7. Variables aleatorias

1. Considere lanzar dos monedas. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de águilas que aparecen. Calcula la probabilidad de $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$

$\Omega = \{$(águila, águila), (águila, sol), (sol, sol)$\}$

Definimos la variable aleatoria $\bar{X}$ como:

$\bar{X}$ (águila, águila) = 2
$\bar{X}$ (águila, sol) = 1
$\bar{X}$ (sol, sol) = 0

Dado que el resultado de una moneda es independiente del resultado de la otra, se tiene: $P(\bar{X}=2) = 1/4$ $P(\bar{X}=0) = 1/4$
$P(\bar{X}=1) = 1/2$

2. Considérese el sorteo de Melate (elegir una combinación de seis números diferentes entre el 1 y 56. Sin orden y sin reemplazo). "simplificado" con una bolsa acumulada de N y la variable aleatoria de X que toma dos valores:

N si elige la combinación ganadora
0 en cualquier otro caso.

¿Cuál es la distribución de probabilidad de X?

$$\Omega = \{(1,2,3,4,5,6) \ldots,\ldots (51,52,53,54,55,56)\}$$

es importante conocer cuántos elementos tiene Ω

como el ejercicio señala que se eligen 6 números de 56 sin orden y sin reemplazo, esto es equivalente a ${}_{56}C_6$ que se lee como combinaciones de 56 en 6 y se calcula en general como:

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Para nuestro caso es:

$$_{56}C_6 = \binom{56}{6} = \frac{56!}{6!(56-6)!}$$

$$= \frac{56!}{6!\,50!}$$

= "un número muy grande"

Definimos la variable aleatoria $\underline{X}$ como:

$$\underline{X}(\text{"la combinación ganadora"}) = N$$

$$\underline{X}(\text{"otra combinación que no sea ganadora"}) = 0$$

Así, la distribución de probabilidad de $\underline{X}$ es:

$$\begin{cases} P(\underline{X} = N) = \dfrac{1}{_{56}C_6} \\ \\ P(\underline{X} = 0) = 1 - \dfrac{1}{_{56}C_6} \end{cases}$$

3. Calcular el valor esperado de los ejemplos 1) y 3) de la sección "Distribución de probabilidad de una variable aleatoria" y responder: ¿Si nos ofrecieran jugar uno de estos dos juegos cuál elegiríamos? Nótese que ninguno de los premios o pérdidas es igual al valor esperado, éste simplemente nos da una idea del promedio de los premios y pérdidas que resultarían si el juego se repitiese un gran número de veces.

(1.) $X(A) = 100$ ganancia
$X(S) = -60$ pérdida

La distribución de probabilidad de f es:

$f(100) = P(X=100) = P(\{A\}) = 0.5$

$f(-60) = P(X=-60) = P(S) = 0.5$

$\mu_X = E(X) = 100(0.5) + (-60)(0.5) = 20.$

(3) Urna con 10 canicas rojas, 2 amarillas y 3 azules.
Se nos ofrecen los sgts premios:

$y(\{roja\}) = -100$

$y(\{azul\}) = 150 = y(\{amarilla\})$

La distribución de la probabilidad de f es:

$f(-100) = P(y=-100) = P(\{roja\}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0.\overline{66}$

$f(150) = P(y=150) = P(\{azul\} \cup \{amarilla\}) = \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3} = 0.\overline{33}$

El valor esperado de y es:

$\mu_y = -100(0.\overline{66}) + 150(0.\overline{33}) = -16.667$

Scanned with CamScanner

4. Los juegos de azar en los casinos pueden representarse por medio de variables aleatorias. Consideremos una versión simplificada de una máquina de polanca: existen dos figuras, digamos un cuadrado y un triángulo, que pueden aparecer en tres columnas de una cinta circular. El jugador baja la polanca, las cintas giran y al detenerse cada columna muestra un cuadrado o un triángulo. Las 8 probabilidades equiprobables son:

$$\Omega = \{(\square\ \square\ \square),\ (\square\ \square\ \triangle),\ (\square\ \triangle\ \square),\ (\square\ \triangle\ \triangle),\ (\triangle\ \square\ \square),\ (\triangle\ \square\ \triangle),\ (\triangle\ \square\ \triangle),\ (\triangle\ \triangle\ \triangle)\}$$

Supongamos que para jugar se introduce una ficha de \$300 y los premios asociados son \$500 si salen tres figuras iguales y \$0 de cualquier forma. Se X la variable aleatoria que mide la ganancia o pérdida de jugar en la máquina. Calcular E(X).

$$\Omega = \{(\square\square\square), \ldots (\triangle\triangle\triangle)\}$$

→ El enunciado señala que cada elemento de Ω es equiprobable. La variable aleatoria de interés es:

$$\left.\begin{aligned} X(\square\square\square) &= 500 - 300 = 200 \\ X(\triangle\triangle\triangle) &= 500 - 300 = 200 \end{aligned}\right\} P(X = 200) = 2/8$$

$$X(\text{otro caso}) = -300 \quad \} \quad P(X = -300) = 6/8$$

→ Así, el valor esperado es:

$$E[X] = [P(X = 200)][200] + [P(X = -300)][-300]$$

$$= \frac{2}{8}(200) - \frac{6}{8}(300)$$

$$= \frac{-1400}{8}$$

$$= -175$$