CC1004 - Modelos de Computação
Teórica 19

Ana Paula Tomás

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Maio 2021

Autómatos de Pilha (*Pushdown automata*)

Um autómato de pilha $\mathcal{A}$ é um definido por

$$A = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$$

sendo

- S o **conjunto de estados**, S é finito,
- Σ o **alfabeto de entrada**,
- Γ o **alfabeto da pilha**,
- $s_0 \in S$ o **estado inicial**, $Z_0 \in \Gamma$ o **símbolo inicial** na pilha,
- F o conjunto de **estados finais**,
- δ a **função de transição**, que é uma função de $S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ no conjunto dos subconjuntos de $S \times \Gamma^{\star}$.

Exemplo 5 A linguagem $L = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{\mathrm{Z}, \mathrm{B}\}, \delta, s_0, \mathrm{Z}, \{\ \})$ onde

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathrm{Z}) & = & \{(s_1, \mathrm{Z})\} & \delta(s_0, 1, \mathrm{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_0, 0, \mathrm{Z}) & = & \{(s_0, \mathrm{BZ})\} & \delta(s_1, 1, \mathrm{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_0, 0, \mathrm{B}) & = & \{(s_0, \mathrm{BB})\} & \delta(s_1, 1, \mathrm{Z}) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, \mathrm{Z})\}
\end{array}
$$

Ideia:

Aceitação de 001111.

Aceitação de 111.

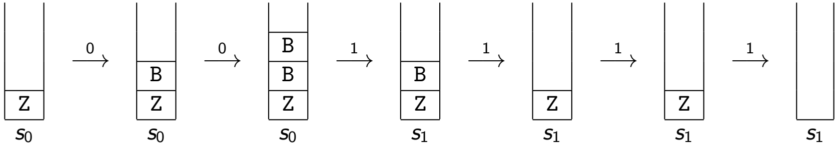
Autómatos de pilha

Exemplo 5 A linguagem $L = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{\mathrm{Z}, \mathrm{B}\}, \delta, s_0, \mathrm{Z}, \{\ \})$ onde

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathrm{Z}) & = & \{(s_1, \mathrm{Z})\} & \delta(s_0, 1, \mathrm{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_0, 0, \mathrm{Z}) & = & \{(s_0, \mathrm{BZ})\} & \delta(s_1, 1, \mathrm{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_0, 0, \mathrm{B}) & = & \{(s_0, \mathrm{BB})\} & \delta(s_1, 1, \mathrm{Z}) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, \mathrm{Z})\}
\end{array}$$

Ideia:

Aceitação de 001111.



Aceitação de 111.

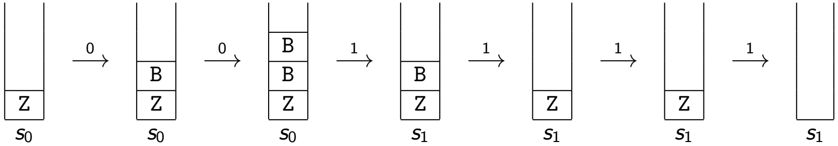
Autómatos de pilha

Exemplo 5 A linguagem $L = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\ \})$ onde

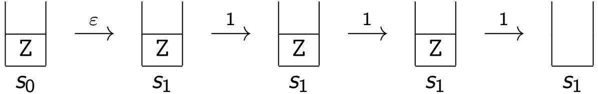
$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, Z)\} & \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} & \delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} & \delta(s_1, 1, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, Z)\}
\end{array}$$

Ideia:

Aceitação de 001111.



Aceitação de 111.



Exemplo 5 (cont.) $L = \{0^n1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{\mathrm{Z}, \mathrm{B}\}, \delta, s_0, \mathrm{Z}, \{\ \})$ onde

$$\begin{array}{rcl} \delta(s_0, \varepsilon, \mathrm{Z}) & = & \{(s_1, \mathrm{Z})\} \\ \delta(s_0, 0, \mathrm{Z}) & = & \{(s_0, \mathrm{BZ})\} \\ \delta(s_0, 0, \mathrm{B}) & = & \{(s_0, \mathrm{BB})\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \delta(s_0, 1, \mathrm{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, \mathrm{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, \mathrm{Z}) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, \mathrm{Z})\} \end{array}$$

- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode passar a s_1 sem consumir qualquer símbolo**, o que permite reconhecer sequências em $\mathcal{L}(11^\star)$.
- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode consumir 0's.**
  - Se consumir 0^n, com $n \geq 1$, está em s_0 e tem $\mathrm{B}^n\mathrm{Z}$ na pilha.
  - Depois, se consumir k 1's, $1 \leq k \leq n$, fica em s_1 com $\mathrm{B}^{n-k}\mathrm{Z}$ na pilha.
  - Quando $k = n$, está em s_1 e tem apenas Z na pilha. Se consumir algum 1, pode permanecer em s_1 e continuar com Z na pilha, ou retirar Z, aceitando a palavra se esta tiver terminado.

Este autómato *não é determinístico*.

Exemplo 5 (cont.) $L = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$ onde

$$\begin{array}{lcl} \delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_1, \mathtt{Z})\} \\ \delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} \\ \delta(s_0, 0, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, \mathtt{Z}) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, \mathtt{Z})\} \end{array}$$

- **Em s_0, com $\mathtt{Z}$ no topo da pilha, pode passar a s_1 sem consumir qualquer símbolo**, o que permite reconhecer sequências em $\mathcal{L}(11^\star)$.
- **Em s_0, com $\mathtt{Z}$ no topo da pilha, pode consumir 0's.**
  - Se consumir 0^n, com $n \geq 1$, está em s_0 e tem $\mathtt{B}^n\mathtt{Z}$ na pilha.
  - Depois, se consumir k 1's, $1 \leq k \leq n$, fica em s_1 com $\mathtt{B}^{n-k}\mathtt{Z}$ na pilha.
  - Quando $k = n$, está em s_1 e tem apenas $\mathtt{Z}$ na pilha. Se consumir algum 1, pode permanecer em s_1 e continuar com $\mathtt{Z}$ na pilha, ou retirar $\mathtt{Z}$, aceitando a palavra se esta tiver terminado.

Este autómato *não é determinístico*.

Autómatos de pilha

Exemplo 5 (cont.) $L = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\ \})$ onde

$$\begin{array}{lcl} \delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, Z)\} \\ \delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\ \delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, 1, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, Z)\} \end{array}$$

- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode passar a s_1 sem consumir qualquer símbolo**, o que permite reconhecer sequências em $\mathcal{L}(11^\star)$.
- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode consumir 0's.**
  - Se consumir 0^n, com $n \geq 1$, está em s_0 e tem $B^n Z$ na pilha.
  - Depois, se consumir k 1's, $1 \leq k \leq n$, fica em s_1 com $B^{n-k}Z$ na pilha.
  - Quando $k = n$, está em s_1 e tem apenas Z na pilha. Se consumir algum 1, pode permanecer em s_1 e continuar com Z na pilha, ou retirar Z, aceitando a palavra se esta tiver terminado.

Este autómato *não é determinístico*.

Autómatos de pilha

Exemplo 5 (cont.) $L = \{0^n1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\ \})$ onde

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, Z) & = & \{(s_1, Z)\} \\
\delta(s_0, 0, Z) & = & \{(s_0, BZ)\} \\
\delta(s_0, 0, B) & = & \{(s_0, BB)\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\delta(s_0, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, 1, B) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, 1, Z) & = & \{(s_1, \varepsilon), (s_1, Z)\}
\end{array}
$$

- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode passar a s_1 sem consumir qualquer símbolo**, o que permite reconhecer sequências em $\mathcal{L}(11^\star)$.
- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode consumir 0's.**
  - Se consumir 0^n, com $n \geq 1$, está em s_0 e tem B^nZ na pilha.
  - Depois, se consumir k 1's, $1 \leq k \leq n$, fica em s_1 com $B^{n-k}Z$ na pilha.
  - Quando $k = n$, está em s_1 e tem apenas Z na pilha. Se consumir algum 1, pode permanecer em s_1 e continuar com Z na pilha, ou retirar Z, aceitando a palavra se esta tiver terminado.

Este autómato *não é determinístico*.

Autómatos de pilha

Exemplo 5 (cont.) $L = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, m > n\}$ é reconhecida por pilha vazia pelo autómato $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \{Z, B\}, \delta, s_0, Z, \{\ \})$ onde

$$\begin{aligned} \delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) &= \{(s_1, \mathtt{Z})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) &= \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) &= \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_1, 1, \mathtt{B}) &= \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_0, 0, \mathtt{B}) &= \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_1, 1, \mathtt{Z}) &= \{(s_1, \varepsilon), (s_1, \mathtt{Z})\} \end{aligned}$$

- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode passar a s_1 sem consumir qualquer símbolo**, o que permite reconhecer sequências em $\mathcal{L}(11^\star)$.
- **Em s_0, com Z no topo da pilha, pode consumir 0's.**
  - Se consumir 0^n, com $n \geq 1$, está em s_0 e tem $\mathtt{B}^n\mathtt{Z}$ na pilha.
  - Depois, se consumir k 1's, $1 \leq k \leq n$, fica em s_1 com $\mathtt{B}^{n-k}\mathtt{Z}$ na pilha.
  - Quando $k = n$, está em s_1 e tem apenas Z na pilha. Se consumir algum 1, pode permanecer em s_1 e continuar com Z na pilha, ou retirar Z, aceitando a palavra se esta tiver terminado.

Este autómato *não é determinístico*.

Comportamento determinístico

Autómatos de pilha determinísticos

Um autómato de pilha $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$ é **determinístico** se e só se para cada configuração só existir uma transição possível. Ou seja, se e só se, quaisquer que sejam $s \in S$, $a \in \Sigma$ e $X \in \Gamma$, se tem:

- se $\delta(s, \varepsilon, X) \neq \emptyset$ então $\delta(s, a, X) = \emptyset$, para todo $a \in \Sigma$;
- se $\delta(s, a, X) \neq \emptyset$ então $\delta(s, a, X)$ tem um e um só elemento, quaisquer que sejam $s \in S$, $a \in \Sigma$ e $X \in \Gamma$.

Observação:

Contrariamente à definição demos para autómatos finitos, permitimos que alguns autómatos de pilha com transições por ε sejam considerados determinísticos.
Referimo-nos ao seu *comportamento*, caraterizando-o como determinístico ou não.

Formalização da noção de linguagem aceite

Seja $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$ um autómato de pilha.

- Uma configuração é dada por um terno (s, x, γ), com $s \in S$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$, sendo s o estado em que $\mathcal{A}$ se encontra, x a palavra que falta consumir, e γ o conteúdo da pilha (o símbolo mais à esquerda é o topo).
- A mudança de configuração numa transição é traduzida por uma relação binária $\vdash_\mathcal{A}$, definida no conjunto de ternos $S \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$ por

$$(s, ax, Z\gamma) \quad \vdash_\mathcal{A} \quad (q, x, \beta\gamma) \text{ se e só se } (q, \beta) \in \delta(s, a, Z)$$

  para $s \in S$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$.
  Se for claro qual é o autómato, podemos escrever $\vdash$ em vez de $\vdash_\mathcal{A}$.
- mudança de configuração por n transições é definida pela relação $\vdash_\mathcal{A}^n$, dada pela relação composta, com $\vdash_\mathcal{A}^1 = \vdash_\mathcal{A}$, $\vdash_\mathcal{A}^{n+1} = \vdash_\mathcal{A}^n \vdash_\mathcal{A} = \vdash_\mathcal{A} \vdash_\mathcal{A}^n$, para $n \geq 1$.
- mudança de configuração após um zero ou mais transições $\vdash_\mathcal{A}^\star$, como o fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_\mathcal{A}$.

Formalização da noção de linguagem aceite

Seja $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$ um autómato de pilha.

- Uma configuração é dada por um terno (s, x, γ), com $s \in S$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$, sendo s o estado em que $\mathcal{A}$ se encontra, x a palavra que falta consumir, e γ o conteúdo da pilha (o símbolo mais à esquerda é o topo).
- A mudança de configuração numa transição é traduzida por uma relação binária $\vdash_{\mathcal{A}}$, definida no conjunto de ternos $S \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$ por

  $$(s, ax, Z\gamma) \quad \vdash_{\mathcal{A}} \quad (q, x, \beta\gamma) \text{ se e só se } (q, \beta) \in \delta(s, a, Z)$$

  para $s \in S$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$.

  Se for claro qual é o autómato, podemos escrever $\vdash$ em vez de $\vdash_{\mathcal{A}}$.
- mudança de configuração por n transições é definida pela relação $\vdash_{\mathcal{A}}^n$, dada pela relação composta, com $\vdash_{\mathcal{A}}^1 = \vdash_{\mathcal{A}}$, $\vdash_{\mathcal{A}}^{n+1} = \vdash_{\mathcal{A}}^n \vdash_{\mathcal{A}} = \vdash_{\mathcal{A}} \vdash_{\mathcal{A}}^n$, para $n \geq 1$.
- mudança de configuração após um zero ou mais transições $\vdash_{\mathcal{A}}^\star$, como o fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_{\mathcal{A}}$.

Formalização da noção de linguagem aceite

Seja $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$ um autómato de pilha.

- Uma configuração é dada por um terno (s, x, γ), com $s \in S$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$, sendo s o estado em que $\mathcal{A}$ se encontra, x a palavra que falta consumir, e γ o conteúdo da pilha (o símbolo mais à esquerda é o topo).
- A mudança de configuração numa transição é traduzida por uma relação binária $\vdash_{\mathcal{A}}$, definida no conjunto de ternos $S \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$ por

$$(s, ax, Z\gamma) \quad \vdash_{\mathcal{A}} \quad (q, x, \beta\gamma) \ \text{ se e só se } (q, \beta) \in \delta(s, a, Z)$$

para $s \in S$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$.

Se for claro qual é o autómato, podemos escrever $\vdash$ em vez de $\vdash_{\mathcal{A}}$.

- mudança de configuração por n transições é definida pela relação $\vdash_{\mathcal{A}}^n$, dada pela relação composta, com $\vdash_{\mathcal{A}}^1 = \vdash_{\mathcal{A}}$, $\vdash_{\mathcal{A}}^{n+1} = \vdash_{\mathcal{A}}^n \vdash_{\mathcal{A}} = \vdash_{\mathcal{A}} \vdash_{\mathcal{A}}^n$, para $n \geq 1$.
- mudança de configuração após um zero ou mais transições $\vdash_{\mathcal{A}}^\star$, como o fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_{\mathcal{A}}$.

Formalização da noção de linguagem aceite

Seja $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$ um autómato de pilha.

- Uma configuração é dada por um terno (s, x, γ), com $s \in S$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$, sendo s o estado em que $\mathcal{A}$ se encontra, x a palavra que falta consumir, e γ o conteúdo da pilha (o símbolo mais à esquerda é o topo).
- A mudança de configuração numa transição é traduzida por uma relação binária $\vdash_\mathcal{A}$, definida no conjunto de ternos $S \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$ por

$$(s, ax, Z\gamma) \quad \vdash_\mathcal{A} \quad (q, x, \beta\gamma) \text{ se e só se } (q, \beta) \in \delta(s, a, Z)$$

  para $s \in S$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$, $x \in \Sigma^\star$ e $\gamma \in \Gamma^\star$.

  Se for claro qual é o autómato, podemos escrever $\vdash$ em vez de $\vdash_\mathcal{A}$.
- mudança de configuração por n transições é definida pela relação $\vdash_\mathcal{A}^n$, dada pela relação composta, com $\vdash_\mathcal{A}^1 = \vdash_\mathcal{A}$, $\vdash_\mathcal{A}^{n+1} = \vdash_\mathcal{A}^n \vdash_\mathcal{A} = \vdash_\mathcal{A} \vdash_\mathcal{A}^n$, para $n \geq 1$.
- mudança de configuração após um zero ou mais transições $\vdash_\mathcal{A}^\star$, como o fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_\mathcal{A}$.

Formalização da noção de linguagem aceite

Dois critérios de aceitação para $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$:

Linguagem aceite por pilha vazia. $\{x \in \Sigma^\star \mid \exists s \in S\ (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s, \varepsilon, \varepsilon)\}$

Linguagem aceite por estados finais:

$$\{x \in \Sigma^\star \mid \exists f \in F\ \exists \gamma \in \Gamma^\star\ (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (f, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Para cada autómato de pilha, **temos de indicar o critério de aceitação**.
É usual definir $F = \emptyset$ quando o critério é "aceitação por pilha vazia".

Exemplo 5 (cont.): para ver que 00111 é aceite por pilha vazia, precisamos de mostrar que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

Como podemos ter
$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash (s_0, 0111, \mathrm{BZ}) \vdash (s_0, 111, \mathrm{BBZ}) \vdash (s_1, 11, \mathrm{BZ}) \vdash (s_1, 1, \mathrm{Z}) \vdash (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$,
concluimos que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^5 (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, pelo que

$$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon).$$

Formalização da noção de linguagem aceite

Dois critérios de aceitação para $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$:

Linguagem aceite por pilha vazia. $\{x \in \Sigma^\star \mid \exists s \in S \; (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s, \varepsilon, \varepsilon)\}$

Linguagem aceite por estados finais:

$$\{x \in \Sigma^\star \mid \exists f \in F \; \exists \gamma \in \Gamma^\star \; (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (f, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Para cada autómato de pilha, **temos de indicar o critério de aceitação**.
É usual definir $F = \emptyset$ quando o critério é "aceitação por pilha vazia".

Exemplo 5 (cont.): para ver que 00111 é aceite por pilha vazia, precisamos de mostrar que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

Como podemos ter
$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash (s_0, 0111, \mathrm{BZ}) \vdash (s_0, 111, \mathrm{BBZ}) \vdash (s_1, 11, \mathrm{BZ}) \vdash (s_1, 1, \mathrm{Z}) \vdash (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$,
concluimos que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^5 (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, pelo que

$$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon).$$

Formalização da noção de linguagem aceite

Dois critérios de aceitação para $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$:

Linguagem aceite por pilha vazia. $\{x \in \Sigma^\star \mid \exists s \in S \ (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s, \varepsilon, \varepsilon)\}$

Linguagem aceite por estados finais:

$$\{x \in \Sigma^\star \mid \exists f \in F \ \exists \gamma \in \Gamma^\star \ (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (f, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Para cada autómato de pilha, **temos de indicar o critério de aceitação**.
É usual definir $F = \emptyset$ quando o critério é "aceitação por pilha vazia".

Exemplo 5 (cont.): para ver que 00111 é aceite por pilha vazia, precisamos de mostrar que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

Como podemos ter
$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash (s_0, 0111, \mathrm{BZ}) \vdash (s_0, 111, \mathrm{BBZ}) \vdash (s_1, 11, \mathrm{BZ}) \vdash (s_1, 1, \mathrm{Z}) \vdash (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$,
concluimos que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^5 (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, pelo que

$$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon).$$

Formalização da noção de linguagem aceite

Dois critérios de aceitação para $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$:

Linguagem aceite por pilha vazia. $\{x \in \Sigma^\star \mid \exists s \in S\ (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s, \varepsilon, \varepsilon)\}$

Linguagem aceite por estados finais:

$$\{x \in \Sigma^\star \mid \exists f \in F\ \exists \gamma \in \Gamma^\star\ (s_0, x, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (f, \varepsilon, \gamma)\}.$$

Para cada autómato de pilha, **temos de indicar o critério de aceitação**.
É usual definir $F = \emptyset$ quando o critério é "aceitação por pilha vazia".

Exemplo 5 (cont.): para ver que 00111 é aceite por pilha vazia, precisamos de mostrar que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$.

Como podemos ter
$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash (s_0, 0111, \mathrm{BZ}) \vdash (s_0, 111, \mathrm{BBZ}) \vdash (s_1, 11, \mathrm{BZ}) \vdash (s_1, 1, \mathrm{Z}) \vdash (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$,
concluimos que $(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^5 (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, pelo que

$$(s_0, 00111, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^\star (s_1, \varepsilon, \varepsilon).$$

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(A) = L$

Exemplo 5 (cont.): Poderiamos **demonstrar por indução matemática** que:

- $(s_0, \mathtt{0}^n\mathtt{1}^m, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, \mathtt{1}^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, para $1 \leq n$.

- $(s_0, \mathtt{1}^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_1, \mathtt{1}^{m-n}, \mathtt{Z})$, para $1 \leq n < m$

- $(s_1, \mathtt{1}^{m-n}, \mathtt{Z}) \vdash^{m-n-1}_{\mathcal{A}} (s_1, \mathtt{1}, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $1 \leq n < m$

para concluir que qualquer palavra $\mathtt{0}^n\mathtt{1}^m$, com $1 \leq n < m$, é aceite pelo autómato por pilha vazia. E, que aceita também qualquer palavra $\mathtt{1}^m$, com $m \geq 1$, pois

- $(s_0, \mathtt{1}^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \mathtt{1}^m, \mathtt{Z}) \vdash^{m-1}_{\mathcal{A}} (s_1, \mathtt{1}, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $m \geq 1$

Logo, para linguagem $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ aceite por pilha vazia, temos

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \supseteq L = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^m \mid m > n \geq 0\}$$

mas **falta ver se $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ contém outras palavras além das de L**.

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(A) = L$

Exemplo 5 (cont.): Poderiamos **demonstrar por indução matemática** que:

- $(s_0, 0^n 1^m, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, para $1 \leq n$.
- $(s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-n}, \mathtt{Z})$, para $1 \leq n < m$
- $(s_1, 1^{m-n}, \mathtt{Z}) \vdash^{m-n-1}_{\mathcal{A}} (s_1, 1, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $1 \leq n < m$

para concluir que qualquer palavra $0^n 1^m$, com $1 \leq n < m$, é aceite pelo autómato por pilha vazia. E, que aceita também qualquer palavra 1^m, com $m \geq 1$, pois

- $(s_0, 1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m, \mathtt{Z}) \vdash^{m-1}_{\mathcal{A}} (s_1, 1, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $m \geq 1$

Logo, para linguagem $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ aceite por pilha vazia, temos

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \supseteq L = \{0^n 1^m \mid m > n \geq 0\}$$

mas **falta ver se** $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ **contém outras palavras além das de** L.

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(A) = L$

Exemplo 5 (cont.): Poderiamos **demonstrar por indução matemática** que:

- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, para $1 \leq n$.
- $(s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-n}, \mathtt{Z})$, para $1 \leq n < m$
- $(s_1, 1^{m-n}, \mathtt{Z}) \vdash^{m-n-1}_{\mathcal{A}} (s_1, 1, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $1 \leq n < m$

para concluir que qualquer palavra 0^n1^m, com $1 \leq n < m$, é aceite pelo autómato por pilha vazia. E, que aceita também qualquer palavra 1^m, com $m \geq 1$, pois

- $(s_0, 1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m, \mathtt{Z}) \vdash^{m-1}_{\mathcal{A}} (s_1, 1, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $m \geq 1$

Logo, para linguagem $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ aceite por pilha vazia, temos

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \supseteq L = \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$$

mas **falta ver se** $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ **contém outras palavras além das de** L.

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(A) = L$

Exemplo 5 (cont.): Poderiamos **demonstrar por indução matemática** que:

- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, para $1 \leq n$.

- $(s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-n}, \mathtt{Z})$, para $1 \leq n < m$

- $(s_1, 1^{m-n}, \mathtt{Z}) \vdash^{m-n-1}_{\mathcal{A}} (s_1, 1, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $1 \leq n < m$

para concluir que qualquer palavra 0^n1^m, com $1 \leq n < m$, é aceite pelo autómato por pilha vazia. E, que aceita também qualquer palavra 1^m, com $m \geq 1$, pois

- $(s_0, 1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m, \mathtt{Z}) \vdash^{m-1}_{\mathcal{A}} (s_1, 1, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \varepsilon)$, para $m \geq 1$

Logo, para linguagem $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ aceite por pilha vazia, temos

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \supseteq L = \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$$

mas **falta ver se $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ contém outras palavras além das de L.**

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$

Exemplo 5 (cont.): **Nenhuma palavra de $\Sigma^\star \setminus \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$ é aceite.**

Porquê? Vamos analisar as configurações possíveis, para o seu processamento...

Palavras que não têm 1's são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n, \mathrm{Z})$, com $n \geq 0$. Pilha não vazia. Não há transição ("encrava").
- $(s_0, 0^n, \mathrm{Z}) \vdash^k_{\mathcal{A}} (s_0, 0^{n-k}, \mathrm{B}^k\mathrm{Z}) \vdash^{n-k}_{\mathcal{A}} (s_0, \varepsilon, \mathrm{B}^n\mathrm{Z})$, com $1 \leq k \leq n$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m, com $1 \leq m \leq n$, são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m, \mathrm{Z})$. "Encrava"
- $(s_0, 0^n1^m, \mathrm{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathrm{B}^n\mathrm{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \mathrm{B}^{n-m}\mathrm{Z})$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m0w, com $m \geq 1$, $n \geq 1$, e $w \in \{0\}^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m0w, \mathrm{Z})$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathrm{B}^n\mathrm{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, 0w, \mathrm{B}^{n-m}\mathrm{Z})$, com $n \geq m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathrm{B}^n\mathrm{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, 0w, \mathrm{Z})$, com $n < m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathrm{B}^n\mathrm{Z}) \vdash^{n+k}_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-n-k}0w, \varepsilon)$, com $n < m$. "Encrava".

Palavras da forma 1^m0w, com $m \geq 1$ e $w \in \Sigma^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash^k_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-k}0w, \varepsilon)$, com $k < m$. "Encrava".
- $(s_0, 1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathrm{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, 0w, \mathrm{Z})$. "Encrava".

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$

Exemplo 5 (cont.): **Nenhuma palavra de $\Sigma^\star \setminus \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$ é aceite.**

Porquê? Vamos analisar as configurações possíveis, para o seu processamento...

Palavras que não têm 1's são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n, \mathtt{Z})$, com $n \geq 0$. Pilha não vazia. Não há transição ("encrava").
- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^k (s_0, 0^{n-k}, \mathtt{B}^k\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^{n-k} (s_0, \varepsilon, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, com $1 \leq k \leq n$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m, com $1 \leq m \leq n$, são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m, \mathtt{Z})$. "Encrava"
- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, \varepsilon, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m0w, com $m \geq 1$, $n \geq 1$, e $w \in \{0\}^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$, com $n \geq m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{Z})$, com $n < m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^{n+k} (s_1, 1^{m-n-k}0w, \varepsilon)$, com $n < m$. "Encrava".

Palavras da forma 1^m0w, com $m \geq 1$ e $w \in \Sigma^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^k (s_1, 1^{m-k}0w, \varepsilon)$, com $k < m$. "Encrava".
- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$

Exemplo 5 (cont.): **Nenhuma palavra de $\Sigma^\star \setminus \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$ é aceite.**

Porquê? Vamos analisar as configurações possíveis, para o seu processamento...

Palavras que não têm 1's são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n, \mathtt{Z})$, com $n \geq 0$. Pilha não vazia. Não há transição ("encrava").
- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash^k_{\mathcal{A}} (s_0, 0^{n-k}, \mathtt{B}^k\mathtt{Z}) \vdash^{n-k}_{\mathcal{A}} (s_0, \varepsilon, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, com $1 \leq k \leq n$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m, com $1 \leq m \leq n$, são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m, \mathtt{Z})$. "Encrava"
- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, \varepsilon, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m0w, com $m \geq 1$, $n \geq 1$, e $w \in \{0\}^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, 0w, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$, com $n \geq m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, 0w, \mathtt{Z})$, com $n < m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash^n_{\mathcal{A}} (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash^{n+k}_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-n-k}0w, \varepsilon)$, com $n < m$. "Encrava".

Palavras da forma 1^m0w, com $m \geq 1$ e $w \in \Sigma^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash^k_{\mathcal{A}} (s_1, 1^{m-k}0w, \varepsilon)$, com $k < m$. "Encrava".
- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash^m_{\mathcal{A}} (s_1, 0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".

Exemplo 5 (cont.): **Nenhuma palavra de $\Sigma^\star \setminus \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$ é aceite.**

Porquê? Vamos analisar as configurações possíveis, para o seu processamento...

Palavras que não têm 1's são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n, \mathtt{Z})$, com $n \geq 0$. Pilha não vazia. Não há transição ("encrava").
- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^k (s_0, 0^{n-k}, \mathtt{B}^k\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^{n-k} (s_0, \varepsilon, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, com $1 \leq k \leq n$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m, com $1 \leq m \leq n$, são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m, \mathtt{Z})$. "Encrava"
- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, \varepsilon, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m0w, com $m \geq 1$, $n \geq 1$, e $w \in \{0\}^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$, com $n \geq m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{Z})$, com $n < m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^{n+k} (s_1, 1^{m-n-k}0w, \varepsilon)$, com $n < m$. "Encrava".

Palavras da forma 1^m0w, com $m \geq 1$ e $w \in \Sigma^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^k (s_1, 1^{m-k}0w, \varepsilon)$, com $k < m$. "Encrava".
- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".

Exemplo 5 (cont.): Justificação de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$

Exemplo 5 (cont.): **Nenhuma palavra de $\Sigma^\star \setminus \{0^n1^m \mid m > n \geq 0\}$ é aceite.**
Porquê? Vamos analisar as configurações possíveis, para o seu processamento...

Palavras que não têm 1's são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n, \mathtt{Z})$, com $n \geq 0$. Pilha não vazia. Não há transição ("encrava").
- $(s_0, 0^n, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^k (s_0, 0^{n-k}, \mathtt{B}^k\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^{n-k} (s_0, \varepsilon, \mathtt{B}^n\mathtt{Z})$, com $1 \leq k \leq n$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m, com $1 \leq m \leq n$, são rejeitadas. Pilha não vazia se consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m, \mathtt{Z})$. "Encrava"
- $(s_0, 0^n1^m, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, \varepsilon, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$. Pilha não vazia.

Palavras da forma 0^n1^m0w, com $m \geq 1$, $n \geq 1$, e $w \in \{0\}^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 0^n1^m0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{B}^{n-m}\mathtt{Z})$, com $n \geq m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{Z})$, com $n < m$. "Encrava".
- $(s_0, 0^n1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^n (s_0, 1^m, \mathtt{B}^n\mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^{n+k} (s_1, 1^{m-n-k}0w, \varepsilon)$, com $n < m$. "Encrava".

Palavras da forma 1^m0w, com $m \geq 1$ e $w \in \Sigma^\star$, são rejeitadas. Não consegue acabar a palavra.

- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^k (s_1, 1^{m-k}0w, \varepsilon)$, com $k < m$. "Encrava".
- $(s_0, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}} (s_1, 1^m0w, \mathtt{Z}) \vdash_{\mathcal{A}}^m (s_1, 0w, \mathtt{Z})$. "Encrava".

Exemplo 6: Palavras com igual número de 0's 1's

Exemplo 6 A linguagem $L = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star$ tem igual número de 0's e 1's$\}$ é reconhecida por pilha vazia por $\mathcal{A} = (\{s_0\}, \{0,1\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$, com

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & & & \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{AZ})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \mathtt{AA})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{array}$$

Ideia:

- Coloca A na pilha por cada 1 em excesso e coloca B por cada 0 em excesso.
- Se A está no topo da pilha e consome 0, retira o A pois o número de 1's em excesso descresce de um. Analogamente, se no topo estiver B e consumir 1.

Aceitação de 00101110.

Exemplo 6: Palavras com igual número de 0's 1's

Exemplo 6 A linguagem $L = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ tem igual número de 0's e 1's}\}$ é reconhecida por pilha vazia por $\mathcal{A} = (\{s_0\}, \{0,1\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$, com

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & & & \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{AZ})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \mathtt{AA})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

Ideia:

- Coloca A na pilha por cada 1 em excesso e coloca B por cada 0 em excesso.
- Se A está no topo da pilha e consome 0, retira o A pois o número de 1's em excesso descresce de um. Analogamente, se no topo estiver B e consumir 1.

Aceitação de 00101110.

Exemplo 6: Palavras com igual número de 0's 1's

Exemplo 6 A linguagem $L = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ tem igual número de 0's e 1's}\}$ é reconhecida por pilha vazia por $\mathcal{A} = (\{s_0\}, \{0,1\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$, com

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & & & \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{AZ})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \mathtt{AA})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

Ideia:

- Coloca A na pilha por cada 1 em excesso e coloca B por cada 0 em excesso.
- Se A está no topo da pilha e consome 0, retira o A pois o número de 1's em excesso descresce de um. Analogamente, se no topo estiver B e consumir 1.

Aceitação de 00101110.

Exemplo 6: Palavras com igual número de 0's 1's

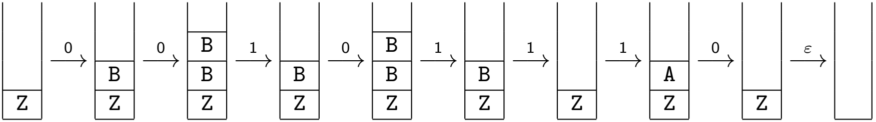
Exemplo 6 A linguagem $L = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ tem igual número de 0's e 1's}\}$ é reconhecida por pilha vazia por $\mathcal{A} = (\{s_0\}, \{0,1\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$, com

$$
\begin{array}{lcllcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & & & \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{AZ})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \mathtt{AA})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

Ideia:

- Coloca A na pilha por cada 1 em excesso e coloca B por cada 0 em excesso.
- Se A está no topo da pilha e consome 0, retira o A pois o número de 1's em excesso descresce de um. Analogamente, se no topo estiver B e consumir 1.

Aceitação de 00101110.



Exemplo 6: Palavras com igual número de 0's 1's

Exemplo 6 A linguagem $L = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ tem igual número de 0's e 1's}\}$ é reconhecida por pilha vazia por $\mathcal{A} = (\{s_0\}, \{0,1\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\ \})$, com

$$
\begin{array}{lcl}
\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcllcl}
\delta(s_0, 0, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{AZ})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \mathtt{AA})\} \\
\delta(s_0, 0, \mathtt{A}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\} & \delta(s_0, 1, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

Para este autómato $\mathcal{A}$, quaisquer que sejam $x, y \in \Sigma^\star$, tem-se:

- $(s_0, xy, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s_0, y, \mathtt{B}^k\mathtt{Z})$, com $k \geq 1$, se e só se $\#_0(x) - \#_1(x) = k$.
- $(s_0, xy, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s_0, y, \mathtt{A}^k\mathtt{Z})$, com $k \geq 1$, se e só se $\#_1(x) - \#_0(x) = k$.
- $(s_0, xy, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s_0, y, \mathtt{Z})$ se e só se $\#_1(x) = \#_0(x)$.
- $(s_0, xy, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s_0, y, \varepsilon)$ se e só se $\#_1(x) = \#_0(x)$.

Portanto, $(s_0, x, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s_0, \varepsilon, \varepsilon)$ se e só se $x \in L$.

Notação: Para $a \in \Sigma$, denotamos **o número de a's em x** por $\#_a(x)$.