CC1004 - Modelos de Computação
Teóricas 1 e 2

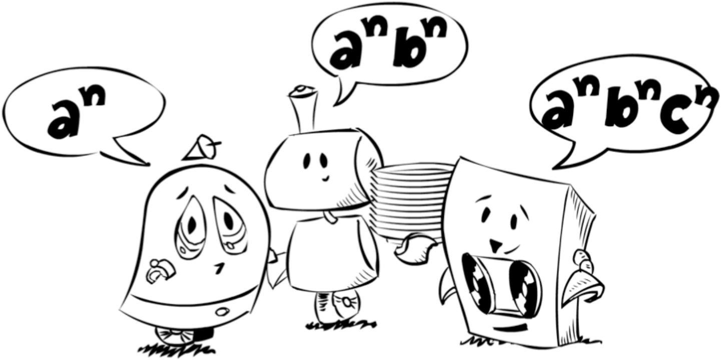
Ana Paula Tomás

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Fevereiro 2021

Linguagens Formais e Computabilidade

Área de TCS. Limites da computação. Computabilidade: **existe algoritmo para resolução do problema?** Complexidade: **Que recursos requer** (tempo e espaço)? Como se **descreve o problema**? Que **tipo de máquina** usará?



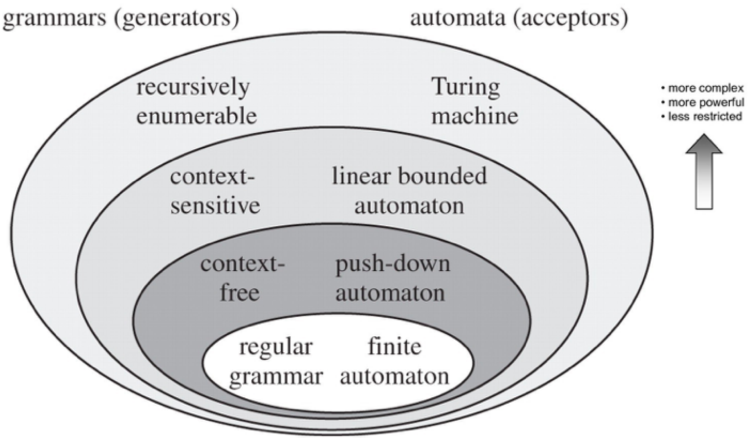
Fonte:`http://www.ic.uff.br/~ueverton/files/LF/aula09.pdf`

Programa

- Noção de linguagem formal.
- Linguagens regulares.
  - Expressões regulares.
  - Autómatos finitos determinísticos e não determinísticos.
  - Propriedades. Lema da repetição para linguagens regulares.
- Linguagens independentes de contexto (LICs).
  - Gramáticas independentes de contexto.
  - Autómatos de pilha.
  - Propriedades. Lema da repetição para LICs.
- Linguagens recursivamente enumeráveis. Máquinas de Turing e noção de computabilidade.

No fim desta UC deverá ser capaz de especificar linguagens formais simples, usando formas de descrição alternativas, e determinar a sua classificação na hierarquia de poder computacional (*hierarquia de Chomsky*).

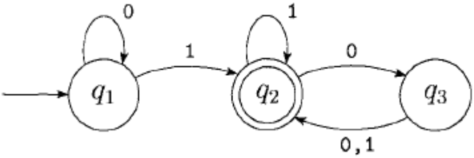
Hierarquia de Chomsky



Chomsky Hierarchy Levels. Source: Fitch. 2014.*

Fonte:`https://devopedia.org/chomsky-hierarchy`

Autómato Finito?



A figura mostra o **diagrama de transição** de um autómato finito, com conjunto de **estados** $\{q_1, q_2, q_3\}$, **alfabeto** $\Sigma = \{0, 1\}$, **estado inicial** q_1 (assinalado por uma seta), e um **estado final** (i.e., de aceitação) q_2 (assinalado por duas circunferências). As **palavras** 0110110000, 111 e 10101 levam o autómato do estado inicial q_1 ao estado final q_2. Diz-se que são **aceites** pelo autómato. As palavras 0, 00, 0110, 110 e 011000 não seriam aceites. O autómato processa cada palavra da esquerda para a direita, partindo do estado inicial q_1, seguindo as transições.

A **linguagem reconhecida (ou aceite) por um autómato** é o conjunto das palavras de alfabeto Σ que levam o autómato do estado inicial a algum estado final.

Este autómato reconhece o conjunto das palavras que têm algum 1 e terminam por 1 ou por um número par de 0's.

Introdução às Linguagens Formais

Alfabeto: qualquer conjunto finito e não vazio. Os elementos de um alfabeto dizem-se **símbolos**.

Palavra (*frase* ou *sequência*) de alfabeto Σ: qualquer sequência finita de símbolos de Σ.

$\Sigma^\star$ denota o conjunto das palavras de alfabeto Σ.

Palavra vazia: a palavra com zero símbolos. Denota-se por ε.

Linguagem (formal) de alfabeto Σ: é qualquer conjunto de palavras de Σ.

Linguagem vazia Não tem qualquer palavra. Denota-se por $\emptyset$ ou $\{\}$.
Portanto, $L = \{\varepsilon\} \neq \emptyset$.

Comprimento da palavra α: denota-se por $|\alpha|$ e é o número de símbolos de Σ que constituem a palavra. Para $\Sigma = \{0, 1\}$, tem-se $|0100| = 4$.
Qualquer que seja Σ, tem-se $|\varepsilon| = 0$

Exemplos

Para o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, teriamos

$$\Sigma^\star = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, \ldots\}$$

Para o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$, teriamos

$$\Sigma^\star = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, aba, abb, abc, \ldots\}$$

Para o alfabeto $\Sigma = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$, teriamos

$$\Sigma^\star = \{\varepsilon, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\clubsuit, \clubsuit\diamondsuit, \clubsuit\spadesuit, \clubsuit\heartsuit, \diamondsuit\clubsuit, \diamondsuit\diamondsuit, \diamondsuit\spadesuit, \diamondsuit\heartsuit, \ldots\}$$

Exemplos de linguagens de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$

Recordar que **uma linguagem de alfabeto Σ é qualquer subconjunto de $\Sigma^\star$.** Por exemplo:

- $L_1 = \Sigma^\star$
- $L_2 = \{\}$
- $L_3 = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ e termina em } 1\}$ $= \{1, 01, 11, 001, 011, 101, 111, 0001, \ldots\}$
- $L_4 = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ e o número de 0's em } x \text{ é par}\}$

  $= \{\varepsilon, 1, 11, 00, 111, 001, 010, 100, 1111, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 0000, \ldots\}$
- $L_5 = \{x \mid x \in \{0,1\}^\star \text{ e } |x| = 3\}$ $= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

L_2 e L_5 são **linguagens finitas**, i.e., são conjuntos finitos. L_1, L_3 e L_4 são **linguagens infinitas**. Por definição, as **palavras** são sempre **sequências finitas**.

Exemplos de linguagens de alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$

- $L_1 = \Sigma^\star$
- $L_2 = \{\}$
- $L_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\varepsilon, \mathtt{abc}, \mathtt{aabbcc}, \mathtt{aaabbbccc}, \ldots\}$
- $L_4 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aaabbb}, \mathtt{aaaabbbb}, \ldots\}$
- $L_5 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{aaa}, \mathtt{aaaa}, \mathtt{aaaaa}, \ldots\}$
- $L_6 = \{a^n \mathtt{bb} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\mathtt{bb}, \mathtt{abb}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aaabb}, \mathtt{aaaabb}, \ldots\}$
- $L_7 = \{a^n b^k \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x \in \{a, b\}^\star$ e x não tem a's depois de b's$\}$
- $L_8 = \{x \mid x \in \{a, b\}^\star$, x começa e termina em b e $|x| \leq 4\} =$
  $\{\mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{bbb}, \mathtt{bab}, \mathtt{baab}, \mathtt{babb}, \mathtt{bbab}, \mathtt{bbbb}\}$

Notação:

b^n denota uma sequência de n b's, sendo $b^0 = \varepsilon$.

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_0^+$, ou seja, $\mathbb{N}$ inclui o zero.

Exemplos de linguagens talvez mais interessantes

Seja L a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathrm{p}, \wedge, \vee, \tilde{}, \Rightarrow, (,)\}$ assim definida indutivamente.

(i) $\mathtt{p} \in L$

(ii) Quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in L$ tem-se $(\alpha \wedge \beta) \in L$, $(\alpha \vee \beta) \in L$, $(\alpha \Rightarrow \beta) \in L$ e $(\tilde{}\,\alpha) \in L$.

(iii) As palavras de L são as que resultam das regras (i) e (ii).

Exemplos de palavras de L:

$$(((\mathrm{p} \wedge \mathrm{p}) \vee \mathrm{p}) \Rightarrow (\tilde{}\,\mathrm{p}))$$

$$((((\mathrm{p} \wedge \mathrm{p}) \vee \mathrm{p}) \Rightarrow (\tilde{}\,\mathrm{p})) \Rightarrow ((\tilde{}\,\mathrm{p}) \vee \mathrm{p}))$$

Exemplos de linguagens talvez mais interessantes

Seja L a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{(,)\}$ definida indutivamente por:

(i) $() \in L$
(ii) Quaisquer que seja $\alpha \in L$, tem-se $(\alpha) \in L$
(iii) Quaisquer que seja $\alpha, \beta \in L$, tem-se $\alpha\beta \in L$
(iv) As palavras de L são as que resultam das regras (i)–(iii).

Aqui, $\alpha\beta$ é a palavra que se obtém por *concatenação* de α com β, ou seja, junção de β no fim de α.

Exemplo de palavra que pertence a L:

$$((((\,)\,)(\,)\,)(\,)\,)(\,)((\,)(\,)\,)$$

Exemplo de palavra que não pertence a L:

$$(\,)\,)(\,)(\,)\,)(\,)$$

Para pensar ... Dado $x \in \Sigma^\star$, é mais fácil justificar que $x \in L$ do que $x \notin L$? Como justificar que L é constituída pelas sequências de parentesis bem "emparelhados"?

União, Interseção, Complementar e Diferença

As linguagens são subconjuntos de $\Sigma^\star$. As operações **união**, **interseção**, **complementar**, e **diferença** são definidas para linguagens como para conjuntos.

União: $L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ ou } x \in M\}$

Interseção: $L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ e } x \in M\}$

Complementar: $\overline{L} = \{x \mid x \notin L\} = \Sigma^\star \setminus L$

Diferença: $L \setminus M = \{x \mid x \in L \text{ e } x \notin M\}$

Exemplo: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e $M = \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$L \cup M = \{x \mid x \text{ não tem 0's ou } x \text{ não tem 1's}\}$. $\qquad L \cap M = \{\varepsilon\}$

$L \setminus M = L \setminus \{\varepsilon\} = \{0^n \mid n \geq 1\}$ $\qquad \overline{L} = \{x \mid x \text{ tem algum } 1\}$

Concatenação

Duas operações específicas para linguagens: **concatenação** e **fecho de Kleene**.

Concatenação de duas palavras: sendo α e β palavras, à palavra $\alpha\beta$, obtida por justaposição de α com β, chamamos *concatenação* de α com β.

Concatenação de duas linguagens: sendo L e M linguagens, LM é a linguagem de todas as palavras obtidas por concatenação de uma qualquer palavra de L com uma qualquer palavra de M, ou seja

$$LM = \{xy \mid x \in L \text{ e } y \in M\}$$

Exemplos:

Se $\alpha = 000$ e $\beta = 11$, $\alpha\beta = 00011$ e $\beta\alpha = 11000$. A concatenação não é comutativa.

Se $L = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $M = \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ então $LM = \{0^n 1^k \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$.

Cuidado! Notar que $LM \neq \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Propriedades da concatenação

A **concatenação** de palavras é uma *operação binária* em $\Sigma^\star$ que goza das propriedades:

- associativa, pois $x(yz) = (xy)z$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \Sigma^\star$;
- existência de elemento neutro, pois $x\varepsilon = \varepsilon x = x$, para todo $x \in \Sigma^\star$;

Por ser associativa, podemos escrever xyz, para abreviar $x(yz)$ e $(xy)z$.

Associatividade da concatenação de linguagens

$(LM)K = L(MK)$, quaisquer que sejam as linguagens $L, M, K \subseteq \Sigma^\star$.

Por ser associativa, podemos escrever LMK, para abreviar $L(MK)$ e $(LM)K$.

Fecho de Kleene

A linguagem das palavras obtidas por **concatenação de n palavras de L**, com $n \geq 2$, denota-se por L^n. Podemos estender a definição a $n \geq 0$ assim:

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} &= LL^n = L^nL, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observação:

- $L^1 = L$, qualquer que seja a linguagem L, pois
$$L^1 = L^0L = \{\varepsilon\}L = \{\varepsilon x \mid x \in L\} = \{x \mid x \in L\} = L$$
- $L^pL^q = L^{p+q}$, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$ (pode-se mostrar por indução matemática)

A linguagem das palavras obtidas por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um, chama-se **fecho de Kleene da linguagem L**, e denota-se por $L^\star$.

$$L^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

Fecho de Kleene

A linguagem das palavras obtidas por **concatenação de n palavras de L**, com $n \geq 2$, denota-se por L^n. Podemos estender a definição a $n \geq 0$ assim:

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} &= LL^n = L^n L, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observação:

- $L^1 = L$, qualquer que seja a linguagem L, pois
$$L^1 = L^0 L = \{\varepsilon\}L = \{\varepsilon x \mid x \in L\} = \{x \mid x \in L\} = L$$
- $L^p L^q = L^{p+q}$, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$ (pode-se mostrar por indução matemática)

A linguagem das palavras obtidas por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um, chama-se **fecho de Kleene da linguagem** L, e denota-se por $L^\star$.

$$L^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

Fecho de Kleene

A linguagem das palavras obtidas por **concatenação de n palavras de L**, com $n \geq 2$, denota-se por L^n. Podemos estender a definição a $n \geq 0$ assim:

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} &= LL^n = L^nL, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observação:

- $L^1 = L$, qualquer que seja a linguagem L, pois
$$L^1 = L^0L = \{\varepsilon\}L = \{\varepsilon x \mid x \in L\} = \{x \mid x \in L\} = L$$
- $L^pL^q = L^{p+q}$, quaisquer que sejam $p, q \in \mathbb{N}$ (pode-se mostrar por indução matemática)

A linguagem das palavras obtidas por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um, chama-se **fecho de Kleene da linguagem L**, e denota-se por $L^\star$.

$$L^\star = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{1, 00\}$.

$$\begin{aligned} L^2 &= L^1L = LL = \{11, 100, 001, 0000\} \\ L^3 &= L^2L = \{111, 1100, 1001, 10000, 00001, 000000, 0011, 00100\} \\ L^4 &= L^3L = \{1111, 11100, 11001, 110000, \ldots, 001001, 0010000\} \end{aligned}$$

$$L^\star = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

$L^\star$ é o conjunto das palavras de alfabeto $\{0,1\}$ tais que qualquer subsequência *maximal* de 0's consecutivos na palavra tem número par de 0's.
Maximal, no sentido de não ser seguida nem precedida imediatamente por 0.

As palavras de $L^\star$ são as sequências finitas de 1's e/ou 00's. Por

0000111100111000011
1111111
0000000000

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{1, 00\}$.

$$\begin{aligned} L^2 &= L^1L = LL = \{11, 100, 001, 0000\} \\ L^3 &= L^2L = \{111, 1100, 1001, 10000, 00001, 000000, 0011, 00100\} \\ L^4 &= L^3L = \{1111, 11100, 11001, 110000, \ldots, 001001, 0010000\} \end{aligned}$$

$$L^\star = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

$L^\star$ é o conjunto das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ tais que qualquer subsequência *maximal* de 0's consecutivos na palavra tem número par de 0's.
Maximal, no sentido de não ser seguida nem precedida imediatamente por 0.

As palavras de $L^\star$ são as sequências finitas de 1's e/ou 00's. Por

0000111100111000011
1111111
0000000000

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{1, 00\}$.

$$\begin{aligned} L^2 &= L^1L = LL = \{11, 100, 001, 0000\} \\ L^3 &= L^2L = \{111, 1100, 1001, 10000, 00001, 000000, 0011, 00100\} \\ L^4 &= L^3L = \{1111, 11100, 11001, 110000, \ldots, 001001, 0010000\} \end{aligned}$$

$$L^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots$$

$L^\star$ é o conjunto das palavras de alfabeto $\{0, 1\}$ tais que qualquer subsequência *maximal* de 0's consecutivos na palavra tem número par de 0's.
Maximal, no sentido de não ser seguida nem precedida imediatamente por 0.

As palavras de $L^\star$ são as sequências finitas de 1's e/ou 00's. Por

0000111100111000011
1111111
0000000000

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Podemos considerar Σ como uma linguagem de alfabeto Σ e definir:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^0 &= \{\,\varepsilon\,\} \\
\Sigma^1 &= \{\,0, 1\,\} \\
\Sigma^2 &= \{\,11, 00, 01, 10\,\} \\
\Sigma^4 &= \{\,1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010, 1001, 1000, \\
&\quad\; 0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010, 0001, 0000\,\} \\
\Sigma^n &= \{x \mid x \text{ é sequência de 0's ou 1's de comprimento } n\}
\end{aligned}
$$

$$
\Sigma^\star = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n = \{x \mid x \text{ é sequência finita de 0's ou 1's}\}
$$

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Podemos considerar Σ como uma linguagem de alfabeto Σ e definir:

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma^0 & = & \{\, \varepsilon \,\} \\
\Sigma^1 & = & \{\, 0, 1 \,\} \\
\Sigma^2 & = & \{\, 11, 00, 01, 10 \,\} \\
\Sigma^4 & = & \{\, 1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010, 1001, 1000, \\
 & & \;\; 0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010, 0001, 0000 \,\} \\
\Sigma^n & = & \{x \mid x \text{ é sequência de 0's ou 1's de comprimento } n\} \\
 & & \\
\Sigma^\star & = & \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n = \{x \mid x \text{ é sequência finita de 0's ou 1's}\}
\end{array}
$$

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{000, 00000\} = \{0^3, 0^5\}$, de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$L^2 = \{\,0^6, 0^8, 0^{10}\,\}$$

$$L^3 = \{\,0^9, 0^{11}, 0^{13}, 0^{15}\,\}$$

$$L^4 = \{\,0^{12}, 0^{14}, 0^{16}, 0^{18}, 0^{20}\,\}$$

$$L^\star = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L^k = \{0^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,4,7\}\} = \{\varepsilon, 0^3, 0^5, 0^6\} \cup \{0^n \mid n \geq 8\}$$

Por **indução matemática**, podemos provar que para todo número inteiro $n \geq 8$, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 3p + 5q$. Logo, $0^n \in L^\star$, para todo $n \geq 8$, pois $0^n = 0^{3p}0^{5q} \in L^pL^q = L^{p+q}$, uma vez que $0^{3p} \in L^p$ e $0^{5q} \in L^q$.

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{000, 00000\} = \{0^3, 0^5\}$, de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$L^2 = \{\, 0^6, 0^8, 0^{10} \,\}$$

$$L^3 = \{\, 0^9, 0^{11}, 0^{13}, 0^{15} \,\}$$

$$L^4 = \{\, 0^{12}, 0^{14}, 0^{16}, 0^{18}, 0^{20} \,\}$$

$$L^\star = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L^k = \{0^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,4,7\}\} = \{\varepsilon, 0^3, 0^5, 0^6\} \cup \{0^n \mid n \geq 8\}$$

Por **indução matemática**, podemos provar que para todo número inteiro $n \geq 8$, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 3p + 5q$. Logo, $0^n \in L^\star$, para todo $n \geq 8$, pois $0^n = 0^{3p}0^{5q} \in L^pL^q = L^{p+q}$, uma vez que $0^{3p} \in L^p$ e $0^{5q} \in L^q$.

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{000, 00000\} = \{0^3, 0^5\}$, de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$L^2 = \{ 0^6, 0^8, 0^{10} \}$$

$$L^3 = \{ 0^9, 0^{11}, 0^{13}, 0^{15} \}$$

$$L^4 = \{ 0^{12}, 0^{14}, 0^{16}, 0^{18}, 0^{20} \}$$

$$L^\star = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k = \{0^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 7\}\} = \{\varepsilon, 0^3, 0^5, 0^6\} \cup \{0^n \mid n \geq 8\}$$

Por **indução matemática**, podemos provar que para todo número inteiro $n \geq 8$, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 3p + 5q$. Logo, $0^n \in L^\star$, para todo $n \geq 8$, pois $0^n = 0^{3p}0^{5q} \in L^pL^q = L^{p+q}$, uma vez que $0^{3p} \in L^p$ e $0^{5q} \in L^q$.

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{000, 00000\} = \{0^3, 0^5\}$, de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$L^2 = \{\, 0^6, 0^8, 0^{10} \,\}$$

$$L^3 = \{\, 0^9, 0^{11}, 0^{13}, 0^{15} \,\}$$

$$L^4 = \{\, 0^{12}, 0^{14}, 0^{16}, 0^{18}, 0^{20} \,\}$$

$$L^\star = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k = \{0^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 7\}\} = \{\varepsilon, 0^3, 0^5, 0^6\} \cup \{0^n \mid n \geq 8\}$$

Por **indução matemática**, podemos provar que para todo número inteiro $n \geq 8$, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 3p + 5q$. Logo, $0^n \in L^\star$, para todo $n \geq 8$, pois $0^n = 0^{3p}0^{5q} \in L^pL^q = L^{p+q}$, uma vez que $0^{3p} \in L^p$ e $0^{5q} \in L^q$.

Fecho de Kleene

Exemplo: Seja $L = \{000, 00000\} = \{0^3, 0^5\}$, de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$L^2 = \{\, 0^6, 0^8, 0^{10} \,\}$$

$$L^3 = \{\, 0^9, 0^{11}, 0^{13}, 0^{15} \,\}$$

$$L^4 = \{\, 0^{12}, 0^{14}, 0^{16}, 0^{18}, 0^{20} \,\}$$

$$L^\star = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k = \{0^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 7\}\} = \{\varepsilon, 0^3, 0^5, 0^6\} \cup \{0^n \mid n \geq 8\}$$

Por **indução matemática**, podemos provar que para todo número inteiro $n \geq 8$, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 3p + 5q$. Logo, $0^n \in L^\star$, para todo $n \geq 8$, pois $0^n = 0^{3p}0^{5q} \in L^p L^q = L^{p+q}$, uma vez que $0^{3p} \in L^p$ e $0^{5q} \in L^q$.

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $\varepsilon \in L$ então $M \subseteq LM$.

Se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$.

Prova:
Se $\varepsilon \in L$ então $\varepsilon y \in LM$, para todo $y \in M$, por definição de LM.

Como $\varepsilon y = y$, tal significa que $y \in LM$, para todo $y \in M$, ou seja $M \subseteq LM$.

Analogamente se prova que se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. $\square$

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $\varepsilon \in L$ então $M \subseteq LM$.

Se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$.

Prova:

Se $\varepsilon \in L$ então $\varepsilon y \in LM$, para todo $y \in M$, por definição de LM.

Como $\varepsilon y = y$, tal significa que $y \in LM$, para todo $y \in M$, ou seja $M \subseteq LM$.

Analogamente se prova que se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. $\square$

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $\varepsilon \in L$ então $M \subseteq LM$.

Se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$.

Prova:

Se $\varepsilon \in L$ então $\varepsilon y \in LM$, para todo $y \in M$, por definição de LM.

Como $\varepsilon y = y$, tal significa que $y \in LM$, para todo $y \in M$, ou seja $M \subseteq LM$.

Analogamente se prova que se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. $\square$

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $\varepsilon \in L$ então $M \subseteq LM$.

Se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$.

Prova:

Se $\varepsilon \in L$ então $\varepsilon y \in LM$, para todo $y \in M$, por definição de LM.

Como $\varepsilon y = y$, tal significa que $y \in LM$, para todo $y \in M$, ou seja $M \subseteq LM$.

Analogamente se prova que se $\varepsilon \in M$ então $L \subseteq LM$. $\square$

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se $L \subseteq M$ então $L^\star \subseteq M^\star$.

Justificação (intuitiva):

- $L^\star$ é o conjunto de todas as palavras que se podem obter por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um.

  Se $L \subseteq M$ então qualquer palavra de L pertence a M. Assim, qualquer palavra x de $L^\star$ pode ser vista como uma justaposição de um número finito de palavras de M, possivelmente zero ou um. Logo, $x \in M^\star$.

- Analogamente, se pode concluir que $L^n \subseteq M^n$, pois L^n denota a linguagem das palavras que se podem obter por justaposição de n palavras de L. Portanto, se $x \in L^n$ e $L \subseteq M$ então $x \in M^n$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se $L \subseteq M$ então $L^\star \subseteq M^\star$.

Justificação (intuitiva):

- $L^\star$ é o conjunto de todas as palavras que se podem obter por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um.

  Se $L \subseteq M$ então qualquer palavra de L pertence a M. Assim, qualquer palavra x de $L^\star$ pode ser vista como uma justaposição de um número finito de palavras de M, possivelmente zero ou um. Logo, $x \in M^\star$.

- Analogamente, se pode concluir que $L^n \subseteq M^n$, pois L^n denota a linguagem das palavras que se podem obter por justaposição de n palavras de L. Portanto, se $x \in L^n$ e $L \subseteq M$ então $x \in M^n$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se $L \subseteq M$ então $L^\star \subseteq M^\star$.

Justificação (intuitiva):

- $L^\star$ é o conjunto de todas as palavras que se podem obter por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um.

  Se $L \subseteq M$ então qualquer palavra de L pertence a M. Assim, qualquer palavra x de $L^\star$ pode ser vista como uma justaposição de um número finito de palavras de M, possivelmente zero ou um. Logo, $x \in M^\star$.

- Analogamente, se pode concluir que $L^n \subseteq M^n$, pois L^n denota a linguagem das palavras que se podem obter por justaposição de n palavras de L. Portanto, se $x \in L^n$ e $L \subseteq M$ então $x \in M^n$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se $L \subseteq M$ então $L^\star \subseteq M^\star$.

Justificação (intuitiva):

- $L^\star$ é o conjunto de todas as palavras que se podem obter por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um.

  Se $L \subseteq M$ então qualquer palavra de L pertence a M. Assim, qualquer palavra x de $L^\star$ pode ser vista como uma justaposição de um número finito de palavras de M, possivelmente zero ou um. Logo, $x \in M^\star$.

- Analogamente, se pode concluir que $L^n \subseteq M^n$, pois L^n denota a linguagem das palavras que se podem obter por justaposição de n palavras de L. Portanto, se $x \in L^n$ e $L \subseteq M$ então $x \in M^n$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se $L \subseteq M$ então $L^\star \subseteq M^\star$.

Justificação (intuitiva):

- $L^\star$ é o conjunto de todas as palavras que se podem obter por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um.

  Se $L \subseteq M$ então qualquer palavra de L pertence a M. Assim, qualquer palavra x de $L^\star$ pode ser vista como uma justaposição de um número finito de palavras de M, possivelmente zero ou um. Logo, $x \in M^\star$.

- Analogamente, se pode concluir que $L^n \subseteq M^n$, pois L^n denota a linguagem das palavras que se podem obter por justaposição de n palavras de L.
  Portanto, se $x \in L^n$ e $L \subseteq M$ então $x \in M^n$.

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Sejam L e M linguagens de alfabeto Σ.

Se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se $L \subseteq M$ então $L^\star \subseteq M^\star$.

Justificação (intuitiva):

- $L^\star$ é o conjunto de todas as palavras que se podem obter por justaposição de um número finito de palavras de L, possivelmente zero ou um.

  Se $L \subseteq M$ então qualquer palavra de L pertence a M. Assim, qualquer palavra x de $L^\star$ pode ser vista como uma justaposição de um número finito de palavras de M, possivelmente zero ou um. Logo, $x \in M^\star$.

- Analogamente, se pode concluir que $L^n \subseteq M^n$, pois L^n denota a linguagem das palavras que se podem obter por justaposição de n palavras de L. Portanto, se $x \in L^n$ e $L \subseteq M$ então $x \in M^n$. $\square$

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.

- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):

  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.

  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.
- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):
  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.
  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.
- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):
  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.
  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.

- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):

  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.
  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.

- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):

  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.
  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.

- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):

  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.

  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. □

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Prova formal a partir das definições das operações:

- Se $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Portanto, $L^\star \subseteq M^\star$.

- Resta mostrar que se $L \subseteq M$ então $L^n \subseteq M^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Supondo $L \subseteq M$, tal segue pelo **princípio de indução matemática** se provarmos (i) e (ii):

  - (i) **Caso de base:** $L^0 \subseteq M^0$.
    Justificação: $L^0 \subseteq M^0$ pois $L^0 = \{\varepsilon\} = M^0$.

  - (ii) **Hereditariedade:** Se $L^k \subseteq M^k$ então $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$, para $k \in \mathbb{N}$.
    Justificação: Como $L^{k+1} = LL^k$, dado $x \in L^{k+1}$ existe $y \in L$ e $z \in L^k$ tais que $x = yz$. Então, $x \in MM^k$ pois $y \in M$ e $z \in M^k$ porque $L \subseteq M$ e, pela hipótese de indução, $L^k \subseteq M^k$. Portanto, se $x \in L^{k+1}$ então $x \in M^{k+1}$, i.e., $L^{k+1} \subseteq M^{k+1}$. $\square$

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Quaisquer que sejam as linguagens R, S e T de alfabeto Σ tem-se:

$$\begin{array}{ll}
R \cup S = S \cup R & (R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T) \\
R \cap S = S \cap R & (R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T) \\
R(ST) = (RS)T & R(S \cup T) = RS \cup RT \\
(R \cup S)T = RT \cup ST & \emptyset^\star = \{\varepsilon\} \\
(R^\star)^\star = R^\star & (\{\varepsilon\} \cup R)^\star = R^\star \\
(R^\star S^\star)^\star = (R \cup S)^\star & \{\varepsilon\}R = R = R\{\varepsilon\} \\
\emptyset R = \emptyset = R\emptyset &
\end{array}$$

Sendo A e B conjuntos, **para provar** $A = B$**, podemos provar que** $A \subseteq B$ **e** $A \supseteq B$, ou seja, que se $x \in A$ então $x \in B$ e que se $x \in B$ então $x \in A$, para todo x.

Alguns resultados (propriedades algébricas)

Proposição:
Quaisquer que sejam as linguagens R, S e T de alfabeto Σ tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
R \cup S = S \cup R & (R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T) \\
R \cap S = S \cap R & (R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T) \\
R(ST) = (RS)T & R(S \cup T) = RS \cup RT \\
(R \cup S)T = RT \cup ST & \emptyset^\star = \{\varepsilon\} \\
(R^\star)^\star = R^\star & (\{\varepsilon\} \cup R)^\star = R^\star \\
(R^\star S^\star)^\star = (R \cup S)^\star & \{\varepsilon\}R = R = R\{\varepsilon\} \\
\emptyset R = \emptyset = R\emptyset &
\end{array}
$$

Sendo A e B conjuntos, **para provar $A = B$, podemos provar que $A \subseteq B$ e** $A \supseteq B$, ou seja, que se $x \in A$ então $x \in B$ e que se $x \in B$ então $x \in A$, para todo x.

Provas de algumas propriedades

Prova de que $(R^\star)^\star = R^\star$

- $R^\star \subseteq (R^\star)^\star$, pela definição de fecho de Kleene de $R^\star$.
- $R^\star \supseteq (R^\star)^\star$, porque se $x \in (R^\star)^\star$ então $x \in R^\star$.

  De facto, por definição de fecho de Kleene de uma linguagem L, qualquer palavra de $L^\star$ é ε ou uma sequência finita de palavras de $L \setminus \{\varepsilon\}$.

  Assim, se $x \in (R^\star)^\star$ então $x = \varepsilon$ ou $x = x_1 \ldots x_k$, para algum $k \geq 1$, com $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$, para $1 \leq i \leq k$.

  Mas, por sua vez, se $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$ então x_i é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$, para todo i.

  Logo, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$. Portanto, $x \in R^\star$. $\square$

Provas de algumas propriedades

Prova de que $(R^\star)^\star = R^\star$

- $R^\star \subseteq (R^\star)^\star$, pela definição de fecho de Kleene de $R^\star$.
- $R^\star \supseteq (R^\star)^\star$, porque se $x \in (R^\star)^\star$ então $x \in R^\star$.

  De facto, por definição de fecho de Kleene de uma linguagem L, qualquer palavra de $L^\star$ é ε ou uma sequência finita de palavras de $L \setminus \{\varepsilon\}$.

  Assim, se $x \in (R^\star)^\star$ então $x = \varepsilon$ ou $x = x_1 \ldots x_k$, para algum $k \geq 1$, com $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$, para $1 \leq i \leq k$.

  Mas, por sua vez, se $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$ então x_i é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$, para todo i.

  Logo, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$. Portanto, $x \in R^\star$. □

Provas de algumas propriedades

Prova de que $(R^\star)^\star = R^\star$

- $R^\star \subseteq (R^\star)^\star$, pela definição de fecho de Kleene de $R^\star$.
- $R^\star \supseteq (R^\star)^\star$, porque se $x \in (R^\star)^\star$ então $x \in R^\star$.

  De facto, por definição de fecho de Kleene de uma linguagem L, qualquer palavra de $L^\star$ é ε ou uma sequência finita de palavras de $L \setminus \{\varepsilon\}$.

  Assim, se $x \in (R^\star)^\star$ então $x = \varepsilon$ ou $x = x_1 \ldots x_k$, para algum $k \geq 1$, com $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$, para $1 \leq i \leq k$.

  Mas, por sua vez, se $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$ então x_i é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$, para todo i.

  Logo, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$. Portanto, $x \in R^\star$. $\square$

Provas de algumas propriedades

Prova de que $(R^\star)^\star = R^\star$

- $R^\star \subseteq (R^\star)^\star$, pela definição de fecho de Kleene de $R^\star$.

- $R^\star \supseteq (R^\star)^\star$, porque se $x \in (R^\star)^\star$ então $x \in R^\star$.
  De facto, por definição de fecho de Kleene de uma linguagem L, qualquer palavra de $L^\star$ é ε ou uma sequência finita de palavras de $L \setminus \{\varepsilon\}$.

  Assim, se $x \in (R^\star)^\star$ então $x = \varepsilon$ ou $x = x_1 \ldots x_k$, para algum $k \geq 1$, com $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$, para $1 \leq i \leq k$.

  Mas, por sua vez, se $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$ então x_i é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$, para todo i.

  Logo, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$. Portanto, $x \in R^\star$. $\square$

Provas de algumas propriedades

Prova de que $(R^\star)^\star = R^\star$

- $R^\star \subseteq (R^\star)^\star$, pela definição de fecho de Kleene de $R^\star$.

- $R^\star \supseteq (R^\star)^\star$, porque se $x \in (R^\star)^\star$ então $x \in R^\star$.

  De facto, por definição de fecho de Kleene de uma linguagem L, qualquer palavra de $L^\star$ é ε ou uma sequência finita de palavras de $L \setminus \{\varepsilon\}$.

  Assim, se $x \in (R^\star)^\star$ então $x = \varepsilon$ ou $x = x_1 \ldots x_k$, para algum $k \geq 1$, com $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$, para $1 \leq i \leq k$.

  Mas, por sua vez, se $x_i \in R^\star \setminus \{\varepsilon\}$ então x_i é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$, para todo i.

  Logo, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de $R \setminus \{\varepsilon\}$. Portanto, $x \in R^\star$. $\square$

Provas de algumas propriedades

Prova de que $\emptyset^\star = \{\varepsilon\}$

- $\emptyset^\star \subseteq \{\varepsilon\}$
  Por definição, $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$. Portanto, $\varepsilon \in \emptyset^\star$. Logo, $\{\varepsilon\} \subseteq \emptyset^\star$.

- $\emptyset^\star \supseteq \{\varepsilon\}$
  Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, tem-se $\emptyset \subseteq \{\varepsilon\}$. Logo, $\emptyset^\star \subseteq \{\varepsilon\}^\star$, pois mostrámos anteriormente que $L \subseteq M$ implica $L^\star \subseteq M^\star$. Como $\{\varepsilon\}^\star = \{\varepsilon\}$, segue $\emptyset^\star \subseteq \{\varepsilon\}$ $\square$

Prova de que $\emptyset R = \emptyset = R\emptyset$

Segue trivialmente da definição de concatenação de linguagens, porque $x \in LM$ se e só se existem $y \in L$ e $z \in M$ tais que $x = yz$. Mas, se $L = \emptyset$, não existe $y \in L$ para satisfizer a condição. Se $M = \emptyset$, não existe $z \in M$. Logo, $\emptyset R = \emptyset = R\emptyset$. $\square$

Prefixo, sufixo, subpalavra

Seja $x \in \Sigma^\star$ e sejam $y, z, w \in \Sigma^\star$ tais que $x = yzw$.

- y, z e w dizem-se **subpalavras** ou **subsequências** de x
- y diz-se **prefixo** de x
- w diz-se **sufixo** de x

Qualquer subpalavra de x diferente de x, diz-se **subpalavra própria** de x. Do mesmo modo, **prefixos (sufixos) próprios** são prefixos (sufixos) distintos de x.

Exemplo:
Para $x = 01101$ e $\Sigma = \{0, 1\}$:

- os prefixos são ε, 0, 01, 011, 0110, e 01101;
- os sufixos são ε, 1, 01, 101, 1101, e 01101;
- as subpalavras são ε, 0, 1, 01, 11, 10, 011, 110, 101, 0110, 1101 e 01101.

Prefixo, sufixo, subpalavra

Seja $x \in \Sigma^\star$ e sejam $y, z, w \in \Sigma^\star$ tais que $x = yzw$.

- y, z e w dizem-se **subpalavras** ou **subsequências** de x
- y diz-se **prefixo** de x
- w diz-se **sufixo** de x

Qualquer subpalavra de x diferente de x, diz-se **subpalavra própria** de x. Do mesmo modo, **prefixos (sufixos) próprios** são prefixos (sufixos) distintos de x.

Exemplo:
Para $x = 01101$ e $\Sigma = \{0, 1\}$:

- os prefixos são ε, 0, 01, 011, 0110, e 01101;
- os sufixos são ε, 1, 01, 101, 1101, e 01101;
- as subpalavras são ε, 0, 1, 01, 11, 10, 011, 110, 101, 0110, 1101 e 01101.

Exemplos de aplicação

- A linguagem das palavras de $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star$ que **têm** $\mathtt{aa}$ **como prefixo e** $\mathtt{bbb}$ **como sufixo** é
$$\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{bbb}\}$$
pois as suas palavras são da forma $\mathtt{aa}w\mathtt{bbb}$, com $w \in \Sigma^\star$.

- A linguagem das palavras de $\{0,1\}^\star$ que **têm** 00 **como subpalavra** é
$$\{0,1\}^\star\{00\}\{0,1\}^\star$$
pois as suas palavras são da forma $y00w$, com $y, w \in \Sigma^\star$.

- A linguagem das palavras em $\{0,1\}^\star$ que **têm comprimento par** é
$$\{01,10,00,11\}^\star$$
ou, equivalentemente, $(\{0,1\}\{0,1\})^\star$.

Ideia: se x tem comprimento par, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de comprimento 2, sem restrição.

Exemplos de aplicação

- A linguagem das palavras de $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star$ que **têm** aa **como prefixo e** bbb **como sufixo** é
$$\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{bbb}\}$$
pois as suas palavras são da forma $\mathtt{aa}w\mathtt{bbb}$, com $w \in \Sigma^\star$.

- A linguagem das palavras de $\{0,1\}^\star$ que **têm** 00 **como subpalavra** é
$$\{0,1\}^\star\{00\}\{0,1\}^\star$$
pois as suas palavras são da forma $y00w$, com $y, w \in \Sigma^\star$.

- A linguagem das palavras em $\{0,1\}^\star$ que **têm comprimento par** é
$$\{01,10,00,11\}^\star$$
ou, equivalentemente, $(\{0,1\}\{0,1\})^\star$.

Ideia: se x tem comprimento par, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de comprimento 2, sem restrição.

Exemplos de aplicação

- A linguagem das palavras de $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star$ que **têm** aa **como prefixo e** bbb **como sufixo** é
$$\{\mathtt{aa}\}\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{bbb}\}$$
pois as suas palavras são da forma $\mathtt{aa}w\mathtt{bbb}$, com $w \in \Sigma^\star$.

- A linguagem das palavras de $\{0,1\}^\star$ que **têm** 00 **como subpalavra** é
$$\{0,1\}^\star\{00\}\{0,1\}^\star$$
pois as suas palavras são da forma $y00w$, com $y, w \in \Sigma^\star$.

- A linguagem das palavras em $\{0,1\}^\star$ que **têm comprimento par** é
$$\{01,10,00,11\}^\star$$
ou, equivalentemente, $(\{0,1\}\{0,1\})^\star$.

Ideia: se x tem comprimento par, $x = \varepsilon$ ou x é uma sequência finita de palavras de comprimento 2, sem restrição.

Autómatos Finitos Determinísticos (AFDs)

Um **autómato finito determinístico** A é um modelo abstrato de uma máquina, sendo definido por $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, em que

- S é **o conjunto de estados** e é **finito**;
- Σ é o **alfabeto** de símbolos de entrada;
- δ é uma função de $S \times \Sigma$ em S, designada por **função de transição**;
- s_0 é o **estado inicial**;
- $F \subseteq S$ é **o conjunto de estados finais** (estados de aceitação)

A **linguagem reconhecida pelo autómato** é o conjunto das palavras de $\Sigma^\star$ que o levam do estado s_0 a algum estado $s \in F$, sendo completamente processadas.

Imaginamos que a máquina tem uma fita, onde se coloca a palavra x de $\Sigma^\star$ para analisar, e tem uma cabeça de leitura, inicialmente posicionada no símbolo de x mais à esquerda. Irá processar x, símbolo a símbolo, a partir do estado inicial s_0, de acordo com a função δ. Se estiver num estado s e ler a, passa ao estado $\delta(s, a)$ e move a cabeça de leitura para a direita. Dizemos que aceita ou reconhece x se, quando acaba de processar x, está num estado de final (i.e., num estado de F). Caso contrário, rejeita x. Note que, um AFD aceita ε se e só se $s_0 \in F$.

Autómatos Finitos Determinísticos (AFDs)

Um **autómato finito determinístico** A é um modelo abstrato de uma máquina, sendo definido por $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, em que

- S é **o conjunto de estados** e é **finito**;
- Σ é o **alfabeto** de símbolos de entrada;
- δ é uma função de $S \times \Sigma$ em S, designada por **função de transição**;
- s_0 é o **estado inicial**;
- $F \subseteq S$ é **o conjunto de estados finais** (estados de aceitação)

A **linguagem reconhecida pelo autómato** é o conjunto das palavras de $\Sigma^\star$ que o levam do estado s_0 a algum estado $s \in F$, sendo completamente processadas.

Imaginamos que a máquina tem uma fita, onde se coloca a palavra x de $\Sigma^\star$ para analisar, e tem uma cabeça de leitura, inicialmente posicionada no símbolo de x mais à esquerda. Irá processar x, símbolo a símbolo, a partir do estado inicial s_0, de acordo com a função δ. Se estiver num estado s e ler a, passa ao estado $\delta(s, a)$ e move a cabeça de leitura para a direita. Dizemos que aceita ou reconhece x se, quando acaba de processar x, está num estado de final (i.e., num estado de F). Caso contrário, rejeita x. Note que, um AFD aceita ε se e só se $s_0 \in F$.

Autómatos Finitos Determinísticos (AFDs)

Um **autómato finito determinístico** A é um modelo abstrato de uma máquina, sendo definido por $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, em que

- S é **o conjunto de estados** e é **finito**;
- Σ é o **alfabeto** de símbolos de entrada;
- δ é uma função de $S \times \Sigma$ em S, designada por **função de transição**;
- s_0 é o **estado inicial**;
- $F \subseteq S$ é **o conjunto de estados finais** (estados de aceitação)

A **linguagem reconhecida pelo autómato** é o conjunto das palavras de $\Sigma^\star$ que o levam do estado s_0 a algum estado $s \in F$, sendo completamente processadas.

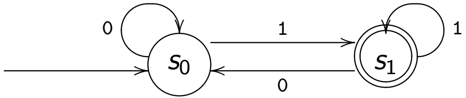
Imaginamos que a máquina tem uma fita, onde se coloca a palavra x de $\Sigma^\star$ para analisar, e tem uma cabeça de leitura, inicialmente posicionada no símbolo de x mais à esquerda. Irá processar x, símbolo a símbolo, a partir do estado inicial s_0, de acordo com a função δ. Se estiver num estado s e ler a, passa ao estado $\delta(s, a)$ e move a cabeça de leitura para a direita. Dizemos que aceita ou reconhece x se, quando acaba de processar x, está num estado de final (i.e., num estado de F). Caso contrário, rejeita x. Note que, um AFD aceita ε se e só se $s_0 \in F$.

Diagrama de transição de um AFD

Um autómato finito pode ser representado esquematicamente por um multigrafo dirigido com símbolos associados aos ramos. Esse multigrafo designa-se por **diagrama de transição** do autómato. Os **nós** correspondem aos estados do autómato. Um **ramo** de s para s' etiquetado por a indica que $\delta(s, a) = s'$.

Convenção: no diagrama, **os estados finais** são representados por duas circunferências e o **estado inicial** é apontado por uma seta.

Exemplo:



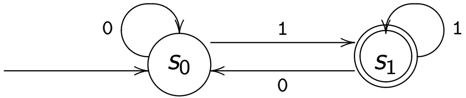
Este AFD reconhece a linguagem das palavras de $\{0, 1\}^\star$ que terminam em 1.

Diagrama de transição de um AFD

Um autómato finito pode ser representado esquematicamente por um multigrafo dirigido com símbolos associados aos ramos. Esse multigrafo designa-se por **diagrama de transição** do autómato. Os **nós** correspondem aos estados do autómato. Um **ramo** de s para s' etiquetado por a indica que $\delta(s, a) = s'$.

Convenção: no diagrama, **os estados finais** são representados por duas circunferências e o **estado inicial** é apontado por uma seta.

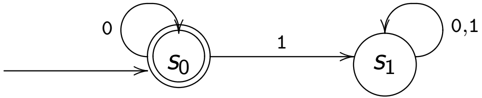
Exemplo:



Este AFD reconhece a linguagem das palavras de $\{0, 1\}^\star$ que terminam em 1.

Exemplos de AFDs

- AFD que reconhece a linguagem das palavras de $\{0,1\}^\star$ que não têm 1's.



Ideia: A palavra é aceite exceto se tiver algum 1. Portanto, se lê 1, vai para s_1 (não aceitação) e aí permanecerá.

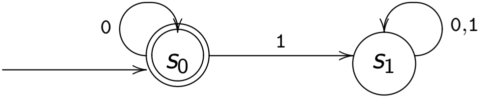
Convenção: um ramo de s para s' com **vários símbolos separados por vírgulas** representa várias transições. No exemplo, $\delta(s_1,0) = s_1$ e $\delta(s_1,1) = s_1$.

- AFD que reconhece a linguagem das palavras de $\{a,b\}^\star$ que têm aa como subpalavra

Ideia: com a muda de s_0 para s_1, pois pode ser o início de aa. Se em s_1 encontra b, volta a s_0, à espera de poder voltar a ver a. Mas, se em s_1 lê a, então passa a s_2 (aceitação) pois formou aa e aí permanece.

Exemplos de AFDs

- AFD que reconhece a linguagem das palavras de $\{0, 1\}^\star$ que não têm 1's.



Ideia: A palavra é aceite exceto se tiver algum 1. Portanto, se lê 1, vai para s_1 (não aceitação) e aí permanecerá.

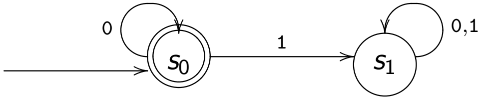
Convenção: um ramo de s para s' com **vários símbolos separados por vírgulas** representa várias transições. No exemplo, $\delta(s_1, 0) = s_1$ e $\delta(s_1, 1) = s_1$.

- AFD que reconhece a linguagem das palavras de $\{a, b\}^\star$ que têm aa como subpalavra

Ideia: com a muda de s_0 para s_1, pois pode ser o início de aa. Se em s_1 encontra b, volta a s_0, à espera de poder voltar a ver a. Mas, se em s_1 lê a, então passa a s_2 (aceitação) pois formou aa e aí permanece.

Exemplos de AFDs

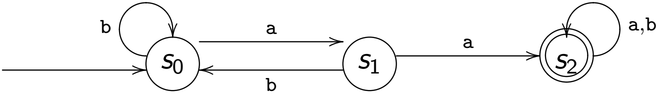
- AFD que reconhece a linguagem das palavras de $\{0,1\}^\star$ que não têm 1's.



Ideia: A palavra é aceite exceto se tiver algum 1. Portanto, se lê 1, vai para s_1 (não aceitação) e aí permanecerá.

Convenção: um ramo de s para s' com **vários símbolos separados por vírgulas** representa várias transições. No exemplo, $\delta(s_1,0) = s_1$ e $\delta(s_1,1) = s_1$.

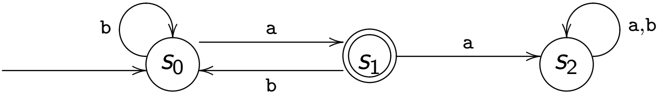
- AFD que reconhece a linguagem das palavras de $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star$ que têm aa como subpalavra



Ideia: com a muda de s_0 para s_1, pois pode ser o início de aa. Se em s_1 encontra b, volta a s_0, à espera de poder voltar a ver a. Mas, se em s_1 lê a, então passa a s_2 (aceitação) pois formou aa e aí permanece.

Exemplos de AFDs

- AFD que reconhece $\{x \mid x \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{a}\}$ e não tem a's consecutivos$\}$, ou seja, o conjunto das palavras de alfabeto $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ que terminam em a e não têm aa como subpalavra.



Os estados memorizam informação sobre o prefixo da palavra consumido desde o estado inicial.

O que memoriza cada estado neste exemplo?

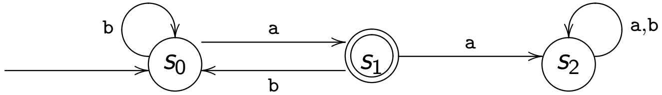
s_0 : não tem aa como subpalavra e não termina em a

s_1 : não tem aa como subpalavra e termina em a

s_2 : tem aa como subpalavra

Exemplos de AFDs

- AFD que reconhece $\{x \mid x \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{a}\}$ e não tem a's consecutivos$\}$, ou seja, o conjunto das palavras de alfabeto $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ que terminam em a e não têm aa como subpalavra.



Os estados memorizam informação sobre o prefixo da palavra consumido desde o estado inicial.

O que memoriza cada estado neste exemplo?

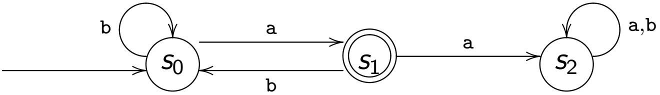
s_0 : não tem aa como subpalavra e não termina em a

s_1 : não tem aa como subpalavra e termina em a

s_2 : tem aa como subpalavra

Exemplos de AFDs

- AFD que reconhece $\{x \mid x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star\{\mathtt{a}\}$ e não tem a's consecutivos$\}$, ou seja, o conjunto das palavras de alfabeto $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ que terminam em a e não têm aa como subpalavra.



Os estados memorizam informação sobre o prefixo da palavra consumido desde o estado inicial.

O que memoriza cada estado neste exemplo?

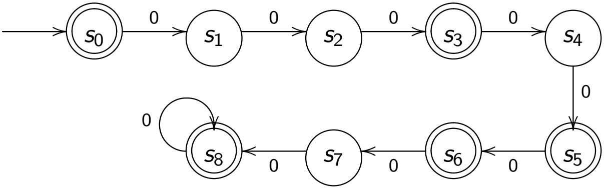
s_0 : não tem aa como subpalavra e não termina em a

s_1 : não tem aa como subpalavra e termina em a

s_2 : tem aa como subpalavra

Exemplos de AFDs

- O menor AFD que reconhece $\{0^3, 0^5\}^\star$ de alfabeto $\{0\}$ é:



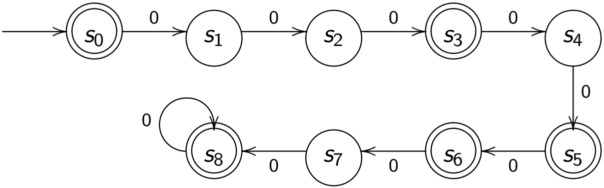
O que memoriza cada estado?

s_k, para $k \leq 7$: o prefixo consumido é 0^k.

s_8: o prefixo consumido é 0^n, com $n \geq 8$.

Exemplos de AFDs

- O menor AFD que reconhece $\{0^3, 0^5\}^\star$ de alfabeto $\{0\}$ é:



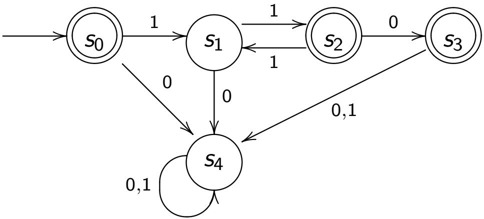
O que memoriza cada estado?

s_k, para $k \leq 7$: o prefixo consumido é 0^k.

s_8: o prefixo consumido é 0^n, com $n \geq 8$.

Exemplos de AFDs

- A linguagem $\{1^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$, de alfabeto $\{0,1\}$, é a linguagem reconhecida, por exemplo, pelo AFD

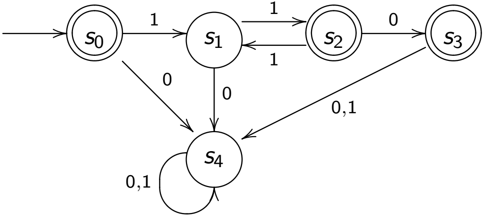


Qual é o conjunto das palavras que levam o AFD de s_0 a cada estado?

De s_0 a s_0: $\{\varepsilon\}$
De s_0 a s_1: $\{1^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ só tem 1's e tem comprimento ímpar$\}$
De s_0 a s_2: $\{1^{2n} \mid n \geq 1\} = \{x \mid x$ só tem 1's e $|x|$ é par e positivo$\}$
De s_0 a s_3: $\{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$
De s_0 a s_4: $\{x \mid x$ tem algum 0 e não é da forma $1^{2n}0$, para $n \geq 1\}$

Exemplos de AFDs

- A linguagem $\{1^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$, de alfabeto $\{0,1\}$, é a linguagem reconhecida, por exemplo, pelo AFD



Qual é o conjunto das palavras que levam o AFD de s_0 a cada estado?

De s_0 a s_0: $\{\varepsilon\}$

De s_0 a s_1: $\{1^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ só tem 1's e tem comprimento ímpar$\}$

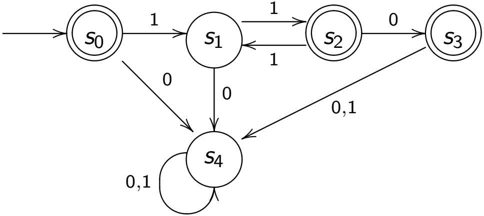
De s_0 a s_2: $\{1^{2n} \mid n \geq 1\} = \{x \mid x$ só tem 1's e $|x|$ é par e positivo$\}$

De s_0 a s_3: $\{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$

De s_0 a s_4: $\{x \mid x$ tem algum 0 e não é da forma $1^{2n}0$, para $n \geq 1\}$

Exemplos de AFDs

- A linguagem $\{1^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$, de alfabeto $\{0, 1\}$, é a linguagem reconhecida, por exemplo, pelo AFD



Qual é o conjunto das palavras que levam o AFD de s_0 a cada estado?

De s_0 a s_0: $\{\varepsilon\}$

De s_0 a s_1: $\{1^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ só tem 1's e tem comprimento ímpar$\}$

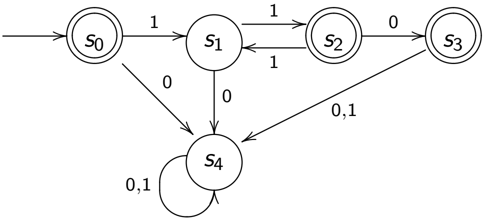
De s_0 a s_2: $\{1^{2n} \mid n \geq 1\} = \{x \mid x$ só tem 1's e $|x|$ é par e positivo$\}$

De s_0 a s_3: $\{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$

De s_0 a s_4: $\{x \mid x$ tem algum 0 e não é da forma $1^{2n}0$, para $n \geq 1\}$

Exemplos de AFDs

- A linguagem $\{1^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$, de alfabeto $\{0,1\}$, é a linguagem reconhecida, por exemplo, pelo AFD



Qual é o conjunto das palavras que levam o AFD de s_0 a cada estado?

De s_0 a s_0: $\{\varepsilon\}$

De s_0 a s_1: $\{1^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ só tem 1's e tem comprimento ímpar$\}$

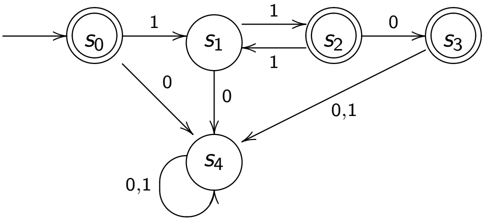
De s_0 a s_2: $\{1^{2n} \mid n \geq 1\} = \{x \mid x$ só tem 1's e $|x|$ é par e positivo$\}$

De s_0 a s_3: $\{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$

De s_0 a s_4: $\{x \mid x$ tem algum 0 e não é da forma $1^{2n}0$, para $n \geq 1\}$

Exemplos de AFDs

- A linguagem $\{1^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$, de alfabeto $\{0,1\}$, é a linguagem reconhecida, por exemplo, pelo AFD



Qual é o conjunto das palavras que levam o AFD de s_0 a cada estado?

De s_0 a s_0: $\{\varepsilon\}$

De s_0 a s_1: $\{1^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ só tem 1's e tem comprimento ímpar$\}$

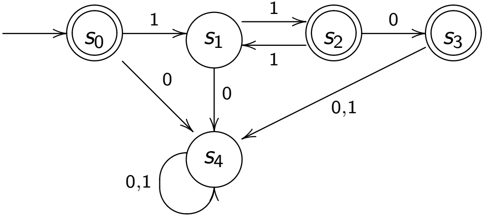
De s_0 a s_2: $\{1^{2n} \mid n \geq 1\} = \{x \mid x$ só tem 1's e $|x|$ é par e positivo$\}$

De s_0 a s_3: $\{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$

De s_0 a s_4: $\{x \mid x$ tem algum 0 e não é da forma $1^{2n}0$, para $n \geq 1\}$

Exemplos de AFDs

- A linguagem $\{1^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$, de alfabeto $\{0,1\}$, é a linguagem reconhecida, por exemplo, pelo AFD



Qual é o conjunto das palavras que levam o AFD de s_0 a cada estado?

De s_0 a s_0: $\{\varepsilon\}$

De s_0 a s_1: $\{1^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ só tem 1's e tem comprimento ímpar$\}$

De s_0 a s_2: $\{1^{2n} \mid n \geq 1\} = \{x \mid x$ só tem 1's e $|x|$ é par e positivo$\}$

De s_0 a s_3: $\{1^{2n}0 \mid n \geq 1\}$

De s_0 a s_4: $\{x \mid x$ tem algum 0 e não é da forma $1^{2n}0$, para $n \geq 1\}$

Problema de Programação Imperativa

Simulador de AFDs

Escrever um programa em C que, dada a descrição de um AFD com alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ e dadas palavras de $\Sigma^\star$, indica se o AFD aceita ou rejeita cada uma das palavras. Admita que, se o AFD tiver n estados, os estados são identificados por inteiros de 1 a n. Pode admitir que $n \leq 20$ e que as palavras têm no máximo comprimento 50.

Input

Na primeira linha, tem o número n de estados do AFD e o identificador do estado inicial.

Segue-se uma linha com o número de estados finais (que pode ser 0) e os seus identificadores. A seguir tem $2n^2$ linhas que descrevem as transições: cada uma tem três inteiros $s\ a\ s'$, e indica que $\delta(s, a) = s'$.

Depois tem o número de palavras a analisar e, nas linhas seguintes, essas palavras.

Output

Uma linha por cada palavra, com a indicação `aceite` ou `rejeitada`.