	Definición	*Ejemplo*
R *reflexiva*	aRa	$.\geq. : nat \leftrightarrow nat$
R *irreflexiva*	¬aRa	$.<. : nat \leftrightarrow nat$
R *simétrica*	aRb ⇒ bRa	hno : Persona ↔ Persona hno(a,b) ≡ "a es hermano de b"
R *asimétrica*	aRb ⇒ ¬bRa	$.<. : nat \leftrightarrow nat$
R *antisimétrica*	aRb ∧ bRa ⇒ a=b	$.\subseteq. : 2^A \leftrightarrow 2^A$
R *transitiva*	aRb ∧ bRc ⇒ aRc	.|. : nat ↔ nat a|b ≡ (∃d|: b = d*a)
R *equivalencia*	R reflexiva, simétrica, transitiva	$.\equiv_m. : nat \leftrightarrow nat$ $a \equiv_m b \equiv m \mid (a-b)$
R *orden parcial*	R reflexiva, transitiva, antisimétrica	.|. : nat ↔ nat a|b ≡ (∃d|: b = d*a)
R *orden total*	R orden parcial ∧ (∀a,b|: aRb ∨ bRa)	$.\leq. : nat \leftrightarrow nat$

Propiedad	*Definición*	*Alternativa*
R reflexiva	xRx	$I \subseteq R$
R irreflexiva	¬(xRx)	$I \cap R = \varnothing$
R simétrica	xRy ≡ yRx	$R = R^T$
R antisimétrica	xRy ∧ yRx ⇒ x=y	$R \cap R^T \subseteq I$
R asimétrica	xRy ⇒ ¬(yRx)	$R \cap R^T = \varnothing$
R transitiva	xRy ∧ yRz ⇒ xRz	$R^2 \subseteq R$

R **equivalencia**	R **reflexiva, simétrica, transitiva**
R **orden parcial**	R **reflexiva, transitiva, antisimétrica**
R **orden total**	R **orden parcial** ∧ (∀a,b|: aRb ∨ bRa)
clausura reflexiva	$r(R) = I \cup R$
clausura simétrica	$s(R) = R \cup R^T$
clausura transitiva	$R^+ = (\cup k \mid 0<k: R^k)$
clausura refl-trans	$R^* = (\cup k \mid 0\leq k: R^k)$

⟨ Def ∘⟩
(∃z| xR^Tz ∧ zRy)
⟨Def $.^T$⟩
(∃z| zRx ∧ zRy)

orden estricto = irreflexivo y transitivo

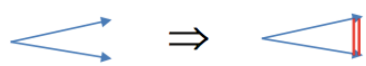
	Definición	*Ejemplo*
R *total*	$(\exists b{:}B \mid : aRb)$	$.<.\ :\ nat \leftrightarrow nat$
R *unívoca* R *función parcial*	$aRb_1 \wedge aRb_2 \Rightarrow b_1{=}b_2$	pred : nat ↔ nat pred = {(x,y) | y=x-1} Si $b_1{=}a{-}1$ y $b_2{=}a{-}1$ entonces $b_1 = b_2$
R *1-1* R *inyectiva*	$a_1Rb \wedge a_2Rb \Rightarrow a_1{=}a_2$	suc : nat ↔ nat suc={(x,y)|y=x+1} Si $b{=}a_1{+}1$ y $b{=}a_2{+}1$ entonces $a_1 = a_2$
R *sobre* R *sobreyectiva*	$(\exists a{:}A \mid : aRb)$	$.<.\ :\ int \leftrightarrow int$
R *función*	R unívoca ∧ R total	suc : nat ↔ nat suc={(x,y)|y=x+1}
R *biyección* R *biyectiva*	R función ∧ R 1-1 ∧ R sobre	I: A ↔ A I = {(x,y)| x=y}

R ***total***

$(\exists b{:}B \mid : aRb)$

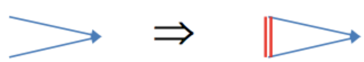
R ***unívoca (función parcial)***

$aRb_1 \wedge aRb_2 \Rightarrow b_1{=}b_2$



R ***1-1 (inyectiva)***

$a_1Rb \wedge a_2Rb \Rightarrow a_1{=}a_2$



R ***sobre (sobreyectiva)***

$(\exists a{:}A \mid : aRb)$

R ***función***

R unívoca ∧ R total

R ***biyección (biyectiva)***

R función ∧ R 1-1 ∧ R sobre

Nótese que toda clase de equivalencia tiene, al menos, un elemento. Claramente:

$$(\cup a \mid : [a]) = A.$$

Las clases de equivalencia cumplen las siguientes propiedades:

Teo B: Sea $R: A \leftrightarrow A$ equivalencia. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a aRb

b $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

c $[a] = [b]$

Def C: Sea A conjunto. $\mathbf{P} \subseteq 2^A$ es una *partición de* A si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a $(\cup B:\mathbf{P}|: B) = A$

b $(\forall B_1, B_2:\mathbf{P}|\ B_1 \neq B_2 : B_1 \cap B_2 = \varnothing)$

Entonces:

- Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $R:\ A \leftrightarrow A$ son una partición de A.
- Dada una partición $\mathbf{P}$ de un conjunto A, la relación $E:\ A \leftrightarrow A$, definida por

$$E(x,y) \equiv (\exists B:\mathbf{P}|: x \in B \wedge y \in B)$$

Nótese que:

- R total $\equiv$ $\mathrm{dom}\ R = A$
- R total $\equiv$ R^T sobre
- R sobre $\equiv$ $\mathrm{ran}\ R = B$
- R unívoca $\equiv$ R^T 1-1
- R biyección $\equiv$ R^T biyección.

$$(\exists! x:U|: R.x) \equiv (\exists x:U|: R.x) \wedge (\forall a,b:U|\ R.a \wedge R.b : a=b)$$

$$(\exists! x:U|: R.x) \equiv \#\{x:U|\ R.x\} = 1$$

Si se tienen dos funciones

$f:\ A \to B$

$g:\ B \to C$

Para $x \in \mathrm{dom}\ f$:

$(x, f.x) \in f$

$(f.x, g(f.x)) \in g.$

Y entonces:

$(x, g(f.x)) \in f \circ g.$

Así que la función

$f \circ g:\ A \to C$

es tal que

$(f \circ g).x = g(f.x).$

La notación relacional no parece práctica para componer funciones. En cambio, se prefiere denotar, cuando se trata de composición funcional:

$g \bullet f:\ A \to C$

de modo que

$g \bullet f = f \circ g.$

Y entonces:

$(g \bullet f).x = g(f.x)$

El operador $\bullet$ se suele omitir, y se escribe gf para significar $g \bullet f$.

6.7.2 Secuencias y sucesiones

Para recordar:

dados dos conjuntos A, B se ha definido el *producto cartesiano*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Se generaliza a un número n de conjuntos, $n \geq 0$, así:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (\forall i \mid 1 \leq i \leq n : a_i \in A_i)\}$$

Los elementos de un producto cartesiano de n conjuntos son n-*tuplas*. En una tupla importa el orden de los elementos y siempre hay n elementos mencionados (incluso, si hay repeticiones).

Cuando los conjuntos que participan en un n-producto cartesiano son todos iguales, digamos A, el producto se denota A^n.

Def A : Una n-*secuencia* de elementos de A es un elemento de A^n.

Def B: Una n-*secuencia* de elementos de A es una función $f: \{k{:}\mathbf{nat} \mid 0 \leq i < n\} \rightarrow A$

Las dos definiciones son equivalentes (cada una representa la otra). En vez de la notación de tuplas, usando paréntesis corrientes, se acostumbra usar

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$$

para enfatizar que se habla de una secuencia.

Se denota

Seq[A] : el conjunto de las secuencias sobre A.

Una 0-secuencia de elementos de A es la secuencia *vacía* (de A). Se denota $\langle\rangle$ o también ε (y en otros textos, λ).

6.7.2.1 Operaciones sobre secuencias / sucesiones

Seq[A] se puede definir recursivamente. La siguiente notación indica cómo puede hacerse esto de manera sistemática[3]:

TAD Seq[A]

* ε : $\rightarrow$ Seq // una constante

* .◁. : A × Seq $\rightarrow$ Seq // *prepend*, añadir por atrás

Parecería que esta fuera una definición con problemas, porque está definiendo secuencias suponiendo que ya se tiene un conjunto de secuencias para describir las imágenes de ε y $\triangleleft$. En realidad, se quiere decir lo siguiente:

$$Seq_0 = \{\varepsilon\}$$

$$Seq_{n+1} = Seq_n \cup \{s \mid s = a \triangleleft s_n,\ a \in A,\ s_n \in Seq_n\},\ n \geq 0$$

$$Seq = (\cup n \mid : Seq_n)$$

Nótese que la secuencia $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ se puede denotar con

$$a_1 \triangleleft (a_2 \triangleleft \ldots \triangleleft (a_n \triangleleft \varepsilon) \ldots)$$

y, por convención, escribir esto como

$$a_1 \triangleleft a_2 \triangleleft \ldots \triangleleft a_n \triangleleft \varepsilon\ .$$

O sea, se tiene una representación para cualquier secuencia de A, en términos de ε y $\triangleleft$.

Ahora, se pueden añadir operaciones definidas de la siguiente forma:

```
head: Seq A → A
head(a◁s) = a

tail: Seq A → Seq A
tail(ε) = ε
tail(a◁s) = s

isempty: Seq A → bool
isempty(ε)
isempty(a◁s) = false

last: Seq A → A
last(a◁s) = if isempty(s) then a else last(s) fi

size: Seq A → nat
size(ε) = 0
size(a◁s) = size(s) + 1

^ : Seq A × Seq A → Seq A
ε^t = t
(a◁s)^t = a◁(s^t)
```

Obsérvese que las operaciones definidas son funciones parciales, en general. Y, en muchos casos, se trata de funciones. Por ejemplo, no se define `head(ε)`, por lo que `head` es función parcial. Sin embargo, `tail` e `isempty` sí están definidas unívocamente para toda posible secuencia, de modo que son funciones.

Metateorema de representación

X_S expresión de conjuntos que menciona variables, $\varnothing$, U, $\cup$, $\cap$, $.^c$

X_P expresión booleana cambiando así:

$\cap \to \wedge$, $\cup \to \vee$, $.^c \to \neg$, $\varnothing \to$ false, $U \to$ true

Entonces:

$\vdash E_S = F_S$	ssi	$\vdash E_P \equiv F_P$
$\vdash E_S \subseteq F_S$	ssi	$\vdash E_P \Rightarrow F_P$
$\vdash E_S = U$	ssi	$\vdash E_P$
$\vdash E_S = \varnothing$	ssi	$\vdash \neg E_P$

Operaciones de conjuntos $\leftrightarrow$ Operaciones de lógica proposicional

$\cap$: $\wedge$

$\cup$: $\vee$

$.^c$: $\neg$

$\varnothing$: **false**

U : **true**

$A \subseteq B \equiv (\forall x{:}U | : x\in A \Rightarrow x\in B)$

$A \cup B = \{x{:}U | \ x\in A \vee x\in B\}$

$A \cap B = \{x{:}U | \ x\in A \wedge x\in B\}$

$A^c = \{x{:}U | \ x\notin A\}$

$A \setminus B = \{x{:}U | \ x\in A \wedge x\notin B\}$

$2^A = \{B{:}set(U) | \ B \subseteq A\}$

$\#A = (+x | \ x\in A : 1)$

Matemáticas	Informática	Significado	Elementos
$\varnothing$	{}, void	Conjunto vacío	
U (no estándar)		Conjunto universo	Todos "los que interesan"
N	**nat**	Números naturales	0,1,2,3,...
Z	**int**	Números enteros	...,-3,-2,-1,0,1,2,3,…
Z^+	**int**$^+$	Números enteros positivos	1,2,3,...
R		Números reales	0, -17, 17.23, π, e, ... (ejemplos)
Q	**real float rat**	Números reales racionales	p/q:**R**, con p,q:**Z**, $q\neq 0$
Q^+	**real**$^+$ **float**$^+$ **rat**$^+$	Números racionales positivos	p/q:**R**, con p,q:**Z**$^+$, $q\neq 0$
C		Números complejos	a+ib, con a,b:**R**, $i=\sqrt{(-1)}$

Axioma: Pertenencia $\cup$

$y\in(\cup k | \ Q : E) \equiv (\exists k | \ Q : y\in E)$

Axioma: Pertenencia $\cap$

$y\in(\cap k | \ Q : E) \equiv (\forall k | \ Q : y\in E)$

Notación	Se lee	Significado	Ejemplos
$A \subseteq B$	*A contenido en B* *A subconjunto de B*	Todo elemento de A es elemento de B: $(\forall x | : x\in A \Rightarrow x\in B)$	$\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$ **nat** $\subseteq$ **int**
$A \subset B$	*A contenido propiamente en B* *A subconjunto propio de B*	Todo elemento de A es elemento de B, pero no todo elemento de B es elemento de A: $A \subseteq B \wedge \neg(B \subseteq A)$	$\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ **nat** $\subset$ **int**
$A \cup B$	*A unión B*	Conjunto que contiene los elementos de A y los de B: $\{x | \ x\in A \vee x\in B\}$	A = {1,2} B = {1,3,5} $A \cup B$ = {1,2,3,5}
$A \cap B$	*A intersección B*	Conjunto que contiene los elementos comunes de A y de B: $\{x | \ x\in A \wedge x\in B\}$	A = {1,2} B = {1,3,5} $A \cap B$ = {1}
A\B A-B	*A menos B*	Conjunto que contiene los elementos en A que no están en B: $\{x | \ x\in A \wedge x\notin B\}$	A = {1,2} B = {1,3,5} A\B = {2} B\A = {3,5}
A^C $\overline{A}$	*A complemento*	Conjunto de elementos del universo que no están en A: $\{x | \ x\notin A\}$	U\A
2^A **P**(A)	*Potencia de A* *Partes de A*	Conjunto de subconjuntos de A: $\{B | \ B \subseteq A\}$	A = {1,3,5} 2^A = {$\varnothing$,{1},{3},{5},{1,3},{1,5},{3,5},{1,3,5}}
#A |A|	*Cardinal de A* *Tamaño de A*	Número de elementos en A: $(+x | \ x\in A : 1)$	A = {1,3,5} #A = 3 #(2^A) = 8
A × B	*A cruz B* *Producto cartesiano de A y B*	Conjunto de parejas, cada una con el primer elemento en A y el segundo en B: $\{(a,b) | \ a\in A \wedge b\in B\}$	A = {1,3,5} C = {-1,3} A×C ={(1,-1),(1,3),(3,-1),(3,3),(5,-1),(5,3)}

Axioma: Pertenencia

$y \in \{x:U \mid p.x\} \equiv p.y$

Axioma: Igualdad

$A = B \equiv (\forall x:U \mid : x \in A \equiv x \in B)$

Teo A : (Igualdad de conjuntos)

(1) $A = B \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

(2) $A = \{x \mid p(x)\},\ B = \{x \mid q(x)\}:\ A = B \equiv (\forall z \mid : p(z) \equiv q(z))$

Teo A: (De Morgan) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

∩-Identidad	$A \cap U = A$
∪-Identidad	$A \cup \varnothing = A$
∩-Dominancia	$A \cap \varnothing = \varnothing$
∪-Dominancia	$A \cup U = U$
∩-Idempotencia	$A \cap A = A$
∪-Idempotencia	$A \cup A = A$
Doble complemento	$(A^c)^c = A$

∩-Conmutatividad	$A \cap B = B \cap A$
∪-Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$
∩-Asociatividad	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
∪-Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$
Distributividad ∩/∪	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Distributividad ∪/∩	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$
Absorción	$A \cap (A \cup B) = A$
Medio excluído	$A \cup A^c = U$
Contradicción	$A \cap A^c = \varnothing$
Definición de ⊆	$A \subseteq B = (\forall x:U \mid : x \in A \Rightarrow x \in B)$
Contrapositiva	$A \subseteq B = B^c \subseteq A^c$
Distributividad ⊆/∩	$A \subseteq (B \cap C) = (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)$

Para mostrar la ley de absorción para conjuntos:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

basta probar que[5]:

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A.$$

Para mostrar la ley de contrapositiva en conjuntos

$$A \subseteq B = B^c \subseteq A^c$$

basta probar que:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley de contrapositiva en lógica.

Para mostrar la ley de medio excluido en conjuntos

$$A \cup A^c = U$$

basta probar que:

$$A \vee \neg A.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley del medio excluido en lógica.

a Para mostrar la segunda ley de absorción para conjuntos:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

basta probar el dual

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Y esto es verdad por la primera ley de absorción en conjuntos.

b Para mostrar la ley de contradicción en conjuntos

$$A \cap A^c = \varnothing$$

basta probar el dual:

$$A \cup A^c = U.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley del medio excluido en lógica.

$$A \setminus \varnothing = A$$

$$A - A = \varnothing$$

$$A - B = \varnothing \leftrightarrow A \subseteq B$$

$$A - B = A \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \varnothing \text{ , } (A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$$

$$A^{\complement} = U \setminus A$$

Si se considera un conjunto universal, la diferencia entre dos conjuntos es la intersección del primero con el complemento del segundo:

$$A \setminus B = A \cap B^{\complement}$$

También es de hacer notar que si:

$$A - B = C,$$

$$A \neq C + B$$

$$A \setminus B = A \cap B^{\complement}$$

$$U^{\complement} = \varnothing \text{ , } \varnothing^{\complement} = U$$

- Propiedad involutiva. El complementario del complementario de A es el propio A:
  $(A^{\complement})^{\complement} = A$
- La unión de un conjunto y su complementario es el conjunto universal:
  $A \cup A^{\complement} = U$
- Un conjunto y su complementario son disjuntos:
  $A \cap A^{\complement} = \varnothing$
- El complementario de A está contenido en el complementario de cualquier subconjunto de A:
  $B \subseteq A \to A^{\complement} \subseteq B^{\complement}$

Leyes de De Morgan

- El complementario de la unión de dos conjuntos es la intersección de los complementarios:
  $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$
- El complementario de la intersección de dos conjuntos es la unión de los complementarios:
  $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

$\langle A\cap\varnothing = \varnothing;\ \text{SAP}\rangle$

$A \cap U$

$\quad\langle \text{Medio Excluido}\rangle$

$A \cap (B \cup B^c)$

$\langle I = I^T \rangle$

$\langle (R\cup I)^T = R^T \cup I^T\rangle$

$\quad A\subseteq B^c$

$= \qquad \langle X\subseteq Y \equiv X\cap Y=X\rangle$

$\quad A\cap B^c = A$

$\Rightarrow \qquad \langle X=Y \Rightarrow X\cap Z = Y\cap Z\rangle$

$x(A\cup B)y = xAy \vee x=y$

$A \cup B = B$

$\quad\langle \text{Def } \subseteq\rangle$

$A \subseteq B$

$A\subseteq B \equiv A^c\supseteq B^c$

$B^c\cup A^c = A^c$