Esercizio 2.1 *Determinare analiticamente gli zeri del polinomio*

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

e la loro molteplicità. Dire perché il metodo di bisezione è utilizzabile per approssimarne uno a partire dall'intervallo di confidenza $[a, b] = [0, 3]$. *A quale zero di* P *potrà tendere la successione generata dal metodo di bisezione a partire da tale intervallo? Costruire una tabella in cui si riportano il numero di iterazioni e di valutazioni di* P *richieste per valori decrescenti della tolleranza* tolx.

Soluzione: Prendiamo in considerazione il nostro polinomio e vediamo subito che un suo zero è 1, infatti:
con $\hat{x} = 1$:

$$\begin{gathered} P(1) = 1^3 - 4 * 1^2 + 5 * 1 - 2 = \\ = 1 - 4 + 5 - 2 = 0 \end{gathered}$$

A questo punto controlliamo la sua molteplicità:

$$\begin{gathered} P'(x) = 3x^2 - 8x + 5 \\ P'(1) = 3 - 8 + 5 = 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P''(x) = 6x - 8 \\ P''(1) = 6 - 8 = -2 \end{gathered}$$

La molteplicità è 2 poiché la derivata seconda è la prima derivata in ordine che non viene annullata.

Un'altro suo zero è 2:
con $\hat{x} = 2$:

$$P(2) = 8 - 16 + 10 - 2 = 0$$

$$P'(2) = 12 - 16 + 5 = 1$$

In questo caso la molteplicità è 1.

Il metodo di bisezione è utilizzabile nell'intervallo di confidenza $[0, 3]$ in quanto $P(a)P(b) < 0$, precisando che in tale intervallo P tenderà a 2:

$$\begin{gathered} P(0) = 0 - 0 + 0 - 2 = -2 \\ P(3) = 27 - 36 + 15 - 2 = 4 \\ -2 * 4 < 0 \end{gathered}$$

Di seguito i risultati dell'esecuzione del metodo di bisezione utilizzando come intervallo di confidenza $[0, 3]$:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, \qquad I = [0, 3]$		
$\tilde{x} \approx 2.0$		
tol_x	Approssimazione	Iterazioni
10^{-1}	$\tilde{x} = 2.062500000000000$	$i = 3$
10^{-2}	$\tilde{x} = 1.992187500000000$	$i = 6$
10^{-3}	$\tilde{x} = 2.000976562500000$	$i = 9$
10^{-4}	$\tilde{x} = 2.000061035156250$	$i = 13$
10^{-5}	$\tilde{x} = 1.999992370605469$	$i = 16$
10^{-6}	$\tilde{x} = 2.000000953674316$	$i = 19$
10^{-7}	$\tilde{x} = 2.000000059604645$	$i = 23$
10^{-8}	$\tilde{x} = 1.999999992549419$	$i = 26$
10^{-9}	$\tilde{x} = 2.000000000931323$	$i = 29$
10^{-10}	$\tilde{x} = 2.000000000058208$	$i = 33$
10^{-11}	$\tilde{x} = 1.999999999992724$	$i = 36$
10^{-12}	$\tilde{x} = 2.000000000000909$	$i = 39$
10^{-13}	$\tilde{x} = 2.000000000000057$	$i = 43$
10^{-14}	$\tilde{x} = 1.999999999999993$	$i = 46$
10^{-15}	$\tilde{x} = 2.000000000000001$	$i = 49$

Notiamo come dopo 49 iterazioni otteniamo il risultato con tolleranza pari a 10^{-15}.

Esercizio 2.2 *Completare la tabella precedente riportando anche il numero di iterazioni e di valutazioni di P richieste dal metodo di Newton, dal metodo delle corde e dal metodo delle secanti (con secondo termine della successione ottenuto con Newton) a partire dal punto $x_0 = 3$. Commentare i risultati riportati in tabella. E' possibile utilizzare $x_0 = 5/3$ come punto di innesco?*

Soluzione:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, \qquad x_0 = 3$			
$\tilde{x} \approx 2.0$			
tol_x	Newton	Corde	Secanti
10^{-1}	$\tilde{x} = 2.00435, i = 4$	$x = 2.35938, i = 3$	$x = 2.05016, i = 4$
10^{-2}	$\tilde{x} = 2.00004, i = 5$	$x = 2.06432, i = 13$	$x = 2.00099, i = 6$
10^{-3}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 6$	$x = 2.00767, i = 29$	$x = 2.00002, i = 7$
10^{-4}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 6$	$x = 2.00078, i = 47$	$x = 2.00000, i = 8$
10^{-5}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 7$	$x = 2.00007, i = 66$	$x = 2.00000, i = 9$
10^{-6}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 7$	$x = 2.00001, i = 84$	$x = 2.00000, i = 9$
10^{-7}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 7$	$x = 2.00000, i = 102$	$x = 2.00000, i = 9$
10^{-8}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 7$	$x = 2.00000, i = 120$	$x = 2.00000, i = 10$
10^{-9}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 139$	$x = 2.00000, i = 10$
10^{-10}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 157$	$x = 2.00000, i = 10$
10^{-11}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 175$	$x = 2.00000, i = 10$
10^{-12}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 193$	$x = 2.00000, i = 11$
10^{-13}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 211$	$x = 2.00000, i = 11$
10^{-14}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 230$	$x = 2.00000, i = 11$
10^{-15}	$\tilde{x} = 2.00000, i = 8$	$x = 2.00000, i = 247$	$x = 2.00000, i = 11$

Possiamo notare come il metodo più efficiente è quello di Newton, mentre il metodo meno efficiente è quello delle corde.
No non è possibile utilizzare $x_0 = 5/3$ come punto di innesco in quanto $5/3$ è uno zero della derivata prima.

Esercizio 2.3 *Costruire una seconda tabella analoga alla precedente relativa ai metodi di Newton, di Newton modificato e di accelerazione di Aitken applicati alla funzione polinomiale P a partire dal punto di innesco $x_0 = 0$. Commentare i risultati riportati in tabella.*

Soluzione: Avendo valutato precedentemente che la molteplicità di P è 2 applichiamo il metodo di Newton modificaton con coefficente del termine di correzione $m = 2$:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, \qquad x_0 = 0$			
$\tilde{x} \approx 1.0$			
tol_x	Newton	Newton modificato	Aitken
10^{-1}	$\tilde{x} = 0.89599, i = 4$	$x = 0.99607, i = 3$	$x = 1.00056, i = 3$
10^{-2}	$\tilde{x} = 0.99289, i = 8$	$x = 0.99999, i = 4$	$x = 1.00000, i = 4$
10^{-3}	$\tilde{x} = 0.99911, i = 11$	$x = 1.00000, i = 5$	$x = 1.00000, i = 4$
10^{-4}	$\tilde{x} = 0.99994, i = 15$	$x = 1.00000, i = 5$	$x = 1.00000, i = 5$
10^{-5}	$\tilde{x} = 0.99999, i = 18$	$x = 1.00000, i = 5$	$x = 1.00000, i = 5$
10^{-6}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 21$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 5$
10^{-7}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 25$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 5$
10^{-8}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-9}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-10}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-11}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-12}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-13}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-14}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	$x = 1.00000, i = 6$
10^{-15}	$\tilde{x} = 1.00000, i = 29$	$x = 1.00000, i = 6$	

Come era prevedibile notiamo che il metodo di Newton converge linearmente. Il metodo di Newton modificato e quello di Aitken performano similmente e notiamo che il costo di discosta di poco.

Esercizio 2.4 *Definire una procedura iterativa basata sul metodo di Newton per approssimare $\sqrt{\alpha}$, per un assegnato $\alpha > 0$. Costruire una tabella dove si riportano le successive approssimazioni ottenute e i corrispondenti errori assoluti (usare l'approssimazione di Matlab di $\sqrt{\alpha}$ per il calcolo dell'errore) nel caso in cui $\alpha = 5$ partendo da $x_0 = 5$.*
Soluzione: Il seguente metodo produrrà la tabella richiesta:

```
alpha = 5;
x0 = 5;

Tabella = cell2table(cell(0,3));
Tabella.Properties.VariableNames = {'i' 'SQRT_a' 'err'};
[Tabella, sqrt_a] = SQRT_Newton(alpha, x0, 100, 10^-15, Tabella);

function [T, sqrt_a] = SQRT_Newton(alpha, x0, itmax, tolx, T);
    sqrt_a = (x0 + alpha/x0) / 2;
    i = 1;
    row = {i, sqrt_a, abs( sqrt(alpha) - sqrt_a )};
    T = [T; row];

    while (i < itmax) && (abs(sqrt_a-x0) > tolx)
        x0 = sqrt_a;
        i = i+1;
        sqrt_a = (x0 + alpha/x0) / 2;
        row = {i, sqrt_a, abs( sqrt(alpha) - sqrt_a )};
        T = [T; row];
    end
end
```

1 i	2 SQRT_a	3 err
1	3	0.7639
2	2.3333	0.0973
3	2.2381	0.0020
4	2.2361	9.1814e-07
5	2.2361	1.8829e-13
6	2.2361	0

Esercizio 2.5 *Definire una procedura iterativa basata sul metodo delle secanti sempre per approssimare* $\sqrt{\alpha}$, *per un assegnato* $\alpha > 0$. *Completare la tabella precedente aggiungendovi i risultati ottenuti con tale precedura partendo da* $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 3$. *Commentare i risultati riportati in tabella.*
Soluzione:

```
x_0 = 5;
alpha = 5;

Tabella = cell2table(cell(0,3));
Tabella.Properties.VariableNames = {'i' 'sqrt_a' 'err'};

[Tabella, res] = SQRT_secanti(alpha, x_0, 200, 10^(-15), Tabella);

function [T, sqrt_alpha] = SQRT_secanti(alpha, x0, itmax, tolx, T)
x1 = (x0 + alpha/x0)/2;
x = ( (x1^2-alpha) * x0-(x0^2-alpha)*x1 ) / ((x1^2-alpha)-(x0^2 - alpha));
i = 1;
row = {i, x, abs( sqrt(alpha) - x )}; T = [T; row];
while(i < itmax) && (abs(x-x0)>tolx) x0=x1;
    x1=x;
    i = i+1;
    x = ( (x1^2 - alpha) * x0 - (x0^2 - alpha)*x1 ) / ((x1^2 - alpha) - (x0^2 - alpha));
    row = {i, x, abs( sqrt(alpha) - x )}; T = [T; row];
end
sqrt_alpha = x;
end
```

1 i	2 sqrt_a	3 err
1	2.5000	0.2639
2	2.2727	0.0367
3	2.2381	0.0020
4	2.2361	1.6475e-05
5	2.2361	7.4651e-09
6	2.2361	2.7089e-14
7	2.2361	4.4409e-16
8	2.2361	4.4409e-16
9	2.2361	0

Dal risultato ottenuto possiamo notare come a differenza del metodo di newton il metodo delle secanti converge $\sqrt{\alpha}$ meglio nelle prime iterazioni, ma il metodo di Newton converge poi con più precisione convergendo più velocemente verso il risultato esatto.