CC1004 - Modelos de Computação
Práticas 6 e 7

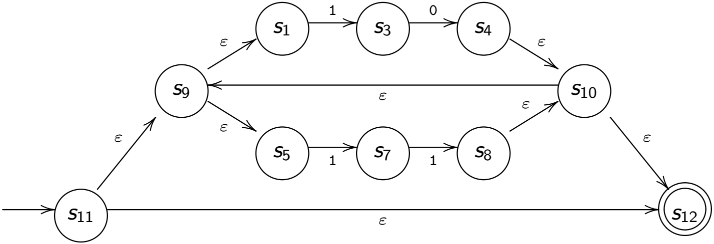
Ana Paula Tomás

DCC
FCUP

Março 2021 – Abril 2021

Folha 5 - Questão 6b)

AFND-ε para $(((10) + (11))^\star)$ obtido pelo **método de Thompson**:



Conversão para AFD pelo **método baseado em subconjuntos**

	0	1
$\rightarrow\ *\ \{s_{11}, s_9, s_1, s_5, s_{12}\}$	$\{\}$	$\{s_3, s_7\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{s_3, s_7\}$	$\{s_4, s_{10}, s_9, s_1, s_5, s_{12}\}$	$\{s_8, s_{10}, s_9, s_1, s_5, s_{12}\}$
$*\ \{s_4, s_{10}, s_9, s_1, s_5, s_{12}\}$	$\{\}$	$\{s_3, s_7\}$
$*\ \{s_8, s_{10}, s_9, s_1, s_5, s_{12}\}$	$\{\}$	$\{s_3, s_7\}$

Folha 5 - Questão 6b) cont.

Renomear os estados do AFD para simplificar as designações. Aplicar o **algoritmo de Moore** para minimizar o AFD.

	0	1
$\rightarrow * q_0$	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_3	q_4
$* q_3$	q_1	q_2
$* q_4$	q_1	q_2

Tabela inicial:

$\boxed{q_0}$	$\equiv$				
q_1	X	$\equiv$			
q_2	X		$\equiv$		
$\boxed{q_3}$		X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$		X	X		$\equiv$
	$\boxed{q_0}$	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

Restantes pares:

- $q_0 \equiv q_3 \equiv q_4$ porque $\delta(q_0, 0) = q_1 = \delta(q_3, 0) = \delta(q_4, 0)$ e $\delta(q_0, 1) = q_2 = \delta(q_3, 1) = \delta(q_4, 1)$.
- $q_1 \not\equiv q_2$ pois $\delta(q_1, 0) = q_1$ e $\delta(q_2, 0) = q_3$ e $q_1 \not\equiv q_3$.

Tabela Final:

$\boxed{q_0}$	$\equiv$				
q_1	X	$\equiv$			
q_2	X	X	$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	$\equiv$	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	$\equiv$	X	X	$\equiv$	$\equiv$
	$\boxed{q_0}$	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

Folha 5 - Questão 6b) cont.

Conclusão da aplicação do algoritmo de Moore:

1) AFD

	0	1
$\rightarrow\ * q_0$	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_3	q_4
$* q_3$	q_1	q_2
$* q_4$	q_1	q_2

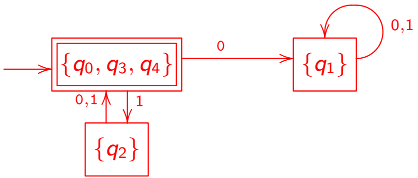
Três classes de equivalência:
$\{q_0, q_3, q_4\}$, $\{q_1\}$ e $\{q_2\}$

2) Equivalência de estados

$\boxed{q_0}$	$\equiv$				
q_1	X	$\equiv$			
q_2	X	X	$\equiv$		
$\boxed{q_3}$	$\equiv$	X	X	$\equiv$	
$\boxed{q_4}$	$\equiv$	X	X	$\equiv$	$\equiv$
	$\boxed{q_0}$	q_1	q_2	$\boxed{q_3}$	$\boxed{q_4}$

3) AFD mínimo equivalente

	0	1
$\rightarrow\ * \{q_0, q_3, q_4\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$\{q_2\}$	$\{q_0, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_3, q_4\}$



Folha 6 - Questão 1

- 1a) Para $L = \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto $\dfrac{\Sigma^\star}{R_L}$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p, 0^q) \notin R_L$ pois, para $z = 10^p$, a palavra $0^p z \in L$ mas $0^q z \notin L$. Logo, $[0^p] \neq [0^q]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[\varepsilon]$, $[0]$, $[00]$, $[000]$, $[0000]$, ... são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

- 1b) Para $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$, o conjunto $\Sigma^\star / R_L$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}^+$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p 1, 0^q 1) \notin R_L$ pois, para $z = 0^p 1$, a palavra $0^p 1 z \in L$ mas $0^q 1 z \notin L$. Logo, $[0^p 1] \neq [0^q 1]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[01]$, $[001]$, $[0001]$, $[00001]$, ... são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

- 1c) Para $L = \{wyw^R \mid w \in \{0,1\}^\star, y \in \{0,1,\varepsilon\}\}$, o conjunto $\Sigma^\star / R_L$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}^+$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p, 0^q) \notin R_L$ pois, para $z = 10^p$, a palavra $0^p z \in L$ mas $0^q z \notin L$. Logo, $[0^p] \neq [0^q]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[0]$, $[00]$, $[000]$, $[0000]$, ... são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

Folha 6 - Questão 1

- 1a) Para $L = \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto $\dfrac{\Sigma^\star}{R_L}$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p, 0^q) \notin R_L$ pois, para $z = 10^p$, a palavra $0^p z \in L$ mas $0^q z \notin L$. Logo, $[0^p] \neq [0^q]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[\varepsilon]$, $[0]$, $[00]$, $[000]$, $[0000]$, $\ldots$ são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

- 1b) Para $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$, o conjunto $\Sigma^\star/R_L$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}^+$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p 1, 0^q 1) \notin R_L$ pois, para $z = 0^p 1$, a palavra $0^p 1 z \in L$ mas $0^q 1 z \notin L$. Logo, $[0^p 1] \neq [0^q 1]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[01]$, $[001]$, $[0001]$, $[00001]$, $\ldots$ são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

- 1c) Para $L = \{wyw^R \mid w \in \{0,1\}^\star, y \in \{0,1,\varepsilon\}\}$, o conjunto $\Sigma^\star/R_L$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}^+$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p, 0^q) \notin R_L$ pois, para $z = 10^p$, a palavra $0^p z \in L$ mas $0^q z \notin L$. Logo, $[0^p] \neq [0^q]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[0]$, $[00]$, $[000]$, $[0000]$, $\ldots$ são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

Folha 6 - Questão 1

- 1a) Para $L = \{0^n 1 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o conjunto $\dfrac{\Sigma^\star}{R_L}$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p, 0^q) \notin R_L$ pois, para $z = 10^p$, a palavra $0^p z \in L$ mas $0^q z \notin L$. Logo, $[0^p] \neq [0^q]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[\varepsilon]$, $[0]$, $[00]$, $[000]$, $[0000]$, $\ldots$ são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

- 1b) Para $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^\star\}$, o conjunto $\Sigma^\star/R_L$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}^+$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p 1, 0^q 1) \notin R_L$ pois, para $z = 0^p 1$, a palavra $0^p 1 z \in L$ mas $0^q 1 z \notin L$. Logo, $[0^p 1] \neq [0^q 1]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[01]$, $[001]$, $[0001]$, $[00001]$, $\ldots$ são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

- 1c) Para $L = \{wyw^R \mid w \in \{0,1\}^\star, y \in \{0,1,\varepsilon\}\}$, o conjunto $\Sigma^\star/R_L$ **é infinito** porque, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{Z}^+$, com $p \neq q$, tem-se $(0^p, 0^q) \notin R_L$ pois, para $z = 10^p$, a palavra $0^p z \in L$ mas $0^q z \notin L$. Logo, $[0^p] \neq [0^q]$, se $p \neq q$.

  Como as classes $[0]$, $[00]$, $[000]$, $[0000]$, $\ldots$ são todas distintas, o conjunto de classes é infinito. Logo, pelo teorema de Myhill-Nerode, L não é regular.

Folha 6 - Questão 2

- **2a)** $L = \{x \mid \text{ o número de 0's em } x \text{ não é múltiplo de cinco}\}$ é regular porque o número de classes de R_L é finito.

  De facto, R_L tem **cinco** classes de equivalência: $[\varepsilon]$, $[0]$, $[00]$, $[000]$, e $[0000]$, sendo:

  $$[\varepsilon] = \{x \mid \text{o número de 0's em } x \text{ é múltiplo de 5}\}$$
  $$[0] = \{x \mid \text{o número de 0's em } x \text{ é 1 mais um múltiplo de 5}\}$$
  $$[00] = \{x \mid \text{o número de 0's em } x \text{ é 2 mais um múltiplo de 5}\}$$
  $$[000] = \{x \mid \text{o número de 0's em } x \text{ é 3 mais um múltiplo de 5}\}$$
  $$[0000] = \{x \mid \text{o número de 0's em } x \text{ é 4 mais um múltiplo de 5}\}$$

- **2b)** $L = \{x \mid x \text{ tem igual número de 0's e de 1's}\}$ não é regular. O conjunto das classes de equivalência de R_L é infinito, porque as palavras 0^n, com $n \in \mathbb{N}$, pertence a classes distintas: $(0^n, 0^k) \notin R_L$ se $n \neq k$, pois, para $z = 1^n$, tem-se $0^n z \in L$ e $0^k z \notin L$.

Folha 6 - Questão 2

- **2c)** $L = \{x \mid \ \#_0(w) - \#_1(w) < 3$, qualquer que seja w prefixo de $x\}$ é regular.

  Construir o AFD mínimo para L por aplicação do corolário do teorema de Myhill-Nerode

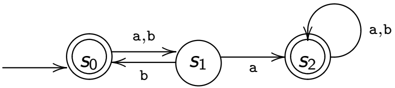
- **2d)** $L = \{1y1x \ \mid x \in \{0\}^\star$ e $|y| \leq 2|x|\}$ não é regular.

  Mostrar que $\Sigma^\star/R_L$ não é finito.

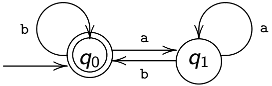
Folha 6 - Questão 10

10) AFD produto de A_1 e A_2:

AFD A_1:



AFD A_2:



Transições para o AFD produto de A_1 e A_2

	a	b
$\rightarrow (s_0, q_0)$	(s_1, q_1)	(s_1, q_0)
(s_1, q_1)	(s_2, q_1)	(s_0, q_0)
(s_1, q_0)	(s_2, q_1)	(s_0, q_0)
(s_2, q_1)	(s_2, q_1)	(s_2, q_0)
(s_2, q_0)	(s_2, q_1)	(s_2, q_0)

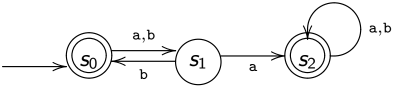
Estados finais para reconhecer:

- $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2)$: o conjunto de estados finais é $F = \{(s_0, q_0), (s_2, q_0)\}$
- $\mathcal{L}(A_1) \cup \mathcal{L}(A_2)$: teria $F = \{(s_0, q_0), (s_2, q_0), (s_2, q_1), (s_1, q_0)\}$
- $\mathcal{L}(A_1) \setminus \mathcal{L}(A_2)$: teria $F = \{(s_2, q_1)\}$

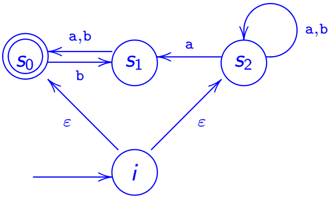
Folha 6 - Questão 10

11) AFD para a linguagem reversa de $\mathcal{L}(A_1)$:

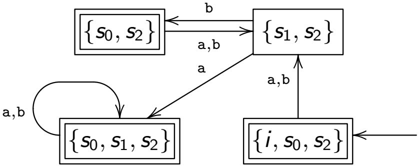
AFD A_1:



AFND-ε para $\mathcal{L}(A_1)^R$:



AFD para $\mathcal{L}(A_1)^R$:



(não é o AFD mínimo: $\boxed{\{i, s_0, s_1\}}$ e $\boxed{\{s_0, s_2\}}$ são equivalentes)

Folha 6 - Questão 15 a)

15a) $L = \{y2y \mid y \in \{0,1\}^\star \text{ e } |y| \geq 1\}$ não é regular pois não satisfaz a condição do lema da repetição para linguagens regulares.

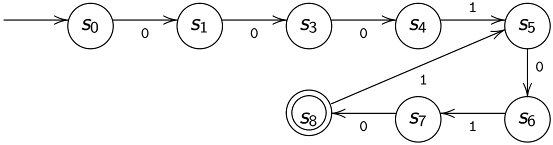
Queremos mostrar que **para todo o inteiro positivo** n, existe $z \in L$ com $|z| \geq n$ e tal que, **para todas as decomposições** de z na forma $z = uvw$, com $|uv| \leq n$ e $v \neq \varepsilon$, se tem $uv^iw \notin L$, para algum $i \geq 0$.

- Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, escolhemos a palavra $z = 0^{n+1}20^{n+1}$.
- $z \in L$ e $|z| = 2n + 3 \geq n$.
- Para qualquer decomposição de z na forma $z = uvw$, com $|uv| \leq n$ e $v \neq \varepsilon$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $uv^iw \notin L$. Basta tomar $i = 0$.
  - Como uv é prefixo de z e tem no máximo n símbolos, a subpalavra v teria apenas 0's, estando à esquerda de 2 em z.
  - Então, qualquer que seja a decomposição, tem-se $uv^0w = 0^{n+1-|v|}20^{n+1} \notin L$.

Portanto, L não satisfaz a condição do lema da repetição. □

Folha 6 - Questão 15 b)

15b) $L = \{000(10)^{2n} \mid n > 0\}$ é regular. Consequentemente, L satisfaz a condição do lema da repetição para linguagens regulares. Mas, para o justificar, como pedido, começamos por ver que L é reconhecida pelo autómato finito seguinte:



Recordando a prova do lema da repetição, sabemos que para $n = 9$ (ou seja, n igual ao número de estados deste autómato), **qualquer palavra $z \in L$, com $|z| \geq 9$, admite uma decomposição que satisfaz a condição do lema**.

- As palavras z de L com $|z| \geq 9$ são da forma $00010101010(1010)^k$, para $k \geq 0$.
- Para a decomposição $u = 000$, $v = 1010$ e $w = 1010(1010)^k$, a palavra uv^iw é:
  - $0001010(1010)^k$, para $i = 0$.
  - $0001010(1010)^{i-1}1010(1010)^k$, para $i \geq 1$.

  Portanto, $uv^iw \in L$, **para todo $i \geq 0$**, o que significa que L satisfaz a condição do lema da repetição. □

Folha 6 - Questão 15 c)

15c) $L = \{11, 102, \varepsilon\}$ é regular. Consequentemente, L satisfaz a condição do lema da repetição para linguagens regulares. Mas, para o justificar, como pedido, começamos por ver que L **não tem palavras com comprimento maior ou igual a 4**.

Assim, podemos tomar $n = 4$, para trivialmente satisfazer a condição do lema.

De facto, o lema diz que, existe uma constante n, tal que, qualquer que seja a palavra de $z \in L$, **se** $|z| \geq n$ **então** z tem de satisfazer a condição indicada no lema. Como L não tem palavras com comprimento maior ou igual a 4, esta implicação é quando fixamos $n = 4$. □

Recordar que $p \Rightarrow q$ equivale a $(\neg p) \vee q$.

Folha 6 - Questão 15 d)

15d) $L = \{22^m y 2 y^R \mid y \in \{0,1\}^\star \text{ e } m \geq 0\}$ não satisfaz a condição do lema da repetição.

- Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, podemos escolher $z = 20^n 20^n$.
- $z \in L$ e $|z| = 2n + 2 \geq n$.
- Se decompusermos z na forma uvw, com $|uv| \leq n$ e $v \neq \varepsilon$, podemos ter:
  - Caso 1: $w = \varepsilon$, $v = 20^t$, $w = 0^{n-t}20^n$, com $0 \leq t < n$, ou
  - Caso 2: $w = 20^t$, $v = 0^k$, $w = 0^{n-t-k}20^n$, com $0 \leq t + k < n$ e $k \geq 1$.
- Se tomarmos $i = 0$, em ambos os casos a palavra $uv^i w \notin L$.
  - Caso 1: $uv^i w = 0^{n-t}20^n \notin L$ pois começa por 0 em vez de 2.
  - Caso 2: $uv^i w = 20^{n-k}20^n \notin L$ pois tem menos 0's à esquerda do segundo 2 do que à direita. Assim, não é da forma $22^m y 2 y^R$, com $y \in \{0,1\}^\star$ e $m \geq 0$.

Portanto, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^+$, não existe uma decomposição para $z = 20^n 20^n$ que satisfaça as condições impostas pelo lema, para $i = 0$. Logo, L não é regular. □