APUNTES ÁLGEBRA I

Autor
Daniel Zermeño
ESFM
2025

Contents

Introducción

Los números Naturales son la base de todos los demás y de aquí se construirán más números.

Este conjunto se denota por $\mathbb{N}$ y sus elementos son:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Una manera de construir los axiomas de Peano es la siguiente:

i) $1 \in \mathbb{N}$

ii) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces su sucesor $n + 1$ también pertenece a $\mathbb{N}$

iii) Si $n + 1 = m + 1$, entonces $n = m$

iv) $1 \neq n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

v) Principio de inducción: Sea $E \subseteq \mathbb{N}$ tal que

   $\cdot$) $1 \in E$.

   $\cdot\cdot$) Si $n \in E$, entonces $n + 1 \in E$.

   Entonces $\mathbb{N} = E$.

1 Propiedades de los números enteros

Considere el siguiente conjunto denotado por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\mathbb{N}\} = \{- \ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.+\}$$

Definimos las operaciones de suma y producto, denotadas por $+$ y $\cdot$. El conjunto $\mathbb{Z}$, junto con estas dos operaciones, satisface las siguientes propiedades:

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $(a + b) + c = a + (b + c)$

ii) $a + b = b + a$

iii) $\exists \quad 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = a$

iv) $\exists \bar{a} \in \mathbb{Z}$ tal que $a + \bar{a} = 0$

Note que la de la propiedad iv es $-a$.

Definición 1.1 (Divisibilidad en $\mathbb{Z}$)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

Se dice que a divide a b o que es divisible por a si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$

Si a divide a b, esto se denota como $a \mid b$ y si a no divide a b se denota como $a \nmid b$.

Ejemplos:

i) $5 \mid 50$ ya que $\exists x$ tal que $5 \cdot 10 = 50$, $x = 10$

ii) $5 \nmid 16$ ya que $\nexists x$ tal que $5 \cdot (x) = 16$

Teorema 1.2

Propiedades de la divisibilidad: Sean $a.b.c \in \mathbb{Z}$. Entonces.

i) $1 \mid a$ y $-1 \mid a$

2 Complejos

Un número complejo es una expresión de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales e i es un símbolo Al conjunto de los números complejos se le denota como:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

i) Parte real de un número complejo.

En la expresión $a + ib$, al número real a se le conoce como la parte real del complejo $a + ib$ y se le denota por:

$$\mathrm{Re}(a + ib) = a.$$

ii) Parte imaginaria de un número complejo.

En la expresión $a + ib$, al número real b se le conoce como parte imaginaria del complejo $a + ib$ y se le denota por:

$$\mathrm{Im}(a + ib) = b$$

iii) Forma normal de un número complejo.

La expresión $a + ib$ se conoce como forma normal de un número complejo, otra manera de denotar a los números complejos es como una pareja ordenada de dos números

$$a + ib = (a, b)$$

iv) Plano Complejo: