Folha Prática 4

1. Aplique o método de Thompson (Thompson-McNaughton-Yamada) para determinar um autómato finito que reconheça a linguagem definida pela expressão regular sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ indicada em cada alínea. **Deve seguir exatamente a construção dada nas aulas em 2020/2021**, recordada abaixo.

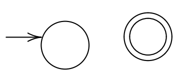
a) $(0^\star)$
b) $(\emptyset^\star)$
c) $((\emptyset + \emptyset)^\star)$
d) $((11) + 0)$
e) $((0^\star)((11) + 0))$
f) $(((00) + 1)^\star)$
g) $(((11) + 0) + (0^\star))$
h) $((11) + (0 + (0^\star)))$
i) $((0^\star) + (1\emptyset))$
j) $(((1((0^\star)1)) + 0)^\star)$
k) $(((0(1^\star)) + 1)^\star)$
l) $(\varepsilon + ((((\emptyset\emptyset)1)^\star)0))$
m) $((((1\varepsilon)^\star)1) + (\varepsilon\varepsilon))$

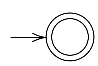
Verifique que os AFNDs-ε que obteve em **1a)**, **1b)**, **1e)**, **1h)** e **1m)** reconhecem a linguagem indicada.

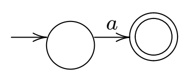
Para recordar: **Construção de Thompson**

Dada uma **expressão regular**, constrói-se um AFDN-ε que reconhece a linguagem que tal expressão descreve por aplicação das regras seguintes:

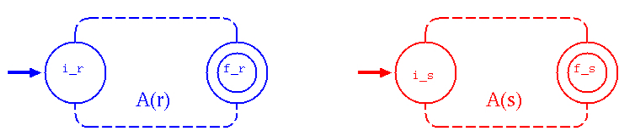
- Para as expressões elementares $\emptyset$, ε e a, com $a \in \Sigma$, será:

$\emptyset$: 

ε : 

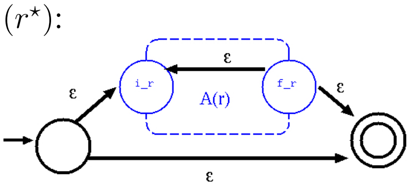
a : 

- Para expressões $(r^\star)$, (rs) e $(r + s)$, admitindo que já se construiu os AFNDs-ε para as subexpressões r e s, por aplicação do mesmo método, e que esses autómatos $A(r)$ e $A(s)$ são denotados por

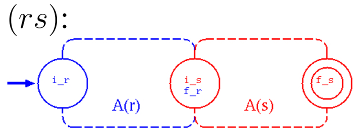


construimos um AFND-ε para $(r^\star)$, (rs), e $(r + s)$ assim:

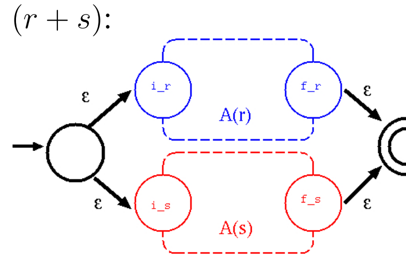
$(r^\star)$:



(rs):



$(r + s)$:



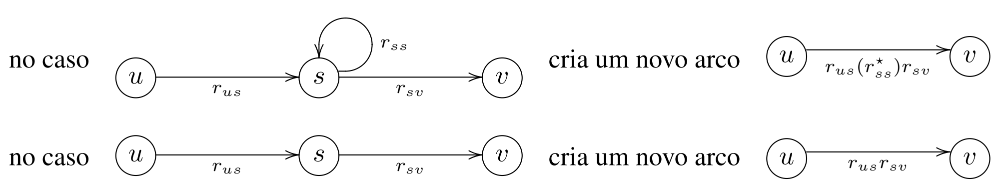
- O método aplica-se a expressões regulares. Para o aplicar a uma expressões regular abreviada teriamos de começar por colocar os parentesis em falta, de modo a transformá-la numa expressão regular.
- Todos os autómatos construídos por aplicação do método de Thompson têm **exatamente um estado final e do estado final não saem transições para outros estados**. No estado inicial não entram transições.

- Nos esquemas i_r e f_r designam o estado inicial e final do autómato $A(r)$ obtido para a expressão r (analogamente para a expressão s e o autómato $A(s)$ e os estados i_s e f_s). Estes dois estados não têm de ser distintos (notar que na construção do AFND-ε para expressão elementar ε coincidem).
- Na construção do AFND-ε para (rs), não são introduzidos novos estados. O diagrama de transição de $A_{(rs)}$ é obtido por sobreposição do estado inicial de s com o estado final de r. O estado inicial será i_r e o estado final f_s. Para $(r+s)$ e $(r^\star)$ são criados dois novos estados (um será o estado final e o outro o estado inicial do resultado).
- Na aplicação do método,**limitamo-nos a aplicar as regras de construção indicadas, sem efetuar qualquer simplificação da expressão regular dada.** Ou seja, não podemos substituir a expressão dada por outra equivalente.
- No fim e nos passos intermédios, não esquecer de assinalar o estado incial e o estado final do AFND-ε.
- **Nos exames de CC1004 em 2020/2021, não serão aceites como corretas construções que difiram da indicada acima.**

Método de eliminação de estados *(de Brzozowski-McCluskey)*

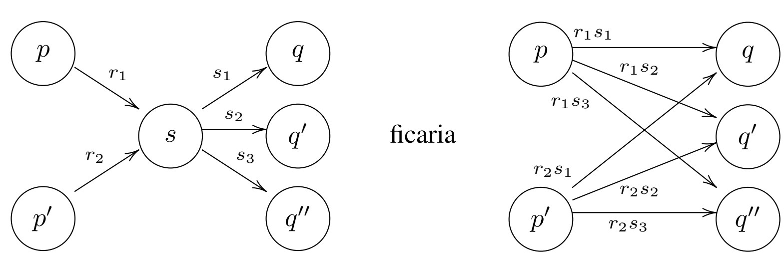
O método pode ser aplicado a um AFD, ou AFND, ou AFND-ε para determinar uma expressão regular (abreviada) que descreve a linguagem reconhecida pelo autómato. **Para o ano letivo 2020/2021, o algoritmo de eliminação será o seguinte:**

- **Remover todos os estados que não são acessíveis do estado inicial do autómato (s_0) ou que não permitem aceder a algum estado final do autómato.** Se não tiver nenhum estado final ou ficar sem estados finais, dar como resultado $\emptyset$ e terminar.
- **Transformar o autómato** para garantir só tem um estado final, que do estado final não saem transições, e que não entram transições no estado inicial. Para isso:
  - Introduzir um estado inicial i com transição-ε para o estado s_0.
  - Introduzir um novo estado final f, que passará a ser o único estado final, acrescentando transições-ε dos que antes eram finais para f.
- **Substituir as etiquetas dos arcos do diagrama por expressões regulares** (se necessário, deve usar o operador de união "+" para garantir que tem no máximo um arco (u, v)).
- **Eliminar os estados um a um, com excepção do estado inicial i e do estado final f.** Os estados podem ser eliminados por qualquer ordem (a menos que seja indicada uma ordem). Para eliminar um estado s, considerar os arcos que *entram* em s, os que *saem* de s (e o *lacete* em s se existir). O par de arcos (u, s) e (s, v), com $u \neq s$ e $v \neq s$, será substituído por um novo arco (u, v) assim:



  Se o arco (u, v) já existia anteriormente, e r_{uv} for a expressão associada, substitui-se tal expressão por $r_{uv} + r_{us}(r_{ss}^\star)r_{sv}$ ou $r_{uv} + r_{us}r_{sv}$, respetivamente.

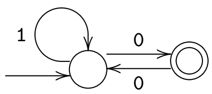
  NB: Se tiver n arcos com fim em s e m arcos com origem em s, terá $n \times m$ (novos) arcos (no exemplo abaixo, $2 \times 3 = 6$).



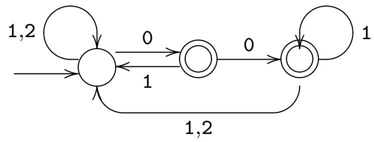
- **O diagrama final terá apenas os estados i e f**, e um arco de i para f, etiquetado com a expressão procurada.

2. Por aplicação do método de eliminação de estados (de Brzozowski-McCluskey), determine uma expressão regular (abreviada) que descreva a linguagem reconhecida pelo autómato finito indicado, de alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Se for óbvio, simplifique as expressões intermédias.

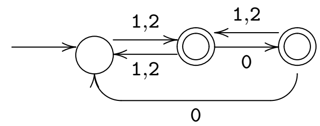
a)



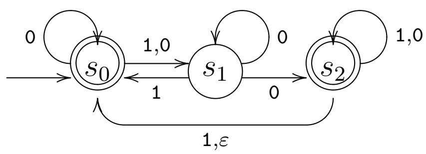
b)



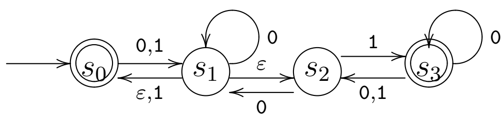
c)



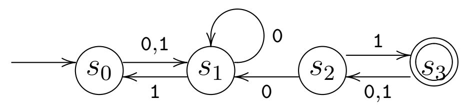
d)



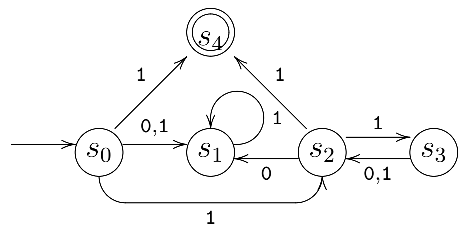
e)



f)



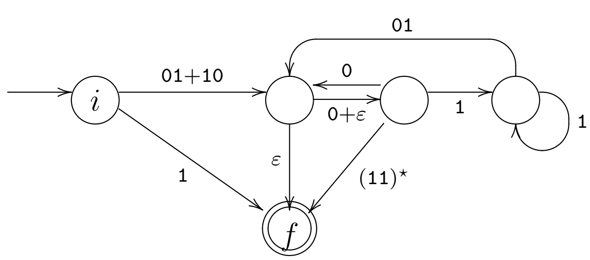
g)



3. Usando algoritmos de conversão dados nas aulas, determine uma expressão regular (abreviada) que descreva a linguagem de alfabeto $\{0, 1\}$ que é **complementar** da linguagem descrita pela expressão regular $(((11) + ((10)0))^\star)$. Se for útil (e óbvio), simplifique as expressões intermédias.

Para isso, aplique o método de Thompson para determinar um AFND-ε que reconhece a linguagem definida pela expressão dada. Depois, converta tal autómato para um AFD. A seguir, troque os estados finais do AFD por não finais e vice-versa para ter um AFD que reconhece a linguagem complementar. Finalmente, aplique o método de eliminação de estados para obter a expressão regular (abreviada) pedida.

4. O diagrama seguinte foi obtido de um autómato finito A após algumas iterações do método de eliminação de estados (de Brzozowski-McCluskey).



Note que este grafo não pode ser o diagrama de transição de um AFND-ε de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, pois o que tem nos ramos são expressões regulares. A expressão que está num ramo (u, v) define o conjunto das palavras de $\Sigma^\star$ que levariam o autómato de partida A (estendido com estados i e f) do estado u ao estado v, podendo passar por estados já eliminados.

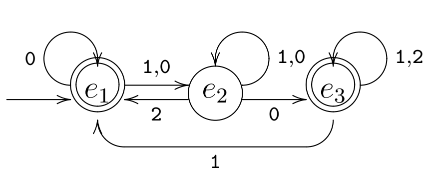
a) Averigue se $\{010011, 0111011111, 100\} \subset \mathcal{L}(A)$.

b) Determine uma expressão regular abreviada que descreva $\mathcal{L}(A)$. Apresente os passos intermédios.

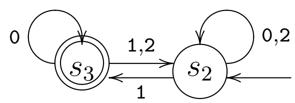
c) Partindo da análise do grafo representado, e do que se sabe sobre o método de eliminação de estados, tente encontrar um autómato finito A que pudesse dar origem à situação indicada, na aplicação do método de eliminação. Se não for determinístico, converta-o num determinístico equivalente.

5. Para cada alínea, defina o AFND representado por um quintuplo $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, indicando o conjunto $\delta(s,a)$ para cada par $(s,a) \in S \times \Sigma$, **sabendo que** $\Sigma = \{0,1,2\}$.

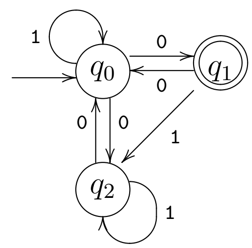
a)



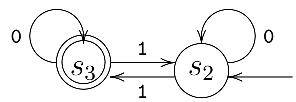
b)



c)

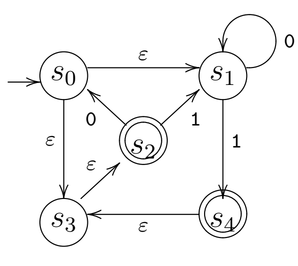


d)



6. Para cada um dos autómatos indicados em **5.**, determine um AFD que reconheça a linguagem $\mathcal{L}(A)$, por aplicação do método de conversão.

7. Considere o AFND-ε A representado pelo diagrama de transição seguinte.



a) Aplicando o método de conversão, determine um AFD A' equivalente a A e descreva informalmente $\mathcal{L}(A)$.
b) Partindo do AFD A', determine um AFD que aceite $\Sigma^\star \setminus \mathcal{L}(A)$ (i.e., a complementar de $\mathcal{L}(A)$).
c) Justifique que para obter um autómato que aceite $\Sigma^\star \setminus \mathcal{L}(A)$ não basta modificar o diagrama do AFND-ε A para ter como estados finais s_0, s_1 e s_3 e estados não finais s_2 e s_4.

8. Apresente o diagrama de transição do AFND-ε que resulta da aplicação do método de Thompson à expressão regular indicada em cada alínea (segundo a construção dada).

a) $(((0+1)^\star)((00)^\star))$
b) $(((01)^\star)(00))$
c) $((01)+(0^\star))$
d) $(((01)+0)^\star)$
e) $((0^\star)((1^\star)(00)))$
f) $((((0^\star)((1^\star)(00)))+(01))^\star)$

9. Descreva informalmente a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ descrita pela expressão regular abreviada indicada em cada alínea.

a) $(0+1)^\star 00$
b) $(01)^\star 00$
c) $01^\star 00$
d) $(01+0)^\star$
e) $01+0^\star$
f) $(11)^\star 100^\star + 0^\star$
g) $(0+0000)^\star(111)^\star$
h) $(00+000)^\star + 0$
i) $(01^\star 0+1)^\star$
j) $1(01^\star 0+1)^\star$
k) $0^\star 1(01^\star 0+1)^\star$
l) $(01+001+1)^\star$
m) $(01^\star 01^\star 0+1)^\star(0+01^\star 0)1^\star$
n) $(01^\star 01^\star 0+1)^\star(0+01^\star 0)$
o) $(0+0000)^\star 111^\star$
p) $0+0000^\star(111)^\star$
q) $11^\star((00+000)(00+000)^\star 11^\star)^\star$

10. Na continuação de **9.**, determine AFDs que reconheçam as linguagens indicadas, partindo diretamente da descrição informal da linguagem. Em cada caso, justifique a necessidade dos estados que definir.