CC1004 - Modelos de Computação
Prática 5

Ana Paula Tomás

DCC
FCUP

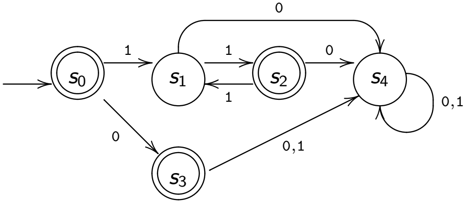
Março 2021

Folha 5 - Questão 1

1a) $L_1 = \mathcal{L}(0 + (11)^\star)$: Linguagem de alfabeto $\{0, 1\}$ constituída pela palavra 0 e pelas que não têm 0's e têm comprimento par.

$L_2 = \mathcal{L}((0 + 1)^\star 101)$: Linguagem de alfabeto $\{0, 1\}$ constituída pelas palavras que terminam em 101

1b) para L_1



$s_0 \not\equiv s_1$ por $\varepsilon \in L_1$ mas $1 \notin L_1$

$s_0 \not\equiv s_3$ por $00 \notin L_1$ mas $0 \in L_1$

$s_0 \not\equiv s_2$ porque $110 \notin L_1$ mas $0 \in L_1$

$s_2 \not\equiv s_3$ porque $011 \notin L_1$ e $1111 \in L_1$

s_4 tem de ser distinto de s_1 porque em s_1 se consome 1 passa a estado final e em s_4 a palavra é sempre rejeitada, qualquer que seja o símbolo que tiver depois.

Folha 5 - Questão 1

1c) Construção do AFD mínimo que aceita $L_1 = \mathcal{L}(0 + (11)^\star)$ usando a caracterização dada pelo corolário do Teorema de Myhill-Nerode

- Estado **inicial**: $[\varepsilon]$. É estado **final** porque $\varepsilon \in L_1$.
- $\delta([\varepsilon], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [0]$ é um estado **final** porque $0 \in L_1$. É um estado novo porque $[0] \neq [\varepsilon]$ pois $(0, \varepsilon) \notin R_{L_1}$, uma vez que para $z = 0$ tem-se $0z = 00 \notin L_1$ mas $\varepsilon z = \varepsilon 0 \in L_1$.

  $\delta([\varepsilon], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [1]$ é um estado **não final** porque $1 \notin L_1$. É um estado novo.
- $\delta([0], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [00]$ é um estado **não final** porque $00 \notin L_1$. Não é $[1]$ porque $(00, 1) \notin R_{L_1}$, uma vez que para $z = 1$ tem-se $00z = 001 \notin L_1$ mas $1z = 11 \in L_1$.

  $\delta([0], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [01] = [00]$ pois $00z \notin L_1$ e $01z \notin L_1$, para todo $z \in \Sigma^\star$.
- $\delta([00], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [000] = [00] = [001] \stackrel{\text{def}}{=} \delta([00], 1)$
- $\delta([1], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [10] = [00]$ pois $10z \notin L_1$, para todo $z \in \Sigma^\star$.

  $\delta([1], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [11]$ é **final** porque $11 \in L_1$. É novo: $[11] \neq [\varepsilon]$ porque $(11, \varepsilon) \notin R_{L_1}$, pois se $z = 0$, tem-se $11z = 110 \notin L_1$ mas $\varepsilon z = \varepsilon 0 \in L_1$. E, $[11] \neq [0]$ porque $(11, 0) \notin R_{L_1}$, pois se $z = 11$, tem-se $11z = 1111 \in L_1$ mas $0z = 011 \notin L_1$.

  $\delta([11], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [111] = [1]$ porque $1z \in L_1 \Leftrightarrow z \in \mathcal{L}(1(11)^\star)$ e $11z \in L_1 \Leftrightarrow z \in \mathcal{L}(1(11)^\star)$.

Folha 5 - Questão 1

1c) Construção do AFD mínimo que aceita $L_2 = \mathcal{L}((0+1)^\star 101)$

- $[\varepsilon]$ é o estado inicial. Não é final porque $\varepsilon \notin L_2$.
- $\delta([\varepsilon], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [0] = [\varepsilon]$ porque $0z \in L_2$ sse z termina em 101. E, analogamente, $\varepsilon z \in L_2$ sse z termina em 101. Portanto, $0 R_{L_2} \varepsilon$.

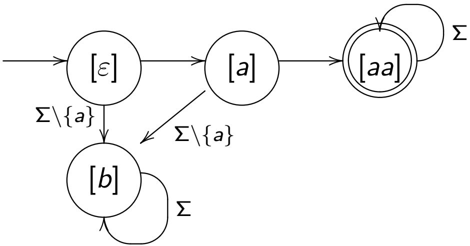
  $\delta([\varepsilon], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [1] \neq [\varepsilon]$ porque $(\varepsilon, 1) \notin R_{L_2}$ porque existe um $z \in \Sigma^\star$ tal que $1z \in L_2$ e $\varepsilon z \notin L_2$. Por exemplo, $z = 01$.
- $\delta([1], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [11] = [1]$ pois $\forall z \in \Sigma^\star \;\; 1z \in L_2 \Leftrightarrow z = 01 \vee z \in L_2$ e $\forall z \in \Sigma^\star \;\; 11z \in L_2 \Leftrightarrow z = 01 \vee z \in L_2$.

  $\delta([1], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [10]$ novo estado não final: $(\varepsilon, 10) \notin R_{L_2}$ pois, para $z = 1$, tem-se $\varepsilon z \notin L_2$ e $10z \in L_2$; e $(1, 10) \notin R_{L_2}$ para $z = 1$, dado que $1z \notin L_2$ e $10z \in L_2$.
- $\delta([10], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [101]$ novo estado. É final pois $101 \in L_2$. Não pode ser igual a nenhum dos anteriores que são de palavras de $\Sigma^\star \setminus L_2$. Bastaria tomar $z = \varepsilon$ para distinguir. $\delta([10], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [100] = [\varepsilon]$ pois $100z \in L_2$ se e só se $z \in L_2$.
- $\delta([101], 0) \stackrel{\text{def}}{=} [1010] = [10]$ porque $10z \in L_2$ se e se $z = 1$ ou $z \in L_2$.

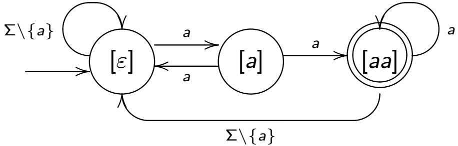
  $\delta([101], 1) \stackrel{\text{def}}{=} [1011] = [1]$ porque $1011z \in L_2$ se e se $z = 01$ ou $z \in L_2$.

Folha 5 - Questão 2

2a) O AFD mínimo para $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{aa\}\Sigma^\star$, com $a \in \Sigma$ fixo e $\Sigma\backslash\{a\} \neq \emptyset$, tem **quatro estados**. No diagrama, b denota qualquer um símbolo de $\Sigma \setminus \{a\}$.



2b) O AFD mínimo para $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^\star\{aa\}$, com $a \in \Sigma$ fixo, tem **três estados**. Se $\Sigma = \{a\}$, os ramos etiquetados por $\Sigma \setminus \{a\}$ não existem.



Folha 5 - Questão 3

3a)

A afirmação *"Para todo o alfabeto Σ, o AFD mínimo que reconhece a linguagem $\emptyset$ de $\Sigma^\star$ não tem estados finais"* é **verdadeira** porque o conjunto de estados do AFD mínimo para L corresponde ao conjunto das classes de equivalência constituídas por palavras de L e, neste caso, $L = \emptyset$.

3b)

A afirmação *"Existe uma linguagem L de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ tal que o AFD mínimo que reconhece L não tem transições por $\mathtt{b}$ em nenhum estado"* é **falsa** pois, pela definição de AFD dada, existem transições por todos os símbolos de Σ em todos os estados do AFD.

Folha 5 - Questão 4

4) **Justificação** para *"Qualquer que seja a linguagem regular $L \subseteq \Sigma^\star$, o AFD mínimo para L e para $\overline{L}$ têm o mesmo conjunto de estados e a mesma função de transição, diferindo apenas no conjunto de estados finais: se $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ é o AFD mínimo que reconhece L então $\mathcal{A}' = (S, \Sigma, \delta, s_0, S \setminus F)$ é o AFD mínimo que reconhece a linguagem complementar de L."*

- **As classes de equivalência de R_L e de $R_{\overline{L}}$ coincidem.**
  xR_Ly se e só se $\forall z \in \Sigma^\star (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$. Ou seja, xR_Ly sse $\forall z \in \Sigma^\star (xz \notin L \Leftrightarrow yz \notin L)$. Logo, se x e y são equivalentes segundo R_L, também são equivalentes segundo $R_{\overline{L}}$ pois $xz \notin L \Leftrightarrow yz \notin L$ equivale a $xz \in \overline{L} \Leftrightarrow yz \in \overline{L}$.

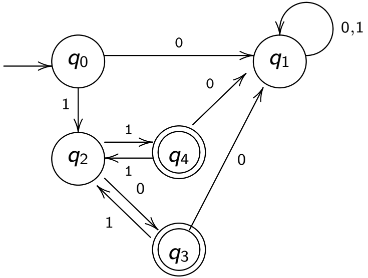
- **Qualquer que seja L regular, a função δ do AFD mínimo para L é definida por** $\delta([x], a) = [xa]$. Portanto, δ fica perfeitamente determinada pelo conjunto de classes de R_L. Como as classes de R_L e $R_{\overline{L}}$ coincidem, as funções de transição coincidem.

- **O conjunto dos estados finais do AFD mínimo para L é definido por** $F = \{[x] \mid x \in L\}$. Para $\overline{L}$, é $\{[x] \mid x \in \overline{L}\} = \{[x] \mid x \notin L\} = \dfrac{\Sigma^\star}{R_L} \setminus F$.

Folha 5 - Questão 5

5) Aplicação do algoritmo de Moore:

- **Tabela inicial:** qualquer estado é equivalente a si mesmo; os estados finais não são equivalentes a estados não finais.



q_0	$\equiv$				
q_1		$\equiv$			
q_2			$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	X	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	X	X	X		$\equiv$
	q_0	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

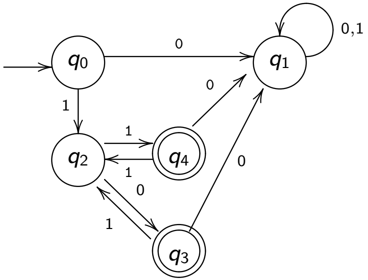
- **Restantes entradas** . . .

Folha 5 - Questão 5

5) Aplicação do algoritmo de Moore (cont.):

Restantes entradas

- (q_0, q_1): $\delta(q_0, 0) = q_1 = \delta(q_1, 0)$ não podem ser distinguidos por 0. $\delta(q_0, 1) = q_2$ e $\delta(q_1, 1) = q_1$ mas, como não se tem ainda a decisão para (q_2, q_1), colocamos (q_0, q_1) na sua entrada e ? na de (q_0, q_1).

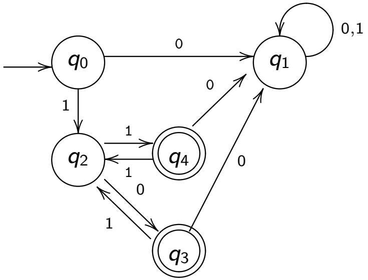


q_0	$\equiv$				
q_1	**?**	$\equiv$			
q_2		(q_0, q_1)	$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	X	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	X	X	X		$\equiv$
	q_0	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

Folha 5 - Questão 5

5) Aplicação do algoritmo de Moore (cont.):
Restantes entradas

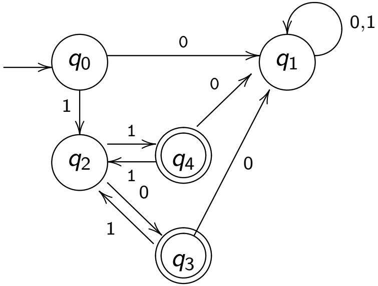
- (q_0, q_2): $\delta(q_0, 0) = q_1$ e $\delta(q_2, 0) = q_3$. Logo, $q_0 \not\equiv q_2$ pois $q_3 \not\equiv q_1$.



q_0	$\equiv$				
q_1	**?**	$\equiv$			
q_2	X	(q_0, q_1)	$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	X	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	X	X	X		$\equiv$
	q_0	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

Folha 5 - Questão 5 (cont.)

- **Restantes entradas (cont.)**
  - (q_1, q_2): $\delta(q_1, 0) = q_1$ e $\delta(q_2, 0) = q_3$. Logo, $q_1 \not\equiv q_2$ pois $q_3 \not\equiv q_1$. Propagação: como $q_3 \not\equiv q_1$ então $q_0 \not\equiv q_1$. Substituimos ? por X na entrada de (q_0, q_1).



q_0	$\equiv$				
q_1	$\cancel{?}X$	$\equiv$			
q_2	X	$(q_0, q_1)X$	$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	X	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	X	X	X		$\equiv$
	q_0	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

  - (q_3, q_4): $\delta(q_3, 0) = q_1 = \delta(q_4, 0)$ e $\delta(q_3, 1) = q_2 = \delta(q_4, 1)$. Logo, $q_3 \equiv q_4$.

Folha 5 - Questão 5 (cont.)

- **Tabela Final e AFD equivalente mínimo:**

q_0	$\equiv$				
q_1	X	$\equiv$			
q_2	X	X	$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	X	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	X	X	X	$\equiv$	$\equiv$
	q_0	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$