Enunciado com justificações sucintas

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

U.PORTO

Cálculo I (M1001) **(Modelo) - 1ª parte** **11/12/2020**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\longleftarrow$ Indique o seu número de estudante, preenchendo em cada coluna o quadrado **à esquerda** do algarismo correspondente.
Para eventual confirmação, preencha o retângulo abaixo.

Nome completo:

Número de estudante:

Duração: 75 minutos Cotação: 12 valores

Pode utilizar uma ***calculadora científica não gráfica*** *e o formulário disponibilizado. Para além da calculadora, não é permitido o uso de qualquer equipamento eletrónico, incluindo telemóvel.*
A resposta a cada questão de resposta à escolha deve ser dada preenchendo o quadrado respetivo de forma a permitir a leitura automática.
Na ausência de indicação, as notações são as habitualmente usadas nas aulas.

Questões de tipo *verdadeiro ou falso*. (2 valores)
Cada resposta correta vale 0.5 valores, valendo cada resposta errada -0.3 valores. Cada questão não respondida tem a cotação de 0 pontos.

Questão 1 "Se $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ não existe." é uma afirmação

☐ falsa. ■ verdadeira.

Justificação: O limite não existe porque $f(x)/g(x)$ não se aproxima de nenhum número real quando x se aproxima de 3, já que o denominador se aproxima de 0 mas o numerador não.

Questão 2 "Se f é contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$." é uma afirmação

☐ falsa. ■ verdadeira.

Justificação: Como $3 < \pi < 4$, a existência de r é garantida pelo Teorema dos Valores Intermédios.

Questão 3 "Se $f(x) = \left(x^6 - x^4\right)^5$, então $f^{(31)}(x) = 0$." é uma afirmação

■ verdadeira. ☐ falsa.

Justificação: $f(x) = \left(x^6 - x^4\right)^5$ é um polinómio de grau 30; a sua derivada de ordem 31 é 0.

Enunciado com justificações sucintas

Questão 4 "Existe uma função f derivável no intervalo $I = (0, 5)$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ e $f'(x) > 1$ para todo o $x \in I$." é uma afirmação

☐ verdadeira. ■ falsa.

Justificação: Suponhamos que existe uma tal função f. Então, pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{0-(-2)}{2} = 1$. Isto contradiz o ter-se $f'(x) > 1$ para todo o x.

Enunciado com justificações sucintas

Questões de tipo *resposta múltipla*. (6 valores)
Cada resposta correta vale 1 valor. Não há qualquer desconto por resposta errada.

Questão 1 Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x + \operatorname{sen} 2x}$

- [ ] $-\infty$
- [ ] 0
- [x] $\dfrac{4}{3}$
- [ ] $\dfrac{1}{2}$
- [ ] não existe
- [ ] $+\infty$
- [ ] 2
- [ ] 1

Justificação: São satisfeitas as condições para aplicar a regra de L'Hôpital.
$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x+\sin 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 4x}{1+2\cos 2x} = \frac{4\cdot 1}{1+2\cdot 1} = \frac{4}{3}$.

Questão 2 Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$

- [ ] $\dfrac{1}{6}$
- [ ] 1
- [ ] 4
- [ ] não existe
- [ ] 0
- [x] $\dfrac{2}{7}$
- [ ] -3
- [ ] $+\infty$

Justificação: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^2-1\right)}{x^2+5x-6} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+6)(x-1)} = \lim\limits_{a\to 1} \dfrac{x+1}{x+6} = \dfrac{2}{7}$. Alternativamente, pode usar-se a regra de L'Hôpital.

Questão 3 Sendo $f(x) = \ln(x \ln x)$, calcule $f'(e^2)$.

- [ ] $2e^2$
- [ ] 1
- [ ] $-\dfrac{1}{e^2}$
- [ ] $\dfrac{1}{2e^2}$
- [x] $\dfrac{3}{2e^2}$
- [ ] $\ln(2e^2)$
- [ ] 0
- [ ] não existe

Justificação: $f'(x) = \frac{1}{x\ln x}(x\ln x)' = \frac{1}{x \ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\ln x}{x\ln x}$. Assim, $f'(e^2) = \frac{1+\ln e^2}{e^2\cdot \ln e^2} = \frac{1+2}{e^2\cdot 2} = \frac{3}{2e^2}$.

Questão 4 Sendo $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$, calcule $f'(1)$.

- [ ] 1
- [ ] $\dfrac{1}{2e^2}$
- [x] $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$
- [ ] $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$
- [ ] $2e^2$
- [ ] 0
- [ ] não existe
- [ ] $-\dfrac{1}{e^2}$

Justificação: $f'(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)}$. Assim, $f'(1) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\pi/4}\cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

Questão 5 Calcule o declive da tangente à curva $xe^y = y \operatorname{sen} x + \pi e^4$ no ponto $(\pi, 4)$.

- [x] $\dfrac{-4-e^4}{\pi e^4}$
- [ ] $2+e^2$
- [ ] $\dfrac{1}{2e^2}$
- [ ] $-\dfrac{1}{e^2}$
- [ ] πe^4
- [ ] 1
- [ ] $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$
- [ ] 0

Justificação: Usando derivação implícita, tem-se:
$\frac{d}{dx}\left(xe^y\right) = \frac{d}{dx}(y\operatorname{sen} x + \pi e^4) \Rightarrow xe^y y' + e^y\cdot 1 = y\cos x + \operatorname{sen} x\cdot y' \Rightarrow xe^y y' - \operatorname{sen} x\cdot y' = y\cos x - e^y \Rightarrow y' = \frac{y\cos x - e^y}{xe^y - \operatorname{sen} x}$.
Assim, no ponto $(\pi, 4)$ tem-se que y' vale $\frac{-4-e^4}{\pi e^4}$.

Enunciado com justificações sucintas

Questão 6 Encontre o máximo absoluto da função $f(x) = x\sqrt{1-x}$ no intervalo $[-1, 1]$.

- ☐ $\dfrac{1}{2e^2}$
- ■ $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$
- ☐ $\pi e/4$
- ☐ $2e^2$
- ☐ $-\sqrt{2}$
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

Justificação: $f'(x) = \sqrt{(1-x)} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left((1-x) - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1-\frac{3}{2}x}{\sqrt{1-x}}$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$; $f'(x)$ não existe se e só se $x = 1$.
$f'(x) > 0$ para $-1 < x < \frac{2}{3}$ e $f'(x) < 0$ para $\frac{2}{3} < x < 1$, pelo que $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ é um máximo local.
Nos extremos do intervalo tem-se $f(-1) = -\sqrt{2}$ e $f(1) = 0$.
Logo, $f(-1) = -\sqrt{2}$ é o mínimo absoluto e $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ é o máximo absoluto.

Nome completo:

Responda por extenso (de modo sucinto).

Enunciado com justificações sucintas

Questão 1 (4 valores) (Para responder use o espaço abaixo ou o verso da folha.)
Considere a função $f(x) = \frac{1+x\ln x}{x}$. O objetivo deste exercício é esboçar o gráfico de f. Para o efeito, deve fazer o indicado em cada uma das seguintes alíneas (onde também se indica a parte cotação total da pergunta que lhe corresponde.)

1. (1 valor) encontre as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais ao gráfico de f;
2. (1 valor) encontre os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;
3. (0.25 valores) encontre os máximos e os mínimos locais de f;
4. (1 valor) encontre os intervalos onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e aqueles onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
5. (0.25 valores) encontre os pontos de inflexão do gráfico de f;
6. (0.5 valores) use as informações das alíneas anteriores para esboçar o gráfico de f.

.... ☐0 ☐ ☐0.5 ☐ ☐1 ☐ ☐1.5 ☐ ☐2 ☐ ☐2.5 ☐ ☐1 ☐ ☐3.5 ☐ ■4

Justificação:

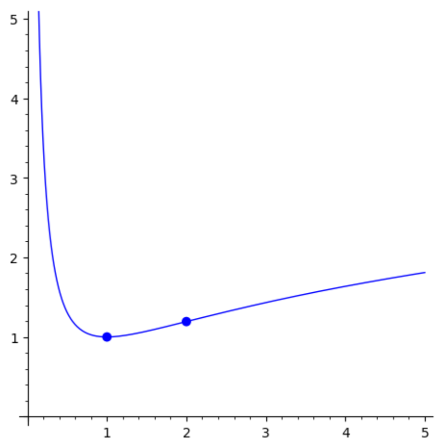
1. O domínio de f é $(0, +\infty)$, o domínio de $\ln x$. A função é contínua, pelo que a única candidata a assíntota vertical é a reta de equação $x = 0$.
   Tem-se $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x\ln x}{x} = +\infty$, pelo que $x = 0$ é assíntota vertical.
   Não há nenhuma assíntota horizontal, pois: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x\ln x}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x/x}{1} = \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$
2. Tem-se $f'(x) = \frac{(\ln x+1)\cdot x-(1+x\ln x)}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Como x^2 é positivo para todo o x do domínio de f, o sinal de $f'(x)$ depende apenas do sinal de $x-1$. Obtemos então a tabela seguinte onde estão indicados os intervalos de crescimento e de decrescimento:

Intervalo	$x-1$	$f'(x)$	f
$(0,1)$	$-$	$-$	↘
$(1,+\infty)$	$+$	$+$	↗

3. Da alínea anterior sabe-se que f decresce em $(0,1)$ e cresce em $(1,+\infty)$, pelo que $f(1) = 1$ é um mínimo local, o qual é único.
4. Tem-se $f''(x) = \frac{x^2-2x(x-1)}{x^4} = \frac{-x^2+2x}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$. Como $x \in (0,+\infty)$ tem-se que x^3 é positivo, pelo que o sinal de $f''(x)$ depende apenas do final de $-x+1$. Obtemos a tabela seguinte, onde se indicam as concavidades:

Intervalo	$-x+1$	$f''(x)$	f
$(0,2)$	$+$	$+$	$\smile$
$(2,+\infty)$	$-$	$-$	$\frown$

5. Da alínea anterior sabe-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $(2,0)$ e voltada para baixo em $(2,+\infty)$, pelo que $(2, f(2)) = (2, 1+\ln 2)$ é um ponto de inflexão, o qual é único.
6. Note-se que $1+\ln 2 \simeq 1.7$ e que o gráfico não interseta os eixos coordenados.



Enunciado com justificações sucintas