ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2017-20
Parcial 3 – Noviembre 22, 2017
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [25/100]

Encuentre todas las soluciones para el sistema de congruencias (x,y: **int**):

(1) $5*x + 6*y =_3 12$

(2) $4*x + 2*y =_3 1$

Sumando miembro a miembro las congruencias se llega a

(3) $9*x + 8*y =_3 13$

Por tanto, ya que $9*x =_3 0$, $8*y =_3 -y$, $13 =_3 1$:

$0 - y =_3 1$

≡

$y =_3 -1$

≡

$y =_3 2$

Ahora, remplazando en la congruencia (2) el valor $y=_3-1$

$4*x - 2 =_3 1$

≡

$4*x =_3 3$

≡ ⟨ $4*x =_3 x$; $3 =_3 0$ ⟩

$x =_3 0$

[20/20]

Resumiendo, las soluciones son de la forma

$x =_3 0$, $y =_3 2$

O, equivalentemente:

$x = 3*u$, $y = 2+3*v$, u,v∈**int**.

[5/5]

2 [25/100]

Sean a,b>0. Recuerde que si d = mcd(a,b), existen x, y tales que a*x+b*y = d.
Muestre que mcd(x,y) = 1.

AYUDA: Hay una combinación lineal entera de x e y que es igual a 1.

mcd(x,y) es el menor valor entero positivo de la forma p*x + q*y, variando sobre pares de enteros p,q.

[5/5]

Nótese que a/d y b/d son enteros, ya que d=mcd(a,b). Por tanto, ya que a*x+b*y = d, se tiene que

$(a/d)*x + (b/d)*y = 1.$

[5/5]

Es decir, hay una combinación lineal entera de x e y de valor 1. Como no puede haber una combinación lineal entera positiva de menor valor que 1, éste debe ser el máximo común divisor de x e y, i.e.,

mcd(x,y)=1.

[15/15]

3 **[25/100]**

Pruebe que, para todo `n∈nat`: `n*(n+1)*(2*n+1)` es divisible por `3`.

Dem: Inducción sobre `n∈nat`.

[2/2]

```
Predicado de Inducción:  Q.n ≡  n*(n+1)*(2*n+1) =₃ 0  ,  n≥0
```

[3/3]

```
Caso Base: Q.0
   0*(0+1)*(2*0+1)
=     ⟨Aritmética⟩
   0
=₃
   0
```

[5/5]

```
Caso Inductivo: Q(n+1)
HI: Q.n, n≥0
   (n+1)*(n+1+1)*(2*(n+1)+1)
=     ⟨Aritmética⟩
   (n+1)*(n+2)*(2*n+3)
=₃    ⟨ 3 =₃ 0 ⟩
   (n+1)*(n+2)*2*n
=     ⟨Aritmética⟩
   n*(n+1)*(2n+4)
=₃    ⟨ 4 =₃ 1 ⟩
   n*(n+1)*(2*n+1)
=₃    ⟨HI⟩
   0
```

[15/15]

Variante 1 para el caso inductivo

```
   (n+1)*(n+1+1)*(2*(n+1)+1)
=     ⟨Aritmética⟩
   (n+1)*(n+2)*(2*n+3)
=     ⟨Aritmética⟩
   (n+1)*(n+2)*(2*n)  +  (n+1)*(n+2)*3
=     ⟨Aritmética⟩
   (n+1)*n*(2*n)  +  (n+1)*2*(2*n)  +  (n+1)*(n+2)*3
=     ⟨Aritmética⟩
   n*(n+1)*(2*n+4)  +  (n+1)*(n+2)*3
=     ⟨Aritmética⟩
   n*(n+1)*(2*n+1+3)  +  (n+1)*(n+2)*3
=     ⟨Aritmética⟩
   n*(n+1)*(2*n+1)  + n*(n+1)*3 +  (n+1)*(n+2)*3
=₃    ⟨HI⟩
   0 + n*(n+1)*3 + (n+1)*(n+2)*3
=₃    ⟨Aritmética⟩
   0
```

[15/15]

Variante 2 : Prueba por casos

Casos*:* $n =_3 0$, $n =_3 1$, $n =_3 2$

$n =_3 0 \lor n =_3 1 \lor n =_3 2$

$=$ $\langle$ n mod 3 $\in$ 0..2 $\rangle$

true

Caso: $n =_3 0$

n*(n+1)*(2*n+1)

$=_3$ $\langle$Caso: $n =_3 0\rangle$

0*(n+1)*(2*n+1)

$=_3$

0

Caso: $n =_3 1$

n*(n+1)*(2*n+1)

$=_3$ $\langle$Caso: $n =_3 1\rangle$

1*(1+1)*(2*1+1)

$=_3$

1*2*3

$=_3$

0

Caso: $n =_3 2$

n*(n+1)*(2*n+1)

$=_3$ $\langle$Caso: $n =_3 1\rangle$

2*(2+1)*(2*2+1)

$=_3$

2*3*5

$=_3$

0

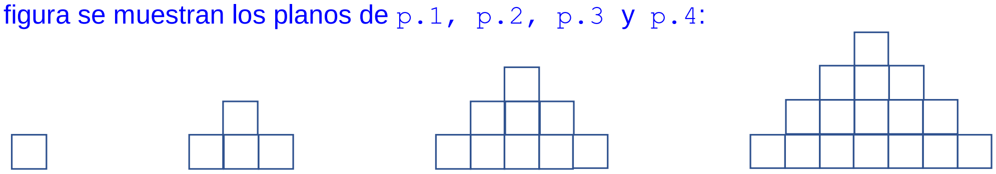
[25/25]

4 **[25/100]**

Una fábrica de adornos para jardín usa bloques cuadrados para construir muros piramidales que llaman p.n, para n≥1.

El muro piramidal p.1 consta, simplemente, de un bloque. En general, para construir un muro p.n, n>1, se pone un muro p(n-1) centrado sobre una base igual a la suya, aumentada con un bloque a cada lado.

En la figura se muestran los planos de p.1, p.2, p.3 y p.4:



p_1 p_2 p_3 p_4

Sea c.n la cantidad de bloques que tiene el muro piramidal p.n, para n>0.

Sea b.n la cantidad de bloques que tiene la base del muro piramidal p.n, para n>0.

4a (10/25) Plantee una fórmula no recursiva para estimar b.n y demuestre su corrección.

Teorema: `b.n = 2*n-1, n≥1`.

[5/5]

Dem: Inducción sobre `n≥1`.

Predicado de inducción: `B.n ≡ b.n = 2*n-1, n≥1`

Caso base: `B.1`

```
   b.1
=      ⟨Def p.1⟩
   1
```

Caso inductivo: `B(n+1)`

```
HI: B.n, n≥1
   b(n+1)
=      ⟨Def p⟩
   b.n + 2
=      ⟨HI⟩
   2*n -1 + 2
=      ⟨Aritmética⟩
   2*(n+1) - 1
```

[5/5]

4b (15/25) Plantee una fórmula no recursiva para estimar `c.n` y demuestre su corrección.

Teorema: `c.n` $= n^2$, `n≥1`.

[5/5]

Dem: Inducción sobre `n≥1`.
Predicado de inducción: `C.n ≡ c.n` $= n^2$, `n≥1`

Caso base: `B.1`

   c.1
=   ⟨Def p.1⟩
   1
=
   1^2

Caso inductivo: `C(n+1)`

HI: C.n, n≥1
   c(n+1)
=   ⟨Def p⟩
   c.n + b(n+1)
=   ⟨HI⟩
   n^2 + b(n+1)
=   ⟨4a⟩
   $n^2 + 2*(n+1) - 1$
=
   $n^2 + 2*n + 1$
=
   $(n+1)^2$

[10/10]