FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

U.PORTO

Cálculo I (M1001) **(Modelo) - 2ª parte** **12/01/2021**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\longleftarrow$ Indique o seu número de estudante, preenchendo em cada coluna o quadrado **à esquerda** do algarismo correspondente.
Para eventual confirmação, preencha o retângulo abaixo.

Nome completo:

Número de estudante:

Duração: 45 minutos Cotação: 8 valores

Pode utilizar uma ***calculadora científica não gráfica*** *e o formulário disponibilizado. Para além da calculadora, não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrónico, incluindo telemóvel.*
A resposta a cada questão de resposta à escolha deve ser dada preenchendo o quadrado respetivo de forma a permitir a leitura automática.
Na ausência de indicação, as notações são as habitualmente usadas nas aulas.

Questões de tipo *verdadeiro ou falso.* (2 valores)

Cada resposta correta vale 0.5 valores, valendo cada resposta errada -0.3 valores. Cada questão não respondida tem a cotação de 0 pontos.

Questão 1 "Toda a função contínua tem uma primitiva" é uma afirmação

☐ falsa. ■ verdadeira.

Justificação: A afimação é verdadeira pelo Teorema Fundamental do Cálculo, parte I.

Questão 2 "Se f e g são contínuas em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$" é uma afirmação

■ falsa. ☐ verdadeira.

Justificação: Tome-se $a=0, b=2, f(x)=g(x)=1$. Então $\int_0^2 1\,dx = 2$, mas $\left(\int_0^2 1\,dx\right)\left(\int_0^2 1\,dx\right) = 2\times 2 = 4$

Questão 3 "$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ é convergente" é uma afirmação

■ verdadeira. ☐ falsa.

Justificação: Note-se que $\sqrt{2} > 1$.

Questão 4 "Se $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, então $f(x)=0$ para $0 \le x \le 1$" é uma afirmação

☐ verdadeira. ■ falsa.

Justificação: Por exemplo, $\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) - (0-0) = 0$, mas $f(x) = x - \frac{1}{2} \neq 0$.

Questões de tipo *resposta múltipla.* (4 valores)

Cada resposta correta vale 1 valor. Não há qualquer desconto por resposta errada.

Questão 1 Calcule o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$.

- [x] $\frac{\pi^{3/2}}{12}$
- [ ] 1
- [ ] $-\pi$
- [ ] 0
- [ ] $\frac{1}{4}$
- [ ] 3
- [ ] não existe
- [ ] $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Justificação: Fazendo $u = \operatorname{arctg} x$, vem $du = dx/\left(1+x^2\right)$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\operatorname{arctg} x)^{3/2} + C$$

Então

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}\left[(\operatorname{arctg} x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi^{3/2}}{4^{3/2}} - 0\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi^{3/2} = \frac{1}{12}\pi^{3/2}$$

Resolução alternativa (usando a substituição no integral definido):

Fazendo $u = \operatorname{arctg} x$, vem $du = dx/\left(1+x^2\right)$. Quando $x=0$ tem-se $u=0$ e quando $x=1$ tem-se $u=\pi/4$. Logo,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi^{3/2}}{4^{3/2}} - 0\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi^{3/2} = \frac{1}{12}\pi^{3/2}$$

Questão 2 Calcule o integral $\displaystyle\int_0^{\pi/6} x \operatorname{sen} 2x\,dx$.

- [ ] 1
- [ ] $-\frac{\pi}{8}$
- [ ] $\pi + \sqrt{3}$
- [ ] não existe
- [ ] $\sqrt{3}\pi$
- [x] $-\frac{\pi}{24} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$
- [ ] $\frac{1}{8}$
- [ ] 0

Justificação:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} x \operatorname{sen} 2x\,dx &= \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx \qquad \begin{bmatrix} u = x, & dv = \operatorname{sen} 2x\,dx \\ du = dx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{2}\right) - (0) + \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi/6} = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{8}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Questão 3 Calcule o integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi x)\,dx$.

☐ $\sqrt{2}/2$	☐ 1	☐ não existe	☐ 0
☐ $\sqrt{3}$	■ $\frac{2}{3\pi}$	☐ π	☐ 1/2

Justificação: Fazendo $u = 3\pi x$, vem $du = 3\pi\,dx$, donde $dx = \frac{1}{3\pi}\,du$. Logo,

$$\int \operatorname{sen}(3\pi x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\int \operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{3\pi}(-\cos u) + C = -\frac{\cos(3\pi x)}{3\pi} + C$$

Então

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\Big[-\cos(3\pi x)\Big]_0^1 = -\frac{1}{3\pi}(-1-1) = \frac{2}{3\pi}$$

Resolução alternativa (usando a substituição no integral definido):
Fazendo $u = 3\pi x$, vem $du = 3\pi\,dx$. Quando $x = 0$ tem-se $u = 1$ e quando $x = 1$ tem-se $u = 3\pi$. Logo,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi x)\,dx = \int_0^{3\pi} \operatorname{sen} u\left(\frac{1}{3\pi}\right)du = \frac{1}{3\pi}\Big[-\cos u\Big]_0^{3\pi} = -\frac{1}{3\pi}(-1-1) = \frac{2}{3\pi}$$

Questão 4 Calcule o integral $\int_1^2 \left(8x^3 + 3x^2\right)\,dx$.

☐ não existe	■ 37	☐ 121	☐ -3
☐ 76	☐ 65	☐ 0	☐ 11

Justificação: $\int_1^2 \left(8x^3+3x^2\right)\,dx = \left[8\cdot\frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \left[2x^4+x^3\right]_1^2 = \left(2\cdot 2^4 + 2^3\right) - (2+1) = 40 - 3 = 37$

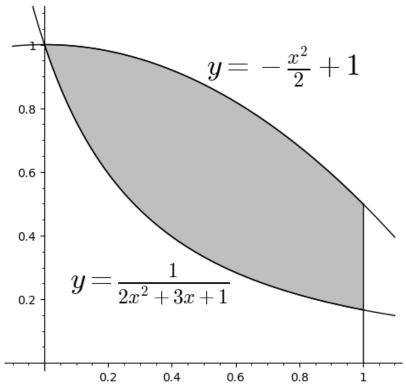
Nome completo:

Responda por extenso (de modo sucinto).

Questão 1 (2 valores) (Para responder use o espaço abaixo ou o verso da folha.)

O objetivo deste exercício é calcular a área da região a cinzento representada na figura ao lado, a qual é limitada pelas curvas $y = \dfrac{1}{2x^2+3x+1}$, $y = -\dfrac{x^2}{2} + 1$ e pela reta vertical $x = 1$.

Para o efeito, deve fazer o indicado em cada uma das seguintes alíneas (onde também se indica a cotação que lhe corresponde).



1. (1 valor) Encontre $\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$. (Sugestão: note que $2x^2+3x+1 = (2x+1)(x+1)$.)
2. (0.5 valores) Encontre $\int \left(-\frac{x^2}{2}+1\right) dx$.
3. (0.5 valores) Use as informações das alíneas anteriores para calcular a área da região entre as retas $x = 0$ e $x = 1$ limitada pelas curvas $y = \frac{1}{2x^2+3x+1}$ e $y = -\frac{x^2}{2}+1$.

.... □ 0 □ 0.2 □ 0.4 □ 0.6 □ 0.8 □ 1 □ 1.2 □ 1.4 □ 1.6 □ 1.8 ■ 2

Justificação:

1. Tem-se $2x^2+3x+1 = (2x+1)(x+1)$. Existem números A e B tais que

$$\frac{1}{2x^2+3x+1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $(2x+1)(x+1)$ obtem-se

$$1 = A(x+1) + B(2x+1) = (A+2B)x + A + B$$

o que leva ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} A & +2B & = 0 \\ A & +B & = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 2, B = -1$, obtendo-se $\frac{1}{2x^2+3x+1} = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}$. Resulta então:

$$\int \frac{dx}{2x^2+3x+1} = \int \frac{1}{(2x+1)(x+1)}\, dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|2x+1| - \ln|x+1| + C$$

2. $\displaystyle\int \left(-\frac{x^2}{2}+1\right) dx = -x^3/6 + x + C$

3.

$$A = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2}+1\right) dx - \int_0^1 \frac{dx}{2x^2+3x+1} = \Big[-x^3/6 + x - \ln|2x+1| + \ln|x+1|\Big]_0^1$$
$$= -1/6 + 1 - \ln 3 + \ln 2 = 5/6 + \ln 2/3$$