ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2016-20
Parcial 3 – Noviembre 18, 2016
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 **[25/100]**

Encuentre todas las soluciones para el sistema de congruencias

(1) $3^{2016} * x + 12 * y =_{11} 10$

(2) $-x + y =_{11} 10$

[i] *Encontrar a qué equivale* 3^{2016} *módulo* 11

Usando el Teorema de Fermat:

Nótese que, ya que $\neg(11|3)$ y 11 es primo. El Teorema de Fermat permite concluir que

$$3^{11-1} = 3^{10} =_{11} 1$$

Por tanto, $3^{10*t} =_{11} 1$, para $t>0$.

$$3^{2016} = 3^{2010+6} = 3^{2010} * 3^6 = (3^{10})^{201} * 3^6 =_{11} 3^6$$

Ahora:

$3^1 =_{11} 3$

$\Rightarrow$ $\langle 2 = 1+1 \rangle$

$3^2 =_{11} 9 =_{11} -2$

$\Rightarrow$ $\langle 4 = 2+2 \rangle$

$3^4 =_{11} 4$

$\Rightarrow$ $\langle 6 = 2+4 \rangle$

$3^6 =_{11} -8 =_{11} 3$

[10/25]

Variante:

$3^1 =_{11} 3$

$\Rightarrow$ $\langle 2 = 1+1 \rangle$

$3^2 =_{11} 9 =_{11} -2$

$\Rightarrow$ $\langle 4 = 2+2 \rangle$

$3^4 =_{11} 4$

$\Rightarrow$ $\langle 6 = 2+4 \rangle$

$3^6 =_{11} -8 =_{11} 3$

$\Rightarrow$ $\langle 10 = 4+6 \rangle$

$3^{10} =_{11} 12 =_{11} 1$

$\Rightarrow$ $\langle 2010 = 10*201 \rangle$

$3^{2010} =_{11} 1$

$\Rightarrow$ $\langle 2016 = 2010+6 \rangle$

$3^{2016} =_{11} 3$

[10/25]

[ii] Reescribir las restricciones originales, con [i]:

$$(1') \quad 3*x + 12*y =_{11} 10 \qquad // \text{ O bien: } \quad 3*x + y =_{11} 10$$

$$(2') \quad -3*x + 3*y =_{11} 30$$

[5/25]

[iii] Resolver:

Sumando (1') y (2'):

$15*y =_{11} 40$

$= \quad \langle 15 =_{11} 4 \rangle$

$4*y =_{11} 40$

$\Rightarrow \quad \langle \text{ mcd}(4,11)=1 \rangle$

$y =_{11} 10$

Y, remplazando en (2):

$-x + 10 =_{11} 10$

$\Rightarrow$

$x =_{11} 0.$

Resumiendo:

$x =_{11} 0$

$y =_{11} 10.$

[10/25]

Variante (de toda la solución)

true

$= \quad \langle (1) \rangle$

$3^{2016}*x + 12*y =_{11} 10$

$= \quad \langle 12 =_{11} 1 \rangle$

$3^{2016}*x + y =_{11} 10$

$=$

$-3^{2016}*x - y =_{11} -10$

$= \quad \langle \text{ (2) } -x + y =_{11} 10; \text{ sumando miembro a miembro} \rangle$

$-3^{2016}*x - x =_{11} 0$

$=$

$(1+3^{2016})*x =_{11} 0$

[10/25]

Si $1+3^{2016} =_{11} 0$, x puede ser cualquier número natural.

Pero este no es el caso, ya que

$3^{2016}+1 =_{11} 4$ (Ver Variante anterior)

[10/25]

Por tanto:

$x =_{11} 0$

Y entonces, por (2):

$y =_{11} 10$

[5/25]

2 [25/100]

2a (15/25) Sean m,n: **int**, $m,n\neq 0$. Sean a,b,m',n' tales que

(H1) $m = 2^a m'$

(H2) $n = 2^b n'$

(H3) $m' =_2 1$

(H4) $n' =_2 1$

Demuestre que:

$$mcd(m,n) = 2^{min(a,b)} mcd(m',n')$$

Dem:

$mcd(m,n)$

$=$ $\langle$H1, H2$\rangle$

$mcd(2^a m', 2^b n')$

$=$ $\langle d*mcd(x,y) = mcd(d*x,d*y) \rangle$

$2^{min(a,b)} mcd(2^{a-min(a,b)}m', 2^{b-min(a,b)}n')$

[3/15]

Casos: $a=b$, $a<b$, $a>b$

Si $a=b$, se tiene que $2^{a-min(a,b)}=1$, $2^{b-min(a,b)}=1$.

$mcd(m,n)$

$=$

$2^{min(a,b)} mcd(2^{a-min(a,b)}m', 2^{b-min(a,b)}n')$

$=$

$2^{min(a,b)} mcd(m',n')$

[2/15]

Si $a<b$, se tiene que $2^{a-min(a,b)}=1$, $2^{b-min(a,b)}=2^{b-a} >1$.

$mcd(m,n)$

$=$

$2^{min(a,b)} mcd(m',2^{b-a}n')$

$=$ $\langle mcd(m',2^{b-a}n')= mcd(m',n') \rangle$

$2^{min(a,b)} mcd(m',n')$

Para explicar este último paso, sean $d = mcd(m',2^{b-a}n')$ y $e= mcd(m',n')$.

Nótese que d es un divisor común de m' y $2^{b-a}n'$. Como m'es impar, d no puede ser par. Es decir, $d|2^{b-a}n'$, pero $\neg(d|2^{b-a})$, porque 2^{b-a} es un número par mayor que 1. Por tanto, $d|n'$. Es decir, $d|m'$ y $d|n'$ y, entonces, $d|e$. Por otro lado, como $e|m'$ y $e|n'$, también $e|2^{b-a}n'$ y $e|d$. Es decir $e=d$.

El caso $b<a$ se argumenta análogamente al caso $a<b$.

[10/15]

2b (10/25) Use el resultado de **2a** para calcular $mcd(1920,720)$.

$1920 = 2^7*15$

$720 = 2^4*45$

[5/10]

Entonces:

```
   mcd(1920,720)
=
   2^4*mcd(15,45)
=
   2^4*15
=
   16*15
=
   240
```

[5/10]

3 **[25/100]**

Considere T_n, una tabla de números binarios entre $0..2^n-1$, para $n\geq1$. Observe que en esta tabla están exactamente los números naturales representables con n bits.

Sea $S.n$ el número de bits en 1 en toda la tabla T_n.

Pruebe que $S.n = n*2^{n-1}$.

Por ejemplo, para $n=2$, la tabla T_2 sería (note que $S.2 = 4$)

```
00
01
10
11
```

AYUDA: Note que cuando se ordenan los números ascendentemente, los de la segunda mitad de la tabla son iguales a los de la primera mitad, más un bit en 1 en la cifra más significativa.

Dem: Inducción sobre $n\geq1$.

[2/25]

Predicado de inducción: $P.n \equiv S.n = n*2^{n-1}$, $n\geq1$.

[3/25]

Caso base: $P.1$

$$
\begin{array}{ll}
 & S.1 \\
= & \langle T_1 = \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \rangle \\
 & 1 \\
= & \langle \text{aritmética} \rangle \\
 & 1*2^{1-1}
\end{array}
$$

[5/25]

Caso inductivo: $P(n+1)$

HI: $P.n,\ n\geq1$

$$
\begin{array}{ll}
 & S(n+1) \\
= & \langle \text{Lema A} \rangle \\
 & 2*S(n) + 2^n \\
= & \langle \text{HI} \rangle \\
 & 2*\ n*2^{n-1} + 2^n \\
= & \langle \text{aritmética} \rangle \\
 & n*2^n + 2^n \\
= & \langle \text{aritmética} \rangle
\end{array}
$$

$(n+1)*2^{(n+1)-1}$

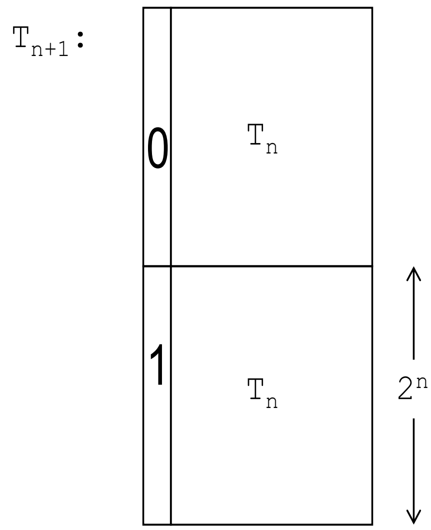
[5/25]

Lema A:

$$S_{n+1} = 2*S(n) + 2^n \quad , \; n \geq 1$$

Dem:

La tabla T_{n+1} se puede visualizar así:



Entonces, es claro que $S_{n+1} = 2*S_n + 2^n$.

[10/25]

4 [25/100]

Para $n \geq 0$, considere el polinomio P_n en las variables x,y, definido como

$$P_n(x,y) = (x+y)^n$$

Demuestre que

$$P_n(x,y) = (+k| \; 0 \leq k \leq n \; : \; c_k \, x^k y^{n-k})$$

donde los coeficientes cumplen las restricciones:

$$c_0 = 1$$

$$c_{k+1} = c_k \frac{n-k}{k+1} \quad , \; 0 \leq k < n$$

Dem: Inducción sobre k:**nat**

[2/25]

Predicado de inducción: $Q.k \equiv c_k = \binom{n}{k} \quad , \; 0 \leq k \leq n$

[3/25]

Caso base: $Q.0$

$$\begin{array}{ll} & c_0 \\ = & \langle \text{Def } c \rangle \\ & 1 \end{array}$$

$=\quad \langle\, 1 = \binom{n}{0} \,\rangle$

$\binom{n}{0}$

[5/25]

Caso inductivo: `Q(k+1)`

`HI: Q.k, 0≤k<n`

c_{k+1}

$=\quad \langle \text{Def } c \rangle$

$c_k \;\; \dfrac{n-k}{k+1}$

$=\quad \langle \text{HI} \rangle$

$\binom{n}{k}\;\dfrac{n-k}{k+1}$

$=\quad \langle \text{Def binomial})$

$\dfrac{n!\;(n-k)}{k!(n-k)!(k+1)}$

$=\quad \langle \text{Def } .!,\ 2 \text{ veces} \rangle$

$\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$=\quad \langle \text{Def binomial} \rangle$

$\binom{n}{k+1}$

[15/25]