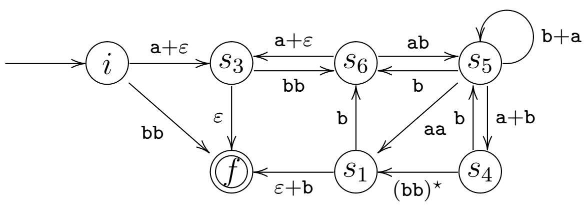
Departamento de Ciência de Computadores FCUP

Modelos de Computação CC1004 2016/2017

1º Teste – 22/03/2017 *duração: 2h30*

Resolução de algumas questões

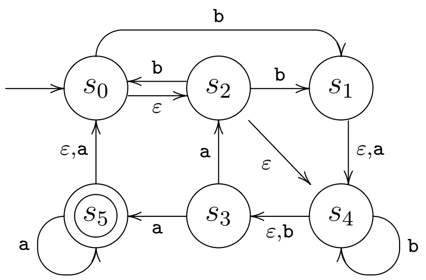
1. O diagrama seguinte foi obtido de um automáto finito, de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, após algumas iterações do método de eliminação de estados. Desenhe o diagrama que se obtém no **passo seguinte** se se eliminar s_5.



Não simplifique as expressões que obtiver e ilustre como efetuou a eliminação de s_5.

Resposta omitida: Aplicar o algoritmo dado nas aulas. Para explicar, apresentar um esquema com os dois arcos que entram em s_5, o lacete, e os três arcos que saem. A seguir, indicar os 2×3 arcos que são criados/afetados e as respetivas expressões regulares (abreviadas) e, finalmente, desenhar o novo diagrama.

2. Seja $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ o AFND-ε representado abaixo, com $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.



a) Indique o valor de $\delta(s_0, \varepsilon)$, $\delta(s_5, \mathtt{a})$, $Fecho_\varepsilon(s_3)$ e $Fecho_\varepsilon(s_1)$.
b) Dê exemplo de $x, y \in \Sigma^\star$ tais que $x \in \mathcal{L}(A)$ e $y \notin \mathcal{L}(A)$. Explique.
c) Desenhe o diagrama de transição do AFD que resulta de A por aplicação do método de conversão. Indique apenas estados acessíveis do *estado inicial do AFD* e use *conjuntos* para designar os estados.
d) Que significado têm tais conjuntos no método de conversão? Quantos estados tem o AFD se se indicar os estados não acessíveis do seu estado inicial? Por que razão esses estados não são relevantes?

2a)

$\delta(s_0, \varepsilon) = \{s_2\}$ $\delta(s_5, \mathtt{a}) = \{s_5, s_0\}$ $Fecho_\varepsilon(s_3) = \{s_3\}$ $Fecho_\varepsilon(s_1) = \{s_1, s_4, s_3\}$

2b)

$x = \mathtt{a}$ porque o percurso $(s_0, s_2, s_4, s_3, s_5)$ com consumo de $\varepsilon\varepsilon\varepsilon\mathtt{a}$ mostra que $\mathtt{a} \in \mathcal{L}(A)$.

$y = \mathtt{b}$ porque s_5 é o único estado final e qualquer percurso do estado s_0 até ao estado s_5 requer o consumo de algum $\mathtt{a}$, pois terá de incluir o arco (s_3, s_5).

2c)

Resposta omitida: Aplicar o algoritmo dado nas aulas. O AFD que se obtém tem três estados, sendo $\{s_0, s_2, s_4, s_3\}$ o estado inicial. Bastaria desenhar o diagrama. Não é pedida a justificação.

2d)

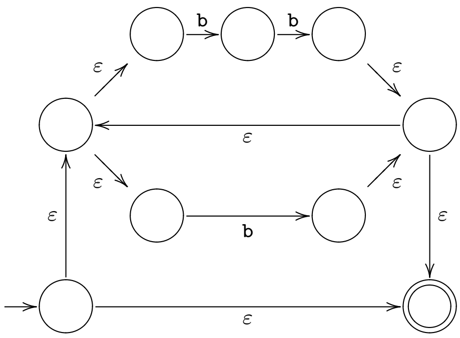
Cada estado do AFD indica o conjunto de estados em que o AFND-ε pode estar nas mesmas condições. Por exemplo, se a palavra consumida fosse ε, o AFND-ε poderia estar em qualquer um dos estados s_0, s_2, s_4 ou s_3.

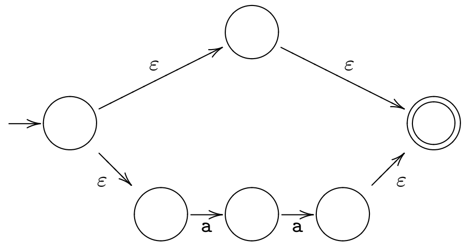
De acordo com o método de conversão, se se indicasse também os estados não acessíveis do estado inicial do AFD, o autómato que se obteria teria 2^6 estados (ou seja, 64 estados).

Por definição, a linguagem reconhecida por um AFD é o conjunto das palavras que o podem levar do estado inicial a algum estado final. Os estados não acessíveis do estado inicial $\{s_0, s_2, s_4, s_3\}$ não são relevantes porque, não existindo nenhum percurso do estado inicial até esses estados, estes não podem contribuir para a aceitação nem para a rejeição de palavras. Por isso, se forem removidos, obtemos um AFD equivalente mas com menos estados (neste caso, 3 estados em vez de 64).

3. Seja r_1 a expressão regular $(((\mathtt{bb}) + \mathtt{b})^\star)$ e r_2 a expressão regular $(\varepsilon + (\mathtt{aa}))$ sobre $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Desenhe o diagrama de transição do AFND-ε que resulta da aplicação do método de Thompson às expressões r_1 e r_2, de acordo com a construção dada nas aulas.





b) Descreva informalmente as linguagens $\mathcal{L}(r_1)$, $\mathcal{L}(r_2)$, $\mathcal{L}(\,(r_1 r_2)\,)$ e $\mathcal{L}(\,(r_1 + r_2)\,)$.

$\mathcal{L}(r_1)$ é constituída pelas palavras que não têm a's.

$\mathcal{L}(r_2)$ é constituída pelas palavras ε e $\mathtt{aa}$.

$\mathcal{L}(\,(r_1 r_2)\,)$ é constituída pelas palavras que não têm a's ou que terminam em $\mathtt{aa}$ e só têm esses dois a's.

$\mathcal{L}(\,(r_1 + r_2)\,)$ é constituída pela palavra $\mathtt{aa}$ e pelas palavras que não têm a's.

c) Diga, justificando, se $\mathcal{L}(\ ((r_1 r_2)^\star)\ ) = \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star$. Na justificação, use diretamente a definição de linguagem descrita por uma expressão regular e a definição das operações sobre linguagens.

Vamos justificar que é verdade que $\mathcal{L}(\ ((r_1 r_2)^\star)\ ) = \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star$.

$\mathcal{L}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{b}\}$, por definição de linguagem descrita por uma expressão regular elementar.

$\mathcal{L}(\,(\mathtt{bb})\,) = \mathcal{L}(\mathtt{b})\mathcal{L}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{b}\}\{\mathtt{b}\} = \{\mathtt{bb}\}$, por definição de linguagem descrita por uma expressão regular da forma (rs) e definição de concatenação de linguagens.

$\mathcal{L}(\,((\mathtt{bb}) + \mathtt{b})\,) = \mathcal{L}(\,(\mathtt{bb})\,) \cup \mathcal{L}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{bb}\} \cup \{\mathtt{b}\} = \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}$, por definição de linguagem gerada por uma expressão regular da forma $(r + s)$ e definição de união de linguagens.

O fecho de Kleene de $\{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}$ é igual a $\{\mathtt{b}\}^\star$ porque, por definição de fecho de Kleene, $\mathtt{b}^n \in \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}^\star$, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $\mathtt{b} \in \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}$. Logo, $\{\mathtt{b}\}^\star \subseteq \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}^\star$. E, também $\{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}^\star \subseteq \{\mathtt{b}\}^\star$, pois qualquer sequência de $\{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}^\star$ é ε ou uma sequência de b's. Logo, $\{\mathtt{b}, \mathtt{bb}\}^\star = \{\mathtt{b}\}^\star$.

Sendo $r_1 = (((\mathtt{bb}) + \mathtt{b})^\star)$, a linguagem que r_1 descreve é o fecho de Kleene de $\mathcal{L}(\,((\mathtt{bb}) + \mathtt{b})\,)$. Logo, $\mathcal{L}(r_1) = \{\mathtt{b}\}^\star$.

$\mathcal{L}(r_2) = \mathcal{L}(\varepsilon) \cup \mathcal{L}(\,(\mathtt{aa})\,) = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{L}(\mathtt{a})\mathcal{L}(\mathtt{a}) = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}\} = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{aa}\} = \{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$.

$\mathcal{L}(\,(r_1 r_2)\,) = \mathcal{L}(r_1)\mathcal{L}(r_2) = \{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$.

$\mathcal{L}(\,((r_1 r_2)^\star)\,) = (\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star$. Vamos ver que $(\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star = \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star$.

Tem-se $\mathtt{aa} \in \{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$, pois $\varepsilon \in \{\mathtt{b}\}^\star$ e $\mathtt{aa} \in \{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$. Tem-se $\mathtt{b} \in \{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$, pois $\mathtt{b} \in \{\mathtt{b}\}^\star$ e $\varepsilon \in \{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$.

Como $\{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\} \subseteq \{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\}$, tem-se $\{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star \subseteq (\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star$. Resta mostrar que $\{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star \supseteq (\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star$, para podermos concluir que $\{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star = (\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star$.

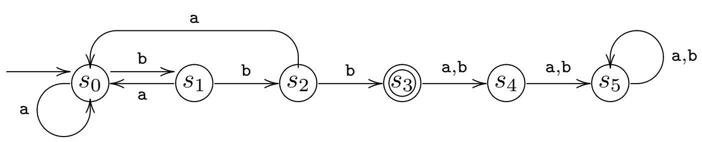
Ora $\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\} = \{\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\}\{\varepsilon, \mathtt{aa}\} = \{\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathtt{b}^n\mathtt{aa} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tem-se $\mathtt{b}^n\mathtt{aa} \in \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star$ e $\mathtt{b}^n \in \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, qualquer palavra de $(\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star$ tem número par de a's e qualquer bloco máximo de a's na palavra (máximo, no sentido de não ter a's adjacentes) tem um número par de a's. Portanto, $\{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^\star \supseteq (\{\mathtt{b}\}^\star\{\varepsilon, \mathtt{aa}\})^\star$.

4. Seja L a linguagem das palavras de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ que terminam em $\mathtt{bbb}$ e não têm outras ocorrências da subpalavra $\mathtt{bbb}$ que não essa. Note que $\mathtt{bbbb}$ não pertence a L.

a) Indique uma expressão regular (abreviada) que descreva a linguagem L.

$(\mathtt{a} + \mathtt{ba} + \mathtt{bba})^\star\mathtt{bbb}$

b) Apresente o diagrama de transição de um AFD que reconheça L e **não seja mínimo**. Descreva informalmente o conjunto das palavras que levam tal AFD do estado inicial a cada um dos estados.

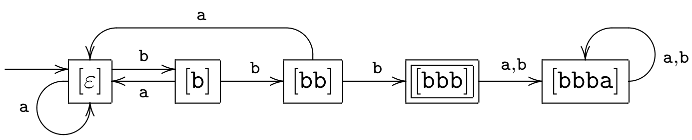


Seja L_{s_i} o conjunto das palavras que levam o autómato de s_0 a s_i.

- L_{s_0} é constituído por ε e pelas palavras que não têm `bbb` como subpalavra e terminam em `a`.
- L_{s_1} é formado pelas palavras que não têm `bbb` como subpalavra e terminam em `b` mas não em `bb`.
- L_{s_2} é formado pelas palavras que não têm `bbb` como subpalavra e terminam em `bb`.
- L_{s_3} é L, ou seja, é constituído pelas palavras que terminam em `bbb` e não têm outras ocorrências da subpalavra `bbb` que não essa;
- L_{s_4} é formado pelas palavras que têm `bbb` como subpalavra e têm apenas um símbolo após a ocorrência de `bbb`.
- L_{s_5} é formado pelas palavras que têm `bbb` como subpalavra e têm dois ou mais símbolos à direita da primeira ocorrência de `bbb`.

O estado s_5 foi introduzido para que o AFD não fosse mínimo.

c) Por aplicação do corolário do teorema de Myhill-Nerode determine o **AFD mínimo** que reconhece L. Justifique todos os passos intermédios.



Segundo o corolário, o estado inicial é $[\varepsilon]$. Esse estado não é final, porque $\varepsilon \notin L$.

$\delta([\varepsilon], \mathtt{a}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{a}] = [\varepsilon]$, porque $\mathtt{a}z \in L$ se e só se $z \in L$, o que corresponde à condição para $\varepsilon z \in L$.

$\delta([\varepsilon], \mathtt{b}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{b}] \neq [\varepsilon]$, porque para $z = \mathtt{bb}$ tem-se $\mathtt{b}z \in L$ e $\varepsilon z \notin L$. O novo estado $[\mathtt{b}]$ não é final porque $\mathtt{b} \notin L$.

$\delta([\mathtt{b}], \mathtt{a}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{ba}] = [\varepsilon]$, porque $\mathtt{ba}z \in L$ se e só se $z \in L$.

$\delta([\mathtt{b}], \mathtt{b}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bb}]$ é uma nova classe (estado do AFD mínimo), porque para $z = \mathtt{b}$, tem-se $\mathtt{bb}z \in L$ mas $\mathtt{b}z \notin L$ e $\varepsilon z \notin L$. O estado $[\mathtt{bb}]$ não é final porque $\mathtt{bb} \notin L$.

$\delta([\mathtt{bb}], \mathtt{a}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bba}] = [\varepsilon]$, porque $\mathtt{bba}z \in L$ se e só se $z \in L$.

$\delta([\mathtt{bb}], \mathtt{b}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bbb}]$, é um novo estado porque $\mathtt{bbb} \in L$ mas $\mathtt{bb} \notin L$, $\mathtt{b} \notin L$, e $\varepsilon \notin L$ (portanto, bastaria tomar $z = \varepsilon$ para concluir que `bbb` não seria equivalente a nenhuma dessas palavras segundo R_L). O estado $[\mathtt{bbb}]$ é final.

$\delta([\mathtt{bbb}], \mathtt{a}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bbba}]$, é um novo estado porque $\mathtt{bbba}z \notin L$, qualquer que seja $z \in \Sigma^\star$ (pois $\mathtt{bbba}z$ teria de terminar em `bbb` e ficaria com mais do que uma ocorrência de `bbb`). Tal condição não se verifica para as palavras `bbb`, `bb`, `b` e ε.

$\delta([\mathtt{bbb}], \mathtt{b}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bbbb}] = [\mathtt{bbba}]$, porque também $\mathtt{bbbb}z \notin L$, para todo $z \in \Sigma^\star$.

$\delta([\mathtt{bbba}], \mathtt{a}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bbbaa}] = [\mathtt{bbba}]$, porque também $\mathtt{bbbaa}z \notin L$, para todo $z \in \Sigma^\star$.

$\delta([\mathtt{bbba}], \mathtt{b}) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathtt{bbbab}] = [\mathtt{bbba}]$, porque também $\mathtt{bbbab}z \notin L$, para todo $z \in \Sigma^\star$.

5. Seja $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ um AFD. O que representa a tabela que construimos no algoritmo de Moore para A? Que significado têm os pares (s_i, s_j) que colocamos em algumas entradas? Como e quando são usados? Como se obtém o AFD mínimo equivalente a A, no fim? Que relação existe entre a caraterização do AFD mínimo que aceita $\mathcal{L}(A)$, dada pelo corolário do teorema de Myhill-Nerode, e a noção de estados equivalentes/não equivalentes explorada no algoritmo de Moore?

(10%) A tabela corresponde à (parte triangular inferior da) matriz da relação de equivalência $\equiv$ definida no conjunto de estados do AFD que são acessíveis do estado inicial. Se no fim substituissemos X por 0 e $\equiv$ por 1, teriamos essa parte da matriz da relação $\equiv$.

(15%) Os pares (s_i, s_j) que colocamos em algumas entradas representam pares que ficaram pendentes e aguardam uma possível decisão de **não** equivalência para essas entradas.

(25%) O par (s_i, s_j) fica pendente se na análise de (s_i, s_j) existirem pares $(\delta(s_i, a), \delta(s_j, a))$ que ainda não têm decisão (ainda não foram analisados ou estão pendentes) e para todos os restantes $a \in \Sigma$, se existirem, tem-se $\delta(s_i, a) \equiv \delta(s_j, a)$. Nesse caso, para cada $a \in \Sigma$ tal que $(\delta(s_i, a), \delta(s_j, a))$ ainda não tem decisão, coloca-se (s_i, s_j) na entrada correspondente ao par $(\delta(s_i, a), \delta(s_j, a))$. Se alguma dessas entradas for posteriomente marcada com X (ou seja, como um par de estados não equivalentes), então essa informação é propagada a todos os pares que constam da sua entrada (que serão marcados também com X) e estes, por sua vez, propagam sucessivamente aos que constarem das suas entradas.

(15%) Considerando que os estados não acessíveis do estado inicial ja foram (trivialmente) removidos, cada classe de equivalência de $\equiv$ determina um estado do AFD mínimo. A nova função de transição δ' é dada por $\delta'([s], a) = [\delta(s, a)]$, sendo s um qualquer estado da classe $[s]$ e δ a função de transição do AFD de partida.

(35%, pergunta de valorização) Para mostrar que duas palavras x e y são equivalentes segundo a relação de equivalência R_L definida no corolário do Teorema de Myhill-Nerode, onde $L = \mathcal{L}(A)$, iriamos procurar $z \in \Sigma^\star$ tal que $xz \in L \wedge yz \notin L$ ou $xz \notin L \wedge yz \in L$, ou mostrar que não podia existir. No algoritmo de Moore, sendo s_i e s_j os estados a que as palavras x e y levam o AFD A, a marcação de s_i e s_j como não equivalentes quando um é estado final e o outro não é, corresponde a tomar $z = \varepsilon$. Para os casos em que s_i e s_j são ambos finais ou ambos não finais, a análise que a seguir se faz corresponde a tentar encontrar z que distinga x de y segundo R_L, mas estamos a construir a palavra z da direita para a esquerda. Se marcarmos (s_i, s_j) com X porque encontrámos $a \in \Sigma$ tal que $\delta(s_i, a) \not\equiv \delta(s_j, a)$, então $z = az'$ serve para provar que $(x, y) \notin R_L$, sendo z' a palavra que demonstrou que $\delta(s_i, a) \not\equiv \delta(s_j, a)$. Se concluirmos que $s_i \equiv s_j$, então as palavras x e y pertencem à mesma classe de R_L, pois não existe z que as distinga. Nesse caso, $[x] = [y]$ e como $\mathcal{C}_x \subseteq [x]$ e $C_y \subseteq [y] = [x]$, então $C_x \cup C_y \subseteq [x]$, o que valida a junção dos dois estados s_i e s_j num só. Aqui C_x denota a classe de equivalência de x segundo o AFD A (para a relação R_A definida por xR_Ay sse $\hat{\delta}(s_0, x) = \hat{\delta}(s_0, y)$) e $[x]$ a classe segundo R_L, tendo sido provado nas aulas que $\mathcal{C}_x \subseteq [x]$, para todo $x \in \Sigma^\star$, para $L = \mathcal{L}(A)$, qualquer que seja o AFD A.

(FIM)