CC1004 - Modelos de Computação
Pratica 1 - Resolução de alguns exercícios da Folha 1

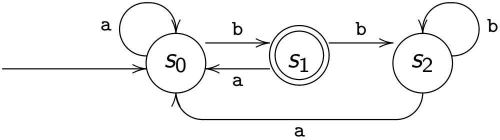
Ana Paula Tomás

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

22-26 de Fevereiro 2021

Problema 1a)

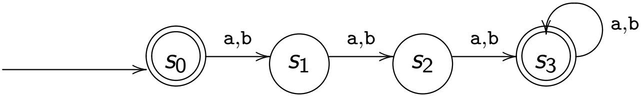
Linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ que terminam em b mas não em bb



s_0: palavras que não terminam em b (i.e., ε ou que terminam em a)
s_1: palavras que terminam em b mas não em bb
s_2: palavras que terminam em bb

Problema 1b)

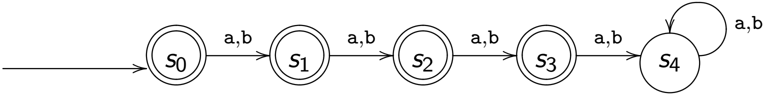
Linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ cujo comprimento é zero ou maior do que dois.



s_0: palavras de comprimento 0 (ou seja, apenas ε)
s_1: palavras de comprimento 1 (ou seja, apenas `a` e `b`)
s_2: palavras de comprimento 2 (ou seja, apenas , `aa`, `ab`, `ba` e `bb`)
s_3: palavras de comprimento 3 ou superior

Problema 1c)

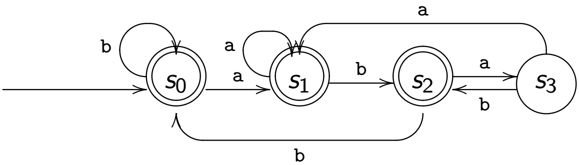
Linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ cujo comprimento é inferior a quatro.



s_0: palavras de comprimento 0 (ou seja, apenas ε)
s_1: palavras de comprimento 1 (ou seja, apenas a e b)
s_2: palavras de comprimento 2 (ou seja, apenas , aa, ab, ba e bb)
s_3: palavras de comprimento 3
s_4: palavras de comprimento 4 ou superior

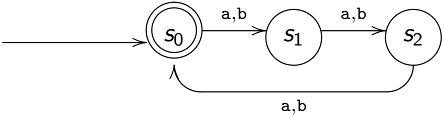
Problema 1e)

Linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ que não terminam em aba



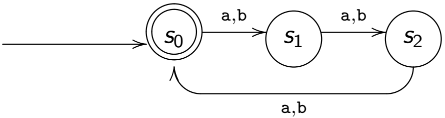
s_0: ε ou termina em b mas não em ab
s_1: termina em a mas não em aba
s_2: terminam em ab
s_3: termina em aba

Problema Adicional



Que linguagem reconhece?

O conjunto palavas de alfabeto $\{a, b\}$ cujo **comprimento é múltiplo de 3**.
A palavra mais pequena que aceita é ε, com comprimento zero.

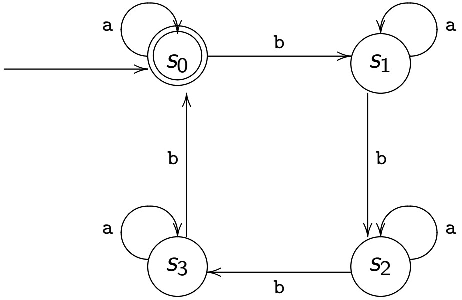


Que linguagem reconhece?

O conjunto palavas de alfabeto $\{a, b\}$ cujo **comprimento é múltiplo de 3**.
A palavra mais pequena que aceita é ε, com comprimento zero.

Problema 1h)

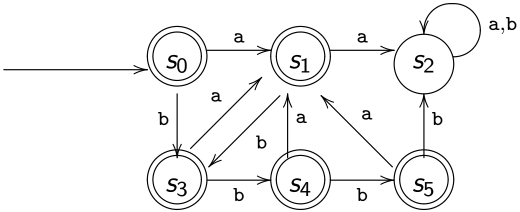
Linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ cujo número de b's é múltiplo de 4



s_0: número de b's é múltiplo de 4 (i.e., é $4k$, com $k \in \mathbb{N}$)
s_1: número de b's excede em 1 unidade um múltiplo de 4 (é $1 + 4k$, com $k \in \mathbb{N}$)
s_2: número de b's excede em 2 unidades um múltiplo de 4 (é $2 + 4k$, com $k \in \mathbb{N}$)
s_3: número de b's excede em 3 unidades um múltiplo de 4 (é $3 + 4k$, com $k \in \mathbb{N}$)

Problema 1i)

Linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ cujo número de b's consecutivos não excede três e não tem a's consecutivos.



s_0 : $\{\varepsilon\}$
s_1 : $\{x \mid x$ termina em a e não tem aa nem bbbb como subpalavra$\}$
s_2 : $\{x \mid x$ tem aa ou bbbb como subpalavra$\}$
s_3 : $\{x \mid x$ termina em b mas não em bb e não tem aa nem bbbb como subpalavra$\}$
s_4 : $\{x \mid x$ termina em bb mas não em bbb e não tem aa nem bbbb como subpalavra$\}$
s_5 : $\{x \mid x$ termina em bbb e não tem aa nem bbbb como subpalavra$\}$

Problema 3

- 3a) Quaisquer que sejam L e M, se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. **Verdade.**

  Seja $x \in L$. Como $\varepsilon \in M$ então, por definição de LM, tem-se $x\varepsilon \in LM$. Como $x\varepsilon = x$, concluimos que $x \in LM$. Logo, $L \subseteq LM$.

- 3b) Quaisquer que sejam L e M, se $\emptyset \neq L \subseteq LM$ então $\varepsilon \in M$. **Verdade.**

  Suponhamos, por **redução ao absurdo**, que $\emptyset \neq L \subseteq LM$ e $\varepsilon \notin M$.

  Sejam $x \in L$ e $y \in M$, quaisquer. Notar que y existe porque $M \neq \emptyset$. De facto, sendo L não vazia e $L \subseteq LM$, se M fosse vazia, teriamos uma contradição, pois $LM = L\emptyset = \emptyset \not\supseteq L$.

  Como assumimos $y \neq \varepsilon$, a palavra xy tem mais símbolos do que x, dado que $|xy| = |x| + |y| > |x|$.

  Isso implica que **a palavra de L que tem comprimento mínimo não estaria em** LM, contrariando $L \subseteq LM$. O absurdo resultou de se ter suposto que $\varepsilon \notin M$. Portanto, $\varepsilon \in M$.

Em $\mathbb{R}$, temos, $|xy| = |x \times y| = |x| \times |y|$, para o valor absoluto. Em CC2006, $|x|$ designa o número de símbolos em x e xy a concatenação de palavras. Portanto, $|xy| = |x| + |y|$

- 3a) Quaisquer que sejam L e M, se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. **Verdade.**

  Seja $x \in L$. Como $\varepsilon \in M$ então, por definição de LM, tem-se $x\varepsilon \in LM$. Como $x\varepsilon = x$, concluimos que $x \in LM$. Logo, $L \subseteq LM$.

- 3b) Quaisquer que sejam L e M, se $\emptyset \neq L \subseteq LM$ então $\varepsilon \in M$. **Verdade.**

  Suponhamos, por **redução ao absurdo**, que $\emptyset \neq L \subseteq LM$ e $\varepsilon \notin M$.

  Sejam $x \in L$ e $y \in M$, quaisquer. Notar que y existe porque $M \neq \emptyset$. De facto, sendo L não vazia e $L \subseteq LM$, se M fosse vazia, teriamos uma contradição, pois $LM = L\emptyset = \emptyset \not\supseteq L$.

  Como assumimos $y \neq \varepsilon$, a palavra xy tem mais símbolos do que x, dado que $|xy| = |x| + |y| > |x|$.

  Isso implica que **a palavra de L que tem comprimento mínimo não estaria em** LM, contrariando $L \subseteq LM$. O absurdo resultou de se ter suposto que $\varepsilon \notin M$. Portanto, $\varepsilon \in M$.

Em $\mathbb{R}$, temos, $|xy| = |x \times y| = |x| \times |y|$, para o valor absoluto. Em CC2006, $|x|$ designa o número de símbolos em x e xy a concatenação de palavras. Portanto, $|xy| = |x| + |y|$

Problema 3

- 3a) Quaisquer que sejam L e M, se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. **Verdade.**

  Seja $x \in L$. Como $\varepsilon \in M$ então, por definição de LM, tem-se $x\varepsilon \in LM$. Como $x\varepsilon = x$, concluimos que $x \in LM$. Logo, $L \subseteq LM$.

- 3b) Quaisquer que sejam L e M, se $\emptyset \neq L \subseteq LM$ então $\varepsilon \in M$. **Verdade.**

  Suponhamos, por **redução ao absurdo**, que $\emptyset \neq L \subseteq LM$ e $\varepsilon \notin M$.

  Sejam $x \in L$ e $y \in M$, quaisquer. Notar que y existe porque $M \neq \emptyset$. De facto, sendo L não vazia e $L \subseteq LM$, se M fosse vazia, teriamos uma contradição, pois $LM = L\emptyset = \emptyset \not\supseteq L$.

  Como assumimos $y \neq \varepsilon$, a palavra xy tem mais símbolos do que x, dado que $|xy| = |x| + |y| > |x|$.

  Isso implica que **a palavra de L que tem comprimento mínimo não estaria em** LM, contrariando $L \subseteq LM$. O absurdo resultou de se ter suposto que $\varepsilon \notin M$. Portanto, $\varepsilon \in M$.

Em $\mathbb{R}$, temos, $|xy| = |x \times y| = |x| \times |y|$, para o valor absoluto. Em CC2006, $|x|$ designa o número de símbolos em x e xy a concatenação de palavras. Portanto, $|xy| = |x| + |y|$

Problema 3

- 3a) Quaisquer que sejam L e M, se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. **Verdade.**

  Seja $x \in L$. Como $\varepsilon \in M$ então, por definição de LM, tem-se $x\varepsilon \in LM$. Como $x\varepsilon = x$, concluimos que $x \in LM$. Logo, $L \subseteq LM$.

- 3b) Quaisquer que sejam L e M, se $\emptyset \neq L \subseteq LM$ então $\varepsilon \in M$. **Verdade.**

  Suponhamos, por **redução ao absurdo**, que $\emptyset \neq L \subseteq LM$ e $\varepsilon \notin M$.

  Sejam $x \in L$ e $y \in M$, quaisquer. Notar que y existe porque $M \neq \emptyset$. De facto, sendo L não vazia e $L \subseteq LM$, se M fosse vazia, teriamos uma contradição, pois $LM = L\emptyset = \emptyset \not\supseteq L$.

  Como assumimos $y \neq \varepsilon$, a palavra xy tem mais símbolos do que x, dado que $|xy| = |x| + |y| > |x|$.

  Isso implica que **a palavra de L que tem comprimento mínimo não estaria em LM**, contrariando $L \subseteq LM$. O absurdo resultou de se ter suposto que $\varepsilon \notin M$. Portanto, $\varepsilon \in M$.

Em $\mathbb{R}$, temos, $|xy| = |x \times y| = |x| \times |y|$, para o valor absoluto. Em CC2006, $|x|$ designa o número de símbolos em x e xy a concatenação de palavras. Portanto, $|xy| = |x| + |y|$

Problema 3

- 3a) Quaisquer que sejam L e M, se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. **Verdade.**

  Seja $x \in L$. Como $\varepsilon \in M$ então, por definição de LM, tem-se $x\varepsilon \in LM$. Como $x\varepsilon = x$, concluimos que $x \in LM$. Logo, $L \subseteq LM$.

- 3b) Quaisquer que sejam L e M, se $\emptyset \neq L \subseteq LM$ então $\varepsilon \in M$. **Verdade.**

  Suponhamos, por **redução ao absurdo**, que $\emptyset \neq L \subseteq LM$ e $\varepsilon \notin M$.

  Sejam $x \in L$ e $y \in M$, quaisquer. Notar que y existe porque $M \neq \emptyset$. De facto, sendo L não vazia e $L \subseteq LM$, se M fosse vazia, teriamos uma contradição, pois $LM = L\emptyset = \emptyset \not\supseteq L$.

  Como assumimos $y \neq \varepsilon$, a palavra xy tem mais símbolos do que x, dado que $|xy| = |x| + |y| > |x|$.

  Isso implica que **a palavra de L que tem comprimento mínimo não estaria em** LM, contrariando $L \subseteq LM$. O absurdo resultou de se ter suposto que $\varepsilon \notin M$. Portanto, $\varepsilon \in M$.

Em $\mathbb{R}$, temos, $|xy| = |x \times y| = |x| \times |y|$, para o valor absoluto. Em CC2006, $|x|$ designa o número de símbolos em x e xy a concatenação de palavras. Portanto, $|xy| = |x| + |y|$

Problema 3

- 3c) Qualquer que seja L, se $\varepsilon \notin L$ então $\varepsilon \notin L^\star$.

  Falso. Por definição de fecho de Kleene, ε pertence sempre a $L^\star$.

- 3d) Quaisquer que sejam L e M, se $LM = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Falso. Basta que $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$.

  Por exemplo, se $L = \emptyset$ e $M = \Sigma^\star$, tem-se $LM = \emptyset$.

- 3e) Quaisquer que sejam L e M, se $LM \neq \emptyset$ então $L \neq \emptyset$ e $M \neq \emptyset$.

  Verdade. Porque, se $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$, então $LM = \emptyset$.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Verdade. Todos os elementos de L e todos os elementos de M pertencem a $L \cup M$. Logo, se $L \cup M = \emptyset$, nenhum dos dois conjuntos tem elementos.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \{\varepsilon\}$ então $L = M = \{\varepsilon\}$.

  Falso. Basta $L = \{\varepsilon\}$ e $M = \{\}$. Ou, $M = \{\varepsilon\}$ e $L = \{\}$.

Problema 3

- 3c) Qualquer que seja L, se $\varepsilon \notin L$ então $\varepsilon \notin L^\star$.

  Falso. Por definição de fecho de Kleene, ε pertence sempre a $L^\star$.

- 3d) Quaisquer que sejam L e M, se $LM = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Falso. Basta que $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$.

  Por exemplo, se $L = \emptyset$ e $M = \Sigma^\star$, tem-se $LM = \emptyset$.

- 3e) Quaisquer que sejam L e M, se $LM \neq \emptyset$ então $L \neq \emptyset$ e $M \neq \emptyset$.

  Verdade. Porque, se $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$, então $LM = \emptyset$.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Verdade. Todos os elementos de L e todos os elementos de M pertencem a $L \cup M$. Logo, se $L \cup M = \emptyset$, nenhum dos dois conjuntos tem elementos.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \{\varepsilon\}$ então $L = M = \{\varepsilon\}$.

  Falso. Basta $L = \{\varepsilon\}$ e $M = \{\}$. Ou, $M = \{\varepsilon\}$ e $L = \{\}$.

Problema 3

- 3c) Qualquer que seja L, se $\varepsilon \notin L$ então $\varepsilon \notin L^\star$.

  Falso. Por definição de fecho de Kleene, ε pertence sempre a $L^\star$.

- 3d) Quaisquer que sejam L e M, se $LM = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Falso. Basta que $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$.

  Por exemplo, se $L = \emptyset$ e $M = \Sigma^\star$, tem-se $LM = \emptyset$.

- 3e) Quaisquer que sejam L e M, se $LM \neq \emptyset$ então $L \neq \emptyset$ e $M \neq \emptyset$.

  Verdade. Porque, se $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$, então $LM = \emptyset$.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Verdade. Todos os elementos de L e todos os elementos de M pertencem a $L \cup M$. Logo, se $L \cup M = \emptyset$, nenhum dos dois conjuntos tem elementos.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \{\varepsilon\}$ então $L = M = \{\varepsilon\}$.

  Falso. Basta $L = \{\varepsilon\}$ e $M = \{\}$. Ou, $M = \{\varepsilon\}$ e $L = \{\}$.

Problema 3

- 3c) Qualquer que seja L, se $\varepsilon \notin L$ então $\varepsilon \notin L^\star$.

  Falso. Por definição de fecho de Kleene, ε pertence sempre a $L^\star$.

- 3d) Quaisquer que sejam L e M, se $LM = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Falso. Basta que $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$.
  Por exemplo, se $L = \emptyset$ e $M = \Sigma^\star$, tem-se $LM = \emptyset$.

- 3e) Quaisquer que sejam L e M, se $LM \neq \emptyset$ então $L \neq \emptyset$ e $M \neq \emptyset$.

  Verdade. Porque, se $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$, então $LM = \emptyset$.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  Verdade. Todos os elementos de L e todos os elementos de M pertencem a $L \cup M$. Logo, se $L \cup M = \emptyset$, nenhum dos dois conjuntos tem elementos.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \{\varepsilon\}$ então $L = M = \{\varepsilon\}$.

  Falso. Basta $L = \{\varepsilon\}$ e $M = \{\}$. Ou, $M = \{\varepsilon\}$ e $L = \{\}$.

Problema 3

- 3c) Qualquer que seja L, se $\varepsilon \notin L$ então $\varepsilon \notin L^\star$.

  $\boxed{\textbf{Falso.}}$ Por definição de fecho de Kleene, ε pertence sempre a $L^\star$.

- 3d) Quaisquer que sejam L e M, se $LM = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  $\boxed{\textbf{Falso.}}$ Basta que $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$.

  Por exemplo, se $L = \emptyset$ e $M = \Sigma^\star$, tem-se $LM = \emptyset$.

- 3e) Quaisquer que sejam L e M, se $LM \neq \emptyset$ então $L \neq \emptyset$ e $M \neq \emptyset$.

  $\boxed{\textbf{Verdade.}}$ Porque, se $L = \emptyset$ ou $M = \emptyset$, então $LM = \emptyset$.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \emptyset$ então $L = \emptyset$ e $M = \emptyset$.

  $\boxed{\textbf{Verdade.}}$ Todos os elementos de L e todos os elementos de M pertencem a $L \cup M$. Logo, se $L \cup M = \emptyset$, nenhum dos dois conjuntos tem elementos.

- 3f) Quaisquer que sejam L e M, se $L \cup M = \{\varepsilon\}$ então $L = M = \{\varepsilon\}$.

  $\boxed{\textbf{Falso.}}$ Basta $L = \{\varepsilon\}$ e $M = \{\}$. Ou, $M = \{\varepsilon\}$ e $L = \{\}$.