la familia a tiene tantos o menos hijos varones que la familia b"
$a \leq_m b \equiv$ "la familia a tiene tantas o menos hijas que la familia b"

Claramente, $\leq_v$ y $\leq_m$ son reflexivas y transitivas.

Entonces:
$h(a,b) \equiv a\leq_v b \wedge b\leq_m a.$

Ahora

Lema 1: h es reflexiva
Dem:
$h(a,a)$
= ⟨Def h⟩
$a\leq_v a \wedge a\leq_m a$
= ⟨$\leq_v$, $\leq_m$ son reflexivas⟩
true $\wedge$ true
=
true

Lema 2: h es transitiva
Dem:
$h(a,b) \wedge h(b,c)$
= ⟨Def h⟩
$a\leq_v b \wedge b\leq_m a \wedge b\leq_v c \wedge c\leq_m b$
$\Rightarrow$ ⟨SAP, $\leq_v$, $\leq_m$ son transitivas⟩
$a\leq_v c \wedge c\leq_m a$
= ⟨Def h⟩
$h(a,c)$

[]

[8/8]

3c Llame e la relación de equivalencia sobre `Familias` definida según **3a** a partir de h. Interprete en español el significado de `e(a,b)`.

`e(a,b)` ≡ "la familia a tiene tantos hijos varones y tantas hijas como la familia a".

[5/5]

Una explicación formal:
Con la notación de la variante de **3b** ,y además:

$a =_v b$	$\equiv$	$a \le_v b \land b \le_v a$
	$\approx$	"la familia a tiene tantos hijos varones como la familia b"
$a =_m b$	$\equiv$	$a \le_m b \land b \le_m a$
	$\approx$	"la familia a tiene tantas hijas como la familia b"

Ahora:

$$\begin{aligned}
& e(a,b) \\
= \; & h(a,b) \land h^T(a,b) \\
= \; & h(a,b) \land h(b,a) \\
= \; & a \le_v b \land b \le_m a \land b \le_v a \land a \le_m b \\
= \; & a =_v b \land a =_m b
\end{aligned}$$

4 [25/100]

Dado `M`, el conjunto de cursos de una carrera, sea `P` una relación en `M` definida de modo que `P(a,b)` sea cierta si el curso a es prerrequisito del curso b. Es decir, `P(a,b)` si un estudiante requiere haber aprobado a para cursar b.

Para cada una de las siguientes propiedades de relaciones, diga si `P` la satisface necesariamente. Explique sus respuestas.

4a unívoca

NO.

Un curso puede ser prerrequisito de dos cursos diferentes.

[3/3]

4b sobreyectiva

NO.

Los cursos iniciales de la carrera no tienen prerrequisitos.

[3/3]

4c orden estricto

SI.

P es irreflexiva.

Si P(a,a) , un curso debe aprobarse antes de cursarse, lo cual es contradictorio.

P es transitiva

Si P(a,b) y P(b,c), a debe aprobarse antes de b y b debe aprobarse antes de c. Por tanto, a debe aprobarse antes de c. Es decir, P(a,c).

[7/7]

4d orden bien fundado

SI.

P es un orden estricto y no puede tener cadenas descendentes infinitas, ya que el número de cursos de una carrera debe ser finito.

[6/6]

4e equivalencia

NO.

P no es reflexiva.

Si P(a,a) , un curso debe aprobarse antes de cursarse, lo cual es contradictorio.

Variante

P no es simétrica.

Si P(a,b), a debe cursarse antes de b y viceversa, lo cual es contradictorio.

[6/6]