CC1004 - Modelos de Computação
Teórica 15

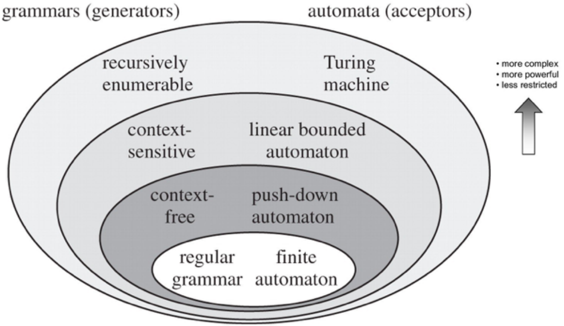
Ana Paula Tomás

Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Abril 2021

Linguagens independentes de contexto (LICs)

- **Context-free grammars**: Gramáticas independentes de contexto (GICs) ou livres de contexto
- **Push-down automata**: Autómatos de pilha



Chomsky Hierarchy Levels. Source: Fitch. 2014.

Introdução às GICs e LICs

Exemplo 1

Seja L a linguagem de alfabeto $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ das palavras obtidas por aplicação, *uma ou mais vezes*, das regras seguintes.

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{r1}) & \mathtt{aaa} \in L \\ (\mathrm{r2}) & \alpha\mathtt{bb}\beta \in L, \text{ quaisquer que sejam } \alpha, \beta \in L. \end{array}$$

Podemos representar (i) e (ii) pelas duas **regras** seguintes

$$\begin{array}{lcl} <\!\mathit{Palavra}\!> & \rightarrow & \mathtt{aaa} \\ <\!\mathit{Palavra}\!> & \rightarrow & <\!\mathit{Palavra}\!>\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \end{array}$$

as quais definem a **categoria gramatical** $<\!\mathit{Palavra}\!>$, dizendo que uma $<\!\mathit{Palavra}\!>$ é aaa ou a justaposição de três sequências — uma qualquer $<\!\mathit{Palavra}\!>$, bb e uma qualquer $<\!\mathit{Palavra}\!>$.

Podemos **gerar palavras** por aplicação das **regras de derivação**:

$$<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow <\!\mathit{Palavra}\!>\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow \mathtt{aaa}\,\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow \mathtt{aaabb}\,\mathtt{aaa}$$

Introdução às GICs e LICs

Exemplo 1

Seja L a linguagem de alfabeto $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ das palavras obtidas por aplicação, *uma ou mais vezes*, das regras seguintes.

$$\begin{array}{ll} \text{(r1)} & \mathtt{aaa} \in L \\ \text{(r2)} & \alpha\mathtt{bb}\beta \in L, \text{ quaisquer que sejam } \alpha, \beta \in L. \end{array}$$

Podemos representar (i) e (ii) pelas duas **regras** seguintes

$$\begin{array}{lcl} <\!\mathit{Palavra}\!> & \to & \mathtt{aaa} \\ <\!\mathit{Palavra}\!> & \to & <\!\mathit{Palavra}\!>\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \end{array}$$

as quais definem a **categoria gramatical** $<\!\mathit{Palavra}\!>$, dizendo que uma $<\!\mathit{Palavra}\!>$ é aaa ou a justaposição de três sequências — uma qualquer $<\!\mathit{Palavra}\!>$, bb e uma qualquer $<\!\mathit{Palavra}\!>$.

Podemos **gerar palavras** por aplicação das **regras de derivação**:

$$<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow <\!\mathit{Palavra}\!>\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow \mathtt{aaa}\,\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow \mathtt{aaabb}\,\mathtt{aaa}$$

Introdução às GICs e LICs

Exemplo 1

Seja L a linguagem de alfabeto $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ das palavras obtidas por aplicação, *uma ou mais vezes*, das regras seguintes.

$$\begin{array}{ll} \text{(r1)} & \mathtt{aaa} \in L \\ \text{(r2)} & \alpha\mathtt{bb}\beta \in L, \text{ quaisquer que sejam } \alpha, \beta \in L. \end{array}$$

Podemos representar (i) e (ii) pelas duas **regras** seguintes

$$\begin{array}{lcl} <\!\mathit{Palavra}\!> & \to & \mathtt{aaa} \\ <\!\mathit{Palavra}\!> & \to & <\!\mathit{Palavra}\!>\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \end{array}$$

as quais definem a **categoria gramatical** $<\!\mathit{Palavra}\!>$, dizendo que uma $<\!\mathit{Palavra}\!>$ é $\mathtt{aaa}$ ou a justaposição de três sequências — uma qualquer $<\!\mathit{Palavra}\!>$, $\mathtt{bb}$ e uma qualquer $<\!\mathit{Palavra}\!>$.

Podemos **gerar palavras** por aplicação das **regras de derivação**:

$$<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow <\!\mathit{Palavra}\!>\mathtt{bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow \mathtt{aaa\,bb}<\!\mathit{Palavra}\!> \Rightarrow \mathtt{aaabb\,aaa}$$

Introdução às GICs e LICs

Alternativamente, como $L = \mathcal{L}((\texttt{aaabb})^\star\texttt{aaa})$, podemos ainda definir L como sendo a **linguagem gerada** por aplicação das regras:

$$
\begin{array}{lcl}
<\!\mathit{Palavra}\!> & \rightarrow & \texttt{aaa} \\
<\!\mathit{Palavra}\!> & \rightarrow & \texttt{aaabb}<\!\mathit{Palavra}\!>
\end{array}
$$

Introdução às GICs e LICs

Exemplo 2

Seja $L_1 = \{0^{2k}1^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. A linguagem L_1 é o menor subconjunto de $\{0,1\}^\star$ que satisfaz as duas condições (i) e (ii) seguintes.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \varepsilon \in L_1 \\ \text{(ii)} & \forall x \in L_1 \quad 00x1 \in L_1 \end{array}$$

Equivalentemente, podemos dizer que L_1 é constituída pelas palavras que podem ser obtidas por aplicação, uma ou mais vezes, das regras (r_1) e (r_2) seguintes

$$\begin{array}{ll} (r_1) & \varepsilon \in L_1 \\ (r_2) & \text{Qualquer que seja } x\text{, se } x \in L_1 \text{ então } 00x1 \in L_1 \end{array}$$

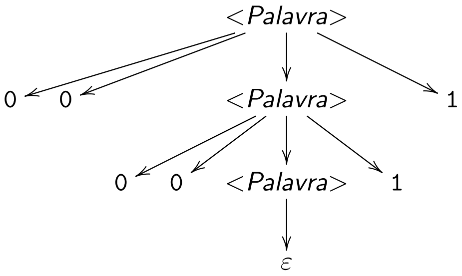
À semelhança do exemplo anterior, podemos definir as palavras de L_1 como sendo da categoria <Palavra>, assim definida

$$\begin{array}{lcl} <Palavra> & \rightarrow & \varepsilon \\ <Palavra> & \rightarrow & 00<Palavra>1 \end{array}$$

Introdução às GICs e LICs

$$\begin{aligned} <Palavra> &\rightarrow \varepsilon \\ <Palavra> &\rightarrow 00<Palavra>1 \end{aligned}$$

A palavra 000011 é uma <Palavra> que admite a **árvore de derivação (ou árvore sintática)** seguinte.

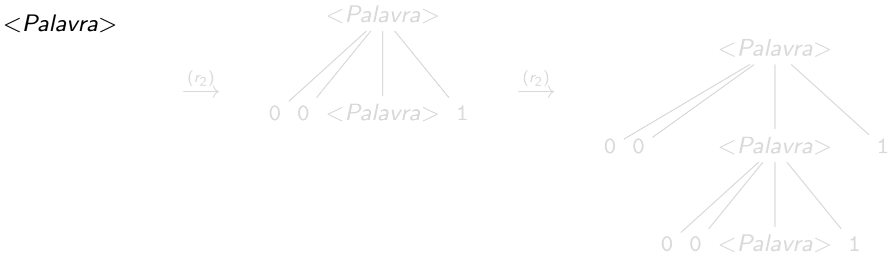


A derivação da palavra 000011

$$<Palavra> \Rightarrow 00<Palavra>1 \Rightarrow 0000<Palavra>11 \Rightarrow 0000\varepsilon 11 = 000011$$

Introdução às GICS e LICs

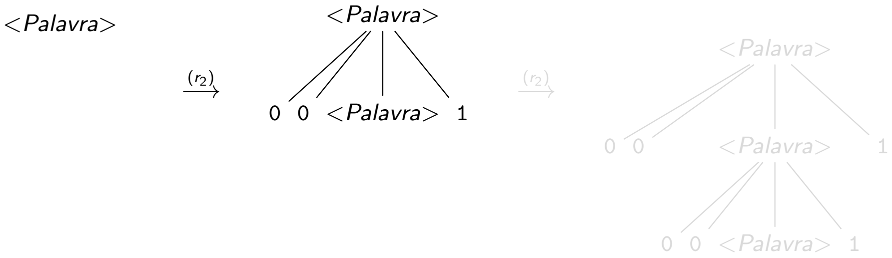
A **árvore de derivação é assim construída**



restando aplicar a regra $<\!Palavra\!> \rightarrow \varepsilon$.

Para simplificar representamos a árvore como um grafo não dirigido (com segmentos em vez de setas)

A **árvore de derivação é assim construída**

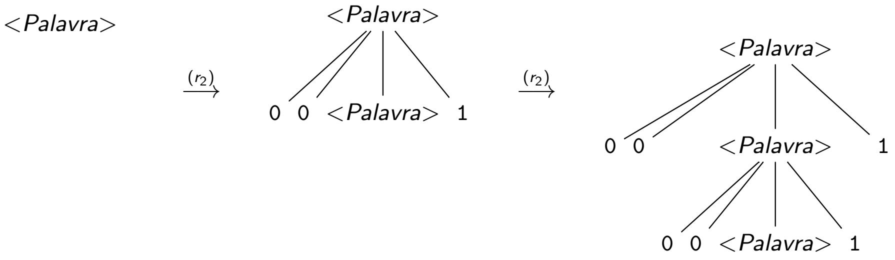


restando aplicar a regra $<Palavra> \rightarrow \varepsilon$.

Para simplificar representamos a árvore como um grafo não dirigido (com segmentos em vez de setas)

Introdução às GICS e LICs

A **árvore de derivação é assim construída**



restando aplicar a regra $<Palavra> \ \rightarrow \ \varepsilon$.

Para simplificar representamos a árvore como um grafo não dirigido (com segmentos em vez de setas)

Exemplo 3

Seja F a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{f}, \mathtt{x}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{,}\}$ assim definida indutivamente.

(i) $\mathtt{x} \in F$
(ii) $\mathtt{f(}\alpha_1\mathtt{,}\alpha_2\mathtt{)} \in F$, quaisquer que sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

Se definirmos as palavras da linguagem F com categoria P, temos as regras:

Notação abreviada para as regras

$$\boxed{\begin{array}{lll} P & \to & \mathtt{x} \\ P & \to & \mathtt{f(}P\mathtt{,}P\mathtt{)} \end{array}}$$

$$\boxed{P \to \mathtt{x} \mid \mathtt{f(}P\mathtt{,}P\mathtt{)}}$$

Alguns exemplos de palavras desta linguagem:

```
f(x,x)
f(f(x,x),x)
f(f(x,x),f(x,x))
f(f(x,x),f(f(x,x),x))
```

Exemplo 3

Seja F a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{f}, \mathtt{x}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{,}\}$ assim definida indutivamente.

(i) $\mathtt{x} \in F$
(ii) $\mathtt{f(}\alpha_1\mathtt{,}\alpha_2\mathtt{)} \in F$, quaisquer que sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

Se definirmos as palavras da linguagem F com categoria P, temos as regras:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} P & \to & \mathtt{x} \\ P & \to & \mathtt{f(}P\mathtt{,}P\mathtt{)} \end{array}}$$

Notação abreviada para as regras

$$\boxed{P \to \mathtt{x} \mid \mathtt{f(}P\mathtt{,}P\mathtt{)}}$$

Alguns exemplos de palavras desta linguagem:

$\mathtt{f(x,x)}$
$\mathtt{f(f(x,x),x)}$
$\mathtt{f(f(x,x),f(x,x))}$
$\mathtt{f(f(x,x),f(f(x,x),x))}$

Exemplo 3

Seja F a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{f}, \mathtt{x}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \mathtt{,}\}$ assim definida indutivamente.

(i) $\mathtt{x} \in F$
(ii) $\mathtt{f(}\alpha_1\mathtt{,}\alpha_2\mathtt{)} \in F$, quaisquer que sejam α_1, $\alpha_2 \in F$

Se definirmos as palavras da linguagem F com categoria P, temos as regras:

$$\boxed{\begin{array}{lll} P & \to & \mathtt{x} \\ P & \to & \mathtt{f(}P\mathtt{,}P\mathtt{)} \end{array}}$$

Notação abreviada para as regras

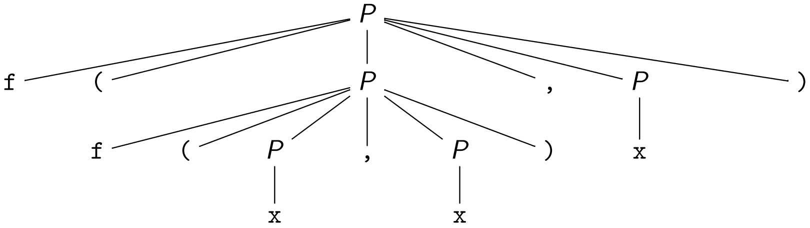
$$\boxed{P \to \mathtt{x} \mid \mathtt{f(}P\mathtt{,}P\mathtt{)}}$$

Alguns exemplos de palavras desta linguagem:

```
f(x,x)
f(f(x,x),x)
f(f(x,x),f(x,x))
f(f(x,x),f(f(x,x),x))
```

Introdução às GICs e LICs

A árvore de derivação (ou árvore sintática) de `f(f(x,x),x)`:



`f(f(x,x),x)` admite **várias derivações mas apenas esta árvore** de derivação.

Derivação pela esquerda:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},P),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

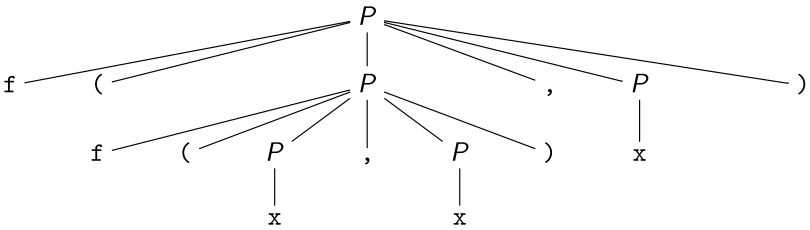
Derivação pela direita:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(P,\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,\mathtt{x}),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Outra derivação:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(P,\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

A árvore de derivação (ou árvore sintática) de `f(f(x,x),x)`:



`f(f(x,x),x)` admite **várias derivações mas apenas esta árvore** de derivação.

Derivação pela esquerda:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},P),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Derivação pela direita:

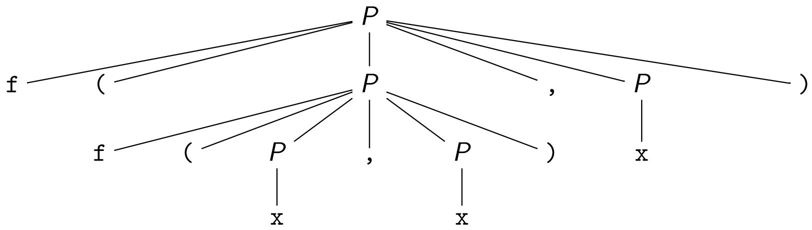
$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(P,\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,\mathtt{x}),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Outra derivação:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(P,\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Introdução às GICs e LICs

A árvore de derivação (ou árvore sintática) de `f(f(x,x),x)`:



`f(f(x,x),x)` admite **várias derivações mas apenas esta árvore** de derivação.

Derivação pela esquerda:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},P),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),P) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Derivação pela direita:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(P,\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,\mathtt{x}),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Outra derivação:

$P \Rightarrow \mathtt{f}(P,P) \Rightarrow \mathtt{f}(P,\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(P,P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},P),\mathtt{x}) \Rightarrow \mathtt{f}(\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{x}),\mathtt{x})$

Introdução às GICs e LICs

Exemplo 4

$$
\begin{array}{lcl}
<\!\mathit{frase}\!> & \rightarrow & <\!\mathit{fn}\!><\!\mathit{fv}\!> \\
<\!\mathit{fn}\!> & \rightarrow & \texttt{o gato} \\
<\!\mathit{fn}\!> & \rightarrow & \texttt{o rato} \\
<\!\mathit{fn}\!> & \rightarrow & \texttt{o peixe} \\
<\!\mathit{fv}\!> & \rightarrow & \texttt{come}<\!\mathit{fn}\!>
\end{array}
$$

A linguagem gerada a partir de $<\!\mathit{frase}\!>$ contém as palavras (i.e., frases) *o gato come o peixe* mas também *o peixe come o gato*. Estão **sintaticamente corretas** embora nos possam parecer estranhas (semanticamente).

Além de $<\!\mathit{frase}\!>$, que seria o símbolo inicial da gramática, tem outras *categorias*, designadas por variáveis ou símbolos não terminais: $<\!\mathit{fn}\!>$ e $<\!\mathit{fv}\!>$.

A **linguagem gerada por uma gramática** é o conjunto das palavras de alfabeto Σ que se podem derivar por aplicação das regras da gramática a **partir do símbolo inicial**. Os símbolos de Σ são os símbolos terminais da gramática. Σ não inclui as variáveis da gramática.

Introdução às GICs e LICs

Exemplo 5

Que palavras de $\{(,),:,>,<,=,+,-,*,/,0,\ldots,9,\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\ldots,\mathrm{z},\cdot,;\}^\star$ são geradas a partir de S por aplicação das regras seguintes?

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & \texttt{if}\cdot(C)\cdot\texttt{then}\cdot\texttt{goto}\cdot N \\
S & \to & \texttt{goto}\cdot N \\
S & \to & V\texttt{:=}E \\
S & \to & \texttt{stop} \\
E & \to & (E\ O\ E) \mid (-E) \mid V \mid N \\
O & \to & + \mid - \mid * \mid / \\
C & \to & V\ X\ E \\
X & \to & \texttt{>} \mid \texttt{<} \mid \texttt{>=} \mid \texttt{<=} \mid \texttt{=} \mid \texttt{<>} \\
N & \to & D \mid D\ N \\
D & \to & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\
V & \to & L \mid L\ N \mid L\ V \\
L & \to & \texttt{a} \mid \texttt{b} \mid \texttt{c} \mid \texttt{d} \mid \texttt{e} \mid \texttt{f} \mid \texttt{g} \mid \texttt{h}
\end{array}
$$

Noção de Gramática Independente de Contexto

Uma **gramática independente de contexto** é um quarteto

$$\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$$

em que V e Σ são conjuntos de símbolos, ambos finitos e não vazios, e tais que $V \cap \Sigma = \emptyset$, $S \in V$, e P é uma relação binária finita de V em $(V \cup \Sigma)^\star$.

- V é o conjunto das **variáveis** (ou **não terminais**)
- S diz-se **símbolo inicial** de $\mathcal{G}$
- Σ é o **alfabeto** (conjunto dos símbolos **terminais**)
- P é um conjunto finito constituído pelas **produções** ou **regras**. Usualmente escreve-se $X \to w$ se $(X, w) \in P$.

A linguagem gerada por $\mathcal{G}$, que se denota por $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, é constituída pelas palavras que se podem derivar a partir do seu **símbolo inicial**.

Gramática Independente de Contexto

As GICs são *independentes de contexto* porque as regras que definem os não terminais (i.e., as *categorias gramaticais*) são aplicadas sem estarem sujeitas a restrições introduzidas por algum contexto. Nas GICs, **a parte esquerda de cada regra é um não terminal**.

A forma das regras de produção determina a expressividade da gramática. Nas **gramáticas mais gerais** (ditas, de **Tipo 0**) as regras têm a forma:

$$\alpha \to \beta \quad \text{com} \quad \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star, \ \ \alpha \neq \varepsilon$$

Não iremos estudar gramáticas desse tipo, que definem o topo da hierarquia.

As **gramáticas regulares**, que geram linguagens regulares, são de Tipo 3. As **gramáticas independentes de contexto** são de Tipo 2.

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$

- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_3 = (\{U, Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_4 = (\{Z, U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$

- $\mathcal{G}_5 = (\{Z, U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$
- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_3 = (\{U,Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_4 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$
- $\mathcal{G}_5 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$

- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_3 = (\{U,Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_4 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$

- $\mathcal{G}_5 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$

- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_3 = (\{U, Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$

- $\mathcal{G}_4 = (\{Z, U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$

- $\mathcal{G}_5 = (\{Z, U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_1 = (\{T\}, \{0,1\}, \{T \to 0T,\ T \to 1T,\ T \to \varepsilon\}, T)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \{0,1\}^\star$$
- $\mathcal{G}_2 = (\{U\}, \{0,1\}, \{U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_3 = (\{U,Z\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 10U,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_3) = \{0\}\{10\}^\star$$
- $\mathcal{G}_4 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, Z)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_4) = \{0\}\{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_3)$$
- $\mathcal{G}_5 = (\{Z,U\}, \{0,1\}, \{Z \to 0U,\ U \to 1Z,\ U \to \varepsilon\}, U)$
$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{10\}^\star = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_6 = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{aaa},\ S \to \mathtt{aaabb}S\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_6) = \{\mathtt{aaabb}\}^\star\{\mathtt{aaa}\}$$

- $\mathcal{G}_7 = (\{S, C\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b},\ S \to C,\ C \to \mathtt{b}C\mathtt{a},\ C \to \mathtt{b}\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_7) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

Exemplos de Gramáticas Independentes de Contexto

- $\mathcal{G}_6 = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{aaa},\ S \to \mathtt{aaabb}S\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_6) = \{\mathtt{aaabb}\}^\star\{\mathtt{aaa}\}$$

- $\mathcal{G}_7 = (\{S, C\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b},\ S \to C,\ C \to \mathtt{b}C\mathtt{a},\ C \to \mathtt{b}\}, S)$

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_7) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{m+1}\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \ \mid\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$