Formulário

Trignometria

Alguns valores de funções trigonométricas

$\cos 0 = 1$	$\operatorname{sen} 0 = 0$	$\operatorname{tg} 0 = 0$
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$	

Algumas relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \tfrac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Funções exponenciais e logarítmicas

Leis dos expoentes

1. $b^{x+y} = b^x b^y$;
2. $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$;
3. $b^{xy} = (b^x)^y$;
4. $(ab)^x = a^x b^x$.

Leis dos logaritmos

Se $x > 0$ e $y > 0$, tem-se

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x \quad$ (onde $r \in \mathbb{R}$)

Equações de cancelamento

1. $\log_b(b^x) = x, \ (x \in \mathbb{R})$;
2. $b^{\log_b x} = x, \quad (x > 0)$.

Mudança de base: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Notação: $\log_e x = \ln x$

Derivadas

Reta tangente ao gráfico

- Se f é uma função derivável em a, então $f'(a)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ e $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$.

Algumas propriedades

- Se f é uma função derivável em a, então, para qualquer número real c, tem-se $(cf)'(a) = cf'(a)$.
- Se f e g são funções deriváveis em a, então
  - $f+g$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
  - $f \cdot g$ é derivável em a e $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$;
  - se $g(a) \neq 0$ então f/g é derivável em a e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$.
- Se f é derivável em a e g é derivável em $f(a)$, então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Na notação de Leibniz: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ são ambas funções diferenciáveis, então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

Derivadas de algumas funções

Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Se $f(x) = x^k$, então $f'(x) = kx^{k-1}$, para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x$.

Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Se $f(x) = \operatorname{tg} x$, então $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x \ln a$.

Se $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, então $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Se $f(x) = \arccos x$, então $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Se $f(x) = \operatorname{arctg} x$, então $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Se $f(x) = \ln|x|$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Se $f(x) = \log_a|x|$, então $f'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

Primitivas

Lista de primitivas imediatas

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$$

Técnicas de primitivação

- *Primitivação por substituição*
  Se $u = g(x)$ é uma função derivável cujo contradomínio é um intervalo I e f é primitivável em I, então $f \circ g$ é primitivável em I e
  $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$
- *Primitivação por Partes*
  Se f e g forem funções deriváveis, então
  $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \tag{1}$$
  Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, a Fórmula (1) toma a forma
  $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
- *Primitivação de funções racionais*
  Qualquer função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ com $\operatorname{gr} P(x) < \operatorname{gr} Q(x)$ pode ser escrita como soma de frações cujos denominadores sejam potências de polinómios irredutíveis, isto é, polinómios de grau 1 ou de grau 2 irredutíveis, os quais são factores da decomposição de $Q(x)$ em produto de polinómios irredutíveis. Além disso, os numeradores destas frações têm grau inferior ao do polinómio irredutível que aparece no denominador.

Lista de primitivas de funções racionais

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C \qquad \int \frac{1}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C,\ n > 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0 \qquad \int \frac{1}{(x+b)^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} + C,\ a \neq 0$$

$$\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx = \ln(x^2+a^2) + C \qquad \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln|x^2+bx+c| + C$$

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} + C,\ n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{(2n-2)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx,\ n > 1$$