Probabilidad y Estadística

Clase 3

Gonzalo Blanco

2023

1. Variable aleatoria

Habiamos visto que el espacio muestral S de un experimento aleatorio ε no necesariamente tenía que estar conformado por números. Ejemplo: ε : *lanzar una monerda y ver si sale cara o seca*, entonces $S = \{c, s\}$.

Definición: Sea ε un exp. aleatorio y S su espacio muestral. Una **variable aleatoria** es una función que asigna a cada elemento de S un número real.

Observación: a las variables aleatorias las denotaremos con letras mayúsculas X, Y, Z.

Ejemplo:
ε : *tirar una moneda 3 veces y registrar las sucesiones de caras y secas.*
$S = \{(s,s,s),(s,s,c),(s,c,s),(c,s,s),(s,c,c),(c,s,c),(c,c,s),(c,c,c)\}$
Defino ahora la v.a (variable aleatoria) X = " número de caras obtenido en el experimento".
$\Longrightarrow X(c,c,c) = 3$
X(c,c,s)=X(c,s,c)=X(s,c,c)=2
X(s,s,c)=X(s,c,s)=X(c,s,s)=1
X(s,s,s)=0
A la imagen de esta función X la llamamos rango de X y denotamos como R_x.
En este caso $R_x = \{0, 1, 2, 3\}$
$\Longrightarrow R_x$ lo consideramos el nuevo espacio muestral, y sus subconjuntos serán eventos.

Es decir, esta variable aleatoria X me permite transformar mi espacio muestral S en el conjunto R_x cuyos elementos son números.

• Sea X una v.a con rango R_x. Si R_x es un conjunto finito o infinito numerable decimos que X es una **variable aleatoria discreta**. En cambio si R_x es un conjunto infinito no numerable diremos que X es una **variable aleatoria continua**.

1.1. Variable aleatoria discreta

Sea X una v.a discreta con $R_x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. A cada x_i le asignamos un número $p(x_i) = P(X = x_i)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $p(x_i) > 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

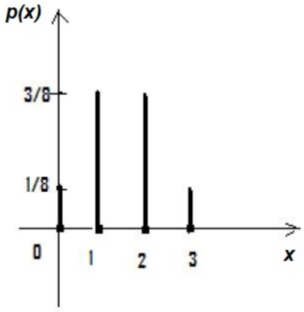
$\Longrightarrow$ la función $p(x)$ se llama **función de probabilidad** y representa la distribución de probabilidad de mi v.a X.

Ejemplo:
Supongamos que estamos en el ejemplo anterior, lanzo una moneda 3 veces y defino la v.a X=" número de caras que salen "$\Longrightarrow R_x = \{0, 1, 2, 3\}$.
$X = 0 = \{s,s,s\} \Longrightarrow P(X = 0) = \frac{1}{8}$
$X = 1 = \{(c,s,s),(s,c,s),(s,s,c)\} \Longrightarrow P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$X = 2 = \{(c,c,s),(c,s,c),(s,c,c)\} \Longrightarrow P(X=2) = \frac{3}{8}$
$X = 3 = \{(c,c,c)\} \Longrightarrow P(X=3) = \frac{1}{8}$
Se puede representar la **función de probabilidad de X**, p(x), como una tabla

x	0	1	2	3
$p(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Otra forma es con un gráfico



Notar que p(x) satisface las dos propiedades que nombramos arriba.

1. $p(x_i) > 0$
2. $\sum_{i=1}^{4} p(x_i) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$

• Sea X una v.a con rango R_x. Se define la **función de probabilidad acumulada** (que abreviamos F.d.a) como

$$F(x) = P(X \leqslant x) \quad , con \; -\infty < x < \infty$$

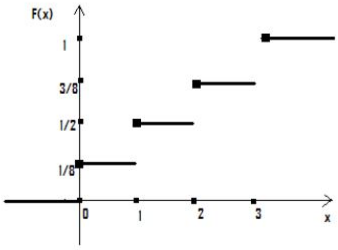
Para el caso de una v.a discrita vale que

$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P(X = x_i)$$

Volviendo al ejemplo anterior

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

y forma gráfica de la F.d.a es



Observación: Para toda variable discreta la f.d.a de X es una **función escalonada** (no es continua), los puntos de "salto" coinciden con los elementos de R_x, y la magnitud en el salto en x_i sera igual a $P(X = x_i)$.

Además si $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ están ordenados de menor a mayor, vale que:

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(x_i)$$

Es decir, se puede obtener la función de probabilidad p(x) a partir de la función de probabilidad acumulada F(x).

Propiedades: Sean a y b dos números cualquiera

1. Si a < b $\Longrightarrow P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a)$.
2. Si a < b $\Longrightarrow F(a) < F(b) \Longrightarrow F(x)$ es una función creciente.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{x_i \leqslant x} P(X = x_i) = \sum\limits_{x_i,\ \forall i} P(X = x_i) = 1$.

1.1.1. Esperanza de una variable aleatoria discreta

Sea X una v.a discreta con rango R_x. **La esperanza, o valor esperado o valor medio de X**, lo denotamos como E[X] y se lo define como

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i)$$

Es la sumatoria de todos los valores posibles de X multiplicados (o pesados) por su respectivo valor de probabilidad P(X=x_i) o $p(x_i)$.

Es lo mismo decir *esperanza de X* o $E[X]$ o μ_x.

Ejemplo:
Sea ε: "*tirar una moneda 3 veces*" y la v.a X:" *número de caras* " con R_x= {0,1,2,3}. Calculemos $E[X]$.
Vemos que $\#R_x$=4, y por el ejemplo anterior sabemos que
$p(0) = 1/8$
$p(1) = 3/8$
$p(2) = 3/8$
$p(3) = 1/8$
$\Longrightarrow E[X] = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = 0 * p(0) + 1 * p(1) + 2 * p(2) + 3 * p(3) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$

El valor medio o valor esperado o esperanza de X es 1.5. Podemos observar que este valor no tiene por que coincidir con alguno de los valores posibles que puede tomar X, R_x ={0,1,2,3}.

Ejemplo: Sea la v.a Y cuyo rango es $R_y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y conocemos su función de probabilidad asociada p(y), dada por
p(0)=0.05
p(1)=0.2
p(2)=0.5
p(3)=0.2
p(4)=0.05
Determinar $E[Y]$.

$\Longrightarrow E[Y] = \sum_{i=1}^{5} y_i * P(Y = y_i) = 0 * p(0) + 1 * p(1) + 2 * p(2) + 3 * p(3) + 4 * p(4) = 2$

• Recordar que siempre vale $\sum_{i=1}^{\infty} P(Y = y_i) = 1$ para toda función de probabilidad.

Teorema: sea X una v.a discreta con rango R_x y función de probabilidad p(x) $\Longrightarrow$ cualquier función $h(x)$ que dependa de una variable aleatoria también será una v.a, es decir a esta función $h(x)$ la podemos considerar como una variable aleatoria Y. Además se puede calcular el valor esperado de $h(x)$ (o Y) como

$$E[Y] = E[h(x)] = \sum_{x_i} h(x_i)p(x_i)$$

Esto no implica que la función de probabilidad de Y sea p(x).

Propiedades: Sean a y b dos constantes que pertenecen a los números reales y X una v.a. Vale que,

1. $E[aX] = aE[X]$
2. $E[b] = b$
3. $E[aX + b] = aE[X] + b$

Demostración 3. :
Sea $h(x) = ax + b$
$E[ax + b] = E[h(x)] = \sum_{x_i} h(x)p(x_i) = \sum_{x_i}(ax_i + b)p(x_i) =$, por el teorema anterior
$= \sum_{x_i} ax_i p(x_i) + \sum_{x_i} bp(x_i) = a \sum_{x_i} x_i p(x_i) + b \sum_{x_i} p(x_i) = aE[X] + b$

• Sea X una v.a con rango R_x y su correspondiente fdp (función de probabilidad) p(x), veamos algunas definiciones:

1. **Moda:** se define la moda de X como el $x_0 \in R_x$ tal que $P(X = x_0)$ es máxima, es decir, el valor de X que tiene más probabilidad de ocurrir.
2. **Mediana**: Si los elementos de R_x están ordenados de menor a mayor o de mayor a menor, entonces la mediana es aquel valor $x_0 \in R_x$ tal que $F(x_0) = 0{,}5$, es decir aquel x_0 tal que la probabilidad de que X tome algún valor menor o mayor a x_0 es del 50 %.

1.1.2. Varianza

Sea X una v.a con rango R_x, fdp p(x) y $\mu_x = E[X]$, se define a la varianza de X como

$$V(X) = E[(X - \mu_x)^2] = \sum_{x_i \in R_x} (x_i - \mu_x)^2 p(x_i)$$

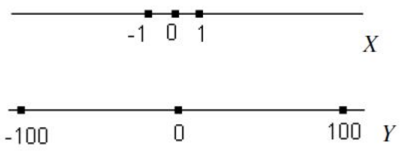
La varianza refleja el grado de dispersión de la v.a X respecto de su valor medio μ_x, es decir si el rango de X o lo que es lo mismo, todos los valores posibles de X, están muy juntos cercanos al valor medio o muy alejados de este.

Ejemplo: sean X e Y dos v.a con p(x) y p(y) sus respectivas fdp.

x	-1	1
$p(x)$	0.5	0.5

y	-100	100
$p(y)$	0.5	0.5

Es fácil verificar que $E[X] = E[Y] = 0$, es decir que ambas v.a tienen el mismo valor medio. Pero los valores que puede tomar Y están más alejados de su media que los valores de X.



Entonces podemos decir que la varianza de Y va a ser mayor que la de X, o que la v.a Y tiene mayor dispersión respecto a su valor medio que la variable aleatoria X.

A la varianza de una v.a X la denotamos como σ_x^2.

En términos cualitativos, una varianza grande equivale a mayor dispersión en el rango de X y una varianza chica equivale a poca dispersión de esos valores.

• Se define al **desvío estándar** como $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$.

Otra forma de escribir la varianza de X

$V(X) = E[(X-\mu_x)^2] = E[X^2 - 2X\mu_x + \mu_x^2] = \sum_{x\in R_x}(x^2 - 2x\mu_x + \mu_x^2) * p(x) = \sum_{x\in R_x} x^2 p(x) - \sum_{x\in R_x}(2x\mu_x) * p(x) + \sum_{x\in R_x}\mu_x^2 * p(x) = E[X^2] - 2\mu_x E[X] + \mu_x^2 = E[X^2] - 2\mu_x^2 + \mu_x^2 = E[X^2] - \mu_x^2$

$$\Longrightarrow V(X) = E[X^2] - \mu_x^2$$

Propiedades: Sean a y b dos números reales

1. $V(aX) = a^2 V(X)$
2. $V(b) = 0$
3. $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Ejemplo:

Entonces dijimos que μ_x o $E[X]$ representa el valor medio de una variable aleatoria o el valor esperado, que no es más que un promedio pesado entre todos los valors posibles que puede tomar mi v.a. También dijimos que la varianza V(X) da información del grado de dispersión o que tanto se aleja de su media o valor esperado los posibles valores de X.

$\Longrightarrow$ vayamos a un caso de estadística aplicada con datos reales y veamos como podemos ir aplicando estos conceptos de probabilidad.

Supongamos que 5 personas distintas midieron el largo de una mesa y se obtuvieron los siguientes resultados L={2.55, 2.53, 2.51, 2.52, 2.49} en metros respectivamente. Me pregunto ¿Cuál es la medida real de la mesa? ¿ Por qué difieren las mediciones?. Definamos nuestro exp. aleatorio, ε:*" medir la mesa"*

Y defino la v.a X: "*largo de la mesa* " con R_x={2.55, 2.53, 2.51, 2.52, 2.49 }, supongamos que estamos en un espacio equiprobable. Entonces $p(x_i) = 1/5$, $\forall$ i.

No puedo saber el largo real de la mesa ya que todos los valores difieren entre si, pero lo puedo aproximar a partir del valor medio o esperado del largo de la mesa, es decir, determinando $E[X]$.

$E[X] = \sum_{x\in R_x} xp(x) = 2{,}55\frac{1}{5} + 2{,}53\frac{1}{5} + ... + 2{,}49\frac{1}{5} = 2{,}52 = \mu_x$, por lo tanto el valor esperado del largo de la mesa, determinado a partir de 5 mediciones es de 2,52 metros.

Ahora si calculo la varianza de X

$V(X) = \sum_{x\in R_x}(x-\mu_x)^2 p(x) = \sum_{x\in R_x}\frac{(x-2{,}52)^2}{5} = 0{,}0004m^2 = 4cm^2$

y el desvió estandar viene dado por $\sigma_x = \sqrt{4cm^2} = 2cm$

Entonces puedo decir que el valor esperado del largo de la mesa es de 2.52 metros con una dispersión de *mas menos* 2 cm, o que es muy probable que el largo real de la mesa tome un valor en el rango $2{,}52 \pm 0{,}02$ metros.

Este es un ejemplo introductorio. Generalmente cuando uno trabaja con datos reales la fórmula utilizada para la varianza difiere de la presentada arriba. Ya veremos este tipo de aplicaciones con más detalle en las clases siguientes.

1.2. Distribución Binomial

Esta distribución de probabilidad la vamos a utilizar cuando nos interese estudiar la cantidad de veces que ocurre un evento A en un experimento aleatorio ε, cuando repitamos este experimento una cantidad n definida de veces.

Ejemplo: Supongamos que el experimento aleatorio sea tirar dos dados y registrar el número resultante de la suma de ambos, y nos interesa determinar la probabilidad de sacar cuatro veces la suma de 7 si repito el exp. aleatorio 6 veces.

Primero acomodemos toda la información que tenemos disponible
ε:"lanzar 2 dados y registrar el número resultante de su suma".
S= " *todos los números posibles de la suma de dos dados*"$=\{2,3,4,5,6,7,8,9,...,12\}$.
A= "*la suma sea 7*"$=\{7\}$.
¿ Cuantas veces voy a repetir ε ? n = 6.
Entonces quiero determinar cual es la probabilidad de que en 4 de esas 6 repeticiones ocurra el evento A, es decir, en 4 tiradas de dos dados la suma de 7.
Veamos como hacemos esto.

Nota: estar atentos a los subíndices, ya que sino se mezclarán los exp. aleatorios ε y ε_0 y se perderán en la explicación.

Sea ε un exp. aleatorio, S su espacio muestral y A un evento de interés de S, tal que P(A)=p. Supongamos ε_0 otro exp. aleatorio que cumple los siguientes requisitos:

1. Sea realizan n repeticiones independientes de ε, con n fijado de antemanos.

   Ejemplo: ε :" tirar un dado ", y ε_0: " tirar el dado 5 veces". Es decir, ε_0 consiste en repetir el exp. aleatorio ε cinco veces.

2. Las repeticiones del experimento son idénticas, y observamos en cada repetición si ocurre o no ocurre el evento A de interés.

   Ejemplo: A:" salga el 5 ", entonces en cada una de las n repeticiones del experimento ε observamos si ocurre o no ocurra A, es decir si sale o no un 5.

3. Necesitamos conocer la probabilidad de éxito de A, que llamaremos P(A), la cual erá constante en cada repeticion de ε.

   Ejemplo: en este caso P(A)=1/6, para cada repetición del experimento ε , es decir, para cada tirada del dado.

$\Longrightarrow$ si esto se cumple entonces decimos que ε_0 es un **experimento aleatoio binomial**.

En los experimentos binomiales nos interesa estudiar la cantidad de veces que ocurre un evento de interés, es decir determinar la probabilidad de que el evento A ocurra k-veces si repetimos el exp. aleatorio n-veces.
• Defino la v.a X:"*número de éxitos de A en n repeticiones de* ε", **a X se la conoce como variable aleatoria binomial**.

Veamos ahora la resolución de un ejemplo junto con una demostración teórico/práctica de la función de distribución Binomial. Nos interesa que entiendan conceptualmente cuando aplicamos esto y por qué.

Ejemplo: Supongamos que se lanza un dado 4 veces, y nos interesa determinar cual es la probabilidad de sacar *k-veces* el número 5 en esas cuatro tiradas de dado. Encontrar una forma general para cualcular esta probabilidad.

Siempre, primero que nada, es conveniente presentar la información disponible.

ε: "*lanzar un dado*".
S={1,2,3,4,5,6}, es un espacio equiprobable ya que cada resultado posible tiene la misma probabilidad de ocurrir, siendo la misma p=1/6.

A= "*sacar un 5*", es el evento de interés.

P(A)=1/6, por que el espacio es equiprobable.

ε_0: " *lanzar un dado 4 veces*" o "*repetir ε cuatro veces*".

Defino la v.a X=" cantidad de veces que ocurre A en ε_0", con $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Defino el evento A_i = "sacar un 5 en la i-ésima tirada del dado", con i=1,2,3,4.

Determinemos ahora las probabilidades que tienen los distintos elementos de R_x,

- Probabilidad de no sacar ningún 5 en las 4 tiradas.

$P(X = 0) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c)$

siendo A_i^c=*no sacar un 5 en la i-ésima tirada del dado*. Como cada tirada del dado es **independiente** de la anterior los eventos A_i^c son **independientes entre ellos**, entonces vale que

$P(X = 0) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c)$

y por definición del complemento de un conjunto $P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(X = 0) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c) = (1-p)(1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)^4 = \big(1 - \frac{1}{6})^4 = \big(\frac{5}{6}\big)^4 = 0{,}482 = 48{,}2\,\%$

- Probabilidad de sacar un 5 en 4 tiradas del dado.

$P(X = 1) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c)$, ¿Esto es correcto?. Si observamos bien, esto solo es la probababilidad de sacar un 5 en la primera tirada del dado y no sacar un 5 en las otras 3, nos falta agregar la probabilidad de sacar un 5 en la segunda tirada y no sacar ninguno en la 1ra,3ra y 4ta, la probabilidad de sacar un 5 en la 3ra tirada y no sacar un 5 en la 1ra,2da y 4ta, y la probabilidad de sacar un 5 en la 4ta tirada y no sacarlo en la 1ra, 2da y 3ra tirada. Entonces agregando estas probabilidades nos queda de la forma

$P(X = 1) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4) = 4p(1-p)^3$

Notar que cada evento A_i o A_j^c para todo $i \neq j$ son independientes entre si (A_i y A_i^c son totalmente dependientes entre ellos ya que si ocurra A entonces si o si no ocurre A^c). Entonces igual que para el caso P(X=0) vale que

$$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c) = p(1-p)(1-p)(1-p) = p(1-p)^3$$

$$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) = P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c)P(A_4^c) = (1-p)p(1-p)(1-p) = p(1-p)^3$$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3)P(A_4^c) = (1-p)(1-p)p(1-p) = p(1-p)^3$$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4) = (1-p)(1-p)(1-p)p = p(1-p)^3$$

Entonces $P(X = 1) = 4p(1-p)^3 = \binom{4}{1}\, p(1-p)^3 = 4\frac{1}{6}\,\big(\frac{5}{6}\big)^3 = 0{,}386 = 38{,}6\,\%$

Recordar que $\binom{4}{1}$ es la combinatoria de *4 tomados de a 1.*

- Probabilidad de sacar dos veces el 5 en 4 tiradas del dado.

Si repetimos el mismo proceso de arriba, calculando la probabilidad para todas las combinaciones posibles, llegamos a

$P(X = 2) = \binom{4}{2}\, p^2(1-p)^2 = 0{,}116 = 11{,}6\,\%$

- Si hacemos los mismo para P(X=3) y P(X=4) llegamos a

$P(X = 3) = \binom{4}{3}\, p^3(1-p)^1 = 0{,}15 = 1{,}5$

$P(X = 4) = \binom{4}{4}\, p^4(1-p)^0 = 0{,}001 = 0{,}01$

Si ahora generalizo esto para n repeticiones de ε y k éxitos del evento A, llegamos a

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\, p^k(1-p)^{n-k}$$

Esto es lo que se conoce como Distribución binomial de la v.a X con parámetros n y p, siendo n el número de veces que realizo ε y p la probabilidad de ocurrencia del evento de interés en cada repetición de ε. La denotamos como $B(n, p)$.

• Entonces, si X es una v.a que sigue una dist. binomial B(n,p) entonces P(X=k) representa la probabilidad de que el evento A de interés ocurra k veces en esas n repeticiones de ε.

Ejemplo: Sea el exp. aleatrio ε_0 : "tirar un dado 5 veces".
¿ Cuál es la probabilidad de sacar exactamente tres veces 4 ?

Defino la v.a X: " *cantidad de veces que sale el 4 en* ε_0 ", con $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Defino el exp. aleatorio ε: "tirar el dado".
Y el evento A asociado a ε, A="sacar un 4" con P(A)=1/6.
Entonces ε_0 es un exp. aleatorio binominal ya que realizo el experimento ε cinco veces y en cada repetición observo la ocurrencia o no del evento de interés A, cuya probabilidad de ocurrencia es P(A).
Puedo decir entonces que la fdp de X es B(5,1/6). Quiero determinar P(X=3)

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-3} = 0,032 = 3,2\,\%$$

La probabilidad de sacar tres 4 si tiro un dado cinco veces es de 3,2 %.

Ejemplo: Si tiro una moneda 4 veces. ¿ Cuál es la probabilidad de sacar,

a. exactamente 1 vez cara?.

b. al menos 2 veces cara?.

Defino ε_0 :"tirar 4 veces una moneda" y la v.a X=" *cantidad de veces que sale cara en* ε_0 " con $R_x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Para cada tirada de moneda me interesa estudiar el evento A=" sale cara ". Cuya probabilidad de ocurrir en cada tirada es del 50 % o P(A)=0,5.
Igual que en el ejemplo anterior ε_0 sigue una dist. binomincal B(4,0.5), y quiero determinar en

a. $P(X=1) = \binom{4}{1} 0{,}5^1(1-0{,}5)^{4-1} = 0{,}25$

b. $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \binom{4}{2} 0{,}5^2(1-0{,}5)^{4-2} + \binom{4}{3} 0{,}5^3(1-0{,}5)^{4-3} + \binom{4}{4} 0{,}5^4(1-0{,}5)^{4-4} = 0,687$

Propiedades

Sea X una v.a que sigue una función de probabilidad B(n,p)

1. $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = 1$

2. $E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = 1 = n * p$

3. $V[X] = E[X^2] - \mu_x^2 = E[X^2] - (n*p)^2 = np(1-p)$

Nota: estas propiedades se pueden demostrar matematicamente, no lo haremos en este curso.

1.3. Distribución de Poisson

Sea X una v.a con rango $R_x = \{0, 1, 2, ...\}$ se dice que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ, si para $\lambda > 0$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad con\ k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Esta distribución es un caso particular de la distribución binomial cuando n es muy grande y p muy chico, entonces vale que $n * p \longrightarrow \lambda$. Veamos esta demostración.

Partimos de suponer que X sigue una B(n,p),

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} =$

como vale que $n * p \approx \lambda \Longrightarrow p \approx \frac{\lambda}{n}$

$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$

$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$

Ahora si miramos cada término por separado, para n grande y p chico vale que,

$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \approx 1$

$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$

$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \approx 1$

$$\Longrightarrow P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Se puede ver que $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$, sabiendo que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$

Ejemplo:

Un aparato electrónico está formado por 500 circuitos independientes. La probabilidad de que uno de esos circuitos falle es de 0,001.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen 4 circuitos?

Definimos la v.a aleatoria X:" n° de circuitos que fallan". Podemos asumir que X sigue una dist. binomial con parámetros n=500 y p=0.001. Entonces $P(X = 4) = \binom{500}{4} 0,001^4(1-0,001)^{496} = 0,0156 \approx 0,156\,\%$

Ahora si nos fijamos bien estamos en el caso en que n es muy grande y p muy chico , entonces podriamos aplicar la dist. de Poisson con $\lambda = n * p = 500 * 0{,}001 = 0{,}5$

$P(X = 4) = \frac{e^{-0,5}0,5^4}{4!} = 0,0016 \approx 0,16\,\%$

Da un resultado muy similar al que obtuvimos aplicando la distribución binomial y nos ahorramos un montón de complicaciones con las cuentas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen más de 3 circuitos?

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$

Esto lo podemos resolver a mano o podemos usar las tablas de distribución de probabilidad (ver en la práctica).

• Una aplicación importante de esta distribución se presenta cuando tenemos información de un evento de interés en un periodo de tiempo, miremos un ejemplo.

Supongamos que en el noticiero informan que mañana a partir de las 21:00 hs habrá una lluvia de estrellas fugaces durante toda la noche, y se espera que se observen 10 estrellas fugaces por hora. Además, gracias a un estudio realizado por astrónomos, nos informan que la cantidad de estrellas fugaces que van a aparecer en el cielo lo harán siguiendo una distribución de Poisson.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ver exactamente 8 estrellas fugaces en 1 hora?

Defino a X:"cantidad de estrellas fugaces que aparecen en un tiempo t".
Se que X sigue una distribución de poisson con parámetro $\lambda = n * p = 10t$, con t en horas.
A λ se lo conoce como tasa o rapidez del proceso de Poisson.

$P(X=8) = \frac{e^{-10t}(10t)^8}{8!}$ $\quad con\ t = 1\ hora$, ya que nos interesa estudiar la aparición de estrellas fugaces en un periodo de tiempo de una hora.
$P(X=8) = \frac{e^{-10*1}(10*1)^8}{8!} = 0,11$
Entonces la probabilidad de ver exactamente 8 estrellas fugaces en una hora es del 11 %

Esto también se podría resolver con las tablas de distribución acumulada ya que $P(X=8) = P(X \leqslant 8) - P(X \leqslant 7)$.

b)¿Cuál es la probabilidad de ver 10 estrellas fugaces en 2 horas?

t=2 horas $\Longrightarrow \lambda = 10t = 20$

$P(X=10) = \frac{e^{-20}(20)^{10}}{10!} = 0,06$
La probabilidad de ver exactamente 10 estrellas fugaces en dos horas es del 6 %.

• Veamos ahora cual es el valor esperado y la varianza de una v.a que sigue una distribución de Poisson.
$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, ya que en k=0 la sumatoria se anula
$\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

$$\Longrightarrow E[X] = \lambda$$

Lo cual tiene sentido ya que $\lambda = n * p$ es el valor esperado de una v.a que sigue una dist. binomial, y la dist. de Poisson es un caso particular de la Binomial.

$V[X] = E[X^2] - \mu_x^2 = E[X^2] - \lambda^2$

Calculemos $E[X^2]$
$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$
$\Longrightarrow E[X^2] = \lambda^2 + \lambda$

$$\Longrightarrow V[X] = E[X^2] - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$