Cálculo I (M1001)

Lic:CC e MI:ERS, 1º ano

Parte 2

Exercícios*

Ano letivo de 2020/2021

1 Primitivas

1.1 Primitivas imediatas

1.1.1. Encontre a primitiva mais geral da função.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; b) $f(x) = (x-5)^2$; c) $f(x) = f(x) = \sqrt{2}$;

d) $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$; e) $f(t) = \frac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$. f) $f(x) = 1 + 2\operatorname{sen} x + 3/\sqrt{x}$.

1.1.2. Encontre f.

a) $f'(x) = 1 + 3, \quad f(4) = 25$;

b) $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4, \quad f(-1) = 2$;

c) $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = 12$;

d) $f''(x) = 8x^3 + 5, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 8$.

1.1.3. Encontre o seguinte integral indefinido.

a) $\displaystyle\int \sqrt{t}(t^2+3t+2)\,dt$; b) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}+x}{x}\,dx$; c) $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$.

1.2 Regra de Substituição

1.2.1. Calcule o integral indefinido, fazendo a substituição indicada.

a) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx, \quad u = -x^2$; b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$;

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$; d) $\displaystyle\int \sqrt{2t+1}\,dt, \quad u = 2t + 1$.

1.2.2. Calcule a primitiva.

a) $\displaystyle\int y^2\left(4-y^3\right)^{2/3}\,dy$; b) $\displaystyle\int e^{-5r}\,dr$; c) $\displaystyle\int \frac{e^u}{(1-e^u)^2}\,du$;

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; e) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x^2+1}\,dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$; h) $\displaystyle\int x^2\sqrt{2+x}\,dx$; i) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$.

*Os exercícios são, na sua maioria, retirados do livro:
James Stewart, "Calculus, early transcendentals", 8ª edição, 2017

1.3 Primitivação por partes

1.3.1. Calcule usando primitivação por partes com as escolhas indicadas de u e dv.

a) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx \qquad u = x,\ \ dv = e^{2x}\,dx$; b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx \qquad u = \ln x,\ \ dv = \sqrt{x}\,dx$.

1.3.2. Calcule a primitiva.

a) $\displaystyle\int x\cos 5x\,dx$; b) $\displaystyle\int te^{-3t}\,dt$; c) $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$;

d) $\displaystyle\int \left(x^2+2x\right)\cos x\,dx$; e) $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$; f) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$;

1.3.3. Calcule a primitiva (começando por fazer uma substituição).

a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$; c) $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$; d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arcsen}(\ln x)}{x}\,dx$.

1.4 Primitivação de funções racionais

1.4.1. Calcule a primitiva.

a) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2-1\right)^2}$; c) $\displaystyle\int \frac{x^4+9x^2+x+2}{x^2+9}\,dx$.

1.4.2. Faça uma substituição para exprimir a função integranda como uma função racional e calcule o integral indefinido.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$; c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

2 Integrais

2.1 Integrais definidos

2.1.1. Considere a função $f(x) = 1/x$.

a) Estime a área da região abaixo do gráfico de $f(x)$ de $x = 1$ a $x = 2$ usando 4 retângulos e as extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Diga se obteve uma estimativa por excesso ou se, pelo contrário, obteve uma estimativa por defeito.

b) Repita a alínea anterior considerando as extremidades esquerdas.

2.1.2. Considere a função $f(x) = \mathrm{sen}\,x$.

a) Estime a área da região abaixo do gráfico de $f(x)$ de $x = 1$ a $x = 2$ usando 4 retângulos e as extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Diga se obteve uma estimativa por excesso ou se, pelo contrário, obteve uma estimativa por defeito.

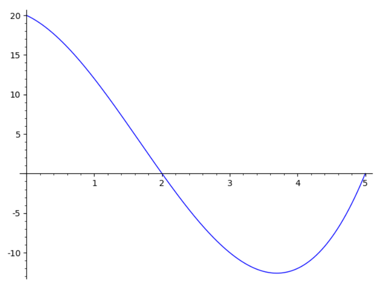
b) Repita a alínea anterior considerando as extremidades esquerdas.

2.1.3. Para

$$f(x) = \cos x \qquad 0 \le x \le 3\pi/4$$

calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos de amostragem as extremidades esquerdas dos intervalos da partição. Ilustre com uma figura e diga o que representa a soma de Riemann.

2.1.4. Se $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está representado na figura ao lado, qual dos seguintes valores é o maior?



a) $F(0)$ b) $F(1)$ c) $F(2)$ d) $F(3)$ e) $F(4)$

2.2 Teorema fundamental do Cálculo

2.2.1. Encontre a derivada da função.

a) $g(x) = \int_1^x \ln\left(1+t^2\right)\,dt$; b) $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+\sec t}\,dt$;

c) $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$; d) $f(x) = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\,d\theta$;

2.2.2. Calcule o integral definido.

a) $\int_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x^2+1}\,dx$; b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$; c) $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$.

2.2.3. Calcule o integral definido.

a) $\int_0^{1/2} x\cos\pi x\,dx$; b) $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$; c) $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$; d) $\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$.

2.2.4. Calcule o integral

a) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$; b) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$; c) $\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$;

2.2.5. Diga se o integral impróprio é convergente ou se é divergente. No caso de ser convergente, calcule-o.

a) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$; b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$; c) $\int_2^{\infty} e^{-5x}\,dx$.

3 Aplicações

3.1 Áreas entre curvas

3.1.1. Faça um esboço da região limitada pelas curvas seguintes e calcule a sua área.

a) $y = 12 - x^2,\ y = x^2 - 6$; b) $y = x^2,\ y = 4x - x^2$.

A Soluções

1.1.1 a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$;

b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x + C$;

c) $F(x) = \sqrt{2}x + C$;

d) $F(x) = 2x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{4/3} + C$;

e) $F(t) = \begin{cases} 3t - \ln|t| - \frac{6}{t} + C_1 & \text{se } t < 0 \\ 3t - \ln|t| - \frac{6}{t} + C_2 & \text{se } t > 0 \end{cases}$.

f) $x - 2\cos x + 6\sqrt{x} + C$.

1.1.2 a) $f(x) = x + 2x^{3/2} + 5$;

b) $f(x) = x^5 - x^3 + 4x + 6$;

c) $f(x) = -x^2 + 2x^3 - x^4 + 12x + 4$;

d) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{39}{10}$.

1.1.3 a) $2/7t^{7/2} + 6/5t^{5/2} + 4/3t^{3/2} + C$;

b) $\ln|x| + 2\sqrt{x} + x + C$;

c) $x^3/3 + x + \operatorname{arctg} x + C$.

1.2.1 a) $-e^{-x^2} + C$;

b) $2/9(x^3+1)^{3/2} + C$

c) $1/3 \operatorname{sen}^3\theta + C$;

d) $1/3(2t+1)^{3/2} + C$.

1.2.2 a) $-\frac{1}{5}\left(4 - y^3\right)^{5/3} + C$

b) $-\frac{1}{5}e^{-5r} + C$

c) $\frac{1}{1-e^u} + C$

d) $-2\cos\sqrt{x} + C$

e) $\frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + C$

f) $\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} x)^3 + C$

g) $-\operatorname{arctg}(\cos x) + C$

h) $\frac{2}{7}(2+x)^{7/2} - \frac{8}{5}(2+x)^{5/2} + \frac{8}{3}(2+x)^{3/2} + C$

i) $\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2} + C$

1.3.1 a) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$;

b) $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$.

1.3.2 a) $\frac{1}{5}x\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$;

b) $-\frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + C$;

c) [**Sugestão:** Use a identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$] $x\operatorname{tg} x - \ln|\sec x| - \frac{1}{2}x^2 + C$;

d) $\left(x^2 + 2x\right)\operatorname{sen} x + (2x+2)\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$;

e) $\frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + C$;

f) $-\frac{2(\ln x)^2 + 2\ln x + 1}{4x^2} + C$.

1.3.3 a) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

b) $\frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x) + C$

c) $\frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$

d) $(\ln x)\,\mathrm{arcsen}(\ln x) + \sqrt{1-(\ln x)^2} + C$

1.4.1 a) $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + 2\ln|x-1| + C$

b) $\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{2t}{1-t^2}\right) + C$

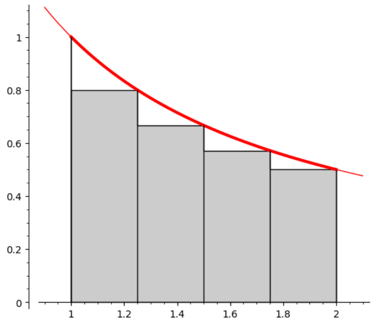
c) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) + \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + C$

1.4.2 a) $2\,\mathrm{arctg}\,u + C = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1} + C$

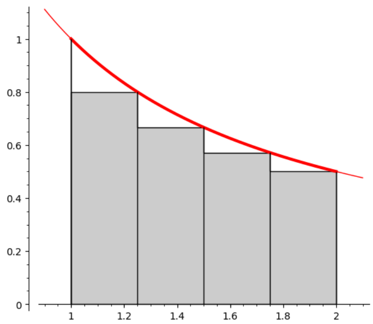
b) $2\ln|u| + \frac{2}{u} + C = 2\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{2}{1+\sqrt{x}} + C$

c) [**Sugestão:** Faça a substituição $u = \sqrt[6]{x}$.] $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$

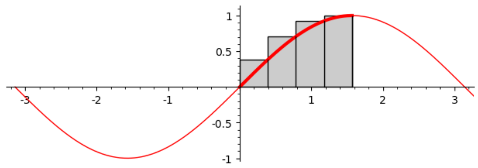
2.1.1 a) $\left[\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\right]\frac{1}{4} \simeq 0.6345$



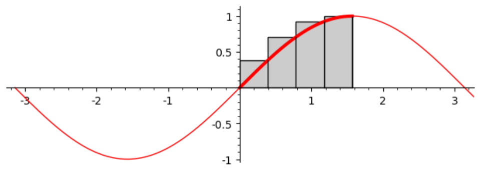
b) $\left[1+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right]\frac{1}{4} \simeq 0.759$



2.1.2 a) $\left[\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8} + \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{8} + \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8} + \mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{8}\right]\frac{\pi}{8} \simeq 1.1835$

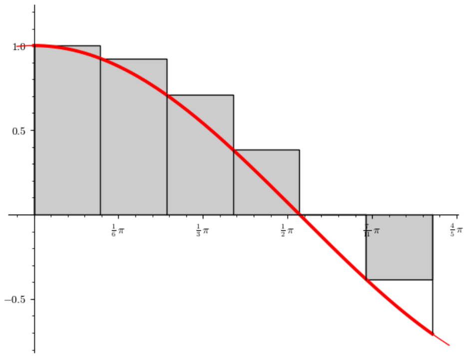


b) $\left[\mathrm{sen}\,0 + \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8} + \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{8} + \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right]\frac{\pi}{8} \simeq 0.7908$



2.1.3 $\frac{\pi}{8}\left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{2\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{4\pi}{8}\right) + f\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right] \simeq 1.033186$

A soma de Riemann representa a soma das áreas dos quatro retângulos acima do eixo dos x menos a área do retângulo abaixo o eixo dos x; ou seja, representa a área líquida dos retângulos em relação ao eixo x. Há ainda um sexto retângulo que é degenerado (tem altura 0) e não tem área.



2.1.4 $F(2)$. (Todos os outros valores são negativos.)

2.2.1 a) $g'(x) = \ln\left(1+x^2\right)$

b) $F'(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+\sec t}\,dt = -\sqrt{1+\sec x}$

c) xe^x

d) $\cos^2\left(x^4\right)\cdot 4x^3$

2.2.2 Possivelmente já calculou a primitiva de que necessita num exercício anterior...

a) $\pi^3/192$;

b) $\pi/4$;

c) $2/15(\sqrt(2)+1)$

2.2.3 Possivelmente já calculou a primitiva de que necessita num exercício anterior...

a) $\frac{\pi-2}{2\pi^2}$;

b) $-\frac{1}{8}(\ln 2)^2 - \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16}$;

c) $\frac{16}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{5}$;

d) [**Sugestão:** Use a relação $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ (que consta do formulário...)] Resposta: $4/e$.

2.2.4 a) $\ln\frac{3}{8}$

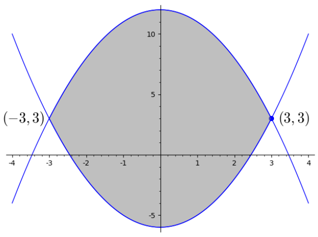
b) $\frac{1}{2}\ln\frac{18}{13} - \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$

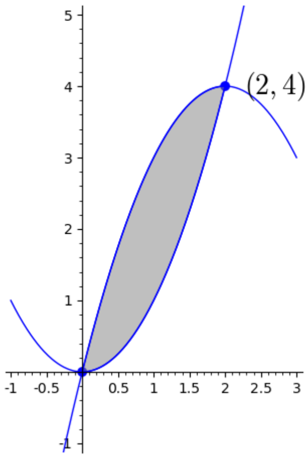
2.2.5 a) Divergente.

b) Convergente para $\frac{1}{36}$.

c) Convergente para $\frac{1}{5}e^{-10}$.



3.1.1 a) 72



b) $\frac{8}{3}$