02 / 05 / 2023

Tarea 7 (Daniela Alvarez K) (202020209)

1. $X_1, \dots, X_n \sim f(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \theta > 0$

a) Queremos testear las siguientes hipotesis a nivel α

$$H_0 := \theta \leq 1 \qquad H_1 := \theta > 1$$

Para esto, defina las siguientes hipotesis

- $H_0' := \theta = 1 \qquad H_1' := \theta = \theta_1 \qquad \theta_1 \neq 1.$

El estadístico para * es

$$T(x) = \frac{f(x; \theta_1)}{f(x; 1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta_1 x_i^{\theta_1 - 1}}{1} = \theta_1^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\theta_1 - 1}$$

Tenemos que la prueba rechaza H_0' a un nivel α si $T \geq K$.

Para $\theta_1 > 1$ T es una funcion creciente de $\prod_{i=1}^{n} x_i$, luego se debe cumplir que $\prod_{i=1}^{n} x_i > K'$ para algun K', esto es lo mismo que decir que

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) > K'' = \ln(K')$$

De tal forma que

$$P_{\theta=1}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) > K''\right] = \alpha.$$

Ahora, tenemos que:

$$T \sim \Gamma(n, \theta) \quad *$$

b) $\alpha = 0.05 \qquad n = 50$

$$P\left[\sum_{i=1}^{50} \ln(x_i) > K\right] = 0.05 \Rightarrow 1 - P\left[\sum_{i=1}^{50} \ln(x_i) \leq K\right] = 0.05 \Rightarrow P\left[T \leq K\right] = 0.95$$

Sea F la funcion de distribucion de $\Gamma(n, 1/\theta)$. Luego, para una muestra aleatoria $\bar{X} = X_1, \dots, X_{50}$

$$K \approx F^{-1}(0.95) \approx 63.1710$$

c) Defina el siguiente estadístico $S = \sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i / 2)$. Por el TLC, tenemos que

$$\sqrt{n}\left(S - m(\theta)\right) \xrightarrow{d} N(0, v(\theta))$$

Donde $m(\theta)$ es la media y $v(\theta)$ es la varianza. En este caso, $\theta = 1$

$$m(\theta) = \int_0^1 \theta x^\theta \, dx = \left[\frac{\theta x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1} = \frac{1}{2}$$

$$v(\theta) = E[X^2] - m(\theta)^2 = \int_0^1 \theta x^{\theta+1} \, dx - \frac{1}{4} = \left[\frac{\theta x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Queremos ver que

$$P\left[\overset{(S)}{\sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i/2)} > K\right] = 0.05$$

$$P\left[\overset{(S)}{\sum_{i=1}^{n} \sin(\pi x_i/2)} \leq K\right] = 0.95$$

esto es lo mismo que

$$\underset{\theta=1}{P}\left(\underbrace{\sqrt{n}(S-0.25)}_{*} \leq \sqrt{n}(k-0.25)\right)=0.95.$$

y si $* \sim N(0, 1/12)$ y F es la función de distribución de $N(0, \frac{1}{12})$, entonces

$$\sqrt{n}\left(k-\frac{1}{2}\right) \approx F^{-1}(0.95) = 3$$

$$k \approx \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}$$

$$\approx \frac{0.137}{\sqrt{n}} + 0.5$$

d) Sea $\theta = 2$, luego, los valores de media y varianza son:

$$m(\theta) = \frac{\theta}{\theta+1} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad V(\theta) = \frac{\theta}{\theta+2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

De tal forma que por el teorema del límite central:

$$\sqrt{n}(S - 2/3) \xrightarrow{D} N(0, 1/18)$$

y se rechazaría Ho si:

$$\underset{\theta=2}{P}\left(\underbrace{\sqrt{n}(S-2/3)}_{*} \leq \sqrt{n}(k-2/3)\right)=0.90.$$

y si $* \sim N(0, 1/18)$ y F es la función de distribución de $N(0, \frac{1}{18})$, entonces

$$\sqrt{n}\left(k-\frac{2}{3}\right) \approx F^{-1}(0.90) = 3$$

$$k \approx \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3}$$

$$\approx \frac{0.107}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3}$$

Luego, podemos aproximar n considerando

(e) $T = \hat{\Sigma}\ln(x_i) = -(\hat{\Sigma} - \ln(x_i))$. Tenemos que $F_X(x) = \int_0^x \theta x^{\theta-1}dx = \theta\left[\frac{x^\theta}{\theta}\right]_0^x = x^\theta$

Si $T_i = -\ln(x_i) \Rightarrow F_{T_i}(y) = \mathbb{P}(S_i \leq y) = \mathbb{P}(-\ln(X_i) \leq y)$

$$= \mathbb{P}(\ln(X_i) \geq -y)$$

$$= \mathbb{P}(X_i \geq e^{-y}) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq e^{-y})$$

$$= 1 - e^{-\theta y}$$

Esta es la función acumulativa de distribución de la distribución exponencial. Luego

$$T_i = -\ln(x_i) \sim \exp(\theta) \quad \text{y} \quad \Sigma T_i \sim \Gamma(n, \theta)$$

/ /

2) $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ desconocida.

$H_0 := \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad H_1 := \sigma^2 > \sigma_0^2$

Vamos a hacer una prueba UMP, para esto, considere las siguientes hipótesis:

$H_0 := \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad H_1 := \sigma_1^2$ $\quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2$

$$T(x) = \frac{L(\sigma_1^2; \tilde{x})}{L(\sigma_0^2; \tilde{x})} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\sum^n \frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_1}\right)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\sum^n \frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\right\}}$$

$$= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left\{\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left\{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\left(\sum(x_i-\mu)^2\right)\right\}$$

Entonces, la prueba rechaza H_0 a nivel K para un K adecuado si $T \geq K$

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left\{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\left(\sum(x_i-\mu)^2\right)\right\} \geq K$$

$$n\ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) + \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)\left(\sum(x_i-\mu)^2\right) > \ln(K)$$

$$\sum(x_i-\mu)^2 > \frac{\ln(K) - n\ln(\sigma_0/\sigma_1)}{\left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\right)} = \frac{\ln(K) - n\ln(\sigma_0/\sigma_1)}{\frac{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)}{2\sigma_0^2\sigma_1^2}} = \frac{(2\sigma_0^2\sigma_1^2)(\ln(K) - n\ln(\sigma_0/\sigma_1))}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$$

$$S^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n-1} > \frac{(2\sigma_0^2\sigma_1^2)(\ln(K) - n\ln(\sigma_0/\sigma_1))}{(n-1)\quad \sigma_1^2 - \sigma_0^2} = K'$$

Tenemos que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ luego para un α definido queremos ver si

$$P_{\sigma_0}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{K'(n-1)}{\sigma_0^2}\right] = \alpha.$$

Defina $\alpha = 0.1$ y $\sigma_0^2 = 0.4$

Luego, si F es la función de distribución de χ^2_{n-1}, entonces

$$F^{-1}(1-\alpha) = \frac{K'(n-1)}{\sigma_0^2}$$

y para $n = 20$

$$y = F^{-1}(0.9) = \frac{K'(19)}{0.16} \qquad y = 27.2 \quad K' = 0.229$$

$n = 100$

$$y = F^{-1}(0.9) = \frac{K'(99)}{0.16} \qquad y = 117.4 \quad K' = 0.189$$

$n = 1000$

$$y = F^{-1}(0.9) = \frac{K'(999)}{0.16} \qquad y = 1056.7 \quad K' = 0.17$$

/ /

3) Acá consideramos el ejemplo 6.3.4

a) $S^* = 2T - n$ $\quad T = \#\{X_i > a_0\}$

Tenemos que $S^* = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(X_i - a)$

Si $\quad S_1 = \{X_i : X_i > a_0\}$ y $S_2 = \{X_i : X_i \le a_0\}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} S^* &= |S_1| - |S_2| \\ &= |S_1| - (n - |S_1|) \\ &= T - (n - T) \\ &= 2T - n \end{aligned}$$

b) Score Test $\approx$ rechazar H_0 si $T < c_1$ ó $T > c_2$.

Tenemos que la prueba rechaza H_0 si

$$\chi_R^2 = \frac{(S^*)^2}{n} > K \quad \text{para un } K \text{ definido}$$

$$\frac{(2T-n)^2}{n} > K$$

$$\underbrace{4T^2 - 4Tn + n^2 - Kn}_{*} > 0$$

* Es una función cuadrática de T con dos soluciones

$$T > \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$> \frac{-4n \pm \sqrt{16n^2 - 16(n^2 - Kn)}}{8}$$

$$> \frac{-4n \pm \sqrt{16Kn}}{8} = -\frac{n}{2} \pm \frac{\sqrt{Kn}}{2}$$

$$c_1 = \frac{-n - \sqrt{Kn}}{2}$$

$$c_2 = \frac{-n + \sqrt{Kn}}{2}$$

c) Tenemos que bajo H_0, $a = a_0$ y $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$X_i = a_0 + e_i$$

$$X_i - a_0 = e_i \sim \text{Laplace}(0, b)$$

$T \sim b(n, 1/2)$

(Centrada en 0 con parámetro b)

Como Laplace es una densidad simétrica,

$$\mathbb{P}(X_i > a_0) = \mathbb{P}(X_i \le a_0)$$

$$\mathbb{P}(X_i - a_0 > 0) = \mathbb{P}(X_i - a_0 \le 0) = 1/2.$$

Luego,

$\forall X_i \quad X_i \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ y $\sum X_i \sim \text{Bin}(n, 1/2)$

$$\Rightarrow T \sim \text{Bin}(n, 1/2).$$

Quiero $\quad \mathbb{P}_{a_0}\left[\frac{(S^*)^2}{n} > K\right] = \mathbb{P}_{a_0}\left[\frac{(2T-n)^2}{n} > K\right] = \alpha.$

$$= \mathbb{P}_{a_0}\left[\quad T \quad > \frac{\pm\sqrt{Kn} + n}{2}\right] = \alpha.$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{-n - \sqrt{Kn}}{2}$$

$$c_2 = \frac{-n + \sqrt{Kn}}{2}$$

/ /

d) Funcion de poder

$$\gamma(\theta) = \mathbb{P}_{\theta}\left(T < \frac{-n-\sqrt{kn}}{2} \right) + \mathbb{P}\left(T > \frac{-n-\sqrt{kn}}{2} \right)$$