ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2014-10 - Sección 2
Parcial 3 – Mayo 9, 2014
Prof. Rodrigo Cardoso

****

1 [30/100]

Suponga que se tiene una barra rectangular de chocolate, hecha de `N` pastillas cuadradas, `N>0`. Para separar todas las pastillas, se hace un proceso paso a paso. En cada paso se escoge una pieza rectangular del chocolate que tenga más de una pastilla y se corta de lado a lado a través de una horizontal o de una vertical, sin partir pastillas (obsérvese que, por ser la pieza rectangular, el corte da lugar a dos piezas rectangulares más pequeñas). Eventualmente, el chocolate quedará reducido a pastillas cuadradas. Demuestre que el número de cortes que se requiere para hacer la separación de todas las pastillas es `N-1`.

Dem: Inducción fuerte sobre `N>0`.

[2/2]

Sea `x.N` el número de pasos para separar las pastillas un chocolate rectangular de `N` pastillas.

Predicado de inducción: `p.N ≡ x.N = N-1,  N>0`.

[3/3]

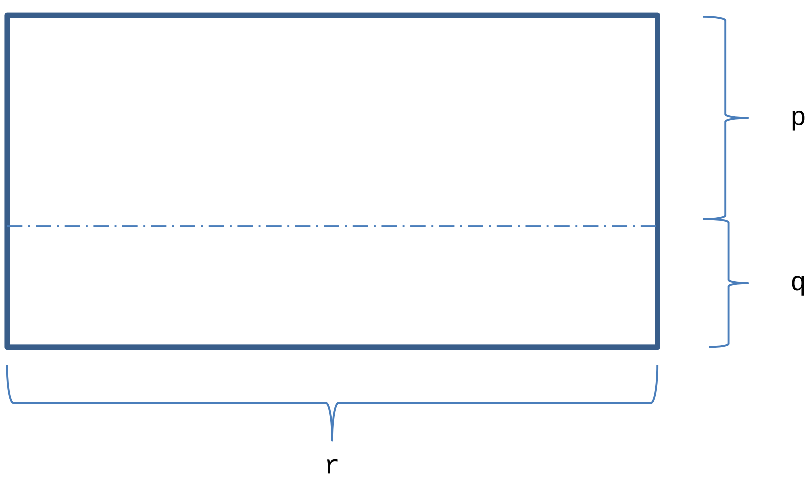
Caso base: `p.1`

En este caso no hay nada que separar. Es decir se hacen `0 = 1-1` cortes.

[5/5]

Caso inductivo: `p(N+1)`
`HI: p.1, p.2, …, p.N, N>0.`

Supóngase que se hace un primer corte horizontal de la forma



La situación debe ser tal que `N+1 = r*(p+q)`. El corte separa la pieza en dos pedazos rectangulares de tamaños `r*p` y `r*q`. Hay que notar también que `r*p<N+1` y `r*q<N+1`, ya que cada uno de los pedazos tiene al menos una pastilla.

Ahora se puede usar la hipótesis de inducción fuerte, dos veces. Según ésta:

```
x(r*p) = r*p-1
x(r*q) = r*q-1
```

Entonces, recordando que ya se hizo un corte:

`x(N+1) = r*p-1 + r*q-1 + 1 = r*(p+q)-1 = (N+1)-1.`

[15/15]

Si se hace un corte vertical se procede de manera análoga. También se puede argumentar que un corte vertical es un corte horizontal sobre una pastilla rotada 90°.

[5/5]

2 **[20/100]** Suponga dos números enteros positivos m,n, tales que $m \perp n$ (primos relativos). Muestre que hay múltiplos positivos de m y de n, respectivamente, cuya diferencia es 1.

Dem:

Si $m \perp n$, se tiene que mcd(m,n)=1.

Por otro lado, se sabe que mcd(m,n) es una combinación lineal entera de m y n. Es decir, existen enteros x, y tales que

$$1 = m*x + n*y$$

[10/10]

Los enteros x,y no pueden ser ambos positivos, porque m*x+n*y sería mayor que 1. Si, por ejemplo, n es negativo, se tendrá que

$$1 = m*x - (-y)*n$$

con m*x>0, (-y)*n>0. Estos son múltiplos de cada uno de los números y se diferencian en 1.

[10/10]

3 **[25/100]** Sea m:**nat**, m>0. Sean $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$ sucesiones de enteros tales que $b_k =_m a_{k+1} - a_k$, $k \geq 0$. Demuestre que

$$(+k|\ 0 \leq k < n : b_k) =_m a_n - a_0.$$

Dem: Inducción sobre **nat**.

[2/2]

Predicado de inducción: $R.n \equiv (+k|\ 0 \leq k < n : b_k) =_m a_n - a_0$, $n \geq 0$.

[3/3]

Caso base: R.0

$$\begin{array}{ll} & (+k|\ 0 \leq k < 0 : b_k) \\ = & \quad \langle \text{rango vacío} \rangle \\ & 0 \\ =_m & \quad \langle \text{aritmética} \rangle \\ & a_0 - a_0 \end{array}$$

[5/5]

Caso inductivo: R(n+1)

HI: R.n, $n \geq 0$

$$\begin{array}{ll} & (+k|\ 0 \leq k < n+1 : b_k) \\ = & \quad \langle \text{Partir rango a la derecha} \rangle \end{array}$$

$(+k|\ 0\leq k<n : b_k) + b_n$

$=_m \quad \langle HI \rangle$

$a_n - a_0 + b_n$

$= \quad \langle Def\ b \rangle$

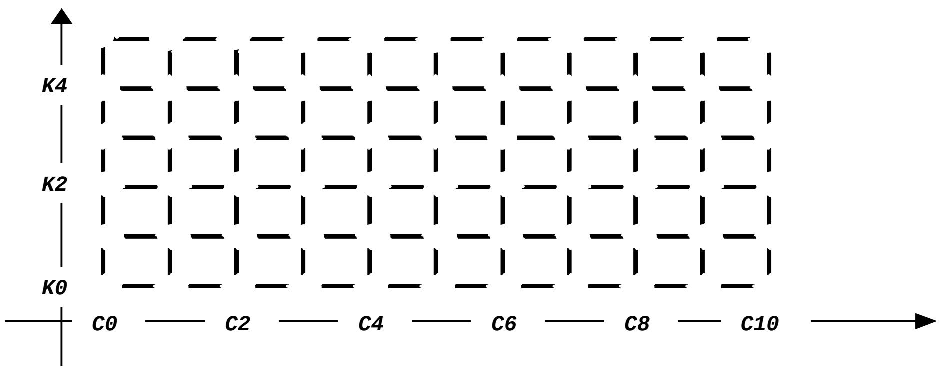
$a_n - a_0 + a_{n+1} - a_n$

$=$

$a_{n+1} - a_0$

[15/15]

4 **[30 puntos]** Una ciudad rectangular tiene una red de ciclovías que forman sus cuadras horizontales y verticales. La nomenclatura de la ciudad permite llamar *calles* a las ciclovías verticales y *carreras* a las horizontales. Las calles se numeran `0,1,…,n-1` y las carreras `0,1,…m-1`. La figura muestra un ejemplo en el que `n=11,m=6`:



Sea `x(n,m)` el número de cuadras en la ciudad, v.gr. `x(1,1)=0`, `x(2,1)=1`, `x(3,2)=7`, etc.

4a (5/25) Calcule `x(n,1)` y `x(1,m)`.

Para calcular `x(n,1)`, la ciudad tiene `n` calles de `0` cuadras, i.e., no tiene cuadras en calles. Pero tiene una carrera de `n-1` cuadras (en la figura, `K0`). En total: `x(n,1) = n-1`.

Análogamente: `x(1,m) = m-1`.

[5/5]

4b (15/25) Calcule `x(n,m)`, `n,m>0`.

Ayuda: *Todas las calles tienen el mismo número de cuadras (cf. 4a). Use reglas de conteo (suma, producto, diferencia).*

En cada calle hay `m-1` cuadras de calle (por 4a). Hay `n` calles. Por regla de productos, hay `n*(m-1)` cuadras de calle.

De modo análogo, hay `m*(n-1)`cuadras de carrera.

[5/5]

En total: por la regla de sumas (calles $\cap$ carreras = $\emptyset$):

`x(n,m) = n*(m-1)+ m*(n-1) = 2*m*n-(m+n).`

[10/10]

4c (5/25) Calcule su respuestas de 4a y 4b para `n=50`, `m=10`, y `n=17`, `m=8`.

```
x(50,10) = 50*9 + 10*49 = 450 + 490 = 940
x(17,8)  = 17*7 + 8*16  = 119 + 128 = 247.
```

[10/10]