Cálculo II (M1003) - teste 2 - 21 de Junho de 2021 **Duração: 75 minutos**

Nome:...**N.:**.................

Este teste tem a cotação de 12 valores. Os telemóveis têm de estar desligados. O uso de calculadoras não é permitido. Não serão corrigidas respostas escritas a lápis.

Deverá responder às questões na própria folha e no espaço respectivo. Se necessitar de mais folhas pode usar uma das duas folhas brancas distribuidas com o enunciado, a outra pode ser usada como folha de rascunho.

Justifique completamente as suas respostas.

1. Considere a função $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3+xy-y^2 \end{array}$.

   (a) [1.5 valores] Determine e classifique os pontos críticos de f.

   (b) [1 valor] Diga, justificando, se f tem um mínimo absoluto em $\mathbb{R}^2$.

2. [2 valores] Considere a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-x-y \end{array}$. Determine o máximo e o mínimo de f na circunferência de centro na origem e de raio $\sqrt{2}$ (isto é o conjunto dos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2+y^2=2$).

3. Considere o integral

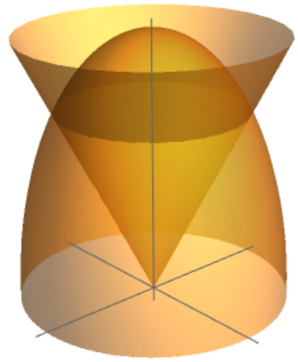
$$I = \int\int_R f(x,y)dx\, dy \;= \int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x,y)dy\, dx.$$

(a) [1 valor] Esboce a região R.

(b) [1.5 valores] Reescreva o integral I como integral duplo mas com outra ordem de integração, **sem o calcular**.

(c) [1.5 valores] Se $f(x,y) = xy$, calcule o integral I.

4. [2 valores] Considere a região S de $\mathbb{R}^3$ acima do plano $z = 0$, acima do cone de equação $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ e dentro do elipsóide de equação $3x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$. **Sem o calcular**, reescreva o seguinte integral através de integrais iterados e usando coordenadas esféricas



$$\int\int\int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz =$$

5. [1.5 valores] Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$f(tX) = t^3 f(X), \forall X \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que

$$\nabla f(X) \cdot X = 3f(X), \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

(Note que $\cdot$ é o produto interno de $\mathbb{R}^n$)