CC1004 - Modelos de Computação
Teóricas 16 e 17

Ana Paula Tomás

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Maio 2021

Noção de Gramática Independente de Contexto

Uma **gramática independente de contexto** é um quarteto

$$\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$$

em que V e Σ são conjuntos de símbolos, ambos finitos e não vazios, e tais que $V \cap \Sigma = \emptyset$, $S \in V$, e P é uma relação binária finita de V em $(V \cup \Sigma)^\star$.

- V é o conjunto das **variáveis** (ou **não terminais**)
- S diz-se **símbolo inicial** de $\mathcal{G}$
- Σ é o **alfabeto** (conjunto dos símbolos **terminais**)
- P é um conjunto finito constituído pelas **produções** ou **regras**. Usualmente escreve-se $X \to w$ se $(X, w) \in P$.

A linguagem gerada por $\mathcal{G}$, que se denota por $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, é constituída pelas palavras que se podem derivar a partir do seu **símbolo inicial**.

Gramática Independente de Contexto

As GICs são *independentes de contexto* porque as regras que definem os não terminais (i.e., as *categorias gramaticais*) são aplicadas sem estarem sujeitas a restrições introduzidas por algum contexto. Nas GICs, **a parte esquerda de cada regra é um não terminal**.

A forma das regras de produção determina a expressividade da gramática. Nas **gramáticas mais gerais** (ditas, de **Tipo 0**) as regras têm a forma:

$$\alpha \to \beta \quad \text{com} \quad \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star, \ \ \alpha \neq \varepsilon$$

Não iremos estudar gramáticas desse tipo, que definem o topo da hierarquia.

As **gramáticas regulares**, que geram linguagens regulares, são de Tipo 3. As **gramáticas independentes de contexto** são de Tipo 2.

Noção de Derivação

Seja $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática independente de contexto. Diz-se que

x **deriva imediatamente** y

e escreve-se

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}} y \qquad \text{ou simplesmente} \qquad x \Rightarrow y$$

sse $x = x_1 X x_2$, $y = x_1\, w\, x_2$, e $(X \to w) \in P$, com $x_1, x_2, w \in (V \cup \Sigma)^\star$ e $X \in V$.

Note que $X \to w$ é a regra que se aplica para de x se derivar y, sendo X a variável que é substituída em x por w.

Como por vezes usamos $\Rightarrow$ como uma das conectivas lógicas (abreviatura de "**se**...**então**"), nas expressões lógicas, mesmo que haja uma única gramática envolvida, é preferível não abreviar $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$ por $\Rightarrow$ para evitar confusão.

Noção de Derivação

Formalmente, $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$ é uma relação binária em $(V \cup \Sigma)^\star$, a que podemos chamar **relação de derivação imediata**.

Esta relação determina ainda outras relações binárias em $(V \cup \Sigma)^\star$:

- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{n}$: **derivação em exatamente n passos**, com $n \in \mathbb{N}$, fixo.
- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\star}$: **derivação em zero ou mais passos (em número finito)**. Esta relação é o fecho transitivo e reflexivo da relação de derivação imediata.

$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{1}$ é a derivação imediata $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$

$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{2}$ é a derivação em dois passos.

$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{0}$ é, por convenção, a relação identidade em $(V \cup \Sigma)^\star$.

Noção de Derivação

Formalmente, $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$ é uma relação binária em $(V \cup \Sigma)^\star$, a que podemos chamar **relação de derivação imediata**.

Esta relação determina ainda outras relações binárias em $(V \cup \Sigma)^\star$:

- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{n}$: **derivação em exatamente n passos**, com $n \in \mathbb{N}$, fixo.
- $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{\star}$: **derivação em zero ou mais passos (em número finito)**. Esta relação é o fecho transitivo e reflexivo da relação de derivação imediata.

$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{1}$ é a derivação imediata $\Rightarrow_{\mathcal{G}}$

$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{2}$ é a derivação em dois passos.

$\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{0}$ é, por convenção, a relação identidade em $(V \cup \Sigma)^\star$.

Noção de Derivação

Podemos definir recursivamente $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{n}$, para $n \geq 1$, do modo seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{1} & = & \Rightarrow_{\mathcal{G}} \\ \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} & = & \{(x,y) \mid \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star}\ (x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} z \ \wedge \ z \Rightarrow_{\mathcal{G}} y)\}, \text{ com } k \geq 1 \end{array}$$

Ou seja, tem-se

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} y \quad \text{se e só se} \quad \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star}\ (x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} z \ \wedge \ z \Rightarrow_{\mathcal{G}} y)$$

Pode-se **mostrar que**, quaisquer que sejam $x, y \in (V \cup \Sigma)^{\star}$ e $k \geq 0$

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} y \quad \text{se e só se} \quad \exists i \in \mathbb{N}\, \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star}\ (i \leq k \ \wedge \ x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{i} z \ \wedge \ z \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k-i} y)$$

o que traduz o facto de a derivação em k passos poder ser vista como uma *composição* duma derivação em i passos com uma derivação em $k - i$ passos.

Noção de Derivação

Podemos definir recursivamente $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{n}$, para $n \geq 1$, do modo seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{1} & = & \Rightarrow_{\mathcal{G}} \\ \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} & = & \{(x,y) \mid \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star} \ (x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} z \ \wedge \ z \Rightarrow_{\mathcal{G}} y)\}, \text{ com } k \geq 1 \end{array}$$

Ou seja, tem-se

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} y \quad \text{se e só se} \quad \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star} \ (x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} z \ \wedge \ z \Rightarrow_{\mathcal{G}} y)$$

Pode-se **mostrar que**, quaisquer que sejam $x, y \in (V \cup \Sigma)^{\star}$ e $k \geq 0$

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} y \quad \text{se e só se} \quad \exists i \in \mathbb{N}\, \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star} \ (i \leq k \ \wedge \ x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{i} z \ \wedge \ z \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k-i} y)$$

o que traduz o facto de a derivação em k passos poder ser vista como uma *composição* duma derivação em i passos com uma derivação em $k-i$ passos.

Noção de Derivação

Podemos definir recursivamente $\Rightarrow_{\mathcal{G}}^{n}$, para $n \geq 1$, do modo seguinte:

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{1} & = & \Rightarrow_{\mathcal{G}} \\ \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} & = & \{(x, y) \mid \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star}\ \ (x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} z\ \wedge\ z \Rightarrow_{\mathcal{G}} y)\}, \text{ com } k \geq 1 \end{array}$$

Ou seja, tem-se

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k+1} y \quad \text{se e só se} \quad \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star}\ \ (x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} z\ \wedge\ z \Rightarrow_{\mathcal{G}} y)$$

Pode-se **mostrar que**, quaisquer que sejam $x, y \in (V \cup \Sigma)^{\star}$ e $k \geq 0$

$$x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k} y \quad \text{se e só se} \quad \exists i \in \mathbb{N}\, \exists z \in (V \cup \Sigma)^{\star}\ \ (i \leq k\ \wedge\ x \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{i} z\ \wedge\ z \Rightarrow_{\mathcal{G}}^{k-i} y)$$

o que traduz o facto de a derivação em k passos poder ser vista como uma *composição* duma derivação em i passos com uma derivação em $k - i$ passos.

Noção de linguagem gerada por GIC

A **linguagem gerada pela gramática** $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$, denotada por $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, é dada por

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) \quad = \quad \{x \in \Sigma^\star \mid S \Rightarrow_{\mathcal{G}}^\star x\}$$

ou seja, é o conjunto das palavras de $\Sigma^\star$ que se podem derivar a partir do símbolo inicial da gramática.

Uma **linguagem independente de contexto** é uma linguagem que é gerada por alguma gramática independente de contexto.

Noção de árvore de derivação

A definição de **árvore de derivação** (ou **sintática**) usa a noção de **árvore ordenada**.

Árvore ordenada

Uma árvore ordenada é um grafo dirigido (V, E) tal que $\#E = \#V - 1$, existe um nó (*raíz*) do qual todos os outros nós são acessíveis e os ramos com origem em cada nó (*filhos* desse nó) estão ordenados por uma relação de ordem total.

Os nós que não são origem de qualquer ramo chamam-se *folhas*. Os restantes chamam-se *nós internos*.

Noção de árvore de derivação

Dada $x \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, uma **árvore de derivação** de x *"dá uma estrutura a x"*.

A árvore de derivação de x é uma árvore ordenada tal que

- a raíz é o símbolo inicial S
- o símbolo numa folha é um terminal ou ε
- x é concatenação dos símbolos nas folhas
- o símbolo num nó interno é uma variável
- usou-se a regra $X \to s_1 \ldots s_n$ sse X é nó e tem filhos $s_1 \ldots s_n$.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0, 1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0, 1\}^\star$$

- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0, 1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_3 = (\{U, Z\}, \{0, 1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_4 = (\{Z, U\}, \{0, 1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$

- $\mathcal{G}_5 = (\{Z, U\}, \{0, 1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$
- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_3 = (\{U,Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_4 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$
- $\mathcal{G}_5 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0, 1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0, 1\}^\star$$
- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0, 1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_3 = (\{U, Z\}, \{0, 1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_4 = (\{Z, U\}, \{0, 1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$
- $\mathcal{G}_5 = (\{Z, U\}, \{0, 1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$
- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_3 = (\{U,Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_4 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$
- $\mathcal{G}_5 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$

- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_3 = (\{U, Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_4 = (\{Z, U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$

- $\mathcal{G}_5 = (\{Z, U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_6 = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{aaa},\ S \to \mathtt{aaabb}S\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_6) = \{\mathtt{aaabb}\}^\star\{\mathtt{aaa}\}$$

pois:

$S \Rightarrow^n w$ sse $w = (\mathrm{aaabb})^n S$ ou $w = (\mathrm{aaabb})^{n-1}\mathrm{aaa}$, com $n \geq 1$.

Portanto,

$S \Rightarrow^\star x$, com $x \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$, sse $x = (\mathrm{aaabb})^n\mathrm{aaa}$, com $n \geq 0$.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_6 = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{aaa},\ S \to \mathtt{aaabb}S\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_6) = \{\mathtt{aaabb}\}^\star\{\mathtt{aaa}\}$$

pois:

$S \Rightarrow^n w$ sse $w = (\mathtt{aaabb})^n S$ ou $w = (\mathtt{aaabb})^{n-1}\mathtt{aaa}$, com $n \geq 1$.

Portanto,

$S \Rightarrow^\star x$, com $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, sse $x = (\mathtt{aaabb})^n\mathtt{aaa}$, com $n \geq 0$.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_7 = (\{S, C\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b},\ S \to C,\ C \to \mathtt{b}C\mathtt{a},\ C \to \mathtt{b}\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_7) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

pois:

- $\mathcal{L}(C) = \{\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m \mid m \geq 0\}$, porque $C \Rightarrow^k w$ sse $w = \mathtt{b}^k C\mathtt{a}^k$ ou $w = \mathtt{b}^k\mathtt{a}^{k-1}$.
- $S \Rightarrow^p w$ sem usar regras para C sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^{p-1}C\mathtt{b}^{p-1}$.
- Portanto, $S \Rightarrow^p w$ sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^q b^k C\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$ com $q + k + 1 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$, ou $w = \mathtt{a}^q b^{k+1}\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$, $q + k + 2 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_7)$ é a linguagem indicada.

Em alternativa, podemos observar notar que $S \Rightarrow^\star x$, com $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, sse $x = \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $S \Rightarrow^n \mathtt{a}^n S\mathtt{b}^n \Rightarrow \mathtt{a}^n C\mathtt{b}^n \Rightarrow^\star \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n = x$, para $y \in \mathcal{L}(C)$.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_7 = (\{S, C\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b},\ S \to C,\ C \to \mathtt{b}C\mathtt{a},\ C \to \mathtt{b}\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_7) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \ \mid\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

pois:

- $\mathcal{L}(C) = \{\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m \mid m \geq 0\}$, porque $C \Rightarrow^k w$ sse $w = \mathtt{b}^k C\mathtt{a}^k$ ou $w = \mathtt{b}^k\mathtt{a}^{k-1}$.
- $S \Rightarrow^p w$ sem usar regras para C sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^{p-1}C\mathtt{b}^{p-1}$.
- Portanto, $S \Rightarrow^p w$ sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^q b^k C\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$ com $q+k+1 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$, ou $w = \mathtt{a}^q b^{k+1}\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$, $q+k+2 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_7)$ é a linguagem indicada.

Em alternativa, podemos observar notar que $S \Rightarrow^\star x$, com $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, sse $x = \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $S \Rightarrow^n \mathtt{a}^n S\mathtt{b}^n \Rightarrow \mathtt{a}^n C\mathtt{b}^n \Rightarrow^\star \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n = x$, para $y \in \mathcal{L}(C)$.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_7 = (\{S, C\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b},\ S \to C,\ C \to \mathtt{b}C\mathtt{a},\ C \to \mathtt{b}\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_7) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \ \mid\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

pois:

- $\mathcal{L}(C) = \{\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m \mid m \geq 0\}$, porque $C \Rightarrow^k w$ sse $w = \mathtt{b}^k C\mathtt{a}^k$ ou $w = \mathtt{b}^k\mathtt{a}^{k-1}$.
- $S \Rightarrow^p w$ sem usar regras para C sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^{p-1}C\mathtt{b}^{p-1}$.
- Portanto, $S \Rightarrow^p w$ sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^q b^k C\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$ com $q + k + 1 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$, ou $w = \mathtt{a}^q b^{k+1}\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$, $q + k + 2 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_7)$ é a linguagem indicada.

Em alternativa, podemos observar notar que $S \Rightarrow^\star x$, com $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, sse $x = \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $S \Rightarrow^n \mathtt{a}^n S\mathtt{b}^n \Rightarrow \mathtt{a}^n C\mathtt{b}^n \Rightarrow^\star \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n = x$, para $y \in \mathcal{L}(C)$.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_7 = (\{S, C\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b},\ S \to C,\ C \to \mathtt{b}C\mathtt{a},\ C \to \mathtt{b}\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_7) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \ \mid\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

pois:

- $\mathcal{L}(C) = \{\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m \mid m \geq 0\}$, porque $C \Rightarrow^k w$ sse $w = \mathtt{b}^k C\mathtt{a}^k$ ou $w = \mathtt{b}^k\mathtt{a}^{k-1}$.
- $S \Rightarrow^p w$ sem usar regras para C sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^{p-1}C\mathtt{b}^{p-1}$.
- Portanto, $S \Rightarrow^p w$ sse $w = \mathtt{a}^p S\mathtt{b}^p$ ou $w = \mathtt{a}^q b^k C\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$ com $q + k + 1 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$, ou $w = \mathtt{a}^q b^{k+1}\mathtt{a}^k\mathtt{b}^q$, $q + k + 2 = p$ e $q, k \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_7)$ é a linguagem indicada.

Em alternativa, podemos observar notar que $S \Rightarrow^\star x$, com $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, sse $x = \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $S \Rightarrow^n \mathtt{a}^n S\mathtt{b}^n \Rightarrow \mathtt{a}^n C\mathtt{b}^n \Rightarrow^\star \mathtt{a}^n y\mathtt{b}^n = x$, para $y \in \mathcal{L}(C)$.

Exemplo

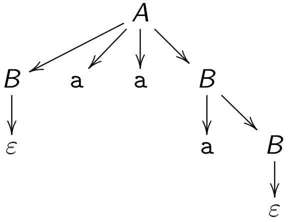
Seja $\mathcal{G}$ a gramática $(\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$

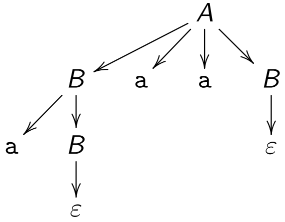
Duas derivações pela esquerda para aaa:

$$A \Rightarrow B\mathtt{aa}B \Rightarrow \varepsilon\mathtt{aa}B \Rightarrow \mathtt{aaa}B \Rightarrow \mathtt{aaa}\varepsilon = \mathtt{aaa}$$
$$A \Rightarrow B\mathtt{aa}B \Rightarrow \mathtt{a}B\mathtt{aa}B \Rightarrow \mathtt{a}\varepsilon\mathtt{aa}B \Rightarrow \mathtt{aaa}\varepsilon = \mathtt{aaa}$$

Derivação pela esquerda: substitui-se sempre a variável mais à esquerda.
Derivação pela direita: substitui-se sempre a variável mais à direita.

A gramática $\mathcal{G}$ é ambígua: alguma palavra de $\mathcal{L}(G)$ admite duas derivações pela esquerda e, consequentemente, duas árvores de derivação distintas.





Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

$$\begin{array}{lcl} B & \to & \mathtt{a}B \\ B & \to & \mathtt{b}B \\ B & \to & \varepsilon \end{array}$$

Prova por indução sobre n:

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

- Caso de base: Para $n = 1$, tem-se $B \Rightarrow^1 x$ se e só se $x = \varepsilon \vee x = wB$, com $w = \mathtt{a}$ ou $w = \mathtt{b}$. Portanto, para $n = 1$, a condição verifica-se, pois $\varepsilon \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^0$ e $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^1$.

- Hereditariedade: ...

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

$$\begin{array}{lcl} B & \rightarrow & \mathtt{a}B \\ B & \rightarrow & \mathtt{b}B \\ B & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

Prova por indução sobre n:

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

- <u>Caso de base:</u> Para $n = 1$, tem-se $B \Rightarrow^1 x$ se e só se $x = \varepsilon \lor x = wB$, com $w = \mathtt{a}$ ou $w = \mathtt{b}$. Portanto, para $n = 1$, a condição verifica-se, pois $\varepsilon \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^0$ e $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^1$.
- <u>Hereditariedade:</u> ...

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

Prova por indução sobre n:

$$\begin{array}{lcl} B & \to & \mathtt{a}B \\ B & \to & \mathtt{b}B \\ B & \to & \varepsilon \end{array}$$

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

- Hereditariedade: Queremos mostrar que: *qualquer que seja $k \geq 1$ (fixo), **se** para todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ se tem $B \Rightarrow^k x$ sse $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$ **então** para todo $y \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.*

  Por definição de $\Rightarrow^{k+1}$, tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $B \Rightarrow s \Rightarrow^k y$, para algum $s \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tal que B ocorre em s. Então, $s = \mathtt{a}B \wedge y = \mathtt{a}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$ ou $s = \mathtt{b}B \wedge y = \mathtt{b}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$.

  Pela hipótese de indução, $y' = w'B$ com $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $y' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$.

  Como $y = \mathtt{a}y'$ ou $y = \mathtt{b}y'$, então $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

Prova por indução sobre n:

$$\begin{array}{lcl} B & \to & \mathtt{a}B \\ B & \to & \mathtt{b}B \\ B & \to & \varepsilon \end{array}$$

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

- Hereditariedade: Queremos mostrar que: *qualquer que seja $k \geq 1$ (fixo),* **se** *para todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ se tem $B \Rightarrow^k x$ sse $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$* **então** *para todo $y \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.*

  Por definição de $\Rightarrow^{k+1}$, tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $B \Rightarrow s \Rightarrow^k y$, para algum $s \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tal que B ocorre em s. Então, $s = \mathtt{a}B \wedge y = \mathtt{a}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$ ou $s = \mathtt{b}B \wedge y = \mathtt{b}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$.

  Pela hipótese de indução, $y' = w'B$ com $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $y' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$.

  Como $y = \mathtt{a}y'$ ou $y = \mathtt{b}y'$, então $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

Prova por indução sobre n:

$$
\begin{array}{lcl}
B & \to & \mathtt{a}B \\
B & \to & \mathtt{b}B \\
B & \to & \varepsilon
\end{array}
$$

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

- Hereditariedade: Queremos mostrar que: *qualquer que seja $k \geq 1$ (fixo),* **se** *para todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ se tem $B \Rightarrow^k x$ sse $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$* **então** *para todo $y \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.*

  Por definição de $\Rightarrow^{k+1}$, tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $B \Rightarrow s \Rightarrow^k y$, para algum $s \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tal que B ocorre em s. Então, $s = \mathtt{a}B \wedge y = \mathtt{a}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$ ou $s = \mathtt{b}B \wedge y = \mathtt{b}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$.

  Pela hipótese de indução, $y' = w'B$ com $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $y' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$.

  Como $y = \mathtt{a}y'$ ou $y = \mathtt{b}y'$, então $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

Prova por indução sobre n:

$$B \to \mathtt{a}B$$
$$B \to \mathtt{b}B$$
$$B \to \varepsilon$$

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

- Hereditariedade: Queremos mostrar que: *qualquer que seja $k \geq 1$ (fixo), **se** para todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ se tem $B \Rightarrow^k x$ sse $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$ **então** para todo $y \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.*

  Por definição de $\Rightarrow^{k+1}$, tem-se $B \Rightarrow^{k+1} y$ sse $B \Rightarrow s \Rightarrow^k y$, para algum $s \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ tal que B ocorre em s. Então, $s = \mathtt{a}B \wedge y = \mathtt{a}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$ ou $s = \mathtt{b}B \wedge y = \mathtt{b}y' \wedge B \Rightarrow^k y'$.

  Pela hipótese de indução, $y' = w'B$ com $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$, ou $y' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k-1}$.

  Como $y = \mathtt{a}y'$ ou $y = \mathtt{b}y'$, então $y = zB$, com $z \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{k+1}$, ou $y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^k$.

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

$$
\begin{aligned}
B &\rightarrow \mathtt{a}B \\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \\
B &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

Prova por indução sobre n:

Mostrámos que a condição:

- verifica-se para $n = 1$, e
- **se** se verificar para k **então** verifica-se para $k + 1$, qualquer que seja $k \geq 1$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, conclui-se que a condição verifica-se para todo $n \geq 1$. $\square$

Conclusão:

Da demonstração resulta que: *para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ sse $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$.*

Ou seja, $\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$.

Como provar que uma gramática gera uma linguagem?

$$
\begin{array}{lcl}
B & \rightarrow & \mathtt{a}B \\
B & \rightarrow & \mathtt{b}B \\
B & \rightarrow & \varepsilon
\end{array}
$$

Para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{B, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ se e só se

- $x = wB$, com $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n$ ou
- $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$

Prova por indução sobre n:

Mostrámos que a condição:

- verifica-se para $n = 1$, e
- **se** se verificar para k **então** verifica-se para $k+1$, qualquer que seja $k \geq 1$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, conclui-se que a condição verifica-se para todo $n \geq 1$. □

Conclusão:

Da demonstração resulta que: *para todo $n \geq 1$ e todo $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $B \Rightarrow^n x$ sse $x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-1}$*.

Ou seja, $\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$.

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

  Para $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $A \Rightarrow^\star w$ sse $A \Rightarrow B\mathtt{a}B \Rightarrow^\star w$, pelo que $w = x\mathtt{aa}y$, com $x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$.

  Portanto,

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

  Para $w \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$, tem-se $A \Rightarrow^\star w$ sse $A \Rightarrow B\mathrm{a}B \Rightarrow^\star w$, pelo que $w = x\mathrm{aa}y$, com $x, y \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$.

  Portanto,

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star\{\mathrm{aa}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$$

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

  Para $w \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$, tem-se $A \Rightarrow^\star w$ sse $A \Rightarrow B\mathrm{a}B \Rightarrow^\star w$, pelo que $w = x\mathrm{aa}y$, com $x, y \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$.

  Portanto,

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star\{\mathrm{aa}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^\star$$

Qual é a linguagem gerada pela gramática?

$\mathcal{G} = (\{A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{A \to B\mathtt{aa}B,\ B \to \mathtt{a}B,\ B \to \mathtt{b}B,\ B \to \varepsilon\}, A)$

- Qual é a linguagem gerada a partir de B?

$$\mathcal{L}(B) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

- E, a partir de A?

  Para $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$, tem-se $A \Rightarrow^\star w$ sse $A \Rightarrow B\mathtt{a}B \Rightarrow^\star w$, pelo que $w = x\mathtt{aa}y$, com $x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$.

  Portanto,

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$$

Exemplo 2

Vamos mostrar formalmente que a linguagem

$$L = \{\texttt{aaa}\, x\, \texttt{a}\, y \mid |x| \leq 2|y|, \ \ x, y \in \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{b}\}^\star\}$$

é gerada pela GIC $\mathcal{G} = (\{S, R, A\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{a}, \texttt{b}\}, P, S)$ com regras

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \texttt{aaa}\, R \\ R & \rightarrow & A\,A\,R\,A \mid A\,R\,A \mid R\,A \mid \texttt{a} \\ A & \rightarrow & \texttt{b} \mid \texttt{1} \mid \texttt{0} \end{array}$$

Para tal, vamos provar, por indução sobre o número de regras aplicadas, que:
$\forall n \geq 1\ \forall x \in (V \cup \Sigma)^\star$, se $R \Rightarrow^n x$ *sem substituir A* então

$$x = A^k\, \texttt{a}\, A^{n-1} \quad e \quad 0 \leq k \leq 2(n-1)$$

ou

$$x = A^k\, R\, A^n \quad e \quad 0 \leq k \leq 2n$$

Exemplo 2

Vamos mostrar formalmente que a linguagem

$$L = \{\mathtt{aaa}\,x\,\mathtt{a}\,y \mid |x| \leq 2|y|,\ \ x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star\}$$

é gerada pela GIC $\mathcal{G} = (\{S, R, A\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P, S)$ com regras

$$\begin{array}{lcl} S & \to & \mathtt{aaa}\,R \\ R & \to & A\,A\,R\,A \mid A\,R\,A \mid R\,A \mid \mathtt{a} \\ A & \to & \mathtt{b} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{0} \end{array}$$

Para tal, vamos provar, por indução sobre o número de regras aplicadas, que:
$\forall n \geq 1\ \forall x \in (V \cup \Sigma)^\star$, se $R \ \Rightarrow^n\ x$ *sem substituir* A então

$$\begin{array}{lcl} x & = & A^k\,\mathrm{a}\,A^{n-1} \quad e \quad 0 \leq k \leq 2(n-1) \\ \textit{ou} & & \\ x & = & A^k\,R\,A^n \quad\quad e \quad 0 \leq k \leq 2n \end{array}$$

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- **Caso** $n = 1$**.**
  Se $R \Rightarrow^1 x$ então $x = A^0\,\mathrm{a}\,A^0$ ou $x = A^k\,R\,A$, com $0 \leq k \leq 2$, pois

$$\begin{array}{c} R \Rightarrow A^k\,R\,A \\ 0 \leq k \leq 2 \end{array} \quad \text{por} \left\{ \begin{array}{lcl} R & \rightarrow & A\,A\,R\,A \\ R & \rightarrow & A\,R\,A \\ R & \rightarrow & R\,A \end{array} \right.$$

ou

$$\begin{array}{c} R \Rightarrow A^k\,\mathrm{a}\,A^0 \\ 0 \leq k \leq 0 \end{array} \quad \text{por } R \rightarrow \mathrm{a}$$

$\square$

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Hereditariedade

- **Para a hereditariedade, comecemos por notar que:** se $n \geq 1$ então, por definição de $\Rightarrow^{n+1}$, tem-se
  $R \Rightarrow^{n+1} x$ sse $\exists x' \in (V \cup \Sigma)^\star \ (R \Rightarrow^n x' \ \text{ e } \ x' \Rightarrow x)$. Para $R \Rightarrow^{n+1} x$ **sem substituir** A**'s**, na derivação de x' não se substituiu qualquer A.

- Supomos, como hipótese de indução, que: para todo $w \in (V \cup \Sigma)^\star$, se $R \Rightarrow^n w$ *sem substituir A*, então $w = A^k R A^n$, com $0 \leq k \leq 2n$, ou $w = A^k \mathrm{a} A^{n-1}$, com $0 \leq k \leq 2(n-1)$.

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Hereditariedade

- **Para a hereditariedade, comecemos por notar que:** se $n \geq 1$ então, por definição de $\Rightarrow^{n+1}$, tem-se
$R \Rightarrow^{n+1} x$ sse $\exists x' \in (V \cup \Sigma)^\star \ (R \Rightarrow^n x' \ \text{ e } \ x' \Rightarrow x)$. Para $R \Rightarrow^{n+1} x$ **sem substituir** A**'s**, na derivação de x' não se substituiu qualquer A.

- Supomos, como hipótese de indução, que: para todo $w \in (V \cup \Sigma)^\star$, se $R \Rightarrow^n w$ *sem substituir* A, então $w = A^k R A^n$, com $0 \leq k \leq 2n$, ou $w = A^k \mathrm{a} A^{n-1}$, com $0 \leq k \leq 2(n-1)$.

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Hereditariedade

- **Para a hereditariedade, comecemos por notar que:** se $n \geq 1$ então, por definição de $\Rightarrow^{n+1}$, tem-se
$R \Rightarrow^{n+1} x$ sse $\exists x' \in (V \cup \Sigma)^\star \; (R \Rightarrow^n x' \;\text{ e }\; x' \Rightarrow x)$. Para $R \Rightarrow^{n+1} x$ **sem substituir** A**'s**, na derivação de x' não se substituiu qualquer A.

- Supomos, como hipótese de indução, que: para todo $w \in (V \cup \Sigma)^\star$, se $R \Rightarrow^n w$ *sem substituir* A, então $w = A^k R A^n$, com $0 \leq k \leq 2n$, ou $w = A^k \mathtt{a} A^{n-1}$, com $0 \leq k \leq 2(n-1)$.

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k R A^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

Como x resulta de $x' = A^k R A^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n+2$.

- De facto,

$$\begin{array}{l} x = A^{k+2} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^{k+1} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^k R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^k \mathrm{a} A^n \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k \mathrm{a} A^n, \end{array}$$

Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k+2 \leq 2(n+1)$ **ou** $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. $\square$

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k R A^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

Como x resulta de $x' = A^k R A^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q\,\mathrm{a}\,A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q\,R\,A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n+2$.

- De facto,

$$\begin{aligned}
&x = A^{k+2} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}, \text{ ou}\\
&x = A^{k+1} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}, \text{ ou}\\
&x = A^k R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}, \text{ ou}\\
&x = A^k \mathrm{a} A^n \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k \mathrm{a} A^n,
\end{aligned}$$

Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q\,R\,A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k+2 \leq 2(n+1)$ **ou** $x = A^q\,\mathrm{a}\,A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k R A^n \text{, para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

  Como x resulta de $x' = A^k R A^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n+2$.

- De facto,

$$\begin{array}{l}
x = A^{k+2} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}\text{, ou} \\
x = A^{k+1} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}\text{, ou} \\
x = A^k R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}\text{, ou} \\
x = A^k \mathrm{a} A^n \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k \mathrm{a} A^n\text{,}
\end{array}$$

  Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k+2 \leq 2(n+1)$ **ou** $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k R A^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

Como x resulta de $x' = A^k R A^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n+2$.

- De facto,

$$x = A^{k+2} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}, \text{ ou}$$
$$x = A^{k+1} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}, \text{ ou}$$
$$x = A^k R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}, \text{ ou}$$
$$x = A^k \mathrm{a} A^n \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k \mathrm{a} A^n,$$

Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k+2 \leq 2(n+1)$ **ou** $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. $\square$

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k RA^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

Como x resulta de $x' = A^k RA^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n + 2$.

- De facto,

$$\begin{array}{ll} x = A^{k+2}RA^{n+1} & \text{por } A^k RA^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^{k+1}RA^{n+1} & \text{por } A^k RA^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^k RA^{n+1} & \text{por } A^k RA^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^k \mathrm{a} A^n & \text{por } A^k RA^n \Rightarrow A^k \mathrm{a} A^n, \end{array}$$

Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k + 2 \leq 2(n + 1)$ **ou** $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k RA^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

Como x resulta de $x' = A^k RA^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n+2$.

- De facto,

$$\begin{aligned}
&x = A^{k+2}RA^{n+1} \text{ por } A^kRA^n \Rightarrow A^kAARA^{n+1}, \text{ ou}\\
&x = A^{k+1}RA^{n+1} \text{ por } A^kRA^n \Rightarrow A^kARA^{n+1}, \text{ ou}\\
&x = A^kRA^{n+1} \text{ por } A^kRA^n \Rightarrow A^kRA^{n+1}, \text{ ou}\\
&x = A^k\mathrm{a}A^n \text{ por } A^kRA^n \Rightarrow A^k\mathrm{a}A^n,
\end{aligned}$$

Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k+2 \leq 2(n+1)$ **ou** $x = A^q \, \mathrm{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k R A^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

  Como x resulta de $x' = A^k R A^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q\, \mathrm{a}\, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q\, R\, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n + 2$.

- De facto,

$$\begin{aligned} x &= A^{k+2} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x &= A^{k+1} R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x &= A^k R A^{n+1} \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}, \text{ ou} \\ x &= A^k \mathrm{a} A^n \text{ por } A^k R A^n \Rightarrow A^k \mathrm{a} A^n, \end{aligned}$$

  Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q\, R\, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k + 2 \leq 2(n + 1)$ **ou** $x = A^q\, \mathrm{a}\, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

- Usando a hipótese de indução, deduzimos que:

$$\text{se } R \Rightarrow^n x' \text{ então } x' = A^k RA^n, \text{ para algum } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq 2n$$

  Como x resulta de $x' = A^k RA^n$ por aplicação de uma regra , isto é, $x' \Rightarrow x$, então x é da forma esperada: $x = A^q \, \mathtt{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$, **ou** $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq 2n+2$.

- De facto,

$$\begin{array}{l} x = A^{k+2}RA^{n+1} \text{ por } A^k RA^n \Rightarrow A^k AARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^{k+1}RA^{n+1} \text{ por } A^k RA^n \Rightarrow A^k ARA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^k RA^{n+1} \text{ por } A^k RA^n \Rightarrow A^k RA^{n+1}, \text{ ou} \\ x = A^k \mathtt{a} A^n \text{ por } A^k RA^n \Rightarrow A^k \mathtt{a} A^n, \end{array}$$

  Como $0 \leq k \leq 2n$ então $x = A^q \, R \, A^{n+1}$, com $0 \leq q \leq k+2 \leq 2(n+1)$ **ou** $x = A^q \, \mathtt{a} \, A^n$, com $0 \leq q \leq 2n$. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Mostrámos que a condição:

- **verifica-se para** $n = 1$, e
- **se** se verificar para n **então** verifica-se para $n + 1$, qualquer que seja $n \geq 1$

Logo, pelo **Princípio de Indução Matemática**, conclui-se que a condição verifica-se para todo $n \geq 1$, isto é $\forall n \geq 1\ \forall x \in (V \cup \Sigma)^\star$ se $R \ \Rightarrow^n \ x$ *sem substituir* A então $x \ = \ A^k\, \mathtt{a}\, A^{n-1}$, com $0 \leq k \leq 2(n-1)$, **ou** $x \ = \ A^k\, R\, A^n$, com $0 \leq k \leq 2n$. $\square$

O que podemos concluir sobre $\mathcal{L}(G)$?

Para derivarmos palavras de $\mathcal{L}(G)$, podemos substituir todos os A's no fim, uma vez que cada A se re-escreve num terminal.

Logo, $\mathcal{L}(G) \subseteq \{\mathtt{aaa}\, x\, \mathtt{a}\, y \ \mid \ |x| \leq 2|y|, \ \ x, y \in \{0, 1, \mathtt{b}\}^\star\}$ pois as palavras de $\Sigma^\star$ geradas a partir de R são da forma $x\mathtt{a}y$, com $|x| \leq 2|y|$, $x, y \in \{0, 1, \mathtt{b}\}^\star$.

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Mostrámos que a condição:

- **verifica-se para** $n = 1$, e
- **se** se verificar para n **então** verifica-se para $n + 1$, qualquer que seja $n \geq 1$

Logo, pelo **Princípio de Indução Matemática**, conclui-se que a condição verifica-se para todo $n \geq 1$, isto é $\forall n \geq 1\ \forall x \in (V \cup \Sigma)^\star$ se $R \ \Rightarrow^n\ x$ *sem substituir* A então $x \ = \ A^k\,\mathtt{a}\,A^{n-1}$, com $0 \leq k \leq 2(n-1)$, **ou** $x \ = \ A^k\, R\, A^n$, com $0 \leq k \leq 2n$. $\square$

O que podemos concluir sobre $\mathcal{L}(G)$?

Para derivarmos palavras de $\mathcal{L}(G)$, podemos substituir todos os A's no fim, uma vez que cada A se re-escreve num terminal.

Logo, $\mathcal{L}(G) \subseteq \{\mathtt{aaa}\, x\, \mathtt{a}\, y \ \mid \ |x| \leq 2|y|, \ \ x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star\}$ pois as palavras de $\Sigma^\star$ geradas a partir de R são da forma $x\mathtt{a}y$, com $|x| \leq 2|y|$, $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star$.

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Resta mostrar que $\mathcal{L}(G) \supseteq \{\mathtt{aaa}\,x\,\mathtt{a}\,y \mid |x| \leq 2|y|,\ \ x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star\}$. Para isso, vamos provar que qualquer palavra da forma $x\mathtt{a}y$, com $|x| \leq 2|y|$ e $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star$ pode ser derivada a partir de R.

Basta indicar a derivação para $x\mathtt{a}y$, considerando os casos possíveis...

- Se $|x| > |y|$ aplicar $|x| - |y|$ vezes $R \to A\,A\,R\,A$, depois $2|y| - |x|$ vezes $R \to A\,R\,A$ para obter $A^{|x|}\,R\,A^{|y|}$, depois $R \to \mathtt{a}$, e finalmente $|x| + |y|$ vezes regras para A para derivar x e y. Ou seja, se $k = |x|$ e $n = |y|$

$$R \Rightarrow^{k-n} \quad A^{2(k-n)}\,R\,A^{k-n} \quad \Rightarrow^{2n-k} \quad A^k\,R\,A^n$$

- Se $|x| < |y|$, aplicar $|x|$ vezes $R \to A\,R\,A$ e $|y| - |x|$ vezes $R \to R\,A$, e depois $R \to \mathtt{a}$, e finalmente $|x| + |y|$ vezes regras para A para derivar x e y.

$$R \Rightarrow^{k} \quad A^k\,R\,A^k \quad \Rightarrow^{n-k} \quad A^k\,R\,A^n$$

- Se $|x| = |y|$, aplicar $|x|$ vezes $R \to A\,R\,A$ e depois $R \to \mathtt{a}$, e finalmente $|x| + |y|$ vezes regras para A para derivar x e y. □

Exemplo 2: Prova de que $\mathcal{L}(G) = L$

Resta mostrar que $\mathcal{L}(G) \supseteq \{\mathtt{aaa}\, x\, \mathtt{a}\, y \mid |x| \leq 2|y|,\ x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star\}$. Para isso, vamos provar que qualquer palavra da forma $x\mathtt{a}y$, com $|x| \leq 2|y|$ e $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{b}\}^\star$ pode ser derivada a partir de R.

Basta indicar a derivação para $x\mathtt{a}y$, considerando os casos possíveis...

- Se $|x| > |y|$ aplicar $|x| - |y|$ vezes $R \to A\,A\,R\,A$, depois $2|y| - |x|$ vezes $R \to A\,R\,A$ para obter $A^{|x|}\,R\,A^{|y|}$, depois $R \to \mathtt{a}$, e finalmente $|x| + |y|$ vezes regras para A para derivar x e y. Ou seja, se $k = |x|$ e $n = |y|$

$$R \Rightarrow^{k-n} \quad A^{2(k-n)}\,R\,A^{k-n} \quad \Rightarrow^{2n-k} \quad A^k\,R\,A^n$$

- Se $|x| < |y|$, aplicar $|x|$ vezes $R \to A\,R\,A$ e $|y| - |x|$ vezes $R \to R\,A$, e depois $R \to \mathtt{a}$, e finalmente $|x| + |y|$ vezes regras para A para derivar x e y.

$$R \Rightarrow^{k} \quad A^k\,R\,A^k \quad \Rightarrow^{n-k} \quad A^k\,R\,A^n$$

- Se $|x| = |y|$, aplicar $|x|$ vezes $R \to A\,R\,A$ e depois $R \to \mathtt{a}$, e finalmente $|x| + |y|$ vezes regras para A para derivar x e y. $\square$