ISIS 1104Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2014-2
Parcial 2 – Octubre 28, 2014
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 ***(35 puntos)***

Sean A, B, C conjuntos en un universo U.

Sean $f(A,B,C) = ((B \setminus C) \cap A)^c$
$g(A,B) = f(A,A,B)$

Pruebe o refute cada uno de los siguientes enunciados, justificando sus respuestas.
AYUDA: Enuncie y muestre lemas que den formas simplificadas para f y para g.

Lema 1: $f(A,B,C) = (A \cap B)^c \cup C$

Dem:

$f(A,B,C)$
= ⟨Def f⟩
$((B \setminus C) \cap A)^c$
= ⟨De Morgan⟩
$(B \setminus C)^c \cup A^c$
= ⟨Def \⟩
$(B \cap C^c)^c \cup A^c$
= ⟨De Morgan, Doble negación⟩
$B^c \cup C \cup A^c$
= ⟨SAP⟩
$A^c \cup B^c \cup C$
= ⟨De Morgan⟩
$(A \cap B)^c \cup C$

[]

Lema 2: $g(A,B) = A^c \cup B$

Dem:

$g(A,B)$
= ⟨Def g⟩
$f(A,A,B)$
= ⟨Lema 1⟩
$(A \cap A)^c \cup B$
= ⟨$\cap$-idempotencia⟩
$A^c \cup B$

[]

1a (10/35) $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow f(A,B,C) = U$

Dem: Por hipótesis.
Hip: $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ // A demostrar: $f(A,B,C) = U$

$f(A,B,C)$
= ⟨Lema 1⟩
$(A \cap B)^c \cup C$
= ⟨Hip $A \subseteq B$: $A \cap B = A$⟩
$A^c \cup C$

$\supseteq$ ⟨Hip $A\subseteq C$: $A^c \supseteq C^c$ ⟩
$C^c \cup C$
$=$ ⟨$U = X^c \cup X$⟩
U

[]
[10/10]

Variante 1a

Hip: $A\subseteq B$, $A\subseteq C$ // A demostrar: $f(A,B,C) = U$ (o bien: $f(A,B,C) \supseteq U$
$f(A,B,C)$
$=$ ⟨Def f⟩
$((B\backslash C)\cap A)^c$
$=$ ⟨De Morgan⟩
$(B\backslash C)^c \cup A^c$
$=$ ⟨Def \⟩
$(B \cap C^c)^c \cup A^c$
$=$ ⟨De Morgan, Doble negación⟩
$B^c \cup C \cup A^c$
$=$ ⟨Hip: $A\subseteq B \equiv A^c \supseteq B^c$, i.e., $B^c \cup A^c = A^c$ ⟩
$A^c \cup C$
$\supseteq$ ⟨Hip: $A\subseteq C \equiv A^c \supseteq C^c$, i.e., $C \cup A^c \supseteq C \cup C^c = U$⟩
U

[10/10]

1b (15/35) $g(A,B) \cap g(B,A) = g(A\cup B,A\cap B)$

Dem:

$g(A,B) \cap g(B,A)$
$=$ ⟨Lema 2, 2 veces⟩
$(A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$
$=$ ⟨Distr $\cap/\cup$⟩
$((A^c \cup B) \cap B^c) \cup ((A^c \cup B) \cap A)$
$=$ ⟨Absorción $\neg$, 2 veces; SAP⟩
$(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$
$=$ ⟨De Morgan⟩
$(A \cup B)^c \cup (A \cap B)$
$=$ ⟨Lema 2⟩
$g(A\cup B,A\cap B)$

[]
[15/15]

1c (10/35) g es asociativo

Si g fuera asociativo, debería valer que
$g(g(A,B),C) = g(A,g(B,C))$
$=$ ⟨Lema 2, 2 veces⟩
$g(A^c \cup B,C) = g(A, B^c \cup C)$
$=$ ⟨Lema 2, 2 veces⟩
$(A^c \cup B)^c \cup C = A^c \cup B^c \cup C$
$=$ ⟨De Morgan; Doble negación⟩
$(A \cap B^c) \cup C = A^c \cup B^c \cup C$

Ahora, si –por ejemplo- se tuviera que $B=\emptyset$, entonces $B^c=U$ y debería ser cierto que

$A \cup C = U$

Y es claro que ésta no es una tautología. Es decir, la asociatividad de g no vale, en general.

[]
[10/10]

2 ***(35 puntos)***

Para a,b,m∈**int**, m>0, defina

$$a\ R\ b \equiv res(a,m)<res(b,m)$$

donde res(x,y) es el residuo de la división entera x÷y , para x,y∈**int**, y>0.

Sean $P = I \cup R$

$Q = P \cap P^T$.

2a (15/35) Pruebe que R es una relación de orden estricto.

Dem:

Se debe probar que R es irreflexiva y transitiva

(2a1) R es irreflexiva

```
   a R a
=     〈Def R〉
   res(a,m) < res(a,m)
=     〈< irreflexiva〉
   false
```

[]
[7/15]

(2a2) R es transitiva

```
Hip: a R b, b R c // A demostrar: a R c [o bien: res(a,m)< res(c,m)]
   res(a,m)
<     〈Hip: a R b; Def R〉
   res(b,m)
<     〈Hip: b R c; Def R〉
   res(c,m)
```

[]
[8/15]

2b (20/35) Pruebe que Q es una relación de equivalencia.

P es una relación de orden parcial (V. Notas del curso, 6.6). Es decir, P es relación reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Q es relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

(2b1) Q es reflexiva

   $a\ Q\ a$

= 〈Def Q〉

   $a\ (P \cap P^T)\ a$

= 〈Def ∩〉

   $a\ P_m\ a \ \wedge\ a\ P^T\ a$

$=$ ⟨ P_m es reflexiva; P^T es reflexiva; true $\wedge$ true $\equiv$ true⟩
true

[6/20]

(2b2) Q es simétrica
a Q b
$=$ ⟨Def Q⟩
a $(P \cap P^T)$ b
$=$ ⟨Def $\cap$⟩
a P b $\wedge$ a P^T b
$=$ ⟨Def $.^T$⟩
a P b $\wedge$ b P a
$=$ ⟨ P_m es antisimétrica⟩
b = a
$\Rightarrow$ ⟨Q es reflexiva, b=a⟩
b Q a

[7/20]

(2b3) Q es transitiva
Hip: a Q b, b Q c // A demostrar: a Q c
a Q b $\wedge$ b Q c
$=$ ⟨Def Q⟩
a $(P \cap P^T)$ b $\wedge$ b $(P \cap P^T)$ c
$=$ ⟨Def $\cap$⟩
a P b $\wedge$ a P^T b $\wedge$ b P c $\wedge$ b P^T c
$=$ ⟨SAP⟩
a P b $\wedge$ b P c $\wedge$ a P^T b $\wedge$ b P^T c
$\Rightarrow$ ⟨P transitiva, P^T transitiva⟩
a P c $\wedge$ a P^T c
$=$ ⟨Def Q⟩
a Q c

[]
[7/20]

3 *(30 puntos)*

3a Pruebe que, para m$\in$**nat**$^+$, a, b$\in$**int**: $a =_m b \ \wedge\ m|a \ \equiv\ m|mcd(a,b)$

Dem:
($\Rightarrow$)
Supónganse $a =_m b$, m|a.
Es decir, m|(b-a) y m|a.
Entonces, m|(b-a+a), i.e., m|b.

Resumiendo: m es un divisor común de a y de b, de modo que m|mcd(a,b).

($\Leftarrow$)
Supóngase que m|mcd(a,b).
Entonces: m|a y m|b (porque mcd(a,b)|a y mcd(a,b)|b, y |-transitividad).

Entonces: $m|(b-a)$, i.e., $a =_m b$.

Resumiendo: $m|a$ y $a =_m b$.

[15/15]

3b (15/30) Considere la relación sobre **nat⁺** definida por
$a \perp b \equiv$ "a es primo relativo de b"
Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga si es falsa o verdadera. Explique sus respuestas:

(3b1) $\perp$ es simétrica

VERDADERA

[1/5]

```
   a ⊥ b
=     ⟨Def ⊥⟩
   mcd(a,b) = 1
=     ⟨mcd es conmutativo⟩
   mcd(b,a) =1
=
   b ⊥ a
```

[]

[4/5]

(3b2) $\perp$ es total

VERDADERA

[1/5]

Para $a \in \mathbf{nat}^+$, $a \perp (a+1)$, ya que $mcd(a,a+1) = mcd(a,a+1-a) = mcd(a,1) = 1$. En otras palabras, para todo elemento del dominio de $\perp$ existe un b tal que $a \perp b$.

[4/5]

(3b3) $\perp$ es función

FALSA

[1/5]

Usualmente hay nuchos b's tales que $a \perp b$. Por ejemplo: $2 \perp 1$ y $2 \perp 3$. Es decir, $\perp$ no es unívoca y, entonces, no es función.

[4/5]