Probabilidad y estadística

Práctica 4

Variables aleatorias continuas - Distribuciones

1. El tiempo total, medido en unidades de 100 horas, que un adolescente utiliza su computadora en un período de un año es una v.a. continua X con f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que en un período de un año el adolescente utilice su computadora:

(a) menos de 120 horas

(b) entre 50 y 100 horas

(c) Sea la v.a. Y el número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año; se tiene que $Y = 60X^2 + 39X$. Calcule la esperanza de Y. Explique qué propiedad utiliza.

2. Sea la variable aleatoria X: "la demanda anual de Fernet en millones de litros" y su función de distribución de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

(a) Calcular el valor de la constante c.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda sea de entre 0 y un millón de litros?

(c) Calcular $P(X < 0.5 \ \vee \ X > 1.5)$.

(d) Obtener la función de distribución acumulada, $F(x)$.

(e) Calcular las probabilidades de los incisos b y c utilizando $F(x)$.

(f) Hallar la media o valor esperado de X. ¿Coincide con el máximo de $f(x)$ (moda)?

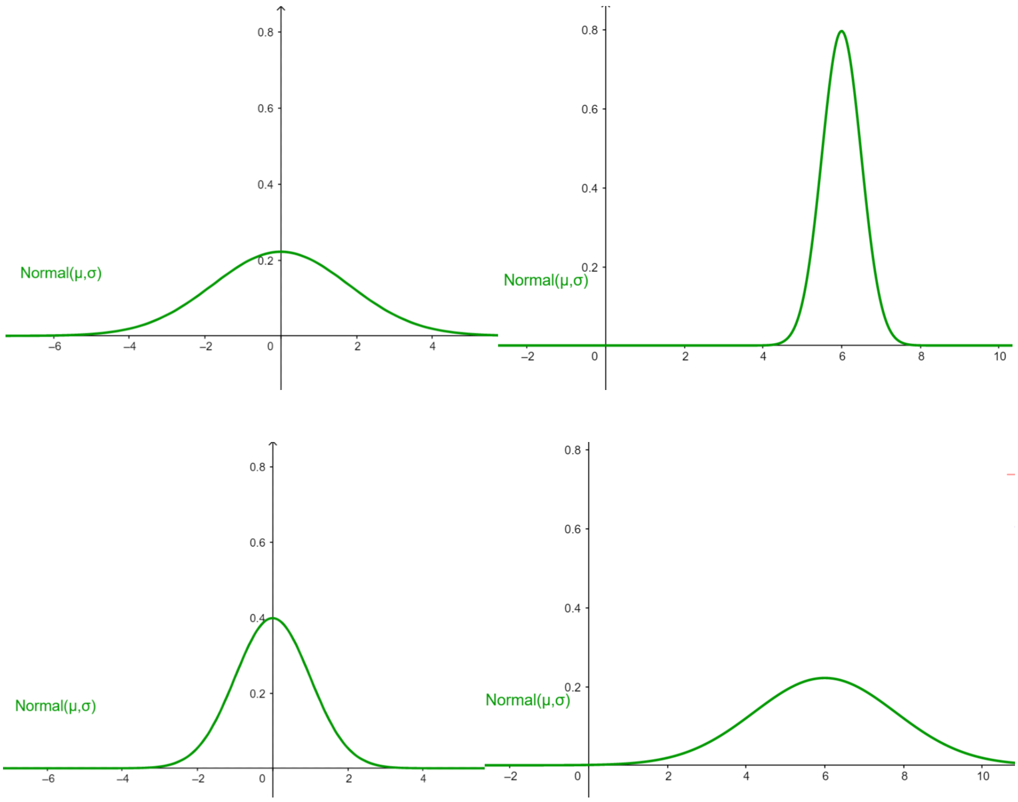
(g) Hallar la varianza y el desvío estándar.

(h) Hallar la mediana.

3. Sea X una v.a. Si $Y = aX + b$ ¿Cuáles serían los valores de a y b para que $\mu_y = 0$ y $\sigma_y^2 = 1$?
Nota: Para estos valores de a y b, a Y se la denomina *variable aleatoria estandarizada correspondiente a X.*

4. Los siguientes gráficos corresponden a distribuciones normales con los siguientes pares de parámetros (μ, σ):

- (0, 1)
- (0, 1.8)
- (6, 0.5)
- (6, 1.6)



Determinar qué par de parámetros corresponde a cada gráfico.

5. La cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto es una v.a. X con distribución uniforme continua en $(7, 10)$. Encuentre la probabilidad de que en un día dado la cantidad de café que sirve esta máquina sea

   (a) a lo sumo 8.8 litros.

   (b) más de 7.4 litros, pero menos de 9.5 litros.

   (c) al menos 8.5 litros.

   (d) Hallar $E(X)$ y $V(X)$.

6. La variable Z tiene distribución normal estándar.

   (a) Calcular las siguientes probabilidades:

      i. $P(Z \leq 2.24)$
      ii. $P(Z > 1.36)$
      iii. $P(0 < Z < 1.5)$
      iv. $P(0.3 < Z < 1.56)$
      v. $P(-0.51 < Z < 1.54)$

   (b) Hallar los valores de z que verifiquen:

      i. $P(Z < z) = 0.8485$
      ii. $P(Z < z) = 0.0054$
      iii. $P(-z < Z < z) = 0.901$
      iv. $P(Z \leq z) = 0.25$
      v. $P(Z \leq z) = 0.5$
      vi. $P(Z \leq z) = 0.75$

      Estos últimos tres valores de z encontrados son los denominados primer, segundo y tercer cuartil respectivamente. Estos pueden ser calculados para cualquier función de distribución de probabilidad conocida.

Nota: Usar la tabla correspondiente a la distribución normal estándar.

7. Si X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros: $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 36$ Calcular:
   (a) $P(X > 6.4)$
   (b) $P(4.2 < X < 16)$
   (c) $P(X \leq 8.14)$

   Ayuda: Para estandarizar la v.a. recordar el ejercicio 10).

8. Si se mide reiteradas veces el diámetro de un cable se obtiene un valor medio 0.8 mm y una varianza de 0.0004 mm^2 (la función de distribución asociada a la variable X es la normal, donde denomino como variable X al valor del diámetro medido):
   (a) ¿Cuál es el valor más probable del diámetro medido?
   (b) Calcule la probabilidad de que la medida sea mayor que 0.81 mm.
   (c) Se considera un cable defectuoso si el valor medido de su diámetro difiere en 0.025 mm o más respecto del valor medio. ¿Cuál es la probabilidad que un cable resulte defectuoso?

9. En la elaboración de un determinado medicamento en forma de comprimido interviene un producto químico cuya cantidad sigue aproximadamente una distribución normal con media 3 g y desviación estándar 0.05 g.
   (a) Calcular la probabilidad de que un comprimido pese más de 3.025 g.
   (b) Un comprimido se considera defectuoso cuando su peso difiere de la media en más de 0.075 g. Calcular la proporción de comprimidos defectuosos que se fabrican.
   (c) Estos comprimidos se envasan en cajas de 10 unidades. Si un envase contiene 2 o más comprimidos defectuosos se elimina del mercado. Determinar el porcentaje de cajas que se retiran del mercado. (*Sugerencia: considere Z: "n° de comprimidos defectuosos en una caja"*)

10. Determinar $E[X]$ y $V[X]$ si X sigue una distribución exponencial.

11. Un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de 3 segundos.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos?
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?

12. El tiempo en horas empleado diariamente en transporte por los trabajadores de una gran ciudad es una v.a. continua con densidad exponencial con media 0.25.
    (a) Calcular la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.
    (b) Si los trabajadores emplean al menos una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?
    (c) Hallar el tiempo mínimo que emplea el 50 % de los trabajadores que más tiempo pierden en transporte.

13. El número de visitas a un sitio web sigue un proceso de Poisson con una razón de 3 por minuto.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita?
    (b) Si transcurren dos minutos sin una visita, ¿cuál es la probabilidad que se dé una visita en el siguiente minuto?

14. Cierto tipo de componente puede ser comprado nuevo o viejo. El 50 % de los componentes nuevos duran más de 5 años, pero solo 30% de los usados duran más de 5 años. ¿Sería posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente?. Explique.

Responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuales son las diferencias principales entre una variable aleatoria discreta y una continua?

- ¿Qué significan el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria?
- ¿Cuándo la media y la mediana de una variable aleatoria son iguales? ¿Qué distribución dada cumple esto?
- El segundo cuartil, calculado en el inciso 6.b.v lo solemos denominar de otra forma también. ¿Cuál es?
- ¿Qué información brinda la tabla de la distribución normal?