ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2018-1 - Sección 3
Parcial 1 – Marzo 1, 2018
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [20 puntos]

Diga si está bien o mal agregar al cálculo deductivo la siguiente regla de inferencia. Justifique su respuesta.

$$ImpR: \quad \frac{P \Rightarrow (Q \Rightarrow R),\ Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)}{P \equiv Q \equiv R}$$

Variante 1

MAL.

[3/20]

La regla es incorrecta, para lo cual se puede mostrar un contraejemplo:

`P ≡ false, Q ≡ false, R ≡ false`

[7/20]

En este caso, las hipótesis son verdaderas, porque son implicaciones cuyos antecedentes son falsos.
En cambio, la conclusión equivale a

```
   false ≡ false ≡ false
=
   true ≡ false
=
   false.
```

[10/20]

N. B. ¿Cómo producir el contraejemplo?

- *Haciendo la primera fila de una tabla de verdad.*
- *Haciendo suposiciones parciales.*
  Por ejemplo, si se quiere que $P \equiv true$, las hipótesis se reducen a $Q \Rightarrow R$ y a $Q \Rightarrow (R \Rightarrow true)$.
  La segunda hipótesis equivale a $true$, porque $true$ es implicado por cualquier cosa.
  La conclusión equivale a $Q \equiv R$.
  Entonces, en este caso, debe suceder que $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \equiv R)$, lo cual falla si $R \equiv true$ y $Q \equiv false$.
  En resumen, se produce el contraejemplo: $P \equiv true$, $Q \equiv false$, $R \equiv true$.

Variante 2

MAL.

[3/20]

La regla es incorrecta, para lo cual se puede mostrar una tabla de verdad:

			A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	
P	**Q**	**R**	**Q ⇒ R**	**P ⇒ A**	**R ⇒ P**	**Q ⇒ C**	**B ∧ D**	**P ≡ Q**	**F ≡ R**	**E ⇒ G**
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	**0**
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	**1**
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	**1**
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	**1**
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	**0**

1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	**1**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

[10/20]

Y se ve que hay 2 casos en los que la fórmula no es correcta.

[7/20]

2 **[30 puntos]**

Agregue al cálculo deductivo la siguiente definición para un conectivo ternario m que cumpla los siguientes axiomas:

```
[m1]  m(x,y,y) ≡ x
[m2]  m(x,y,¬y) ≡ ¬x
```

Diga si los siguientes enunciados son o no teoremas (Sí / No). Pruebe o refute sus respuestas. Si el enunciado es un teorema, NO use tablas de verdad para demostrarlo.

a **(20/30)** m(x,y,z) ≡ x ≡ y ≡ z

AYUDA: Intentar una prueba por casos.

SI

[3/20]

Dem: Por casos

```
Casos: z ≡ y, z ≡ ¬y
       (z ≡ y) ∨ (z ≡ ¬y)
=             ⟨ Def ≢ ⟩
       (z ≡ y) ∨ ¬(z ≡ y)
=             ⟨ Medio excluido ⟩
       true
```

[3/20]

```
Caso: z ≡ y
       m(x,y,z)
=             ⟨Caso: z ≡ y⟩
       m(x,y,y)
=             ⟨ m1 ⟩
       x
=             ⟨ ≡-Ident ⟩
       x ≡ true
=             ⟨Caso: z ≡ y; SAP⟩
       x ≡ y ≡ z
```

[7/20]

```
Caso: z ≡ ¬y
       m(x,y,z)
=             ⟨Caso: z ≡ ¬y⟩
       m(x,y,¬y)
=             ⟨ m2 ⟩
       ¬x
=             ⟨ ≡-Ident ⟩
       ¬x ≡ true
```

$=$ ⟨Caso: $z \equiv \neg y$; SAP ⟩

$\neg x \equiv \neg y \equiv z$

$=$ ⟨ $p \equiv q \equiv \neg p \equiv \neg q$ ⟩

$x \equiv y \equiv z$

[7/20]

b **(5/30)** $m(x,y,z) \equiv m(z,y,x)$

SI

[2/5]

Dem:

$m(x,y,z)$

$=$ ⟨ **a** ⟩

$x \equiv y \equiv z$

$=$ ⟨ SAP ⟩

$y \equiv x \equiv z$

$=$ ⟨ **a** ⟩

$m(y,x,z)$

[3/5]

c **(5/30)** $m(x,\ x \Rightarrow y\ ,\ y)$

NO

[2/5]

Contraejemplo: $x \equiv false$, $y \equiv true$

En este caso:

$m(x,\ x \Rightarrow y\ ,\ y)$

$=$ ⟨Caso: $x \equiv false$, $y \equiv true$⟩

$m(false,\ false \Rightarrow true\ ,\ true)$

$=$ ⟨ $false \Rightarrow true$ ⟩

$m(false,\ true\ ,\ true)$

$=$ ⟨ m1 ⟩

$false$

[3/5]

N.B. ¿Cómo descubrir el contraejemplo?

$m(x,\ x \Rightarrow y\ ,\ y)$

$=$ ⟨ **a** ⟩

$x \equiv (x \Rightarrow y) \equiv y$

$=$ ⟨ SAP; $p \equiv q \equiv (p \Rightarrow q) \equiv q \Rightarrow p$ ⟩

$y \Rightarrow x$

la cual es false si $y \equiv true,\ x \equiv false$

3 **[30 puntos]**

Considere el argumento siguiente, para decidir su corrección con lógica proposicional:

"Afirmar que Eunice no es culpable es lo mismo que decir que si ella es culpable entonces ella no es adinerada. Sabemos que Eunice es adinerada o es culpable. Entonces, Eunice es adinerada".

a **(5/30)** Defina variables booleanas que representen las diferentes partes del argumento.

$c \approx$ "Eunice es culpable"
$a \approx$ "Eunice es adinerada"

[5/5]

b **(10/30)** Modele el argumento con expresiones booleanas.

H1: $\neg c \equiv c \Rightarrow \neg a$ *// Afirmar que Eunice no es culpable es lo mismo que decir que si ella es culpable entonces ella no es adinerada*
H2: $a \vee c$ *// Eunice es adinerada o es culpable*
C : a *// Eunice es adinerada*

[9/10]

El argumento corresponde a afirmar que

$$H1 \wedge H2 \Rightarrow C$$

[1/10]

c **(15/30)** Pruebe que el argumento es correcto (¡NO use tablas de verdad para responder!)

Dem: Por hipótesis
Hip: $\neg c \equiv c \Rightarrow \neg a,\ a \vee c$ // A demostrar: a

```
   true
=     ⟨Hip: ¬c ≡ c ⇒ ¬a⟩
   ¬c ≡ c ⇒ ¬a
=     ⟨Def ⇒⟩
   ¬c ≡ ¬c ∨ ¬a
=     ⟨Regla de Oro: x ≡ x ∧ y ≡ x ∨ y ≡ y⟩
   ¬c ∧ ¬a ≡ ¬a
=     ⟨De Morgan; SAP⟩
   ¬(a ∨ c) ≡ ¬a
=     ⟨¬p ≡ ¬q ≡ p ≡ q⟩
   a ∨ c ≡ a
=     ⟨Hip: a ∨ c⟩
   true ≡ a
=     ⟨≡-Ident⟩
   a
```

[15/15]

***Variante*:**
Dem: Por hipótesis
Hip: $\neg c \equiv c \Rightarrow \neg a,\ a \vee c$ // A demostrar: a
Dem: Por contradicción //A demostrar: false
Hip: $\neg a$
Lema: c
Dem:

```
        true
   =          ⟨Hip: a ∨ c⟩
        a ∨ c
   =          ⟨Hip: ¬a⟩
        false ∨ c
   =          ⟨∨- ident⟩
        c
```

```
   Ahora:
            true
   =              〈Hip: ¬c ≡ c ⇒ ¬a〉
            ¬c ≡ c ⇒ ¬a
   =              〈Hip: ¬a〉
            ¬c ≡ c ⇒ true
   =              〈x ⇒ true; ≡- Ident〉
            ¬c
   =              〈Lema: c〉
            false
```

[15/15]

***Variante*:**

```
Dem: Por hipótesis
Hip: ¬c ≡ c ⇒ ¬a, a ∨ c              // A demostrar: a
   Lema: c ≡ c ∧ a
      Dem:
            true
      =           〈Hip: ¬c ≡ c ⇒ ¬a〉
            ¬c ≡ c ⇒ ¬a
      =           〈Def ⇒〉
            ¬c ≡ ¬c ∨ ¬a
      =           〈x ≡ y ≡ ¬x ≡ ¬y〉
            ¬¬c ≡ ¬(¬c ∨ ¬a)
      =           〈Doble ¬; De Morgan; Doble ¬〉
            c ≡ c ∧ a
```

Ahora:

```
      true
   =        〈Hip: a ∨ c〉
      a ∨ c
   =        〈Lema: c ≡ c ∧ a〉
      a ∨ (c ∧ a)
   =        〈Absorción〉
      a
```

[15/15]

4 [20 puntos]

Considere el argumento siguiente:

"Cualquier persona tal que, cuando quiere aprender entra a estudiar, quiere aprender. Si Pedro quiere aprender, su hermano también quiere aprender. Entonces, el hermano de Pedro quiere aprender".

4a (20/20) Modele el argumento anterior con lógica de predicados.

Universo:

`Personas` ≈ "Personas"

[1/20]

Símbolos de constante:

`P ≈ "Pedro"`

[1/20]

Símbolos de función:

$h.x \approx$ "x *es hermano de Pedro"*

[1/20]

Símbolos de predicado:

$a.x \approx$ "x *quiere aprender"*

$e.x \approx$ "x *entra a estudiar"*

[2/20]

Hechos:

[H1] $(\forall x \mid a.x \Rightarrow e.x : a.x)$ *// Cualquier persona tal que, cuando quiere aprender entra a estudiar, quiere aprender*

[4/20]

[H2] $a.P \Rightarrow a(h.P)$ *// Si Pedro quiere aprender, su hermano también quiere aprender*

[4/20]

Conclusión:

[C] $a(h.P)$ *// el hermano de Pedro quiere aprender*

[4/20]

Argumento

$H1 \wedge H2 \Rightarrow C$

[3/20]

4b *(Bono: +10)* Demuestre que el argumento es correcto.

Dem: Por hipótesis

Hip: H1, H2 // A demostrar: $a(h.P)$

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{true} \\
= & \langle \text{Hip: H1} \rangle \\
 & (\forall x \mid a.x \Rightarrow e.x : a.x) \\
= & \langle \text{Trueque} \rangle \\
 & (\forall x \mid : (a.x \Rightarrow e.x) \Rightarrow a.x) \\
= & \langle \text{Def } \Rightarrow \rangle \\
 & (\forall x \mid : (\neg a.x \vee e.x) \Rightarrow a.x) \\
= & \langle \text{Def } \Rightarrow \rangle \\
 & (\forall x \mid : \neg(\neg a.x \vee e.x) \vee a.x) \\
= & \langle \text{De Morgan; Doble negación} \rangle \\
 & (\forall x \mid : (a.x \wedge \neg e.x) \vee a.x) \\
= & \langle \text{Absorción} \rangle \\
 & (\forall x \mid : a.x) \\
\Rightarrow & \langle \text{Instanciación: } x := P \rangle \\
 & a.P \\
\Rightarrow & \langle \text{Hip H2: } a.P \Rightarrow a(h.P)\text{; Modus Ponens} \rangle \\
 & a(h.P)
\end{array}
$$

[Bono: +10]

***Variante**: usando solo* [H1]

... como la anterior, hasta $(\forall x \mid : a.x)$. En este punto:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x \mid : a.x) \\
\Rightarrow & \langle \text{Instanciación: } x := h.P \rangle \\
 & a(h.P)
\end{array}
$$

[Bono: +10]