Departamento de Ciência de Computadores | FCUP

Modelos de Computação (CC218) | 2013/14

1º Teste (23.04.2014) | *duração: 3h+30m*

Uma resolução

Cotação: 1, 1.5, (2+4), 3, (1.5+1.5+2+1.5), 1, 1

1. Explique a ideia do método de McNaughton-Yamada-Thompson para a construção de um autómato finito que reconhece $\mathcal{L}(r^\star)$, sendo r uma expressão regular sobre Σ.

Resposta:

Para construir um AFND-ε que reconhece $\mathcal{L}(r^\star)$, começa por construir um AFND-ε que reconhece $\mathcal{L}(r)$, seguindo uma abordagem recursiva. Os autómatos que produz têm sempre um único estado final e do estado final não saem transições. Supondo que $A_r = (S, \Sigma, \delta, i_r, \{f_r\})$ é o AFND-ε que obteve para $\mathcal{L}(r)$, define

$$A_{r^\star} = (S \cup \{i, f\}, \Sigma, \delta', i, \{f\})$$

com dois novos estados i e f, sendo δ' a extensão de δ, com $\delta'(i, \varepsilon) = \{i_r, f\}$ e $\delta'(f_r, \varepsilon) = \{i_r, f\}$ e $\delta'(f, \varepsilon) = \emptyset$, e $\delta'(i, a) = \emptyset = \delta'(f, a)$, para $a \in \Sigma$.

2. Apresente a noção de *expressões regulares equivalentes* e prove que $(r + s^\star)^\star \equiv (r + s)^\star$.

Resposta:

Expressões regulares equivalentes são expressões regulares que descrevem a mesma linguagem.

Sendo R e S as linguagens descritas pelas expressões r e s, mostrar que $(r + s^\star)^\star \equiv (r + s)^\star$ equivale a mostrar que $(R \cup S^\star)^\star = (R \cup S)^\star$.

Por definição de fecho de Kleene, $S \subseteq S^\star$. Logo, por definição de união, $(R \cup S) \subseteq (R \cup S^\star)$. Consequentemente, por definição de fecho de Kleene, $(R \cup S)^\star \subseteq (R \cup S^\star)^\star$.

Para mostrar que também $(R \cup S)^\star \supseteq (R \cup S^\star)^\star$, basta ver que qualquer palavra $x \in (R \cup S^\star)^\star$ é uma sequência finita de palavras de R e $S^\star$, possivelmente zero ou uma. Como qualquer palavra de $S^\star$ é uma sequência finita de palavras de S, cada palavra de $S^\star$ que ocorra em x é uma sequência de palavras de S. Assim, concluimos que x é uma sequência de palavras de $R \cup S$ e, portanto, $x \in (R \cup S)^\star$.

3. Sejam L_1 e L_2 as linguagens de alfabeto $\{a, b\}$ assim definidas:

$$L_1 = \{a\}^\star\{abb\}\{b\}^\star \qquad L_2 = (\{bba\} \cup \{ba, a\}^\star)^\star$$

a) Defina informalmente L_1 e L_2

Resposta:

A linguagem L_1 é constituída pelas palavras formadas por a's e b's que têm abb como subpalavra e não têm a's à direita de b's.

A linguagem L_2 é $\{bba, ba, a\}^\star$ pela equivalência demonstrada em 2. Pode ser definida como o conjunto das sequências finitas de a's ou b's que não têm mais do que dois b's consecutivos e que não terminam em b.

b) Para cada uma das linguagens indicadas, apresente o autómato finito determinístico mínimo que a reconhece. Explique sucintamente e justifique a sua correção.

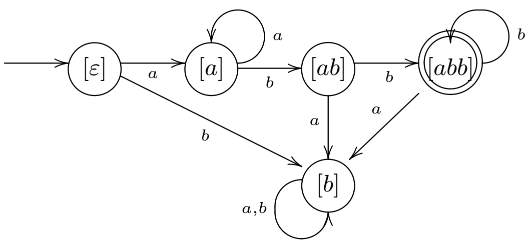
<u>*Resposta:*</u>

Pelo Teorema de Myhill-Nerode, o AFD mínimo que reconhece uma dada linguagem L de alfabeto Σ é dado por

$$A = (\Sigma^\star/R_L, \Sigma, \delta, [\varepsilon], F)$$

em que R_L é a relação de equivalência definida em $\Sigma^\star$ por $x\, R_L\, y$ sse para todo $z \in \Sigma^\star$ se tem $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$, o conjunto de estados $\Sigma^\star/R_L$ é o conjunto das classes de equivalência de R_L, $[x]$ denota a classe de equivalência de x, para todo x, o conjunto de estados finais $F = \{[x] \mid x \in L\}$, e a função de transição é definida por $\delta([x], a) = [xa]$, para todo $x \in \Sigma^\star$ e $a \in \Sigma$.

Para $L_1 = \{a\}^\star\{abb\}\{b\}^\star$, o AFD mínimo é:



$[\varepsilon] \neq [a]$ porque $(\varepsilon, a) \notin R_{L_1}$, pois para $z = bb$, tem-se $\varepsilon z \notin L_1$ e $az \in L_1$;

$[\varepsilon] \neq [ab]$ porque $(\varepsilon, ab) \notin R_{L_1}$, pois para $z = b$, tem-se $\varepsilon z \notin L_1$ e $abz \in L_1$;

$[\varepsilon] \neq [abb]$ porque $(\varepsilon, abb) \notin R_{L_1}$, pois para $z = \varepsilon$, tem-se $\varepsilon z \notin L_1$ e $abbz \in L_1$;

$[a] \neq [ab]$ porque $(a, ab) \notin R_{L_1}$, pois para $z = b$, tem-se $az \notin L_1$ e $abz \in L_1$;

$[a] \neq [abb]$ porque $(a, abb) \notin R_{L_1}$, pois para $z = \varepsilon$, tem-se $az \notin L_1$ e $abbz \in L_1$;

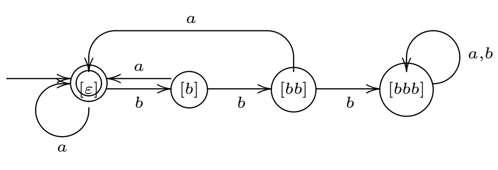
$[ab] \neq [abb]$ porque $(ab, abb) \notin R_{L_1}$, pois para $z = \varepsilon$, tem-se $abz \notin L_1$ e $abbz \in L_1$;

$[aa] = [a]$, porque $aaz \in L_1 \Leftrightarrow z \in \mathcal{L}(a^\star abbb^\star) \Leftrightarrow az \in L_1$;

$[abb] = [abbb]$, porque $aabz \in L_1 \Leftrightarrow z \in \mathcal{L}(b^\star) \Leftrightarrow abbz \in L_1$;

$[b] = [aba] = [abba]$ porque para $x \in \{b, aba, abba\}$ não se tem $xz \in L_1$ para nenhum z;
Assim, vemos também que $[b]$ não é nenhuma das classes $[\varepsilon], [a], [ab]$ e $[abb]$.

Para $L_2 = \{bba, ba, a\}^\star$, o AFD mínimo é:



$[\varepsilon] \neq [b]$, $[\varepsilon] \neq [bb]$, $[\varepsilon] \neq [bbb]$, porque $b, bb, bbb \notin L_2$ e $\varepsilon \in L_2$;

$[bbb] \neq [b]$, $[bbb] \neq [bb]$ pois para $z = a$, tem-se $bz \in L_2$ e $bbz \in L_2$ mas $bbbz \notin L_2$;

$[bbb] = [bbba] = [bbbb]$ pois, para todo $z \in \Sigma^\star$, tem-se $bbbz \notin L_2$, $bbbbz \notin L_2$, e $bbbaz \notin L_2$;

Como $[\varepsilon] = \{x \mid xz \in L_2 \text{ sse } z \in L_2\}$, concluimos que $[\varepsilon] = [ba] = [bba]$;

Finalmente, $[b] \neq [bb]$ pois $b(ba) \in L_2$ e $bb(ba) \notin L_2$.

4. Averigue a veracidade ou falsidade das afirmações seguintes sobre linguagens de alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, justificando.

a) A interseção, finita ou infinita, de linguagens regulares é regular.

> *Resposta:*
>
> Falso. Como $\bigcup_{i\in I} L_i = \overline{\bigcap_{i\in I} \overline{L_i}}$ e a classe de linguagens regulares é fechada para a complementação, concluiriamos que se a classe fosse fechada para a interseção infinita, também seria fechada para a união infinita. Mas, a classe de linguagens regulares é fechada para a união finita mas não é fechada para a união infinita.
>
> De facto, sendo qualquer linguagem L união de linguagens regulares, pois $L = \bigcup_{x\in L}\{x\}$ e qualquer linguagem finita é regular, concluiamos que, se a classe fosse fechada para a união infinita então todas as linguagens seriam regulares, o que é absurdo (pois sabemos que existem linguagens não regulares).

b) A linguagem $\{a^n ba^n \mid n > 1\}$ é união de linguagens regulares e não é regular.

> *Resposta:*
>
> Verdade. É união (infinita) de linguagens regulares porque $\{a^n ba^n \mid n > 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} F_n$, com $F_n = \{a^n ba^n\}$, para todo $n > 1$, e qualquer linguagem finita é regular ($|F_n| = 1$ e portanto F_n é regular).
>
> A linguagem $L = \{a^n ba^n \mid n > 1\}$ não é regular porque $(a^n b, a^m b) \notin R_L$, para todo (n, m) com $n \neq m$, pois para $z = a^n$, tem-se $a^n bz \in L$ e $a^m bz \notin L$. Portanto, o conjunto de classes de equivalência de R_L é infinito e, consequentemente, pelo Teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

c) Não existe uma linguagem não regular L tal que $L^\star$ seja regular.

> *Resposta:*
>
> Falso. A linguagem $L = \{a, b\} \cup \{a^n ba^n \mid n > 1\}$ não é regular (justificação análoga à que demos em 4b)), mas $L^\star = \{a, b\}^\star$ e, portanto, é trivialmente regular.
>
> De facto, podemos mesmo provar que: se M é uma linguagem não regular sobre Σ então $M \cup \Sigma$ não é regular e $(M \cup \Sigma)^\star = \Sigma^\star$ é regular.

> *Alternativas:*
>
> - Outro contra-exemplo: $L = \{a^p \mid p \text{ primo}\}$, linguagem que se demonstrou nas aulas não ser regular. Neste caso, $L^\star = \mathcal{L}(\varepsilon + aaa^\star)$. Tal resulta de qualquer inteiro maior ou igual a dois ser primo ou produto de primos. Se $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ for a decomposição de n em primos, para um certo $n \geq 2$, então podemos escrever a palavra a^n como justaposição de a^{p_1} exatamente $p_1^{(\alpha_1-1)} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ vezes. Por exemplo, como $18 = 2^1 3^2 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 9$, podemos escrever $a^{18} = a^2a^2a^2a^2a^2a^2a^2a^2a^2$ (embora também seja, $a^3a^3a^3a^3a^3a^3$), e portanto, $a^{18} \in L^\star$. A palavra $a^1 = a$ é a única que não pertence a $L^\star$ porque não é possível obter essa palavra por justaposição de palavras de L (pois 1 não é primo).
>
>   Notar que os expoentes estão a ser usados com dois significados diferentes.
> - Ainda, na linha do primeiro exemplo, bastaria dar como exemplo $L = \{a^p \mid p \text{ primo}\} \cup \{a\}$.
> - Também serviria $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$, que se provou nas aulas não ser regular. Neste caso $L^\star = \{a\}^\star$.

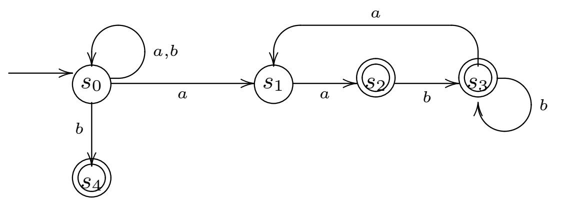
5. Seja $A = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_2, s_3, s_4\})$ um autómato finito não determinístico, em que δ é assim definida:

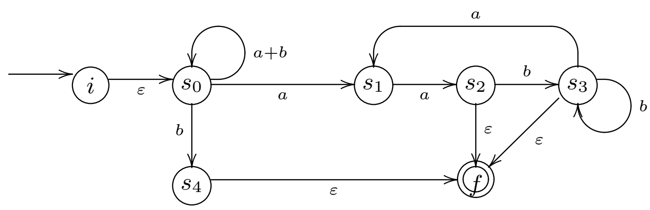
$$\begin{array}{lllll} \delta(s_0, a) = \{s_0, s_1\} & \delta(s_1, a) = \{s_2\} & \delta(s_2, a) = \{\} & \delta(s_3, a) = \{s_1\} & \delta(s_4, a) = \{\} \\ \delta(s_0, b) = \{s_0, s_4\} & \delta(s_1, b) = \{\} & \delta(s_2, b) = \{s_3\} & \delta(s_3, b) = \{s_3\} & \delta(s_4, b) = \{\} \end{array}$$

a) Determine uma expressão regular que descreva $\mathcal{L}(A)$ por aplicação do método de eliminação de estados de Brzozowski-McCluskey, começando por eliminar s_3.

Resposta:

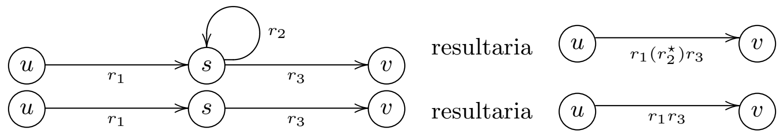
O AFND dado pode ser representado pelo diagrama abaixo, à esquerda:





O estado inicial não tem grau de entrada zero (por causa do lacete) e assim devemos criar um novo estado inicial i. Como há mais do que um estado final (e alguns com saídas), introduzimos um novo estado final f (sem saídas), que passará a ser o único final. Nos dois casos usamos transições por ε. Substituimos o lacete múltiplo em s_0 por um único etiquetado com a expressão $a + b$. O novo diagrama está acima à direita. As etiquetas já são expressões regulares.

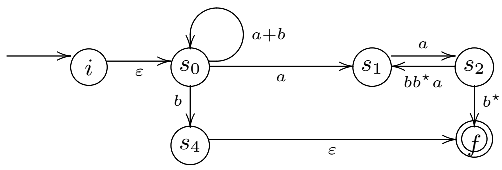
Segundo o algoritmo, a eliminação de um estado s faz-se substituindo cada par de ramos (u, s) e (s, v), com $u \neq s$ e $v \neq s$, por um novo ramo (u, v), cuja etiqueta é obtida assim:



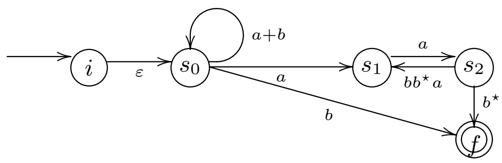
Quando o ramo (u, v) existe, com etiqueta r_4, por exemplo, então modifica-se a mesma para $r_4 + r_1(r_2^\star)r_3$ ou $r_4 + r_1r_3$, respectivamente. Usando estas regras, vamos proceder à aplicação do método.

Os estados podem ser eliminados por qualquer ordem, mas no enunciado é pedido que o primeiro seja s_3.

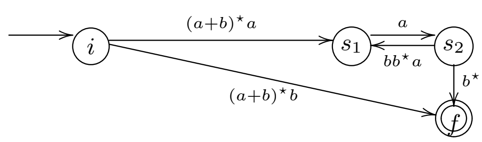
Na eliminação de s_3, os pares (u, v) afetados são (s_2, f) e (s_2, s_1). Usando $\varepsilon + bb^\star\varepsilon \equiv b^\star$, obtem-se:



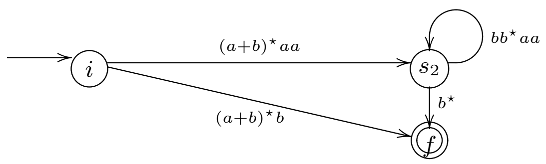
Para eliminar s_4, o par afetado é (s_0, f), e obtem-se:



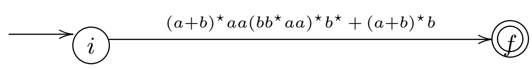
Para eliminar s_0, os pares afetados são (i, f) e (i, s_1), e obtem-se:



Para eliminar s_1, os pares afetados são (s_2, s_2) e (i, s_2), e obtem-se:



Finalmente, eliminamos s_2, obtendo:

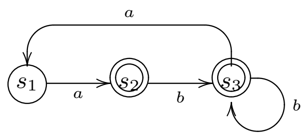


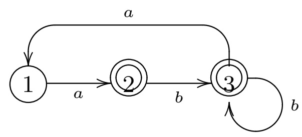
A linguagem aceite pelo autómato é descrita pela expressão regular $(a + b)^\star aa(bb^\star aa)^\star b^\star + (a + b)^\star b$.

b) Por aplicação do método de Kleene, determine a expressão regular das palavras que levam o autómato dos estado s_2 a um estado final sem passar em s_0. Explique.

Resposta:

Nas condições indicadas no enunciado, só será relevante a parte do diagrama de transição representada abaixo, à esquerda.





Para aplicar o método, atribuimos números de 1 a 3 aos estados, como indicámos acima à direita, e a expressão que pretendemos obter é $r_{22}^{(3)} + r_{23}^{(3)}$.

No método de Kleene, usamos $r_{ij}^{(k)}$ para designar a expressão que descreve o conjunto das palavras que levam o autómato do estado i ao estado j podendo passar por estados intermédios identificados por números de 1 a k. As expressões vão sendo construídas por fases: as expressões básicas $r_{ij}^{(0)}$ correspondem a acessibilidade direta e $r_{ij}^{(k)}$ é definida por $r_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k-1)} + r_{ik}^{(k-1)}(r_{kk}^{(k-1)})^\star r_{kj}^{(k-1)}$, para todo $k \geq 1$, e todo par (i, j).

Como pretendemos $r_{22}^{(3)} + r_{23}^{(3)}$, só calculamos estas duas expressões para $k = 3$, e como $r_{22}^{(3)} = r_{22}^{(2)} + r_{23}^{(2)}(r_{33}^{(2)})^\star r_{32}^{(2)}$ e $r_{23}^{(3)} = r_{23}^{(2)} + r_{23}^{(2)}(r_{33}^{(2)})^\star r_{33}^{(2)}$, limitar-nos-emos a calcular as expressões relevantes também quando $k = 2$.

Aplicando ao exemplo, obtém-se:

$r_{11}^{(0)} = \varepsilon$	$r_{11}^{(1)} = r_{11}^{(0)} + r_{11}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{11}^{(0)} \equiv \varepsilon$	
$r_{12}^{(0)} = a$	$r_{12}^{(1)} = r_{12}^{(0)} + r_{11}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{12}^{(0)} \equiv r_{12}^{(0)} = a$	
$r_{13}^{(0)} = \emptyset$	$r_{13}^{(1)} = r_{13}^{(0)} + r_{11}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{13}^{(0)} \equiv r_{13}^{(0)} = \emptyset$	
$r_{21}^{(0)} = \emptyset$	$r_{21}^{(1)} = r_{21}^{(0)} + r_{21}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{11}^{(0)} \equiv r_{21}^{(0)} = \emptyset$	
$r_{22}^{(0)} = \varepsilon$	$r_{22}^{(1)} = r_{22}^{(0)} + r_{21}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{12}^{(0)} = \varepsilon + \emptyset \equiv \varepsilon$	$r_{22}^{(2)} = r_{22}^{(1)} + r_{22}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{22}^{(1)} \equiv \varepsilon$
$r_{23}^{(0)} = b$	$r_{23}^{(1)} = r_{23}^{(0)} + r_{21}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{13}^{(0)} = b + \emptyset \equiv b$	$r_{23}^{(2)} = r_{23}^{(1)} + r_{22}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{23}^{(1)} \equiv b$
$r_{31}^{(0)} = a$	$r_{31}^{(1)} = r_{31}^{(0)} + r_{31}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{11}^{(0)} \equiv a$	
$r_{32}^{(0)} = \emptyset$	$r_{32}^{(1)} = r_{32}^{(0)} + r_{31}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{12}^{(0)} \equiv \emptyset + a\varepsilon a \equiv aa$	$r_{32}^{(2)} = r_{32}^{(1)} + r_{32}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{22}^{(1)} \equiv aa$
$r_{33}^{(0)} = \varepsilon + b$	$r_{33}^{(1)} = r_{33}^{(0)} + r_{31}^{(0)}(r_{11}^{(0)})^\star r_{13}^{(0)} \equiv \varepsilon + b + \emptyset \equiv \varepsilon + b$	$r_{33}^{(2)} = r_{33}^{(1)} + r_{32}^{(1)}(r_{22}^{(1)})^\star r_{23}^{(1)} \equiv \varepsilon + b + aab$

Finalmente, temos

$$r_{22}^{(3)} = r_{22}^{(2)} + r_{23}^{(2)}(r_{33}^{(2)})^\star r_{32}^{(2)} = \varepsilon + b(\varepsilon + b + aab)^\star aa \equiv \varepsilon + b(b + aab)^\star aa$$

$$r_{23}^{(3)} = r_{23}^{(2)} + r_{23}^{(2)}(r_{33}^{(2)})^\star r_{33}^{(2)} \equiv b(\varepsilon + b + aab)^\star \equiv b(b + aab)^\star$$

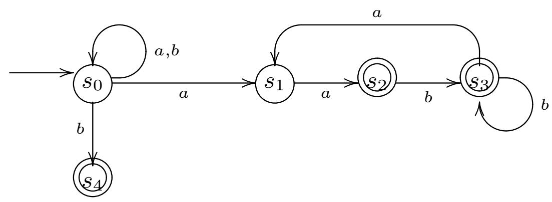
obtendo a expressão procurada

$$r_{22}^{(3)} + r_{23}^{(3)} \equiv \varepsilon + b(b + aab)^\star aa + b(b + aab)^\star \equiv \varepsilon + b(b + aab)^\star (aa + \varepsilon)$$

c) Por aplicação de um algoritmo de conversão, determine um AFD equivalente a A. Explique

Resposta:

Como vimos, o diagrama de transição do autómato A é:

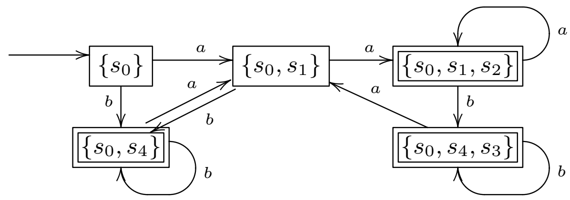


Para $A = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_2, s_3, s_4\})$, usando a construção baseada em subconjuntos, obtém-se um AFD A' equivalente a A se se definir

$$A' = (2^S, \{a, b\}, \delta', \{s_0\}, \{E \mid E \in 2^S \wedge E \cap \{s_2, s_3, s_4\} \neq \emptyset\})$$

com $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ e $\delta'(E, t) = \cup_{q \in E} \delta(q, t)$, para todo $(E, t) \in 2^S \times \{a, b\}$.

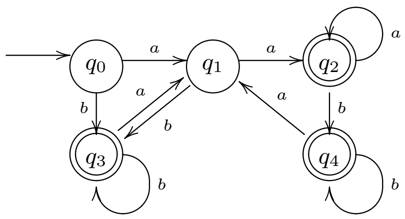
Como $|2^S| = 32$, este autómato é relativamente grande. Contudo, muitos desses estados não são acessíveis do seu estado inicial (isto é, de $\{s_0\}$). Se se descartar os inacessíveis, criando apenas aqueles estados que vão surgindo numa pesquisa a partir de $\{s_0\}$, obtem-se um AFD equivalente mas mais simples:



d) Por aplicação do algoritmo de Moore (minimização de AFDs), averigue se o autómato que obteve na alínea anterior é mínimo e, caso não seja, apresente o mínimo.

Resposta:

Para facilitar, introduzimos novas designações para os estados. Os *estados finais* não são equivalentes aos *estados não finais* e, por isso, começamos por assinalar todos esses pares (final/não final) como distintos.



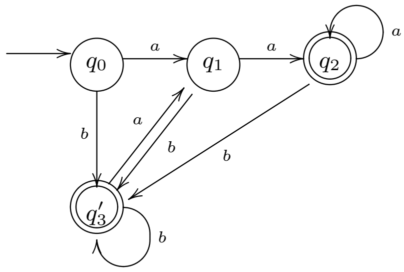
q_0	$=$				
q_1		$=$			
q_2	X	X	$=$		
q_3	X	X		$=$	
q_4	X	X			$=$
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

Para os pares que sobram, temos:

- $\delta'(q_0, a) = q_1$ e $\delta'(q_1, a) = q_2$ e já sabemos que q_1 e q_2 não são equivalentes. Logo, q_0 não é equivalente a q_1.
- $\delta'(q_2, a) = q_2$ e $\delta'(q_3, a) = q_1$ e sabemos que q_2 e q_1 não são equivalentes. Logo, q_2 e q_3 não são equivalentes.
- Por razão análoga, q_2 e q_4 não são equivalentes, pois $\delta'(q_2, a) = q_2$ e $\delta'(q_4, a) = q_1$.
- Finalmente, para (q_3, q_4) tem-se $\delta'(q_3, a) = q_1$ e $\delta'(q_4, a) = q_1$ e $\delta'(q_3, b) = q_3$ e $\delta'(q_4, b) = q_4$, pelo que, não sendo possível distinguir q_3 de q_4, concluimos que são equivalentes.

A tabela final e o AFD mínimo estão abaixo. Designámos por q_3' o estado que resulta da junção de q_3 e q_4.

q_0	$=$				
q_1	X	$=$			
q_2	X	X	$=$		
q_3	X	X	X	$=$	
q_4	X	X	X	$=$	$=$
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4



6. Sejam $A_1 = (S_1, \{a, b\}, \delta_1, s_0^{(1)}, F_1)$ e $A_2 = (S_2, \{a, b\}, \delta_2, s_0^{(2)}, F_2)$ dois AFDs, com $s_0^{(1)} \in S_1$ e $s_0^{(2)} \in S_2$. Apresente um AFD que permita verificar se $\mathcal{L}(A_1) \cup \mathcal{L}(A_2) = \{a, b\}^\star$.

Resposta:

Com base na construção do autómato produto, definimos o AFD $A = (S_1 \times S_2, \{a, b\}, \delta, (s_0^{(1)}, s_0^{(2)}), F)$ com $\delta((s_1, s_2), t) = (\delta((s_1, t), \delta(s_2, t))$, para todo $t \in \Sigma$, e $F = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in F_1 \text{ ou } s_2 \in F_2\}$, ou seja $F = (S_1 \times F_2) \cup (F_1 \times S_2)$. Com este conjunto de estados finais, a linguagem reconhecida por A é $\mathcal{L}(A_2) \cup \mathcal{L}(A_2)$. Esta linguagem é $\Sigma^\star$ se e só se o conjunto de estados de A acessíveis do estado inicial $(s_0^{(1)}, s_0^{(2)})$ só contiver estados finais (esse conjunto é igual a F se os AFDs de partida não tiverem estados não acessíveis do estado inicial).

7. Mostre (explicitamente) que a linguagem $\{a, ab, abb\} \cup (\{bba\}\{bba\}^\star)$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$ satisfaz a condição do lema da repetição para linguagens regulares.

Resposta:

O lema diz que se L for regular, então existe $n > 0$ tal que todas as palavras $x \in L$, com $|x| \geq n$, têm algum prefixo uv tal que $|uv| \leq n$ e $v \neq \varepsilon$, e v pode ser retirado ou repetido quantas vezes quisermos, obtendo sempre palavras de L (ou seja, sendo $x = uvw$, para tal uv, teremos $uv^i w \in L$, qualquer que seja $i \geq 0$).

Neste caso, podemos tomar, por exemplo, $n = 6$ (de facto, basta tomar $n = 4$). Qualquer palavra $x \in L$ com $|x| \geq 6$ é da forma $(bba)^p$, para algum $p \geq 2$. Então, se tomarmos, $u = \varepsilon$, $v = bba$ e $w = (bba)^{p-1}$ temos, $x = uvw$, com $|uv| = 3 \leq n$ e $v \neq \varepsilon$ e é verdade que para todo $i \geq 0$ se tem $uv^i w \in L$ pois, $uv^i w = \varepsilon(bba)^i (bba)^{p-1} = (bba)^{p-1+i}$, com $p - 1 + i \geq 1$, uma vez que $p \geq 2$ e $i \geq 0$.

Assim, $uv^i w \in \{bba\}\{bba\}^\star$, para todo $i \geq 0$, e consequentemente, $uv^i w$ pertence à linguagem (c.q.d.)