Probabilidad y Estadística

Clase 4

Gonzalo Blanco

2023

1. Variable aleatoria continua

En la clase anterior habiamos visto el caso de variable aleatoria discreta, es decir, cuando el rango de la v.a era un conjunto finito o infinito numerable. Estudiemos ahora aquellas variables aleatorias cuyo rango es un conjunto infinito no numerable, cuando esto sucede decimos que esa varibale aleatoria es continua.

Cuando una v.a es continua, los valores que la misma puede tomar no son contables, ya no puedo hablar del valor *í-esimo* de mi v.a, ni de la probabilidad de ese valor *í-esimo*

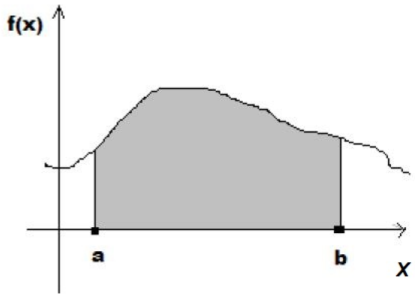
$$\Longrightarrow p(x_i) = P(X = x_i)$$

ya no tiene sentido.

Decimos entonces que la variable aleatoria continua X tiene asociada una **función de densidad de probabilidad**, que denotaremos como *f(x)*, tal que:

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx \quad con\ a, b \in R$$

Esto se traduce como la probabilidad de que la v.a X tome *valores o caiga* en el intervalo [a,b].



Entonces la probabilidad de que X tome valores en [a,b] viene dada por el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad (fdp).

Esta función cumple las siguientes propiedades:

1. $P(\infty \leqslant X \leqslant \infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   Es decir, que la probabilidad de que mi v.a caiga en el intervalo $[-\infty, \infty]$ es 1 (100 %).

2. $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

   Es decir que ya no tiene sentido de hablar de *la probabilidad de que X tome un valor discreto* sino que hablamos de *la probabilidad de que X caiga en cierto intervalo [a,b].*

Igual que para el caso de v.a discreta, podemos definir para X una **función de densidad de probabilidad acumulada**, que viene dada por

$$F(x_0) = P(X \leqslant x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx \quad , \textit{ con } x_0 \in R$$

Propiedades:

1. $P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \; - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$, siempre que F(x) sea derivable.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

4. $\lim\limits_{x\to\ -\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\ -\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

Ejemplo:

Sea X una v.a continua con la siguiente fdp,

$$\text{f(x)=} \begin{cases} C(4x - 2x^2) & si \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

a) ¿ Cuál es el valor de C?
b) Hallar $P(X > 1)$.
c) Hallar F(x).
a) Sabemos que f(x) tiene que cumplir que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(4x - 2x^2) = 1$

$\Longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(4x - 2x^2) = \int\limits_{0}^{2} C(4x - 2x^2) = C[2x^2 - \frac{2}{3}x^3]\Big|_0^2 = C[8 - \frac{16}{3}] = C\frac{8}{3} = 1$

$\Longrightarrow C = \frac{3}{8}$

b). $P(X > 1) = \int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{2} \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0dx = \frac{1}{2}$

c). $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{3}{8}(4t - 2t^2)dt = \frac{3}{8}(2t^2 - \frac{2}{3}t^3)\Big|_{0}^{x} = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)$

1.1. Esperanza y varianza de una variable alaeatoria continua

Sea X una v.a continua cuya función de densidad de probabilidad es f(x), se define la esperanza de X o valor esperado de X o media de X como:

$$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu_x$$

Sea h(x) una función cualquiera de X, entonces su valor esperado se puede calcular como

$$E[h(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

Notar que $h(x)$ también será una variable aleatoria, es decir, cualquier función que dependa de una variable aleatoria también lo será. La podría definir como $Y = h(x)$.

Sean a y b dos números reales, vale que:

1. $E[aX] = aE[X]$
2. $E[b] = b$
3. $E[aX + b] = aE[X] + b$

Igual que para v.a discreta la varianza de X viene dada por,

$$V[X] = E[(X - \mu_x)^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)dx = E[X^2] - \mu_x^2$$

Sean a y b dos números reales, vale que:

1. $V[aX] = a^2V[X]$
2. $V[b] = 0$
3. $V[aX + b] = a^2V[X]$

1.2. Funciones de distribución de probabilidad

Veamos ahora algunas de las funciones de densidad de probabilidad más importantes que puede seguir una variable aleatoria continua.

1.2.1. Distribución Uniforme

Se dice que una v.a X sigue una distribución uniforme en el intervalo [a,b] si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

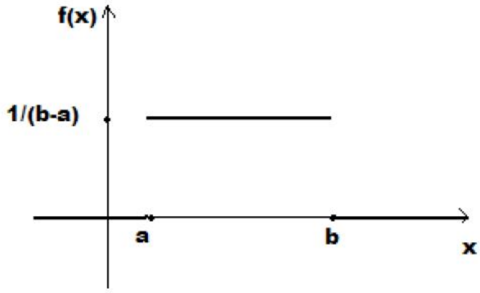


Figura 1: Distribución uniforme

Notar que $f(x)$ toma un valor constante en el intervalo [a,b], de ahí el nombre de esta distribución.

Diremos entonces que X sigue una distribución uniforme, $X \longrightarrow U(a,b)$.

Dado que U(a,b) es una función de densidad de probabilidad, tiene que cumpliar todas las propiedades de este tipo de funciones. Verifiquemos que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$

Veamos cual es la función de densidad de probabilidad acumulada de una v.a continua que sigue una U(a,b).

$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

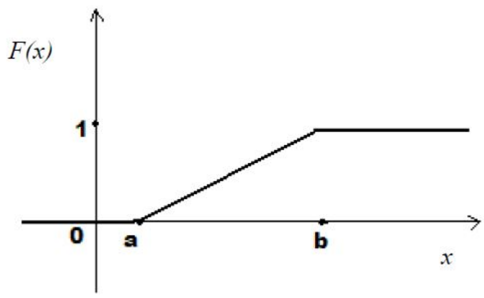


Figura 2: Función de densidad de probabilidad acumulada de una v.a que sigue una distribución uniforme.

Calculemos ahora E[X] y V[X]

$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^2}{2}\frac{1}{b-a}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

$$\longrightarrow E[X] = \mu_x = \frac{b+a}{2}$$

$V[X] = E[X^2] - \mu_x^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \mu_x^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{x^3}{3}\frac{1}{b-a}\Big|_a^b - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{b^3}{3(b-a)} - \frac{a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4}$

Haciendo un poco de álgebra se llega a $V[X] = \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

1.2.2. Distribución Gaussiana o Normal

Diremos que la v.a X sigue una distribución Gaussiana o Normal si su fpd es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \quad , con \ -\infty < x < \infty$$

Vemos que X sigue una distribución normal con media μ_x y varianza σ_x^2.
$\Longrightarrow$ X $\longrightarrow$ N(μ_x,σ_x^2).

Esta distribución tiene forma de campana

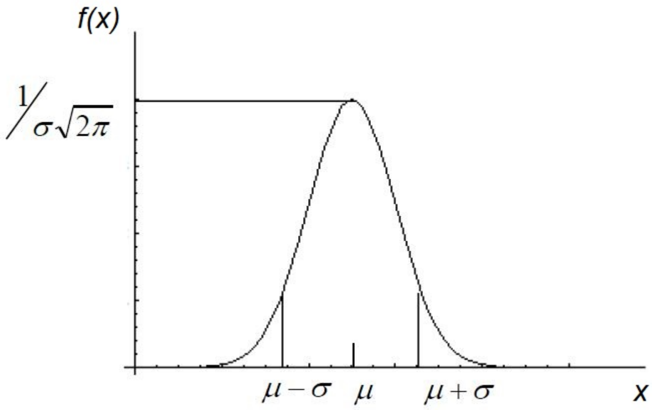


Figura 3: Distribución Gaussiana o Normal

Notar que f(x) queda completamente definida si conocemos μ_x y σ_x.

Veamos algunas propiedades y características de esta distribución:

1. f(x) es simétrica respecto de μ_x.
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
3. $\frac{\partial}{\partial x} f(x) = 0 \Longrightarrow x = \mu_x$ es un máximo.
4. $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = 0 \Longrightarrow x = \mu_x \pm \sigma_x$ son puntos de inflección.

La gráfica de f(x) tiene forma de campana centrada en μ_x y es simétrica respecto de este valor. Si cambio el valor de μ_x, a supongamos μ_0, la campana mantiene su forma pero se traslada centrandose en μ_0. Observar en la Figura 4, como se mueve la campana si cambio μ_x pero mantiene su forma ya que σ_x^2 siempre vale 1.

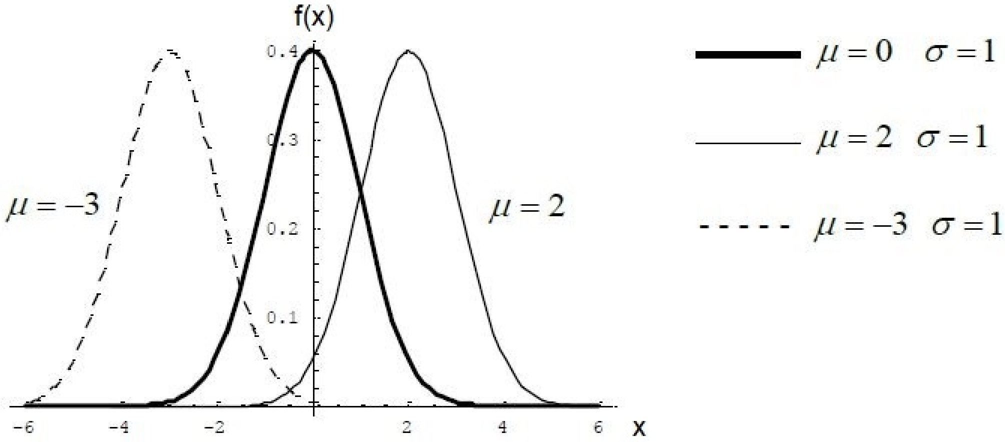


Figura 4: Campana de Gauss para distintos valores de μ.

Ahora, si en vez de cambiar el valor medio de X, modifico su varianza (o su desvío estandar), entonces la campana seguirá centrada en μ_x pero cambiará su forma. Mientras más pequeña sea la varianza, es decir, que la mayoria de los valores que puede tomar X estén muy cercanos a su media, la campana será mucho más angosta y con laterales empinados. Si la varianza es muy grande la campana tendrá una forma más ancha con laterales más suaves, reflejando la dispersión en los valores de X (Figura 5).

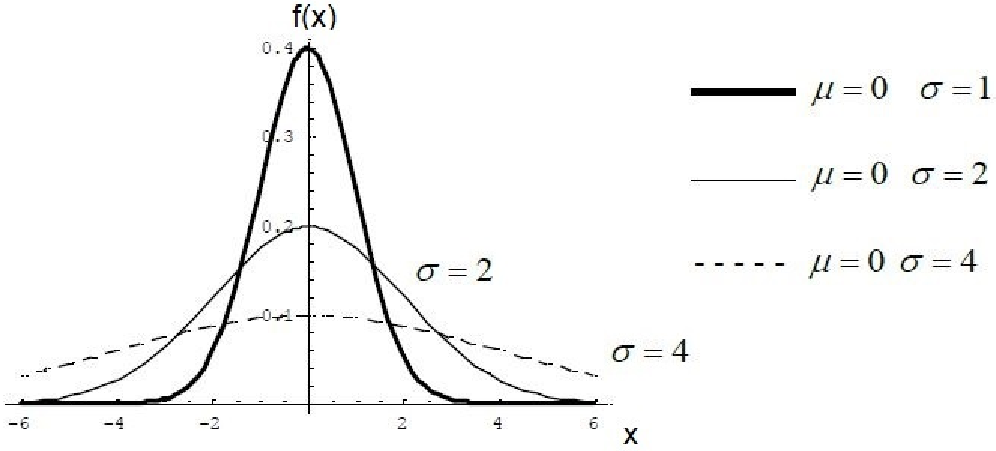


Figura 5: Campana de Gauss para distintos valores de σ_x.

Cuando una v.a sigue una dist. Gaussiana con $\mu_x = 0$ y $\sigma^2 = 1$, entonces diremos que X sigue una distribución **Normal estándar**, X $\longrightarrow N(0,1)$.

En este caso su fpd queda de la forma,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad con \ -\infty < x < \infty$$

La función de densisdad de probabilidad acumulada de f(x)=N(0,1) la llamamos $\Phi(x)$ y viene dada por,

$$\Phi(x) = F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Ahora bien, esta integral no se puede resolver analíticamente, es decir que no puedo resolver la integral a mano, pero sí con métodos numéricos. Debido a esto, la información de $\Phi(x)$ está tabulada con el objetivo de poder operar de forma simple con esta distribución.

Recordemos que N(0,1) es simétrica respecto de $\mu_x = 0$, es decir vale que,

$$F(-x) = \Phi(-x) = P(X < -x) = P(X > x) = 1 - \Phi(x)$$

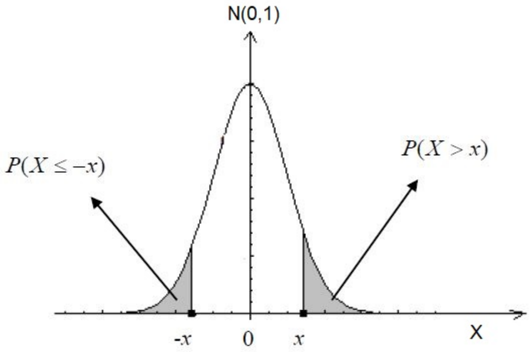


Figura 6: Distribución Normal estándar.

Ejemplos:

$P(X > 1,26) = 1 - \Phi(1,26) = P(X < -1,26) = \Phi(-1,26)$
$P(X < -1) = \Phi(-1) = P(X > 1) = 1 - \Phi(1)$

Para la N(0,1) vale que:
- $P(-1 < X < 1) = 0,6827 \cong 68\,\%$
- $P(-2 < X < 2) = 0,9545 \cong 95\,\%$
- $P(-3 < X < 3) = 0,9973 \cong 99\,\%$

Es decir, existe un 68 % de probabilidad de que la v.a X tome valores que no se alejen de $\mu_x = 0$ más de una distancia $\sigma_x = 1$, es decir que caiga en el rango [-1,1].

Esto se puede generalizar para cualquier distribución normal con media μ_x y varianza σ_x^2

- $P(\mu_x - \sigma_x < X < \mu_x + \sigma_x) = 0,6827 \cong 68\,\%$
- $P(\mu_x - 2\sigma_x < X < \mu_x + 2\sigma_x) = 0,9545 \cong 95\,\%$
- $P(\mu_x - 3\sigma_x < X < \mu_x + 3\sigma_x) = 0,9973 \cong 99\,\%$

Recordemos que en v.a continua para calcular la $P(a < X < b)$ teníamos que integrar f(x) en el intervalo [a,b], pero habíamos dicho que esta función no es integrable analiticamente, por lo tanto para calcular probabilidades vamos a tener que utilizar tablas de probabilidad. Ahora bien, solo la distribución Normal con $\mu_x = 0$ y $\sigma_x^2 = 1$, es decir la Normal estándar, se encuentra tabulada. Por lo tanto, si yo tuviera la fdp N(2,9) no podría hacer ningún cálculo de probabilidad para X ya que no puedo integrar a N(2,9).

Entonces para poder calcular probabilidades sobre una v.a que sigue una distribución normal que no es estándar debemos **normalizar la variable aleatoria X** de la siguiente forma:

Sunpongamos $X \longrightarrow N(\mu_x, \sigma_x^2)$
Defino la v.a Z=aX+b , siendo a y b dos constantes reales.

Sabemos que E[Z]=aE[X]+b y V[Z]=a$^2 V[X]$

Entonces me pregunto ¿ Existirán a y b tal que $E[Z] = \mu_z = 0$ y $V[Z] = \sigma_z^2 = 1$?

$E[Z] = 0 \Longrightarrow a\mu_x + b = 0 \Longrightarrow a\mu_x = -b$

$V[Z] = 1 \Longrightarrow a^2\sigma_x^2 = 1 \Longrightarrow a = 1/\sigma_x$

$\Longrightarrow a = 1/\sigma_x$ y $b = -\frac{\mu_x}{\sigma_x}$

$\Longrightarrow Z = \frac{1}{\sigma_x}x - \frac{\mu_x}{\sigma_x}$

$$\Longrightarrow Z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

Esta nueva v.a Z sigue una distribución N(0,1).

Sea $X \longrightarrow N(\mu_x, \sigma_x^2)$ puedo definir la v.a $Z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$, la cual sigue una distribución N(0,1).

De esta forma, cuando esté trabajando con una v.a que siga una distribución gaussiana cualquiera, para poder hacer algún cálculo de probabilidad primero debo normalizar la variable aleatoria (transformarla en una v.a que siga una N(0,1)) para así poder utilizar la tabla de probabilidades.

Ejemplo:

$X \longrightarrow N(3, 9)$. Calcular $P(2 < X < 5)$.

Como no puedo calcular esto a mano, entonces primero normalizo la v.a X definiendo la v.a $Z = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$.

Veamos entonces como calculamos la probabilidad deseada

$$P(2 < X < 5) = P(2 - \mu_x < X - \mu_x < 5 - \mu_x) = P(\frac{2 - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < \frac{5 - \mu_x}{\sigma_x}) =$$

$$= P(\frac{2 - \mu_x}{\sigma_x} < Z < \frac{5 - \mu_x}{\sigma_x}) = P(\frac{2 - 3}{3} < Z < \frac{5 - 3}{3}) = P(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}) =$$

$$P(2 < X < 5) = P(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}) = \Phi(\frac{2}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}) = 0,3779$$

1.2.3. Distribución Exponencial

Sea X una v.a continua. Se dice que sigue una distribución exponencial si su fdp es de la forma

$$\forall\lambda > 0, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

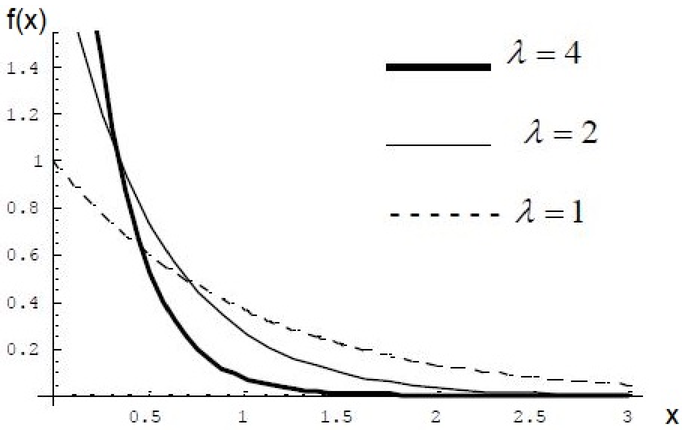


Figura 7: Distribución exponencial para distintos valores de λ

Como cualquier fdp debe cumplir que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int\limits_{o}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{e^{\lambda x}}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$

Se puede demostrar que $E[X] = \mu_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\lambda}$

• Su F(x) es sencilla

$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$

$$\Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

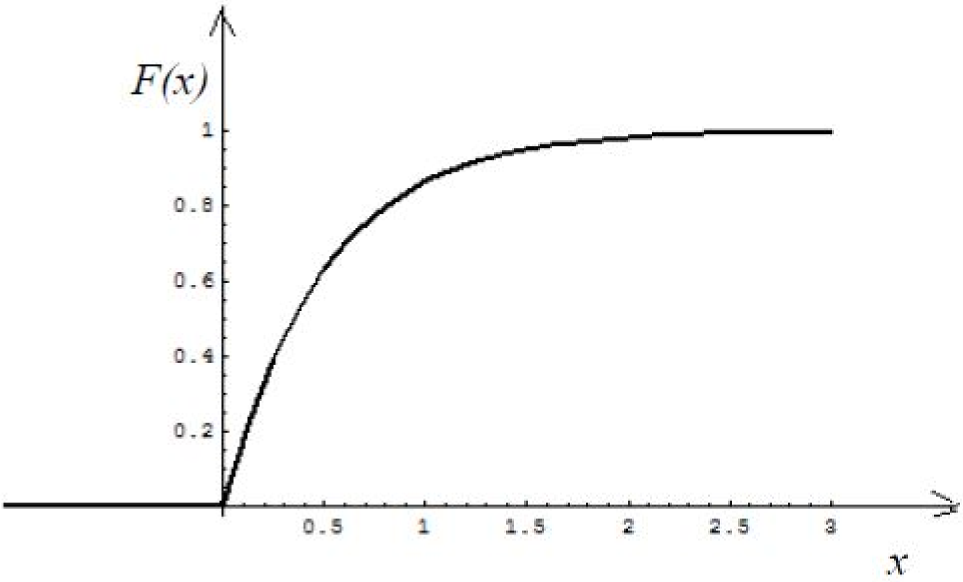


Figura 8: Función de distribución exponencial acumulada

La distribución exponencial se usa algunas veces para modelar el tiempo que transcurre antes de que ocurra un evento de interés. A menudo se lo llama tiempo de espera. Veamosló con un ejemplo.

Ejemplo:

Si recuerdan cuando vimos la distribución de Poisson habiamos dado un ejemplo sobre las estrellas fugaces.

Supongamos que en el noticiero informan que mañana a partir de las 21:00 hs habrá una lluvia de estrellas fugaces durante toda la noche, y se espera que se observen 10 estrellas fugaces por hora. Además, gracias a un estudio realizado por astrónomos, nos informan que el número de estrellas fugaces que aparecerán en el cielo siguirá una distribución de Poisson.

Entonces habíamos definido la v.a *X=cantidad de estrellas fugaces que vemos en un tiempo t*, y dijimos que X seguia una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10t$, con t en horas. Entonces ahora me interesa estudiar a la v.a *T="tiempo de espera entre que aparece una estrella fugaz y la siguiente"*.

T va a seguir una distribucióm exponencial con parámetro λ.

a) ¿ Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera sea menor a 30 minutos?

$P(T < 30') = P(T < 0{,}5 horas) = 1 - e^{-10\frac{1}{2}} = 0,99$

Tiene sentido ya que se esperaban observar 10 estrellas fugaces por hora, es muy probable que el tiempo de espera entre una estrella fugaz y la siguiente sea menor a 30'.

b) ¿ Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre que aparece una estrella y la siguiente se mayor a 10 minutos?

$P(T > 10') = P(T > \frac{1}{6} horas) = 1 - P(T < \frac{1}{6}) = 1 - [1 - e^{-10\frac{1}{6}}] = e^{-10\frac{1}{6}} = 0,19$

$\Longrightarrow$ Si los eventos siguen un proceso de Poisson con parámetro λ y si T representa el tiempo de espera entre dos eventos sucesivos entonces vale que $T \longrightarrow Exp(\lambda)$.

Repasando el ejemplo anterior, definimos:

1) X=*"número de estrellas fugaces en un tiempo t"*, con $X \longrightarrow P(\lambda)$.

2) λ= *"número esperado de estrellas fugaces en un tiempo t"*.

3) T=*"tiempo de espera entre la aparición de una estrella fugaz y la siguiente"*, con $T \longrightarrow Exp(\lambda)$.