ISIS 1104 Matemática Estructural y Lógica
Semestre 2017-10 - Sección 7
Parcial 2 – Abril 4, 2017
Prof. Rodrigo Cardoso

1 **[30/100]**

Sea `U` un conjunto universal. Considere la relación $d: 2^U \leftrightarrow 2^U$ definida por:

$$d(A,B) \equiv A \subseteq B^c$$

Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

1a (10/30) `d` es irreflexiva

No.

Contraejemplo:

```
   d(∅,∅)
=      ⟨Def d⟩
   ∅ ⊆ ∅ᶜ
=      ⟨∅ᶜ = U⟩
   ∅ ⊆ U
=
   true
```

[10/10]

1b (10/30) `d` es simétrica

Sí.

Dem:

```
   d(A,B)
=      ⟨Def d⟩
   A⊆Bᶜ
=      ⟨Contrarrecíproca⟩
   (Bᶜ)ᶜ ⊆ Aᶜ
=      ⟨(Bᶜ)ᶜ = B⟩
   B ⊆ Aᶜ
=      ⟨Def d⟩
   d(B,A)
```

[10/10]

1c (10/30) `d` es transitiva

No.

Contraejemplo:

```
U ={1,2,3}
A = {1}, B = {2}, C={1,3}
```

Ahora:

```
   d(A,B)
=      ⟨Bᶜ ={1,3}⟩
   {1}⊆{1,3}
```

$=$

$\quad true$

También:

$\quad d(B,C)$

$= \quad \langle C^c = \{2\}\rangle$

$\quad \{2\} \subseteq \{2\}$

$= \quad \langle X \subseteq X\rangle$

$\quad true$

Pero:

$\quad d(A,C)$

$= \quad \langle Def\ d\rangle$

$\quad \{1\} \subseteq \{2\}$

$=$

$\quad false$

[10/10]

Variante

Lema D: $d(A,B) \equiv A \cap B = \varnothing$

Dem:

$(\Rightarrow)$

$\quad A \subseteq B^c$

$= \quad \langle X \subseteq Y \equiv X \cap Y = X\rangle$

$\quad A \cap B^c = A$

$\Rightarrow \quad \langle X = Y \Rightarrow X \cap Z = Y \cap Z\rangle$

$\quad A \cap B^c \cap B = A \cap B$

$= \quad \langle B^c \cap B = \varnothing\rangle$

$\quad A \cap \varnothing = A \cap B$

$= \quad \langle A \cap \varnothing = \varnothing;\ SAP\rangle$

$\quad A \cap B = \varnothing$

$(\Leftarrow)$

$\quad A$

$= \quad \langle \cap\text{-Identidad}\rangle$

$\quad A \cap U$

$= \quad \langle \text{Medio Excluido}\rangle$

$\quad A \cap (B \cup B^c)$

$= \quad \langle \text{Distr } \cap/\cup\rangle$

$\quad (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$= \quad \langle \text{Hip: } A \cap B = \varnothing;\ \cup\text{-Identidad}\rangle$

$\quad A \cap B^c$

i.e., $A = A \cap B^c$. Por tanto: $A \subseteq B^c$, o bien, $d(A,B)$.

[12/12]

Ahora:

1a d es irreflexiva

No.

```
   d(∅,∅)
=     ⟨Lema D⟩
   ∅∩∅ = ∅
=     ⟨∩-Identidad⟩
   true
```

[6/6]

1b `d` es simétrica

Sí.

Dem:

```
   d(A,B)
=     ⟨Lema D⟩
   A∩B = ∅
=     ⟨∩-conmutatividad⟩
   B∩A = ∅
=     ⟨Lema D⟩
   d(B,A)
```

[6/6]

1c `d` es transitiva

No.

Contraejemplo:

```
U ={1,2,3}
A = {1}, B = {2}, C={1,3}
```

Ahora:

```
   d(A,B)
=     ⟨Lema D⟩
   {1}∩{2} = ∅
=
   true
```

También:

```
   d(B,C)
=     ⟨Lema D⟩
   {2}∩{1,3} = ∅
=
   true
```

Pero:

```
   d(A,C)
=     ⟨Lema D⟩
   {1}∩{1,3} = ∅
=
   false
```

[6/6]

2 **[20/100]**
Sea $R: A \leftrightarrow A$ una relación sobre A.
Demuestre las siguientes afirmaciones:

2a (10/20) R unívoca $\equiv R^T \circ R \subseteq I$

Dem:

($\Rightarrow$) Por hipótesis

Hip: R unívoca // A demostrar: $R^T \circ R \subseteq I$

$$
\begin{array}{ll}
 & x\ R^T \circ R\ y \\
= & \quad \langle \text{ Def } \circ) \\
 & (\exists z \mid xR^Tz \wedge zRy) \\
= & \quad \langle \text{Def } .^T\rangle \\
 & (\exists z \mid zRx \wedge zRy) \\
\Rightarrow & \quad \langle R \text{ unívoca}\rangle \\
 & x=y \\
= & \quad \langle \text{Def } I\rangle \\
 & xIy
\end{array}
$$

[5/10]

($\Leftarrow$) Por hipótesis

Hip: $R^T \circ R \subseteq I$ // A demostrar: R unívoca

$$
\begin{array}{ll}
 & xRy \wedge xRz \\
= & \quad \langle \text{Def } .^T\rangle \\
 & yR^Tx \wedge xRz \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Def } \circ \rangle \\
 & y\ R^T \circ R\ z \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Hip: } R^T \circ R \subseteq I \ \rangle \\
 & yIz \\
= & \quad \langle \text{Def } I\rangle \\
 & y=z
\end{array}
$$

[5/10]

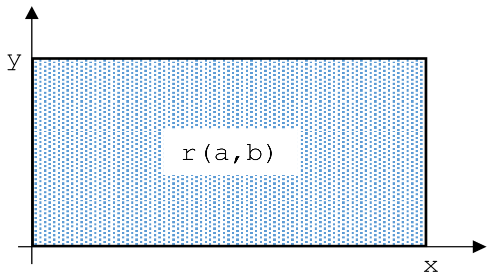
2b (10/20) R 1-1 $\equiv R \circ R^T \subseteq I$

Dem:

$$
\begin{array}{ll}
 & R \text{ 1-1} \\
= & \quad \langle \text{Def 1-1, Def unívoca}\rangle \\
 & R^T \text{ unívoca} \\
= & \quad \langle \mathbf{2a}\rangle \\
 & (R^T)^T \circ R^T \subseteq I \\
= & \quad \langle (R^T)^T = R\rangle \\
 & R \circ R^T \subseteq I
\end{array}
$$

[10/10]

3 **[30/100]**
Sea $\mathbf{R}^+$ el conjunto de los números reales no negativos. Para $a,b \in \mathbf{R}^+$, sea $r(x,y)$ el rectángulo en el plano cartesiano con vértices en $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y) y $(0,y)$. Gráficamente:



Sea `Rect = {r(x,y) | x,y∈`$\mathbf{R}^+$`}`.
Considere las relaciones `ma, mia, J: Rect ↔ Rect`, tales que:

```
ma(r(x,y),r(w,z))   ≈ "el área de r(x,y) es menor que el área de r(w,z)"
                    ≡ x*y < w*z

J(r(x,y),r(w,z))    ≈ "el área de r(x,y) es igual al área de r(w,z)"
                    ≡ x*y = w*z

mia = ma ∪ J
```

3a (8/30) Prueba que `ma` es una relación de orden estricto.

`ma` *es irreflexiva:*

```
   ma(r(x,y),r(x,y))
=      ⟨Def ma⟩
   x*y < x*y
=      ⟨Aritmética⟩
   false
```

[4/8]

`ma` *es transitiva:*

```
Hip: ma(r(a,b),r(c,d)), ma(r(c,d),r(e,f)) //A demostrar: ma(r(a,b),r(e,f))
   a*b
<      ⟨ ma(r(a,b),r(c,d)) ⟩
   c*d
<      ⟨ ma(r(c,d),r(e,f) ⟩
   e*f
```

Es decir, `a*b<e*f`, de modo que `ma(r(a,b),r(e,f))`.

[4/8]

3b (8/30) Pruebe que `mia` no es una relación de orden parcial.

Contraejemplo: `mia` no es antisimétrica:

```
   mia(r(1,2),r(2,1))
=
   ma(r(1,2),r(2,1)) ∨ J(r(1,2),r(2,1))
=
   1*2<1*2 ∨ 1*2=1*2
=
```

```
   true
```

También

```
   mia(r(2,1),r(1,2))
=
   ma(r(2,1),r(1,2)) ∨ J(r(2,1),r(1,2))
=
   2*1<2*1 ∨ 2*1=2*1
=
   true
```

Pero: `r(1,2) ≠ r(2,1)`

[8/8]

Variante:

Lema mia: `mia(r(x,y),r(w,z)) ≡ x*y ≤ y*z`

Dem:

```
   mia(r(x,y),r(w,z))
=     ⟨Def mia⟩
   ma(r(x,y),r(w,z)) ∨ J(r(x,y),r(w,z))
=     ⟨Def ma, Def J⟩
   x*y < w*z  ∨  x*y = w*z
=     ⟨Aritmética⟩
   x*y ≤ w*z
```

Basta mostrar dos rectángulos diferentes de igual área. Sirve el contraejemplo de antes:

```
   mia(r(2,1),r(1,2))                      mia(r(1,2),r(2,1))
≡                                       ≡
   2*1 ≤ 1*2                               1*2 = 2*1
≡                                       ≡
   true                                    true
```

Pero: `r(1,2) ≠ r(2,1).`

[8/8]

3c (8/30) Pruebe que `J` es una relación de equivalencia

`J` *reflexiva*:

```
   J(r(x,y),r(x,y))
=     ⟨Def J⟩
   x*y = x*y
=     ⟨Aritmética⟩
   true
```

[2/8]

`J` *simétrica*:

```
   J(r(x,y),r(w,z))
=     ⟨Def J⟩
   x*y = w*z
=     ⟨Aritmética⟩
   w*z = x*y
```

=

  J(r(w,z),r(x,y))

[3/8]

J *transitiva*:

  J(r(x,y),r(w,z)) ∧ J(r(w,z),r(u,v))

= ⟨Def J, 2 veces⟩

  x*y = w*z ∧ w*z = u*v

⇒ ⟨Aritmética⟩

  x*y = u*v

= ⟨Def J⟩

  J(r(x,y),r(u,v))

[3/8]

3d (6/30) Dé 3 elementos diferentes de cada una de las clases de equivalencia $[r(5,8)]_J$ y $[r(7,7)]_J$.

Elementos de $[r(5,8)]_J$: r(5,8), r(8,5), r(1,40) // parejas que multiplican 40

[3/6]

Elementos de $[r(7,7)]_J$: r(7,7), r(1,49), r(49,1) // parejas que multiplican 49

[3/6]

4 [30 puntos]

Para d,n,m:**nat**$^+$, defina los conjuntos:

D = 1..d : días laborables en un período de tiempo

P = 1..n : operarios (para realizar cualquier trabajo)

T = 1..m : trabajos por realizar por operarios (cada una demora un día).

Considere conocidas las siguientes relaciones y significados:

puede: P ↔ D

puede(p,x) ≈ "el operario p puede trabajar el día x"

dtrab: T ↔ D

dtrab(t,x) ≈ "el trabajo t se realiza el día x"

Defina la relación Z = puede ∘ dtrab^T.

4a (10/30) Interprete el significado de la relación Z.

Por su definición, Z : P ↔ T. Ahora

  p Z t

=

  p (puede ∘ dtrab^T) t

=

  (∃x:D|: puede(p,x) ∧ dtrab^T(x,t))

=

  (∃x:D|: puede(p,x) ∧ dtrab(t,x))

≈

"el operario p puede realizar el trabajo t" (coinciden los días)

[10/10]

4b (10/30) Suponga que D = {1,2,3}, P = {1,2,3}, T = {1,2} y que las relaciones están descritas por las matrices binarias

$$\text{puede:}\quad \begin{array}{c|c} & \mathbf{1}\ \ \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}} \end{array} \qquad \text{dtrab:}\quad \begin{array}{c|c} & \mathbf{1}\ \ \mathbf{2}\ \ \mathbf{3} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}} \end{array}$$

Determine M_Z, la matriz binaria correspondiente a la relación Z.

Por la definición de Z:

$$M_Z = M_{puede}\, M_{dtrab}{}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[10/10]

4c (10/30) Explique el significado, en la matriz M_Z, de

(i) una entrada en 0

$M_Z[p,t] = 0 \approx$ "el operario p no puede realizar el trabajo t"

[2/10]

(ii) una fila en 0

$M_Z[p,.] = 0 \approx$ "el operario p no puede realizar ninguno de los trabajos"

[4/10]

(iii) una columna en 0.

$M_Z[.,t] = 0 \approx$ "ningún operario puede realizar el trabajo t"

[4/10]