Cálculo II (M1003) - teste 1 - 15 de Maio de 2021 **Duração: 60 minutos**

Nome:...**N.:**.................

Os telemóveis têm de estar desligados. O uso de calculadoras não é permitido. Não serão corrigidas respostas escritas a lápis.

Deverá responder às questões na própria folha e no espaço respectivo. Se necessitar de mais folhas pode usar uma das duas folhas brancas distribuidas com o enunciado, a outra pode ser usada como folha de rascunho.

Justifique completamente as suas respostas.

1. (0.75 valores) Considere a curva $\alpha :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t^2, t^2+1)$. Esboce o traço da curva indicando o sentido do movimento.

2. (1.25 valores) Seja $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.
Verifique que a velocidade escalar de β no instante t é dada por $e^t + e^{-t}$ e calcule o comprimento da curva entre os instantes $t = 0$ e $t = \ln(4)$.

3. (1.5 valores) Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva definida por $\gamma(t) = (\cos(3t), 4t, \sin(3t))$. Para cada instante $t \in \mathbb{R}$, calcule a velocidade escalar, a aceleração normal e a aceleração tangencial.

4. (1.5 valores) Seja $\delta : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva suave, parametrizada por comprimento de arco cujo traço está contido numa esfera. Mostre que a curvatura de δ nunca se anula.

5. Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x^4 y, x e^z) \end{array}$.

   (a) (1.5 valores) Determine:

      (i) $Df_{(1,1,0)}$, a derivada de f no ponto $(1, 1, 0)$

      (ii) $Df((1, 1, 0); (2, 4, 1))$, a derivada direcional no ponto $(1, 1, 0)$ segundo a direcção $(2, 4, 1)$.

   (b) (1.5 valores) Se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma função derivável tal que $\mathcal{J}g_{(x,y)} = \begin{bmatrix} e^x & x^2 \\ x + y & 2x + xy \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Determine $\left.\dfrac{\partial g \circ f}{\partial x}\right|_{(1,1,0)}$.