Simulacro 1er Parcial

1. Una caja contiene tres monedas: una de ellas es de curso legal (equilibrada), otra tiene dos caras y la restante está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es 2/7. Se selecciona una moneda al azar, se lanza y se observa su resultado.
Para cada uno de los siguientes ıtems, definir los eventos involucrados.

a) Hallar la probabilidad de que salga cara.

M_i evento en que se selecciona la moneda

M1 sería la moneda equilibrada
M2 la moneda que tiene 2 caras
M3 la que tiene 2/7

Como es al azar la probabilidad de elegir cualquier moneda es 1/3
$P(M_i) = \frac{1}{3}$

A ={se observa cara al lanzar la moneda}

La probabilidad que habiendo elegido la moneda 1 salga cara es
$P(A|M_1) = \frac{1}{2}$
La probabilidad que habiendo elegido la moneda 2 salga cara es
$P(A|M_2) = 1$
ya que tiene 2 caras

y la probabilidad que habiendo elegido la moneda 3 salga cara es

$$P(A|M_3) = \frac{2}{7}$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$P(A) = P(A \cap M_1) \cup P(A \cap M_2) \cup P(A \cap M_3)$$

$$P(A) = P(A|M_1) \cdot P(M_1) + P(A|M_2) \cdot P(M_2) + P(A|M_3) \cdot P(M_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{42}$$

b) Sabiendo que salio cara, hallar la probabilidad de que se haya extraído la moneda que hace mas probable que salga ceca.

La moneda 3 es la que tiene más probabilidades de salir seca, lo que me pide es que si salio cara cual es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda 3, utilizando bayes

$$P(M_3|A) = \frac{P(A|M_3) \cdot P(M_3)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{25}{42}} = \frac{4}{25}$$

2. La cantidad de nafta (en miles de litros) vendida por una estaci´on de servicio en cada semana es una variable aleatoria X con función de densidad fX (x) = (k1x2 +k2x)I[0, 1](x)
a) Sabiendo que E(X) = 3/4, hallar k1 y k2

$$\int_0^1 k_1 \cdot x^2 + k_2 x = 1$$
$$\int_0^1 x \cdot (k_1 \cdot x^2 + k_2 x) = \int_0^1 k_1 x^3 + k_2 x^2$$

Resolviendo las integrales queda:
$$\begin{cases} k_1 \frac{1}{3} + k2 \frac{1}{2} = 1 \\ k_1 \frac{1}{4} + k2 \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones queda k1=3 y k2=0

b) Si por cada litro de nafta vendida el comerciante gana $120 y tiene $40.000 de gastos fijos semanales. ¿Cuál es la ganancia semanal esperada?

$$E(W) = E(120.000X - 40.000) = 120.000 \cdot E(X) - 40.000 = 120.000 \cdot \frac{3}{4} - 40.000 = 50.000$$

c)
Escribir la variable aleatoria Wn = ganancia obtenida por el comerciante en n semanas en términos de las ganancias semanales. ¿Cúantas semanas tiene que trabajar el comerciante para que la ganancia esperada sea mayor que $560.000?

Si la ganancia esperada por semana es de $50.000, la variable aleatoria que representa la ganancia obtenida por el comerciante en n semanas sería:

Wn = X1 + X2 + ... + Xn

a esperanza de la variable aleatoria Wn se puede calcular como:

E(Wn) = E(X1 + X2 + ... + Xn) = E(X1) + E(X2) + ... + E(Xn)

Como las variables aleatorias X1, X2, ..., Xn son idénticamente distribuidas, su esperanza es la misma:

E(Wn) = n * E(X)

E(Wn) = n * E(X) > $560.000

E(X) es la ganancia esperada por semana es $50.000.

$$n = \frac{560.000}{50.000} = 11.2$$

Por lo tanto, el comerciante deberá trabajar al menos 12 semanas para que su ganancia esperada sea mayor que $560.000

3. La rana Anastasia duerme todas las noches en un pozo de 1 metro de profundidad. Cada mañana intenta salir fuera del pozo saltando. La altura en metros de cada salto de la rana tiene distribución exponencial de parámetro 2. Si al tercer salto no logra salir, decide quedarse descansando el resto del día en el pozo. Las alturas de los distintos saltos se asumen independientes.

a) Hallar la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria X= número de saltos en un día

A=altura de metros de cada salto
A tiene una distribución exponencial con parámetro 2

X la variable aleatoria que representa el número de saltos de la rana en un día. Sabemos que la rana intenta salir del pozo cada mañana y que si no lo logra en los primeros tres saltos, decide quedarse descansando el resto del día. Por lo tanto, los posibles valores de X son 1, 2 y 3.

Que lo logre en un primer salto es igual a:
$P(X=1) = P(A>1) = e^{-2}$
Que falle el primer salto y lo logre al segundo
$P(X=2) = P(A<1).P(A>1) = e^{-2} = (1-e^{-2}).e^{-2}$
O que haga tres faltos es igual a que falle el primero y el segundo,
$P(X=3) = (1-e^{-2})^2$

P(X1)=0,1353 aprox
P(X2)=0,1171 aprox
P(X3)=0,7476 aprox

Hallar la probabilidad aproximada de que en 60 dıas, Anastasia haya dado ḿas de 150 saltos

Se asume que la cantidad de saltos en 1 días son independientes

E(X)=1*0,1353+2*0,1171+3*,7476=2,6121

V(X)=E(X**2)-E(X)

E(X**2)=1*0,1353+4*0,1171+9*,7476=7,3317

V(X)=7,3317-2,6121**2=0,509

X_i cantidad de saltos en 1 día

cuantos saltos da en 60 días

$$\sum_{i=1}^{60} X_i$$

$$P(\sum_{i=1}^{60} X_i > 150)$$

Si n es lo suficientemente grande entonces por TCL

$$P(\sum_{i=1}^{60} X_i > 150) = P(\frac{\sum_{i=1}^{60} X_i - 60E(X)}{\sqrt{60V(X)}} \geq \frac{150 - 60E(X)}{\sqrt{60V(X)}})$$

P(Z>=-1,217)=0,8882

c) Hallar la probabilidad aproximada de que en 60 dıas, Anastasia haya salido del pozo menos de 20 veces.

preciso una nueva variable aleatoria para la probabilidad de que Anastasia salgo o no del pozo
1 si sale del pozo, 0 si no sale

$$P(Y_i = 0) = (1 - e^{-2})^3$$

$$P(Y_i = 1) = 1 - (1 - e^{-2})^3$$

Yi es una distribución de Bernoulli con $p = 1 - (1 - e^{-2})^3$

E(y)=p=0,3535 aprox
V(y)=p.(1-p)=0,22853

$$P(\sum_{i=1}^{20} X_i < 20) = P(\frac{\sum_{i=1}^{20} Y_i - 60E(Y)}{\sqrt{60V(Y)}} < \frac{20 - 60E(Y)}{\sqrt{60V(Y)}})$$

P(Z<-0,3267)=0.3719