ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2014-2 - Sección 4
Parcial 1 – Sept. 16, 2014
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 **[25 puntos]**

En el cálculo proposicional, compruebe cuáles de las siguientes fórmulas pueden ser axiomas. Para las que no lo sean, determine un contraejemplo.

α: $x \equiv y\vee z \Rightarrow (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$
β: $x \equiv y\vee z \Leftarrow (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$
γ: $x \equiv y\vee z \equiv (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$

Nota explicatoria

En la lectura de las preguntas del parcial se hizo énfasis en que se entendieran α, β y γ de manera que

α: $(x \equiv y\vee z) \Rightarrow (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$
β: $(x \equiv y\vee z) \Leftarrow (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$
γ: $(x \equiv y\vee z) \equiv (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$.

Sin embargo, las precedencias para los operadores establecen que se debía entender

α: $x \equiv (y\vee z \Rightarrow (x \equiv y) \vee (x \equiv z))$
β: $x \equiv (y\vee z \Leftarrow (x \equiv y) \vee (x \equiv z))$
γ: $x \equiv y\vee z \equiv (x \equiv y) \vee (x \equiv z)$

Por esta razón, se va a aceptar como correcta cualquiera de las dos parentizaciones, pero no una mezcla de ambas (por ejemplo, no se acepta α de la primera interpretación y β de la segunda).

Parentización 1 (incorrecta, pero pudo inducirse al leer las preguntas)

La siguiente tabla de verdad sirve de soporte para responder las preguntas:

			A	B	C	D	E	α	β	γ
x	**y**	**z**	**y∨z**	**x≡A**	**x≡y**	**x≡z**	**C∨D**	**B⇒E**	**B⇐E**	**B≡E**
0	0	0	0	1	1	1	1	**1**	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	**1**	**0**	**0**
0	1	0	1	0	0	1	1	**1**	**0**	**0**
0	1	1	1	0	0	0	0	**1**	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	**1**	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	**1**	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1

[10/10]

Respuestas:

α puede ser axioma, porque es una fórmula válida.

[5/5]

β no puede ser axioma.

Contraejemplos: (1) `x ≡ false, y ≡ false, z ≡ true`

(2) `x ≡ false, y ≡ true, z ≡ false`

i.e., $\neg x \wedge y \not\equiv z$.

[5/5]

γ no puede ser axioma.

Sirven como contraejemplos las mismas situaciones descritas para β. Esto es claro, ya que $\gamma \equiv \alpha \wedge \beta$ y, como $\alpha \equiv$ `true`, se tiene que $\gamma \equiv \beta$.

[5/5]

Parentización 2 (la correcta)

La siguiente tabla de verdad sirve de soporte para responder las preguntas:

			A	B	C	D	E	a	b	c	α	β	γ
x	**y**	**z**	**$y \vee z$**	**$x \equiv A$**	**$x \equiv y$**	**$x \equiv z$**	**$C \vee D$**	**$A \Rightarrow E$**	**$E \Rightarrow A$**	**$B \equiv E$**	**$x \equiv a$**	**$x \equiv b$**	**$x \equiv c$**
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	**0**	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	**0**	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

[10/10]

Respuestas:

α no puede ser axioma, porque es una fórmula válida.

Contraejemplos: (1) `x ≡ false, y ≡ false, z ≡ false`

(2) `x ≡ false, y ≡ false, z ≡ true`

(3) `x ≡ false, y ≡ true, z ≡ false`

i.e. $\neg x \wedge y \wedge z$.

[5/5]

β no puede ser axioma.

Contraejemplos: (1) `x ≡ false, y ≡ false, z ≡ true`

(2) `x ≡ false, y ≡ true, z ≡ false`

(3) `x ≡ false, y ≡ true, z ≡ true`

i.e., $\neg x \wedge \neg(y \wedge z)$ o bien $\neg x \wedge (\neg y \vee \neg z)$.

[5/5]

γ no puede ser axioma.

Sirven como contraejemplos las situaciones descritas como tales para $\alpha \wedge \beta$.

Contraejemplos: (1) `x ≡ false, y ≡ false, z ≡ true`

(2) `x ≡ false, y ≡ true, z ≡ false`

[5/5]

2 **[25 puntos]**

Considere el conectivo ternario `C(.,.,.)`, definido por el axioma:

```
Def C:      C(x,y,z) ≡ (x ⇒ y) ∧ (x ⇒ z)
```

Pruebe los siguientes teoremas, sin usar tablas de verdad:

2a `C(x,y,false) ≡ ¬x`

```
Dem:
   C(x,y,false)
=       ⟨Def C⟩
   (x ⇒ y) ∧ (x ⇒ false)
=       ⟨(x ⇒ false) ≡ ¬x
   (x ⇒ y) ∧ ¬x
=       ⟨Def ⇒⟩
   (¬x ∨ y) ∧ ¬x
=       ⟨Absorción⟩
   ¬x
```

[]

[10/10]

2b `x ∧ C(x,x⇒y,x⇒z) ⇒ z`

```
Dem: Por hipótesis.
Hip: x, C(x,x⇒y,x⇒z)   // A demostrar: z
        ⟨Hip: C(x,x⇒y,x⇒z)⟩
   C(x,x⇒y,x⇒z)
=       ⟨Def C⟩
   (x ⇒ (x ⇒ y)) ∧ (x ⇒ (x ⇒ z))
=       ⟨Lema 2b1⟩
   (x ⇒ (x ⇒ y)) ∧ (x ⇒ z)
⇒       ⟨Debilitamiento⟩
   x ⇒ z
⇒       ⟨Hip: x; Modus Ponens⟩
   z
```

[]

Lema 2b1: `x ⇒ (x ⇒ w)  ≡  x ⇒ w`

```
Dem:
   x ⇒ (x ⇒ w)
=       ⟨Def ⇒⟩
   x ⇒ (¬x ∨ w)
=       ⟨Def ⇒⟩
   ¬x ∨ ¬x ∨ w
=       ⟨∨-idempotencia⟩
   ¬x ∨ w
=       ⟨Def ⇒⟩
   x ⇒ w
```

[]

[15/15]

Variante

Lema 2: $C(x,y,z) \equiv x \Rightarrow (y \wedge z)$

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & C(x,y,z) \\
= & \quad \langle \text{Def } C \rangle \\
 & (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z) \\
= & \quad \langle \text{Def } \Rightarrow\text{, 2 veces} \rangle \\
 & (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \\
= & \quad \langle \text{Distr } \vee/\wedge \rangle \\
 & \neg x \vee (y \wedge z) \\
= & \quad \langle \text{Def } \Rightarrow \rangle \\
 & x \Rightarrow y \wedge z
\end{array}
$$

[]

Ahora:

2a $C(x,y,false) \equiv \neg x$

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & C(x,y,false) \\
= & \quad \langle \text{Lema 2} \rangle \\
 & x \Rightarrow y \wedge false \\
= & \quad \langle u \wedge false \equiv false \rangle \\
 & x \Rightarrow false \\
= & \quad \langle \text{Contradicción} \rangle \\
 & \neg x
\end{array}
$$

[]

[10/10]

2b $x \wedge C(x,x\Rightarrow y,x\Rightarrow z) \Rightarrow z$

Dem: Por hipótesis.

Hip: x, $C(x,x\Rightarrow y,x\Rightarrow z)$ // A demostrar: z

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad \langle \text{Hip: } C(x,x\Rightarrow y,x\Rightarrow z) \rangle \\
 & C(x,x\Rightarrow y,x\Rightarrow z) \\
= & \quad \langle \text{Lema 2} \rangle \\
 & x \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \Rightarrow \text{ Transitividad} \rangle \\
 & (x \Rightarrow (x \Rightarrow z) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Hip: } x\text{; Modus Ponens} \rangle \\
 & x \Rightarrow z \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Hip: } x\text{; Modus Ponens} \rangle \\
 & z
\end{array}
$$

[]

[15/15]

3 **[30 puntos]**

Considere el siguiente argumento:

“Si las FARC no dejan las armas y no dejan de secuestrar, el gobierno no va a dialogar.
Si las FARC dejan las armas, ellas dejan de secuestrar y el gobierno va a dialogar.
Entonces, si el gobierno va a dialogar, las FARC dejan de secuestrar".

3a Defina variables booleanas que representen las diferentes partes del argumento.

Definición de variables:

```
gd :  "el gobierno va a dialogar"
fa :  "las FARC dejan las armas"
fs :  "las FARC dejan de secuestrar"
```

[5/5]

3b Exprese las frases del argumento con expresiones booleanas. Así mismo, exprese el argumento como tal.

Argumento formal:

```
H1:  ¬fa ∧ ¬fs ⇒ ¬gd
H2:  fa ⇒ fs ∧ gd
C :  gd ⇒ fs
```

Se afirma que:

```
   H1 ∧ H2 ⇒ C
```

[10/10]

3c Demuestre que el argumento es correcto, sin usar tablas de verdad.

Dem: Por hipótesis

```
Hip: H1, H2, gd              // A demostrar: fs
      ⟨Lema 3c1⟩
   fa ∨ fs
=     ⟨Lema 3c2; x ∧ true ≡ x⟩
   (fa ∨ fs) ∧ (¬fa ∨ fs)
=     ⟨Distr ∨/∧; SAP⟩
   (fa ∧ ¬fa) ∨ fs
=     ⟨Contradicción⟩
   false ∨ fs
=     ⟨0-∨⟩
   fs
```

[]

```
Lema 3c1: fa ∨ fs
   true
=     ⟨Hip H1: ¬fa ∧ ¬fs ⇒ ¬gd⟩
   ¬fa ∧ ¬fs ⇒ ¬gd
=     ⟨Hip gd; ¬true ≡ false⟩
   ¬fa ∧ ¬fs ⇒ false
=     ⟨x⇒false ≡ ¬x⟩
   ¬(¬fa ∧ ¬fs)
=     ⟨DeMorgan; Doble¬⟩
   fa ∨ fs
```

[]

```
Lema 3c2: ¬fa ∨ fs
   true
=     ⟨Hip H2: fa ⇒ fs ∧ gd⟩
   fa ⇒ fs ∧ gd
=     ⟨Hip gd; x ∧ true ≡ x⟩
   fa ⇒ fs
```

```
=     ⟨Def ⇒⟩
   ¬fa ∨ fs
```

[]
[15/15]

4 **[20 puntos]**
Exprese en lógica de predicados el siguiente argumento:
"Quien hace deporte tiene buena salud. Quien tiene buena salud, es feliz. Ana no es feliz. Entonces, Ana no hace deporte".
***Bono**: demostración de que el argumento es correcto.*

Universo: personas.

[2/2]

Símbolos de predicado:

```
d.x    : "x hace deporte"
s.x    : "x tiene buena salud"
f.x    : "x es feliz"
A      : "Ana"
```

[8/8]

Hechos:

```
H1:    (∀x|d.x : s.x)            // Quien hace deporte tiene buena salud
H2:    (∀x|s.x : f.x)            // Quien tiene buena salud, es feliz
H3:    ¬f.A                      // Ana no es feliz
C :    ¬d.A                      // Ana no hace deporte
```

El argumento dice:

$$H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow C$$

[10/10]

Dem: Por hipótesis

```
Hip: H1, H2, H3                // A demostrar: ¬d.a
   true
=     ⟨Hip: H1⟩
   (∀x|d.x : s.x)
=     ⟨Trueque ∀⟩
   (∀x|: d.x ⇒ s.x)
=     ⟨Hip H2; p ≡ p ∧ true⟩
   (∀x|: d.x ⇒ s.x) ∧ (∀x| s.x : f.x)
=     ⟨Trueque ∀⟩
   (∀x|: d.x ⇒ s.x) ∧ (∀x|: s.x ⇒ f.x)
⇒     ⟨Instanciación, 2 veces; x:= A⟩
   (d.A ⇒ s.A) ∧ (s.A ⇒ f.A)
⇒     ⟨⇒ - transitividad⟩
   d.A ⇒ f.A
=     ⟨Contrapositiva⟩
   ¬f.A ⇒ ¬d.a
=     ⟨Hip H3; Modus Ponens⟩
   ¬d.A
```

[]
[Bono: +10]