ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2017-1 - Sección 7
Parcial 1 – Marzo 7, 2017
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [20/100]

Argumente si la siguiente regla de inferencia es correcta para el cálculo proposicional (sí: demostrar la corrección; no: presentar un contraejemplo):

$$\text{EqOr:} \quad \frac{P \equiv Q \equiv R}{(P \equiv Q) \vee (P \equiv R)}$$

No.

[2/20]

Variante 1: Tabla de verdad

			[1]	[2]	[3]	[4]	
P	**Q**	**R**	**P ≡ Q**	**P ≡ R**	**[1] ∨ [2]**	**P ≡ Q ≡ R**	**[4] ⇒ [3]**
0	0	0	1	1	1	0	**1**
0	0	1	1	0	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	0	0	0	**1**
1	**0**	**0**	0	0	0	1	**0**
1	0	1	0	1	1	0	**1**
1	1	0	1	0	1	0	**1**
1	1	1	1	1	1	1	**1**

Se observa que la fórmula

$$(P \equiv Q \equiv R) \Rightarrow (P \equiv Q) \vee (P \equiv R)$$

no es una tautología. Por tanto la regla no es correcta.

[18/20]

Variante 2: Exhibir contraejemplo

El contraejemplo se da cuando $P \equiv \text{true}$, $Q \equiv \text{false}$, $R \equiv \text{false}$.
En este caso, $P \equiv Q \equiv R$, pero $P \equiv Q \equiv \text{false}$ y $P \equiv R \equiv \text{false}$.

[18/20]

2 [30/100]

Considere el conectivo ternario $A(.,.,.)$, definido por el axioma:

$$\text{Def A:} \quad A(x,y,z) \equiv (x \Rightarrow y \vee z)$$

Pruebe los siguientes teoremas, sin usar tablas de verdad:

2a (15/30) $A(p \vee q,q,r) \equiv A(p,q,r)$

Dem:

$A(p\vee q,q,r)$
$= \quad \langle$ Def A $\rangle$
$p\vee q \Rightarrow q\vee r$
$= \quad \langle$ Def $\Rightarrow \rangle$
$\neg(p \vee q) \vee q \vee r$
$= \quad \langle$ De Morgan $\rangle$
$(\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee r$
$= \quad \langle$ Absorción $\neg \rangle$
$\neg p \vee q \vee r$
$= \quad \langle$ Def $\Rightarrow \rangle$
$p \Rightarrow q \vee r$
$= \quad \langle$ Def A $\rangle$
$A(p,q,r)$

[15/15]

2b (15/30) $A(p\equiv q,q,r) \equiv A(\neg p,q,r)$

Dem:

$A(p\equiv q,q,r)$
$= \quad \langle$ Def A $\rangle$
$(p\equiv q) \Rightarrow q\vee r$
$= \quad \langle$ Def $\Rightarrow \rangle$
$\neg(p\equiv q) \vee q \vee r$
$= \quad \langle \neg(x\equiv y) \equiv \neg x \equiv y \rangle$
$(\neg p \equiv q) \vee q \vee r$
$= \quad \langle$ Distr $\vee/\equiv \rangle$
$(\neg p \vee q \equiv q \vee q) \vee r$
$= \quad \langle x \vee x \equiv x \rangle$
$(\neg p \vee q \equiv q) \vee r$
$= \quad \langle a \vee b \equiv b \equiv (a \Rightarrow b) \rangle$
$(\neg p \Rightarrow q) \vee r$
$= \quad \langle$ Def $\Rightarrow \rangle$
$\neg\neg p \vee q \vee r$
$= \quad \langle$Def $\Rightarrow\rangle$
$\neg p \Rightarrow q\vee r$
$= \quad \langle$Def A$\rangle$
$A(\neg p,q,r)$

[15/15]

3 **[30/100]**
"El programa no termina o la variable n llega a ser 0. Si la variable n llega a ser 0, también la variable m llega a ser 0. El programa termina. Entonces, la variable m llega a ser 0."

3a (5/30) Defina variables booleanas que representen las diferentes proposiciones involucradas en el argumento anterior.

pt : "el programa termina"
n0 : "la variable n llega a ser 0"

m0 : "la variable m llega a ser 0"

[5/30]

3b (10/30) Exprese las frases del argumento con expresiones booleanas y enuncie un teorema cuya verdad corresponda a la verdad del argumento.

Hipótesis:

H1: ¬pt ∨ n0 : "El programa no termina o la variable n llega a ser 0"
H2: ¬m0 ⇒ ¬n0 : "Si la variable m no llega a ser 0, tampoco la variable n llega a ser 0"
H3: pt : "El programa termina"

Conclusión:

m0 : "La variable m llega a ser 0"

El teorema debe ser:

$$H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow m0$$

[10/30]

3c (15/30) Decida si el argumento es correcto y demuestre su respuesta.

El argumento es CORRECTO:

```
Teo: (¬pt ∨ n0) ∧ (n0 ⇒ m0) ∧ pt ⇒ m0
Dem: Por hipótesis.
Hip: ¬pt ∨ n0, n0 ⇒ m0, pt          // A demostrar: m0
   true
=     ⟨Hip H1: ¬pt ∨ n0⟩
   ¬pt ∨ n0
=     ⟨Def ⇒⟩
   pt ⇒ n0
⇒     ⟨Hip pt; Modus Ponens⟩
   n0
⇒     ⟨Lema 1: n0 ⇒ m0; Modus Ponens⟩
   m0.

   Lema 1: n0 ⇒ m0
   Dem:
      true
   =        ⟨Hip H: ¬m0 ⇒ ¬n0⟩
      ¬m0 ⇒ ¬n0
   =        ⟨Contrarrecíproca⟩
      n0 ⇒ m0
```

[]

[10/30]

Variante 1

```
Dem: Por hipótesis.
Hip: ¬pt ∨ n0, n0 ⇒ m0, pt          // A demostrar: m0
   true
=     ⟨Hip H1: ¬pt ∨ n0⟩
   ¬pt ∨ n0
=     ⟨Hip: pt⟩
```

```
   ¬true ∨ n0
=     ⟨false ≡ ¬true⟩
   false ∨ n0
=     ⟨0-∨⟩
   n0
⇒     ⟨Lema 1: n0 ⇒ m0; Modus Ponens⟩
   m0
```

[]

[15/30]

4 **[20/100]**
"Se sabe que toda anguila es una belomia. Y que una belomia que también sea cardalia no puede ser anguila. Entonces, no existen especímenes que sean anguilas y también cardalias."

4a (20/20) Modele el argumento anterior con lógica de predicados.

Universo
Especímenes.

[2/20]

Símbolos de predicado
a.x ≈ "x es una anguila"
b.x ≈ "x es una belomia"
c.x ≈ "x es una cardalia"

[3/20]

Argumento formal:
P1: (∀x| a.x: b.x)
P2: (∀x| b.x ∧ c.x : ¬a.x)
Q : ¬(∃x|: a.x ∧ c.x)

es decir, se afirma que:

P1 ∧ P2 ⇒ Q

[15/20]

4b (Bono: +10) Demuestre que el argumento es correcto.

Teo: P1 ∧ P2 ⇒ Q
Dem: Por hipótesis
Hip: (∀x| a.x: b.x), (∀x| b.x ∧ c.x : ¬a.x) // A demostrar: ¬(∃x|: a.x ∧ c.x)

Por contradicción. Supóngase (∃x|: a.x ∧ c.x). Por el teorema del testigo, sea x_0 un espécimen tal que $a.x_0 \wedge c.x_0$. Es decir, se puede añadir a las hipótesis:

Hip: $a.x_0$, $c.x_0$

Lema 1: $a.x_0 \Rightarrow b.x_0$
Dem:

```
   true
=        ⟨Hip P1: (∀x| a.x: b.x)⟩
   (∀x| a.x: b.x)
=        ⟨Trueque⟩
   (∀x|: a.x ⇒ b.x)
```

$\Rightarrow \quad \langle \text{Instanciación} \rangle$

$\quad a.x_0 \Rightarrow b.x_0$

Lema 2: $a.x_0 \Rightarrow \neg c.x_0$

Dem: Por Hipótesis

Hip: $a.x_0$ // A demostrar: $\neg c.x_0$

$\quad true$

$= \quad \langle \text{Hip P2: } (\forall x \mid b.x \wedge c.x : \neg a.x) \rangle$

$\quad (\forall x \mid b.x \wedge c.x : \neg a.x)$

$= \quad \langle \text{Trueque} \rangle$

$\quad (\forall x \mid : b.x \wedge c.x \Rightarrow \neg a.x)$

$\Rightarrow \quad \langle \text{Instanciación} \rangle$

$\quad b.x_0 \wedge c.x_0 \Rightarrow \neg a.x_0$

$= \quad \langle \text{Contrarrecíproca, doble negación} \rangle$

$\quad a.x_0 \Rightarrow \neg(b.x_0 \wedge c.x_0)$

$= \quad \langle \text{De Morgan} \rangle$

$\quad a.x_0 \Rightarrow \neg b.x_0 \vee \neg c.x_0$

$= \quad \langle \text{Lema 1; } u \wedge true \equiv u \rangle$

$\quad (a.x_0 \Rightarrow \neg b.x_0 \vee \neg c.x_0) \wedge (a.x_0 \Rightarrow b.x_0)$

$= \quad \langle (u \Rightarrow v) \wedge (u \Rightarrow w) \equiv (u \Rightarrow v \wedge w) \rangle$

$\quad a.x_0 \Rightarrow (b.x_0 \wedge (\neg b.x_0 \vee \neg c.x_0))$

$= \quad \langle \text{Absorción } \neg \rangle$

$\quad a.x_0 \Rightarrow b.x_0 \wedge \neg c.x_0$

$\Rightarrow \quad \langle \text{Debilitamiento} \rangle$

$\quad a.x_0 \Rightarrow \neg c.x_0$

Casos: $a.x_0$, $\neg a.x_0$

Caso: $a.x_0$

$\quad a.x_0$

$\Rightarrow \quad \langle \text{Lema 2} \rangle$

$\quad \neg c.x_0$

$= \quad \langle \text{Hip: } c.x_0 \rangle$

$\quad false$

Caso: $\neg a.x_0$

$\quad \neg a.x_0$

$= \quad \langle \text{Hip: } a.x_0 \rangle$

$\quad false$

Es decir, la existencia de x_0 lleva a una contradicción. Por tanto, vale

$$\neg(\exists x \mid : a.x \wedge c.x)$$

[+10]