ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2017-20 - Sección 9
Parcial 2 – Octubre 24, 2017
Prof. Rodrigo Cardoso

1 [25/100]

Para $A, B \subseteq U$, defina: $A!B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin (A \cap B)\}$
$A?B = \{x \mid x \notin A \wedge x \in (A \cup B)\}$

1a (8/25) Suponga que

$U = 0..30$
$A = \{x:U \mid$ "x es múltiplo de 4 o de 7"$\}$
$B = \{x:U \mid$ "x es múltiplo de 3 o de 7$\}$
Describa $A!B$ en notación extensional.

$A = \{0,4,7,8,12,14,16,20,21,24,28\}$
$B = \{0,3,6,7,9,12,14,15,18,21,24,27,28,30\}$

$A \cap B = \{0,7,12,14,21,24,28\}$
$A \cup B = \{0,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,18,20,21,24,27,28,30\}$

$A!B$
$= \quad \langle x \in A!B \equiv x \in A \wedge x \notin (A \cap B) \rangle$
$\{4,8,16,20\}$

$A?B$
$= \quad \langle x \in A?B \equiv x \notin A \wedge x \in (A \cup B) \rangle$
$\{3,6,9,15,18,27,30\}$

[8/8]

Variante 1

Sea $M_x = \{y \mid$ "y es múltiplo de x" $\}$

Ahora:

$A = M_4 \cup M_7$
$= \{0,4,8,12,16,20,24,28\} \cup \{0,7,14,21,28\}$
$= \{0,4,7,8,12,14,16,20,21,24,28\}$

$B = M_3 \cup M_7$
$= \{0,4,8,12,16,20,24,28\} \cup \{0,7,14,21,28\}$
$= \{0,3,6,7,9,12,14,15,18,21,24,27,28,30\}$

Entonces:

$A \cup B = M_3 \cup M_4 \cup M_7$
$= \{0,3,4,6,7,8,9,12,14,15,16,18,20,21,24,27,28,30\}$
$(A \cup B)^c = \{1,2,5,10,11,13,17,19,22,23,25,26,29\}$

$A \cap B = (M_3 \cap M_4) \cup M_7$
$= \{0,12,24\} \cup \{0,7,14,21,28\}$
$= \{0,7,12,14,21,24,28\}$

$(A\cap B)^c = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,13,15,16,17,18,19,20,22,23,25,26,27,29,30\}$

$A!B = A\cap(A\cap B)^c$
$= \{4,8,16,20\}$

$A?B = A^c \cap(A\cup B)$
$= \{3,6,9,15,18,27,30\}$

[8/8]

Variante 2

$A!B = A\cap(A\cap B)^c = A\cap(A^c\cup B^c) = A\cap B^c = A\setminus B$
$= \ldots$ // calculando B y A, ver arriba
$= \{4,8,16,20\}$

$A?B = A^c \cap(A\cup B) = A^c \cap B = B\setminus A$
$= \{3,6,9,15,18,27,30\}$

[8/8]

Para los siguientes enunciados, establezca su verdad o falsedad. Justifique su respuesta.

1b (10/25) $A!B = B?A$

VERDAD

[2/10]

Lema 1: $A!B = A\setminus B$

$A!B$
$=$ ⟨Def !⟩
$A\cap(A\cap B)^c$
$=$ ⟨De Morgan⟩
$A\cap(A^c\cup B^c)$
$=$ ⟨Absorción ¬⟩
$A\cap B^c$
$=$ ⟨Def \⟩
$A\setminus B$

[]

[3/10]

Lema 2: $A?B = B\setminus A$

$A?B$
$=$ ⟨Def ¿⟩
$A^c\cap(A\cup B)$
$=$ ⟨Absorción ¬⟩
$A^c\cap B$
$=$ ⟨Def \⟩
$B\setminus A$

[]

[3/10]

Ahora:

$A!B$

$=\quad \langle \text{Lema } 1\rangle$
$A\backslash B$
$=\quad \langle \text{Lema } 2\rangle$
B?A

[2/10]

1c (7/25) .!. es un operador asociativo

FALSO

[2/7]

Si fuera asociativo:
(A!B)!C = A!(B!C)

Contraejemplo: A = B = C = {1}. Entonces:

$(A\backslash B)\backslash C$
$=$
$\varnothing\backslash C$
$=$
$\varnothing$

Pero:

$A\backslash(B\backslash C)$
$=$
$A\backslash\varnothing$
$=$
$\{1\}$

[5/7]

2 **[25/100]**

Sea z un número entero. El z-*segmento inicial* se define como

$$I_z = \{k:\mathbf{int} \mid 0\le k<z\}$$

Sea $S_z = \{I_k \mid 0\le k<z\}$.

Considere la relación $R\colon S_z \leftrightarrow S_z$ definida por:

$$R(I_p,I_q) \equiv p\ge q$$

Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

2a (10/25) R es un orden parcial

CIERTO.

[2/10]

R *es reflexiva:*

$R(I_p,I_p)$
$=\quad \langle \text{Def } R\rangle$
$p\ge p$
$=$
true

[2/10]

R es transitiva

$R(I_p,I_q) \wedge R(I_q,I_r)$

$=\quad \langle \text{Def } R\rangle$

$p\geq q \wedge q\geq r$

$\Rightarrow\quad \langle \geq \text{ transitiva en } \textbf{int}\rangle$

$p\geq r$

$=\quad \langle \text{Def } R\rangle$

$R(I_p,I_r)$

[3/10]

R es antisimétrica:

$R(I_p,I_q) \wedge R(I_q,I_p)$

$=\quad \langle \text{Def } R\rangle$

$p\geq q \wedge q\geq p$

$=$

$p=q$

$\Rightarrow\quad \langle \text{Def } I_n\rangle$

$I_p=I_q$

[3/10]

2b (5/25) R es simétrica

FALSO.

[2/5]

Contraejemplo:

$R(I_4,I_5)$

$=$

$4\geq 5$

$=$

$false$

$\neq$

$true$

$=$

$5\geq 4$

$=$

$R(I_5,I_4)$

[3/5]

2c (10/25) R es orden bien fundado

CIERTO.

[2/10]

Lema: Para $0\leq p,q$: $R(I_p,I_q) \equiv I_p\supseteq I_q$

Dem:

$I_p\supseteq I_q$

$=$

$\{k:\textbf{int} \mid 0\leq k<p\} \supseteq \{k:\textbf{int} \mid 0\leq k<q\}$

$=$

$p\geq q$

$=$

$R(I_p,I_q)$

[]

Sea RE el orden estricto correspondiente a R, i.e.,

$$RE(I_p,I_q) \equiv R(I_p,I_q) \wedge I_p \neq I_q$$

Por el Lema, para $0 \le p,q$:

$RE(I_p,I_q) \equiv I_p \supseteq I_q \wedge I_p \neq I_q$

O bien:

$RE(I_p,I_q) \equiv I_p \supset I_q$

[2/10]

Nótese que, para $z \le 0$, $S_z = \varnothing$, y R debe ser la relación vacía. Y en este caso (trivial) no hay cadenas descendentes infinitas, i.e., R es orden bien fundado.

[3/10]

Entonces una cadena descendente infinita debería empezar con I_p, $p>0$. I_p tiene p elementos y al Al RE–descender se quitan elementos, de modo que el RE-descenso es, a lo sumo, de longitud p. De $\varnothing$ no se puede RE-descender, i.e., R es orden bien fundado.

[3/10]

3 [25/100]

Sea d **:nat**, d>0. Defínase la relación $.\sim_d.$ **: int ↔ int** , así:

$$m \sim_d n \equiv (\exists a\mathbf{:int} \mid d*a = m-n)$$

3a (20/25) Pruebe que $.\sim_d.$ es una relación de equivalencia.

$.\sim_d.$ *reflexiva:*

$m \sim_d m$

=

$(\exists a\mathbf{:int} \mid d*a = 0)$

= $\langle d*0 = 0 \rangle$

true

[5/20]

$.\sim_d.$ *simétrica:*

$m \sim_d n$

=

$(\exists a\mathbf{:int} \mid d*a = m-n)$

= $\langle d*(-a) = n-m \equiv d*a = m-n \rangle$

$(\exists b\mathbf{:int} \mid d*b = n-m)$

=

$n \sim_d m$

[5/20]

$.\sim_d.$ *transitiva:*

A demostrar: $m\sim_d n \wedge n\sim_d p \Rightarrow m\sim_d p$

Hip: $m\sim_d n$, $n\sim_d p$ // A demostrar: $m\sim_d p$

Las hipótesis se pueden cambiar a (a, b: testigos de los existenciales): d*a=m-n, d*b=n-p

Ahora:

```
   d*(a+b)
=     〈Aritmética〉
   d*a + d*b
=     〈Hip: d*a=m-n, d*b=n-p〉
   m-n+n-p
=     〈Aritmética〉
   m-p
```

Es decir, d*(a+b) = m-n, de modo que:

$$
\begin{aligned}
&(\exists c:\mathbf{int}|\ d*c = m-n)\\
=&\quad \langle \text{Def } \sim_d \rangle\\
&m \sim_d n
\end{aligned}
$$

[10/20]

3b (5/25) Sea d=10. Describa la clase de equivalencia de 3 por la relación $\sim_{10}$.

$$
\begin{aligned}
&3 \sim_{10} n\\
=&\\
&(\exists a:\mathbf{int}|\ 10*a = n-3)\\
=&\\
&(\exists a:\mathbf{int}|\ 10*a+3 = n)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$[3] = \{n|\ (\exists a:\mathbf{int}|\ 10*a+3 = n)\}$$

[5/5]

4 **[30/100]**

Para a,b:**int**, sea x la sucesión de valores en **int** definida de modo que, para n∈**nat** :

$$x_n = a*n+b$$

4a (15/30) ¿Es x inyectiva? Explique su respuesta

***AYUDA**: Hay casos que dependen del valor de a.*

Nótese que

$$
\begin{aligned}
&x_m = x_n\\
=&\quad \langle \text{Def } x \rangle\\
&a*m+b = a*n+b\\
=&\\
&a*(m-n)=0
\end{aligned}
$$

[5/15]

Caso a=0 :

$$
\begin{aligned}
&x_m = x_n\\
=&\\
&a*(m-n)=0\\
=&\\
&0=0\\
=&\\
&true
\end{aligned}
$$

Es decir , x es la constante b y, claramente, no es inyectiva (por ejemplo: $x_0 = x_1$, pero 1≠0).

[5/15]

Caso $a \neq 0$:

$$x_m = x_n$$
$$=$$
$$a*(m-n)=0$$
$$=$$
$$m-n=0$$
$$=$$
$$m=n$$

Es decir , x inyectiva.

[5/15]

4b (15/30) ¿Es x^2 inyectiva?

***AYUDA**: Hay casos que dependen del valor de* a.

$$x^2.n$$
$$=$$
$$(xx).n$$
$$=$$
$$x(x.n)$$
$$=$$
$$x(a*n+b)$$
$$=$$
$$a*(a*n+b)+b$$
$$=$$
$$a^2*n + a*b+b$$

[10/15]

Ahora

$$a=0 \equiv a^2=0$$

de modo que x^2 es inyectiva si y solo si $a \neq 0$.

[5/15]

Variante 1:

Para relaciones inyectivas $R:A \leftrightarrow B$, $S:B \leftrightarrow C$, la compuesta $R \circ S$ es también inyectiva.

(Una demostración conjuntista:

$$R \text{ 1-1} \equiv R^T \circ R \subseteq I$$

Entonces, si R y S son $1-1$:

$$(R \circ S)^T \circ (R \circ S) = S^T \circ R^T \circ R \circ S \subseteq S^T \circ I \circ S = S^T \circ S \subseteq I$$)

[10/15]

Así, ya que x es inyectiva si y solo si $a \neq 0$, x^2 es inyectiva si y solo si x lo es, i.e., si y solo si $a \neq 0$.

[5/15]