ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2013-10 - Sección 4
Parcial 3 – Mayo 9, 2013
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [30/100]

Considere un juego en el que hay dos pilas de fichas. Al empezar, la pila 1 tiene A fichas y la pila 2 tiene B fichas, con $A,B>1$. El juego se juega por turno entre dos personas y el estado del juego, antes de la jugada n, se puede representar con una pareja $(a_n, b_n) \in \mathbf{nat}^+ \times \mathbf{nat}^+$. Para efectuar la jugada en su turno, un jugador elimina de una de las pilas un número de fichas que sea un múltiplo positivo del número de fichas de la otra pila, siempre y cuando quede en la pila en que se retiran fichas un número positivo. Si el jugador no puede efectuar una jugada así, el juego termina.

En otras palabras:

$(a_0,b_0) = (A,B)$

(a_{n+1},b_{n+1}) se puede definir de dos formas:

$= (a_n-k*b_n,b_n)$, para un $k>0$, tal que $a_n-k*b_n>0$; o bien

$= (a_n,b_n-k*a_n)$, para un $k>0$, tal que $b_n-k*a_n>0$.

A manera de ejemplo, si el juego comienza con $A=72$, $B=56$, podría darse una secuencia de jugadas de la forma

$\langle(72,56),(16,56),(16,24),(16,8),(8,8)\rangle$.

1a [10/30] Muestre que el juego termina después de un número finito de jugadas, en un estado de la forma (d,d). Ayuda: Considere la secuencia $\langle t_n\rangle$, con $t_n=a_n+b_n$, $n\geq0$.

Variante 1:

Considere la secuencia $\langle t_n\rangle$, con $t_n= a_n+b_n$, $n\geq0$.

Nótese que, si $(a_{n+1},b_{n+1}) = (a_n-k*b_n,b_n)$, para un $k>0$ tal que $a_n-k*b_n>0$, entonces

$t_{n+1} = a_n-k*b_n+b_n = a_n+b_n-k*b_n = t_n - k*b_n < t_n$.

Si, en cambio, $(a_{n+1},b_{n+1}) = (a_n,b_n-k*a_n)$, para un $k>0$ tal que $b_n-k*a_n>0$, entonces

$t_{n+1} = a_n+b_n-k*a_n = t_n - k*a_n < t_n$.

Es decir, en todo caso $t_{n+1} < t_n$. Empezando en $t_0=A+B>0$, los t_n's forman una cadena descendente de números naturales positivos, la cual no puede ser infinita y el juego debe terminar.

[5/10]

Para terminar, el juego acaba porque no es posible efectuar una jugada. Si en un momento se está en un estado (d,e), con $d\neq e$, siempre se puede jugar restando del mayor el menor. En otras palabras, si se está en un estado con componentes diferentes, puede jugarse una vez más. Por tanto, si el juego debe terminar, tendrá que hacerlo con componentes iguales.

[5/10]

Variante 2:

$(\mathbf{nat}^+,<)$ es un orden bien fundado. Por tanto, $(\mathbf{nat}^+ \times \mathbf{nat}^+,<_{lex})$ el orden lexicográfico correspondiente, también lo es. En un orden bien fundado no hay cadenas estrictamente descendentes de longitud infinita (arbitrariamente larga).

La secuencia $\langle (a_n,b_n) \rangle$ está ordenada lexicográficamente en orden estrictamente descendente sobre **nat**$^+$ $\times$ **nat**$^+$. Como no puede haber cadenas estrictamente descendentes de tamaño arbitrario, el juego debe terminar.

[5/10]

Terminación en componentes iguales: como en la Variante 1.

[5/10]

1b [15/30] Pruebe, por inducción, que $\mathrm{mcd}(a_n,b_n) = \mathrm{mcd}(A,B)$, para $0 \le n \le N$, donde N es el número de jugadas que se hagan.

Predicado de inducción: $Q.n \equiv \mathrm{mcd}(a_n,b_n) = \mathrm{mcd}(A,B)$, para $0 \le n \le N$.

[2/15]

Caso base: $Q.0$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{mcd}(a_0,b_0)\\
= &\quad \langle \text{Def } a,\ b \rangle\\
&\mathrm{mcd}(A,B)
\end{aligned}
$$

[2/15]

Caso inductivo: $Q(n+1)$

HI: $Q.n,\ 0 \le n < N$

Casos: [1] $(a_{n+1},b_{n+1}) = (a_n - k*b_n, b_n)$, para un $k>0$ tal que $a_n - k*b_n > 0$,

[2] $(a_{n+1},b_{n+1}) = (a_n, b_n - k*a_n)$, para un $k>0$ tal que $b_n - k*a_n > 0$.

Por las reglas del juego los casos [1] y [2] son exhaustivos y disyuntos.

El siguiente Lema es útil en la demostración de los casos:

Lema: $\mathrm{mcd}(a-k*b,b) = \mathrm{mcd}(a,b)$

Dem:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{mcd}(a,b)\\
= &\quad \langle \text{Ver Notas de curso} \rangle\\
&\mathrm{mcd}(a-b,b)\\
= &\quad \langle \text{Ver Notas de curso} \rangle\\
&\mathrm{mcd}(a-2*b,b)\\
\ldots &\quad \text{// se puede hacer por inducción, …}\\
= &\\
&\mathrm{mcd}(a-k*b,b).
\end{aligned}
$$

[5/15]

Caso [1]:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{mcd}(a_{n+1},b_{n+1})\\
= &\quad \langle \text{Caso [1]} \rangle\\
&\mathrm{mcd}(a_n-k*b_n,b_n)\\
= &\quad \langle \text{Lema} \rangle\\
&\mathrm{mcd}(a_n,b_n\rangle\\
= &\quad \langle \text{HI} \rangle\\
&\mathrm{mcd}(A,B)
\end{aligned}
$$

[3/15]

Caso [2]: Análogo a Caso [1].

[3/15]

1c [5/30] Muestre que si el juego termina en (d,d), entonces d = mcd(A,B).

En el último paso, que es de la forma (d,d) , debe cumplirse que
d = mcd(d,d) = mcd(A,B).

[5/5]

2 [20/100]
Sea $n \in$ **nat**, $0 \leq n < 1000$. Muestre que si n tiene como notación decimal $d_2 d_1 d_0$, entonces $7|n$ si y solo si $7|(2*d_2+3*d_1+d_0)$.

Dem:
Nótese que
(a) $1 =_7 1$
(b) $10 =_7 3$
(c) $100 =_7 2$

[10/20]

Entonces:
n
=
$100*d_2 + 10*d_1 + 1*d_0$
$=_7$ ⟨aritmética modular: (a),(b),(c)⟩
$2*d_2 + 3*d_1 + d_0$

[10/20]

3 [30/100]
Para $n \in$ **nat**, $n>1$, defina
$a.n = 2^n$
$b.n = 2^{a.n}-1$
Demuestre que b.n no es primo.

AYUDAS: Recuerde que
$x^{2y} = (x^y)^2$
$x^2 - y^2 = (x-y)*(x+y)$

Dem: Inducción sobre $n>1$

[4/30]

Predicado de inducción: $P.n \equiv \neg primo(b.n), n \geq 2$

[4/30]

Caso base: P.2
$a.2 = 2^2 = 4$
$b.2 = 2^4-1 = 16-1 = 15 = 3*5$

Nótese que b.2 no es primo.

[4/30]

Caso inductivo: P(n+1)

HI: P.n, n≥2

$$a(n+1) = 2^{n+1} = 2^n * 2 = (a.n)*2$$

$$
\begin{array}{ll}
 & b(n+1) \\
= & \langle \text{Def } b \rangle \\
 & 2^{a(n+1)}-1 \\
= & \langle a(n+1) = (a.n)*2 \rangle \\
 & 2^{a(n)*2} - 1 \\
= & \langle \text{Aritmética: } x^{2y} = (x^y)^2 \rangle \\
 & (2^{a(n)})^2 - 1 \\
= & \langle \text{Aritmética: } x^2 - y^2 = (x-y)*(x+y) \rangle \\
 & (2^{a(n)}-1) * (2^{a(n)}+1) \\
\Rightarrow & \langle b(n+1) \text{ es producto de dos enteros mayores que } 1 \rangle \\
 & \neg primo(b(n+1))
\end{array}
$$

[8/30]

Es fácil mostrar que los factores en que se parte b(n+1) son mayores que 1:

$$
\begin{array}{ll}
 & 2^{a(n)}-1 > 1 \\
= & \\
 & 2^{a(n)} > 2 \\
= & \\
 & 2^n > 1 \\
\Leftarrow & \\
 & n > 0 \\
= & \\
 & true
\end{array}
$$

[4/30]

Por otro lado:

$$
\begin{array}{ll}
 & 2^{a(n)}+1 > 1 \\
= & \\
 & 2^{a(n)} > 0 \\
= & \\
 & true.
\end{array}
$$

[4/30]

4 [20/100]

4a ¿Cuántos números binarios de n bits tienen k bits en 0, para 0≤k≤n?

Un número binario de n bits con k bits en 0 se puede considerar representando un subconjunto de k elementos del conjunto 1..n, si el bit j-simo en 0 se interpreta como que j está en el subconjunto representado. Es fácil ver que esta correspondencia es biyectiva, de modo que hay tantas cadenas de n bits con k 0's como subconjuntos de k elementos de 1..n.

Es decir, la respuesta es $\binom{n}{k}$.

[8/20]

4b ¿Cuántos números binarios de n bits tienen k bits en 0, y son pares, para 0≤k≤n?

Los números pares tienen una representación binaria tal que el bit de las unidades es 0. Entonces, para contar los pares con k bits en 0, uno de los 0's debe estar en las unidades y los $k-1$ restantes deben ubicarse en una cadena de $n-1$ bits.

Es decir, la respuesta es $\binom{n-1}{k-1}$. La pregunta tiene sentido si $0<k\leq n$.

[8/20]

4b Calcule su respuestas de 4a y 4b para $n=4$, $k=2$.

Para 4a:

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$$

Para 4b:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\ 2!} = 3$$

[4/20]