Cálculo I (M1001)

Lic:CC e MI:ERS, 1º ano

Docente: Manuel Delgado

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Ano lectivo de 2020/2021

(Versão de: 11 de dezembro de 2020)

Estes *slides* foram preparados para, num ano em que as aulas teóricas serão não presenciais devido à pandemia de COVID-19, servirem de base às aulas teóricas da Unidade Curricular (UC) **Cálculo I** (M1001). São baseados na principal referência da UC:

James Stewart, "Calculus, early transcendentals", 8ª edição, 2017 (disponível na bibliteca da FCUP)

Na produção dos slides foram reutilizados (com adaptações) slides preparados por outros colegas ou por mim próprio para UCs de teor semelhante.

A maior parte das imagens foram produzidas usando o *sage*, um *software* matemático, de código fonte aberto, que será também usado em exemplos. Os estudantes serão encorajados a fazer uso do mesmo.

Conteúdo I

Conteúdo II

Observações gerais

A página da unidade curricular encontra-se no Moodle da U. Porto.

É importante ter presente que a Matemática não se aprende apenas vendo o que está feito. A resolução individual de exercícios é um aspeto decisivo na aprendizagem que não pode ser descurado. Dá muito trabalho...

Bibliografia

A bibliografia principal é:

James Stewart, "Calculus, early transcendentals", 8ª edição, 2017 (disponível na biblioteca da FCUP)

Um livro que pode ajudar a rever (ou consolidar) alguma matéria já conhecida e que é útil ter presente ao longo desta unidade curricular:

James Stewart, Lothar Redlin e Saleem Watson, "Precalculus: mathematics for calculus", 6ª edição, 2012 (disponível na biblioteca da FCUP)

Em diversos exemplos será usado o *software* matemático *sage*. O livro

Gregory V. Bard, "Sage for Undergraduates", AMS, 2015 (disponível online, a partir da página web do autor)

constitui uma boa introdução a este *software* cujo uso se tentará motivar. Recomenda-se a leitura do primeiro capítulo.

Programa previsto

0. Generalidades sobre funções
   (Trata-se essencialmente de revisões)
1. Limites e continuidade
   (Alerta-se para o facto de este capítulo não consistir apenas de revisões...)
2. Derivadas e primitivas
3. Integração
4. Aproximação polinomial e séries

Sistema de avaliação previsto

Da ficha da unidade curricular...

- Todos os estudantes inscritos são admitidos a exame final. Tanto o exame final como o exame de recurso serão divididos em duas partes, igualmente cotadas. A primeira parte cobre os dois primeiros tópicos do programa (1. Limites e continuidade; 2. Derivadas e primitivas) e a segunda parte cobre a restante matéria dada.
- Cada parte do exame de recurso pode, por solicitação do estudante, ser classificada com a nota obtida na parte correspondente do exame final. Entende-se a não comparência numa das partes do exame de recurso como solicitação de que seja considerada a nota obtida antes na parte correspondente.

Qualquer clarificação a este sistema de avaliação será colocado na página da UC no moodle.

Software

Existe *software* matemático cujo uso se recomenda que, para pequenas tarefas, é disponibilizado gratuitamente *online*.

- WolframAlpha: https://www.wolframalpha.com/
- SageMath: https://sagecell.sagemath.org/

Trata-se de ferramentas úteis que podem ajudar no estudo.

O *SageMath* (ou simplesmente *sage*) pode continuar a ser usado gratuitamente mesmo para grandes tarefas. Trata-se de *software* livre e de código fonte aberto.
Para aprender o básico recomenda-se fortemente a leitura do primeiro capítulo do já referido livro "Sage for Undergraduates", de Gregory V. Bard. A leitura ou consulta de outras partes do mesmo livro poderá ser feita quando tal se revelar conveniente.

Muitas das imagens apresentadas nestes slides foram produzidas usando o *sage*. Em alguns exemplos também se recorre a este *software*.

1 Funções e modelos

...

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Modos de representar uma função

As funções surgem quando uma certa quantidade depende de uma outra.

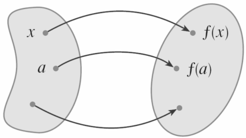
Exemplo

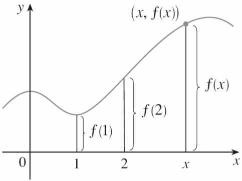
A área a de um círculo depende do raio r do círculo, sendo

$$a = \pi r^2$$

a regra que liga as duas quantidades. A cada número real positivo r é associado um valor de a; dizemos que *a função* de r.

Funções podem ser representadas de diversas maneiras: diagramas, gráficos, tabelas, ...





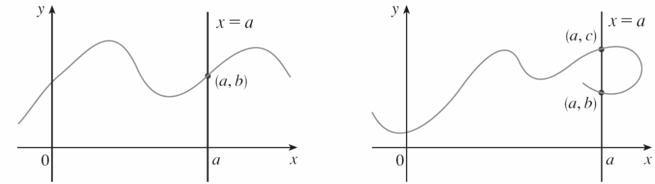
Ano	População (milhões)
1900	1650
1950	2560
2000	6870

Definição

Uma **função** $f : D \longrightarrow E$ *faz corresponder a cada elemento* x *do conjunto* D *um e um só elemento* $f(x)$ *do conjunto* E*.*

O *gráfico* de uma função f de domínio D é o conjunto dos pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Exemplo



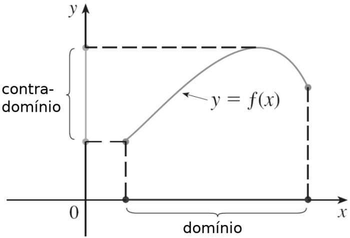
A curva no plano xy do lado direito da figura não representa o gráfico de uma função.
De facto, traçando uma reta vertical a passar pelo ponto a do eixo dos x, vemos que a este ponto correspondem dois pontos distintos (b e c).

Sendo $f : D \longrightarrow E$ uma função,

- o conjunto D diz-se o **domínio** de f;
- o conjunto E diz-se o **conjunto de chegada** de f;
- o elemento $f(x) \in E$ chama-se **imagem** de x por f;
- o conjunto das imagens por f de todos os elementos de D diz-se o **contradomínio** ou **imagem** de f e denota-se por $\operatorname{Im} f$ ou $f(A)$:

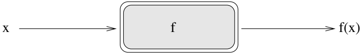
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

A figura seguinte ilustra como, quando se tem o gráfico de uma função, o domínio pode ser representado no eixo dos x e o contradomínio no eixo dos y.



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Podemos pensar numa função f como sendo uma máquina que transforma um elemento x do domínio num elemento $f(x)$ do contradomínio produzido de acordo com a regra da função.



Podemos assim pensar no domínio como sendo o conjunto dos possíveis *inputs* e no contradomínio como sendo o conjunto dos possíveis *outputs*.

A um símbolo que representa um elemento do domínio do domínio chamaremos por vezes *variável independente*. Um símbolo que representa um elemento do contradomínio diz-se uma *variável dependente*.

Por exemplo, quando temos a função dada pela expressão

$$a = \pi r^2$$

que a um número real r associa a área a de um círculo de raio r, dizemos que r é a variável independente e a é a variável dependente.

Modelos Matemáticos

Um *modelo matemático* é uma descrição matemática (geralmente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenómeno da vida real, como, por exemplo, o crescimento de uma população, o custo da redução da emissão de gases, a procura de um produto, etc.

O objetivo do modelo é ajudar a entender o fenómeno e a fazer previsões quanto ao seu comportamento futuro.

Um modelo nunca é uma representação completamente precisa de um fenómeno físico, trata-se de uma idealização do fenómeno. Um bom modelo simplifica a realidade o suficiente para permitir realizar cálculos matemáticos, mas é ao mesmo tempo suficientemente preciso para permitir retirar boas conclusões.

Dizemos que y é uma *função linear* de x quando o seu gráfico é uma linha reta. Podemos escrever uma expressão para uma função linear como

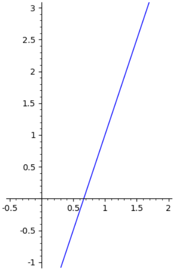
$$y = f(x) = mx + b$$

em que m é o declive da reta e b é a intersecção com o eixo dos y.

Uma caraterística das funções lineares é que têm uma taxa de crescimento constante.

Exemplo

O gráfico de uma função linear e uma tabela com alguns valores:



x	f(x)=3x-2
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

Quando o valor de x cresce 0.1, o valor de $f(x)$ cresce 0.3. Tem-se que $f(x)$ cresce 3 vezes mais rápido que x.
O declive do gráfico de $y = 3x - 2$, nomeadamente 3, é a taxa de variação de y relativamente a x.

Exemplo

1. O ar seco arrefece quando sobe. Sabendo que a temperatura do solo é de $20^o C$ e a temperatura a $1km$ de altura de $10^o C$, exprima a temperatura T (em $^o C$) como uma função da altura h (em quilómetros), assumindo que um modelo linear é apropriado.
2. Esboce o gráfico da função obtida. O que representa a inclinação?
3. Qual é a temperatura a uma altura de $2.5km$?

Solução:

1. Como estamos a assumir que T é uma função linear de h, podemos escrever
$$T = mh + b$$
Sabemos que $T = 20$ quando $h = 0$, donde resulta que $20 = m \cdot 0 + b$ e, portanto, $b = 20$. Sabemos também que $T = 10$ quando $h = 1$, logo $10 = m \cdot 1 + 20$. Resulta que $m = -10$, e
$$T = -10h + 20$$
2. Para verificação, execute `plot(-10*x+20,xmax=3)` no *sage*.
3. $T(2.5) = -10(2.5) + 20 = -5^o C$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Um *polinómio* é uma função dada por uma expressão da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e os números $a_n, \ldots, a_1, a_0$ são constantes.
Se $a_n \neq 0$, a_n diz-se o *coeficiente guia* do polinómio e dizemos que o grau de $P(x)$ é n.

Uma função linear é um polinómio de grau 1.

Um polinómio de grau 2 tem a forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e diz-se uma *função quadrática*. Um polinómio de grau 3 diz-se cúbico.

Exercício

Use o *sage* para obter esboços de gráficos de alguns polinómios de diversos graus.

Exemplo

Uma bola é lançada de uma altura de 450 m.

A altura a que a bola se encontra é medida a cada segundo e obtêm-se os dados indicados na tabela ao lado.

Tempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

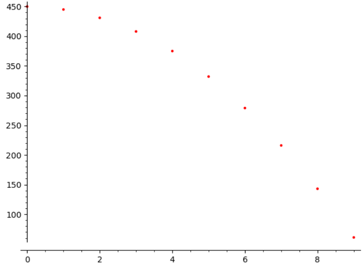
Encontre um modelo que se ajuste aos dados da tabela e use o modelo obtido para fazer uma previsão de quando é que a bola atingirá o solo.

Vamos usar o *sage* para resolver o problema...

Comecemos, com a ajuda do *sage*, por representar os dados de que dispomos para tentar perceber que modelo usar.

```
dados = [(0,450),(1,445),(2,431),(3,408),(4,375),(5,332),
         (6,279),(7,216),(8,143),(9,61)]
list_plot(dados,color='red')
```

Obtemos a figura seguinte, a qual nos dá a indicação de que um modelo linear não é adequado.



Vamos tentar com um modelo quadrático

```
# os dados
dados = [(0,450),(1,445),(2,431),(3,408),(4,375),(5,332),
         (6,279),(7,216),(8,143),(9,61)]

# um modelo quadrático com parametros ajustaveis a,b e c
var('a, b, c, x')
modelo(x) = a*x^2 + b*x + c

# calcula valores dos parametros que se ajustam ao modelo
sol = find_fit(dados,modelo)
show(sol)

# define f(x), o modelo
f(x) = modelo(a=sol[0].rhs(),b=sol[1].rhs(),c=sol[2].rhs())
show(f(x))
```

Avaliando, obtemos a lista de parâmetros:

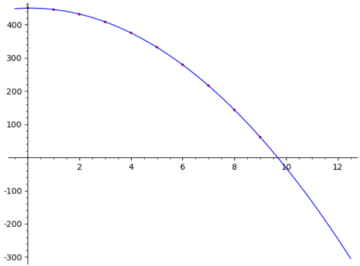
$[a = (-4.901515151528034), b = 0.9621212121212355, c = 449.3636363646141]$

e o modelo:
$-4.901515151528034\, x^2 + 0.9621212121212355\, x + 449.3636363646141$

```
# crie um gráfico vazio
a = plot([])
# junte-lhe um gráfico do modelo, com x de -0.5 a 12.5
a += plot(f(x),-0.5,12.5)

# junte pontos correspondentes aos dados, em vermelho
a += list_plot(dados,color='red')
show(a)
```

Avaliando, é-nos mostrada a seguinte figura, que dá uma clara indicação de que o modelo é adequado.:



Ainda na mesma sessão *sage*:

```
# finalmente, a solução do problema
find_root(f(x),8,10)
```

Avaliando, concluímos que o nosso modelo prevê que a bola atinja o solo passados 9.673538161731509 segundos.

Outras funções essenciais

Já referimos os *polinómios*.

Uma função da forma $f(x) = x^a$, com a uma constante, diz-se uma *função potência*. Consideram-se vários casos particulares com muito interesse:

1. $a = n$, com n um inteiro positivo
   O aspeto geral do gráfico de uma função potência $f(x) = x^n$, com $n \geq 2$, depende da paridade de n...
2. $a = 1/n$, com n um inteiro positivo.

   A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma *função raiz*.
   Quando n é par, o domínio de $f(x)$ é $[0, +\infty)$. O gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ é a parte superior da parábola $y = x^2$; outros gráficos com n par têm o mesmo aspeto.
   Quando n é ímpar, o domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R}$.
3. $a = -1$
   Por vezes chamamos *função recíproca* à função $f(x) = x^{-1} = 1/x$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Use o *sage* para obter esboços de gráficos de algumas funções potência.

Solução.
Pode usar os comandos seguintes (e adaptá-los):

```
plot(x^(1/2),xmin=0,xmax=5);
plot(sign(x)*abs(x)^(1/3), (x,-1,1));
plot(1/x,xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5).
```

Observação

Para esboçar o gráfico da raiz cúbica usando o *sage* há que garantir que o sistema não faz uso das raízes complexas... Usar o valor absoluto, como indicado no comando acima, resolve o problema.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Funções racionais são quocientes de dois polinómios.

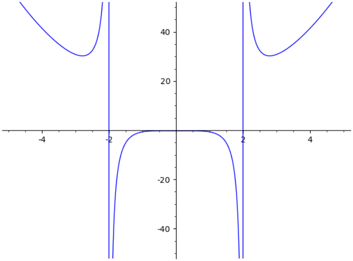
Exemplo

$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ é uma função racional.

O seu domínio é $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ e o comando *sage*

```
plot((2*x^4-x^2+1)/(x^2-4),xmin=-5,xmax=5,ymin=-50,ymax=50)
```

fornece-nos o seguinte gráfico:



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

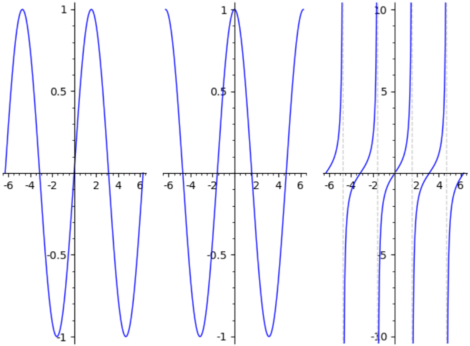
Uma função diz-se uma *função algébrica* se uma sua expressão puder ser construída a partir de polinómios usando operações algébricas (como adições, subtrações, multiplicações, divisões e extração de raízes).

Exemplos

$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$; $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; $h(x) = \frac{3x^4 - 6x^2}{3 + \sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}$.

Outras funções essenciais são as *funções trigonométricas*.
Usaremos sempre radianos como medida. Por exemplo, sen(x) é o seno do ângulo cuja medida em radianos é x.

A figura seguinte serve para recordar o aspeto dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente, respetivamente.



As *funções exponenciais* são funções da forma $f(x) = b^x$, com b uma constante positiva.

Exercício

Use um sistema computacional ou uma calculadora gráfica para esboçar gráficos de funções exponenciais. Entre outras, considere as bases 2 e $1/2$.

As *funções logarítmicas* $f(x) = \log_b x$, onde a base b é uma constante positiva, são as inversas das funções exponenciais.

Exercício

Execute no *sage* o comando seguinte:
`plot(log,xmin=0,xmax=5,ymin=-10,ymax=5)`.

Novas funções a partir de antigas

Suponhamos que temos uma dada função e um esboço do seu gráfico (possivelmente feito à mão).
Referimos seguidamente algumas transformações da função dada. Ao mesmo tempo referimos o efeito dessas transformações sobre o gráfico da função dada que nos permitem de forma simples esboçar o gráfico da função transformada.

Deslocamentos verticais
Seja $c > 0$. Para obter o gráfico de

- $y = f(x) + c$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ uma distância de c unidades para cima;
- $y = f(x) - c$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ uma distância de c unidades para baixo.

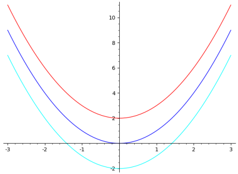
Deslocamentos horizontais
Seja $c > 0$. Para obter o gráfico de

- $y = f(x - c)$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ uma distância de c unidades para a direita;
- $y = f(x + c)$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ uma distância de c unidades para a esquerda.

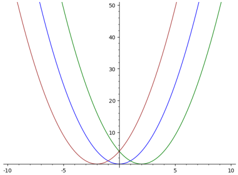
A seguir usa-se o *sage* para ilustrar os factos acabados de referir.

Exemplo

```
f=x^2
c=2
# deslocamentos verticais
a1=plot(f,-3,3)
a2=plot(f+c,-3,3,color='red')
a3=plot(f-c,-3,3,color='cyan')
graficos=a1+a2+a3
graficos.show()
```




```
# deslocamentos horizontais
a1=plot(f,xmin=-10,xmax=10,
        ymin=0,ymax=50)
a2=plot(f(x-c),xmin=-10,xmax=10,
        ymin=0,ymax=50,color='green')
a3=plot(f(x+c),xmin=-10,xmax=10,
        ymin=0,ymax=50,color='brown')
graficos=a1+a2+a3
graficos.show()
```



Alongamentos verticais e horizontais

Seja $c > 1$. Para obter o gráfico de

- $y = cf(x)$, alonga-se o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
- $y = (1/c)f(x)$, encolhe-se o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
- $y = f(cx)$, encolhe-se o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
- $y = f(x/c)$, alonga-se o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c

Reflexões

Para obter o gráfico de

- $y = -f(x)$, reflete-se o gráfico de $y = f(x)$ sobre o eixo dos x;
- $y = f(-x)$, reflete-se o gráfico de $y = f(x)$ sobre o eixo dos y.

Exercício

Adapte o código apresentado no slide anterior para ilustrar os factos acima.

Combinações de funções

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f+g, f-g, fg$ e f/g de modo análogo ao usado para adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir números reais.
A soma e a diferença são definidas, respetivamente, por:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ e } (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

O produto e o quociente são definidos, respetivamente, por:

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ e } (f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Representando por D_f o domínio de f e por D_g o domínio de g, tanto o domínio de $f+g$ como o domínio de $f-g$ ou o domínio de fg é a interseção $D_f \cap D_g$.
Como não podemos dividir por 0, o domínio de f/g é $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

Consideraremos ainda outro modo de combinar funções:

Definição

Dadas duas funções f e g, a função composta $f \circ g$ (também dita composta de f com g) define-se por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$. Por outras palavras, $(f \circ g)(x)$ está definido quando tanto $g(x)$ como $f(g(x))$ estão definidos.

Exemplo

Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$. Encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

O exemplo anterior permite concluir que a composição de funções não é, em geral, comutativa. De facto, por exemplo, $(f \circ g)(0) = 9 \neq -3 = (g \circ f)(0)$.

Funções exponenciais

Uma *função exponencial* é uma função da forma

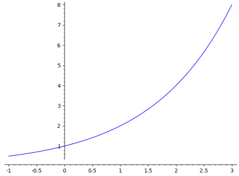
$$f(x) = b^x$$

onde b é uma constante positiva.
Se $x = n$ for um inteiro positivo, b^n é o produto de n fatorers b.
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$. Tem-se $b^0 = 1$.
Se x for um número racional, $x = p/q$, com p e q inteiros e $q > 0$, então

$$b^x = b^{(p/q)} = \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p$$

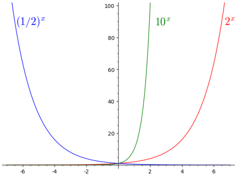
Esta definição pode ser estendida a números reais, exigindo que a extensão seja uma função contínua.

A figura ao lado é o gráfico da função $f(x) = 2^x$, com x real.



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Mais gráficos de funções exponenciais são mostrados na figura ao lado.



Abaixo mostra-se também o código *sage* usado para gerar a figura. Sugere-se a adaptação deste para obter outros exemplos.

```
exp2 = plot((2)^x,color='red',xmin=-7,xmax=7,ymin=0,ymax=100)
leg2 = text('$2^x$',(6,90),fontsize=20,color='red')
exp10 =plot(10^x,color='green',xmin=-7,xmax=7,ymin=0,ymax=100)
leg10 = text('$10^x$',(3,90),fontsize=20,color='green')
expmeio = plot((1/2)^x,color='blue',xmin=-7,xmax=7,ymin=0,ymax=100)
legmeio = text('$(1/2)^x$',(-6,90),fontsize=20,color='blue')
exponenciais = exp2+leg2+exp10+leg10+expmeio+legmeio
exponenciais.show()
```

Concluirá que existem essencialmente 3 tipos de exponenciais: a de base $b = 1$, que é constante; a de base $b > 1$, que é crescente; e a de base $b < 1$, que é decrescente.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Leis dos expoentes Se a e b forem números reais positivos e x e y números reais quaisquer, então

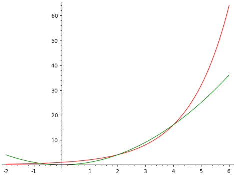
1. $b^{x+y} = b^x b^y$;
2. $b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$;
3. $(b^x)^y = b^{xy}$;
4. $(ab)^x = a^x b^x$.

Exemplo

Compare gráficos de funções exponenciais com gráficos de funções polinomiais à sua escolha.

A figura ao lago obtém-se usando o código *sage* abaixo. Pode obter outros exemplos adaptando este código.

```
e = plot(2^x,color='red',xmin=-2,xmax=6)
p = plot(x^2,color='green',xmin=-2,xmax=6)
(e+p).show()
```



FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Funções exponenciais ocorrem com frequência em modelos matemáticos tanto da natureza como da sociedade.

Vejamos um exemplo de crescimento populacional.

Consideremos uma população de bactérias em condições ideais (ambiente e comida ilimitados, ausência de predadores e doenças, etc).

Suponhamos que por amostragem da população em certos intervalos de tempo se determina que a população duplica a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, com t medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1000$, então temos

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

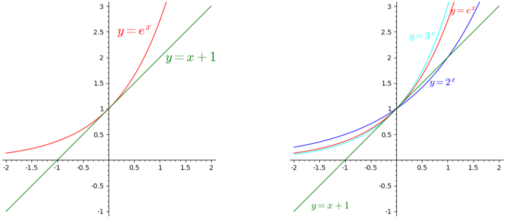
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

O crescimento segue um padrão

$$p(t) = 2p(2) = 2^t \times 1000$$

O número *e*

De entre as possíveis bases para uma função exponencial há uma que é mais conveniente do ponto de vista do *cálculo*. Essa base, o número e, é tal que o declive da tangente ao seu gráfico no ponto em que este corta o eixo dos y (o ponto $(0, 1)$) é precisamente 1.



Os gráficos acima sugerem que $2 < e < 3$. Uma aproximação com 5 casas decimais é:

$$e \simeq 2.71828$$

A função $f(x) = e^x$ diz-se a **função exponencial natural**.

Funções inversas e logaritmos

Uma função f diz-se *injetiva* se objetos diferentes têm imagens diferentes, isto é, se para quaisquer x e x' do domínio de f se tem

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou, o que é o mesmo, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Existe um método geométrico para ver se uma função é injetiva:

Teste da reta horizontal

Uma função é injetiva se e só se nenhuma reta horizontal intersetar o seu gráfico mais que uma vez.

As funções injetivas são precisamente aquelas que têm inversa, no sentido da definição que segue.

Definição

Seja f uma função injetiva com domínio A e contradomínio B. Chama-se função inversa de f, e representa-se por f^{-1}, à função de domínio B e contradomínio A definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

para todo o $y \in B$.

A letra x é geralmente usada como variável independente, pelo que quando estamos interessados em f^{-1} em vez de f, revertemos os papéis de x e de y na definição anterior e escrevemos

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Mediante substituições adequadas obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo o } x \in A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para todo o } x \in B$$

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. As leis de cancelamento dizem-nos:

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x; \quad f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Vejamos agora um método que nos permite em muitos casos encontrar uma expressão para a função inversa de uma função dada.

Se tivermos a função $y = f(x)$ e conseguirmos resolver esta equação em ordem a x em termos de y, então, resolvendo, obtemos necessariamente $x = f^{-1}(y)$. Se quisermos dar o nome de x à variável independente (isto é, escrever f^{-1} como função de x), trocamos as variáveis e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

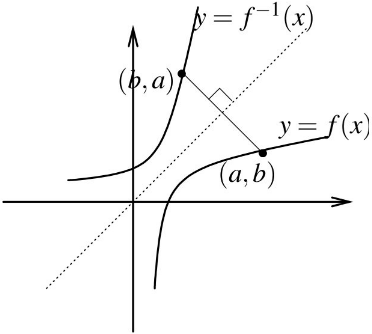
Exemplo

Encontre a inversa da função $f(x) = x^3 + 2$.

Solução:
Começamos por escrever $y = x^3 + 2$. Resolvendo em ordem a x obtemos: $x = \sqrt[3]{y-2}$.
Trocando as variáveis obtemos: $y = \sqrt[3]{x-2}$.
Resulta que a função inversa de f é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

O princípio de trocar as variáveis x e y para encontrar a inversa de uma função fornece-nos um método para esboçar o gráfico de f^{-1} a partir do gráfico de f.
Como $f(a) = b$ se e só se $f^{-1}(b) = a$, tem-se que o ponto (a, b) pertence ao gráfico de f se e só se o ponto (b, a) pertencer ao gráfico de f^{-1}.

Mas o ponto (b, a) obtém-se de (a, b) por reflexão em relação à reta $y = x$, Assim, o gráfico de f^{-1} pode obter-se do de f por reflexão em relação à reta $y = x$.



Funções logarítmicas

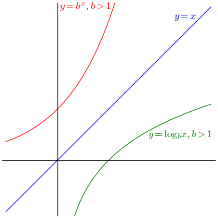
Se $b>0$ e $b\neq 1$, a função exponencial $f(x)=b^x$ ou é crescente (se $b>1$) ou é decrescente (se $0<b<1$) e, portanto, injetiva. Logo f tem uma função inversa f^{-1}, a qual se diz a **função logaritmo de base b** e se denota por $\log_b$.
Tem-se então:

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

As leis de cancelamento aplicadas às funções $f(x)=b^x$ e $f^{-1}(x)=\log_b x$ tornam-se:

$$\log_b(b^x) = x \text{ para todo o } x\in\mathbb{R}$$
$$b^{\log_b x} = x \text{ para todo o } x>0$$

Por ser inversa da função exponencial b^x de base $b>0$ e $b\neq 1$, a função logaritmo $\log_b x$ tem domínio $(0,+\infty)$ e contradomínio $\mathbb{R}$. O seu gráfico obtém-se por uma reflexão do gráfico de $y=b^x$ em torno da reta $y=x$. A figura ao lado ilustra o caso em que $b>1$, o mais interessante.



Note-se que enquanto que a função exponencial cresce muito depressa, a função logaritmo cresce muito devagar.

As propriedades seguintes dos logaritmos seguem das correspondentes propriedades das funções exponenciais.

Leis dos logaritmos

Se x e y forem números reais positivos, então

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$;
2. $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$;
3. $\log_b(x^r) = r \log_b x$ (onde r é um número real qualquer).

Exemplo

Calcule $\log_2 80 - \log_2 5$.

Solução: $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2(\frac{80}{5}) = \log_2 16 = \log_2(2^4) = 4$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

O logaritmo natural

De entre as possíveis bases para logaritmos, o número e é a escolha mais conveniente (como se tornará claro mais tarde). O logaritmo de base e diz-se o *logaritmo natural* e usaremos uma notação especial para ele:

$$\log_e x = \ln x$$

Escrevemos para o logaritmo natural algumas propriedades antes escritas para logaritmos de qualquer base positiva e diferente de 1:

- $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$;
- $\ln(e^x) = x \quad$ para todo o $x \in \mathbb{R}$;
- $e^{\ln x} = x \quad$ para todo o $x > 0$.

Exemplo

Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

Solução: Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros da equação obtemos: $\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$. Daqui resulta $5 - 3x = \ln 10$ e depois $3x = 5 - \ln 10$. Finalmente temos $x = \frac{1}{3}(5 - \ln 10)$, ou $x = \frac{1}{3}(5 + \ln \frac{1}{10})$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Logaritmos de qualquer base podem ser escritos em termos do logaritmo natural.

Proposição (Fórmula de mudança de base)

Para qualquer número real positivo b, com $b \neq 1$, tem-se

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Demonstração.

Seja $y = \log_b x$. Então $b^y = x$. Tomando o logaritmo natural em ambos os membros da igualdade obtemos $y \ln b = \ln x$. Observando que $\ln b \neq 0$ (pois $b \neq 1$), podemos escrever

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \qquad \square$$

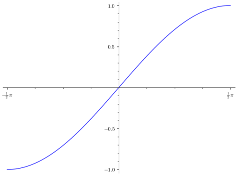
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Funções trigonométricas inversas

Ao procurar inverter funções trigonométricas deparamo-nos com uma dificuldade: elas não são injetivas, logo não são invertíveis!
O que podemos fazer é considerar restrições apropriadas dos domínios de modo a obter funções injetivas.

Por exemplo, a função

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \text{ com } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$



é injetiva.

A inversa desta restrição da função seno existe, chama-se **arco seno** e denota-se por arcsen (ou sen^{-1}).
Lembrando que a definição de função inversa diz que

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

temos

$$\operatorname{arcsen}(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{sen}(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

As equações de cancelamento tomam a seguinte forma:

$$\arcsin(\operatorname{sen} x)) = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \text{ para } -1 \leq x \leq 1$$

Com argumentos inteiramente análogos aos usados no caso do seno podemos definir a função **arco cosseno**, inversa do cosseno (com o domínio restringido a $[0, \pi]$), e a função **arco tangente**, inversa da tangente (com o domínio restringido a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).
Tem-se:

$$\arccos(x) = y \Leftrightarrow \cos(y) = x \text{ e } 0 \leq x \leq \pi$$

$$\operatorname{arctg}(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{tg}(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Exemplo

Simplifique a expressão $\cos(\operatorname{arctg}(x))$.

Solução 1: Seja $y = \operatorname{arctg} x$. Então $\operatorname{tg} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Queremos encontrar $\cos y$. Da conhecida fórmula (fundamental da trigonometria)

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

obtemos

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

Resulta que

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{ note que } \cos y > 0)$$

e, portanto

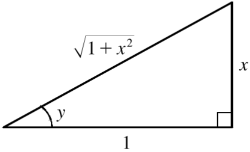
$$\cos(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Seguidamente vemos outra solução. Aí não recorremos a fórmulas trigonométricas.

Solução 2:

Se $y = \operatorname{arctg} x$, então $\operatorname{tg} y = x$. De figura ao lado (que ilustra o caso $y > 0$), concluímos que

$$\cos(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$



2 Limites e derivadas

...

O limite de uma função

Os limites surgem naturalmente, por exemplo, quando procuramos encontrar a tangente a uma curva num ponto da mesma ou a velocidade de um objeto.
Intuitivamente,

- a tangente a uma curva num ponto P da curva é uma reta que passa por P e tem como declive o limite dos declives das secantes à curva que passam por P e por pontos da curva cada vez mais próximos de P;
- a velocidade instantânea de um objeto, num instante t_0, surge como limite da velocidade média do objeto considerando intervalos de tempo contendo t_0 cada vez mais pequenos.

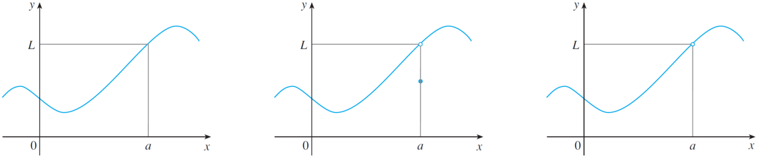
Seguidamente vamos voltar-nos para limites em geral. Para já vamos pensar em métodos gráficos.
(Sugere-se ver na bibliografia alguns exemplos usando métodos numéricos.)

Definição intuitiva de limite Suponhamos que $f(x)$ está definida perto de um número a. (Queremos com isto dizer que f está definida nalgum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a.) Então dizemos que *o limite de $f(x)$, quando x tende para a é L,* e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando podemos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L restringindo x a valores suficientemente próximos de a (de qualquer dos lados de a), mas diferentes de a.

Adiante daremos uma definição precisa (sem recurso à noção intuitiva de proximidade).
Note-se que "$x \neq a$" faz parte da definição. Para qualquer das funções representadas nas figuras seguintes tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



(a) (b) (c)

Exemplo

Considere a tabela ao lado onde são dados valores aproximados de $\frac{\text{sen}\,x}{x}$ para alguns valores de x que se aproximam de 0.
Note que $\frac{\text{sen}\,x}{x}$ não está definida em 0.

Qual lhe parece ser o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}$?

x	$\frac{\text{sen}\,x}{x}$
$\pm\, 0.1$	0.84147098
$\pm\, 0.5$	0.95885108
$\pm\, 0.4$	0.97354586
$\pm\, 0.3$	0.98506736
$\pm\, 0.2$	0.99334665
$\pm\, 0.1$	0.99833417
$\pm\, 0.05$	0.99958339
$\pm\, 0.01$	0.99998333
$\pm\, 0.005$	0.99999583
$\pm\, 0.001$	0.99999983

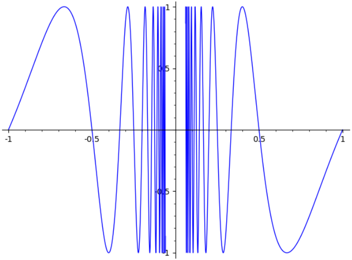
Mais tarde veremos que este limite é (de facto) igual a 1.

Exemplo

Consegue adivinhar quanto vale $\lim_{x\to 0} \text{sen}\, \frac{\pi}{x}$?

Esta função também não está definida em 0.
Para $x = 1/n$, com n inteiro não nulo, tem-se $\text{sen}\, \frac{\pi}{x} = \text{sen}\, n\pi = 0$.
Note que quando n é grande (positivo ou negativo), $1/n$ aproxima-se de 0.

Se a sua aposta foi 0 (ou outro número qualquer) errou, como deve ficar claro do gráfico seguinte.



Exercício

Encontre uma infinidade de valores x que se aproximam de 0 e são tais que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 1$

(Por exemplo, a função considerada vale 1 em $2/5$.)

Limites laterais

Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o *limite esquerdo de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a (ou *o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *por valores menores que* a) é igual a L se podermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente próximo de a, com x menor que a.
Tem-se uma definição análoga para limite lateral direito, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Comparando a definição de limite com as definições de limites laterais temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ se e só se } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Limites infinitos

Definição intuitiva de um limite infinito

Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados arbitrariamente grandes tomando x suficientemente próximo de a, mas diferente de a.

De modo análogo define-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Também podemos definir limites laterais de modo semelhante:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

Definição

Uma reta vertical $x = a$ diz-se uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Regras de cálculo dos limites

Seja c uma constante positiva e suponhamos que os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x)$$

existem. Então

1. O limite da soma é a soma dos limites:
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
2. O limite da diferença é a diferença dos limites:
$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$
3. O limite do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pelo limite da função:
$$\lim_{x \to a} (cg(x)) = c \lim_{x \to a} g(x)$$
4. O limite do produto é o produto dos limites:
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$
5. O limite do quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja 0):
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \text{ se } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

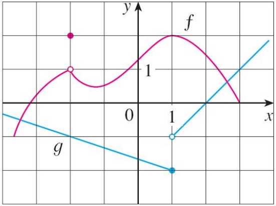
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

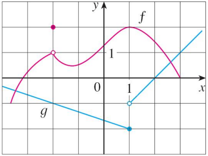
As regras anteriores valem também para limites laterais.

Exemplo

Considere as funções f e g da figura ao lado. Use as regras dos limites para calcular os seguintes limites, caso existam.

1. $\lim_{x\to -2}(f(x) + 5g(x))$
2. $\lim_{x\to 1}(f(x) \cdot g(x))$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$





Solução:

1. Do gráfico concluímos que $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to -2} g(x) = -1$. Logo $\lim_{x\to -2}(f(x) + 5g(x)) = 1 + 5(-1) = -4$.
2. Tem-se $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, mas não existe $\lim_{x\to 1} g(x)$, porque os limites laterais são diferentes: $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$. Assim, a regra dada para o produto de limites não pode ser aplicada. Mas pode ser aplicada a correspondente regra para limites laterais, tendo-se $\lim_{x\to 1^-} f(x)g(x) = 2(-2) = -4$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)g(x) = 2(-1) = -2$. Concluímos que os limites laterais são diferentes, pelo que $\lim_{x\to 2} f(x)g(x)$ não existe.
3. Tem-se que $\lim_{x\to 2} f(x)$ é um número diferente de 0 (aproximadamente 1.5) e $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$. Não pode ser aplicada a regra da derivada do quociente porque o limite do denominador é 0. Como o limite do numerador não é 0, concluímos que o limite não existe. (Se fosse 0 teríamos uma indeterminação... Estudaremos mais tarde um processo de levantamento de indeterminações.)

Da regra do produto resulta a regra da potência:

- $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^n$, onde n é um inteiro.

Os seguintes limites são intuitivamente óbvios. Poderão ser provados quando for dada a definição formal de limite.

- $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = a$

Usando regras anteriores obtemos:

- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, onde n é um inteiro.

Vale um resultado semelhante para raízes:

- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, onde n é um inteiro.
  (Se n for par, assumimos que $a > 0$.)

e, mais geralmente, vale a *regra da raiz*:

- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, onde n é um inteiro.
  (Se n for par, assumimos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.)

Exercício

Use as regras dadas para calcular os limites seguintes:

1. $\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$;
2. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

Solução: 1. 39;   2. -1/12.

Note que em qualquer das alíneas do exercício anterior o limite da expressão é calculado num ponto do domínio dessa expressão. O resultado obtém-se por meio de uma substituição direta.
(As funções para as quais isso acontece são as funções contínuas.)

Nem todos os limites podem ser calculados por substituição direta, como o seguinte exemplo mostra.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Solução: Seja $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$.

Como f não está definida em 1, o limite não pode ser calculado por substituição direta.

Também não podemos aplicar a regra do quociente, porque o limite do denominador é 0.

Comecemos por fazer algumas manipulações algébricas:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

O numerador e o denominador tem um fator comum: $x-1$. Queremos calcular o limite quando x tende para 1, pelo que consideramos $x \neq 1$, ou seja $x-1 \neq 0$. Consequentemente podemos cancelar o fator comum $x-1$. Assim, podemos escrever a seguinte sucessão de igualdades:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1)\\ &= 1+1 = 2\end{aligned}$$

Algumas propriedades

- $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se e só se $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$
- Se $f(x) \leq g(x)$ para x próximo de a (exceto possivelmente para $x = a$) e existem $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

- Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para x próximo de a (exceto possivelmente para $x = a$) e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Exercício

Calcule ou mostre que não existe:

1. $\lim_{x\to 0} |x|$;
2. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

Solução: 1. 0; 2. não existe.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

A terceira propriedade do slide anterior é conhecida por *teorema das funções enquadradas*.

Exemplo

Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0.$

Solução:
Como fizemos num exemplo anterior, podemos mostrar que não existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, pelo que **não** podemos escrever

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}.$$

Sabemos que

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$$

Como $x^2 \geq 0$ qualquer que seja o número real x, podemos multiplicar por x^2 todos os membros das desigualdades mantendo o sentido dessas desigualdades:

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$$

Sabemos que $\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$. A conclusão segue do teorema das funções enquadradas.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

A definição de limite

Foi apresentada antes uma definição intuitiva de limite. Em muitas situações (por exemplo em demonstrações rigorosas, sem as quais não se faz matemática) temos a necessidade de uma definição formal. Para motivar a definição que daremos a seguir, vejamos um exemplo.

Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 6 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Intuitivamente é claro que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.
Vamos procurar ter uma melhor informação sobre como $f(x)$ varia quando x se aproxima de 3. Para o efeito fazemos a seguinte pergunta:

Quão perto de 3 tem de estar x para que $f(x)$ esteja a uma distância de 5 não superior a 0.1?

A distância de x a 3 é $|x-3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x)-5|$, pelo que o nosso problema é encontrar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \text{ se } |x-3| < \delta \text{ com } x \neq 3$$

ou seja

$$|f(x) - 5| < 0.1 \text{ se } 0 < |x-3| < \delta$$

Note-se que se $0 < |x-3| < (0.1)/2 = 0.05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x-1) - 5| = |2x-6| = 2|x-3| = 2 \cdot (0.05) = 0.1$$

Resulta que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \text{ se } 0 < |x-3| < 0.05$$

Uma resposta ao nosso problema é $\delta = 0.05$: se x estiver a uma distância menor que 0.05 de 3, então $f(x)$ está a uma distância menor que 0.1 de 5.

E se em lugar de 0.1 tivéssemos considerado 0.01? E 0.001? O mesmo raciocínio permite-nos concluir que para qualquer número positivo ϵ se tem

$$|f(x) - 5| < \epsilon \text{ se } 0 < |x-3| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

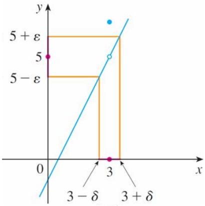
Isto é um modo preciso de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois (1) diz que podemos fazer com que $f(x)$ esteja a uma distância de 5 menor que ϵ restringindo os valores de x aos que estão a uma distância de 3 menor que $\epsilon/2$ (e são diferentes de 3).

Note-se que (1) pode ser escrita como:

$$\text{se } 0 < |x-3| < \delta \text{ então } |f(x)-5| < \epsilon$$

ou

$$\text{se } 3-\delta < x < 3+\delta \ (x \neq 3) \text{ então } 5-\epsilon < f(x) < 5+\epsilon$$



Definição

Seja f uma função definida nalgum intervalo aberto contendo o número a, exceto possivelmente em a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para qualquer número real $\epsilon > 0$ existir um número real $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |f(x)-L| < \epsilon$$

Exemplo

Prove, pela definição, que $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$.

Solução:

1. Há uma fase preliminar em que tentamos adivinhar δ.
   Seja ϵ um número positivo. Queremos que δ satisfaça:

   $$\text{se } 0<|x-3|<\delta, \text{ então } |(4x-5)-7|<\epsilon$$

   Ora, $|(4x-5)-7|=|4x-12|=4|x-3|$. Queremos δ tal que:

   $$\text{se } 0<|x-3|<\delta \text{ então } 4|x-3|<\epsilon$$

   ou seja

   $$\text{se } 0<|x-3|<\delta \text{ então } |x-3|<\epsilon/4$$

   o que sugere que $\delta=\epsilon/4$ funciona.
2. Resta prová-lo.

Seja $\epsilon > 0$, e escolhamos $\delta = \epsilon/4$.
Tem-se que se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4(\epsilon/4) = \epsilon$$

Logo,

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta, \text{ então } |(4x - 5) - 7| < \epsilon$$

Concluímos assim, pela definição de limite, que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

As regras de cálculo antes mencionadas podem agora agora ser demonstradas. Veja na literatura alguma dessas demonstrações.

(Provar que o limite da soma é a soma dos limites, quando estes existem, não é difícil. Usa a (conhecida) desigualdade triangular:
$|a + b| \leq |a| + |b|$.)

As definições intuitivas dadas para limites laterais podem ser tornadas precisas de forma análoga.

Definição

1. $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

   se para qualquer número real $\epsilon > 0$ *existir um número real* $\delta > 0$ *tal que*

   $$\text{se } a - \delta < x < a \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

2. $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

   se para qualquer número real $\epsilon > 0$ *existir um número real* $\delta > 0$ *tal que*

   $$\text{se } a < x < a + \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

O mesmo acontece com limites infinitos e limites laterais infinitos. Por exemplo:

Definição

Seja f uma função definida nalgum intervalo aberto contendo o número a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se para qualquer número real positivo M existe um número real $\delta > 0$ tal que

$$\textit{se } 0 < |x - a| < \delta \textit{ então } f(x) > M$$

Exercício

Escreva definições para $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e também para limites laterais infinitos.

Continuidade

Apercebemo-nos antes que há algumas funções para as quais o limite quando x tende para a pode ser calculado avaliando a função em a.

Definição

Uma função f diz-se contínua em a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Note-se que a definição implicitamente requer:

1. que f esteja definida em a (ou seja, que a esteja no domínio de f);
2. que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista;
3. que se tenha $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A definição diz que uma função f é contínua em a se $f(x)$ se aproxima de $f(a)$ quando x se aproxima de a.

Se f estiver definida perto de a (ou seja, se f estiver definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), diz-se que f é *descontínua em a* se f não for contínua em a.

As noções de continuidade à direita e à esquerda definem-se de modo análogo, agora usando as noções de limite à direita e à esquerda, respetivamente.

Definição

Uma função f diz-se contínua à direita em a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Uma função f diz-se contínua à esquerda em a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Definição

Uma função diz-se contínua num intervalo se for contínua em todo o ponto desse intervalo.
(No caso de f apenas estar definida num dos lados de um extremo do intervalo, entendemos a continuidade nesse extremo como sendo a continuidade lateral que for aplicável.)

O resultado seguinte segue diretamente das correspondentes regras para o cálculo de limites dadas antes.

Teorema

Se f e g são contínuas em a e c é uma constante, então as funções seguintes também são contínuas em a:

$$f+g; \qquad f-g; \qquad cf; \qquad fg; \qquad f/g, \quad se \quad g(a) \neq 0$$

Deste resultado e da definição de função contínua num intervalo segue que se f e g forem contínuas num dado intervalo, então as funções $f+g, \quad f-g, \quad cf$ e fg também são contínuas nesse intervalo. Se, além de ser contínua, g não se anular no intervalo, então f/g também é contínua no mesmo intervalo.

Teorema

1. *Qualquer função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.*
2. *Qualquer função racional é contínua em todo o ponto onde está definida (isto é, é contínua no seu domínio).*

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Com algum trabalho, que pode ser encarado como a realização de um conjunto dirigido de exercícios, pode provar-se que o seno e o cosseno são funções contínuas em todos os pontos do seu domínio.
Consequentemente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é contínua em todos os números reais em que o cosseno não se anula, logo em todos os pontos do seu domínio.
Definimos as funções exponenciais estendendo a $\mathbb{R}$ a definição dada para números racionais por forma a que a nova função definida em $\mathbb{R}$ fosse contínua.
Pode provar-se que a inversa de uma função injetiva contínua é contínua. (A nossa intuição geométrica torna este facto plausível: o gráfico de f^{-1} obtém-se do gráfico de f por uma reflexão sobre o eixo $y = x$. Assim, se podemos esboçar o gráfico de f sem levantar o lápis do papel, o mesmo acontecerá com o gráfico de f^{-1}.)

Como consequência temos que as funções familiares que temos vindo a definir são contínuas em todos os pontos do seu domínio:

Teorema

Os seguintes tipos de funções são contínuas em todos os pontos do seu domínio:

- *polinómios;*
- *funções racionais;*
- *raízes;*
- *funções trigonométricas;*
- *funções trigonométricas inversas;*
- *funções exponenciais;*
- *funções logarítmicas.*

Uma outra forma de combinar funções e obter funções contínuas é a composição de funções. Esse facto é consequência do seguinte resultado:

Teorema

Se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. Por outras palavras,

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

Este resultado é intuitivamente razoável: se x se aproxima de a, então $g(x)$ aproxima-se de b, e como f é contínua em b, se $g(x)$ se aproxima de b, então $f(g(x))$ aproxima-se de $f(b)$. Para uma prova, sugere-se consultar a literatura.

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

Solução: Como a função arcsen é contínua, podemos aplicar o resultado anterior.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)\\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\
&= \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

O resultado seguinte pode ser referido informalmente dizendo que "a composta de uma função contínua com uma função contínua é uma função contínua".

Teorema

Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$, definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Demonstração.

Como g é contínua em a, tem-se

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Como f é contínua em $b = g(a)$, podemos aplicar o resultado anterior para obter

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que nos diz precisamente que $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a, ou seja, $f \circ g$ é contínua em a. $\square$

Exemplo

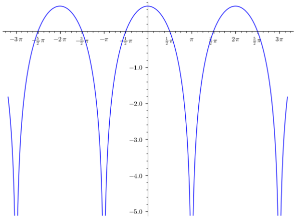
A função $h(x) = \text{sen}(x^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Basta notar que $h = f \circ g$ onde $g(x) = x^2$ e $f(x) = \text{sen}(x)$, e estas são funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Diga em que pontos é que $\quad F(x) = \ln(1 + \cos x) \quad$ é contínua.

Solução:

Como $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 1 + \cos x$ são contínuas, a composta $F(x) = f(g(x))$ é contínua em todos os pontos do seu domínio. Ora, $\ln(1+\cos x)$ está definida precisamente quando $1 + \cos x > 0$. Logo $\ln(1 + \cos x)$ não está definida quando $\cos x = -1$, o que acontece quando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$.

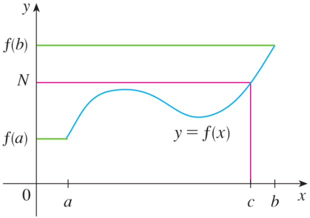


Outro resultado importante (cuja demonstração pode ser encontrada em livros de cálculo mais avançados) é o seguinte, conhecido por **Teorema dos valores intermédios**:

Teorema

Suponhamos que f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$ e seja N um número tal que $f(a) \leq N \leq f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

A figura ao lado ilustra o facto estabelecido pelo teorema: uma função contínua num intervalo $[a, b]$ toma todos os valores intermédios entre $f(a)$ e $f(b)$.



Exemplo

Mostre que existe uma solução da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Tem-se

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

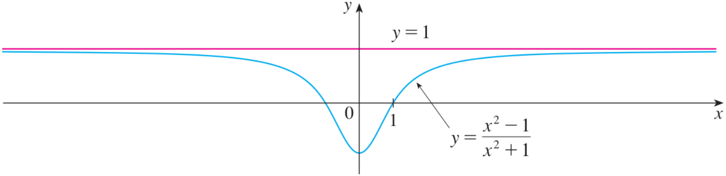
pelo que 0 está entre $f(1)$ e $f(2)$.
Como f é uma função contínua (pois é uma função polinomial), o Teorema dos Valores Intermédios garante-nos que existe um número c no intervalo $(1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Limites no infinito; assíntotas horizontais

Até agora interessou-nos perceber qual era o comportamento de y quando x se aproximava de um número. Por vezes obtivemos assíntotas verticais (quando y se tornava arbitrariamente grande, positivo ou negativo).

Agora vamos procurar ver o que se passa com y quando x se torna arbitrariamente grande (positivo ou negativo).

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ cujo gráfico está representado a seguir.



Quando x se torna grande o gráfico de $f(x)$ aproxima-se da reta horizontal $y = 1$. Parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos quanto quisermos de 1 tomando x suficientemente grande.

Exprimimos esta situação escrevendo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$.

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

para indicar que os valores de $f(x)$ se aproximam de L à medida que x se torna cada vez mais grande.

Definição intuitiva de limite no infinito Seja f uma função definida num intervalo $(a, +\infty)$. Então

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos quanto quisermos de L exigindo que x seja suficientemente grande.

Quando se tem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, é habitual dizer-se, apesar de $+\infty$ não ser um número, que o limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito, é L.

A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ podia ser também usada para motivar a definição de limite quando x se torna grande negativo (ou quando x tende para $-\infty$, como também se diz).
A notação usada neste caso é $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Definição

A reta $y = L$ diz-se uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

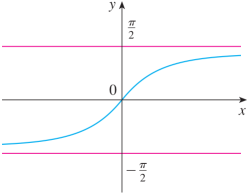
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \textit{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Exemplos

1. A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ considerada antes tem uma única assíntota horizontal $y = 1$.
2. A curva $y = \operatorname{arctg} x$ tem duas assíntotas horizontais.
   De facto, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

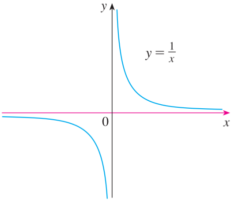
   pelo que as retas $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais.



3. Quando x se torna grande (positivo ou negativo), $1/x$ aproxima-se de 0.
   Assim, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

   pelo que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal da curva $y = 1/x$



As maior parte das regras dadas para o cálculo de limites (de facto, de entre elas basta excluir $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ e $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$) vale para limites no infinito, bastando substituir $x \to a$ por $x \to \infty$.
Combinando algumas dessas regras com o exemplo anterior, obtemos:

- Se $r > 0$ é um número racional, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

- Se $r > 0$ é um número racional tal que x^r está definido para todo o x, então

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Exercício

Calcule $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.
Solução: $3/5$
Sugestão: divida pela maior potência de x o numerador e o denominador da função racional. (Note que pode supor $x \neq 0$, pois apenas está interessado em valores grandes de x.)

Exemplo

Encontre as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Ao calcular o limite quando $x \to +\infty$, podemos assumir que $x > 5/3$. Observamos que

$$\text{se } 3x-5>0, \text{ então } 3x-5 = |3x-5| = \sqrt{(3x-5)^2}.$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{(3x-5)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2+1}{(3x-5)^2}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{(3x-5)^2}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{9x^2-30x+25}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Analogamente, ao calcular o limite quando $x \to -\infty$ podemos assumir que $x < 5/3$. Tem-se:

$$\text{se } 3x - 5 < 0, \text{ então } 3x - 5 = -|3x - 5| = -\sqrt{(3x-5)^2},$$

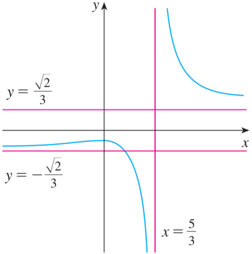
e então:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{(3x-5)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Se houver alguma assíntota vertical, ela ocorrerá quando o denominador se anula, isto é, quando $x = 5/3$. O numerador, $\sqrt{2x^2+1}$, é sempre positivo. Tem-se então

$$\lim_{x \to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

Concluímos assim que
$y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$
são assíntotas horizontais
e que $x = 5/3$ é assíntota vertical.
Todas estas assíntotas são destacadas na figura ao lado.



Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$ (usando o facto: $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$).

Solução: Fazendo $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$.
Então, $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x$.

Solução: Quando x cresce, os valores de $\operatorname{sen} x$ oscilam entre -1 e 1, pelo que não se aproximam de um número. Consequentemente,
$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x$ não existe.

Limites infinitos no infinito

Usa-se a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

para indicar que os valaores de $f(x)$ se tornam grandes à medida que x se torna grande.

Quando estão envolvidos números grandes negativos usam-se notações análogas, com algum $-\infty$ em vez de $+\infty$.

Exemplo

Encontre $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$.

Solução: Dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparece no denominador, a qual neste caso é simplesmente x.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\frac{3}{x} - 1} = -\infty$$

pois $x + 1 \to +\infty$ e $3/x - 1 \to 0 - 1 = -1$ quando $x \to +\infty$.

Definição

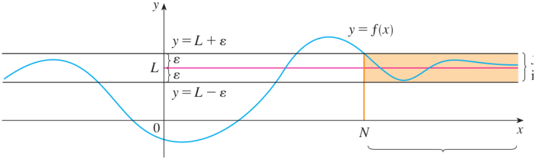
Seja f uma função definida nalgum intervalo $(a, +\infty)$. Então

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um número real N tal que

$$\text{se } x > N \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

A figura seguinte poderá ajudar a perceber a definição.



Para os outros limites considerados nesta secção também podem ser dadas definições formais. (Faça-o como exercício.)

Uso do sage para calcular limites

Sugere-se o uso do comando *sage* `limit` (ou apenas `lim`) para verificar os resultados obtidos nas resoluções de exercícios.
A sessão *sage* seguinte, na qual se ilustram sintaxes possíveis, foi criada a partir de exercícios das folhas disponibilizadas.

```
sage: limit((x^2+3*x)/(x^2-x+12), x=4)
7/6
sage: lim(((4*x+1)^(1/2)-3)/(x-2), x=2)
2/3
sage: lim((x+3)^(-4), x=-3)
+Infinity
sage: lim((x+3)^(-3), x=-3,dir='plus')
+Infinity
sage: lim((x+3)^(-3), x=-3,dir='minus')
-Infinity
sage: lim(exp(-2*x)*cos(x),x=+infinity)
0
sage: f(x)=((4*x+1)^(1/2)-3)/(x-2)
sage: lim(f(x),x=-infinity)
0
```

Derivadas e taxas de variação

Os problemas de encontrar a tangente a uma curva e de encontrar a velocidade de um objeto envolvem a procura de um mesmo tipo de limite. A este tipo de limite chamaremos derivada. Pode ser intrepretado como uma taxa de variação tanto em ciências naturais ou sociais como em engenharia.

Definição

A derivada de uma função f num número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se este limite existir.

Escrevendo $x = a + h$, temos que $h = x - a$ e h aproxima-se de 0 se e só se x se aproxima de a. Assim, um modo equivalente de definir derivada de uma função f num número a é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A função derivada

Consideramos antes a derivada de uma função f num ponto a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vamos agora mudar o ponto de vista e fazer a variar. Substituindo a por x na equação acima, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Quando x é tal que este limite existe, associamos a x o número $f'(x)$.
Podemos assim ver f' como uma nova função, dita a derivada de f.
O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$. Pode estar estritamente contido no domínio de f.
Lembramos que $f'(x)$ pode ser interpretado geometricamente como o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

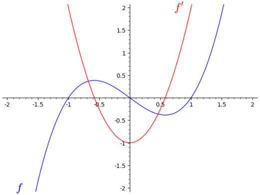
Exemplo

Considere a função $f(x) = x^3 - x$.

1. Encontre uma expressão para $f'(x)$.
2. Esboce os gráficos de f e de f'. O gráfico de f' é o que obteria a partir de estimativas dos declives das tangentes ao gráfico de f?

Solução: (Adiante veremos regras de derivação que nos permitem encontrar facilmente a expressão pedida.)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^3 - (x+h)) - (x^3 - x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1
\end{aligned}
$$



Note-se que $f'(x) = 0$ quando f tem tangentes horizontais; $f'(x)$ é positivo quando o declive da tandente é positivo e é negativo caso contrário.

Definição

Uma função f diz-se derivável (ou diferenciável) em a se existir $f'(a)$. Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) num intervalo aberto (possivelmente ilimitado) se for derivável em todo número desse intervalo.

Exemplo

A função $f(x) = |x|$ é derivável?

Solução. Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente suficientemente próximo de 0 por forma a ter $x + h > 0$ e, portanto, $|x + h| = x + h$.
Assim, para $x > 0$ tem-se

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1
\end{aligned}
$$

concluindo-se assim que f é derivável para qualquer $x > 0$.
De modo análogo, se $x < 0$, então $|x| = -x$ e podemos escolher h próximo de 0 por forma a ter $x + h < 0$ e, portanto, $|x + h| = -(x + h)$.
Procedendo como antes, obtemos, para $x < 0$, $\quad f'(x) = -1 \quad$ pelo que f também é derivável quando $x < 0$.

Vejamos agora se $f(x) = |x|$ é derivável em 0. Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

tem-se que f é derivável em 0 se existir o limite $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$.
Calculemos separadamente os limites laterais:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

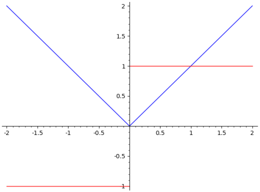
e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

Como estes são diferentes, concluímos que $f'(0)$ não existe.
A função f' é dada pela expressão:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O facto de não existir $f'(0)$ está refletido geometricamente no facto de a curva $y = |x|$ não ter tangente em $(0, 0)$.



Observação

O exemplo anterior diz-nos que pode acontecer uma função ser contínua num número e não ser derivável nesse número.

Mas uma função derivável é necessariamente contínua, como o resultado seguinte afirma.

Teorema

Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

Demonstração.

Para provar que f é contínua em a devemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$.

Por f ser derivável, existe o limite $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Assumindo que $x \neq a$ (algo que podemos fazer quando está envolvido um limite quando x tende para a), podemos escrever:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Então: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + (f(x) - f(a))) = f(a) + 0 = f(a)$.

Logo f é contínua. $\square$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Existem notações alternativas para a derivada de uma função $y = f(x)$:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

A notação $\frac{dy}{dx}$ é devida a Leibniz.

Querendo indicar a derivada no ponto x_0, podemos usar notações como por exemplo $f'(x_0)$ ou $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Derivadas de ordem superior

Se f for uma função derivável, a sua derivada f' também é uma função. Esta pode, ela própria, ter a sua derivada. Usa-se a notação $(f')' = f''$. Usando a notação de Leibniz, a segunda derivada de $y = f(x)$ denota-se do seguinte modo:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

O processo de derivação pode continuar. Tem-se a terceira derivada (denotada f''') e, mais geralmente, a n-ésima. Para a n-ésima derivada usa-se a notação $f^{(n)}$. Se $y = f(x)$ também podemos escrever

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

3 Regras de derivação

...

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Derivadas de funções polinomiais e exponenciais

Usaremos frequentemente a notação de Leibniz.
Começamos com a função mais simples, a função constante $f(x) = c$. O seu gráfico é a reta $y = c$, que tem declive 0, pelo que $f'(x) = 0$.
Uma demonstração formal, a partir da definição, também é fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Podemos escrever uma regra para a derivada de uma função constante:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Vejamos agora o caso das funções $f(x) = x^n$, ditas funções potência.

Sabemos, notando que o gráfico de $f(x) = x$ é uma reta de declive 1, que

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Esta fórmula pode ser facilmente verificada usando a definição de limite e também não é difícil verificar que

$$\tfrac{d}{dx}(x^2) = 2x \text{ e } \tfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

O caso $f(x) = x^4$ é também um exercício:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Obtemos assim:

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Parece haver um padrão, o qual de facto vale para qualquer número real (como veremos mais tarde). Trata-se da regra da potência:

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}, \quad \text{para qualquer } r \in \mathbb{R}$$

Exemplos

Calcule as derivadas das seguintes funções:

- $f(x) = \frac{1}{x^2}$
  Solução: $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
  Solução: $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Exemplo

Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ no ponto $(1, 1)$.

Solução: A derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ é $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$. O declive da tangente em $(1, 1)$ é $f'(1) = \frac{3}{2}$.

Uma equação da tangente é então: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Quando formamos novas funções por meio da adição ou multiplicação por uma constante de funções antigas, as derivadas das novas funções pode ser calculadas a partir das derivadas destas.
As provas das seguintes regras obtêm-se a partir das correspondentes regras para limites.

- Se c é uma constante e f é uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x))$$

- Se f e g são funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

As regras anteriores são conhecidas por *regra do produto por uma constante* e por *regra da soma*, respetivamente.
A *regra da diferença*

$$\tfrac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \tfrac{d}{dx}(f(x)) - \tfrac{d}{dx}(g(x))$$

é consequência das duas anteriores.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Exercício

Determine os pontos da curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ nos quais a tangente à curva é horizontal.

Solução: $(0,4), (\sqrt{3}, -5), (-\sqrt{3}, -5)$

Consideremos agora funções exponenciais, isto é, funções da forma $f(x) = b^x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h}$$

Como o fator b^x não depende de h, podemos escrever

$$f'(x) = b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

Note-se que obtivemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} = f'(0)$$

tendo assim concluído que se a função exponencial for derivável em 0, então é derivável em $\mathbb{R}$ e que se tem

$$f'(x) = f'(0)b^x$$

De todas as escolhas de base possíveis, a fórmula de derivação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$.

Definição

e é o número tal que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Do exposto antes, temos que a derivada da função exponencial natural é:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Exemplo

Em que ponto da curva $y = e^x$ é a tangente paralela à reta $y = 2x$?

Solução: Seja (a, e^a) o ponto em questão. Como $y' = e^x$, temos que o declive da tangente nesse ponto é e^a. Esta tangente é paralela à reta $y = 2x$, que tem declive 2. Igualando os declives, obtemos $e^a = 2$, donde $a = \ln 2$. Assim, o ponto pedido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$.

As regras do produto e do quociente

A regra do produto e do quociente são nossas conhecidas. Para detalhes sobre a sua prova, consultar a bibliografia.

A regra do produto

Se f e g são funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x))g(x) + f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$$

Uma notação conveniente: $(fg)' = f'g + fg'$.

A regra do quociente

Se f e g são funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(f(x))g(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

Uma notação conveniente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exemplo

Seja $f(x) = xe^x$. Encontre $f'(x), f''(x)$ e $f'''(x)$.

Solução. Tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x \end{aligned}$$

Verifique que $f''(x) = (x+2)e^x$ e $f'''(x) = (x+3)e^x$.
Observe, mais geralmente, que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

Exemplo

Se $f(x) = \sqrt{x}g(x)$, com $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$, calcule $f'(4)$.

Solução. Tem-se $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Consequentemente: $f'(4) = \sqrt{4}g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 13/2$.

Derivadas de funções trigonométricas

A proposição seguinte dá-nos derivadas de funções trigonométricas.
Lembra-se que $\sec x = 1/\cos x$.
Valem as fórmulas seguintes:

Derivadas de funções trigonométricas

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \ \operatorname{tg} x$

Apresenta-se a seguir um esquema da demonstração da validade das duas primeiras fórmulas. Para uma prova detalhada sugere-se consultar a literatura.
Provar a validade das restantes fórmulas são exercícios simples.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Por exemplo, para provar a fórmula para o seno é usada a relação trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$$

que permite reduzir o problema ao cálculo dos limites $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$ e $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$.

Usando argumentos geométricos pode mostrar-se que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$.

Com algumas manipulações (mais o facto $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) mostra-se que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

Finalmente deduz-se a fórmula pretendida.

A fórmula para o cosseno pode obter-se com o mesmo tipo de argumentos.

Exemplo

Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(\sec x)(1 + \operatorname{tg} x) - \sec x \frac{d}{dx}(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\ &= \frac{\sec x \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg} x) - \sec x \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\ &= \frac{\sec x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\ &= \frac{\sec x(\operatorname{tg} x - 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \end{aligned}$$

(Na simplificação usou-se a fórmula trigonométrica $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.)

A regra da cadeia (ou da derivação da função composta)

A proposição seguinte é conhecida por regra da cadeia ou regra da derivação da função composta.

Proposição (Regra da cadeia)

Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções. Suponhamos que as derivadas $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$ existem ambas (isto é, f é derivável em $g(x)$ e g é derivável em x). Então a função composta $y = f(g(x))$ tem derivada (em x) dada por

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

A igualdade $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ pode ajudar a memorizar. Note-se, no entanto, que a parte esquerda não se obtém da direita por anulação de du. De facto, $\frac{du}{dx}$ não é o quociente de duas quantidades...
Para uma prova da regra da cadeia, consultar a bibliografia...

Exemplo

$D_x(3x + \text{sen}(2x)) = 3 + \cos(2x) \cdot 2.$

Exemplo

Calcule $h'(x)$ para $h(x) = \cos(1 - x^3)$.

Solução: podemos escrever $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $y = (f(u) = \cos u$ e $g(x) = 1 - x^3$.
Como $f'(u) = -\text{sen}(u)$ e $g'(x) = -3x^2$, tem-se

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -\text{sen}(1 - x^3) \cdot (-3x^2) \\ &= 3x^2 \,\text{sen}(1 - x^3) \end{aligned}$$

Outra solução: escrevendo $u = 1 - x^3$ e $y = \cos u$, então

$$h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\text{sen}(u) \cdot (-3x^2) = -\text{sen}(1 - x^3) \cdot (-3x^2)$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Os exemplos anteriores mostram como combinar a regra da cadeia com as fórmulas de derivação de funções trigonométricas. Pode também ser combinada com outras regras. Explicita-se a seguir o caso da regra da derivação de potências.

A regra da potência combinada com a regra da cadeia

Seja r um número real e seja $u = g(x)$ uma função derivável. Então

$$\frac{d}{dx}(u^r) = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

Escrito de outro modo:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^r = r(g(x))^{r-1} \cdot g'(x)$$

Exemplo

Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

Solução: Escrevendo $u = g(x) = x^3 - 1$ e $r = 100$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3-1)^{100} = 100(x^3-1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3-1)\\ &= 100(x^3-1)^{99}\cdot(3x^2) = 300x^2(x^3-1)^{99}\end{aligned}$$

Exemplo

Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

A regra da cadeia pode ser usada para derivar qualquer exponencial de base $b > 0$:, desde que nos lembremos que $\quad b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(b^x) &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln b)x}) = e^{(\ln b)x}\frac{d}{dx}(\ln b)x \\ &= e^{(\ln b)x}(\ln b) = b^x \ln b\end{aligned}$$

Exercício

Calcule $\frac{d}{dx}(2^{\operatorname{sen} x})$.

A *cadeia* pode ser maior... No exemplo seguinte a regra da cadeia é usada duas vezes.

Exemplo

Derive $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg} x))$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\operatorname{tg} x))\frac{d}{dx}(\cos(\operatorname{tg} x)) \\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg} x))(-\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x))\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) \\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg} x))\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Uso do sage para calcular derivadas

Sugere-se o uso do comando *sage* `diff` para verificar os resultados obtidos nas resoluções de exercícios. Este mesmo comando pode ser usado para calcular derivadas de ordem superior.

```
sage: diff(3*x+sin(2*x))
2*cos(2*x) + 3
sage: diff(cos(1-x^3))
3*x^2*sin(-x^3 + 1)
sage:
sage: diff((x^3-1)^100)
300*(x^3 - 1)^99*x^2
sage: diff((x^3-1)^100,2)
89100*(x^3 - 1)^98*x^4 + 600*(x^3 - 1)^99*x
sage:
sage: diff(2^sin(x))
2^sin(x)*cos(x)*log(2)
sage:
sage: diff(sin(cos(tan(x))))
-(tan(x)^2 + 1)*cos(cos(tan(x)))*sin(tan(x))
```

Derivação implícita

Referimos antes o problema da determinação de tangentes a curvas e resolvemo-lo para o caso de curvas que são gráficos de funções deriváveis. Mas nem sempre as curvas são gráficos de funções. Muitas vezes, o gráfico de uma curva é o gráfico de uma equação em duas variáveis $F(x, y) = 0$.

Exemplo

Para a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, temos $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$.

Por vezes a equação não pode ser resolvida explicitamente em ordem a y, no entanto vemos a equação como definindo implicitamente y como uma ou mais funções de x. A ideia da *derivação implícita* é "derivar a equação em ordem a x, obtendo a derivada $\dfrac{dy}{dx}$".

Exemplo

Determine $\dfrac{dy}{dx}$, se $y^2 = x$.

Solução: Tem-se

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}x,$$

donde, usando a regra da cadeia no primeiro membro (y é função de x), vem $2y\dfrac{dy}{dx} = 1$, logo $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$.

No exemplo anterior, $y^2 = x$ define duas funções de x, deriváveis, que conhecemos explicitamente: $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$. Para $x > 0$ podemos encontrar derivadas:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y_1}; \qquad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y_2},$$

o que está de acordo com o obtido por derivação implícita.

Nota

Existe um teorema, o Teorema da Função Implícita, que justifica a legitimidade de usarmos derivação implícita. Ele diz, basicamente, que a representação de uma curva $F(x, y) = 0$ *perto de um ponto* (x_0, y_0) *dessa curva é o gráfico de uma função de* x *derivável em* x_0*, desde que* $F(x, y)$ *seja suficientemente "regular" e* $\frac{d}{dy}F(x_0, y)|_{y=y_0} \neq 0$*.*

Exemplo

Determine o declive da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, -4)$.

Solução: Usando derivação implícita, temos:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

O declive da tangente à circunferência em $(3, -4)$ é

$$-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Como a circunferência é a união dos gráficos das funções $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ e $(3, -4)$ pertence ao gráfico de y_2, o problema poderia também ser resolvido do seguinte modo:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

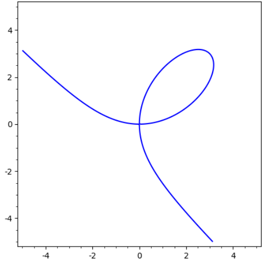
No exemplo seguinte é considerada a curva

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

conhecida por "fólio de Descartes".

A figura ao lado representa o gráfico da curva e foi obtido executando no *sage*:

```
x = var('x')
y = var('y')
f(x,y) = x^3 + y^3 - 6*x*y
implicit_plot(f,(x,-5,5),(y,-5,5))
```



O *sage* pode ser usado para derivação implícita. Note-se a necessidade de explicitar que assumimos que y depende de x. A solução para a primeira alínea do exemplo seguinte pode ser obtida continuando a sessão anterior (por exemplo no `sagemathcell`):

```
y=function('y')(x)
temp=diff(f(x,y))
solve(temp,diff(y))
```

Obtemos

```
[diff(y(x), x) == -(x^2 - 2*y(x))/(y(x)^2 - 2*x)]
```

Exemplo

1. Encontre y', se $x^3 + y^3 = 6xy$.
2. Encontre a tangente ao fólio de Descartes no ponto $(3, 3)$.
3. Em que pontos do primeiro quadrante é que a tangente é horizontal?

Solução.

1. Derivando em ordem a x e vendo y como função de x, obtemos
$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$
Resolvendo em ordem a y':
$$3(y^2 - 2x)y' = 3(2y - x^2); \quad y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

2. Quando $x = y = 3$ tem-se $y' = \frac{6-3^2}{3^2-6} = -1$. A equação da tangente:
$$y - 3 = -1(x - 3) \quad \text{ou} \quad x + y = 6$$

3. Há a determinar os pontos em que $y' = 0$. Ora, $y' = 0$ quando $2y - x^2 = 0$ (desde que $y^2 - 2x \neq 0$). Substituindo $y = 1/2x^2$ na equação da curva obtemos
$$x^3 + (1/2x^2)^3 = 6x(1/2x^2)$$
ou $x^6 = 16x^3$. Como $x \neq 0$ no primeiro quadrante, podemos escrever $x^3 = 16$. Então $x = 2^{4/3}$ e $y = 1/2(2^{8/3}) = 2^{5/3}$.

Exemplo

Determine uma equação da tangente à curva $x^2 + xy + 2y^3 = 4$ no ponto $(-2, 1)$.

Solução: Tem-se $2x + y + xy' + 6y^2y' = 0$.
Substituindo x por -2 e y por 1 e resolvendo em ordem a y', vem $y'(-2) = \frac{3}{4}$. Assim, a reta pedida tem por equação

$$y = \frac{3}{4}(x+2) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Exercício

Determine $\dfrac{dy}{dx}$, se $y \operatorname{sen} x = x^3 + \cos y$.

Solução: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - y\cos x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Podem também determinar-se derivadas de ordem superior.

Exemplo

Determine $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, se $xy + y^2 = 2x$.

Solução: tem-se

$$y' = \frac{2-y}{x+2y}; \quad y'' = \frac{(x+2y)(-y') - (2-y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

Substituindo y' pela expressão antes obtida

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{(x+2y)(-\frac{2-y}{x+2y}) - (2-y)(1+2\frac{2-y}{x+2y})}{(x+2y)^2} \\
&= \frac{-(2-y)\left(1+(1+2\frac{2-y}{x+2y})\right)}{(x+2y)^2} \\
&= \frac{-2(2-y)\left(\frac{x+2y+2-y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2} = \frac{-2(2-y)(x+y+2)}{(x+2y)^3} \\
&= \frac{-2(2x+2y+4-xy-y^2-2y)}{(x+2y)^3} = \frac{-8}{(x+2y)^3}
\end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado $xy + y^2 = 2x$.

Derivadas das funções trigonométricas inversas

Proposição

Tem-se $\dfrac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)\ ).$

Demonstração.

Lembramos que

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \text{se e só se} \quad x = \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Usando derivação implícita, tem-se $1 = \cos y \cdot \dfrac{dy}{dx}$.
Como $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$, tem-se $\cos y \geq 0$, donde

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

Logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\square$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Com uma demonstração análoga à da proposição anterior obtém-se:

Proposição

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exemplo

Derive $\quad f(x) = x \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{arctg}\sqrt{x} + x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \\ &= \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \end{aligned}$$

Derivadas de outras funções trigonométricas ocorrem menos frequentemente. Para uma lista completa, ver algum formulário. Por exemplo, tem-se:

Proposição

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivação de funções logarítmicas

Nota

Já antes tínhamos observado que existe um teorema, o Teorema da Função Implícita, que justifica a legitimidade de usarmos derivação implícita. Pode provar-se que as funções logarítmicas são deriváveis.

Vamos usar derivação implícita para deduzir uma fórmula para a derivada de $\log_b x$.

Proposição

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

(Ver prova no slide seguinte.)
Tomando $b = e$, obtém-se:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Demonstração.

Seja $y = \log_b x$. Então

$$b^y = x$$

Derivando implicitamente em ordem a x, obtém-se

$$b^y (\ln b) \frac{dy}{dx} = 1$$

e daqui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y \ln b} = \frac{1}{x \ln b}$$

□

Exemplo

Derive $\quad y = \ln(x^3 + 1)$.

Solução: Para usar a regra da cadeia, façamos $u = x^3 + 1$.
Então $y = \ln u$ e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1} \end{aligned}$$

Mais geralmente, combinando a fórmula para a derivada do logaritmo natural com a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Exemplo

Calcule $\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

Solução. Tem-se:

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{cotg} x$$

Exemplo

Calcule $\sqrt{\ln x}$.

Solução. Aqui o logaritmo aparece como a função interior, pelo que a fórmula anterior não se aplica.A regra da cadeia dá:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Exemplo

Seja $f(x) = \ln|x|$. Calcule $f'(x)$.

Solução: Como

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

tem-se

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, $f'(x) = \frac{1}{x}$ para todo o $x \neq 0$.

Vale a pena recordar o que acabamos de mostrar:

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$

Diferenciação logarítmica

Há muitas derivadas cujo cálculo pode ser simplificado tomando logaritmos. O método é designado por *diferenciação logarítmica*. Vejamos um exemplo.

Exemplo

Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

Solução. Tomando logaritmos em ambos os membros da equação e usando as leis dos logaritmos obtemos:

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Derivando implicitamente em ordem a x obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - 5\frac{3}{3x+2}$$

Resolvendo em ordem a $\frac{dy}{dx}$, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Podemos agora substituir y, obtendo assim a derivada que procuramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Os passos usados no exemplo anterior constituem o método designado por diferenciação logarítmica. São eles:

1. Toma-se o logaritmo natural em ambos os membros da equação $y = f(x)$ e usam-se as leis dos logaritmos para simplificar.
2. Deriva-se implicitamente em ordem a x.
3. Resolve-se a equação resultante em ordem a y'.

Quando $f(x) < 0$ para algum valor de x, $\ln x$ não está definido, mas podemos escrever $|y| = |f(x)|$, como ilustrado no exemplo seguinte. Nesse exemplo damos uma prova da regra da potência.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Proposição

Se r é um número real e $f(x) = x^r$, então

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Demonstração.

Façamos $y = x^r$ e usemos diferenciação logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^r = r\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Então $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{r}{x}$. Logo

$$y' = r\frac{y}{x} = r\frac{x^r}{x} = rx^{r-1} \qquad \square$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

O exercício seguinte (em que x aparece na base e no expoente) pode ser resolvido usando diferenciação logarítmica. Mas também podemos escrever $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$. Resolva-o usando ambos os métodos.

Exercício

Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

4 Aplicações das derivadas

Já vimos antes algumas aplicações das derivadas.
Agora, que conhecemos regras de derivação, estamos em condições de continuar o estudo de aplicações, fazendo-o em maior profundidade.

Veremos, em particular, como as derivadas afetam a forma do gráfico de uma função e como elas nos ajudam a localizar máximos e mínimos de funções.

Máximos e mínimos

Algumas das mais importantes aplicações do cálculo diferencial são problemas de otimização, nos quais se pretende encontrar a maneira ótima (a melhor maneira) de fazer alguma coisa.
Esses problemas podem em geral reduzir-se à determinação de máximos e mínimos de funções.

Definição

Seja f uma função de domínio D e seja $c \in D$. Então $f(c)$ é

- *máximo absoluto (ou máximo global) de f em D se*
  $$f(c) \geq f(x) \quad \text{para todo o} \quad x \in D$$
- *mínimo absoluto (ou mínimo global) de f em D se*
  $$f(c) \leq f(x) \quad \text{para todo o} \quad x \in D$$

Os valores máximo e mínimo de f dizem-se valores extremos de f.

Definição

Seja f uma função de domínio D e seja $c \in D$. Então $f(c)$ é

- *um **máximo local** de f em D se*

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{quando} \quad x \quad \text{está perto de} \quad c$$

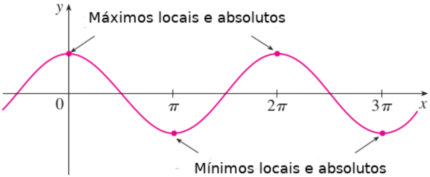
- *um **mínimo local** de f em D se*

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{quando} \quad x \quad \text{está perto de} \quad c$$

Nesta definição (tal como sempre acontece), "x está perto de c" é o mesmo que dizer que x está nalgum intervalo aberto contendo c.

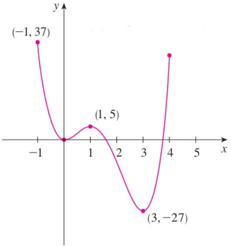
Exemplo

A função $f(x) = \cos x$ toma o seu valor máximo (tanto local como absoluto) uma infinidade de vezes, pois $-1 \leq \cos x \leq 1$ para qualquer x, e tem-se $\cos 2n\pi = 1$ para qualquer inteiro n. Analogamente, $\cos(2n+1)\pi = -1$, com n inteiro, é o valor mínimo.



Exemplo

A figura ao lado representa o gráfico de uma função f definida no intervalo $[-1, 4]$.



Tem-se que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto que $f(-1) = 37$ é um máximo absoluto. (Não o consideramos um máximo local por ocorrer numa extremidade.)
Tem-se que $f(0) = 0$ e $f(3) = -27$ são mínimos locais, sendo que -27 é também mínimo absoluto. A função f não tem um máximo local nem absoluto em $x = 4$.

Exercício

Dê um exemplo de uma função que não tem nenhum valor extremo.

O resultado seguinte, conhecido por teorema dos valores extremos, garante que a solução que encontrou para este exercício não é uma função contínua definida num intervalo fechado....

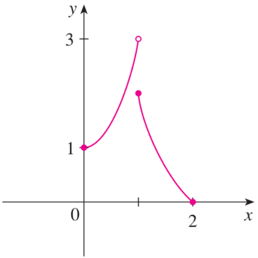
Teorema

Se f for uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então f atinge um máximo absoluto $f(c)$ e um mínimo absoluto $f(d)$ em alguns números c e d de $[a, b]$.

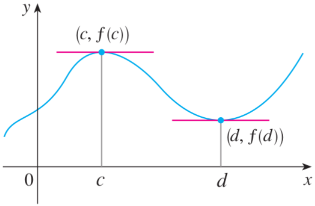
Uma demonstração deste resultado fica fora do âmbito deste curso.

Exercício

A figura ao lado representa o gráfico de uma função f definida no intervalo fechado $[0, 2]$. A função tem um mínimo $f(2) = 0$, mas não tem máximo. Explique porque não contradiz o teorema dos valores extremos.



A figura ao lado representa o gráfico de uma função f com um máximo local em c e um mínimo local em d. Parece que as retas tangentes nos pontos de máximo e de mínimo são horizontais, portanto têm declive 0. Como a derivada é o declive da reta tangente, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$.



O sugerido pela figura anterior é de facto verdade para funções deriváveis, como nos diz o resultado seguinte (que referiremos como Teorema de Fermat).

Teorema

Se f tem um máximo ou um mínimo local em c e $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demonstração.

Consultar a bibliografia. □

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Observação

Há que ter cuidado com a aplicação do resultado anterior, já que pode acontecer ter-se $f'(c) = 0$ sem que f tenha um máximo ou um mínimo local em c.

Exemplo

Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Mas f não tem máximo nem mínimo em 0, pois $x^3 > 0$ para $x > 0$ mas $x^3 < 0$ para $x < 0$.

Pode acontecer existir um valor extremo $f(c)$ mesmo se existir $f'(c)$.

Exemplo

A função $f(x) = |x|$ tem um mínimo (local e absoluto) em 0, mas este não pode ser encontrado fazendo $f'(x) = 0$, porque simplesmente $f'(0)$ não existe.

Definição

Um ponto crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Com esta nova terminologia, o resultado anterior pode ser reescrito como segue:

Teorema

Se f tem um máximo local ou um mínimo local em c, então c é um ponto crítico de f.

Para encontrar o valor máximo e o valor mínimo de uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ usa-se o método do intervalo fechado que consiste dos seguintes 3 passos:

1. Encontrar os valores de f nos pontos críticos de (a, b).
2. Encontrar os valores de f nos extremos do intervalo.
3. O maior dos valores encontrados nos Passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o mais pequeno de tais valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

Solução. Como f é contínua em $[-\frac{1}{2}, 4]$, podemos usar o método do intervalo fechado. Tem-se

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Como f é derivável em todos os pontos, os únicos pontos críticos são aqueles em que $f'(c) = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $x = 2$. (Ambos pertencem ao intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$.)
Os valores de f nestes pontos críticos são:

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(2) = -3$$

Os valores de f nos extremos do intervalo são:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \quad \text{e} \quad f(4) = 17$$

Comparando estes valores vemos que o máximo absoluto é $f(4) = 17$ e que o valor de mínimo absoluto é $f(2) = -3$.

Teorema do valor médio

Muitos dos resultados deste capítulo dependem do Teorema do valor médio (de Lagrange). Para o demonstrar precisamos do resultado seguinte:

Teorema (Teorema de Rolle)

Suponhamos que g é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e que é derivável no intervalo aberto (a, b). Se $g(a) = g(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Demonstração.

Se g for constante, tem-se $g'(c) = 0$, $\forall c \in [a, b]$.
Se g não for constante, suponhamos que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g(x_0) \neq g(a)$. Vamos supor que $g(x_0) > g(a)$. (O caso $g(x_0) < g(a)$ é análogo.)
Pelo Teorema dos valores extremos, g atinge um máximo nalgum ponto $c \in [a, b]$. Como $g(c) \geq g(x_0) > g(a) = g(b)$, c não pode ser a nem b, logo $c \in (a, b)$, donde g é derivável em c. Resulta que que $g'(c) = 0$, por um resultado anterior (Teorema de Fermat). $\square$

Exemplo

Mostre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma solução real.

Solução. Seja $f(x) = x^3 + x - 1$. Como $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ e f é contínua (já que é polinomial), o teorema dos valores intermédios garante-nos que existe pelo menos uma solução.
Para mostrar que não existe mais nenhuma solução, usamos o Teorema de Rolle, num raciocínio por contradição. Suponhamos que existem duas soluções a e b. Então $f(a) = 0 = f(b)$ e (por ser polinomial) f é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$.
Pelo Teorema de Rolle existe um número c tal que $f'(c) = 0$. Mas

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \qquad \text{para todo o} \quad x$$

pelo que $f'(x)$ nunca se anula, o que é uma contradição. A contradição resultou de supor que existiam duas soluções reais, logo existe apenas uma solução real.

O teorema do valor médio, enunciado a seguir, também é conhecido por *Teorema de Lagrange*.

Teorema (Teorema do valor médio)

Se f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e é derivável no intervalo aberto (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Equivalentemente

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Este teorema é uma consequência imediata do Teorema de Rolle aplicado à função:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

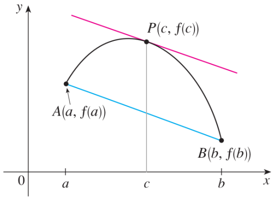
Note-se que $h(a) = h(b) = 0$ e que h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Mas como

$$h'(c) \;=\; f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

temos então provado o Teorema de Lagrange.

Vejamos uma interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.

A figura ao lado mostra os pontos $A(a, f(a))$ e $B(a, f(B))$ do gráfico de uma função derivável f. O declive da reta AB é uma expressão que aparece no enunciado do teorema:



$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $f'(c)$ é o declive da tangente no ponto $(c, f(c))$, o Teorema do Valor Médio diz-nos que há pelo menos um ponto no gráfico em que o declive da reta tangente é o mesmo que o declive da reta AB. Por outras palavras, o teorema garante a existência de um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de f em que a tangente é paralela à reta AB.

O Teorema do Valor Médio permite obter informação sobre uma função a partir de informação sobre a sua derivada.

Exemplo

Suponha que f é uma função derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = -3$ e que $f'(x) \leq 5$ para todo o x. Qual é o maior valor possível para $f(2)$?

Solução. Como f é derivável (e, portanto, contínua), podemos aplicar o Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, 2]$. Existe um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

logo

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Como $f'(x) \leq 5$ para todo o x, tem-se, em particular, que $f'(c) \leq 5$. Resulta que $f(2) \leq -3 + 10 = 7$. Logo, o maior valor possível para $f(2)$ é 7.

Corolário

Se $f'(x) = 0$ para todo o ponto x num intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

Demonstração.

Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$, com $x_1 < x_2$. Como f é derivável em (a, b), temos que f é derivável em (x_1, x_2) e é contínua em $[x_1, x_2]$.
Pelo Teorema do valor médio aplicado a f no intervalo $[x_1, x_2]$, existe um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $f'(x) = 0$ para todo o $x \in (x_1, x_2)$, tem-se $f'(c) = 0$ e, portanto, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ou seja $f(x_1) = f(x_2)$.
Provamos que f toma o mesmo valor em quaisquer dois números de (a, b). Mas isto significa que f é constante em (a, b). $\square$

Corolário

Se $f'(x) = g'(x)$ *para qualquer número* x *de um intervalo* (a, b)*, então* $f - g$ *é constante em* (a, b)*, isto é, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + c$*.*

Demonstração.

Seja $F(x) = f(x) - g(x)$. Então

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

qualquer que seja o x em (a, b). Pelo resultado anterior, F é constante, isto é, $f - g$ é constante. $\square$

Exemplo

Mostre que $\operatorname{sen} x < x, \forall x > 0$.

Solução. Se $x \geq 1$ é óbvio. Se $0 < x < 1$, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = (\cos c)(x - 0)$$

isto é, $\operatorname{sen} x = (\cos c)(x)$. Como $\cos c < 1$ para $c \in (0, 1)$, tem-se que $\operatorname{sen} x < 1 \cdot x = x$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Como as derivadas afetam a forma de um gráfico

Referimo-nos ao resultado seguinte, consequência do Teorema do Valor Médio, por teste de crescimento/decrescimento ou teste de monotonia.

Proposição

(a) *Se $f'(x) > 0$ num intervalo I, então f é (estritamente) crescente em I.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ num intervalo I, então f é (estritamente) decrescente em I.*

Demonstração.

(a) Sejam $x_1, x_2 \in I$. Para mostrar que f é crescente, devemos mostrar que se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
Como é dado que $f'(x) > 0$ em I, temos, e particular, que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Pelo Teorema do Valor Médio existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

O lado direito da igualdade anterior é positivo, pois $f'(c) > 0$ e $x_1 < x_2$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja $f(x_1) < f(x_2)$.

A parte (b) prova-se de modo análogo.

Exemplo

Diga onde é que a função

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$

é crescente e onde é que é decrescente.

Solução. Começamos por determinar onde é que $f'(x) > 0$ e onde é que $f'(x) < 0$. Para o efeito calculamos a derivada de f e vemos onde é que ela se anula. Tem-se

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

pelo que a derivada se anula em $x = -1, x = 0$ e $x = 2$.
Estes são os pontos críticos de f, os quais dividem o domínio em 4 intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$. Pode mostrar-se que dentro de cada um destes intervalos, f' não muda de sinal. Podemos determinar esse sinal a partir do sinal de cada um dos fatores $12x$, $x - 2$ e $x + 1$.
A tabela seguinte resume a situação.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

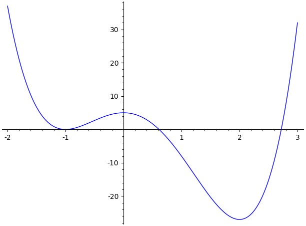
Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\searrow$
$(-1,0)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$\nearrow$
$(0,2)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\searrow$
$(2,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\nearrow$

Exercício

Use algum meio computacional para esboçar o gráfico da função do exemplo anterior. Está de acordo com a tabela?

Na figura está um esboço do gráfico da função obtido executando no *sage* o seguinte código:

```
f(x) = 3*x^4 - 4*x^3 - 12*x^2 + 5
plot(f(x),(x,-2,3))
```



Extremos Locais

Lembra-se que se uma função f tem um máximo ou um mínimo em c, então c é um ponto crítico de f, mas nem todo o ponto crítico de f é um máximo ou um mínimo local. Precisamos de algo que nos permita testar se um ponto crítico origina um valor máximo ou um mínimo. Quando a função é derivável temos o seguinte teste, que é consequência do teste de crescimento/decrescimento.

Teste da primeira derivada

Suponhamos que c é um ponto crítico de uma função f derivável perto de c.

(a) Se f' passa de positiva a negativa em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se f' passa de negativa a positiva em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' é positiva à esquerda e à direita de c ou é negativa à esquerda e à direita de c, então f não tem nem máximo nem mínimo local em c.

Exemplo

Considere novamente a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ do exemplo anterior. Encontre os máximos e os mínimos locais de f.

Solução. Pela tabela, $f'(x)$ muda de negativa a positiva em -1. Tem-se então que $f(-1) = 0$ é um mínimo local. De modo análogo vemos que $f(2) = -27$ é também um mínimo local. $f(0) = 5$ é um máximo local, pois $f'(x)$ muda de positiva a negativa em 0.

Exemplo (A)

Diga onde é que a função seguinte é crescente e onde é decrescente.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$

Determine os seus máximos e mínimos locais.

Solução. Tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= (x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Intervalo	$x-1$	$x-2$	$f'(x)$
$(-\infty, 1)$	$-$	$-$	$+$
$(1, 2)$	$+$	$-$	$-$
$(2, +\infty)$	$+$	$+$	$+$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Da tabela anterior segue:

- $f'(x) > 0$ se e só se $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ se e só se $x \in (1, 2)$

O teste de crescimento/decrescimento permite-nos escrever

- f é estritamente crescente em $(-\infty, 1]$
- f é estritamente crescente em $[2, +\infty)$
- Atenção: f não é crescente em $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.
- f é estritamente decrescente em $[1, 2]$

Registamos estes factos numa coluna que acrescentamos à tabela anterior

Intervalo	$x-1$	$x-2$	$f'(x)$	f
$(-\infty, 1)$	$-$	$-$	$+$	$\nearrow$
$(1, 2)$	$+$	$-$	$-$	$\searrow$
$(2, +\infty)$	$+$	$+$	$+$	$\nearrow$

Podemos também representar a tabela com um aspeto diferente (que resulta essencialmente de trocar as linhas com as colunas). Fazemo-lo a seguir, de forma resumida:

		1		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Pelo teste da primeira derivada tem-se:

- f tem um máximo local em 1 e um mínimo local em 2.

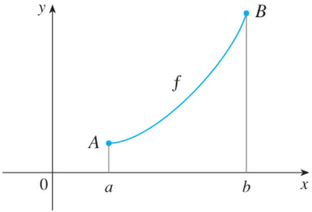
O exemplo (A) seguinte será continuado pais tarde.

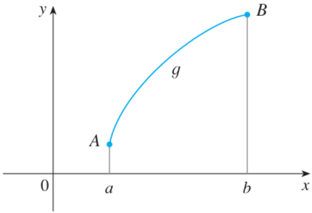
Exercício

Use algum meio computacional para esboçar o gráfico da função do exemplo (A). Diga se as conclusões que obteve estão de acordo com o gráfico.

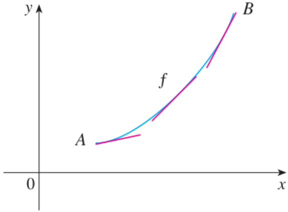
Que informações é que a segunda derivada de uma função nos dá?

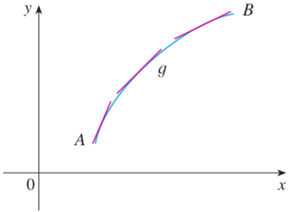
Consideremos os seguintes gráficos de duas funções que são crescentes num intervalo (a, b), mas curvam de forma diferente:





bem como algumas das tangentes aos mesmos





FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Definição

Se o gráfico de uma função f estiver acima de todas as suas tangentes num intervalo I, dizemos que f é convexa (ou que o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima) no intervalo I.

A função cujo gráfico está representado nas figuras da esquerda do slide anterior é convexa.

Definição

Se o gráfico de uma função f estiver abaixo de todas as suas tangentes num intervalo I, dizemos que f é côncava (ou que o seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo) no intervalo I.

A função cujo gráfico está representado nas figuras da direita do slide anterior é côncava.

A segunda derivada ajuda-nos a determinar os intervalos de concavidade. As tangentes representadas nas figuras do slide anterior sugerem que quando a concavidade está voltada para cima a derivada cresce, pelo que a segunda derivada da função convexa num intervalo será positiva nesse intervalo...

Apresenta-se a seguir um teste de concavidade (para funções deriváveis duas vezes). Uma sua demonstração usa o Teorema do Valor Médio e pode ser vista na bibliografia.

Teste de concavidade

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo o x num intervalo I, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I;

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo o x num intervalo I, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I.

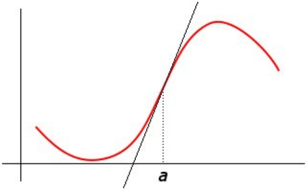
Definição

Um ponto P de uma curva $y = f(x)$ diz-se um ponto de inflexão de f se f for contínua e a curva mudar o sentida da concavidade em P.

Quando $P = (a, f(a))$, diremos frequentemente que a é um ponto de inflexão de f.

Suponhamos que f uma função derivável.

- Tem-se que a é um ponto de inflexão de f se e só se a reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ atravessa o gráfico de f (em qualquer vizinhança de a).



- Tem-se que f é convexa à esquerda de a e côncava à direita de a (ou o contrário) se e só se f tem um ponto de inflexão em a.
- Se f é duas vezes derivável e a é um ponto de inflexão de f, então $f''(a) = 0$.

As segundas derivadas podem ser usadas para identificar máximos e mínimos locais.

Teste da segunda derivada

Suponhamos que f'' é contínua perto de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Vejamos que a parte (a) vale. (A parte (b)) é análoga.

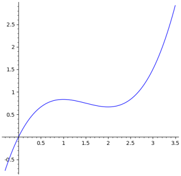
Tem-se que $f''(c) > 0$ e portanto o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima perto de c. Isto implica que o gráfico de f está acima da tangente em c, que é horizontal, e, portanto f tem um mínimo local em c.

Continuando o Exemplo (A).... $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- f não tem assíntotas horizontais.
- Como f é contínua em $\mathbb{R}$, não tem assíntotas verticais.
- $f''(x) = 2x - 3$; $f''(1) = -1 < 0$; $f''(2) = 1 > 0$

Resumo:

		1		$\frac{3}{2}$		2	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	*max*	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	*min*	$\nearrow$
	$\frown$	$\frown$	$\frown$	*pto infl*	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Gráfico: 

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Use as primeira e segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, bem como as assíntotas, para esboçar o gráfico de f.

Solução. Como o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, procuramos as assíntotas verticais calculando os limites à esquerda e à direita quando $x \to 0$. Sabemos que quando $x \to 0^+$ se tem $t = 1/x \to +\infty$, pelo que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$$

o que mostra que $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f. Quando $x \to 0^-$ tem-se $t = 1/x \to -\infty$, pelo que

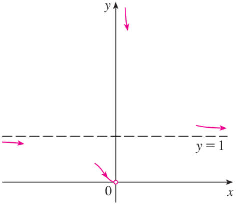
$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Quando $x \to \pm\infty$ tem-se $t = 1/x \to 0$, pelo que

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = \lim_{t \to 0} e^t = e^0 = 1$$

Isto mostra que $y = 1$ é uma assíntota horizontal (à esquerda e à direita).

De posse das assíntotas, podemos começar o esboço do gráfico de f.



Tem-se

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Como $e^{1/x} > 0$ e $x^2 > 0$ para todo o $x \neq 0$, tem-se $f'(x) < 0$ para todo o $x \neq 0$.
Logo, f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$.
Não há nenhum ponto crítico, pelo que a função não tem extremos locais.
Tem-se

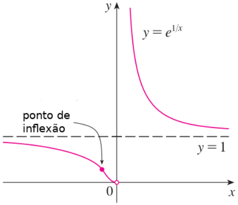
$$f''(x) = -\frac{(-e^{1/x}/x^2)x^2 - 2xe^{1/x}}{x^4} = \frac{(2x+1)e^{1/x}}{x^4}$$

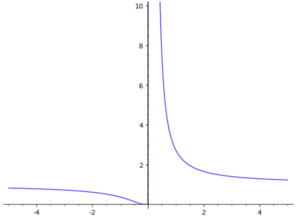
Como $e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$, tem-se que $f''(x) > 0$ quando $x > -1/2$ (e $x \neq 0$) e $f''(x) < 0$ quando $x < -1/2$.

Assim, a curva tem a concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -1/2)$ e voltada para cima em $(-1/2, 0)$ e em $(0, +\infty)$. O ponto de inflexão é $(-1/2, e^{-2})$.
A tabela seguinte resume os dados obtidos:

		$-1/2$		0	
f'	$-$	$-$	$-$	x	$-$
f''	$-$	0	$+$	x	$+$
f	$\searrow$		$\searrow$	x	$\searrow$
	$\frown$	*pto infl*	$\smile$	x	$\smile$

Podemos concluir o esboço do gráfico (e confirmar usando um sistema computacional)





FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Indeterminações e a regra de L'Hôpital

Suponhamos que temos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$, quando $x \to a$. Este limite pode existir ou não. Dizemos que se trata de uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Há alguns casos em que conseguimos levantar indeterminações.

Por exemplo, no caso de f e g serem funções polinomiais, podemos por vezes levantar indeterminações cancelando fatores comuns:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Argumentos geométricos permitem mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

O mesmo tipo de situação ocorre quando, tendo-se também um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

acontece $f(x) \to +\infty$ (ou $f(x) \to -\infty$) e $g(x) \to +\infty$ (ou $g(x) \to -\infty$), quando $x \to a$. Neste caso, em que também o limite pode existir ou não, dizemos estar em presença de uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Vimos como levantar algumas destas indeterminações, incluindo funções racionais (em que dividíamos numerador e denominador pela maior potência de x do denominador).

A regra de L'Hôpital aplica-se a indeterminações...

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I contendo a, excepto eventualmente em a. Se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ conduz a uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista ou $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Nota

A regra de L'Hôpital é também válida para limites laterais e também pode ser aplicada a limites com $x \to \pm\infty$.

A demonstração geral usa o teorema do valor médio generalizado e, mais uma vez, remetemos para a literatura. No caso particular em que se tem $f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas e $g'(x) \neq 0$, é fácil verificar que que a Regra de L'Hôpital vale:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{sen}(2x)-\mathrm{sen}\,x}{e^x-1}$.

Solução. Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.
Como as funções $2\,\mathrm{sen}(2x)-\mathrm{sen}\,x$ e e^x-1 são deriváveis (em $\mathbb{R}$), podemos aplicar a regra de L'Hôpital. Temos então

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{sen}(2x)-\mathrm{sen}\,x}{e^x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(2x)-\cos x}{e^x}=\frac{4-1}{1}=3$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\equiv} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

A regra de L'Hôpital pode ser aplicada uma segunda vez (desde que as condições para a sua aplicação sejam satisfeitas.

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\equiv} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\equiv} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Mais geralmente, tem-se que, para qualquer inteiro positivo n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$.

Solução. $$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1-\cos \pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0.$$

Atenção: se tivéssemos tentado cegamente aplicar a regra de L'Hôpital obtínhamos:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

que sabemos estar errado.

Sugestão: para evitar esquecimentos, indicar sempre que tipo de indeterminação se tem antes de aplicar a regra de L'Hôpital, como feito nos exemplos anteriores.

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2\ln x)\times\frac{1}{x}}{1} = 0.$
- Mais geralmente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x} = 0.$

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x+2}{4x^3+2x-7} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{12x^2+2} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{24x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-6x+5}{3x^2-3x+5} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x-6}{6x-3} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 2} \frac{4x-3}{2x-1} = \frac{5}{3}.$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Exemplos

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0.$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{1-\cos x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2}{\operatorname{sen} x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x^2 + 4x^2 \operatorname{sen} x^2}{\cos x} = 2.$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Produtos indeterminados Quando se tem $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, não é claro o que será $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$. Dizemos que se tem uma indeterminação de tipo $0 \times \infty$. Escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad \text{ou} \quad fg = \frac{g}{1/f}$$

passamos a ter uma indeterminação da forma $0/0$ ou ∞/∞ e podemos usar a regra de L'Hôpital.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.

Solução.

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Diferenças indeterminadas Quando se tem $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, não é claro o que será $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x))$. Dizemos que se tem uma indeterminação de tipo $\infty - \infty$. Aqui tenta-se converter a diferença num quociente... Há diversas estratégias possíveis.

Exemplo

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \cdots = \frac{1}{2}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Potências indeterminadas

Há diversos tipos de potências indeterminadas (0^0, ∞^0, 1^∞). Os exemplos seguintes ilustram estratégias que podem ser usadas.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} 4x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$.

Solução. Temos uma indeterminação do tipo 1^∞.Fazendo

$$y = (1+\operatorname{sen} 4x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

tem-se

$$\ln y = \ln\left((1+\operatorname{sen} 4x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\right) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\ln(1+\operatorname{sen} 4x) = \frac{\ln(1+\operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x}$$

Então

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4\cos 4x}{1+\operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} 4x)^{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y} = e^4$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

Solução. Temos uma indeterminação do tipo 0^0.
Podemos escrever

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

Num exemplo anterior usamos a regra de L'Hôpital para provar que $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} = 0$. Então:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0^+}(x \ln x)} = e^0 = 1$$

Esboço de gráficos

O esboço do gráfico de uma função pode ser obtido (algoritmicamente) executando os seguintes passos:

A. Domínio
B. Interseções com os eixos coordenados
C. Simetrias
D. Assíntotas
E. Intervalos de crescimento e de decrescimento
F. Máximos locais e mínimos locais
G. Concavidades e pontos de inflexão
H. Esboço do gráfico

Observa-se que para a determinação da interseção com o eixo dos y basta calcular $f(0)$, equanto que para determinar a interseção com o eixo dos x há que resolver a equação $f(x) = 0$.(Para o esboço de um gráfico este passo pode ser omitido se a equação for difícil de resolver, mas nos casos em que é fácil, pode ser útil resolvê-la.)

No que respeita às simetrias, verificar se a função é par ou se é ímpar pode ajudar. (Este passo pode ser omitido.)

Recordamos:

- Se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ for $+\infty$ ou $-\infty$, diz-se que a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical de f.
- Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, diz-se que a reta de equação $y = b$ é uma assíntota horizontal de f.

Observação

A determinação de assíntotas pode envolver o uso da regra de L'Hôpital.

De novo o Exemplo (A)....

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$.

Solução.

A. Como f é uma função polinomial, o seu domínio é $\mathbb{R}$.

B. Tem-se $f(0) = 0$, pelo que a origem é o ponto de interseção com o eixo dos y e é também um ponto de interseção com o eixo dos x.
Observando que $f(x) = x\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{2} + 2\right)$ e que o polinómio $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{2} + 2$ não tem raízes, concluímos que não existem outras interseções com o eixo dos x.

C. f não é par nem ímpar (nem se vislumbram outras simetrias).

D. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, não tem assíntotas verticais.
Também não tem assíntotas horizontais, pois

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

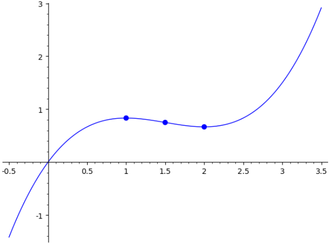
E. F. G. Os intervalos de crescimento e de decrescimento, os máximos locais e mínimos locais e as concavidades e pontos de inflexão foram obtidos anteriormente. Recorda-se:

		1		$\frac{3}{2}$		2	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	*max*	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	*min*	$\nearrow$
	$\frown$	$\frown$	$\frown$	*pto infl*	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Assim,

- $f(1) = 5/6$ é um máximo local,
- $f(2) = 2/3$ é um mínimo local e
- $(3/2, f(3/2)) = (3/2, 3/4)$ é um ponto de inflexão.

H.



Exercício

Esboce o gráfico da função $f(x) = xe^x$

(Complete os detalhes)

A. $D(f) = \mathbb{R}$.

B. $f(0) = 1$; $f(x) = 0$ se e só se $x = 0$.

C. Não tem simetrias.

D. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, não tem assíntotas verticais.

Não tem assíntota horizontal à direita: $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal (à esquerda):

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

E. Tem-se $f'(x) = (x+1)e^x$. Como e^x é positivo para todo o x, o sinal de $f'(x)$ é o sinal de $x+1$. Obtemos então a tabela seguinte onde estão indicados os intervalos de crescimento e de decrescimento:

Intervalo	$x+1$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -1)$	$-$	$-$	$\searrow$
$(-1, +\infty)$	$+$	$+$	$\nearrow$

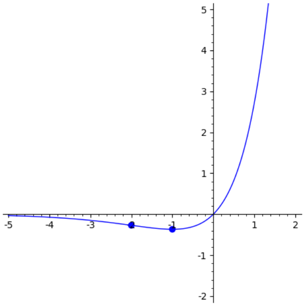
F. -1 é um mínimo local, pois f decresce até -1 e cresce a partir daí.

G. Tem-se $f''(x) = (x+2)e^x$. O sinal de $f''(x)$ é o sinal de $x+2$. Obtemos a tabela seguinte, onde se indicam as concavidades:

Intervalo	$x+2$	$f''(x)$	f
$(-\infty, -2)$	$-$	$-$	$\frown$
$(-2, +\infty)$	$+$	$+$	$\smile$

$(-2, f(-2)) = (-2, -2/e^2)$ é um ponto de inflexão, pois nesse ponto há mudança do sentido das concavidades.

H.



Assíntotas oblíquas

Se $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ ou $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+b))=0$, então diz-se que a reta de equação $y=mx+b$ é uma assíntota oblíqua de f.

Note-se que uma assíntota horizontal é um caso particular de assíntota oblíqua (com $m=0$).

Para funções racionais, as assíntotas oblíquas (não horizontais) ocorrem quando o grau do numerador excede em 1 o grau do denominador. Nesse caso, a assíntota oblíqua pode encontrar-se dividindo o numerador pelo denominador, como o exemplo seguinte ilustra.

Exemplo

Dividindo x^3 por $x^2 - 1$ obtemos obtemos o quociente x e resto x. Podemos portanto escrever $x^3 = x(x^2 - 1) + x$. Resulta que

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

É agora fácil verificar que $y = x$ é uma assíntota oblíqua (à esquerda e à direita):

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x)$$

Exemplo

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

(Complete os detalhes.)

Tem-se $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Logo, a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical de f (tanto à esquerda como à direita).

Tem-se $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$, o que sugere que a reta $y = x$ é candidata a assíntota oblíqua.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$$

Assim, de facto a reta de equação $y = x$ é uma assíntota oblíqua de f (tanto à esquerda como à direita).

- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = (1 - \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x})$
- $f'(x) > 0$ se e só se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ se e só se $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$
- f é estritamente crescente em $(-\infty, -1)$
- f é estritamente crescente em $(1, +\infty)$
- f é estritamente decrescente em $(-1, 0)$
- f é estritamente decrescente em $(0, 1)$

A tabela seguinte apresenta um resumo do obtido:

		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

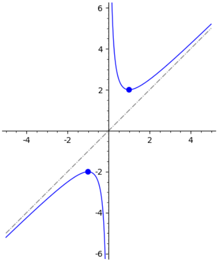
- f tem um máximo local em -1 e um mínimo local em 1.

- $f''(x) = \frac{2}{x^3}$
- $f''(x) > 0 \quad$ se e só se $\quad x \in (0, +\infty)$
- $f''(x) < 0 \quad$ se e só se $\quad x \in (-\infty, 0)$
- f é convexa em $(0, +\infty)$
- f é côncava em $(-\infty, 0)$

Podemos resumir estes dados na tabela:

		0	
f''	$-$	$\times$	$+$
f	$\frown$	$\times$	$\smile$

Finalmente, um esboço do gráfico:



Exercício

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Foi determinada a única assíntota oblíqua num exemplo anterior.
O estudo do crescimento da função e das concavidades do gráfico devem levar a um esboço semelhante ao da figura ao lado.