Teoría de conjuntos
Matemática Estructural y Lógica

Miguel De Ávila

6 de marzo de 2018

Conjuntos

- Un conjunto es un agregado de elementos. Estos elementos pueden ser números, objetos, otros conjuntos, etc.
- Por lo general denotamos conjuntos con letras mayúsculas: A, B, C.
- Los conjuntos son la base del estudio moderno de las matemáticas.

Lógica y teoría de conjuntos

Hay una relación estrecha entre la lógica y la teoría de conjuntos que veremos a continuación.
En primer lugar, los axiomas de la teoría de conjuntos se expresan en lógica de primer orden (de predicados).

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

La teoría de conjuntos se basa en estos 8 axiomas (más el axioma de elección en la mayoría de casos):

1. Extensionalidad
2. Regularidad
3. Comprensión
4. Axioma de pares
5. Unión
6. Reemplazo
7. Axioma de infinito
8. Conjunto potencia

Para entender la teoría de conjuntos bajo la luz de estos axiomas, sería necesario tomar un curso más avanzado.

Notación

Ya mencionamos que un conjunto se denota por lo general con una letra en mayúscula.
Los elementos de un conjunto usualmente se identifican con letras en minúsculas como x, y, z.
La relación binaria $\in$ denota la pertenencia de un elemento a un conjunto:

$$x \in A$$

Para x y A dados, esto toma un valor de verdad (*true* o *false*).

Cómo definir un conjunto

Para definir un conjunto podemos simplemente listar sus elementos, enmarcados en llaves:

$$
\begin{aligned}
A =& \{0, 1, 2\} \\
V =& \{a, e, i, o, u\} \\
\emptyset =& \{\}
\end{aligned}
$$

En este caso hablamos de una notación "extensional" y decimos que los conjuntos se definieron de forma extensional.

Notación intensional

También podemos definir un conjunto de forma "intensional":

$$\{x : A | P\}$$

denota el conjunto de los x en A tal que P; donde x es una variable, A es el dominio de x y P es un predicado que puede mencionar a x. Por ejemplo:

$$\{n : \mathbb{N} | n < 10\}$$

es el conjunto de números naturales menores a 10.

Ejemplos de conjuntos

$$\{x : \mathbb{Q} | (\exists y : \mathbb{Z}| : x = y/2)\}$$
$$\{x : \mathbb{Q} | x^2 < 3\}$$
$$\{n : \mathbb{N} | x = 1 \vee x = 3 \vee x = 100 \vee x = 500\}$$

En algunos casos también abusaremos de la notación extensional para describir conjuntos infinitos, por ejemplo:

$$\{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\{\ldots - 7, -5, -3, -1\}$$
$$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$$

Extensionalidad

El axioma de extensionalidad (axioma 1 de ZFC) dice lo siguiente:

$$A = B \equiv (\forall x| : x \in A \equiv x \in B)$$

Este axioma nos dice que un conjunto está únicamente determinado por sus elementos. Como consecuencia, en los conjuntos no importa el orden, y no hay repeticiones:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3, 4\} \\ = & \{2, 4, 1, 3\} \\ = & \{3, 3, 3, 2, 1, 4, 4\}. \end{aligned}$$

Conjuntos conocidos

Damos por conocidos los siguientes conjuntos:

- $\emptyset$
- U
- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

A continuación definimos algunas relaciones y operaciones entre conjuntos.

$$A \subseteq B$$

se lee A contenido en B o A subconjunto de B. Es un operador cuyo resultado es booleano (*true* o *false*). El significado se define a partir de la lógica:

$$A \subseteq B \equiv (\forall x | : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$A \subset B$$

se lee A contenido propiamente en B o A subconjunto propio de B. Es un operador cuyo resultado es booleano y se define así:

$$A \subset B \equiv A \subseteq B \wedge A \neq B$$

A veces se escribe también $A \subsetneqq B$.

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$A \cup B$$

se lee A unión B. Su resultado es el conjunto que contiene los elementos de A y los de B:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$A \cap B$$

se lee A intersección B o A inter B. Su resultado es el conjunto de elementos de A que también están en B (o vice versa):

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$A \setminus B$$

se lee A menos B. Es el conjunto de los elementos de A que no están en B:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Por ejemplo,

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}.$$

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$A^c$$

se lee A complemento. Es el conjunto de elementos (del universo) que no están en A:

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

También se suele escribir $U \setminus A$. Siempre que se hable del complemento de un conjunto, es preciso que haya un universo determinado (que puede pensarse como el contexto del problema).

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$\mathbb{P}(A)$$

es el conjunto de partes de A, o el conjunto potencia de A. Este conjunto tiene como elementos todos los subconjuntos de A:

$$\mathbb{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}.$$

Por ejemplo,

$$\mathbb{P}(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset, \{1, 2\}\}.$$

A veces se escribe 2^A en vez de $\mathbb{P}(A)$.

Operaciones y relaciones sobre conjuntos

$$|A|$$

se lee cardinalidad (o tamaño) de A. $|A|$ es el número de elementos de A, que por ahora solo tendrá sentido para conjuntos finitos. Un teorema interesante nos dice que:

$$|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Producto cartesiano

Una pareja ordenada es un conjunto de dos elementos donde el orden importa, usualmente se escribe

$$(a, b)$$

para denotar la pareja ordenada de a y b. En este caso a es la primera coordenada y b es la segunda.

$$A \times B$$

se lee A cruz B y denota el conjunto de parejas ordenadas con primera coordenada en A y segunda coordenada en B:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Conjuntos infinitos

- El axioma del infinito nos dice que existe un conjunto infinito (axioma 7 de ZFC). Además, ya mencionamos algunos conjuntos infinitos.
- Formalmente, un conjunto es finito si tiene un número n de elementos distintos.
- Un conjunto es infinito si no es finito.

¿Qué tamaño tienen los conjuntos infinitos como $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$?

Axioma de comprensión

El axioma 3 de ZFC (comprensión) es el que nos permite precisamente definir conjuntos intensionalmente, a partir de otros ya conocidos.
Vale la pena mencionar entonces, que la notación *extensional* no agrega ninguna expresividad al lenguaje, ya que todo conjunto descrito de forma extensional en realidad puede verse como si fuera definido intensionalmente.
El conjunto

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

no es más que

$$\{x | x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4\}.$$

Nota sobre pertenencia a conjuntos

Los axiomas 1 y 3 (extensionalidad y comprensión) nos permiten establecer con precisión cuando dos conjuntos son iguales, y cuando un elemento pertenece a un conjunto:

$$A = B \equiv (\forall x| : x \in A \equiv x \in B)$$

$$y \in \{x| : p(x)\} \equiv p(y)$$

Teoremas en teoría de conjuntos

Un primer teorema que podemos demostrar es:

Teorema

(Igualdad en conjuntos) $A = B \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Además, si definimos dos conjuntos por comprensión, se tiene el siguiente teorema:

Teorema

Si $A = \{x|p(x)\}$ *y* $B = \{x|q(x)\}$ *entonces*
$A = B \equiv (\forall z| : p(z) \equiv q(z))$.

Definiciones de $\emptyset$ y U

Definimos $\emptyset$ y U así:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \{x | \mathit{false}\}, \\ U &= \{x | \mathit{true}\}. \end{aligned}$$

Podemos probar entonces que:

- $(\forall x | : x \notin \emptyset)$.
- $(\forall x | : x \in U)$.

Propiedades de operaciones

Las operaciones que definimos tienen propiedades interesantes, que son universales para todos los conjuntos. Por ejemplo:

Teorema

Sean A *y* B *conjuntos cualesquiera. Entonces* $A \setminus B = A \cap B^c$.

Demostración.

Por el axioma de extensionalidad, basta probar que $x \in A \setminus B \equiv x \in A \cap B^c$:

$$
\begin{array}{ll}
 & x \in A \setminus B \\
\equiv & \quad < \text{Def. } \setminus > \\
 & x \in A \wedge \neg(x \in B) \\
\equiv & \quad < \text{Def. } B^c > \\
 & x \in A \wedge x \in B^c \\
\equiv & \quad < \text{Def. } \cap > \\
 & x \in A \cap B^c
\end{array}
$$

$\square$

Teoremas de la teoría de conjuntos

Otro teorema es el siguiente:

Teorema

(De Morgan) Sean A y B conjuntos cualesquiera. Entonces $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

La demostración es parecida a la anterior.
Este teorema tiene cierta similitud con el axioma de la lógica proposicional:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Esto nos motiva a enunciar un teorema que los relaciona.

Metateorema de representación

Sea E_C una expresión de conjuntos construida con algunos o todos los siguientes: variables de conjunto, $\emptyset$, U, ^{c}, $\cap$, $\cup$. Definimos E_B su expresión booleana correspondiente, transformando los símbolos de E_C así:

$$\emptyset \to \mathit{false}$$

$$U \to \mathit{true}$$

$$\cap \to \wedge$$

$$\cup \to \vee$$

$${}^c \to \neg$$

Entonces se tiene lo siguiente:

1. $\vdash E_C = F_C$ si y solo si $\vdash E_B \equiv F_B$.
2. $\vdash E_C \subseteq F_C$ si y solo si $\vdash E_B \Rightarrow F_B$.
3. $\vdash E_C = U$ si y solo si $\vdash E_B$.

Usos del meta teorema

- El meta teorema es útil para mostrar resultados puramente ecuacionales, como:

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

- También podemos mostrar que un conjunto es igual al universo:

$$A \cup A^c = U.$$

- Además, podríamos mostrar que un conjunto es vacío, si su expresión lógica correspondiente es una contradicción:

$$A \cap A^c = \emptyset.$$

Otros teoremas

Hay otros teoremas de la teoría de conjuntos, que usan operadores como $\subseteq$ y $\setminus$, por lo que no siempre es posible aplicar directamente el meta teorema.
En estos casos podemos hacer pruebas por extensionalidad, mostrando que un elemento pertenece a un lado de la expresión si y solo si pertenece al otro

Ejemplos

1. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$ (se dice que A y B son disjuntos) entonces $A \subseteq B^c$.
3. $(A \cup B = A \cap B \equiv)(A = B)$.

Prueba por doble implicación

Para el tercer ejemplo es posible discutir un esquema de prueba que se mencionó, pero no se vió explícitamente en clase.
Para probar que $\vdash p \equiv q$:

- Se prueba $\vdash p \Rightarrow q$ (esto se llama probar $\Rightarrow$)
- Se prueba $\vdash q \Rightarrow p$ (probar $\Leftarrow$).

Este método de prueba corresponde a la siguiente regla de inferencia:

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow p \vdash p \equiv q$$

cuya validez se puede mostrar fácilmente.

Demuestre o refute

- En teoría de conjuntos es usual preguntar si una ecuación (que caracteriza algo universal sobre conjuntos) tiene validez siempre o no.
- Cuando se desea mostrar que una ecuación es un teorema (siempre es válida), se da una prueba formal de esto usando los métodos que hemos visto.
- Cuando se desea mostrar que una ecuación no es un teorema (no siempre es cierta), se muestra un contraejemplo, que no es más que asignar conjuntos a las variables de modo que la ecuación no se cumpla.

Ejemplo

Demuestre o refute que para todo par de conjuntos A y B:

$$(A \cup B) \setminus B = A.$$

Ejemplo

Demuestre o refute que para todo par de conjuntos A y B:

$$(A \cup B) \setminus B = A.$$

Es falso, porque si tomamos:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{1, 2\}$

entonces $(A \cup B) \setminus B = \{1\}$, pero $A \neq \{1\}$.

Ejercicios

Para A y B conjuntos cualesquiera, demuestre o refute que

1. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
2. $(A \cup B = A \cap B) \equiv (A = B)$;
3. $(A \subseteq B) \Rightarrow (A^c \subseteq B^c)$;
4. $(A \subseteq B) \Rightarrow (B^c \subseteq A^c)$.
5. $(A \cup B = A) \Rightarrow (B \subseteq A)$.