ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2018-2 - Sección 3
Parcial 1 – Septiembre 18, 2018
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 **[20 puntos]**
Argumente si la siguiente regla de inferencia es o no correcta para el cálculo proposicional. Justifique su respuesta.

$$QDAE: \quad \frac{p \wedge (q \equiv r)}{p \wedge q \;\equiv\; (p \Rightarrow r)}$$

Sí.

[2/20]

Variante 1 : Tabla de verdad
Se comprueba que la fórmula

$$p \wedge (q \equiv r) \Rightarrow (p \wedge q \equiv (p \Rightarrow r))$$

es una tautología, i,e,

			A	**B**	**C**	**D**	**E**	
p	**q**	**r**	$q \equiv r$	$p \wedge A$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow r$	$C \equiv D$	$B \equiv E$
0	**0**	**0**	1	0	0	1	0	**1**
0	**0**	**1**	0	0	0	1	0	**1**
0	**1**	**0**	0	0	0	1	0	**1**
0	**1**	**1**	1	0	0	1	0	**1**
1	**0**	**0**	1	1	0	0	1	**1**
1	**0**	**1**	0	0	0	1	0	**1**
1	**1**	**0**	0	0	1	0	0	**1**
1	**1**	**1**	1	1	1	1	1	**1**

[18/20]

Variante 2: Demostración
Se comprueba (con una demostración) que la fórmula

$$p \wedge (q \equiv r) \Rightarrow ((p \wedge q) \equiv (p \Rightarrow r))$$

es un teoremas, v. gr., ,

Dem: Por hipótesis
Hip: $p \wedge (q \equiv r)$ // A demostrar: $(p \wedge q) \equiv (p \Rightarrow r)$

$p \wedge (q \equiv r)$
= ⟨Doble negación⟩ // Parece truco, pero es para usar distr $\vee/\equiv$
$\neg\neg(p \wedge (q \equiv r))$
= ⟨De Morgan⟩
$\neg(\neg p \vee \neg(q \equiv r))$
= ⟨Distr $\neg/\equiv$⟩
$\neg(\neg p \vee (\neg q \equiv r))$
= ⟨Distr $\vee/\equiv$⟩
$\neg((\neg p \vee \neg q) \equiv (\neg p \vee r))$

```
=     ⟨De Morgan⟩
   ¬(¬(p ∧ q) ≡ (¬p ∨ r))
=     ⟨Distr ¬/≡; Doble negación⟩
    p ∧ q ≡ (¬p ∨ r)
=     ⟨Def ⇒⟩
    p ∧ q ≡ (p ⇒ r)
```

[18/20]

2 **[35 puntos]**

Agregue al cálculo deductivo la siguiente definición para un conectivo ternario `A` definido por el axioma

`Def A:    A(p,q,r)  ≡  (p ⇒ q) ∧ (¬p ⇒ r)`

Diga si los siguientes enunciados son o no teoremas (Sí / No). Pruebe o refute sus respuestas. Si el enunciado es un teorema, NO use tablas de verdad para demostrarlo.

a (10/35) `A(p,q,q) ≡ q`

Sí es teorema.

[2/10]

```
Teo: A(p,q,q) ≡ q
Dem:
   A(p,q,q)
=     ⟨Def A⟩
   (p ⇒ q) ∧ (¬p ⇒ q)
=     ⟨Def ⇒, 2 veces⟩
   (¬p ∨ q) ∧ (¬¬p ∨ q)
=     ⟨ Distr ∧/∨⟩
   (¬p ∨ ¬¬p) ∧ q
=     ⟨Medio excluido⟩
   true ∧ q
=     ⟨∧-Ident⟩
   q
                                             []
```

[8/10]

b (15/35) `A(p,q,r) ∧ A(r,p,q) ∧ ¬r  ⇒  p ∧ q`

Sí es teorema.

[3/15]

```
Teo: A(p,q,r) ∧ A(r,p,q) ⇒ p ∧ q
Dem: Por hipótesis
Hip: p ⇒ q, ¬p ⇒ r, r ⇒ p, ¬r ⇒ q, ¬r       // A demostrar: p ∧ q

Lema b1: q
   Dem:
            true
      =            ⟨Caso ¬r⟩
            ¬r
      ⇒            ⟨Hip: ¬r ⇒ q; Modus Ponens⟩
```

q

Lema b2: p

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & true \\
= & \langle \text{Hip: } \neg p \Rightarrow r \rangle \\
 & \neg p \Rightarrow r \\
= & \langle \text{Contrarrecíproca; Doble } \neg \rangle \\
 & \neg r \Rightarrow p \\
\Rightarrow & \langle \text{Hip:} \neg r\text{; Modus Ponens} \rangle \\
 & p
\end{array}
$$

Ahora:

$$
\begin{array}{ll}
 & true \\
= & \langle \text{Lema b1, Lema b2; } true \wedge true \equiv true \rangle \\
 & p \wedge q
\end{array}
$$

[]

[12/15]

c (10/35) $A(p \equiv q, q, p) \equiv p \vee q$

NO es teorema.

[2/10]

Contraejemplo:

$p \equiv false$

$q \equiv true$

[3/10]

Ahora (demostrando así o exhibiendo una tabla de verdad):

$$
\begin{array}{ll}
 & A(p \equiv q, q, p) \\
= & \langle p \equiv false,\ q \equiv true \rangle \\
 & A(false \equiv true, true, false) \\
= & \langle false \equiv true \equiv false \rangle \\
 & A(false, true, false) \\
= & \langle \text{Def A; } \neg false \equiv true \rangle \\
 & (false \Rightarrow true) \wedge (true \Rightarrow false)) \\
= & \langle (false \Rightarrow true) \equiv true;\ (true \Rightarrow false) \equiv false \rangle \\
 & true \wedge false \\
= & \langle true \wedge false \equiv false \rangle \\
 & false \\
\neq & \\
 & true \\
= & \langle \vee\text{-Ident} \rangle \\
 & false \vee true \\
= & \langle p \equiv false,\ q \equiv true \rangle \\
 & p \vee q
\end{array}
$$

[5/10]

3 **[30 puntos]**
Considere el argumento siguiente, para decidir su corrección con lógica proposicional:
"Si Pedro viene a la fiesta, hay pan o hay buena música. Cuando no hay buena música, Pedro no viene o no hay pan. Entonces, si no hay buena música, Pedro no vino".

a **(5/30)** Defina variables booleanas que representen las diferentes partes del argumento.

Símbolos de proposición:
```
p : "Pedro viene"
a : "hay pan"
m : "hay buena música"
```
[5/5]

b **(10/30)** Modele el argumento con expresiones booleanas.

[H1]	$p \Rightarrow a \vee m$	*// Si Pedro viene a la fiesta, hay pan o hay buena música*
[H2]	$\neg m \Rightarrow \neg p \vee \neg a$	*// Cuando no hay buena música, Pedro no viene o no hay pan*
[C]	$\neg m \Rightarrow \neg p$	*// si no hay buena música, Pedro no vino*

El argumento es:

$$H1 \wedge H2 \Rightarrow C$$

[10/10]

c **(15/30)** Pruebe que el argumento es correcto (¡NO use tablas de verdad para responder!)

Teo: $H1 \wedge H2 \Rightarrow C$

Dem: Por hipótesis
Hip: H1, H2 // A demostrar: $\neg m \Rightarrow \neg p$

Dem: Por hipótesis
Hip: $\neg m$ // A demostrar: $\neg p$

Lema 1: $\neg p \vee a$
Dem:

$$
\begin{aligned}
& \text{true} \\
= \quad & \langle \text{Hip H1} \rangle \\
& p \Rightarrow a \vee m \\
= \quad & \langle \text{Hip: } \neg m; \quad x \vee false \equiv x \rangle \\
& p \Rightarrow a \\
= \quad & \langle \text{Def } \Rightarrow \rangle \\
& \neg p \vee a
\end{aligned}
$$

Lema 2: $\neg p \vee \neg a$
Dem:

$$
\begin{aligned}
& \text{true} \\
= \quad & \langle \text{Hip H2} \rangle \\
& \neg m \Rightarrow \neg p \vee \neg a \\
= \quad & \langle \text{Hip: } \neg m; \text{ Modus Ponens} \rangle \\
& \neg p \vee \neg a
\end{aligned}
$$

Ahora:

```
    true
=          ⟨Lemas 1 y 2, true ∧ true ≡ true⟩
    (¬p ∨ a) ∧ (¬p ∨ ¬a)
=          ⟨Dist ∨/∧⟩
    ¬p ∨ (a ∧ ¬a)
=          ⟨a ∧ ¬a ≡ false; x ∨ false ≡ x⟩
    ¬p
                                              []
```

[15/15]

4 [25 puntos]

Considere el argumento siguiente:

"No todo el que gane una rifa es feliz y suertudo, pero todo el gane una rifa es suertudo o tramposo. Hay gente que ganó una rifa y no es suertuda. Entonces hay personas tramposas e infelices".

4a (25/25) Modele el argumento anterior con lógica de predicados.

Universo: Personas

[2/25]

Símbolos de predicado:

```
g.x   ≈   "x gana una rifa"
f.x   ≈   "x es feliz"
s.x   ≈   "x es suertudo"
t.x   ≈   "x es tramposo"
```

[10/25]

Modelaje de hechos y conclusión

```
H1:  ¬(∀x| g.x : f.x ∧ s.x)       // No todo el que gane una rifa es feliz y suertudo

H2:  (∀x| g.x : s.x ∨ t.x)        // todo el gane una rifa es suertudo o tramposo

H3:  (∃y |: g.y ∧ ¬s.y)           // Hay gente que ganó una rifa y no es suertuda

C :  (∃x|: t.x ∧ ¬f.x)            // hay personas tramposas e infelices
```

[15/25]

```
Teorema: H1 ∧ H2 ∧ H3  ⇒  C
```

[3/25]

4b *(Bono: +10)* Demuestre que el argumento NO es correcto.

AYUDA: Debe presentar una situación contraejemplo.

Hay que presentar un contraejemplo. En el contraejemplo deben ser ciertas las 3 hipótesis, pero falsa la conclusión.

Suponga la siguiente situación:

```
Personas    :  U = {a}
Ganan Rifa  :  G = {a}
Tramposos   :  T = {a}
```

```
Felices     :  F = {a}
Suertudos   :  S = ∅
```

Entonces:

H1: $\neg(\forall x \mid g.x : f.x \wedge s.x)$

Esto es verdad, ya que solo a cumple g.a, pero aunque f.a es falso que s.a.

H2: $(\forall x \mid g.x : s.x \vee t.x)$

Esto es verdad, ya que solo a cumple g.a, y aunque s.a es falso, t.a es cierto.

H3: $(\exists y \mid : g.y \wedge \neg s.y)$

Esto es verdad, ya que a cumple g.a, y ¬s.a.

C : $(\exists x \mid : t.x \wedge \neg f.x)$

Esto es falso, ya que a (la única persona) cumple t.a pero también f.a.

[Bono: +10]