Cálculo I (M1001)

Lic:CC e MI:ERS, 1º ano

Exercícios*

Ano letivo de 2020/2021

1 Funções e modelos

1.1 Modos de representar uma função

1.1.1. Se se tiver $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ e $g(u) = u + \sqrt{2-u}$, é verdade que $f = g$?

1.1.2. Se se tiver $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ e $g(u) = u$, é verdade que $f = g$?

1.1.3. Esboce um gráfico que exprima o número de horas de luz solar em função do dia do ano.

1.1.4. Seja $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
Encontre $f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(a+1), 2f(a), f(2a), f(a^2), (f(a))^2$, e $f(a+h)$.

1.1.5. Encontre o domínio e esboce o gráfico da função: $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

1.1.6. Considere a função definida por ramos: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$.
Avalie f em -3, em 0 e em 2. Faça um esboço do gráfico de f.

1.1.7. Considere a função definida por ramos: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 7-2x & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$.
Avalie f em -3, em 0 e em 2. Faça um esboço do gráfico de f.

1.1.8. Esboce os gráficos das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = |x+2|$.

1.1.9. Um retângulo tem $16\,m^2$ de área. Exprima o perimetro desse retângulo como função do comprimento de um dos seus lados.

1.1.10. Exprima a área de um triângulo equilátero como função do comprimento de um lado.

1.1.11. Para cada uma das funções seguintes, diga se é uma função par, se é ímpar ou se não é par nem ímpar. (Verifique visualmente o resultado usando o *sage* para obter esboços dos gráficos.)
(a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; (b) $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$; (c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

---

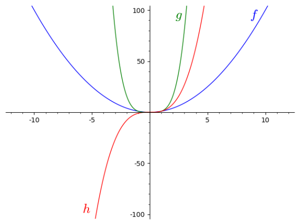
*Os exercícios são, na sua maioria, retirados do livro:
James Stewart, "Calculus, early transcendentals", 8ª edição, 2017

1.2 Modelos Matemáticos (e algumas funções essenciais)

1.2.1. Classifique cada uma das seguintes funções como uma função potência, uma função raiz, uma função polinomial (indicando o seu grau), uma função racional, uma função algébrica, uma função trigonométrica, uma função exponencial ou uma função logarítmica.
(a) $f(x) = \log_2(x)$; (b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; (c) $f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$; (d) $f(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$; (e) $f(x) = 5^x$; (f) $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)cos^2(\theta)$; (g) $f(x) = \pi^x$; (h) $f(x) = x^\pi$; (i) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1.2.2.

Diga a que função cujo gráfico está representado na figura ao lado corresponde cada uma das equações seguintes. (a) $y = x^2$; (b) $y = x^3$; (c) $y = x^4$.



1.2.3. Indique o domínio de cada uma das seguintes funções:
(a) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$; (b) $g(x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg} x}$.

1.2.4. O gerente de um mercado de fim de semana sabe, pela experiência acumulada, que se subir x € o aluguer de um espaço, então o número de espaços que consegue alugar é dado pela equação $y = 200 - 4x$.

(a) Esboce o gráfico desta função linear. (Note que o valor do aluguer é não negativo.)

(b) Que representam o declive, a interseção com o eixo dos y e a interseção com o eixo dos x?

1.3 Novas funções a partir de antigas

1.3.1. Esboce à mão gráficos das funções seguintes. Faça-o partindo de gráficos conhecidos.
(a) $y = -x^2$; (b) $y = (x-3)^2$; (c) $y = x^2 + 1$; (d) $y = 1 - \frac{1}{x}$; (e) $y = 2\cos 3x$; (f) $y = 2\sqrt{x+1}$; (g) $x^2 - 4x + 5$; (h) $|x| - 2$; (i) $|x - 2|$.

1.3.2. Para cada uma das alíneas seguintes, encontre as funções (i) $f + g$, (ii) $f - g$, (iii) fg e (iv) f/g e indique os seus domínios.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2,\ g(x) = 3x^2 - 1$;

(b) $f(x) = \sqrt{3-x},\ g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

1.3.3. Para cada uma das alíneas seguintes, encontre as funções (i) $f \circ g$, (ii) $g \circ f$, (iii) $f \circ f$ e (iv) $g \circ g$ e indique os seus domínios.

(a) $f(x) = 3x + 5,\ g(x) = x^2 + x$;

(b) $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = 4x - 3$;

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = x^2 + 1$;

(d) $f(x) = \frac{x}{1+x},\ g(x) = \operatorname{sen} 2x$.

1.3.4. Sejam f e g funções lineares dadas pelas expressões: $f(x) = m_1x + b_1$ e $g(x) = m_2x + b_2$. Diga, justificando, se a função $f \circ g$ é linear. Se sim, diga qual é o declive do seu gráfico.

1.3.5. Sabendo que $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, indique uma função g tal que $g \circ f = h$.

1.4 Funções exponenciais

1.4.1. Partindo de um esboço do gráfico da função $f(x) = e^x$, esboce os gráficos das funções seguintes.

(a) $y = e^{|x|}$; (b) $y = 1 - \frac{1}{2}\, e^{-x}$; (c) $y = 2(1 - e^x)$.

1.4.2. Encontre o domínio de cada uma das seguintes funções.

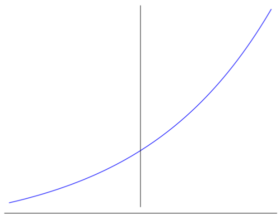
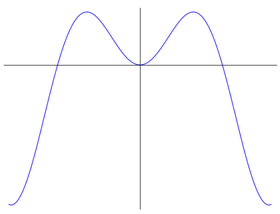
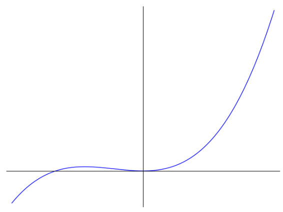
(a) $f(x) = \frac{1-e^{x^2}}{1-e^{1-x^2}}$; (b) $f(x) = \frac{1+x}{e^{\cos x}}$; (c) $f(x) = \sqrt{10^x - 100}$; (d) $f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 1)$.

1.4.3. Encontre a função exponencial $f(x) = Cb^x$, com $b > 0$, que satisfaz $f(1) = 6$ e $f(3) = 24$.

1.4.4. Encontre a função exponencial $f(x) = Cb^x$, com $b > 0$, que satisfaz $f(-1) = 3$ e $f(1) = 4/3$.

1.5 Funções inversas e logaritmos

1.5.1. Para cada uma das seguintes funções, dada por um gráfico, uma expressão ou por palavras, diga se é injetiva.

(a)  (b)  (c) 

(d) $f(x) = 3x - 3$; (e) $f(x) = x^4 - 16$; (f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$;

(g) $f(t)$ é a altura de uma bola de andebol t segundos depois de ser lançada.

1.5.2. Encontre uma fórmula para a inversa de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$;
(b) $f(x) = e^{2x-1}$.

1.5.3. Considere a função $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Encontre $f^{-1}(3)$ e $f(f^{-1}(2))$.

1.5.4. Encontre o valor exato de cada uma das seguintes expressões.

(a) $\log_2 32$;
(b) $\ln(1/e^2)$;
(c) $\log_{10} 40 + \log_{10} 2.5$;
(d) $\log_8 60 - \log_8 3 - \log_8 5$;
(e) $e^{-\ln 2}$.

1.5.5. Exprima
$$\frac{1}{3}\ln(x+2)^3 + \frac{1}{2}(\ln x - \ln(x^2+3x+2)^2)$$
usando um único logaritmo.

1.5.6. Resolva as equações seguintes em ordem a x.

(a) $e^{7-4x} = 6$;
(b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$;
(c) $\ln x + \ln(x-1) = 1$;
(d) $\ln(\ln x) = 1$;
(e) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$.

1.5.7. Encontre o valor exato de cada uma das seguintes expressões.

(a) $\arccos(-1)$;

(b) $\operatorname{arcsen}(1/2)$;

(c) $\operatorname{arcsen}\left(-1/\sqrt{2}\right)$;

(d) $\operatorname{arcsen} 1$;

(e) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(5\pi/4))$.

2 Limites e derivadas

2.1 O problema da velocidade

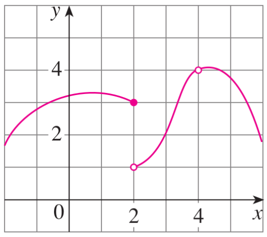
2.1.1. Uma pedra é lançada para cima no planeta Marte com uma velocidade de $10m/s$. A sua altura em metros passados t segundos é dada por $y = 10t - 1.8t^2$.

(a) Determine a velocidade média da pedra nos seguintes intervalos de tempo:
i. $[1, 2]$; ii. $[1, 1.5]$; iii. $[1, 1.1]$; iv. $[1, 1.01]$; v. $[1, 1.001]$.

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

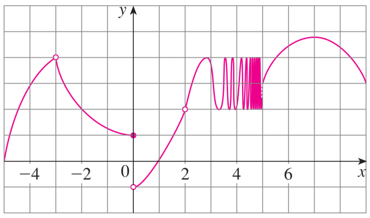
2.2 Limite de uma função (visão intuitiva)

2.2.1. Considere uma função f cujo gráfico está representado na figura seguinte.



Diga qual é o valor de cada uma das quantidades indicadas. Caso tal quantidade não exista, explique porquê.
(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; (b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$; (d) $f(2)$;
(e) $\lim_{x\to 4} f(x)$; (f) $f(4)$.

2.2.2. Considere uma função h cujo gráfico está representado na figura seguinte.



Diga qual é o valor de cada uma das quantidades indicadas. Caso tal quantidade não exista, explique porquê.
(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$; (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$; (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$; (d) $h(-3)$;
(e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$; (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$; (g) $\lim_{x\to 0} h(x)$; (h) $h(0)$;
(i) $\lim_{x\to 2} h(x)$; (j) $h(2)$; (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$; (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$.

2.2.3. Determine cada um dos limites seguintes:
(a) $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{x+1}{x-5}$; (b) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{x+1}{x-5}$; (c) $\lim_{x\to 3^+} \ln(x^2-9)$; (d) $\lim_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x)$; (e) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;
(f) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$.

2.2.4. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-2x^2}$.

(a) Determine as assíntotas verticais de f.

(b) Usando um sistema computacional (ou uma calculadora gráfica), esboce o gráfico de f para confirmar que não se enganou na alínea anterior.

2.2.5. Considere a função $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$.

(a) Observe que $f(x) = 0$ para $x = \frac{1}{\pi}, x = \frac{1}{2\pi}, x = \frac{1}{3\pi}, \ldots$.

(b) Observe que $f(x) = 1$ para $x = \frac{4}{\pi}, x = \frac{4}{5\pi}, x = \frac{4}{9\pi}, \ldots$.

(c) Que pode concluir acerca do limite $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$?

2.3 Regras de cálculo de limites

2.3.1. As funções f, g e h são tais que: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$, $\lim_{x\to 2} h(x) = 0$.

Dos limites seguintes calcule os que existem e para cada um dos restantes explique porque não existe.
(a) $\lim_{x\to 2}(f(x)+5g(x))$; (b) $\lim_{x\to 2}(g(x))^3$; (c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$; (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$; (e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{(h(x))^2}$; (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$.

2.3.2. Calcule cada um dos seguintes limites. Faça-o passo a passo e indique a regra usada em cada um desses passos.

(a) $\lim_{x\to 3}(5x^3 - 3x^2 + x - 6)$; (b) $\lim_{x\to -1}(x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$;

(c) $\lim_{x\to -1}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$; (d) $\lim_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 5}\right)^2$.

2.3.3. Calcule cada um dos seguintes limites no caso de existir.

(a) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$; (b) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$; (c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$; (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$;

(e) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2 + x}\right)$; (f) $\lim_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$.

2.3.4. Sabendo que $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para todo o x, calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.

2.3.5. Mostre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\dfrac{x}{2} = 0$.

2.3.6. Mostre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})} = 0$.

2.3.7. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

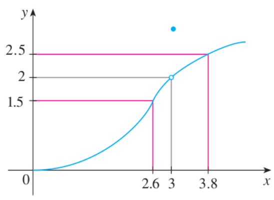
(a) Calcule $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

(b) Existe o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$?

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

2.4 Definição de limite

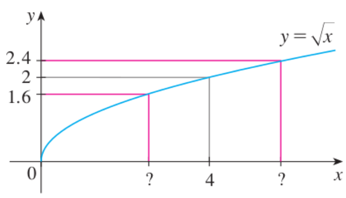
2.4.1. Considere a função f cujo gráfico está representado na figura ao lado.



Encontre um número δ tal que

se $\;0 < |x - 3| < \delta\;$ então $\;|f(x) - 2| < 0.5$

2.4.2. A figura ao lado representa o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$.



Apoiando-se na figura, se julgar conveniente, encontre um número δ tal que

se $\;0 < |x - 4| < \delta\;$ então $\;|\sqrt{x} - 2| < 0.4$

2.4.3. Prove o seguinte, usando a definição de limite (com ϵ e δ):

(a) $\lim_{x\to 4}(2x - 5) = 3$; (b) $\lim_{x\to -3}(1 - 4x) = 13$; (c) $\lim_{x\to -2}(3x + 5) = -1$.

2.4.4. Quão perto deve estar x de -3 para que se tenha $\dfrac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000$?

2.4.5. Prove o seguinte, usando as definições:

(a) $\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{(x + 3)^4} = +\infty$; (b) $\lim_{x\to -0^+} \ln x = -\infty$.

2.5 Continuidade

2.5.1. Para cada uma das funções seguintes, indique o seu domínio e explique porque é contínua em todos os pontos do seu domínio.
(a) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-x-1}$; (b) $f(x) = \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{2+\cos \pi t}$; (c) $f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

2.5.2. Calcule os seguintes limites:
(a) $\lim_{x\to 2} x\sqrt{20-x^2}$; (b) $\lim_{x\to\pi} \operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} x)$; (c) $\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{5-x^2}{1+x}\right)$; (d) $\lim_{x\to 4} 3^{\sqrt{x^2-2x-4}}$;

2.5.3. Mostre que a função seguinte é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{se} \quad x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2.5.4. Para que valor de c é que a função f seguinte é contínua em $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se} \quad x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2.5.5. Suponha que uma função f é contínua em $[0,1]$, exceto em 0,25 e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois possíveis gráficos de f, um mostrando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermédio e outro em que f satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Intermédio (embora não satisfaça a hipótese).

2.5.6. Suponha que f é contínua no intervalo fechado $[1,5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ são $x = 1$ e $x = 4$. Explique porque é que se $f(2) = 8$, então $f(3) > 6$.

2.5.7. Use o Teorema dos Valores Intermédios para mostrar que existe uma raiz de cada uma das seguintes equações no intervalo indicado. (a) $x^4 + x - 3 = 0$, $(1,2)$; (b) $\operatorname{sen} x = x^2 - x$, $(1,2)$

2.5.8. Mostre que a função seguinte é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

2.6 Limites no infinito; assíntotas horizontais

2.6.1. Esboce o gráfico de uma função que satisfaz as seguintes condições:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -5$.

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, f(0) = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, f é ímpar.

2.6.2. Calcule o limite ou mostre que não existe:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{2x+1}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x^3-x+1}$; c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{9x^2+x} - 3x)$;

d) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{4x^2+3x} + 2x)$; e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}$; f) $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\cos x$.

2.6.3. Encontre as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais de cada uma das curvas seguintes curvas. Use um sistema computacional para esboçar as curvas.

a) $y = \frac{5+4x}{x+3}$; b) $y = \frac{2x^2+1}{3x^2+2x-1}$; c) $y = \frac{2e^x}{e^x-5}$.

2.6.4. Em cada uma das alíneas seguintes encontre os limites quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$. Use essa informação juntamente com as interseções com os eixos coordenados para dar uma ideia (ainda que grosseira) dos gráficos. Use um sistema computacional para verificar os seus resultados.

a) $y = 2x^3 - x^4$; b) $y = (3-x)(1+x)^2(1-x)^4$.

2.7 Derivadas

2.7.1. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y = 4x - 3x^2, \quad (2, -4)$;　　b) $y = x^3 - 3x + 1, \quad (2, 3)$.

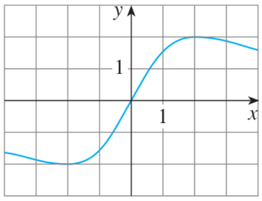
2.7.2. Cada um dos limites seguintes representa a derivada de uma função f num ponto a. Identifique f e a em cada caso.

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{-2+h} - e^{-2}}{h}$;　　b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^6 - 64}{x - 2}$;　　c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) - 1}{h}$.

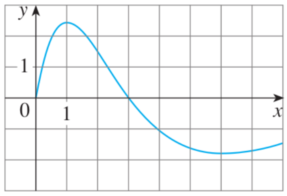
2.8 A função derivada

2.8.1. Use o gráfico seguinte para estimar o valor da derivada f' em cada um dos pontos. Seguidamente esboce o gráfico de f'.

a) i. $f'(-3)$;　ii. $f'(-2)$;　iii. $f'(-1)$;　iv. $f'(0)$;
v. $f'(1)$;　vi. $f'(2)$;　vii. $f'(3)$.



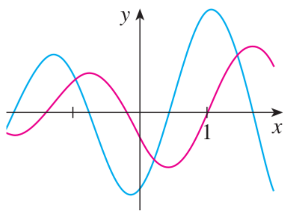
b) i. $f'(0)$;　ii. $f'(1)$;　iii. $f'(2)$;　iv. $f'(3)$;
v. $f'(4)$;　vi. $f'(5)$;　vii. $f'(6)$;　viii. $f'(7)$.



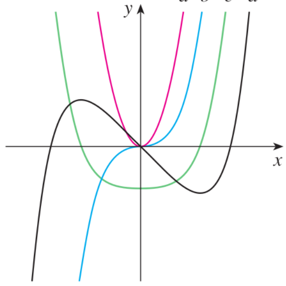
2.8.2. Encontre a derivada de cada uma das seguintes funções, usando a definição.

a) $f(x) = 3x - 8$;　　b) $f(x) = mx + b$.

2.8.3. Na figura ao lado estão representados o gráfico de uma função f e da sua derivada f'. Qual é maior, $f'(-1)$ ou $f''(1)$?



2.8.4. Na figura ao lado estão representados os gráficos das funções f, f', f'' e f'''. Identifique cada uma das curvas.



3 Regras de derivação

3.1 Derivadas de funções polinomiais e exponenciais

3.1.1. Encontre a derivada da função.

a) $f(x) = e^5$; b) $f(x) = \frac{7}{4}x^2 - 3x + 12$; c) $f(x) = x^2(1-2x)$;

d) $f(x) = \frac{5}{x^3}$; e) $f(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$; f) $f(x) = \sqrt[3]{x}(2+x)$;

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$; h) $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$; i) $f(x) = e^x + x^e$.

3.1.2. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y = 2x^3 - x^2 + 2, \quad (1,3)$; b) $y = 2e^x + x, \quad (0,2)$.

3.1.3. Calcule as primeira e segunda derivadas das funções seguintes. Use um sistema computacional para esboçar os gráficos das funções em causa, concluindo se as suas respostas são aceitáveis.

a) $f(x) = 2x - 5x^{3/4}, \quad (1,3)$; b) $f(x) = e^x - x^3, \quad (0,2)$.

3.1.4. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tem tangentes horizontais nos pontos $(-2,6)$ e $(2,0)$.

3.1.5. Encontre a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ que tem declive 4 em $x = 1$, declive -8 em $x = -1$ e passa pelo ponto $(2,15)$.

3.1.6. Para que valor de c é que a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ é tangente à curva $y = c\sqrt{x}$?

3.1.7. Para que valor de c é que a reta $y = 2x + 3$ é tangente à parábola $y = cx^2$?

3.2 Regras de derivação do produto e do quociente

3.2.1. Encontre as derivadas das funções seguintes.

a) $f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$; b) $y = \frac{e^x}{1-e^x}$; c) $y = \frac{x^2-2}{2x+1}$;

d) $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$; e) $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$; f) $y = \frac{\sqrt{x}}{2+x}$;

g) $y = \frac{x^3+3x}{x^2-4x+3}$; h) $f(z) = (z^2 + e^z)\sqrt{z}$; i) $F(t) = \frac{At}{Bt^2+Ct^3}$.

3.2.2. Para cada uma das funções f seguintes, encontre f' e f''.

a) $f(x) = \sqrt{x}e^x$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

3.2.3. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y = \frac{x^2-1}{x^2+x+1}, \quad (1,0)$; b) $y = \frac{1+x}{1+e^x}, \quad (0, \frac{1}{2})$.

3.2.4. Suponha que $f(4) = 2, g(4) = 5, f'(4) = 6$, e $g'(4) = -3$. Encontre $h'(4)$ em cada uma das alíneas seguintes:

a) $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$; b) $h(x) = f(x)g(x)$;

c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; d) $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}$.

3.2.5. Sabendo que $f(2) = 10$ e que $f'(x) = x^2 f(x)$ para todo o x, calcule $f''(2)$.

3.3 Derivadas de funções trigonométricas

3.3.1. Derive cada uma das seguintes funções.

a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$;
b) $f(x) = x \cos x + 2 \operatorname{tg} x$;
c) $g(\theta) = e^{\theta}(\operatorname{tg}\theta - \theta)$;
d) $y = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$;
e) $y = \frac{t \operatorname{sen} t}{1+t}$;
f) $y = \frac{\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{tg} t}$.

3.3.2. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

a) $y = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad (0, 1)$;
b) $y = x + \operatorname{tg} x, \quad (\pi, \pi)$.

3.3.3. Se $f(t) = \sec(t)$, encontre $f''(\pi/4)$.

3.3.4. Para que valores de x é que o gráfico de $f(x) = e^x \cos x$ tem uma tangente horizontal?

3.3.5. Encontre $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\operatorname{sen} x)$.

3.4 Regra da cadeia

3.4.1. Escreva cada uma das seguintes funções na forma $f(g(x))$. (Identifique a função interior $u = g(x)$ e a exterior $y = g(u)$). Depois encontre a derivada dy/dx.

a) $y = (2x^3 + 5)^4$;
b) $y = \operatorname{tg} \pi x$;
c) $y = e^{\sqrt{x}}$;
d) $y = \sqrt{2 - e^x}$.

3.4.2.
a) $F(x) = (1 + x + x^2)^{99}$;
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;
c) $f(\theta) = \cos(\theta^2)$;
d) $g(\theta) = \cos^2(\theta)$;
e) $g(x) = e^{x^2-x}$;
f) $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$;
g) $f(t) = 2^{t^3}$;
h) $g(u) = \left(\frac{u^3-1}{u^3+1}\right)^8$;
i) $y = e^{\operatorname{sen} 2x} + \operatorname{sen}(e^{2x})$.

3.4.3. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

a) $y = 2^x, \quad (0, 1)$;
b) $y = xe^{-x^2}, \quad (0, 0)$.

3.5 Derivação implícita

3.5.1. Encontre dy/dx por derivação implícita.

a) $x^2 - 4xy + y^2 = 4$;
b) $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$;
c) $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$;
d) $\sqrt{x + y} = x^4 + y^4$;
e) $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$.

3.5.2. Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y, \quad (\pi/2, \pi/4)$;
b) $x^2 + 2xy + 4y^2 = 12, \quad (2, 1)$.

3.5.3. Encontre a derivada da função. Simplifique quando possível.

a) $y = (\operatorname{arctg} x)^2$;
b) $y = \operatorname{arctg}(x^2)$;
c) $y = \operatorname{arcsen}(2x + 1)$;
d) $g(x) = \arccos\sqrt{x}$;
e) $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$;
f) $y = \arccos(\operatorname{arcsen} t)$.

3.5.4. (a) Suponha que f é uma função injetiva derivável tal que a sua inversa também é derivável. Use derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = 2/3$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

3.6 Derivadas de funções logarítmicas

3.6.1. Derive as seguintes funções.

a) $f(x) = x\ln x - x$; b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$; c) $f(x) = \log_{10}(1+\cos x)$;

d) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$; e) $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$; f) $f(x) = \log_2(x\log_5 x)$.

3.6.2. Encontre y' e y''.

a) $y = \ln|\sec x|$; b) $y = \ln(1+\ln x)$.

3.6.3. Derive e encontre o domínio de f.

a) $f(x) = \frac{x}{1-\ln(x-1)}$; b) $f(x) = \ln\ln\ln x$.

3.6.4. Se $f(x) = \ln(x+\ln x)$, encontre $f'(1)$.

3.6.5. Se $f(x) = \cos(\ln x^2)$, encontre $f'(1)$.

3.6.6. Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y = \ln(x^2-3x+1)$, $(3,0)$; b) $y = x^2\ln x$, $(1,0)$.

3.6.7. Use diferenciação logarítmica para encontrar as derivadas das seguintes funções.

a) $y = \frac{e^{-x}\cos^2 x}{x^2+x+1}$; b) $y = x^x$; c) $y = x^{\cos x}$; d) $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$.

4 Aplicações das derivadas

4.1 Máximos e mínimos

Recorda-se que um gráfico pode ser esboçado executando os seguintes passos:
A. Domínio; B. Interseções com os eixos coordenados; C. Simetrias;
D. Assíntotas;
E. Intervalos de crescimento e de decrescimento; F. Máximos locais e mínimos locais;
G. Concavidades e pontos de inflexão;
H. Esboço do gráfico;

4.1.1. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em $[1,5]$ e tem as propriedades seguintes:

a) tem um mínimo absoluto em 3, um máximo absoluto em 4 e um máximo local em 2.

b) tem um máximo absoluto em 2, um mínimo absoluto em 5, tem um ponto crítico em 4, mas não tem aí nem máximo nem mínimo local.

4.1.2. Faça à mão um esboço do gráfico da seguinte função e, apoiando-se no seu esboço, indique os valores máximo e mínimo, tanto os absolutos como os locais.

a) $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geq -2;$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leq \pi/2;$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2;$

d) $f(x) = |x|;$

e) $f(x) = 1 - \sqrt{x};$

f) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4-2x & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}.$

4.1.3. Encontre os pontos críticos de cada uma das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x;$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1};$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}.$

4.1.4. Encontre os valores máximo e mínimo absoluto de f no intervalo dado.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2,3];$

b) $f(x) = (x^2-4)^3, \quad [-2,3];$

c) $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi/2];$

d) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x, \quad [0,4].$

4.1.5. Mostre que se f tiver um mínimo local em c, então a função $g(x) = -f(x)$ tem um máximo local em c.

4.2 Teorema do Valor Médio

Recorda-se que um gráfico pode ser esboçado executando os seguintes passos:
A. Domínio; B. Interseções com os eixos coordenados; C. Simetrias;
D. Assíntotas;
E. Intervalos de crescimento e de decrescimento; F. Máximos locais e mínimos locais;
G. Concavidades e pontos de inflexão;
H. Esboço do gráfico;

4.2.1. Verifique que a função satisfaz no intervalo dado as (três) hipóteses do Teorema de Rolle. Seguidamente encontre todos os números c que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2, \quad [-2,2];$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x/2), \quad [\pi/2, 3\pi/2].$

4.2.2. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$ mas que não existe nenhum número em $(-1,1)$ tal que $f'(c) = 0$. Explique porque é que este facto não contradiz o Teorema de Rolle.

4.2.3. Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema de Valor Médio no intervalo dado. Seguidamente encontre todos os números c que satisfazem a conclusão do Teorema do Valor Médio.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0,2];$

b) $f(x) = 1/x, \quad [1,3].$

4.2.4. Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

a) $2x + \cos x = 0$; b) $x^3 + e^x = 0$.

4.2.5. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ não tem mais de uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

4.2.6. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

4.2.7. Mostre que $\operatorname{sen} x < x$ se $0 < x < 2\pi$.

4.3 Como as derivadas afetam a forma do gráfico

Recorda-se que um gráfico pode ser esboçado executando os seguintes passos:
A. Domínio; B. Interseções com os eixos coordenados; C. Simetrias;
D. Assíntotas;
E. Intervalos de crescimento e de decrescimento; F. Máximos locais e mínimos locais;
G. Concavidades e pontos de inflexão;
H. Esboço do gráfico;

4.3.1. Para cada uma das funções seguintes, encontre:

(i) os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
(ii) os máximos e os mínimos locais;
(iii) os intervalos onde a função é convexa, onde é côncava e determine ainda os pontos de inflexão.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; c) $f(x) = x^2 \ln x$.

4.3.2. Esboce o gráfico de uma função f que satisfaz todas as condições:
$f'(x) > 0$ para qualquer $x \neq 1$; tem uma assíntota vertical $x = 1$;
$f''(x) > 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$; $f''(x) < 0$ se $1 < x < 3$.

4.3.3. Esboce o gráfico de uma função f que satisfaz todas as condições:
$f'(5) = 0$; $f'(x) < 0$ para $x < 5$; $f'(x) > 0$ para $x > 5$;
$f''(2) = 0$, $f''(8) = 0$;$f''(x) < 0$ quando $x < 2$ ou $x > 8$; $f''(x) > 0$ para $2 < x < 8$;
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

4.3.4. Para cada uma das funções seguintes:

(i) encontre os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
(ii) encontre os máximos e os mínimos locais;
(iii) encontre os intervalos onde a função é convexa, onde é côncava e determine ainda os pontos de inflexão;
(iv) use as informações das alíneas anteriores para esboçar o gráfico.

a) $f(x) = 36x + 3x^2 - 2x^3$; b) $F(x) = x\sqrt{6-x}$; c) $f(x) = \ln\left(x^2 + 9\right)$;

4.3.5. Para cada uma das funções seguintes:

(i) encontre as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais;
(ii) encontre os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
(iii) encontre os máximos e os mínimos locais;
(iv) encontre os intervalos onde a função é convexa, onde é côncava e determine ainda os pontos de inflexão;
(v) use as informações das alíneas anteriores para esboçar o gráfico.

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$; c) $\sqrt{x^2+1} - x$;

d) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$; e) $f(x) = e^{-x^2}$; f) $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$.

4.4 Indeterminações e a regra de L'Hôpital

Recorda-se que um gráfico pode ser esboçado executando os seguintes passos:
A. Domínio; B. Interseções com os eixos coordenados; C. Simetrias;
D. Assíntotas;
E. Intervalos de crescimento e de decrescimento; F. Máximos locais e mínimos locais;
G. Concavidades e pontos de inflexão;
H. Esboço do gráfico;

4.4.1. Calcule o limite. Use a regra de L'Hôpital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere a possibilidade de o usar. Se a regra de L'Hôpital não se aplicar, explique porquê.

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$; b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x-4}$; c) $\lim_{x\to 1/2} \frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$;

d) $\lim_{\theta\to\pi} \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$; e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$; f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\cos x + e^x - 1}$.

4.4.2. Calcule o limite.

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}e^{-x/2}$; b) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$; c) $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$;

d) $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$; e) $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$; f) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$.

4.4.3. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

4.4.4. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p}$.

4.4.5. Sabendo que f' é contínua, $f(2) = 0$, e $f'(2) = 7$, calcule $\lim_{x\to 0} \frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$.

4.4.6. Para que valores de a e b se tem a seguinte igualdade: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$?

4.5 Esboços de gráficos – sumário

Recorda-se que um gráfico pode ser esboçado executando os seguintes passos:
A. Domínio; B. Interseções com os eixos coordenados; C. Simetrias;
D. Assíntotas;
E. Intervalos de crescimento e de decrescimento; F. Máximos locais e mínimos locais;
G. Concavidades e pontos de inflexão;
H. Esboço do gráfico;

4.5.1. Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = x^5 - 5x$ b) $f(x) = x/(x-1)$

4.5.2. Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$ b) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

c) $f(x) = (1-x)e^x$ d) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

4.5.3. Esboce os gráficos das seguintes funções (não se esquecendo de, no passo D, determinar a assíntota oblíqua):

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; b) $f(x) = \frac{1+5x-2x^2}{x-2}$;

A Soluções

Em algumas soluções é apresentado código *sage*. Este pode ser usado *online* por via do SageMathCell.

1.1.1 Sim

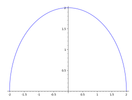
1.1.2 Não. (Note que $f(x)$ não está definida em 1.)

1.1.3 Muitos gráficos são possíveis... Admita que o gráfico se refere a um ponto do hemisfério norte (a FCUP, por exemplo). Tenha em conta os equinócios, os solestícios de Verão e de Inverno, etc.

1.1.4 $f(2) = 12$, $f(-2) = 16$, $f(a) = 3a^2 - a + 2$, $f(-a) = 3a^2 + a + 2$, $f(a+1) = 3a^2 + 5a + 4$, $2f(a) = 6a^2 - 2a + 4$, $f(2a) = 12a^2 - 2a + 2$, $f(a^2) = 3a^4 - a^2 + 2$, $(f(a))^2 = 9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4$, $f(a+h) = 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$.

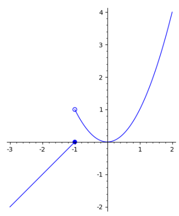
1.1.5 O domínio é $[-2, 2]$.

[**Sugestão:** Note que $y = \sqrt{4 - x^2}$ implica $x^2 + y^2 = 4$, pelo que o gráfico está contido no círculo de raio 2 e centro na origem.]



1.1.6 $f(-3) = -2$, $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$
O gráfico ao lado foi obtido usando o *sage*, com o código seguinte:

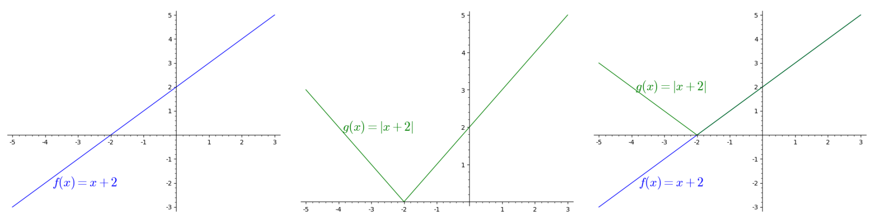
```
ramo_esquerdo = plot(x+1,-3,-1)
ponto = point((-1,0),size=50)
ramo_direito = plot(x^2,-1,2)
q = circle((-1, 1), 0.06)
ramo_esquerdo+ponto+ramo_direito+q
```



1.1.7 $f(-3) = -1$, $f(0) = -1$ e $f(2) = 3$

1.1.8 Use o código *sage* seguinte para confirmar os esboços que fez...

```
a = plot(x+2,-5,3,color=’blue’)
nome_a = text(’$f(x)=x+2$’,(-2.8,-2),fontsize=20,color=’blue’)
f = a + nome_a
f.show()
b = plot(abs(x+2),-5,3,color=’green’)
nome_b = text(’$g(x)=|x+2|$’,(-2.8,2),fontsize=20,color=’green’)
g = b + nome_b
g.show()
soma =f+g
soma.show()
```



1.1.9 $P(\ell) = 2\ell + 32/\ell$

1.1.10 $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

[**Sugestão:** Use o teorema de Pitágoras para exprimir a altura do triângulo em função do comprimento de uma lado.]

1.1.11 (a) ímpar; (b) par; (c) nem par nem ímpar.

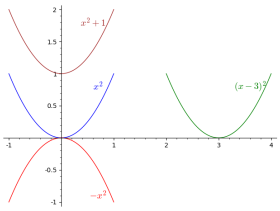
1.2.1 (a) logarítmica; (b) raiz (ou potência, com expoente 1/4); (c) racional; (d) polinomial; (e) exponencial; (f) trigonométrica; (g) exponencial; (h) potência; (i) algébrica.

1.2.2 (a) — f (gráfico azul); (b) — h (gráfico vermelho); (c) — g (gráfico verde).

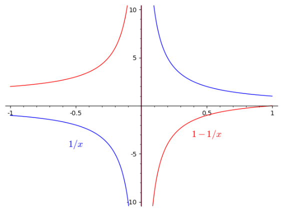
1.2.3 (a) $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; (b) $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1.2.4 O declive (-4) indica que o aumento de 1 € no preço do aluguer leva a uma descida de 4 espaços alugados. Se não fosse cobrado qualquer valor pelo aluguer, haveria 200 espaços ocupados (este número é dado pela interseção com o eixo dos y. A interseção com o eixo dos x, 50, indica o mais pequeno valor a partir do qual deixaria de haver qualquer espaço alugado.

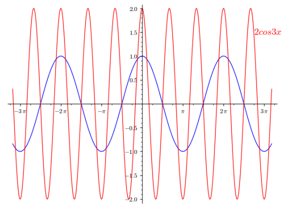
1.3.1 (a) (b) (c)



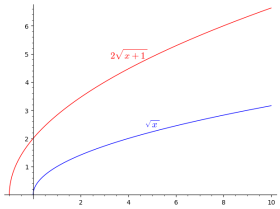
(d)



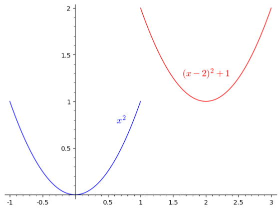
(e)



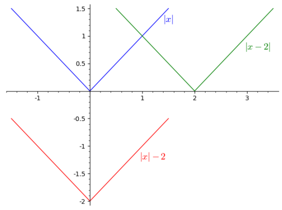
(f)



(g)



(h) (i)



1.3.2 (a) (i) $(f+g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1; D = \mathbb{R}$

(ii) $(f-g)(x) = x^3 - x^2 + 1; D = \mathbb{R}$

(iii) $(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2; D = \mathbb{R}$

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3+2x^2}{3x^2-1}; D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}$

(b) (i) $(f+g)(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-1}; D = (-\infty, -1] \cup [1, 3]$

(ii) $(f-g)(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-1}; D = (-\infty, -1] \cup [1, 3]$

(iii) $(fg)(x) = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x^2-1}; D = (-\infty, -1] \cup [1, 3]$

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2-1}}; D = (-\infty, -1) \cup (1, 3]$

1.3.3 (a) (i) $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 3x + 5; D = \mathbb{R}$

(ii) $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 33x + 30; D = \mathbb{R}$

(iii) $(f \circ f)(x) = 9x + 20; D = \mathbb{R}$

(iv) $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x; D = \mathbb{R}$

(b) (i) $(f \circ g)(x) = \sqrt{4x-2}; D = [1/2, +\infty)$

(ii) $(g \circ f)(x) = 4\sqrt{x+1} - 3; D = [-1, +\infty)$

(iii) $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1}; D = [-1, +\infty)$

(iv) $(g \circ g)(x) = 16x - 15; D = \mathbb{R}$

(c) (i) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(x^2+1); D = \mathbb{R}$

(ii) $(g \circ f)(x) = \operatorname{sen}^2 x + 1; D = \mathbb{R}$

(iii) $(f \circ f)(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x); D = \mathbb{R}$

(iv) $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^2 + 2; D = \mathbb{R}$

(d) (i) $(f \circ g)(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen} 2x}; D = \mathbb{R} \setminus \{3\pi/4 + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

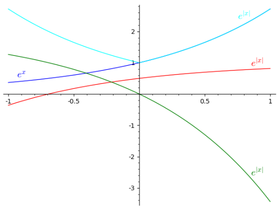
(ii) $(g \circ f)(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{1+x}\right); D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(iii) $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2x+1}; D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/2\}$

(iv) $(g \circ g)(x) = \operatorname{sen}(2 \operatorname{sen} 2x); D = \mathbb{R}$

1.3.4 $m_1 m_2$

1.3.5 $g(x) = 4x - 17$



1.4.1

1.4.2 (a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $[2, +\infty)$ (d) $\mathbb{R}$

1.4.3 $3 \cdot 2^x$

1.4.4 $2 \cdot (2/3)^x$

1.5.1 (a) é injetiva; (b) não é injetiva; (c) não é injetiva; (d) é injetiva; (e) não é injetiva; (f) não é injetiva; (g) não é injetiva.

1.5.2 (a) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4-2x}$; (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$.

1.5.3 [**Sugestão:** Comece por observar que f é crescente, logo injetiva.] 1 e 2, respetivamente.

1.5.4 (a) 5; (b) -2; (c) 2; (d) 2/3; (e) 1/2.

1.5.5 $\ln \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1.5.6 (a) $x = \frac{1}{4}(7 - \ln 6)$; (b) $x = 0$ ou $x = \ln 2$; (c) $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4e})$; (d) $x = e^e$; (e) $x = \frac{\ln C}{a-b}$.

1.5.7 (a) π; (b) $\pi/6$; (c) $-\pi/4$; (d) $\pi/6$; (e) $-\pi/4$.

2.1.1 (a) Determine a velocidade média da pedra nos seguintes intervalos de tempo:
i. 4.42; ii. 5.35; iii. 6.02; iv. 6.26; v. 6.278

(b) 6.28.

2.2.1 (a) 3; (b) 1; (c) não existe; (d) 3; (e) 4; (f) não existe.

2.2.2 (a) 4; (b) 4; (c) 4; (d) não existe; (e) 1; (f) -1; (g) não existe; (h) 1; (i) 2; (j) não existe; (k) 3; (l) não existe.

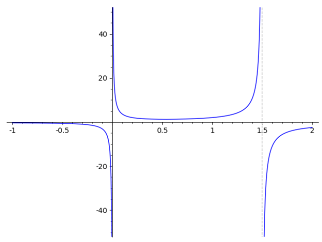
2.2.3 (a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $-\infty$ (e) $-\infty$ (f) $+\infty$

2.2.4 (a) $y = 0$ e $y = 3/2$.

(b) Executando

```
plot((x^2+1)/(3*x-2*x^2),xmin=-1,xmax=2,
  ymin=-50,ymax=50,detect_poles='show')
```

no sage, obtém-se o gráfico ao lado.



2.2.5 (a) Note que se $x = \frac{1}{n\pi}$, então $\operatorname{tg} \frac{1}{x} = \operatorname{tg}(n\pi) = 0$.

(b) Note que se $x = \frac{4}{(4n+1)\pi}$, então $\operatorname{tg} \frac{1}{x} = \operatorname{tg}(n\pi + \frac{\pi}{4}) = 1$.

(c) Não existe, porque $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ não se aproxima de um número fixo quando x se aproxima de 0.

2.3.1 (a) -6; (b) -8; (c) 2; (d) -6; (e) $-\infty$; (f) 0.

2.3.2 (a) 105; (b) -4; (c) 390; (d) 4/49.

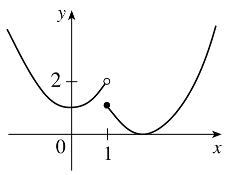
2.3.3 (a) 3/7; (b) não existe; (c) 1/12; (d) 2/3; (e) 1; (f) -4/5.

2.3.4 2

2.3.5 [**Sugestão:** Use funções enquadradas.]

2.3.6 [**Sugestão:** Use funções enquadradas.]

2.3.7 (a) 2 e 1; (b) não existe; (c)



2.4.1 0.4 (ou menor)

2.4.2 [**Sugestão:** Comece por encontrar valores para substituir os pontos de interrogação da figura.] 1.44 (ou menor)

2.4.3 (a) Escolher $\delta = \epsilon/2$. (b) Escolher $\delta = \epsilon/4$. (c) Escolher $\delta = \epsilon/3$.

2.4.4 $-3 - \frac{1}{10} < x < -3 + \frac{1}{10}$

2.4.5 (a) Escolher $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$. (b) Escolher $\delta = e^N$ (onde $N < 0$ é dado).

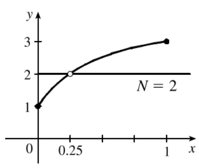
2.5.1 (a) $\mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1\}$; (b) $\mathbb{R}$; (c) $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

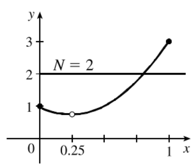
2.5.2 (a) 8; (b) 0; (c) $\ln 2$; (d) 9.

2.5.3 [**Sugestão:** O mais difícil é mostrar que $\lim_{x\to\pi/4} f(x)$ existe e que é igual a $f(\pi/4)$.]

2.5.4 2/3.

2.5.5



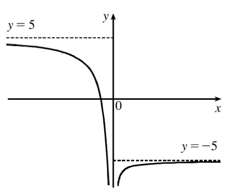


2.5.6

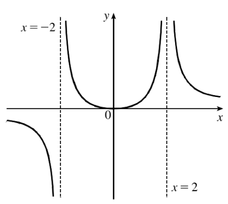
2.5.7

2.5.8 [**Sugestão:** Use funções enquadradas para encontrar o limite em 0.]

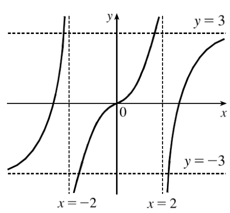
2.6.1 a)



b)



c)



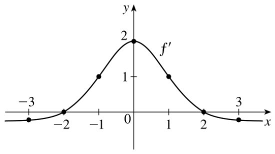
2.6.2 a) 3/2; b) 0; c) 1/6; d) -3/4; e) 0; f) 0.

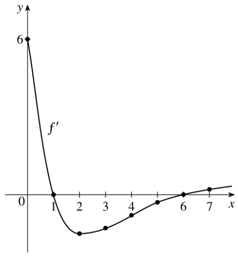
2.6.3 a) $y = 4$ horizontal, $x = -3$ vertical;
b) $y = 2/3$ horizontal, $x = -1$ e $x = 1/3$ verticais;
c) $y = 2$ e $y = 0$ horizontais, $x = \ln 5$ vertical.

2.6.4 a) y-interseção: 0, x-interseções: $-1, 0$, limite(s): $-\infty$;
b) y-interseção: 3, x-interseções: $-1, 1, 3$, $\lim_{x\to-\infty} y = +\infty, \lim_{x\to+\infty} y = -\infty$.

2.7.1 a) $y = -8x + 12$; b) $y = 9x + 15$.

2.7.2 a) $f(x) = e^x,\ a = -2$; b) $f(x) = x^6,\ a = 2$; c) $f(x) = \cos x,\ a = \pi$ (ou $f(x) = \cos(\pi + x),\ a = 0$).

2.8.1 a) 

b) 

2.8.2 a) 3; b) m.

2.8.3 [**Sugestão:** Identifique f e f' e note que f tem um ponto de inflexão.] Resposta: $f'(-1) > f''(1)$.

2.8.4 $d = f, c = f', b = f''$ e $a = f'''$.

3.1.1 Para verificar as soluções pode usar o comando `diff` no *sage*. Por exemplo,

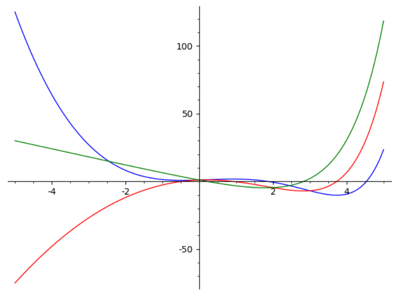
```
sage: f(x)=7/4*x^2-3*x+12
sage: diff(f(x))
7/2*x - 3
sage: f(x)=(x^2+4*x+3)/x^(1/2)
sage: diff(f(x),x)
2*(x + 2)/sqrt(x) - 1/2*(x^2 + 4*x + 3)/x^(3/2)
```

a) $f'(x) = 0$; b) $f'(x) = 7/x - 3$; c) $f'(x) = 2x - 6x^2$; d) $f'(x) = -15/x^4$; e) $f'(x) = 5/3x^{2/3} - 2/3x^{-1/3}$; f) $f'(x) = 2/3x^{-2/3} + 4/3x^{1/3}$; g) $f'(x) = -3/2x^{-5/2} - x^{-2}$; h) $f'(x) = \frac{3x^2+4x-3}{2x\sqrt{x}}$; i) $f'(x) = e^x + ex^{e-1}$.

3.1.2 a) $y = 4x - 1$; b) $y = 3x + 2$.

3.1.3 a) $f'(x) = 2 - 15/4\, x^{-1/4}, f''(x) = 15/14\, x^{-5/4}$; b) $f'(x) = e^x - 3x^2, f''(x) = e^x - 6x$.

Pode esboçar os gráficos das funções recorrendo ao *sage*. Por exemplo, a figura ao lado foi obtido na sessão seguinte:




```
sage: f(x)=e^x-x^3
sage: a=plot(f(x),(x,-5,5))
sage: b=plot(diff(f(x)),(x,-5,5),color='red')
sage: c=plot(diff(f(x),2),(x,-5,5),color='green')
sage: (a+b+c).show()
```

3.1.4 $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

3.1.5 $y = 3x^2 - 2x + 7$

3.1.6 6

3.1.7 $-1/3$

3.2.1 a) $e^x(3x^2 + x - 5)$; b) $\frac{e^x}{(1-e^x)^2}$; c) $\frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}$; d) $2u - 1$; e) $1 - z - 2e^{2z}$; f) $\frac{\sqrt{2-x}}{2\sqrt{x}(2+x)^2}$; g) $\frac{x^4-8x^3+6x^2+9}{(x^2-4x+3)^2}$; h) $\frac{5z^2+e^z+2ze^z}{2\sqrt{z}}$; i) $\frac{A(B+2Ct)}{t^2(B+Ct)^2}$.

3.2.2 a) $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}e^x,\ f''(x) = \frac{4x^2+4x-1}{2x^{3/2}}e^x$; b) $f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2},\ f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$.

3.2.3 a) $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$; b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

3.2.4 a) -6; b) 24; c) $\frac{36}{25}$; d) $-\frac{36}{49}$.

3.2.5 200.

3.3.1 a) $x^2\cos x + 2x\,\mathrm{sen}\,x$; b) $\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x + 2\sec^2 x$; c) $e^\theta(\sec^2\theta - 1 + \mathrm{tg}\,\theta - \theta)$; d) $\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$; e) $\frac{(t^2+t)\cos t + \mathrm{sen}\,t}{(1+t)^2}$; f) $\frac{\cos t + \mathrm{sen}\,t - \mathrm{tg}\,t\sec t}{(1+\mathrm{tg}\,t)^2}$.

3.3.2 a) $y = x + 1$; b) $y = 2x - \pi$.

3.3.3 $3\sqrt{2}$.

3.3.4 $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, com n inteiro.

3.3.5 [**Sugestão:** Calcule as primeiras derivadas e note que há um padrão.] Resposta: $-\cos x$.

3.4.1 a) $24x^2(2x^3+5)^3$; b) $\pi\sec^2\pi x$; c) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; d) $-\frac{e^x}{2\sqrt{2-e^x}}$.

3.4.2 a) $99(1+x+x^2)^{98}(1+2x)$; b) $\frac{-2x}{3(x^2-1)^{4/3}}$; c) $-2\,\mathrm{sen}(\theta^2)$; d) $-2\,\mathrm{sen}(\theta)$; e) $e^{x^2-x}(2x-1)$; f) $6x(x^2+1)^2(x^2+2)^5(3x^4+4)$; g) $3(\ln 2)t^2 2^{t^3}$; h) $\frac{48u^2(u^3-1)^7}{(u^3+1)^9}$; i) $2\cos(2x)e^{\mathrm{sen}\,2x} + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$.

3.4.3 a) $y = (\ln 2)x + 1$; b) $y = x$.

3.5.1 a) $y' = \frac{2y-x}{y-2x}$; b) $y' = \frac{y^2-3x^2}{y(3y-2x)}$; c) $y' = -\frac{y\,\mathrm{sen}(xy)}{x\,\mathrm{sen}(xy)+\cos y}$; d) $y' = \frac{1-8x^3\sqrt{x+y}}{8y^3\sqrt{x+y}-1}$; e) $y' = \frac{-\mathrm{sen}\,y - y\cos x}{x\cos y + \mathrm{sen}\,x}$.

3.5.2 a) $y = x/2$; b) $y = -x/2 + 2$.

3.5.3 a) $\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$; b) $\frac{2x}{1+x^4}$; c) $\frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}$; d) $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$; e) $\frac{1}{2(1+x^2)}$; f) $-\frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{arcsen}\,t)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

3.5.4 b) $2/3$.

3.6.1 a) $\ln x$; b) $2\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}$; c) $\frac{-\mathrm{sen}\,x}{(1+\cos x)\ln 10}$; d) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; e) $-\frac{x}{1+x}$; f) [**Sugestão:** Para simplificar, lembre-se que $\log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5}$.] Resposta: $\frac{1+\ln x}{x\ln x\ln 2}$.

3.6.2 a) $y' = \mathrm{tg}\,x$, $y'' = \sec^2 x$; b) $y' = \frac{1}{x(1+\ln x)}$, $y'' = -\frac{2+\ln x}{x^2(1+\ln x)^2}$.

3.6.3 a) $f'(x) = \frac{2x-1-(x-1)\ln(x-1)}{(x-1)(1-\ln(x-1))^2}$, $Dom(f) = (1, 1+e)\cup(1+e, +\infty)$;
b) $f'(x) = \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$, $Dom(f) = (e, +\infty)$.

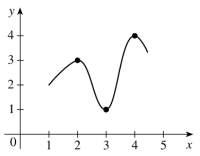
3.6.4 2

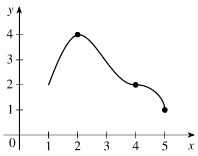
3.6.5 0

3.6.6 a) $y = 3x - 9$; b) $y = x - 1$.

3.6.7 a) $y' = -\frac{e^{-x}\cos^2 x}{x^2+x+1}\left(1 + 2\,\mathrm{tg}\,x + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)$; b) $y' = x^x(1+\ln x)$; c) $y' = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \ln x\,\mathrm{sen}\,x\right)$; d) $y' = (\mathrm{sen}\,x)^{\ln x}\left(\frac{\ln x\cos x}{\mathrm{sen}\,x} + \frac{\ln(\mathrm{sen}\,x)}{x}\right)$.

4.1.1

a) 

b) 

4.1.2 a) Máximo absoluto: $f(-2) = \frac{8}{3}$; não tem nenhum máximo local. Não tem mínimo absoluto nem local.

b) Máximo absoluto: $f(\pi/2) = 1$; não tem nenhum máximo local. Não tem mínimo absoluto nem local.

c) Máximo absoluto: $f(\pi/2) = 1$; não tem nenhum máximo local. Mínimo absoluto: $f(-\pi/2) = -1$; não tem nenhum mínimo local.

d) Não tem máximo absoluto nem local. Mínimo absoluto e local: $f(0) = 0$.

e) Máximo absoluto: $f(0) = 1$; não tem nenhum máximo local. Não tem mínimo absoluto nem local.

f) Não tem máximo absoluto nem local. Mínimo absoluto: $f(3) = -2$; não tem nenhum mínimo local.

4.1.3 a) f não tem pontos críticos; b) 0 e 2; c) $\sqrt{e}$.

4.1.4 a) Máximo: $f(-1) = 8$; mínimo: $f(2) = -19$.
b) Máximo: $f(3) = 125$; mínimo: $f(0) = -64$.
c) Máximo: $f(\pi/6) = 3/2\sqrt{3}$; mínimo: $f(\pi/2) = 0$.
d) Máximo: $f(4) = 4 - 2\,\mathrm{arctg}\,4$; mínimo: $f(1) = 1 - \pi/2$.

4.1.5

4.2.1 a) -2/3; b) π.

4.2.2

4.2.3 a) $c = 1$; b) $c = \sqrt{3}$.

4.2.4 [**Sugestão:** Nas aulas teóricas mostrou-se que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma solução real...]

4.2.5

4.2.6 [**Sugestão:** Sendo $f(x) = x^4 + 4x + c$, se f tivesse 3 raízes, f' teria pelo menos duas.]

4.2.7 [**Sugestão:** Escolha a tal que $0 < a < 2\pi$. Aplique o Teorema do Valor Médio a $\mathrm{sen}\,x$ no intervalo $[0, a]$.]

4.3.1 a) Tem-se $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$. E tem-se $f''(x) = 6x - 6$.
Quadro resumo:

		-1		1		3	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$infl$	$\smile$	$\smile$	$\smile$

(i) f é crescente em $(-\infty, -1)$ e em $(3, +\infty)$, e decrescente em $(-1, 3)$;
(ii) $f(-1) = 9$ é um máximo local e $f(3) = -23$ é um mínimo local;
(iii) f é convexa em $(1, +\infty)$ e côncava em $(-\infty, 1)$; f tem um ponto de inflexão em $(1, -7)$.

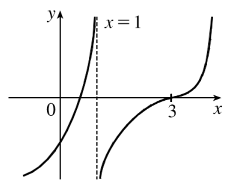
b) Tem-se $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$ e

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)((x^2+1)+(1-x^2)2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

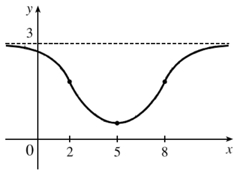
(i) f é crescente em $(-1, 1)$, e decrescente em $(-\infty, -1)$ e em $(1, +\infty)$;
(ii) $f(1) = 1/2$ é um máximo local e $f(-1) = -1/2$ é um mínimo local;
(iii) f é convexa em $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, +\infty)$ e côncava em $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(0, \sqrt{3})$; f tem pontos de inflexão em $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$.

c) (i) f é crescente em $(e^{-1/2}, +\infty)$ e decrescente em $(0, e^{-1/2})$;
(ii) $f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2e}$ é um mínimo local;
(iii) f é convexa em $(e^{-3/2}, +\infty)$ e côncava em $(0, e^{-3/2})$; f tem um ponto de inflexão em $(e^{-3/2}, -3/(2e^3))$.

4.3.2 [**Sugestão:** Faça uma tabela.]

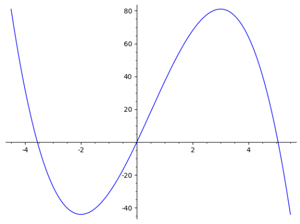


4.3.3 [**Sugestão:** Faça uma tabela. Note que o gráfico tem uma assíntota horizontal.]



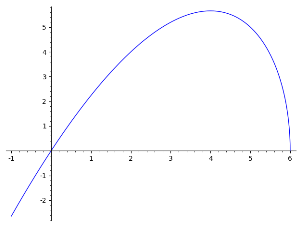
4.3.4 a) Tem-se $f'(x) = 36 + 6x - 6x^2 = -6(x+2)(x-3)$ e $f''(x) = 6 - 12x = 6(1-2x)$.

(i) f é crescente em $(-2, 3)$, e decrescente em $(-\infty, -2)$ e em $(3, +\infty)$;
(ii) $f(-2) = -44$ é um mínimo local e $f(3) = 81$ é um máximo local;
(iii) f tem a concavidade voltada para cima em $(-\infty, 1/2)$ e voltada para baixo em $(1/2, +\infty)$; f tem um ponto de inflexão em $(1/2, 37/2)$.



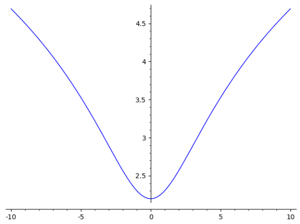
b) Tem-se $F'(x) = \frac{-3x+12}{2\sqrt{6-x}}$ e $F''(x) = \frac{3(x-8)}{4(6-x)^{3/2}}$.

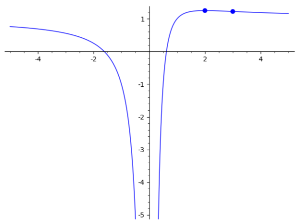
(i) F é crescente em $(-\infty, 4)$ e decrescente em $(4, 6)$;
(ii) F não tem nenhum mínimo local e $F(4) = 4\sqrt{2}$ é um máximo local;
(iii) f tem a concavidade voltada para baixo em $(-\infty, 6)$; não tem nenhum ponto de inflexão.



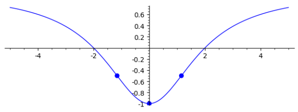
c) Tem-se $f'(x) = \frac{2x}{x^2+9}$ e $f''(x) = \frac{-2(x+3)(x-3)}{(x^2+9)^2}$.

(i) f é crescente em $(0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0)$;
(ii) f não tem nenhum máximo local e $f(0) = \ln 9$ é um mínimo local;
(iii) f tem a concavidade voltada para cima em $(-3, 3)$ e tem a concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -3)$ e em $(3, +\infty)$; tem pontos de inflexão em $(\pm 3, \ln 18)$.

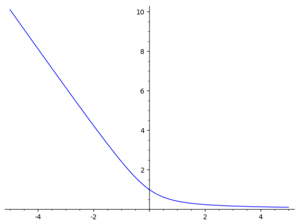




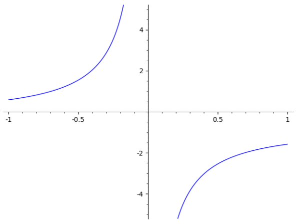
4.3.5 a) $f'(x) = -\frac{1}{x^3}(x-2)$, $f''(x) = \frac{2}{x^4}(x-3)$.



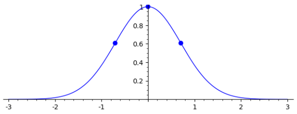
b) $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $f''(x) = \frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$.

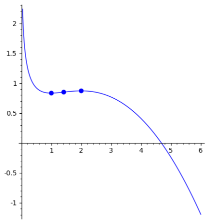


c) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$, $f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$.



d) $f'(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$, $f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)}{(1-e^x)^3}$

e) 

f) 

4.4.1 a) $\dfrac{1}{6}$; b) 6; c) $\dfrac{11}{20}$; d) 0; e) 0; f) 0.

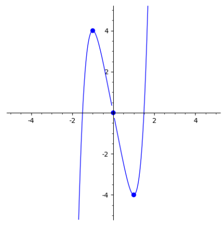
4.4.2 a) 0; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{1}{e}$; e) 2; f) e^{-8}.

4.4.3 ∞

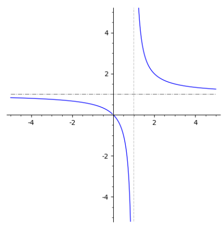
4.4.4 0

4.4.5 6

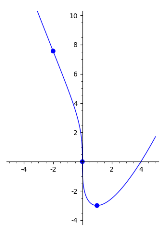
4.4.6 $b = -2$ e $a = \frac{4}{3}$



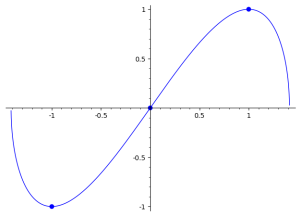
4.5.1 a) Interseções com o eixo dos x: $\pm\sqrt[4]{5}$



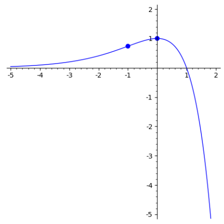
b) $f'(x) = -1/(x-1)^2$, $f''(x) = 2/(x-1)^3$



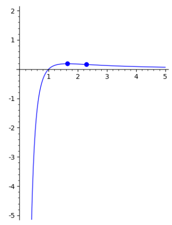
4.5.2 a) $f'(x) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$, $f''(x) = \frac{4(x+2)}{9x^{5/3}}$



b) $f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{-x^2+2}}$, $f''(x) = -\frac{2(x^2-3)x}{(x^2-2)\sqrt{-x^2+2}}$

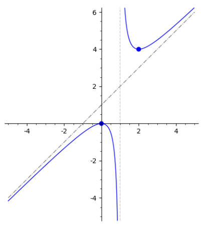


c) $f'(x) = -xe^x$, $f''(x) = -(x+1)e^x$



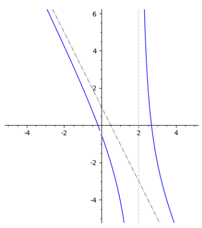
d) $f'(x) = -(2\ln x - 1)/x^3$, $f''(x) = (6\ln x - 5)/x^4$

4.5.3 a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 - \frac{1}{x-1}$; $y = x + 1$ é assíntota oblíqua.



$f'(x) = (x-2)x/(x-1)^2$, $f''(x) = 2/(x-1)^3$

b) $f(x) = \frac{1+5x-2x^2}{x-2} = -2x + 1 - \frac{1}{x-2}$; $y = -2x + 1$ é assíntota oblíqua.



$f'(x) = -(2x^2 - 8x + 11)/(x-2)^2$, $f''(x) = 6/(x-2)^3$