Departamento de Ciência de Computadores FCUP

Modelos de Computação CC1004 2020/2021

Folha Prática 2

1. Descreva informalmente a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ indicada em cada alínea. Para facilitar a análise, note que os operadores de fecho de Kleene, concatenação e união (ou interseção) têm uma precedência análoga aos operadores potência, produto e soma em expressões aritméticas. Assim, por exemplo, $\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{00}\}^\star \cup \{\mathtt{1}\}^\star$ deve ser entendida como $(\{\mathtt{0}\}(\{\mathtt{00}\}^\star)) \cup (\{\mathtt{1}\}^\star)$.

a) $\{\mathtt{0}\}^\star\{\mathtt{00}\}$
b) $\{\mathtt{0}\}^\star \cup \{\mathtt{1}\}^\star$
c) $\{\mathtt{0}\}^\star\{\mathtt{1}\}^\star$
d) $\{\mathtt{01}, \mathtt{00}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star$
e) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{101}, \mathtt{111}\}$
f) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{11}, \mathtt{00}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star$
g) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star \setminus \{\mathtt{0}\}^\star$, isto é, $\overline{\{\mathtt{0}\}^\star}$
h) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{1}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star$
i) $\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{00}\}^\star \cup \{\mathtt{1}\}^\star$
j) $\{\mathtt{000}, \mathtt{1}\}^\star \cap \{\mathtt{00}, \mathtt{1}\}^\star$

2. Averigue a veracidade ou falsidade de:

a) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{1}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{1}\}$ **b)** $\{\mathtt{0}\}^\star\{\mathtt{00}\} = \{\mathtt{00}, \mathtt{000}\}^\star \setminus \{\varepsilon\}$ **c)** $(\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{00}, \mathtt{1}\}^\star)^\star = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^\star$

d) $(\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{0}\})^\star = (\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{0}\} \cup \{\mathtt{1}\})^\star$ **e)** $\{\mathtt{1}\}^\star(\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^\star)^\star = (\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{1}\}^\star\{\mathtt{0}\} \cup \{\mathtt{1}\})^\star$

Expressões regulares abreviadas são obtidas de *expressões regulares* por remoção de parentesis desnecessários, considerando a associatividade da união e da concatenação e a precedência relativa das operações (união, concatenação e fecho de Kleene). Não é efetuada qualquer outra alteração além da remoção de parentesis.

A forma abreviada permite-nos mais facilmente identificar a linguagem que a expressão descreve.

Por exemplo, $((\mathtt{bb}) + ((\mathtt{a}(\mathtt{a}^\star)) + (((\mathtt{aa})(\mathtt{bb}))(\mathtt{b}^\star))))$ ficaria $\mathtt{bb} + \mathtt{aa}^\star + \mathtt{aabbb}^\star$.

Notar que $((\mathtt{bb})^\star)$ não é equivalente a $(\mathtt{b}(\mathtt{b}^\star))$, pelo que não pode ser escrita na forma abreviada como $\mathtt{bb}^\star$. Tem de ficar $(\mathtt{bb})^\star$.

Analogamente, $(\mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})) \not\equiv ((\mathtt{ba}) + \mathtt{b})$. Assim, $(\mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b}))$ pode ser escrita como $\mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})$ mas não como $\mathtt{ba} + \mathtt{b}$.

---

3. Todas as linguagens definidas no problema **1.** são *linguagens regulares* (i.e., linguagens que podem ser descritas por expressões regulares). Apresente uma expressão regular **não abreviada** que caraterize a linguagem definida em **1a)** e, a seguir, defina-a por uma expressão regular **abreviada**. Proceda do mesmo modo para **1b)** e **1c)**, e depois descreva as restantes linguagens por expressões regulares abreviadas.

4. Justificando sucintamente a resposta, indique uma expressão regular *abreviada*, sobre $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, que caraterize a linguagem formada pelas palavras de $\Sigma^\star$ que:

a) têm no máximo três 0's.

b) têm pelo menos dois 0's consecutivos e pelo menos dois 1's consecutivos.

c) não têm 10 como prefixo.

d) têm no máximo dois 0's, no mínimo dois 1's e não terminam em 1.

e) têm 001 como sufixo e têm pelo menos três 0's consecutivos.

f) têm 001 como subpalavra e têm no máximo dois 1's.

g) têm 1101 como subpalavra e têm número par de 1's.

5. Para cada uma das linguagens indicadas em **4.**, determine um autómato finito determinístico (AFD) que a reconheça e caraterize a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ constituída pelas palavras que levam o AFD do estado inicial a cada estado.

6. Seja Σ um alfabeto e sejam r, s e t expressões regulares sobre Σ. Por definição, duas expressões regulares são equivalentes se e só se descrevem a mesma linguagem, isto é, $r \equiv s$ sse $\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}(s)$. Prove as seguintes equivalências:

a) $(\emptyset + r) \equiv r$ — abreviadamente, $\emptyset + r \equiv r$

b) $((\varepsilon + r)^\star) \equiv (r^\star)$ — $(\varepsilon + r)^\star \equiv r^\star$

c) $((\emptyset^\star)r) \equiv r$ — $\emptyset^\star r \equiv r$

d) $(\emptyset r) \equiv \emptyset$ — $\emptyset r \equiv \emptyset$

e) $(r(s+t)) \equiv ((rs) + (rt))$ — $r(s+t) \equiv rs + rt$

f) $(((r^\star) + (s^\star))^\star) \equiv ((r+s)^\star)$ — $(r^\star + s^\star)^\star \equiv (r+s)^\star$

g) $(((r^\star)(s^\star))^\star) \equiv ((r+s)^\star)$ — $(r^\star s^\star)^\star \equiv (r+s)^\star$

Sugestão: em **6.**, deve usar a **noção de linguagem descrita por uma expressão regular** sobre Σ e as definições das operações sobre linguagens, recordando que:

$\mathcal{L}((r+s)) = \mathcal{L}(r) \cup \mathcal{L}(s)$

$\mathcal{L}((rs)) = \mathcal{L}(r)\mathcal{L}(s)$

$\mathcal{L}((r^\star)) = (\mathcal{L}(r))^\star$

$\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$

$\mathcal{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$

$\mathcal{L}(a) = \{a\}$, para todo $a \in \Sigma$.