Probabilidad y Estadística

Clase 1

Gonzalo Blanco

2023

1. Introducción

La probabilidad y la estadística están intimamente relacionadas pero se aplican bajo condiciones diferentes. Para entender esto primero definiremos lo que se conoce como **experimento aleatorio**.

Un *experimento aleatorio* es un procedimiento, o valga la redundancia, un experimento en el cual no podemos predecir con exactitud el resultado del mismo pero le conocemos todos los resultados posibles. Es decir, el resultado del experimento está condicionado por una componente aleatoria que no podemos controlar.

Algunos ejemplos típicos de este tipo de experimentos son:

1. *Tirar un dado y ver que número sale en la cara superior.* Puede salir cualquier número del 1 al 6, pero si agarramos el dado y lo lanzamos no podemos predecir que número saldrá al realizar este experimento aleatorio.

2. *Tirar una moneda y ver si sale «cara» o «seca».* Sabemos que existen dos resultados posibles: «cara» o «seca» . Pero no podemos predecir el resultado de tirar la moneda, es decir, de realizar el experimento.

3. *Lanzar una moneda 3 veces y contar el número total de caras obtenidas.* En las tres tiradas de moneda puede salir un total de caras entre 0 y 3, siendo «0» el caso en que tiro la moneda 3 veces y no sale ninguna cara y siendo «3» el resultado obtenido cuando realizo el experimeto y salen 3 caras. Pero nos es imposible predecir cualquier resultado si realizamos el experimento.

Usaremos la letra griega epsilon ε para asociarla a un experimento aleatorio. Un ejemplo de esto sería

ε: *tirar dos dados y registrar la suma de los números que salen.*

Ya estamos en condiciones de ver la diferencia entre *probabilidad* y *estadística*,

- **Probabilidad**: se encarga del estudio de los experimentos aleatorios cuando conozco las condiciones del experimento y trato de determinar la probabilidad de ocurrencia de un resultado en particular. En el ejemplo 1 citado arriba, podría tratar de determinar la probabilidad, o lo que es lo mismo, las «chances» de sacar un número par.

- **Estadística**: realiza un proceso inverso al de probabilidad. Se desconocen los parámetros del experimento y estos se tratan de determinar a partir de una serie de resultados empíricos del mismo. Siguiendo con el ejemplo 1, se podría aplicar la estadística para determinar si un dado está «pesado» o no a partir de realizar el experimento muchas veces y determinar si todos los números tienen la misma probabilidad de salir. Es decir, a partir de un montón de resultados del experimento aleatorio determino los parámetros que lo rigen, que en este caso serían la probabilidad de que salga un 1, la probabilidad de que salga el 2 y así hasta la probabilidad de que salga el número 6.

Por supuesto tambíen existen los "experimentos no aleatorios o deterministas" y son aquellos donde se puede predecir exactamente cual será el resultado del mismo en cada repetición del experimento.
Ejemplo: un circuito electrico simple con una resistencia R. Si realizo el experimento de aplicar al circuito una direfencia de voltaje V, por el mismo circulará una corriente I que viene dada por $I = \frac{V}{R}$. Si yo repito este experimento, es decir, aplico una diferencia de potencial V al circuito, siempre circulará una corriente I determinada por la ecuación escrita arriba. No hay ninguna componente aleatoria en este experimento.

Se define el **espacio muestral** como el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio ε, lo denotaremos con la letra S.
Ejemplos:

1. ε: *tirar un dado y ver que número sale.* Siendo ε el experimento aleatorio.

   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral de ε.

2. ε: *tirar una moneda dos veces y anotar las sucesiones de caras y secas que salen.* Siendo ε el experimento aleatorio.

   $S = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$ el espacio muestral de ε.

El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio ε no es único, dependerá de lo que nos interese observar de ese experimento. Veamos un ejemplo de esto.
Sean $\varepsilon 1$ y $\varepsilon 2$ dos experimentos aleatorios tales que :
$\varepsilon 1$: *tirar una moneda dos veces y anotar la sucesiones de caras y secas que salen*
$\varepsilon 2$: *tirar una moneda dos veces y anotar la cantidad de caras que salen*
Ambos experimentos aleatorios son similares cambia únicamente lo que queremos observar. Veamos los espacios muestrales asociados.
$S1 = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$
$S2 = \{0, 1, 2\}$
Vemos entonces que el espacio muestral queda determinado en función de lo que querramos observar de ε, por eso es muy importante a la hora de definir nuestro experimento aleatorio no solo decir por ejemplo que *tiramos 2 veces una moneda*, sino tambíen que es lo que nos interesa observar o analizar.

Se llama **evento** a todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo:
ε: *tirar un dado y ver que número sale.*
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Definimos un evento $A = \{2, 4, 6\}$ o lo que es lo mismo puedo expresar al evento A como $A = \{x \in S \ / \ x \ es \ par\}$. Vemos que $A \subset S$.

Supongamos entonces que tiro el dado y sale el número 2. Como el $2 \in A$ entonces puedo decir que *ocurre el evento* A. Pero si en vez de un 2 hubiera salido el 5, como el $5 \notin A$ entonces *no ocurre el evento* A.

El *espacio muestral* S es un evento, pués todo evento está incluido en sí mismo, y S es el evento que **siempre ocurre**, ya que cualqueir resultado del experimento va a pertenecer a S.

Las operaciones habituales en conjuntos son aplicables a los eventos, dando como resultado otros eventos. Entonces, veamos algunas propiedades de teoría de conjuntos que nos serán útiles.

Sean A y B dos eventos de un espacio muestral S:

- Unión de eventos

  $A \cup B$ es un evento de S, el cual ocurre si y solo si ocurre A **o** ocurre B.

  $A \cup B = \{x/x \in A \ \vee (o) \ x \in B\}$

- Intersección de eventos

  $A \cap B$ es un evento de S, el cual ocurre si y solo si ocurre A **y** ocurre B.

  $A \cap B = \{x/x \in A \ \wedge (y) \ x \in B\}$

- Complemento de un evento

  A^c es un evento de S, el cual ocurre si y solo si no ocurre A **y** ocurre S.

  $A^c = \{x/x \notin A \ \wedge \ x \in S\}$

- Sustracción de un evento

  $A - B$ es un evento de S, el cual ocurre si y solo si ocurre A **y** no ocurre B.

  $A - B = \{x/x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

  Se puede ver que $A - B = A \cap B^c$.

- Leyes asociativas

  1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Leyes conmutativas

  1. $A \cup B = B \cup A$
  2. $A \cap B = B \cap A$

- Leyes Distributivas

  1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Otras

  1. $A \cap A^c = \phi$

2. $A \cup A^c = S$

- Leyes de Morgan
    1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Sean A y B dos eventos, se dice que son **mutuamente excluyentes** si $A \cap B = \phi$. Esto quiere decir que si *ocurre el evento* $A \Longrightarrow$ *no ocurre el evento* B o viceversa si *ocurre el evento* $B \Longrightarrow$ *no ocurre el evento* A.

Ejemplo:
ε: *lanzar un dado y ver que número sale* .
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$ *o* $A =$ "*números pares*"
$B = \{1, 3, 5\}$ *o* $A =$ "*números impares*"
Como A y B no tienen elementos en común entonces $A \cap B = \phi$, es decir, son eventos mutuamente excluyentes.

2. Probabilidad

Dado un evento A se le quiere asignar un número que indique que tan probable es que ocurra el evento, a ese número lo definimos como la **probabilidad de A** y lo denotamos como *P(A)*.

La probabilidad de A puede determinarse de dos maneras distintas:

1. **A-priori**: cuando el experimento presenta condiciones de simetría de tal forma que de *antemano* o *analizando el experimento* se puede saber las probabilidades de los distintos eventos. Un ejemplo de esto sería *ε: lanzar un dado*, ya que al ser el dado simétrico podemos determinar, sin la necesidad de realizar el experimento, que la probabilidad de sacar un número cualquiera del dado (por ej. el número 5) es de 1 entre 6.

2. **Empírica**: se realiza el experimento muchas veces, N veces, y se registra la cantidad de veces que ocurrió el evento A de interés, N_a. Entonces se puede determinar la probabilidad de A como $P(A) = \frac{N_a}{N}$. Esta es una probabilidad empírica, no es la probabilidad *real* del evento A, ya que depende de la cantidad de veces que realicemos el experimento y de los resultados del mismo. Veamos esto con un ejemplo: supongamos que lanzo un dado 10 veces y me interesa determinar la probabilidad del evento $A=$ *sacar el número 5* (olvidemos por un momento que esta probabilidad se puede determinar a-priori por la simetria del experimento), entonces registro los números obtenidos en esas 10 tiradas del dado y al hacerlo observo que el 5 salió dos veces. Entonces puedo decir que la probabilidad $P(A) = \frac{N_a}{N} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Ahora supongamos que repito nuevamente esto, tiro el dado 10 veces y registro la cantidad de veces que salió el 5 y obtengo

que salió cuatro veces, entonces $P(A) = \frac{N_a}{N} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Vemos que $P(A)$ es distinto en ambos casos. ¿Cuál es el correcto? ¿Puede ser que la probabilidad de sacar un 5 sea siempre distinta?. Lo que sucede aquí es que esta *probabilidad de sacar un 5, P(A)* es lo que se conoce como **frecuencia relativa** de un evento y la denotamos como f_A. Esta frecuencia relativa es empírica y variariá cada vez que la calculemos, pero es una aproximación a la probabilidad real del evento A, $P(A)$.

Observacion: La frecuencia relativa de un evento A, f_A, tiende a la probabilidad real del evento A, $P(A)$, cuando repetimos el experimento muchas veces, es decir cuando N tiende a ∞.

$$\lim_{N\to\infty} f_A = P(A)$$

Lo veremos en detalle más adelante.

2.1. Definición axiomática de probabilidad

Sea ε un experimento aleatorio y S su espacio muestral asociado. Para un evento A cualquiera de S le asociamos un número real, que llamamos probabilidad de A, y denotamos P(A) que satisface las siguienes propiedades o axiomas:

1. $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1 \quad \forall\ \mathrm{A} \in \mathrm{S}$
2. $P(S) = 1$
3. Si A y B dos eventos de S, son mutuamente excluyentes $\Longrightarrow$ $\mathrm{P(A{\cup}B)=P(A)+P(B)}$

2.1.1. Propiedades de la probabilidad

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   $A \cup A^c = S \Longrightarrow$ por definición A y A^c son mutuamente excluyentes

   $\Longrightarrow 1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

   $\Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

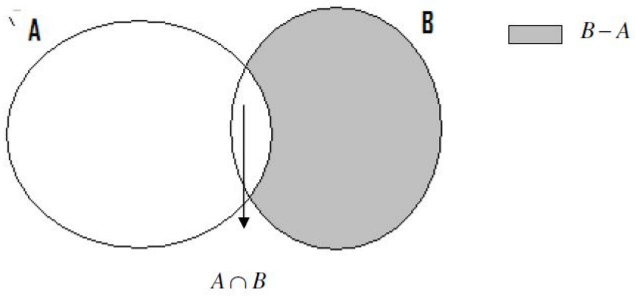
2. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{P(A)} \leq \mathrm{P(B)}$

   $B = A \cup (B \cap A^c)$

   $P(B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c)$

   Pero $P(B \cap A^c) \geq 0 \Longrightarrow P(B) \geq P(A)$

3. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$



Para el caso particular donde A⊂ B $\longrightarrow$ vale que P(B-A)=P(B)-P(A)

De la propiedad 2. $P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$

$\Longrightarrow P(B) - P(A) = P(B \cap A^c)$

Y como $B \cap A^c = B - A$ $\longrightarrow$P(B-A)=P(B)-P(A)

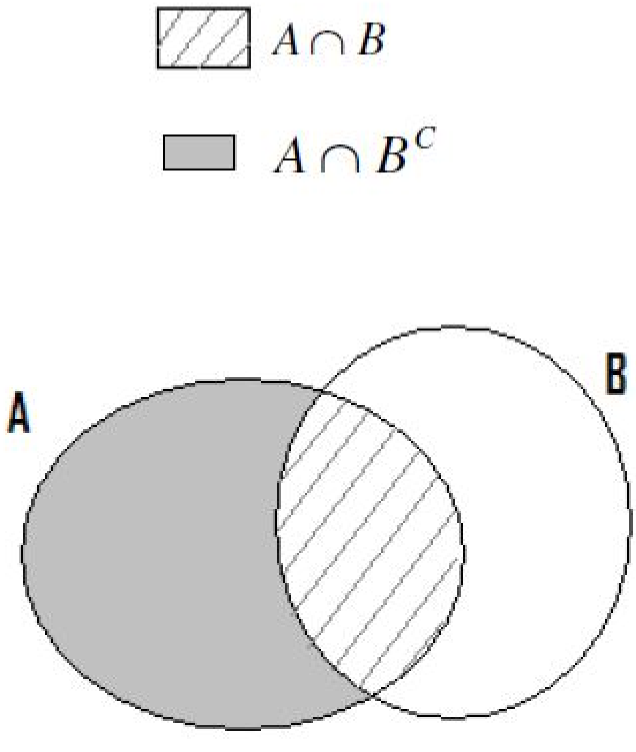
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$

   $\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A^c)) = P(A) + P(B \cap A^c))$, por que A y $B \cap A^c$ son mutuamente excluyentes.

   De la propiedad anterior sabemos que $P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

   $\Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



3. Espacio Muestral

Un espacio muestral S asociado a un experimento aleatorio ε puede ser **finito** o **infinito**.

1. **Finito**: cuando la cantidad de elementos del espacio muestral es un número finito. Ejemplo típico del dado S={1,2,3,4,5,6}

2. **Infinito**: cuando S tiene una cantidad infinita de elementos. Este tipo de espacio muestral se divide en

   a) **infinito numerable**: S tiene un conjunto infinito y numerable de elementos. Ejemplo: ε *lanzar el dado* <u>*hasta*</u> *que salga un 6.* El espacio muestral asociado a ε sera $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6....., 10{,}000, ...{,}1{,}000{,}000, ...\}$ ya que puedo tirar infinitas veces un dado y nunca sacar un 6. Como vemos S tiene infinitos elementos pero puedo enumerarlos a todos.

   b) **infinito no numerable**: Ejemplo: ε *tiempo de vida de una lamparita.*
   $S = \{t \in R \,/\, t \geq 0\}$ siendo t un número real mayor que 0, por lo tanto es imposible enumerar todos los elementos de S.

3.1. Espacio Muestral Finito

Sea ε con su espacio muestral S asociado. Supongamos que S es un conjunto finito con $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ de n elementos. Dado que a cada elemento a_i con $i = 1, 2, 3, .., n$ de S lo puedo considerar como un **evento individual** $\{a_i\}$, entoces a S lo puedo escribir como,

$S = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup ... \cup \{a_n\}$

Como estos eventos individuales son mutuamente excluyentes entre ellos, entonces vale que

$\Longrightarrow P(S) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + ... + P(a_n)$

y por supuesto la suma de la probabilidad de todos los eventos individuales de mi espacio muestral tiene que ser igual a 1 (ver definición axiomática de probabilidad $P(S) = 1$)

$\Longrightarrow P(S) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + ... + P(a_n) = 1$

Supongamos ahora que para cada **evento individual** a_i vale que $P(a_i) = p \quad \forall i$

Es decir, cada evento a_i tiene la misma propbabilidad p de ocurrir.

$\Longrightarrow P(S) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + ... + P(a_n) = p + p + p + ... + p = 1$

Como tenemos n eventos individuales a_i, entonces

$\Longrightarrow P(S) = n.p = 1$

$\Longrightarrow p = 1/n$

Entonces la probabilidad p de que ocurra cualquier evento individual a_i viene dada por $\frac{1}{n}$ o lo ques es lo mismo $\frac{1}{\#S}$. Siendo $\#S$ la cantidad de elementos de S.

Si para un espacio muestral S cada evento individual a_i tiene la misma proabilidad **p** de ocurrir decimos que ese espacio muestral es **equiprobable**, y vale que $p = \frac{1}{\#S}$.

<u>Ejemplo:</u>

Sea el experimento aleatorio, ε: *lanzar un dado y ver que número sale*, y el evento $B = \{1,3\}$ de interés al cual le queremos estimar la probabilidad de ocurrir.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\#S = 6$, cantidad de elementos de S.

Analicemos el espacio muestral S, cada evento independiente a_i tiene la misma probabilidad p de ocurrir,

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} = \frac{1}{\#S} = p$

$\Longrightarrow$ estamos en un espacio **equiprobable**, y por lo tanto vale que

$P(B) = P(\{1,3\}) = P(1) + P(3)$, ya que $\{1\}$ y $\{3\}$ son *mutuamente excluyentes*

$P(B) = P(\{1,3\}) = P(1) + P(3) = p + p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$, por que estamos en un *espacio equiprobable*.

Notar que la cantidad de elementos de $\#B = 2$, entonces podriamos escribir a la probabilidad de B de la siguiente forma $P(B) = \frac{\#B}{\#S}$.

> Es decir, para **espacios equiprobables** la probabilidad de que ocurra un evento B cualquiera se puede calcular a partir de la cantidad de elementos de B y S, de la forma
>
> $$P(B) = \frac{\#B}{\#S}$$

Ejemplo: Dados dos mazos de 40 cartas españolas. Sea el siguiente experimento aleatorio ε: *sacar una carta al* ***azar*** *de cada mazo y registrar el par obtenido.*

¿Cuál es la probabilidad de sacar **al menos** un 1 de espadas?

Primero calculemos nuestro espacio muestral S, el cual vendrá dado por todas las combinaciones posibles entre las cartas del primer mazo y las cartas del segundo. Como el primer mazo tiene 40 cartas y el segundo también, entonces la cantidad de elementos que tiene S es 40x40 = 40^2, ya que a cada carta del primer mazo la puedo "emparejar" con cualquier carta del segundo. Ahora analicemos la pregunta del ejercicio, para eso defino mi evento de interés $A = \{$*(a,b) / a* $\vee$ *b son el 1 de espada*$\}$, siendo a la carta sacada del primer mazo y b la carta del segundo. Entonce queremos calcular P(A). Veamos los casos favorables de A.

$a = 1E \quad b \neq 1E \qquad \#39$, cantidad de casos favorables donde a es el uno de espadas y b es cualquier carta distinta a 1E.

$a \neq 1E \quad b = 1E \qquad \#39$, cantidad de casos favorables donde b es el uno de espadas y a es cualquier carta distinta a 1E.

$a = 1E \quad b = 1E \qquad \#1$, caso donde a y b son el 1E.

Entonces en total $\#A = 79$. Si analizamos un poco el espacio muestral S, podemos ver que todos los elementos de S tienen la misma probabilidad de ocurrir, sacar el par (5oro,6copa) tiene la misma probabilidad que el par (7basto,2espada), por lo tanto S es un espacio muestral **equiprobable**. $\Longrightarrow$P(A) la podemos calcular como

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{79}{1600} = 0{,}049 = 4{,}9\,\%$$

Es decir, el evento A tiene una probabilidad del 4.9 % de ocurrir.

Ejemplo:

Supongamos que se lanza una moneda 3 veces y se registra la sucesión de caras y secas que salen.¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos 2 caras?.

Primero definamos el experimento aleatorio, ε : *lanzar una moneda 3 veces y registrar la sucesión de caras y secas que salen*.

Determinemos el espacio muestral,

$S = \{(s,s,s),(s,s,c),(s,c,s),(c,s,s),(s,c,c),(c,s,c),(c,c,s),(c,c,c)\}$. Siendo c cara y s seca. S tiene 8 elementos ($\#S = 8$)

Puedo definir al evento de interés como $A = \{(c,c,s),(c,s,c),(s,c,c),(c,c,c)\}$, es decir aquellos resultados de mi experimento aleatorio donde al menos salen dos caras. Vemos que $\#A = 4$.

Si analizamos S podemos darnos cuenta que es un espacio equiprobable, ya que la probabilidad de sacar (c,s,c) es la misma que la de (s,s,s) y que la de cualquier otro elemento de S.

$\Longrightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\,\%$