FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

U.PORTO

Álgebra Linear e Geometria Analítica (M1002)
Exame da Época Normal 22/01/2021 Duração: Duas horas

Cotação: 10 valores *(cada alínea vale um ponto).*
Todas as respostas devem ser **convenientemente justificadas**.

Devem resolver as questões 1 e 2 numa folha e as questões 3, 4, 5 noutra folha.

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a equação caraterística de A e os valores próprios de A.

   (b) Determine os vectores próprios de A associados a cada um dos valores próprios de A.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que
$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1,2,1), \\ T(1,1,0) &= (2,-1,2,0), \\ T(1,1,1) &= (3,-1,3,-1)\,. \end{aligned}$$

   (a) Obtenha a expressão geral de T.

   (b) Averigue se $(4,-3,3,-2)$ pertence ao contradomínio de T.

   (c) Averigue se T é injectiva.

3. Determine uma equação cartesiana do plano (subespaço vectorial) gerado pelos vectores $v_1 = (1,2,1)$ e $v_2 = (1,3,-1)$.

4. Em $\mathbb{R}^4$, considere os vectores $v_1 = (1,1,-1,0)$ e $v_2 = (1,2,0,1)$.

   (a) Seja
$$W = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : v \cdot v_1 = v \cdot v_2 = 0 \right\}.$$
   Mostre que W é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$ e calcule a sua dimensão.

   (b) Mostre que sendo $w_1 \in W$ tal que $w_1 \neq (0,0,0,0)$ então w_1, v_1, v_2 são linearmente independentes.

   (c) Dê exemplo de dois vectores $w_1, w_2 \in W$ tais que $\{w_1, w_2, v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

5. Sejam A, B matrizes quadradas $n \times n$ tais que B é invertível.

   Mostre que as matrizes A e $B^{-1}AB$ têm os mesmos valores próprios.