ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2018-20
Parcial 3 – Noviembre 22, 2018
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [25/100]
Sea `z:int`. Pruebe que, si `z` es impar, entonces z^2-1 es divisible por `8`.

Si `z` es impar, existe un entero `w` tal que `z = 2*w+1`. Entonces:

```
   z²-1
=     〈 z = 2*w+1 〉
   4*w²+4*w+1-1
=
   4*w*(w+1)
```

[15/25]

Ahora, si `w` es par, `4*w` es divisible por `8`. Y si `w` es impar, `4*(w+1)` es divisible por `8`.

[5/25]

De cualquier modo, `4*w*(w+1)` es divisible por `8`.

[5/25]

Variante 1:

Parte 1: Inducción sobre impares en **nat**.

```
PI: R.n : 8|((2*n+1)²-1)      , n≥0
```

[5/25]

```
Caso base: R.0
   (2*0+1)²-1
=
   1-1
=
   0
```

Es decir `R.0 ≡ 8|0`, lo cual es verdadero.

[5/25]

```
Caso inductivo: R(n+1), n≥0
HI: R.n
   (2*(n+1)+1)²-1
=
   (2*n+3)²-1
=
   4*n²+12*n+9-1
=
   4*n²+4*n +8+8*n
=
   (2*(n+1)+1)²-1+8+8*n
=     〈HI: 2*n+1)²-1 = 8*k para un k∈int〉
   8*k+8+8*n
=
   8*(k+1+n)
```

Es decir $R(n+1) \equiv 8|8*(k+1+n)$, lo cual es verdadero.

[10/25]

Para argumentar que también vale para enteros negativos, basta decir que si $z<0$, $-z>0$, y el resultado vale para $-z$. Es decir, $8|((-z)^2-1)$, o bien, $8|(z^2-1)$

[5/25]

Variante 2:

Como la Variante 1, pero usando congruencias para la prueba inductiva en **nat**.

Parte 1: Inducción sobre impares en **nat**.

PI: $C.n : (2*n+1)^2 =_8 1 \;,\; n\geq 0$

[5/25]

Caso base: C.0

$$
\begin{aligned}
& (2*0+1)^2 \\
= \; & \\
& 1 \\
=_8 \; & \\
& 1
\end{aligned}
$$

[5/25]

Caso inductivo: C(n+1), n≥0

HI: C.n

$$
\begin{aligned}
& (2*(n+1)+1)^2 \\
= \; & \\
& (2*n+3)^2 \\
= \; & \\
& 4*n^2+12*n+9 \\
= \; & \\
& 4*n^2+4*n+1 \;+\; 8*n+8 \\
= \; & \\
& (2*n+1)^2 \;+\; 8*n+8 \\
=_8 \; & \quad \langle HI:\; (2*n+1)^2 =_8 1 \;;\; 8*n+8 =_8 0 \;\rangle \\
& 1
\end{aligned}
$$

[10/25]

Para argumentar que también vale para enteros negativos, basta decir que si $z<0$, $-z>0$, y el resultado vale para $-z$. Es decir, $(-z)^2 =_8 1$, o bien, $z^2 =_8 1$,

[5/25]

2 **[25/100]**

En el calendario gregoriano, utilizado desde 1582, un año es *bisiesto* si es divisible por 4, excepto si termina en 00; sin embargo, en este caso son bisiestos los años divisibles por 400.

Así, son bisiestos 2016, 2000 y 1964, pero no 2015, 1900 ni 2001. Un año bisiesto tiene un día adicional al de los 365 de los años no bisiestos, el 29 de febrero.

La Universidad de los Andes fue fundada el 16 de noviembre de 1948.

2a (5/25) Defina un predicado `bisiesto:` **`nat`** $\to$ **`bool`** tal que `bisiesto.a` que sea verdadero si y solo si `a` es bisiesto en el calendario gregoriano.

`bisiesto.a ≡ a>1582 ∧ 4|a ∧ (¬(100|a) ∨ 400|a)`

[5/5]

2b (5/25) ¿Cuántos `29`s de febrero habrá vivido la Universidad, desde su fundación?

El año 1948 fue bisiesto, pero Uniandes fue fundada en noviembre. Hasta 2018 hay $\lfloor(2018-1948)/4\rfloor = \lfloor 70/4\rfloor = 17$ años bisiestos (incluso el `2000` lo fue).

Es decir, Uniandes ha vivido `17` días `29`s de febrero, desde su fundación.

[5/5]

2c (15/25) ¿Qué día de la semana fue fundada la Universidad?
AYUDA: Noviembre 16 de 2018 fue viernes.

Si se codifica la semana con los residuos módulo `7`, de modo que

```
0: domingo
1: lunes
2: martes
3: miércoles
4: jueves
5: viernes
6: sábado
```

se tendrá que los días de la semana que corresponden a las fechas se repiten módulo `7`. Para saber el día de la semana de la fundación, éste será congruente, módulo `7`, a la fecha del aniversario menos la de la edad en días, módulo `7`.

[5/15]

La edad en días de Uniandes, el día de su último aniversario fue

$\texttt{edad\_2018} = 365*(2018-1948) + 17 = 365*70 + 17 =_7 0 + 17 =_7 3$

[5/15]

Así que:

$$\begin{array}{ll} & \texttt{dia\_fund} + \texttt{edad\_2018} =_7 \texttt{dia\_aniversario\_2018} \\ \equiv & \quad \langle \texttt{edad\_2018} =_7 3,\ \texttt{dia\_aniversario\_2018} =_7 5 \rangle \\ & \texttt{dia\_fund} + 3 =_7 5 \\ \equiv & \\ & \texttt{dia\_fund} =_7 2 \end{array}$$

Es decir, la fundación fue un martes.

[5/15]

3 **[25/100]**

Pruebe que el producto de `n` números impares es un impar, para $n \geq 0$.

Dem: Inducción sobre **`nat`**.

Considérese una sucesión de números impares

$\langle 2j_0+1,\ 2j_1+1,\ \dots \rangle$

PI: $P.n \equiv (*k \mid 0\le k<n: 2*j_k+1) =_2 1$, $n\ge 0$

[10/25]

Caso Base: P.0

$(*k \mid 0\le k<0: 2*j_k+1)$

= ⟨Rango vacío⟩

1

$=_2$

1

[5/25]

Caso Inductivo: P(n+1), n≥0

$(*k \mid 0\le k<n+1: 2*j_k+1)$

= ⟨Partir rango a la derecha⟩

$(*k \mid 0\le k<n: 2*j_k+1)*(2*j_n+1)$

$=_2$ ⟨HI⟩

$1*(2*j_n+1)$

$=_2$ ⟨$2*j_n =_2 0$⟩

1

[10/25]

Variante: *Prueba por casos*

Considérese una sucesión de números impares

$\langle 2j_0+1,\ 2j_1+1,\ \dots \rangle$

Se mostrará que, para n≥0: $(*k \mid 0\le k<n: 2*j_k+1) =_2 1$.

[10/25]

Casos: n=0, n>0

$n=0 \lor n>0$

=

true

[2/25]

Caso n=0:

$(*k \mid 0\le k<0: 2*j_k+1)$

= ⟨rango vacío⟩

1

$=_2$

1

[3/25]

Caso n>0:

$(*k \mid 0\le k<n: 2*j_k+1)$

$=_2$ ⟨$2*j_k =_2 0$, para $0\le k<n$⟩

$(*k \mid 0\le k<n: 1)$

=

1

[10/25]

Variante: Argumento informal (pero riguroso)
Por rango vacío, el producto de 0 números impares es 1, que es un impar.

[5/25]

Si se supone que el resultado vale para productos de n números impares, y se considera un producto de $n+1$ números impares, el producto de los primeros n es un impar, digamos, 2*p+1. Y el resultado es el producto de este impar por el último, digamos, 2*q+1.

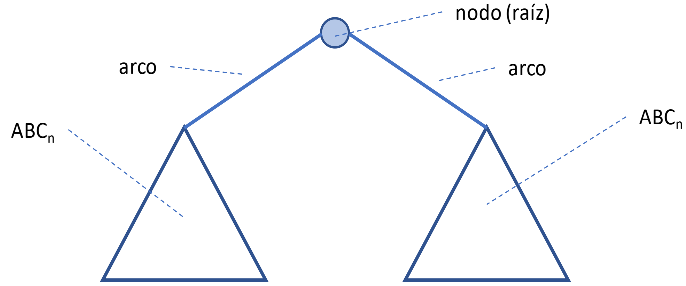
[10/25]

Este producto es $(2*p+1)*(2*q+1) = 4*p*q + 2*p + 2*q + 1 =_2 1$. Es decir, el producto total es impar.

[10/25]

4 [25/100]

Un ABC_n es una figura que tiene unos elementos llamados *nodos* y otros elementos llamados *arcos*. Un ABC_0 es una figura vacía (sin nodos ni arcos). Para $n \geq 0$, un ABC_{n+1} es una figura que tiene un nodo especial, llamado la *raíz*, que está conectada por dos arcos, cada uno hacia un ABC_n (a menos que ABC_n sea una figura vacía: en este caso solo es el nodo raíz). El siguiente dibujo ilustra la forma de un ABC_{n+1}.



Llame $f(n)$ al número de nodos de un ABC_n, $n \geq 0$.
Llame $g(n)$ al número de arcos de un ABC_n, $n \geq 0$.

4a (12/25) Muestre que $f(n) = 2^n - 1$, si $n \geq 0$.

Inducción sobre $n \geq 0$:
PI: $V.n \equiv f(n) = 2^n - 1,\ n \geq 0$

[2/12]

Caso base: V.0
   f(0)
= ⟨ABC_0 es una figura vacía⟩
   0

[3/12]

Caso inductivo: V(n+1), n≥0
HI: V.n
   f(n+1)
= ⟨Ver figura de ABC_{n+1}⟩
   1 + 2*f(n)
= ⟨HI⟩

```
   1 + 2*(2^n-1)
=
   2^(n+1)-1
```

[7/12]

4b (13/25) Muestre que `g(n) = 2`^{n}`-2` arcos, si `n≥1`.

Inducción sobre `n≥1`:

```
PI: A.n ≡ g(n) =  2^n-2, n≥1
```

[2/13]

```
Caso base: V.1
   g(1)
=     ⟨ABC_1 es una figura con un nodo, no arcos⟩
   0
```

[3/13]

```
Caso inductivo: A(n+1) , n≥1
HI: A.n
   g(n+1)
=     ⟨Ver figura de ABC_(n+1)⟩
   2 + 2*g(n)
=     ⟨HI⟩
   2 + 2*(2^n-2)
=
   2^(n+1)-2
```

[8/13]