Departamento de Ciência de Computadores — FCUP

Modelos de Computação (CC1004) — 2014/15

1º Teste – 11.04.2015 **Uma resolução (v2)** *duração: 2h + 30m*

1. Seja $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ e seja r a expressão $((1+2)((0^\star)(1+2)))$.

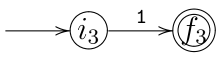
a) Baseando-se na definição de expressão regular, mostre que r é uma expressão regular sobre Σ.

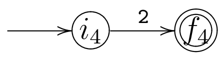
Resposta:
Uma expressão regular sobre Σ é qualquer sequência finita de símbolos de $\Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, +, *,), (\}$ que se possa obter por aplicação das regras seguintes: ε, $\emptyset$, 0, 1 e 2 são expressões regulares sobre Σ; se r e s são expressões regulares sobre Σ então $(r+s)$, (rs) e $(r^\star)$ são expressões regulares sobre Σ.

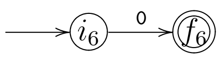
Assim, r é uma expressão regular sobre Σ pois $r = (r_1 r_2)$, com $r_1 = (1+2)$ e $r_2 = ((0^\star)(1+2))$, e $r_1 = (r_3 + r_4)$, com $r_3 = 1$ e $r_4 = 2$, e $r_2 = (r_5 r_1)$, com $r_5 = (0^\star)$. Por sua vez, $r_5 = (r_6^\star)$, com $r_6 = 0$.

b) Determine o autómato finito que resulta da aplicação do método de Thompson à expressão regular r. Apresente **os passos relevantes** dessa construção.

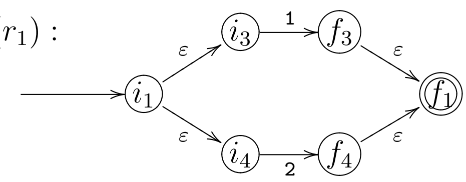
Resposta:
Na continuação da resposta anterior, os AFNDs-ε para r_3, r_4, e r_6 são:

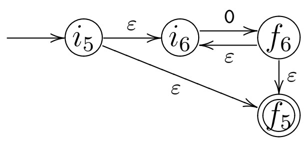
$A(r_3)$: 

$A(r_4)$: 

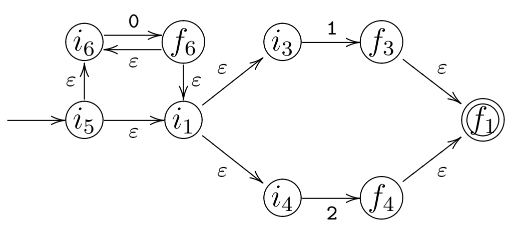
$A(r_6)$: 

Os AFNDs-ε para $r_1 = (r_3 + r_4)$ e $r_5 = (r_6^\star)$ são:

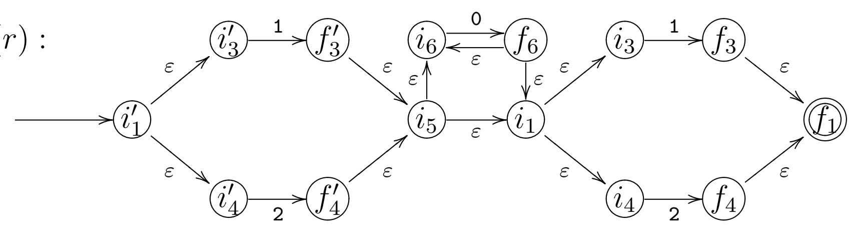
$A(r_1)$: 

$A(r_5)$: 

A partir dos AFNDs-ε $A(r_5)$ e $A(r_1)$ construimos o autómato $A(r_2)$ para $r_2 = (r_5 r_1)$, por identificação do estado inicial de $A(r_1)$ com o final de $A(r_5)$.

$A(r_2)$: 

Com um clone de $A(r_1)$ e $A(r_2)$, construimos o autómato $A(r)$:

$A(r)$: 

c) Apresente a expressão r na forma *abreviada*, retirando parentesis desnecessários, e descreva informalmente a linguagem de $\Sigma^\star$ que é caraterizada pela expressão regular r.

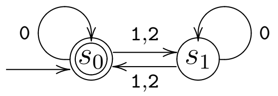
Resposta:
A expressão abreviada é $(\mathtt{1}+\mathtt{2})\mathtt{0}^\star(\mathtt{1}+\mathtt{2})$.

A linguagem descrita pela expressão r é o conjunto das palavras de $\{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}^\star$ que não começam nem terminam em 0 e têm exatamente dois símbolos que não são 0.

d) Descreva informalmente a linguagem descrita pela expressão regular $((r+\mathtt{0})^\star)$. Partindo dessa descrição, determine um AFD que reconheça tal linguagem. Justifique sucintamente a correção da resposta, descrevendo o que memoriza cada estado (e explicando a necessidade das mudanças de estado).

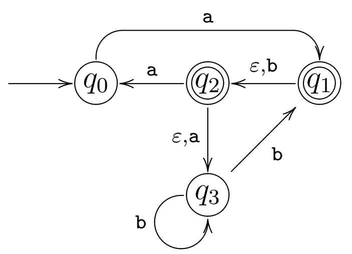
Resposta:
A linguagem descrita pela expressão indicada é o conjunto das palavras de $\{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}^\star$ em que o número de símbolos distintos de 0 é par.

A linguagem é reconhecida pelo AFD seguinte:



As palavras que levam este AFD do estado inicial s_0 ao estado s_1 são as que têm número ímpar de símbolos distintos de 0. As palavras cujo número total de 1's e 2's é par levam o autómato do estado s_0 ao estado s_0. Os dois estados são necessários porque apenas as palavras que têm número par de símbolos distintos de 0 pertencem à linguagem.

2. Seja $A = (S, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o autómato finito não determinístico com transições por ε representado pelo diagrama seguinte, com alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.



a) Qual é o valor de $\delta(q_0, \mathtt{b})$, $\delta(q_2, \mathtt{a})$, $\delta(q_3, \varepsilon)$, e $\delta(q_1, \varepsilon)$? Justifique sucintamente.

Resposta:
A função de transição δ do AFND-ε $A = (S, \Sigma, \delta, q_0, F)$ é uma função de $S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ em 2^S. O diagrama de transição tem um arco de s para s' com etiqueta α se e só se $s' \in \delta(s, \alpha)$. Se houver várias transições de um estado para outro (ou para si próprio), essas transições representam-se por um único arco, com os símbolos correspondentes separados por vírgulas.

Assim, $\delta(q_0, \mathtt{b}) = \emptyset$, $\delta(q_2, \mathtt{a}) = \{q_0, q_3\}$, $\delta(q_3, \varepsilon) = \emptyset$, $\delta(q_1, \varepsilon) = \{q_2\}$.

b) Determine $\hat{\delta}(\{q_0\}, \texttt{aab})$. Apresente os cálculos intermédios.

Resposta:

$\hat{\delta}(\{q_0\}, \texttt{aab}) = \hat{\delta}(Fecho_\varepsilon(\{q_1\}), \texttt{ab}) = \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3\}, \texttt{ab}) = \hat{\delta}(Fecho_\varepsilon(\{q_0, q_3\}), \texttt{b}) = \hat{\delta}(\{q_0, q_3\}, \texttt{b}) = \hat{\delta}(Fecho_\varepsilon(\{q_1, q_3\}), \varepsilon) = Fecho_\varepsilon(\{q_1, q_3\}) = \{q_1, q_2, q_3\}$.

(a definição de $\hat{\delta}$ que estamos a seguir está em **2e)**)

c) Que interpretação tem $\hat{\delta}(\{q_0\}, \texttt{aab})$? É verdade ou é falso que $\texttt{aab} \in \mathcal{L}(A)$? Justifique.

Resposta:

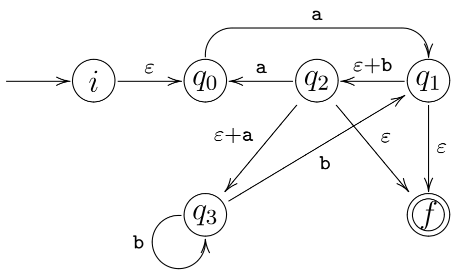
$\hat{\delta}(\{q_0\}, \texttt{aab})$ representa o conjunto de estados em que o autómato se pode encontrar se consumir a palavra aab partindo do estado q_0 (estado inicial do autómato).

A palavra aab pertence a $\mathcal{L}(A)$ porque $\hat{\delta}(\{q_0\}, \texttt{aab}) = \{q_1, q_2, q_3\}$ contém estados finais (os estados q_1 e q_2).

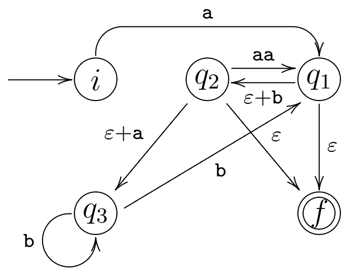
d) Por aplicação do método de eliminação de estados, determine uma expressão regular que descreva a linguagem que A reconhece. Deverá apresentar os passos intermédios da aplicação do algoritmo. Pode apresentar expressões abreviadas, usando as propriedades e precedência das operações para retirar parentesis desnecessários. Sempre que for óbvio, simplifique as expressões obtidas em cada passo.

Resposta:

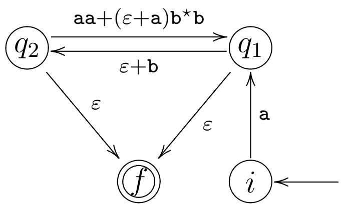
Todos os estados do autómato são acessíveis do estado inicial e permitem aceder a algum estado final. Assim, não há estados que se possam eliminar por serem inutéis.
Começamos por substituir os estados finais por um único estado final f (do qual não saem transições). Inserimos um novo estado inicial i, para garantir que não chegam transições ao estado inicial. Substituimos as etiquetas dos ramos por expressões regulares.



Eliminamos q_0, substituindo os percursos $q_2q_0q_1$ e iq_0q_1 por arcos (q_2, q_1) e (i, q_1), com etiquetas aa e $\varepsilon\texttt{a} \equiv \texttt{a}$, respetivamente.



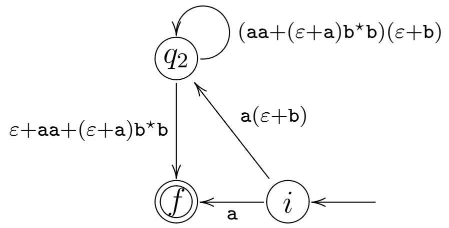
Eliminamos q_3, substituindo o percurso $q_2q_3q_3^\star q_1$ por um arco (q_2, q_1) com etiqueta $(\varepsilon + \texttt{a})\texttt{b}^\star\texttt{b}$. Como já existia um arco de q_2 para q_1, substituimos a sua expressão por $\texttt{aa} + (\varepsilon + \texttt{a})\texttt{b}^\star\texttt{b}$.



Eliminamos q_1, substituindo os percursos iq_1f, iq_1q_2, q_2q_1f, e $q_2q_1q_2$ por arcos (i, f), (i, q_2) , (q_2, f) e (q_2, q_2) com expressões $\texttt{a}$, $\texttt{a}(\varepsilon + \texttt{b})$, $\texttt{aa} + (\varepsilon + \texttt{a})\texttt{b}^\star\texttt{b}$ e $(\texttt{aa} + (\varepsilon + \texttt{a})\texttt{b}^\star\texttt{b})(\varepsilon + \texttt{b})$.

(cont.)

Resposta 2d) cont.:



Eliminando q_2, por substituição de percursos $iq_2q_2^\star f$ por um arco (i, f), obtém-se a expressão para $\mathcal{L}(A)$:

$$\mathtt{a} + (\mathtt{a} + \mathtt{ab})((\mathtt{aa} + (\varepsilon + \mathtt{a})\mathtt{b}^\star\mathtt{b})(\varepsilon + \mathtt{b}))^\star(\varepsilon + \mathtt{aa} + (\varepsilon + \mathtt{a})\mathtt{b}^\star\mathtt{b}).$$

Nota adicional: a expressão é equivalente a $\mathtt{a} + (\mathtt{a} + \mathtt{ab})(\mathtt{aa} + \mathtt{b} + \mathtt{ab})^\star$ porque

$$((\mathtt{aa} + (\varepsilon + \mathtt{a})\mathtt{b}^\star\mathtt{b})(\varepsilon + \mathtt{b}))^\star \equiv (\mathtt{aa} + \mathtt{bb}^\star + \mathtt{ab}^\star\mathtt{b} + \mathtt{aab} + \mathtt{bb}^\star\mathtt{b} + \mathtt{ab}^\star\mathtt{bb})^\star \equiv (\mathtt{aa} + \mathtt{b} + \mathtt{ab})^\star$$

e $(\mathtt{aa} + \mathtt{b} + \mathtt{ab})^\star(\varepsilon + \mathtt{aa} + (\varepsilon + \mathtt{a})\mathtt{b}^\star\mathtt{b}) \equiv (\mathtt{aa} + \mathtt{b} + \mathtt{ab})^\star$.

e) Por aplicação do método de conversão descrito nas aulas para obter um AFD equivalente a um dado AFND-ε, determine o diagrama de transição de um AFD equivalente ao autómato A. Explique.

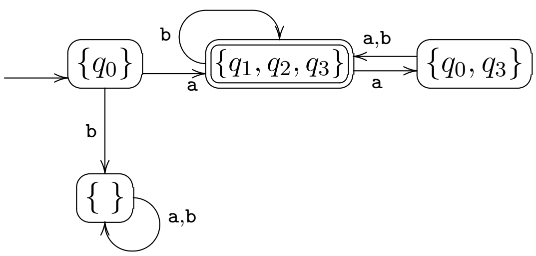
Resposta:
O AFD $A' = (2^S, \Sigma, \delta', Fecho_\varepsilon(q_0), F')$, com $F' = \{E \mid E \in 2^S \text{ e } E \cap F \neq \emptyset\}$ e

$$\delta'(E, a) = Fecho_\varepsilon\left(\bigcup_{s \in Fecho_\varepsilon(E)} \delta(s, a)\right) = \hat{\delta}(E, a)$$

para todo $E \in 2^S$ e $a \in \Sigma$, é equivalente ao AFND-ε $A = (S, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Por definição, $Fecho_\varepsilon(s) = \{s\} \cup \{s' \mid \text{existe um percurso de } s \text{ para } s' \text{ formado por transições-}\varepsilon\}$ e $Fecho_\varepsilon(E) = \bigcup_{s \in E} Fecho_\varepsilon(s)$.

Como o número de estados deste AFD genérico é exponencial no número de estados do AFND-ε dado, vamos tentar obter um AFD com menos estados, criando apenas os estados que são acessíveis do seu estado inicial $Fecho_\varepsilon(q_0) = \{q_0\}$. Obtém-se o seguinte AFD.



3. Seja L a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ que é aceite pelo AFD $A = (\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \Sigma, \delta, s_1, F)$, com $F = \{s_1, s_3\}$ e δ dada pela tabela representada à esquerda.

	a	b
s_1	s_4	s_2
s_2	s_4	s_3
s_3	s_4	s_3
s_4	s_5	s_2
s_5	s_1	s_2

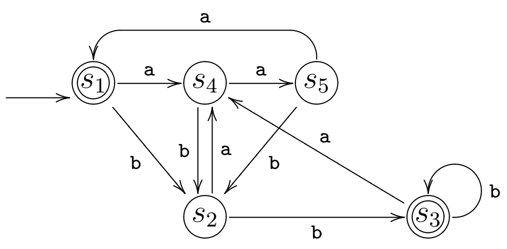
a) Desenhe o diagrama de transição de A e descreva informalmente L.

b) Diga, justificando, se o AFD dado é o AFD mínimo para L.

c) Assuma que, para aplicação do método de Kleene a A, se designa o estado s_i apenas pelo símbolo i, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Indique uma expressão regular (abreviada) que descreva a linguagem $\mathcal{L}(r_{13}^{(3)})$. Justifique sucintamente.

Resposta:

3a)



L é o conjunto das sequências finitas de a's e b's que terminam em bb mas não num único b ou em que o número de a's depois do último b é múltiplo positivo de três. Se não tiverem b's, têm um número de a's que é multiplo de três, podendo ser zero.

3b)

Sendo R_L a relação do teorema de Myhill-Nerode que carateriza o AFD mínimo para L, temos:

$(\varepsilon, \mathtt{a}) \notin R_L$ pois $\varepsilon \in L$ e $\mathtt{a} \notin L$.

$(\varepsilon, \mathtt{b}) \notin R_L$ pois $\varepsilon\mathtt{b} \notin L$ e $\mathtt{bb} \in L$.

$(\mathtt{b}, \mathtt{a}) \notin R_L$ pois $\mathtt{baa} \notin L$ e $\mathtt{aaa} \in L$.

$(\varepsilon, \mathtt{aa}) \notin R_L$ pois $\varepsilon \in L$ e $\mathtt{aa} \notin L$.

$(\mathtt{a}, \mathtt{aa}) \notin R_L$ pois $\mathtt{aa} \notin L$ e $\mathtt{aaa} \in L$.

$(\mathtt{b}, \mathtt{aa}) \notin R_L$ pois $\mathtt{ba} \notin L$ e $\mathtt{aaa} \in L$.

$(\varepsilon, \mathtt{bb}) \notin R_L$ pois $\varepsilon\mathtt{b} \notin L$ e $\mathtt{bbb} \in L$.

$(\mathtt{a}, \mathtt{bb}) \notin R_L$ pois $\mathtt{a} \notin L$ e $\mathtt{bb} \in L$.

$(\mathtt{b}, \mathtt{bb}) \notin R_L$ pois $\mathtt{b} \notin L$ e $\mathtt{bb} \in L$.

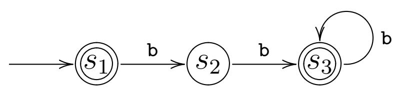
$(\mathtt{aa}, \mathtt{bb}) \notin R_L$ pois $\mathtt{aaa} \in L$ e $\mathtt{bba} \notin L$.

Então, o AFD mínimo para L tem pelo menos cinco estados ($[\varepsilon]$, $[\mathtt{a}]$, $[\mathtt{b}]$, $[\mathtt{aa}]$ e $[\mathtt{bb}]$), e como $L = \mathcal{L}(A)$ e A é um AFD com cinco estados, então A é o AFD mínimo para L.

3c)

No método de Kleene, a expressão regular $r_{ij}^{(k)}$ descreve a linguagem das palavras que levam o autómato do estado i ao estado j, podendo passar por estados *intermédios* numerados até k (inclusivé).

Assim, a $\mathcal{L}(r_{13}^{(3)})$ é descrita pela expressão regular $\mathtt{bbb}^\star$ pois apenas podemos considerar palavras que correspondem a percursos do estado s_1 para o estado s_3 que não passem em s_4 nem s_5, o que restringe a análise ao diagrama seguinte:



(Fim)