ISIS-1104-01 Matemática Estructural y Lógica
Parcial 1
Fecha: 3 de Septiembre de 2015

- Esta prueba es INDIVIDUAL.
- Sólo está permitido el uso de las hojas de fórmulas publicadas en sicua+.
- Está prohibido el uso de cualquier dispositivo electrónico.
- El intercambio de información con otro estudiante está terminantemente prohibido.
- Cualquier irregularidad con respecto a estas reglas podría ser considerada fraude.
- Responda el examen en los espacios proporcionados. No se aceptarán hojas adicionales.
- No olvide marcar el examen antes de entregarlo.

IMPORTANTE: Soy consciente de que cualquier tipo de fraude en los exámenes es considerado como una falta grave en la Universidad. Al firmar y entregar este examen doy expreso testimonio de que este trabajo fue desarrollado de acuerdo con las normas establecidas. Del mismo modo, aseguro que no participé en ningún tipo de fraude.

Nombre	Carné
Firma	Fecha

NO ESCRIBIR NADA BAJO ESTA LÍNEA

1.1	20 %	
1.2	20 %	
2.1	10 %	
2.2	20 %	
3.1	10 %	
3.2	20 %	
Total	100 %	

1. [40 %] Demostraciones Cálculo Proposicional

Definimos este nuevo predicado entre tres operandos.

$$foo(p,q,r) \equiv ((p \not\equiv q) \vee r) \wedge \neg(p \wedge q)$$

1.1. [20 %] Demuestre o refute la siguiente equivalencia:

$$foo(p,q,r) \equiv (p \not\equiv q) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q))$$

$$
\begin{array}{ll}
 & foo(p,q,r) \\
= & \quad \langle \text{ Def. de foo } \rangle \\
 & ((p \not\equiv q) \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \\
= & \quad \langle \text{ Dist. } \wedge/\vee \text{ } \rangle \\
 & ((p \not\equiv q) \wedge \neg(p \wedge q)) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q)) \\
= & \quad \langle \text{ Def. de } \not\equiv \text{ } \rangle \\
 & (\ ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \wedge \neg(p \wedge q)\ ) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q)) \\
= & \quad \langle \text{ Asociatividad de } \wedge \text{ } \rangle \\
 & ((p \vee q) \wedge (\ \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)\ )) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q)) \\
= & \quad \langle \text{ Idempotencia de } \wedge \text{ } \rangle \\
 & (\ (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)\ ) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q)) \\
= & \quad \langle \text{ Def. de } \not\equiv \text{ } \rangle \\
 & (p \not\equiv q) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q))
\end{array}
$$

De derecha a izquierda es mas corto:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \not\equiv q) \vee (r \wedge \neg(p \wedge q)) \\
= & \quad \langle \text{ Distrib. } \vee/\wedge \text{ } \rangle \\
 & ((p \not\equiv q) \vee r) \wedge ((p \not\equiv q) \vee \neg(p \wedge q)) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } \not\equiv \text{ } \rangle \\
 & ((p \not\equiv q) \vee r) \wedge (\ ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \vee \neg(p \wedge q)\ ) \\
= & \quad \langle \text{ absorción } \rangle \\
 & ((p \not\equiv q) \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \\
= & \quad \langle \text{ Def. de foo } \rangle \\
 & foo(p,q,r)
\end{array}
$$

1.2. [20 %] **Muestre que sería válido agregar la siguiente regla de inferencia**

$$\begin{array}{l} foo(p,q,r) \\ \underline{p \qquad\qquad\quad} \\ \neg q \end{array}$$

	Expresión	Justificación
1	$foo(p,q,r)$	Hipótesis
2	p	Hipótesis
3	$p = true$	Idenitidad (2)
4	$foo(true,q,r)$	Reemplazo (3,2)
5	$(true \not\equiv q) \vee (r \wedge \neg(true \wedge q))$	Punto 1.1 (4)
6	$(true \not\equiv q) \vee (r \wedge \neg q)$	Identidad $\wedge$ (5))
6	$\neg(true \equiv q) \vee (r \wedge \neg q)$	Defición $\not\equiv$ (6))
7	$\neg q \vee (r \wedge \neg q)$	Identidad (6)
8	$\neg q$	Absorción (7)

2. Cálculo deductivo [35 %]

Hubo un robo al banco y se tienen los siguientes hechos:

1. Hay 5 sospechosos: B, M, R, G y T. $B \lor M \lor R \lor G \lor T$

2. Si B participó entonces G participó pero T no lo hizo $B \Rightarrow G \land \neg T$

3. Si M participó entoncs G no pariticipó pero T sí $M \Rightarrow \neg G \land T$

4. G y T fueron capturados y confesaron $G \land T$

5. Se sabe que al menos uno de los otros tres participó $B \lor M \lor R$

2.1. Modelaje [15 %]

Usando las siguientes variable boleanas:

B: B participó.

M: M participó.

R: R participó.

G: G participó.

T: T participó.

Modele las hipótesis y la conclusión a la que llegó. Sólo R ayudó. Por lo tanto la respuesta es: $\neg B \land \neg M \land R \land G \land T$

2.2. Deducción [20 %]

Demuestre FORMALMENTE que la conclusión es válida a partir de las hipótesis.

	Expresión	Justificación
1	$B \vee M \vee R \vee G \vee T$	Hipótesis
2	$B \Rightarrow G \wedge \neg T$	Hipótesis
3	$M \Rightarrow \neg G \wedge T$	Hipótesis
4	$G \wedge T$	Hipótesis
5	$B \vee M \vee R$	Hipótesis
6	T	Simplificación (4)
7	$T = true$	Identidad (6)
8	$B \Rightarrow \neg G \wedge \neg true$	Reemplazo (7,2)
9	$B \Rightarrow G \wedge false$	Negación de true (8)
10	$B \Rightarrow false$	Dominación de $\wedge$ (9)
11	$\neg B$	Negación derecha de $\Rightarrow$ (9)
12	$(M \Rightarrow \neg G) \wedge (M \Rightarrow T)$	Distr, $\Rightarrow / \wedge$ (3)
13	$(M \Rightarrow \neg G)$	Simplificación (12)
14	G	Simplificación (4)
15	$\neg\neg G$	Doble Negación (14)
16	$\neg M$	Modus Tollens (15,13)
17	$M \vee R$	Silogismo Disyuntivo (11,5)
18	R	Silogismo Disyuntivo (17,16)
19	$\neg B \wedge \neg M \wedge R \wedge G \wedge T$	Composición (11,17,18,4)

3. Cálculo de predicados [35 %]

En la isla de los duendes:

- Los duendes pueden ser: malos, buenos o regulares. No pueden ser malos y buenos a la vez. Pero sí podrían ser:
  - Malos y Regulares
  - Buenos y Regulares
- También pueden ser:
  - Solo Buenos
  - Solo Malos
  - Solo Regulares

$(\forall\ d \mid \quad : \ foo(B(d), M(d), R(d))\ )$

- Los duendes que usan gorro blanco son buenos $(\forall\ d \mid G(d)\ :\ B(d)\ )$

- Los duendes que son buenos tienen poderess $(\forall\ d \mid B(d)\ :\ P(d)\ )$

- Los duendes que son verdes y tienen poderes son maloss $(\forall\ d \mid V(d) \wedge P(d)\ :\ M(d)\ )$

- Los duendes que no son verdes son regularess $(\forall\ d \mid \neg V(d)\ :\ R(d)\ )$

- A es un duende que usa gorro blanco s $G(A)$

Se quiere demostrar la siguiente conclusión:

- A es regular $R(A)$

3.1. Modelaje [15 %]

Modele el problema (hipótesis y conclusiones) con predicados y cuantificadores. Use los siguientes predicados:

- B(h) : h es bueno
- M(h) : h es malo
- R(h) : h es regular
- P(h) : h tiene poderes
- V(h) : h es verde
- G(h) : h usa gorro blanco

Ayuda: Use el predicado del primer punto.

3.2. Deducción [20 %]

Si es posible demuestre la conclusión. Si no es posible justifique por qué no es posible.

	Expresión	Justificación
1	$G(A)$	Premisa
2	$(\forall\ d \mid G(d)\ :\ B(d)\ )$	Hipótesis
3	$B(A)$	Modus Ponens $\forall$ (1,2)
4	$(\forall\ d \mid\ \ :\ foo(B(d), M(d), R(d))\ )$	Hipótesis
5	$foo(B(A), M(A), R(A))$	Generalización $\forall$ (4)
6	$\neg M(A)$	Punto 1.2 (5,3)
7	$(\forall\ d \mid B(d)\ :\ P(d)\ )$	Hipótesis
8	$P(A)$	Modus Ponens $\forall$ (3,7)
9	$(\forall\ d \mid V(d) \wedge P(d)\ :\ M(d)\ )$	Hipótesis
10	$\neg(V(A) \wedge P(A))$	Modus Tollens $\forall$ (9,6)
11	$\neg V(A) \vee \neg P(A)$	De Morgan (10)
12	$\neg\neg P(A)$	Doble Negación (8)
13	$\neg V(A)$	Silogismo Disyuntivo (12,11)
14	$(\forall\ d \mid \neg V(d)\ :\ R(d)\ )$	Hipótesis
15	$R(A)$	Modus Ponens $\forall$ (14,13)