Departamento de Ciência de Computadores FCUP

Modelos de Computação CC1004 2020/2021

Folha Prática 10

1. Justifique a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, **onde** L_1 **e** L_2 **são linguagens independentes de contexto**, sobre o mesmo alfabeto Σ, com $|\Sigma| \geq 2$.

a) L_1L_2 é independente de contexto, quaisquer que sejam L_1 e L_2.

b) Existem linguagens L_1 e L_2 tais que $L_1 \cap L_2$ não é independente de contexto.

c) $L_1 \cap L_2$ não é independente de contexto, quaisquer que sejam L_1 e L_2.

d) $\overline{L_1}$ é independente de contexto, qualquer que seja L_1.

e) $L_1^\star \cup L_2$ é independente de contexto, quaisquer que sejam L_1 e L_2.

2. Justifique a veracidade ou falsidade de cada uma das seguintes afirmações:

a) A linguagem $\{x \mid x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^\star$ tem mais 0's do que 1's$\}$ é independente de contexto.

b) O complementar de uma linguagem regular é uma linguagem independente de contexto.

c) A linguagem $\{(\mathtt{ab})^n(\mathtt{cd})^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$ de alfabeto $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}$ não é independente de contexto.

d) Se L é uma LIC que não é regular, o seu complementar $\Sigma^\star \setminus L$ não é independente de contexto.

e) Se L e o seu complementar $\Sigma^\star \setminus L$ são LICs, então ambas são linguagens regulares.

f) Qualquer linguagem regular pode ser reconhecida por um autómato de pilha com apenas dois estados.

Sobre Máquinas de Turing

3. Defina uma máquina de Turing que reconheça a linguagem indicada em cada alínea ($\Sigma = \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}$).

a) $L_1 = \{y\mathtt{2}y \mid y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^\star \text{ e } |y| \geq 1\}$

b) $L_2 = \{\mathtt{000}(\mathtt{10})^{2n} \mid n > 0\}$

c) $L_3 = \{\mathtt{22}^m w\mathtt{2}w^R \mid w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^\star \text{ e } m \geq 0\}$

d) $L_4 = \{x\mathtt{22}y \mid x, y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{1}\} \text{ e } |x| > |y|\}$

e) $L_5 = \{x \mid x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}^\star$ e x tem igual número de 0's, 1's e 2's$\}$

4. Defina uma máquina de Turing para resolução do problema indicado em cada alínea

a) Dado um inteiro não negativo n, representado em binário, a máquina calcula o quociente e o resto da divisão desse inteiro por 2. Deixa na fita Q, seguido do quociente (em binário), seguido de R e depois do resto. A cabeça fica posicionada na célula que tem Q. A máquina deve eliminar 0's não significativos, se houver.

Por exemplo, $\cdots \bullet$ 101101 $\bullet \bullet \cdots$ deveria ser transformado em $\cdots \bullet$ Q10110R1 $\bullet \bullet \cdots$.

E, $\cdots \bullet$ 000010110100 $\bullet \bullet \cdots$ deveria ficar $\cdots \bullet$ Q1011010R0 $\bullet \bullet \cdots$.

No ínicio, a cabeça de leitura indica o dígito mais significativo.

b) Dados dois inteiros n e m representados em unário (isto é, por n 1's e m 1's e separados por 0, deixa na fita o máximo dos dois valores.

Por exemplo, $\cdots \bullet \texttt{11111011} \bullet \bullet \cdots$ deveria ser transformado em $\cdots \bullet \texttt{11111} \bullet \bullet \cdots$. E, $\cdots \bullet \texttt{11011} \bullet \bullet \cdots$ deveria ficar $\cdots \bullet \texttt{11} \bullet \bullet \cdots$.

c) Dados dois inteiros não negativos n e m representados em binário, deixa na fita a soma dos dois valores. No início estão separados por $+$.

Por exemplo, $\cdots \bullet \texttt{11101} + \texttt{1011} \bullet \bullet \cdots$ deveria ser transformado em $\cdots \bullet \texttt{101000} \bullet \bullet \cdots$.

Lema da Repetição para LICs

- **Lema da Repetição para linguagens independentes de contexto:** Seja L uma linguagem independente de contexto, com alfabeto Σ. Então, existe um inteiro positivo n tal que, qualquer que seja $z \in L$ com $|z| \geq n$, existem $u, v, w, x, y \in \Sigma^\star$ tais que $z = uvwxy$, $|vwx| \leq n$, $vx \neq \varepsilon$ e, para todo $i \geq 0$, tem-se $uv^iwx^iy \in L$.

  Pode-se mostrar que basta tomar $n = 2^k$, onde k é o número de variáveis de uma qualquer gramática na forma normal de Chomsky (estendida) que gere L.

- Se L não satisfizer a condição do lema da repetição para LICs, para nenhum $n > 0$, então L não é uma LIC. Usando o lema, podemos provar que, por exemplo, a linguagem $\{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, de alfabeto $\{a, b, c\}$, não é LIC, bem como as linguagens $\{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{a^p \mid p \text{ primo}\}$.

- Não satisfazer a condição quer dizer que para **todo** $n > 0$, existe $z \in L$ com $|z| \geq n$ tal que, para **todas** as decomposições de z na forma $z = uvwxy$, com $|vwx| \leq n$ e $vx \neq \varepsilon$, se tem $uv^iwx^iy \notin L$, para **algum** $i \geq 0$.

---

5. Sejam $L = \{2^m w 2 w \mid w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^\star, m \geq 1\}$ e $M = L \cup \mathcal{L}((\texttt{0}+\texttt{1})^\star \texttt{2}^\star (\texttt{0}+\texttt{1})^\star)$ linguagens de alfabeto $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}\}$.

a) [*] Por aplicação do Lema de Repetição para LICs, prove que L não é LIC. **Sugestão:** pode usar $z = \texttt{200}^n\texttt{11}^n\texttt{200}^n\texttt{11}^n$

b) [*] Mostre que M satisfaz a condição do Lema da Repetição para linguagens independentes de contexto, para $n = 1$ (embora seja conhecido que M não é independente de contexto).

[*] Para concluir que M não é LIC, podemos usar redução ao absurdo, considerando **5a)** e o resultado enunciado no exercício **6a)**.

c) Defina uma máquina de Turing que reconheça L. A máquina não deve repor o estado inicial da fita depois da análise da palavra dada. Indique o significado dos estados.

6. Demonstre os resultados seguintes, usando o facto de a classe de linguagens independentes de contexto ser a classe de linguagens reconhecidas por autómatos de pilha.

a) [**] A interseção de uma linguagem independente de contexto com uma linguagem regular é independente de contexto. **Sugestão:** Tentar seguir uma ideia análoga à da construção do autómato (finito) produto.

b) [**] Qualquer linguagem que seja reconhecida por um autómato de pilha determinístico é não ambígua.

Sugestão: Pode ser útil rever o algoritmo de conversão de autómatos de pilha para GICs.

7. Considere a gramática $\mathcal{G} = (\{S\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \{S \to \mathtt{10},\ S \to \mathtt{0}S\mathtt{11}\}, S)$. Recorde que quaisquer que sejam $k \geq 2$ e $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, S\}^\star$ tem-se $S \Rightarrow_\mathcal{G}^k x$ se e só se existe $y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, S\}^\star$ tal que $S \Rightarrow_\mathcal{G}^{k-1} y$ e $y \Rightarrow_\mathcal{G} x$, onde $\Rightarrow_\mathcal{G}$ é a relação de derivação num passo em $\mathcal{G}$.

a) Complete a afirmação seguinte, e demonstre-a: *"quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, S\}^\star$ tem-se $S \Rightarrow_\mathcal{G}^n w$ se e só se w é da forma …… "*.

b) Diga, justificando, qual é a linguagem gerada pela gramática $\mathcal{G}$.

c) Partindo da descrição indicada em **b)**, determine um autómato de pilha que reconheça L por pilha vazia.

d) [*] Partindo de $\mathcal{G}$, usando métodos de conversão, construa um autómato de pilha que aceite $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ por pilha vazia e, a partir desse autómato, determine um outro equivalente com aceitação por estados finais.

8. Sejam L_1 e L_2 linguagens de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ tais que L_1 é descrita pela expressão regular $(\mathtt{1}+\mathtt{001})^\star$ e $L_2 = \{x \mid x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star$ e x tem dois ou mais $\mathtt{1}$'s$\}$.

a) Justifique que a descrição de L_1 como sendo *o conjunto das palavras em $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star$ que não têm mais do que dois $\mathtt{0}$'s consecutivos* está errada. Corrija essa descrição de forma a ter uma descrição informal correta.

b) Apresente o diagrama de transição de um AFD que reconheça $L_1 \cap L_2$ e explique sucintamente o objetivo (e, preferencialmente, também a necessidade) de cada mudança de estado desse autómato.

c) Descreva $L_1 \cap L_2$ por uma expressão regular.

d) Dê exemplo de GICs G_1, G_2 e G_3 tais que $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$, $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$ e $\mathcal{L}(G_3) = L_1 \cup L_2$. Justifique a importância da observação: "não se esqueça de indicar qual é o símbolo inicial de cada gramática".

e) Diga, justificando, se alguma das gramáticas que definiu em **d)** é ambígua e, caso seja, apresente uma outra não ambígua equivalente.

9. Considere as afirmações seguintes sobre linguagens de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ e averigue a sua a veracidade ou falsidade, **justificando**.

a) Existe L tal que L não é independente de contexto e $\Sigma^\star \setminus L$ é regular.

b) Existe L tal que L é independente de contexto e L não é regular.

c) Existe L tal que L é regular e $(LL) \cap (\Sigma^\star \setminus L)$ não é aceite por um autómato finito determinístico.

d) Existe L regular tal que o AFD minímo que reconhece L tem exatamente quatro estados finais.

e) A linguagem $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j(\mathtt{ab})^k \mid i, j, k \geq 0, i = j\} \cap \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j(\mathtt{ab})^k \mid i, j, k \geq 0, k = j\}$ pode ser aceite por um autómato de pilha.

10. Considere a gramática $G = (\{S, T, N, E\}, \Sigma, P, S)$ com $\Sigma = \{\,\mathtt{1}, \mathtt{-}, \mathtt{)}\,, \mathtt{(}, =, +\,\}$ e P dado por:

$$S \to E{=}E \mid E{=}S \qquad\qquad E \to T \mid E{+}T \mid E{-}T$$
$$T \to \mathtt{(}E\mathtt{)} \mid N \qquad\qquad N \to \mathtt{1} \mid \mathtt{1}N$$

a) Apresente uma árvore de derivação para a palavra $\mathtt{11}{+}(\mathtt{1}{+}\mathtt{1}){=}(\mathtt{1}{-}\mathtt{1}){-}\mathtt{1}$ de $\mathcal{L}(G)$ e ainda duas derivações distintas que correspondam a essa árvore. Diga, justificando, porque é que tal não implica que G seja ambígua.

b) Prove que a linguagem $\mathcal{L}(G)$ não é regular.

c) Determine uma gramática G' que seja equivalente a G e esteja na forma normal de Chomsky. Por aplicação do algoritmo CYK, mostre que $\mathtt{1}{=}\mathtt{1}{+}\mathtt{1}$ pertence a $\mathcal{L}(G')$ e que $\mathtt{1}{=}\mathtt{1}{+}$ não pertence a $\mathcal{L}(G')$. Use o facto de a segunda palavra ser igual à primeira sem o $\mathtt{1}$ final.

d) [*] Seja M a linguagem das palavras de $\mathcal{L}(G)$ que são da forma $x{=}y{=}z$, com $x \in \{\mathtt{1}, +\}^\star$, $y \in \{\mathtt{1}\}^\star$, $z \in \{\mathtt{1}, +\}^\star$, e em que o numero de $\mathtt{1}$'s em y é igual ao número de $\mathtt{1}$'s em x e também em z. Defina uma máquina de Turing que reconheça M, sem repor o estado inicial da fita. Indique o significado dos estados.

e) [**] Prove que a gramática $G_1 = (\{T, N, E\}, \Sigma, P_1, E)$ não é ambígua, sendo P_1 constituído pelas produções de G para E, T e N. Conclua que G não é ambígua.

Sugestão: Por indução (forte) sobre o número de operadores e/ou parentesis nas palavras, justifique que tem uma única árvore de derivação para cada palavra.

11. Determine uma GIC **não ambígua** para cada uma das linguagens seguintes, com $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, usando o facto de qualquer LIC poder ser reconhecida por um autómato de pilha, por pilha vazia:

a) A linguagem das palavras que têm igual número de a's e b's.

b) [*] A linguagem das palavras cujo número de a's é superior ao dobro dos b's.