# CC1004 - Modelos de Computação
# Teórica 18

Ana Paula Tomás

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Maio 2021

# Autómatos de Pilha (*Pushdown automata*)

- Um autómato de pilha é um modelo duma máquina que tem uma **memória infinita** (a pilha) embora tenha um **conjunto de estados finito**.
- Cada transição é determinada pelo estado atual, pelo símbolo no topo da pilha e possivelmente pelo símbolo da palavra que está a ler na fita.
- Em cada transição, o autómato pode **alterar ou manter o estado** e **substituir ou manter o topo da pilha**.
- Se o topo da pilha for $X$ e o substituir por $X_1X_2\ldots X_k$, com $k \geq 1$, e $X_i \in \Gamma$, então retira $X$ e coloca sucessivamente $X_k, \ldots, X_2X_1$, passando o topo a ser $X_1$. Convenciona-se que *o símbolo mais à esquerda é o que fica no topo.*
- Se substitui por $X$ por $\varepsilon$, o topo é retirado. Se substitui $X$ por $X$, não há alteração da pilha.
- Se a pilha estiver vazia, não pode efetuar qualquer transição.

# Autómatos de Pilha (*Pushdown automata*)

- Um autómato de pilha é um modelo duma máquina que tem uma **memória infinita** (a pilha) embora tenha um **conjunto de estados finito**.
- Cada transição é determinada pelo estado atual, pelo símbolo no topo da pilha e possivelmente pelo símbolo da palavra que está a ler na fita.
- Em cada transição, o autómato pode **alterar ou manter o estado** e **substituir ou manter o topo da pilha**.
- Se o topo da pilha for $X$ e o substituir por $X_1X_2\ldots X_k$, com $k \geq 1$, e $X_i \in \Gamma$, então retira $X$ e coloca sucessivamente $X_k, \ldots, X_2X_1$, passando o topo a ser $X_1$. Convenciona-se que *o símbolo mais à esquerda é o que fica no topo.*
- Se substitui por $X$ por $\varepsilon$, o topo é retirado. Se substitui $X$ por $X$, não há alteração da pilha.
- Se a pilha estiver vazia, não pode efetuar qualquer transição.

# Autómatos de Pilha (*Pushdown automata*)

- Um autómato de pilha é um modelo duma máquina que tem uma **memória infinita** (a pilha) embora tenha um **conjunto de estados finito**.
- Cada transição é determinada pelo estado atual, pelo símbolo no topo da pilha e possivelmente pelo símbolo da palavra que está a ler na fita.
- Em cada transição, o autómato pode **alterar ou manter o estado** e **substituir ou manter o topo da pilha**.
- Se o topo da pilha for $X$ e o substituir por $X_1X_2\ldots X_k$, com $k \geq 1$, e $X_i \in \Gamma$, então retira $X$ e coloca sucessivamente $X_k, \ldots, X_2X_1$, passando o topo a ser $X_1$. Convenciona-se que *o símbolo mais à esquerda é o que fica no topo.*
- Se substitui por $X$ por $\varepsilon$, o topo é retirado. Se substitui $X$ por $X$, não há alteração da pilha.
- Se a pilha estiver vazia, não pode efetuar qualquer transição.

# Autómatos de Pilha (*Pushdown automata*)

- Um autómato de pilha é um modelo duma máquina que tem uma **memória infinita** (a pilha) embora tenha um **conjunto de estados finito**.
- Cada transição é determinada pelo estado atual, pelo símbolo no topo da pilha e possivelmente pelo símbolo da palavra que está a ler na fita.
- Em cada transição, o autómato pode **alterar ou manter o estado** e **substituir ou manter o topo da pilha**.
- Se o topo da pilha for $X$ e o substituir por $X_1X_2\ldots X_k$, com $k \geq 1$, e $X_i \in \Gamma$, então retira $X$ e coloca sucessivamente $X_k, \ldots, X_2X_1$, passando o topo a ser $X_1$. Convenciona-se que *o símbolo mais à esquerda é o que fica no topo.*
- Se substitui por $X$ por $\varepsilon$, o topo é retirado. Se substitui $X$ por $X$, não há alteração da pilha.
- Se a pilha estiver vazia, não pode efetuar qualquer transição.

# Autómatos de Pilha (*Pushdown automata*)

Um autómato de pilha $\mathcal{A}$ é um definido por

$$A = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$$

sendo

- $S$ o **conjunto de estados**, $S$ é finito,
- $\Sigma$ o **alfabeto de entrada**,
- $\Gamma$ o **alfabeto da pilha**,
- $s_0 \in S$ o **estado inicial**, $Z_0 \in \Gamma$ o **símbolo inicial** na pilha,
- $F$ o conjunto de **estados finais**,
- $\delta$ a **função de transição**, que é uma função de $S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ no conjunto dos subconjuntos de $S \times \Gamma^\star$.

NB: $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$ ou seja, o conjunto dos ternos ordenados.

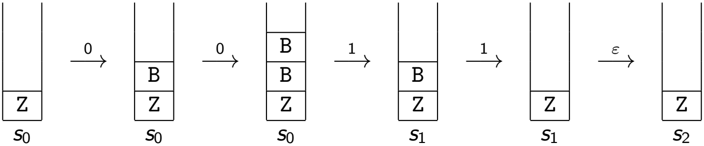
# Autómatos de Pilha - Aceitação por Estados Finais

**Exemplo 1:** Seja $A = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{s_2\})$ um autómato de pilha, com aceitação por estados finais, e

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_2, Z)\} & \qquad & \delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\
\delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} & & \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & & \delta(s_1, \varepsilon, Z) & = & \{(s_2, Z)\}
\end{array}
$$

e $\delta(s, \alpha, X) = \{\ \}$ para os restantes ternos $(s, \alpha, X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

**Vamos ilustrar esquematicamente o processamento da palavra 0011.**




A **linguagem aceite pelo autómato por estados finais** é $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*$x \in \Sigma^\star$ é aceite* **por estados finais** *se $x$ puder levar o autómato da configuração inicial $(s_0, x, Z)$ a uma configuração $(s_2, \varepsilon, \gamma)$, com $\gamma \in \Gamma^\star$.*

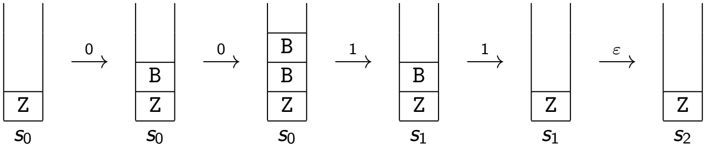
# Autómatos de Pilha - Aceitação por Estados Finais

**Exemplo 1:** Seja $A = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{s_2\})$ um autómato de pilha, com aceitação por estados finais, e

$$\begin{array}{rclcrcl} \delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_2, Z)\} & \qquad & \delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\ \delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} & & \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & & \delta(s_1, \varepsilon, Z) & = & \{(s_2, Z)\} \end{array}$$

e $\delta(s, \alpha, X) = \{\ \}$ para os restantes ternos $(s, \alpha, X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

**Vamos ilustrar esquematicamente o processamento da palavra 0011.**




A **linguagem aceite pelo autómato por estados finais** é $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*$x \in \Sigma^\star$ é aceite **por estados finais** se $x$ puder levar o autómato da configuração inicial $(s_0, x, Z)$ a uma configuração $(s_2, \varepsilon, \gamma)$, com $\gamma \in \Gamma^\star$.*

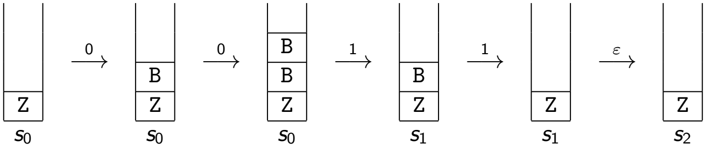
# Autómatos de Pilha - Aceitação por Estados Finais

**Exemplo 1:** Seja $A = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{s_2\})$ um autómato de pilha, com aceitação por estados finais, e

$$\begin{array}{rclcrcl}
\delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_2, Z)\} & \quad & \delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\
\delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} & & \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & & \delta(s_1, \varepsilon, Z) & = & \{(s_2, Z)\}
\end{array}$$

e $\delta(s, \alpha, X) = \{\ \}$ para os restantes ternos $(s, \alpha, X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

**Vamos ilustrar esquematicamente o processamento da palavra 0011.**




A **linguagem aceite pelo autómato por estados finais** é $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*$x \in \Sigma^\star$ é aceite* **por estados finais** *se $x$ puder levar o autómato da configuração inicial $(s_0, x, Z)$ a uma configuração $(s_2, \varepsilon, \gamma)$, com $\gamma \in \Gamma^\star$.*

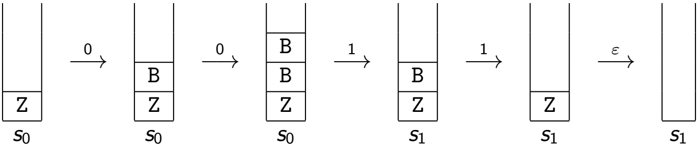
# Autómatos de Pilha - Aceitação por Pilha Vazia

**Exemplo 2:** Seja $A_2 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\})$ um autómato de pilha, com aceitação por pilha vazia, e

$$
\begin{array}{lcllcl}
\delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\
\delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} & \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & \delta(s_1, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

e $\delta(s, \alpha, X) = \{\ \}$ para os restantes ternos $(s, \alpha, X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

**Vamos ilustrar esquematicamente o processamento da palavra 0011.**




A **linguagem aceite pelo autómato por pilha vazia** é $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*$x \in \Sigma^\star$ é aceite **por pilha vazia** se $x$ puder levar o autómato da configuração inicial $(s_0, x, Z)$ a uma configuração $(s, \varepsilon, \varepsilon)$, com $s \in S$.*

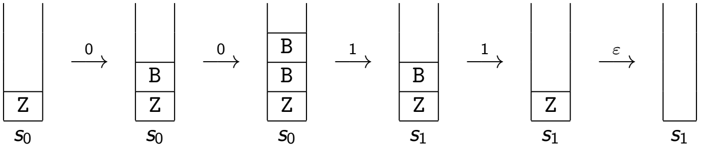
# Autómatos de Pilha - Aceitação por Pilha Vazia

**Exemplo 2:** Seja $A_2 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0,1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\})$ um autómato de pilha, com aceitação por pilha vazia, e

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\delta(s_0,\varepsilon,Z) & = & \{(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_0,0,Z) & = & \{(s_0,BZ)\} \\
\delta(s_0,0,B) & = & \{(s_0,BB)\} & \delta(s_0,1,B) & = & \{(s_1,\varepsilon)\} \\
\delta(s_1,1,B) & = & \{(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_1,\varepsilon,Z) & = & \{(s_1,\varepsilon)\}
\end{array}$$

e $\delta(s,\alpha,X) = \{\ \}$ para os restantes ternos $(s,\alpha,X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

**Vamos ilustrar esquematicamente o processamento da palavra 0011.**




A **linguagem aceite pelo autómato por pilha vazia** é $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*$x \in \Sigma^\star$ é aceite **por pilha vazia** se $x$ puder levar o autómato da configuração inicial $(s_0, x, Z)$ a uma configuração $(s, \varepsilon, \varepsilon)$, com $s \in S$.*

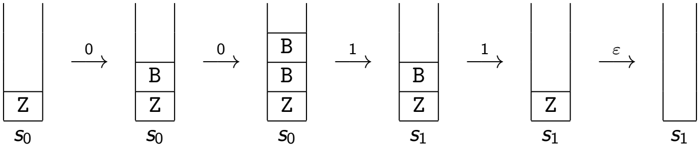
# Autómatos de Pilha - Aceitação por Pilha Vazia

**Exemplo 2:** Seja $A_2 = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\})$ um autómato de pilha, com aceitação por pilha vazia, e

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\
\delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} & \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} & \delta(s_1, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

e $\delta(s, \alpha, X) = \{\ \}$ para os restantes ternos $(s, \alpha, X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

**Vamos ilustrar esquematicamente o processamento da palavra 0011.**




A **linguagem aceite pelo autómato por pilha vazia** é $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

*$x \in \Sigma^\star$ é aceite* ***por pilha vazia*** *se $x$ puder levar o autómato da configuração inicial $(s_0, x, Z)$ a uma configuração $(s, \varepsilon, \varepsilon)$, com $s \in S$.*

# As capícuas de comprimento par

**Exemplo 3:** $L = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\}$, onde $w^R$ é a reversa de $w$, constituída pelas capícuas de comprimento par, é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \{\mathtt{Z},\mathtt{A},\mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$ onde

$$
\begin{array}{ll}
\delta(s_0,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\mathtt{Z})\} & \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{AZ})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{BZ})\} \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{AB})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{BA})\} \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{AA}),(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{BB}),(s_1,\varepsilon)\} \\
\delta(s_1,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_1,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_1,\varepsilon)\} \\
\delta(s_1,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\varepsilon)\} &
\end{array}
$$

- Em $s_0$ o autómato *carrega* a pilha: com a, coloca A no topo; com b, coloca B no topo. Mas, **é não determinístico**: pode também começar a *descarregar* a pilha: se tiver A no topo e na fita está a ou se tiver B no topo e na fita tem b, pode passar a $s_1$ e retirar o topo.
- Em $s_1$ o autómato está a *descarregar* a pilha: se tem A no topo e consome a, retira A; se tem B no topo e consome b, retira B.

# As capícuas de comprimento par

**Exemplo 3:** $L = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\}$, onde $w^R$ é a reversa de $w$, constituída pelas capícuas de comprimento par, é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$ onde

$$\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \mathtt{Z})\}$$
$$\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) = \{(s_0, \mathtt{AZ})\} \qquad \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{Z}) = \{(s_0, \mathtt{BZ})\}$$
$$\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{B}) = \{(s_0, \mathtt{AB})\} \qquad \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{A}) = \{(s_0, \mathtt{BA})\}$$
$$\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{A}) = \{(s_0, \mathtt{AA}), (s_1, \varepsilon)\} \qquad \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{B}) = \{(s_0, \mathtt{BB}), (s_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(s_1, \mathtt{a}, \mathtt{A}) = \{(s_1, \varepsilon)\} \qquad \delta(s_1, \mathtt{b}, \mathtt{B}) = \{(s_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(s_1, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \varepsilon)\}$$

- Em $s_0$ o autómato *carrega* a pilha: com a, coloca A no topo; com b, coloca B no topo. Mas, **é não determinístico**: pode também começar a *descarregar* a pilha: se tiver A no topo e na fita está a ou se tiver B no topo e na fita tem b, pode passar a $s_1$ e retirar o topo.
- Em $s_1$ o autómato está a *descarregar* a pilha: se tem A no topo e consome a, retira A; se tem B no topo e consome b, retira B.

# As capícuas de comprimento par

$L = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\}$ é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \{\mathtt{Z},\mathtt{A},\mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$ onde

$$
\begin{array}{ll}
\delta(s_0,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\mathtt{Z})\} & \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{AZ})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{BZ})\} \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{AB})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{BA})\} \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{AA}),(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{BB}),(s_1,\varepsilon)\} \\
\delta(s_1,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_1,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_1,\varepsilon)\} \\
\delta(s_1,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\varepsilon)\} &
\end{array}
$$

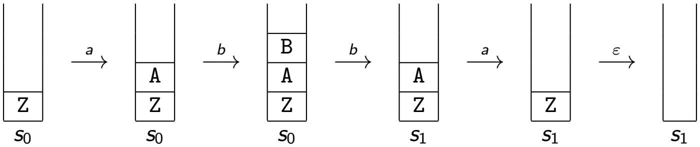
*Exemplo:* abba *é aceite pois pode ser totalmente processada e levar o autómato a pilha vazia. Partindo da configuração inicial* $(s_0, \mathtt{abba}, \mathtt{Z})$ *pode chegar a* $(s_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

# As capícuas de comprimento par

$L = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\}$ é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$ onde

$$\begin{array}{ll}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \mathtt{Z})\} & \\
\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) = \{(s_0, \mathtt{AZ})\} & \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{Z}) = \{(s_0, \mathtt{BZ})\} \\
\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{B}) = \{(s_0, \mathtt{AB})\} & \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{A}) = \{(s_0, \mathtt{BA})\} \\
\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{A}) = \{(s_0, \mathtt{AA}), (s_1, \varepsilon)\} & \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{B}) = \{(s_0, \mathtt{BB}), (s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, \mathtt{a}, \mathtt{A}) = \{(s_1, \varepsilon)\} & \delta(s_1, \mathtt{b}, \mathtt{B}) = \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \varepsilon)\} &
\end{array}$$

*Exemplo:* abba *é aceite pois pode ser totalmente processada e levar o autómato a pilha vazia. Partindo da configuração inicial* $(s_0, \mathtt{abba}, \mathtt{Z})$ *pode chegar a* $(s_1, \varepsilon, \varepsilon)$*.*



# As capícuas de comprimento par ou ímpar

**Exemplo 4:** $L = \{wtw^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star,\ t \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\varepsilon\}\}$ é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \{\mathtt{Z},\mathtt{A},\mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$ com

$$\delta(s_0,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\mathtt{Z})\}$$

$$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{AZ}),(s_1,\mathtt{Z})\} \qquad \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{BZ}),(s_1,\mathtt{Z})\}$$

$$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{AB}),(s_1,\mathtt{B})\} \qquad \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{BA}),(s_1,\mathtt{A})\}$$

$$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{AA}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{A})\} \qquad \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{BB}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{B})\}$$

$$\delta(s_1,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_1,\varepsilon)\} \qquad \delta(s_1,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$$

$$\delta(s_1,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$$

Como no autómato anterior, no estado $s_0$ tem de admitir que:

- *ainda não chegou ao meio da palavra* (continua a carregar a pilha)
- *está a consumir o símbolo do meio* (muda para $s_1$ mas não altera a pilha) ou
- *está a consumir o primeiro símbolo depois do meio* (muda para $s_1$ e retira o topo).

A linguagem das capícuas de alfabeto $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ não pode ser reconhecida por autómatos de pilha determinísticos.

# As capícuas de comprimento par ou ímpar

**Exemplo 4:** $L = \{wtw^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star,\ t \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\varepsilon\}\}$ é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0,s_1\},\{\mathtt{a},\mathtt{b}\},\{\mathtt{Z},\mathtt{A},\mathtt{B}\},\delta,s_0,\mathtt{Z},\{\ \})$ com

$$
\begin{array}{ll}
\delta(s_0,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\mathtt{Z})\} & \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{AZ}),(s_1,\mathtt{Z})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{BZ}),(s_1,\mathtt{Z})\} \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{AB}),(s_1,\mathtt{B})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{BA}),(s_1,\mathtt{A})\} \\
\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{AA}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{A})\} & \delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{BB}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{B})\} \\
\delta(s_1,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_1,\varepsilon)\} & \delta(s_1,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_1,\varepsilon)\} \\
\delta(s_1,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\varepsilon)\} &
\end{array}
$$

Como no autómato anterior, no estado $s_0$ tem de admitir que:

- *ainda não chegou ao meio da palavra* (continua a carregar a pilha)
- *está a consumir o símbolo do meio* (muda para $s_1$ mas não altera a pilha) ou
- *está a consumir o primeiro símbolo depois do meio* (muda para $s_1$ e retira o topo).

A linguagem das capícuas de alfabeto $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ não pode ser reconhecida por autómatos de pilha determinísticos.

# As capícuas de comprimento par ou ímpar

A linguagem $L = \{wtw^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star,\ t \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\varepsilon\}\}$, das capícuas, é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0,s_1\},\{\mathtt{a},\mathtt{b}\},\{\mathtt{Z},\mathtt{A},\mathtt{B}\},\delta,s_0,\mathtt{Z},\{\ \})$ com

$\delta(s_0,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\mathtt{Z})\}$
$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{AZ}),(s_1,\mathtt{Z})\}$
$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{AB}),(s_1,\mathtt{B})\}$
$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{AA}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{A})\}$
$\delta(s_1,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$
$\delta(s_1,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$

$\delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{BZ}),(s_1,\mathtt{Z})\}$
$\delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{BA}),(s_1,\mathtt{A})\}$
$\delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{BB}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{B})\}$
$\delta(s_1,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$

*Exemplo:* $\mathtt{aabaa}$ *é aceite. Partindo de* $(s_0,\mathtt{aabaa},\mathtt{Z})$, *pode chegar a* $(s_1,\varepsilon,\varepsilon)$.

# As capícuas de comprimento par ou ímpar

A linguagem $L = \{wtw^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star,\ t \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\varepsilon\}\}$, das capícuas, é aceite por pilha vazia pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{s_0,s_1\},\{\mathtt{a},\mathtt{b}\},\{\mathtt{Z},\mathtt{A},\mathtt{B}\},\delta,s_0,\mathtt{Z},\{\ \})$ com

$\delta(s_0,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\mathtt{Z})\}$

$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{AZ}),(s_1,\mathtt{Z})\}$

$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{AB}),(s_1,\mathtt{B})\}$

$\delta(s_0,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{AA}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{A})\}$

$\delta(s_1,\mathtt{a},\mathtt{A}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$

$\delta(s_1,\varepsilon,\mathtt{Z}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$

$\delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{Z}) = \{(s_0,\mathtt{BZ}),(s_1,\mathtt{Z})\}$

$\delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{A}) = \{(s_0,\mathtt{BA}),(s_1,\mathtt{A})\}$

$\delta(s_0,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_0,\mathtt{BB}),(s_1,\varepsilon),(s_1,\mathtt{B})\}$

$\delta(s_1,\mathtt{b},\mathtt{B}) = \{(s_1,\varepsilon)\}$

*Exemplo:* $\mathtt{aabaa}$ *é aceite. Partindo de* $(s_0,\mathtt{aabaa},\mathtt{Z})$*, pode chegar a* $(s_1,\varepsilon,\varepsilon)$*.*