Métodos Estatísticos – L.EIC

Semana 3

Aula 3

21 de março de 2022

Métodos Estatísticos – L.EIC

Aula 3

Probabilidade como instrumento de apoio à decisão

Experiência Aleatória

Noções de Teoria de Conjuntos

Probabilidade – Diversas Interpretações/Definições

Axiomática de Kolmogorov

Probabilidade Condicional

Teorema da Probabilidade Total

2

PROBABILIDADE

(alguns conceitos importantes)

Probabilidade

Vamos deixar a estatística para nos centrarmos agora num tópico diferente: a teoria das probabilidades, que, como veremos mais à frente, desempenha um papel fundamental na estatística inferencial.

Uma probabilidade é um valor numérico que quantifica a possibilidade de ocorrência de um acontecimento A.

Escreve-se $P(A)$ para designar a probabilidade de ocorrência do acontecimento A.

Probabilidade

Uma vez que esta matéria já foi lecionada com alguma profundidade no ensino secundário, centrar-nos-emos aqui essencialmente numa revisão de conceitos já conhecidos.

Vejamos primeiro alguns exemplos em que são utilizados conceitos associados a probabilidades, que mostram como a probabilidade serve de instrumento de apoio às tomadas de decisões.

Probabilidade

Instrumento de Apoio à Decisão

Como já referimos, a estatística desenvolve métodos que auxiliam na tomada de decisões e quantifica ao mesmo tempo o grau de confiança que se pode atribuir à conclusão que esteve na origem da decisão tomada.

Dissemos também que num estudo de natureza estatística poderá não haver uma conclusão que seja universalmente considerada como sendo a conclusão "correta".

"Depende" é a única resposta garantidamente correta.

Instrumento de Apoio à Decisão – **Exemplo 1**

Um jogo de dados

Hipótese: o jogador A admite que os dois dados que o jogador B usa não são viciados (hipótese de trabalho).

Observação: o jogador B lança os dois dados oito vezes seguidas e obtém oito vezes um duplo 6. Se os dados não são viciados, a probabilidade de em oito lançamentos seguidos saírem sempre duplos 6 é muito, muito, pequena.

Conclusão: o jogador A conclui que (muito possivelmente) os dados do jogador B são viciados.

Instrumento de Apoio à Decisão – **Exemplo 2**

Componentes defeituosas

Hipótese: admite-se que num processo de fabrico a percentagem de componentes defeituosas produzidas é cerca de 1% (hipótese de trabalho).

Observação: feita a inspeção de um lote constituído por 20 componentes verificou-se que 6 são defeituosas. Se a percentagem de componentes produzidas com defeito é 1%, a probabilidade de um lote de 20 ter tantas componentes defeituosas (6) é muito pequena.

Conclusão: Perante esta observação, conclui-se que (muito possivelmente) a proporção de componentes produzidas com defeito é muito superior a 1%.

Instrumento de Apoio à Decisão

Os exemplos anteriores ilustram a aplicação de um raciocínio indutivo.

É óbvio que a conclusão que é retirada faz todo o sentido, muito embora possa estar errada: os dados do jogador B podem não estar viciados, pode ter sido uma questão de sorte para o jogador B (e de azar para o jogador A!).

Mas se é razoável manter a dúvida no caso de 8 duplos 6, seria igualmente razoável mantê-la se em 20 lançamentos saíssem 20 duplos 6?

Instrumento de Apoio à Decisão

Apesar de continuar a não ser possível ter a certeza que os dados estão viciados, a convicção do jogador A de que estão viciados, seria agora bem maior.

Essa maior convicção resulta duma aplicação (intuitiva) do conceito de Probabilidade.

Probabilidade

Instrumento de Apoio à Decisão

Há uma ligação muito forte entre a Estatística Indutiva e a Teoria das Probabilidades.

Em Estatística Indutiva, a Probabilidade é utilizada para quantificar o grau de confiança que se pode atribuir à conclusão que se extrai de um estudo estatístico.

É nesse sentido que a Probabilidade é utilizada como instrumento de apoio à decisão

Probabilidade

Instrumento de Apoio à Decisão

Nos exemplos anteriores a conclusão que é tirada não decorre do resultado de um cálculo de uma probabilidade mas sim da avaliação que é feita do resultado obtido.

Daí utilizar-se a designação de "Instrumento de Apoio à Decisão".

Probabilidade

Instrumento de Apoio à Decisão

No Exemplo 1, em particular, a conclusão retirada do estudo pode não ser verdadeira, podendo acontecer que os resultados obtidos em estudos posteriores sejam diferentes.

Com uma maior dimensão da amostra, por exemplo, podemos ser conduzidos a outras conclusões.

Experiência Aleatória

Experiência Aleatória

Uma experiência é um procedimento executado sob condições controladas, produz resultados observáveis. Normalmente permite ilustrar uma lei conhecida, obter um resultado desconhecido, etc.

Uma experiência aleatória é tal que:

1. Conhecemos todos os resultados possíveis.
2. Cada vez que é efetuada não se conhece antecipadamente qual dos resultados possíveis vai ocorrer.
3. Pode ser repetida em condições análogas

A experiência aleatória deve ser definida de tal maneira que, em cada experiência, o acontecimento em estudo ou ocorre ou não ocorre.

Espaço Amostral ou Espaço de Resultados

Conjunto não vazio formado por todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória e denota-se pela letra Ω (ou S)

Exemplos

- Lançamento de um dado e registo dos pontos obtidos

  $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Se estivermos interessados apenas em saber se o número é par ou ímpar, o espaço amostral é simplesmente

  $$\Omega = \{\text{par, ímpar}\}$$

- Lançamento de uma moeda até sair "coroa" e registo do resultado

  $$\Omega = \{C, FC, FFC, FFFC, \ldots\}$$

Espaço Amostral ou Espaço de Resultados – **Exemplos**

- Extração (sem reposição) de três bolas, uma a uma, de uma caixa contendo 4 bolas numeradas de 1 a 4, e registo do resultado

$$\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k = 1,2,3,4; i \neq j, i \neq k, j \neq k\}$$

- Lança-se uma moeda:
  1. se sair 'cara' (C), faz-se um segundo lançamento da moeda;
  2. se sair 'verso' (V), então é lançado um dado

  Registam-se os resultados.

$$\Omega = \{CC, CV, V1, V2, V3, V4, V5, V6\}$$

Acontecimentos – **Exemplo 1**

Um acontecimento é qualquer subconjunto do espaço de resultados Ω.

- Lançamento de um dado e registo dos pontos obtidos
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  A – acontecimento "saída de número par"; $\mathbf{A} = \{2, 4, 6\}$

Nota: Se $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é um espaço de resultados, então,

$\emptyset$ – acontecimento impossível

$\{a_i\}$ – acontecimento elementar

Ω – acontecimento certo

Acontecimentos – **Exemplo 2**

- Lançamento de uma moeda 3 vezes, e registo dos resultados obtidos.

  $\Omega = \{CCC, CCV, CVC, CVV, VCC, VCV, VVC, VVV\}$

  A – acontecimento "1º lançamento é caras";

  $\mathbf{A} = \{CCC, CCV, CVC, CVV\}$

Nota: os espaços amostrais podem ser contínuos ou discretos.

Se falamos, por exemplo, do tempo de vida de um componente eletrónico, podemos escrever o espaço de resultados na forma:

$\Omega = \{t : t \geq 0\}$ – "todos os valores tais que $t \geq 0$"

Acontecimentos – **Acontecimentos incompatíveis**

Dois acontecimentos A e B dizem-se mutuamente exclusivos ou incompatíveis se a realização de um implica a não realização do outro, i.e.:

$$A \cap B = \emptyset$$

Exemplo

No lançamento de um dado, os acontecimentos “sair número par” e “sair número ímpar” são incompatíveis.

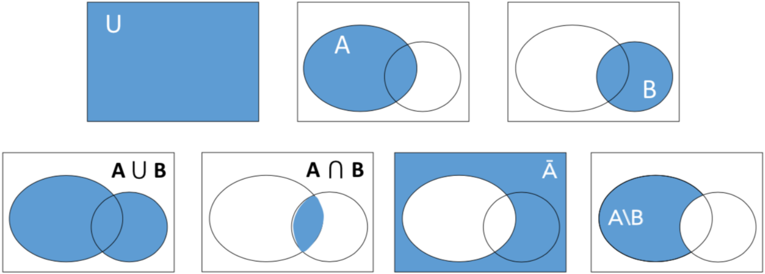
$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

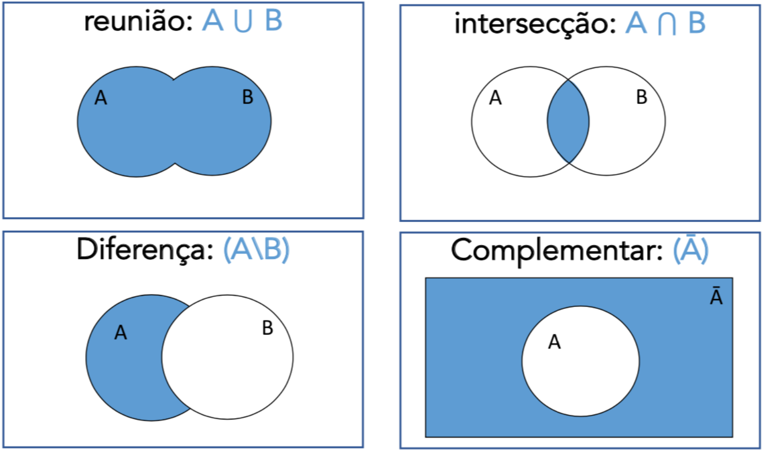
$$A \cap B = \emptyset$$

Diagramas de Venn e Operações

Sendo os acontecimentos identificados com conjuntos, as operações entre acontecimentos são as operações naturais da teoria de conjuntos.



Diagramas de Venn e Operações

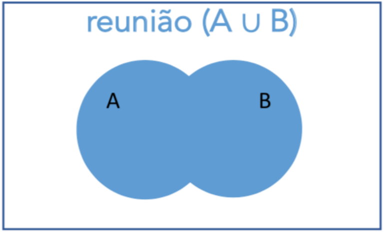


Probabilidade
Noções de Teoria de Conjuntos

Diagramas de Venn e Operações

A reunião de dois conjuntos A e B, $(A \cup B)$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos, isto é,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

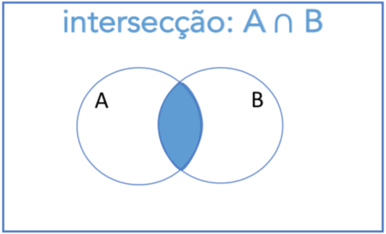


A reunião de acontecimentos traduz o "ou" (inclusivo).

Diagramas de Venn e Operações

A intersecção de dois conjuntos A e B ($A \cap B$), é o conjunto dos elementos que são comuns a A e a B, isto é,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

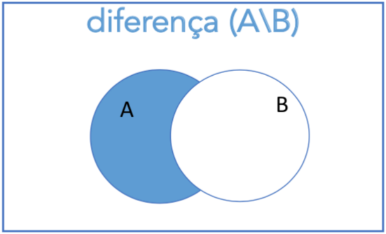


A interseção de acontecimentos traduz o "e".

Diagramas de Venn e Operações

A diferença de um conjunto A menos um conjunto B $(A \setminus B)$, é o conjunto dos elementos que petencem a A mas não pertencem a B, isto é,

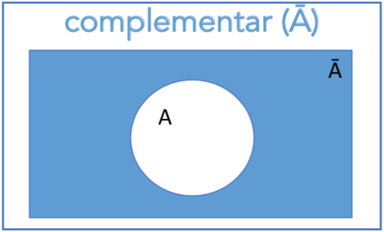
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Diagramas de Venn e Operações

O complementar de um conjunto A ($\bar{A}$), é o conjunto dos elementos que não petencem a A, isto é,

$$\bar{A} = \{x : x \notin A; \quad (A \cup \bar{A} = \Omega\}$$

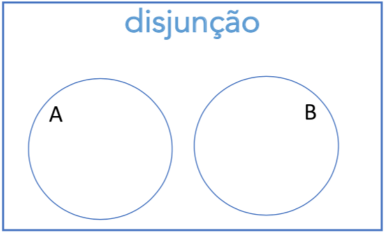


O acontecimento complementar traduz o "não".

Diagramas de Venn e Operações

Dois **conjuntos** A e B são disjuntos se não tiverem elementos comuns, isto é,

$$A \cap B = \emptyset$$



Dois **acontecimentos** são exclusivos entre si, ou incompatíveis, se a sua interseção é vazia.

Operações e Propriedades

Associatividade:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Comutatividade:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Distributividade:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leis de De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Probabilidade
Noções de Teoria de Conjuntos

Operações e Propriedades

Idempotencia: $A \cup A = A$

Absorção: $A \subseteq B \Longrightarrow \{A \cup B = B \text{ e } A \cap B = A\}$

Modulares:
$A \cup \Omega = \Omega$
$A \cap \Omega = A$

Outras propriedades:
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$A \cup \bar{A} = \Omega$
$\bar{\Omega} = \emptyset$
$\bar{\bar{A}} = A$

Propriedades e Notação

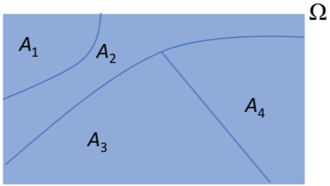
Sejam A, B e C três acontecimentos quaisquer

Linguagem corrente	Notação matemática
Somente se realiza A	$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ $(ou\ A\bar{B}\bar{C})$
A e B realizam-se mas não C	$A \cap B \cap \bar{C}$ $(ou\ AB\bar{C})$
Os três acontecimentos realizam-se simultaneamente	$A \cap B \cap C$ $(ou\ ABC)$
Realiza-se pelo menos um dos acontecimentos	$A \cup B \cup C$
Realizam-se pelo menos dois dos acontecimentos	$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Partição de um Conjunto

Uma partição de um conjunto Ω é uma subdivisão de Ω em subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de Ω, tais que:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$



Exercício: quais das seguintes, são partições de $\Omega = \{a, b, c, d\}$?

1. $A_1 = \{a, d\}$ e $A_2 = \{b, c\}$
2. $A_1 = \{a, c\}$, $A_2 = \{a, b\}$ e $A_3 = \{b, d\}$
3. $A_1 = \{a, d\}$ e $A_2 = \{b\}$

Interpretações Diversas

O conceito de probabilidade é um conceito que tem tido ao longo do tempo diversas interpretações

1. **Interpretação de Laplace** (1749-1827)
   (Definição Clássica)
2. **Interpretação frequencista**
   (Definição frequencista)
3. Interpretação subjetivista
   (Fora do âmbito da UC)
4. **Axiomática de Kolmogorov** (1903-1987)

Interpretação de Laplace – **Definição Clássica**

Suponha-se que numa experiência aleatória se podem obter m resultados, igualmente possíveis (ou equiprováveis).

Se k destes m resultados conduzem à realização de um determinado acontecimento A, definimos probabilidade do acontecimento A, na forma clássica, como:

$$P(A) = \frac{k}{m}$$

k - número de casos favoráveis
m - número de casos possíveis

É esta a definição clássica.

Interpretação de Laplace – **Definição Clássica**

Exercícios

1. No lançamento de um dado qual a probabilidade de sair número par?
2. Com uma aposta simples qual a probabilidade de ganharmos o euromilhões?
3. Na escolha aleatória de um número real entre 0 e 10, qual a probabilidade do número ser menor do que 1,23?

Interpretação de Laplace – **Definição Clássica**

Exemplo

Considerar a experiência que consiste no lançamento de dois dados.

Qual a probabilidade da soma dos pontos ser igual a 5?

$$\Omega = \{(i,j), i,j = 1,2,3,4,5,6\}; \quad \#\Omega = 36$$

A – acontecimento "soma dos pontos é igual a 5"

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}; \quad \#A = 4$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Interpretação de Laplace – **Definição Clássica**

Exemplo

Uma moeda é viciada de tal modo que a probabilidade de sair cara é 2 vezes maior do que a probabilidade de sair verso.

Lança-se a moeda ao ar, qual a probabilidade de sair cara?

V – saída de verso
C – saída de cara

$$\Omega = \{C, V\}; \quad A = \{C\}$$

Os acontecimentos elementares não são equiprováveis, portanto,

$$P(A) \neq \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Definição Clássica – **Limitações**

Esta definição de probabilidade sempre suscitou críticas em virtude do seguinte:

- A definição assume que os resultados são igualmente possíveis.
- A designação "igualmente possível" é análoga a "tem a mesma probabilidade de ocorrer", e assim, a definição tem uma auto referência – é circular.

Portanto a interpretação clássica só se aplica se o espaço de resultados for finito e se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, o que é uma limitação.

Definição Clássica – **Limitações**

Deste modo, a definição clássica não se aplica quando:

- Os resultados não são igualmente possíveis;
- O espaço de resultados é infinito, ou quando é difícil contar os casos possíveis e os casos favoráveis.

  Por exemplo, qual a probabilidade de se pescar um peixe com mais de 1kg num certo lago?

Definição Frequencista

A interpretação frequencista da probabilidade fornece uma ligação entre a probabilidade e o mundo real.

Isso é conseguido relacionando a probabilidade de um acontecimento com uma quantidade mensurável, que designamos por frequência relativa.

Esta quantidade mensurável é entendida a “longo prazo”, isto é, ao fim de n repetições da uma experiência aleatória, quando n é “grande”.

Definição Frequencista

Suponha-se que uma experiência aleatória é repetida n vezes, e que um determinado acontecimento A se realizou m_n vezes durante as n experiências.

A frequência relativa de ocorrência do acontecimento A é f_r, e é dada por:

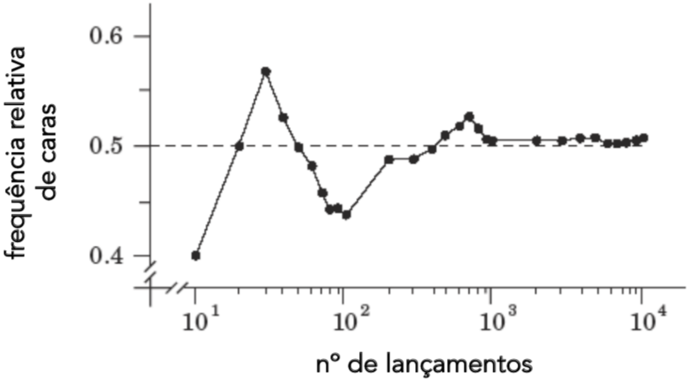
$$f_r = \frac{m_n}{n}$$

Quando n é grande, $P(A)$, a probabilidade de ocorrência do acontecimento A, é:

$$P(A) \approx \frac{m_n}{n}$$

Definição Frequencista

Experiência de Kerrich (1946)



Definição Frequencista

Experiência de Kerrich (1946)

Experiência aleatória:
Sequência de lançamentos de uma moeda ao ar

C – acontecimento "sair cara"

$$P(C) = 0.5 \approx \frac{\#\text{caras}}{\#\text{lançamentos}}$$

A frequência relativa tende a estabilizar num valor próximo de $1/2$, mas a probabilidade do acontecimento "sair cara" é desconhecida.

Probabilidade

Interpretações Diversas

Definição Frequencista – **Limitações**

O limite das frequências relativas, que, de acordo com esta interpretação, é uma probabilidade, é desconhecido.

O valor da frequência relativa obtido através da realização de n experiências, permite-nos apenas estimar a probabilidade, e a estimativa é tanto melhor quanto maior o número de experiências.

A definição frequencista,

- só se aplica se a experiência for repetível
- é apenas uma interpretação – não fornece uma regra de cálculo

Exemplos

Nos seguintes casos, qual a interpretação que deve ser dada?

- "Quer ganhar o Euromilhões? É mais provável ter gémeos siameses." Observador, 23.10.2014
- "Bebés nascidos por cesariana têm maior probabilidade de ser obesos." Sic Notícias, 07.09.2016
- "Com 23 pessoas na sala, é mais provável que haja pelo menos duas que façam anos no mesmo dia do que todas o façam em dias diferentes." Jornal Expresso, 11.07.2009
- "A Aliança Atlântica (NATO) contestou hoje a ideia de que os seus exercícios militares estejam a aumentar as probabilidades de uma guerra com a Rússia..." Lusa, 12.08.2015

Probabilidade
Interpretações Diversas

Axiomática de Kolmogorov

Uma probabilidade é uma função $P(\cdot)$, que toma valores reais, definida no espaço dos acontecimentos E, de uma experiência aleatória, e que satisfaz as condições:

Axioma 1:

$$P(A) \geq 0, \quad \forall A \in E$$

Axioma 2:

$$P(\Omega) = 1$$

Axioma 3: Se $A_1, A_2, \ldots$ são acontecimentos em número finito, ou infinito numerável, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Axiomática de Kolmogorov

A partir destes axiomas podemos provar um grande número de propriedades de uma função de probabilidade.

Por exemplo:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $p(\emptyset) = 0$
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Axiomática de Kolmogorov – **Exemplo**

Em determinada população, 9.8% das pessoas são loiras, 22.9% têm olhos azuis e 5.1% são loiras com olhos azuis.
Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso dessa população,

a) ser loira ou ter olhos azuis?
b) ser loira mas não ter olhos azuis?
c) qual a probabilidade de não ser loira nem ter olhos azuis?

Axiomática de Kolmogorov – **Exemplo**

Em determinada população, 9.8% das pessoas são loiras, 22.9% têm olhos azuis e 5.1% são loiras com olhos azuis.

A – acontecimento "ser loira" B – acontecimento "ter olhos azuis"

$$P(A) = 0.098 \qquad P(B) = 0.229 \qquad P(A \cap B) = 0.051$$

Probabilidade de ...

a) ser loira ou ter olhos azuis?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.276$$

b) ser loira mas não ter olhos azuis?

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.047$$

c) qual a probabilidade de não ser loira nem ter olhos azuis?

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \,\bar{\cup}\, B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.276 = 0.724$$

Probabilidade
Probabilidade Condicional

Questão:

No cálculo de probabilidades, como levar em conta o facto de a ocorrência de um acontecimento poder afetar a probabilidade de outros acontecimentos ocorrerem?

Definição

Sejam A e B dois acontecimentos com $P(B) > 0$).

A probabilidade condicional da ocorrência de A, dado que B ocorreu, é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade
Probabilidade Condicional

Propriedades

Dado um acontecimento B com $P(B) > 0$, a função que a cada acontecimento A associa a probabilidade condicional $P(A|B)$, é também uma função de probabilidade.

Em particular tem-se:

1. $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
2. $P((A \cup C)|B) = P(A|B) + P(C|B) - P((A \cap C)|B)$

   (Regra da Adição)

3. Da definição de probabilidade condicional resulta,
   $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \Leftarrow P(B) > 0$
   ou
   $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \Leftarrow P(A) > 0$

   (Regra da Multiplicação)

Probabilidade
Probabilidade Condicional

Exemplo

Num estudo sobre o consumo de cocaína foram entrevistados 75 homens e 36 mulheres consumidores. Os resultados foram:

	HOMENS	MULHERES	TOTAL
A: 1-19 vezes	32	7	39
B: 20-99 vezes	18	20	38
C: ≥100vezes	25	9	34
TOTAL	75	36	111

Escolhendo ao acaso um indivíduo dos 111, qual é probabilidade de que seja uma mulher, e que tenha usado cocaína menos de 20 vezes?

$$P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A|M) = \frac{36}{111} \cdot \frac{7}{36} = \frac{7}{111}$$

Probabilidade

Probabilidade Condicional

Exemplo

Num estudo sobre o consumo de cocaína foram entrevistados 75 homens e 36 mulheres consumidores. Os resultados foram:

	HOMENS	MULHERES	TOTAL
A: 1-19 vezes	32	7	39
B: 20-99 vezes	18	20	38
C: ≥100vezes	25	9	34
TOTAL	75	36	111

Qual a probabilidade de um indivíduo escolhido ao acaso entre os 111,

a) ter consumido menos de 20 vezes?

b) ter consumido menos de 100 vezes sabendo que se trata de um homem?

Probabilidade
Acontecimentos Independentes

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes se o conhecimento da ocorrência de um deles não influencia a probabilidade de ocorrência do outro.

Matematicamente . . .

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Se $P(B) > 0$, $P(A|B) = P(A)$
Se $P(A) > 0$, $P(B|A) = P(B)$

Nota: todo o acontecimento é independente de $\emptyset$ e de Ω

Probabilidade
Acontecimentos Independentes

Notar que:

Acontecimentos Independentes $\neq$ Acontecimentos Incompatíveis

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap B) = 0$$

Acontecimentos que não são independentes são considerados acontecimentos dependentes.

Como vimos, isso levou à necessidade de definir a probabilidade condicional de um acontecimento (A), sabendo que outro (B) ocorreu: $P(A|B)$

Probabilidade
Acontecimentos Independentes

Se os acontecimentos A e B são independentes, então o que se pode concluir quanto à independência dos acontecimentos seguintes?

- A e $\bar{B}$
- $\bar{A}$ e $\bar{B}$
- $\bar{A}$ e B

Resposta: São obviamente todos independentes.

Refletir (por exemplo) sobre a situação em que:

A – "ir ao cinema hoje"
B – "chover na próxima semana"

Probabilidade
Árvore de Probabilidades

Consideremos a seguinte situação:

Numa população de moscas da fruta *(drosophila melanogaster)*, existem em laboratório

- 30% de moscas pretas (devido a uma mutação)
- 70% de moscas cinzentas

Nota: a probabilidade de que um indivíduo, escolhido aleatoriamente numa população finita, tenha uma certa característica, é igual à proporção dos elementos com essa característica na população

Probabilidade
Árvore de Probabilidades

Vamos efetuar duas experiências aleatórias.

Experiência 1: Escolher ao acaso uma mosca da população e registar a sua cor.

Qual a probabilidade de ter escolhido uma mosca preta?
MP – "escolha de mosca preta" $P(MP) = 0.3$

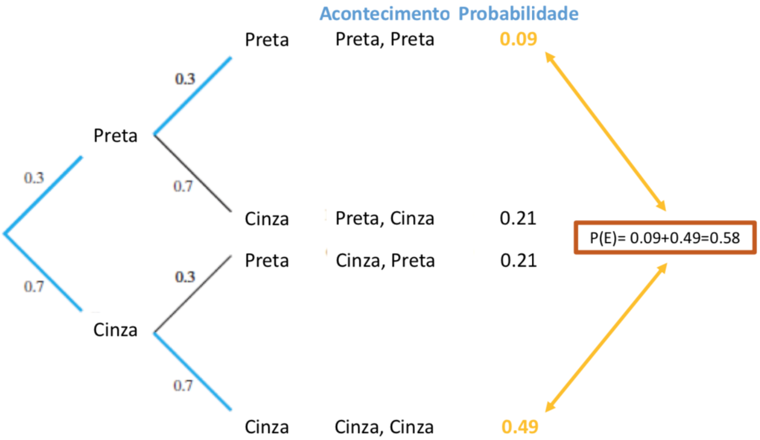
Experiência 2: Escolher 2 moscas aleatoriamente.

Qual a probabilidade das moscas serem da mesma cor?
E – "ambas as moscas têm a mesma cor" $P(E) = ?$

Neste caso pode ser muito útil utilizar um tipo de diagrama que designamos por **"Árvore de Probabilidades"**

Probabilidade

Árvore de Probabilidades



Probabilidade
Árvore de Probabilidades

Os diagramas de árvore são um recurso útil no cálculo de probabilidades.

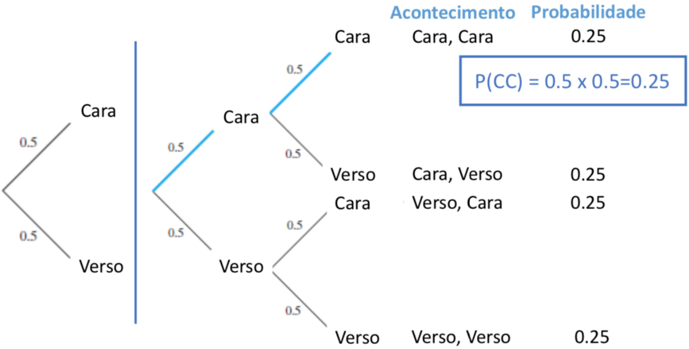
Uma árvore de probabilidades fornece uma maneira conveniente de dividir um problema em partes e organizar a informação disponível.

Vimos um exemplo disso no caso anterior, e os exemplos a seguir reforçam esta ideia.

Árvore de Probabilidades

Exemplo 1

Calcular a probabilidade de saída de duas vezes "cara" $P(CC)$, em dois lançamentos de uma moeda não viciada.

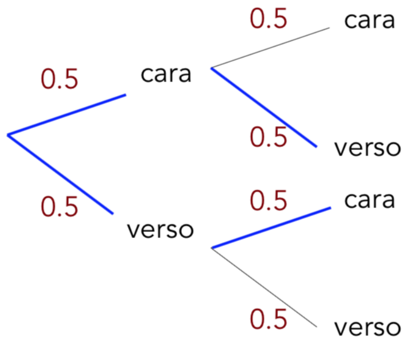


Probabilidade

Árvore de Probabilidades

Exemplo 2

Qual a probabilidade p de em dois lançamentos de uma moeda equilibrada se obter exatamente uma cara?



p=0.5x0.5+0.5x0.5=0.5

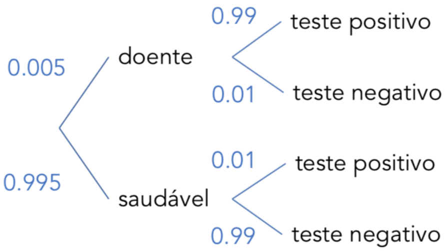
Probabilidade

Árvore de Probabilidades

Exemplo 3

Um teste médico é 99% eficaz a detetar uma dada doença quando ela está de facto presente. Mas o teste também dá "falsos positivos" para 1% das pessoas saudáveis.

Se 0.5% da população tem a doença, feito o teste a uma pessoa escolhida ao acaso entre a população, qual a probabilidade de o teste dar positivo?



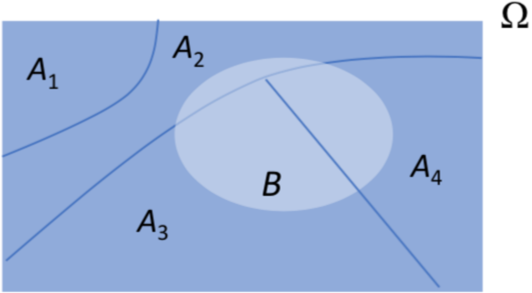
P("teste positivo")
= 0.005x0.99+0.995x0.01
= 0.0149

Probabilidade

Teorema da Probabilidade Total

Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma partição de Ω, e se $P(A_i) > 0$ para todo o i de 1 a n, então qualquer que seja o acontecimento B, tem-se:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

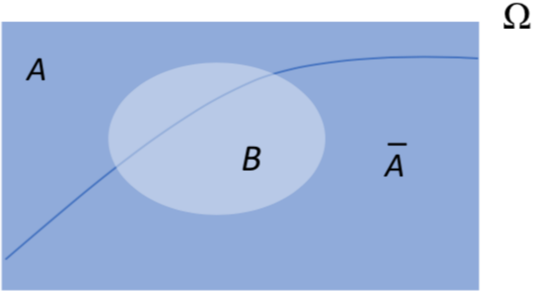


Probabilidade
Teorema da Probabilidade Total

Caso particular: n=2

Seja A tal que $P(A) > 0$ e $P(\bar{A}) > 0$.
Então, qualquer que seja o acontecimento B, tem-se:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$



Probabilidade
Teorema da Probabilidade Total

Exemplo (Exemplo 3 anterior)

Um teste médico é 99% eficaz a detetar uma dada doença quando ela está de facto presente. Mas o teste também dá "falsos positivos" para 1% das pessoas saudáveis.

Se 0.5% da população tem a doença, feito o teste a uma pessoa escolhida ao acaso, qual a probabilidade do teste dar positivo?

T – acontecimento "o teste dá positivo"
D – acontecimento "a pessoa está doente"

$$P(T|D) = 0.99; \quad P(T|\bar{D}) = 0.01; \quad P(D) = 0.005$$

$$P(T) = P(D) \cdot P(T|D) + P(\bar{D}) \cdot P(T|\bar{D})$$

$$P(T) = 0.005 \times 0.99 + (1 - 0.005) \times 0.01 = 0.0149$$

Probabilidade
Teorema de Bayes

Este teorema é um corolário do teorema da probabilidade total.

Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ uma partição de Ω, e

$$P(A_i) > 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

então

$$\forall B : P(B) > 0,$$

tem-se:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_2) + P(A_1) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

Exemplo

Estes 2 teoremas são muito importantes na resolução de diversos problemas.

Retomemos o exemplo anterior,

Um teste médico é 99% eficaz a detetar uma dada doença quando ela está de facto presente. Mas o teste também dá "falsos positivos" para 1% das pessoas saudáveis.

Mas agora com uma questão diferente:

Se 0.5% da população tem a doença, qual a probabilidade de que uma pessoa para quem o teste deu positivo tenha de facto a doença?

Probabilidade

Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Exemplo

Pretende-se calcular $P(D|T)$. Seja:

T – acontecimento "o teste dá positivo"
D – acontecimento "a pessoa está doente"

$$P(T|D) = 0.99 \quad P(T|\bar{D} = 0.01 \quad P(D) = 0.005$$

Pelo Teorema de Bayes podemos escrever

$$P(D|T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{P(D)\,P(T|D)}{P(T)} = \frac{0.00495}{0.0149} \approx 0.33$$

onde $P(T)$ foi calculado pelo Teorema da Probabilidade Total

$$P(T) = P(D) \cdot P(T|D) + P(\bar{D}) \cdot P(T|\bar{D})$$

Exemplo

$$P(D|T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0.00495}{0.0149} \approx 0.33$$

Explicitando todos os cálculos:

$$P(D \cap T) = P(D) \cdot P(T|D)$$

$$P(D \cap T) = 0.005 \times 0.99 = 0.00495$$

$$P(T) = P(D) \cdot P(T|D) + P(\bar{D}) \cdot P(T|\bar{D})$$

$$P(T) = 0.005 \times 0.99 + (1 - 0.005) \times 0.01 = 0.0149$$