Cálculo I (M1001)

Lic:CC e MI:ERS, 1º ano

Docente: Manuel Delgado

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Ano letivo de 2020/2021
2ª parte
(Versão de: 12 de janeiro de 2021)

Estes *slides* correspondem segunda parte da matéria a abordar na Unidade Curricular Cálculo I. As segundas partes das provas de avaliação cobrirão esta matéria.

Os *slides* são baseados na principal referência da UC:

- James Stewart, "Calculus, early transcendentals", 8ª edição, 2017 (disponível na bibliteca da FCUP)

Esta será adiante designada por "livro" e serão indicadas as seções do mesmo em correspondência com partes dos slides.

1 Primitivas

Os slides desta secção baseiam-se nas secções 4.9 e 5.4 do livro.

Definem-se *primitivas*, também, sugestivamente, designadas por *antiderivadas* ou por *integrais indefinidos*.

São apresentados alguns exemplos e é dada uma lista de primitivas imediatas.

Primitivas

Definição

Sejam F e f duas funções reais de variável real definidas num intervalo I. Diz-se que F é uma primitiva de f em I se $F'(x) = f(x)$ para $x \in I$.

Uma primitiva é também, sugestivamente, designada por antiderivada.

Integral indefinido é também uma terminologia usada. Ficará claro adiante a razão de ser desta terminologia, a qual de algum modo justifica que nos refiramos ao processo de encontrar primitivas indistintamente como "primitivação" ou "integração".

Uma função f diz-se primitivável no intervalo I se existir uma primitiva de f em I e representa-se por

$$\int f(x)\, dx$$

qualquer primitiva de f. Diremos tratar-se da primitiva geral de f.

Exemplos

- Como $(x^2)' = 2x$, tem-se que x^2 é uma primitiva de $2x$.
- Como $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$, tem-se que $-\cos x$ é uma primitiva de $\operatorname{sen} x$.

O comando 'integral' do sage permite encontrar primitivas:

```
sage: integral( 2*x, x )
x^2
sage: integral(sin(x),x)
-cos(x)
```

Tal como $(x^2)' = 2x$, também $(x^2 + 5)' = 2x$.

Assim, tanto a função $F(x) = x^2$ como a função $G(x) = x^2 + 5$ são primitivas da função $h(x) = 2x$.

Mais geralmente, qualquer função $H(x) = x^2 + C$, onde C é uma constante, é uma primitiva de h.

Existirão outras primitivas de h?

Como para uma função f com uma primitiva F se tem que $F(x) + C$ é também uma primitiva de f, qualquer que seja a constante C, a pergunta anterior faz sentido para qualquer outra função.

A resposta, para uma função definida num intervalo, é mais uma consequência do Teorema do Valor Médio.

Lembramos um corolário do Teorema do Valor Médio: se duas funções têm a mesma derivada num intervalo, então diferem de uma constante.

Assim, se F e G são primitivas de f num intervalo, então

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

donde $G(x) - F(x) = C$, onde C é uma constante.
Como consequência, podemos escrever:

Teorema

Se F é uma primitiva de f num intervalo I, a primitiva geral de f em I é

$$F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exemplos

Encontre a primitiva geral de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$.

Solução.

a) Sabemos que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.
Logo, no intervalo $(0, +\infty)$ a primitiva geral de $\frac{1}{x}$ é $\ln x + C$.

Sabemos também que $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$, para todo o $x \neq 0$.

O teorema anterior diz-nos que a primitiva geral de $f(x) = \frac{1}{x}$ é $\ln |x| + C$ em qualquer intervalo que não contenha 0.
Em particular, vale em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Assim, a primitiva geral de $f(x) = \frac{1}{x}$ é:

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

b) Da regra de derivação da potência resulta que a primitiva geral de $f(x) = x^n$ é:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

a qual vale para todo o $n \geq 0$, pois neste caso $f(x) = x^n$ está definida num intervalo ($\mathbb{R}$). Quando n é negativo, mas diferente de -1, a fórmula vale em qualquer intervalo que não contenha 0.

Convencionamos que quando é dada uma fórmula para uma primitiva geral de um integral indefinido ela é válida apenas num intervalo.

Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$$

no entendimento de que a fórmula é válida nos intervalos $(0, +\infty)$ ou $(-\infty, 0)$. Isto é verdade apesar do facto de a primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2, x \neq 0$ ser

$$F(x) = \begin{cases} -1/x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ -1/x + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Note-se que uma fórmula de derivação quando lida da direita para a esquerda dá uma fórmula de primitivação.
O seguinte facto, muito útil, é fácil de verificar (derive em ambos os membros).

Proposição

Sejam f e g duas funções primitiváveis num intervalo I e c um número real. Então:

- $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$
- $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Apresentamos a seguir diversas fórmulas particulares.
Trata-se de primitivas imediatas. Para as verificar, basta derivar.

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \left(4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}\right)\,dx$

Solução.

Tem-se $4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x} = 4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} + \frac{-\sqrt{x}}{x} = 4\operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$

$$\begin{aligned}
\int \left(4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}\right)\,dx &= \int 4\operatorname{sen} x\,dx + \int 2x^4\,dx + \int (-x^{-1/2})\,dx \\
&= 4\int \operatorname{sen} x\,dx + 2\int x^4\,dx - \int x^{-1/2}\,dx \\
&= -4\cos x + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\
&= -4\cos x + \frac{2x^5}{5} - 2\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Observação

Para verificar que calculámos bem uma primitiva, podemos derivar o resultado.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

2 Técnicas de integração

Os slides desta secção baseiam-se nas secções 5.5, 7.1 e 7.4 do livro.

A cada regra de derivação corresponde uma regra de integração.

A regra da cadeia corresponde à chamada *integração por substituição*.
A regra que corresponde à regra do produto para derivação é chamada *integração por partes*.

A regra de substituição

A lista de primitivas imediatas apresentada anteriormente não nos diz nada sobre como calcular um integral indefinido como

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Para encontrar um tal integral usamos a estratégia de *introduzir algo extra*. Este "algo extra" é, neste contexto, uma nova variável. Passamos de uma variável x a uma variável u.
Tomando para u o que está debaixo da raiz, isto é, $u = 1 + x^2$, temos que a diferencial de u é $du = 2x\,dx$.
Se o dx que aparece no integral for interpretado como uma diferencial, então $2x\,dx$ ocorre no integral e, formalmente (antes de nos preocuparmos com justificações), podemos escrever

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C\end{aligned}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Podemos verificar que obtivemos a resposta correta usando a regra da cadeia para derivar o resultado obtido:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}+C\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}\cdot 2x=2x\sqrt{1+x^2}$$

De um modo geral, este método funciona sempre que temos um integral que conseguimos escrever na forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.
Observe-se que, sendo $F'=f$, se tem

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$$

pois, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))+C)=F'(g(x))g'(x)$$

Fazendo a "mudança de variável" (ou "substituição") $u=g(x)$, então

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C=F(u)+C=\int F'(u)\,du$$

Escrevendo $F'=f$, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

Acabamos de provar a

Regra da substituição

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cujo contradomínio é um intervalo I e f for uma função contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Note-se que a regra de substituição para a integração foi provada usando a regra da cadeia para a derivação.
Também, se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, pelo que uma boa forma de memorizar a regra de substituição é pensar em dx e du como se diferenciais se tratasse.

No fundo, a regra de substituição diz que é permitido trabalhar com dx e du depois do sinal de integral como se fossem diferenciais.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$.

Solução. Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$. Note-se que, a menos de um fator constante, a diferencial $du = 4x^3\,dx$ ocorre no integral. Usando $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ e a regra de substituição, temos

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4+2)\,dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4+2) + C\end{aligned}$$

Note-se que no último passo devemos voltar à variável original.

A ideia por detrás da regra de substituição é substituir um integral relativamente complicado por um mais simples, como o exemplo acima ilustra.
O grande desafio está em encontrar uma substituição apropriada.
Quando é possível escolher u como uma função que aparece no integral e a derivada também aparece no integral, a menos de um fator constante, a substituição normalmente funciona bem.

Se não for possível escolher um u nas condições deferidas antes, pode acontecer que substituir a função interior de uma função composta funcione. Mas pode não funcionar; nesse caso deverá tentar-se outra substituição ou talvez outro método...

Exemplo

Calcule $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

Solução. Seja $u = 2x+1$. Então $du = 2\,dx$, logo $dx = \frac{1}{2}\,du$. Pela regra de substituição

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

$$u = 2x+1$$
$$du = 2\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} \cdot u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{3/2} + C$$

Vejamos outra solução possível para o exemplo anterior.
Consideremos a substituição $u = \sqrt{2x+1}$.
Então $du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$, donde $dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$.
(Observe-se que com esta substituição se tem $u^2 = 2x+1$, logo $2u\,du = 2\,dx$.)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int u \cdot u\,du = \int u^2\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int e^{x^2} x\,dx$.

Solução. $$\underset{\substack{u = x^2 \\ du = 2x\,dx}}{\int e^{x^2} x\,dx} = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Com alguma experiência, integrais como os dos exemplos anteriores podem podem calcular-se sem a maçada de explicitar a substituição. Mas há casos mais complicados.

Exemplo

Calcule $\int \sqrt{1+x^2}x^5\,dx$.

Solução. Se escrevermos x^5 como $x^4 \cdot x$ torna-se mais óbvia uma substituição adequada. Seja $u = 1 + x^2$. Então $du = 2x\,dx$, logo $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Também $x^2 = u - 1$, pelo que $x^4 = (u-1)^2$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}x^5\,dx &= \int \sqrt{1+x^2}x^4 \cdot x\,dx \\
&= \int \sqrt{u}(u-1)^2 \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\left(u^2 - 2u + 1\right)\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - 2\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\
&= \frac{1}{7}\left(1+x^2\right)^{7/2} - \frac{2}{5}\left(1+x^2\right)^{5/2} + \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int \frac{1}{3+5x^2}\,dx$.

Solução.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+5x^2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\frac{5}{3}x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\int \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)+C \\
&= \frac{\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}x\right)+C.
\end{aligned}
$$

Integração por partes

A regra do produto diz que se f e g forem funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Na notação para integrais indefinidos podemos escrever

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx = f(x)g(x)$$

Rearranjando esta igualdade obtemos a fórmula para a integração por partes apresentada no slide seguinte.

Fórmula para a integração por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \tag{1}$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ obtemos as diferenciais $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$. Usando a regra de substituição, a Fórmula (1) toma a forma seguinte, provavelmente mais fácil de memorizar:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Vamos usar este exemplo para a ilustrar a aplicação da fórmula para a integração por partes tanto na forma dada por (1) como por (2).

Solução usando (1).
Suponhamos que fazemos a escolha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$.
Então, usando (1), temos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x \, dx &= f(x)g(x) - \int g(x) f'(x)\, dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Observe-se que a escolha de qualquer outra primitiva para g levaria ao mesmo resultado.
(Note que esta observação vale para qualquer exemplo.)

Solução usando (2). Seja

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Então

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

Então, usando (2), temos

$$\begin{aligned}
\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{dv} &= \overbrace{x}^{u} \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v} \overbrace{dx}^{du} \\
&= -x \cos x + \int \cos x\, dx \\
&= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

Quando se usa integração por partes tem-se como objetivo obter um integral mais simples que aquele de que se partiu.
No exemplo anterior partimos do integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ e exprimimo-lo usando o integral $\int \cos x\, dx$, que é mais simples.

Se tivéssemos feito a escolha $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x\, dx$, então $du = \cos x\, dx$ e $v = x^2/2$.
Obtínhamos então:

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Como o integral $\int x^2 \cos x\, dx$ é mais complicado que aquele de que partimos, esta escolha parece ser má.
Em geral, ao decidir a escolha de u e dv procura-se escolher para $u = f(x)$ um fator da função integranda que se torne mais simples quando derivada, procurando-se também que $dv = g'(x)\, dx$ seja facilmente integrável.

Exemplo

Calcule $\int \ln x \, dx$.

Solução. Escolhemos

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Resulta

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule $\int x \ln x \, dx$.

Solução.

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = x \, dx$$
$$du = \tfrac{1}{x} \, dx \qquad v = \tfrac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule $\int t^2 e^t \, dt$.

Solução. O facto de t^2 se tornar mais simples por derivação e e^t não se alterar quando derivado ou primitivado, sugere a escolha:

$$u = t^2 \qquad dv = e^t \, dt$$

resultando então

$$du = 2t \, dt \qquad v = e^t$$

Integrando por partes:

$$\int t^2 e^t \, dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt$$

Obtivemos um integral, $\int t e^t \, dt$, mais simples que o original, mas ainda não se trata de uma primitiva imediata.

Usamos também integração por partes para o calcular:

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

$$\int \underset{\substack{u = t \qquad dv = e^t\,dt \\ du = dt \quad\; v = e^t}}{te^t\,dt} = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C$$

Obtemos então

$$\begin{aligned}
\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2\int te^t\,dt \\
&= t^2 e^t - 2\left(te^t - e^t + C\right) \\
&= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \quad \text{onde } C_1 = -2C
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Nem e^x nem $\operatorname{sen} x$ se tornam mais simples por derivação. Vamos escolher $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Então $du = e^x \, dx$ e $v = -\cos x$. Integrando por partes:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

O integral que se obteve apresenta a mesma dificuldade que o original. Integrando novamente por partes, agora com $u = e^x$ e $dv = \cos x \, dx$. Tem-se então $du = e^x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Inserindo o resultado obtido na expressão anterior, podemos escrever

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

o que pode ser visto como uma equação que podemos resolver em ordem a $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$, o integral que pretendemos calcular.

Somando $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ a ambos os membros obtemos:

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividindo por 2 e juntando a constante de integração temos a solução:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Integração de Funções racionais

Vamos ver como integrar qualquer função racional exprimindo-a como uma soma de frações mais simples, ditas *frações parciais*, que sabemos integrar.
Consideremos as frações $2/(x-1)$ e $1/(x+2)$. Tem-se:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

O exemplo seguinte (onde se reverte o processo, isto é, parte-se de uma função racional e passa-se para frações mais simples) ilustra o método.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C\end{aligned}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

As seguintes primitivas constam do formulário.

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \text{ para } n > 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \text{ para } a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{(x+b)^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx = \ln(x^2+a^2) + C$$

$$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln|x^2+bx+c| + C$$

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} + C, \; n \neq 1$$

Vejamos como funciona em geral o método das funções racionais. Consideremos

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinómios.

Se o grau de P for menor que o grau de Q, podemos exprimir f como uma soma de frações mais simples. Veremos adiante diversos exemplos.

Se o grau de P for maior que o grau de Q, então damos uma passo preliminar: dividindo P por Q obtemos

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

onde R é um polinómio de grau menor que o grau de Q, ou é o polinómio nulo.

Temos então

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde R e S são polinómios.

Se R for o polinómio nulo temos $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)$, um polinómio.

Caso contrário, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ poderá ser expresso como uma soma de frações parciais, e então f é a soma de um polinómio com frações parciais.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

Solução. O grau do numerador é maior que o grau do denominador, pelo que começamos por fazer uma divisão. Obtemos:

$$x^3+x=(x^2+x+2)(x-1)+2$$

o que nos permite escrever:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx &= \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

Neste exemplo, o passo preliminar (a divisão) praticamente resolveu-nos o problema.
Quando o denominador, $Q(x)$, é mais complicado, devemos fatorizá-lo...
(o que pode não ser fácil).

Pode mostrar-se que qualquer polinómio Q se pode escrever como um produto de fatores lineares (da forma $ax + b$) por fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, com $b^2 - 4ac < 0$).

Feita a divisão do numerador pelo denominador (se necessário) e fatorizado o denominador, exprime-se a função racional $P(x)/Q(x)$ como uma soma de *frações parciais* da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Há um resultado da Álgebra que garante que tal pode ser feito.

Pode ocorrer algum dos 4 casos que vemos nos slides seguintes.

Caso em que o denominador é produto de fatores lineares distintos.

Podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido.
O teorema das frações parciais diz que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k} \tag{3}$$

As constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$.

Solução. Atendendo a que o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos de dividir. Fatorizamos o denominador:

$$2x^3+3x^2-2x = x\left(2x^2+3x-2\right) = x(2x-1)(x+2)$$

A decomposição em frações parciais terá a forma seguinte (porque o denominador tem 3 fatores distintos)

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Para determinar A, B e C, multiplicamos ambos os membros da igualdade por $x(2x-1)(x+2)$. Obtemos

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \qquad (4)$$

Logo

$$x^2+2x-1 = (2A+B+2C)x^2 + (3A+2B-C)x - 2A$$

Os polinómios são iguais, pelo que os coeficientes dos termos do mesmo grau têm que ser iguais. Isso leva-nos ao sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{llll} 2A & +B & +2C & =1 \\ 3A & +2B & -C & =2 \\ -2A & & & =-1 \end{array}\right.$$

cuja solução é $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{5}$, e $C=-\frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx &= \int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+K \end{aligned}$$

Para encontrar os coeficientes A, B e C (que sabemos existirem pelo teorema das frações parciais) poderíamos usar um método alternativo, como ilustrado a seguir.

A igualdade (4) vale para todos o x. Em particular vale para $x=0$, pelo que $-2A=-1$, ou seja, $A=\frac{1}{2}$. De modo análogo, a avaliação de ambos os membros de (4) em $x=\frac{1}{2}$ permite determinar B e a avaliação em $x=-2$ permite determinar C.

Poderia usar o *sage* para confirmar o resultado do exemplo anterior, bem como para confirmar os resultados de alguns dos passos intermédios:

```
sage: f(x)=(x^2+2*x-1)/(2*x^3+3*x^2-2*x)
sage: factor(2*x^3+3*x^2-2*x)
(2*x - 1)*(x + 2)*x
sage: f.partial_fraction()
x |--> 1/5/(2*x - 1) - 1/10/(x + 2) + 1/2/x
sage: integral(f(x),x)
1/10*log(2*x - 1) - 1/10*log(x + 2) + 1/2*log(x)
```

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Caso em que $Q(x)$ é produto de fatores lineares, com alguns repetidos.

Suponhamos que $Q(x)$ tem um fator $(a_i x + b_i)$ repetido r vezes. Então, em vez do termo $\frac{A_i}{a_i x + b_i}$ que aparece na equação (3) do caso anterior usa-se

$$\frac{A_i}{a_i x + b_i} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_i x + b_i)^r}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx$.

Solução. Começamos por dividir. Isso permite-nos escrever:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Seguidamente fatorizamos o denominador. Como 1 é uma raiz do denominador, tem-se que $x - 1$ é um seu fator. Obtém-se

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)\left(x^2 - 1\right) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais de $\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$ é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando ambos os membros pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores, $(x-1)^2(x+1)$, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{cccc} A & & +C & = 0 \\ & B & -2C & = 4 \\ -A & +B & +C & = 0 \end{array} \right.$$

Resulta que $A = 1, B = 2$, e $C = -1$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K \end{aligned}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Caso em que $Q(x)$ tem fatores quadráticos, nenhum dos quais se repete.

Se $Q(x)$ tiver um fator $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac < 0$, então, adicionalmente, $R(x)/Q(x)$ tem um termo da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

com A e B constantes a determinar.

Por exemplo, a função $f(x) = x/\left[(x-2)\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)\right]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\, dx.$

Solução. Tem-se $x^3 + 4x = x\left(x^2 + 4\right)$. Como $x^2 + 4$ é irredutível, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x\left(x^2 + 4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x\left(x^2 + 4\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A\left(x^2 + 4\right) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes obtemos

$$A + B = 2 \quad C = -1 \quad 4A = 4$$

donde resulta $A = 1, B = 1$ e $C = -1$. Consequentemente,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Para integrar o segundo termo devemos separá-lo em duas frações:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Temos então

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+4}{x\,(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right) - \frac{1}{2}\arctan(x/2) + K\end{aligned}$$

Note-se que a última linha se obtém facilmente recorrendo ao formulário.

Caso em que $Q(x)$ tem algum fator quadrático repetido.

Se $Q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, em que $b^2 - 4ac < 0$, a soma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$.

Exemplo

Escreva a decomposição em frações parciais da função

$$\int \frac{5x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^3(x+5)^4(x^2+x+1)^2}\, dx$$

Solução.

$$\begin{aligned}\frac{5x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^3(x+5)^4(x^2+x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} \\ &+ \frac{D}{x+5} + \frac{E}{(x+5)^2} + \frac{F}{(x+5)^3} + \frac{G}{(x+5)^4} \\ &+ \frac{Hx + I}{x^2 + x + 1} + \frac{Jx + K}{(x^2+x+1)^2}\end{aligned}$$

Há casos em que funções integrandas não são racionais mas que podem ser transformadas em racionais mediante substituições apropriadas. Isso acontece frequentemente quando a função integranda contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$. A substituição a tentar é $u = \sqrt[n]{g(x)}$.

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

Solução. Seja $u = \sqrt{x+4}$. Então $u^2 = x + 4$, donde $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Logo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{u^2-4} 2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du = 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right)\,du \\
&= 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4} = 2\int du + 8\int \left(\frac{1/4}{u-2} - \frac{1/4}{u+2}\right)\,du \\
&= 2u + 2\left(\ln|u-2| - \ln|u+2|\right) + C = 2u + 2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C \\
&= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C
\end{aligned}
$$

3 Integrais

Os slides desta secção baseiam-se nas secções 5.1, 5.2, 5.3 e 7.8 do livro.

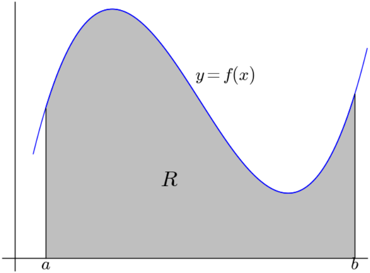
Começamos com o problema da área e usamo-lo para formular a ideia de integral definido, o conceito básico do cálculo integral.
A ligação entre o cálculo diferencial e o cálculo integral é dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo.
Terminaremos a secção com a consideração de integrais impróprios.

O integral definido

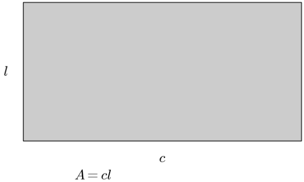
Vamos procurar resolver o problema da área: encontrar a área da região

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

limitada pelo gráfico de uma função, o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$, como na figura ao lado.



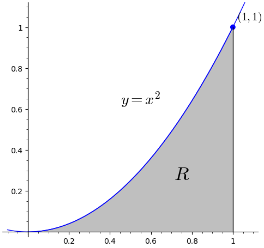
Para o efeito devemos perguntar-nos: o que significa *área*? Para o caso de um retângulo (e outras regiões poligonais) é fácil de responder: é o produto do comprimento pela largura.



Claro que temos uma ideia intuitiva do que é a área de uma região, possivelmente com lados curvos, mas devemos tornar esta ideia precisa.

Exemplo

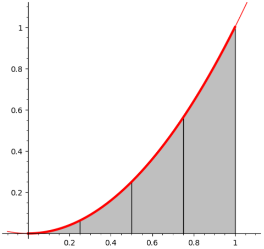
Use retângulos para estimar a área A da região abaixo da parábola $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 1$ (a região R ilustrada na figura ao lado).



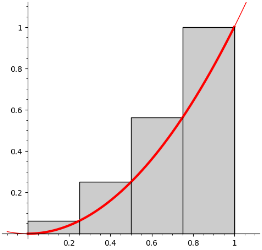
Podemos desde logo observar que a área de R está entre 0 e 1, pois R está contida num quadrado de lado 1.

Esta estimativa pode certamente ser melhorada.

Suponhamos que dividimos a região em quatro subregiões determinadas pelas retas $x = 1/4$, $x = 1/2$ e $x = 3/4$, como ilustrado na figura. Seguidamente aproximamos a área de cada uma dessas subregiões por retângulos.



Para fazer a aproximação de uma subregião podemos usar um retângulo com a mesma base e cuja altura é a mesma que a aresta direita, como a figura ao lado ilustra.
Note-se que este retângulo aproxima por excesso a área da subregião correspondente.



As alturas dos retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nos extremidades direitas dos intervalos

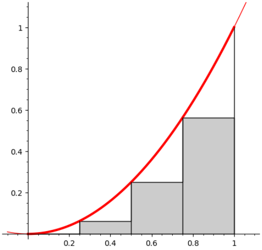
$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \text{ e } \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

Cada um destes retângulos tem largura $\frac{1}{4}$ sendo as suas alturas $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$, e 1^2, respetivamente.
Chamemos R_4 à soma das áreas destes retângulos:

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

A figura indica-nos que a área A de R é menor que R_4.

Podíamos, de modo análogo, fazer a aproximação por defeito na qual são usados retângulos mais pequenos, em que as alturas são os valores de f nos extremos esquerdos dos intervalos.
(Esta aproximação está ilustrada na figura ao lado. O primeiro retângulo tem altura 0.



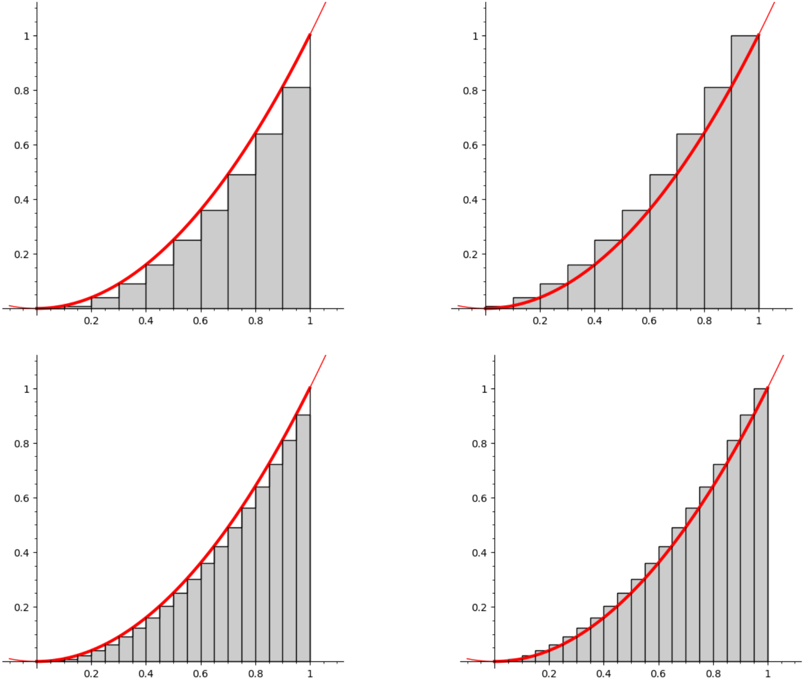
A soma das áreas dos retângulos:

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

A figura indica que a área de R é maior que L_4. Obtemos assim

$$0.21875 < A < 0.46875$$

O processo pode ser repetido aumentando o número de regiões, o que leva a melhores aproximações, como as figuras do slide seguinte ilustram.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Consideremos de novo a região R do exemplo anterior.
Suponhamos que, em vez de 4, consideramos n subregiões (todas com base de comprimento $1/n$). Note-se que isto corresponde a "partir" o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos disjuntos de comprimento $1/n$ cada.

Para a soma das áreas dos retângulos cujas alturas são as obtidas nas extremidades direitas (respetivamente esquerdas) usamos a notação R_n (respetivamente L_n), generalizando a notação usada no caso $n = 4$.

Exemplo

Com a notação introduzida, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

Solução. As figuras do lado direito do slide anterior ilustram a situação, com $n = 10$ e $n = 20$.
Cada retângulo tem largura $1/n$ e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; isto é, as alturas são

$$(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2.$$

Então:

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)
\end{aligned}
$$

Usando a fórmula (que pode ser provada por indução – exercício)

$$
\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
$$

obtém-se:

$$
R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

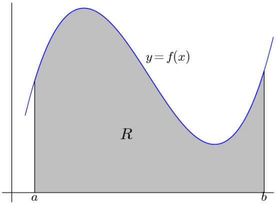
Pode provar-se de modo análogo que

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

o que nos permite definir a área A da região R como

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado a regiões mais gerais:



Começamos por dividir a região em faixas de igual largura:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

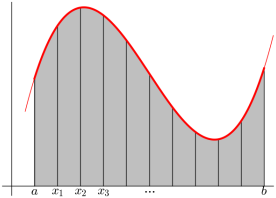
Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$.

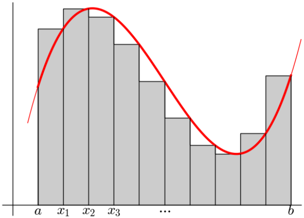
Os extremos direitos dos intervalos são:

$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = a + 3\Delta x$$
$$\ldots$$



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo de largura Δx e altura $f(x_i)$ – o valor de f na extremidade direita.
A área do retângulo é $f(x_i)\Delta x$.



O que intuitivamente pensamos como sendo a área da região R é aproximado pela soma das áreas destes retângulos

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

A uma soma deste tipo chamaremos *soma de Riemann*.
Isto motiva a definição seguinte:

Definição

A área A de uma região R que está abaixo do gráfico de uma função não negativa e contínua é o limite da soma R_n das áreas dos retângulos:

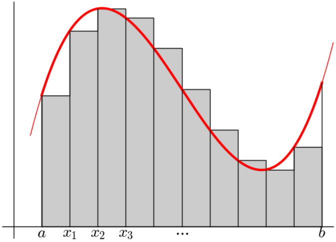
$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

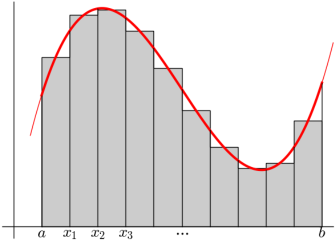
Pode provar-se que o limite na definição anterior existe sempre, por estarmos a assumir que f é contínua.

Pode também provar-se que se obtém o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos intervalos:

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

Podem também ser usados outros pontos. A estes pontos chamamos *pontos de amostragem*.
As figuras seguintes ilustram os casos em que se consideram as extremidades esquerdas e os pontos médios dos intervalos como pontos de amostragem.

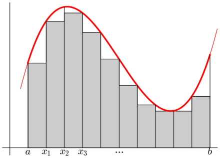




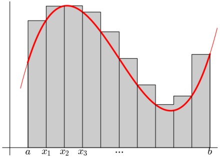
Lembramos que uma função contínua definida num intervalo fechado atinge um mínimo e um máximo nesse intervalo.

Outros pontos de amostragem que seria natural considerar são, para cada subintervalo,

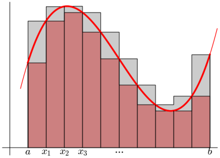
- o ponto em que a função atinge o mínimo, caso em que a soma das áreas dos retângulos se diz uma *soma inferior*



- o ponto em que a função atinge o máximo, caso em que a soma das áreas dos retângulos se diz uma *soma superior*



Pode mostrar-se que *a área A da região é o único número maior que todas as somas inferiores e menor que todas a somas superiores*.



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

O integral definido

Limites da forma $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$, que nos apareceram para calcular/definir uma área, ocorrem em diversas situações, por exemplo para calcular a distância percorrida por um objeto.

(Sugere-se a consulta da bibliografia para ver outros exemplos.)

Usamos um nome e uma notação especiais para este tipo de limite.

Definição

Seja f uma função definida num intervalo fechado $[a, b]$. Dividimos $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = (b - a)/n$.

Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ pontos (ditos pontos de amostragem) tais que, para cada i, x_i^* pertence a $[x_{i-1}, x_i]$.

O integral definido de f de a a b é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

desde que este limite exista e tenha o mesmo valor para qualquer escolha dos pontos x_i^*.

Se o limite existir, diz-se que f é integrável em $[a, b]$.

Observações

O símbolo *ds* $\int$ diz-se o símbolo de integral.

Em $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ diz-se a função integranda e a e b dizem-se os limites de integração (a é o limite inferior e b é o limite superior).
O símbolo dx indica-nos que x é a variável independente.

O integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número. Não depende de x, podendo x ser substituído por outra letra qualquer sem que o valor do integral mude.

A soma

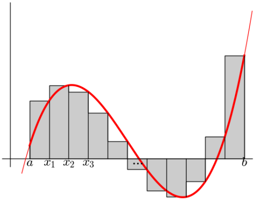
$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

diz-se uma soma de Riemann.

Quando f é positiva, uma soma de Riemann pode ser vista como uma soma de áreas de retângulos.

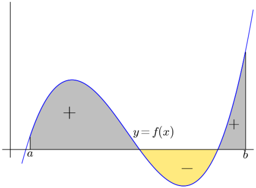
Comparando as definições (a de área e a de integral definido) vemos que, no caso de f ser positiva, o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretado como sendo a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$.

Quando f toma também valores negativos, como na figura ao lado, a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos acima do eixo dos x com os *simétricos* das áreas dos retângulos que ficam abaixo do eixo dos x.



Quando se toma o limite das somas de Riemann obtemos a situação ilustrada na figura ao lado. O integral definido pode ser interpretado como "área líquida", isto é, a diferença das áreas

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$



onde A_1 é a soma das áreas das regiões acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a soma das áreas das regiões abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

Observação

Embora tenhamos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividindo $[a,b]$ em subintervalos de igual comprimento, isso não é necessário. O que é necessário é que os comprimentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$, se aproximem de 0 no processo em que se toma o limite, o que se pode garantir exigindo que o máximo se aproxime de 0. Assim, a definição de integral torna-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x_i$$

O teorema seguinte, cuja prova fica fora do âmbito desta unidade curricular, garante-nos que as funções mais comummente consideradas são integráveis.

Teorema

Se f é contínua em $[a,b]$, ou se f é limitada e tem apenas um número finito descontinuidades, então f é integrável em $[a,b]$; isto é, o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Se f é integrável, então existe o limite que apareceu na definição de integral definido, não sendo afetado o seu valor pela forma como escolhermos os pontos x_i^*.
Escolhendo as extremidades direitas dos intervalos, isto é, tomando $x_i^* = x_i$, podemos escrever a definição de integral com um aspeto mais simples:

Teorema

Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ *e* $x_i = a + i\Delta x$.

Notação. O integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ pode também ser denotado simplesmente por $\int_a^b f$.

Propriedades do integral definido

Aquando da definição de integral $\int_a^b f(x)\,dx$ assumimos implicitamente que $a < b$. Mas as somas de Riemann fazem sentido também quando $a > b$: Δx passa a ser $(a-b)/n$.Assim

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Se $a = b$, então $\Delta x = 0$ e tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

O significado das propriedades seguintes em termos de áreas para funções positivas é claro.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Assumimos que as funções f e g são contínuas. Tem-se:

Proposição

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, *onde c é uma constante*
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ *onde c é uma constante*
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

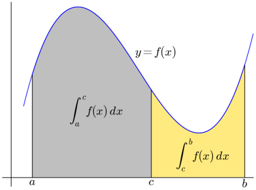
A demonstração usa o facto de o limite da soma ser a soma dos limites.
Pode ser feita como exercício.
(Consultar a literatura é uma possível opção.)

Uma outra propriedade é dada pela proposição seguinte. Diz-nos como combinar integrais da mesma função sobre intervalos adjacentes.

Proposição

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Esta proposição não é tão fácil de provar em geral, mas para uma função positiva o resultado é geometricamente claro.



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Registamos ainda propriedades de comparação (que podem ser úteis quando, por exemplo, estamos interessados em ter alguma estimativa do valor do integral definido).

Proposição

1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$, *então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$, *então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$, *então*
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Demonstração.

Exercício. $\square$

Exemplo

Use a proposição anterior para dar uma estimativa do número $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

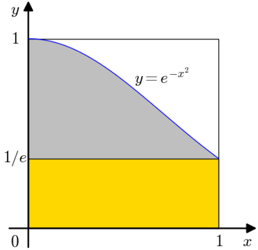
Solução. Como a função $f(x) = e^{-x^2}$ é decrescente em $[0,1]$, o seu máximo absoluto é $M = f(0) = 1$ e o seu mínimo absoluto é $m = f(1) = 0$. Pela proposição anterior tem-se

$$e^{-1} = e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0) = 1$$

Como $e^{-1} \simeq 0.3679$, podemos escrever

$$0.367 \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq 1$$

A figura ao lado ilustra o exemplo: o integral é maior que a área do retângulo de baixo e menor que a área do quadrado.



Teorema Fundamental do Cálculo

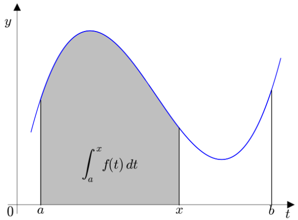
O teorema fundamental do cálculo estabelece uma ligação entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral.

A primeira parte do teorema trata de funções definidas por uma equação da forma

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

onde f é uma função contínua em $[a, b]$ e x varia entre a e b.
Note-se que g apenas depende de x, a variável que aparece como limite superior de integração. Para x fixo, o integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número.

Deixando x variar, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ também varia e define uma função de x. Se f for uma função positiva, então $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ pode ser interpretado como a área debaixo do gráfico de f desde a até x.



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo, parte I (TFC1))

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), e tem-se $g'(x) = f(x)$.

Demonstração. Se x e $x + h$ pertencerem a (a, b), então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Para $h \neq 0$ tem-se:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Consideremos o caso $h > 0$. Então f é contínua no intervalo fechado $[x, x+h]$ e neste intervalo existem u e v tais que $m = f(u)$ $M = f(v)$ são, respetivamente, o mínimo absoluto e o máximo absoluto de f em $[x, x+h]$. Por uma proposição anterior, tem-se

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)h$$

Como $h > 0$, podemos dividir todos os membros destas desigualdades por h (sem alterar o sentido das desigualdades):

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)$$

Usando a última equação do slide anterior podemos escrever:

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)$$

Note-se (exercício) que o caso $h < 0$ conduz a estas mesmas desigualdades.

Façamos agora h tender para 0. Então $u \to x$ e $v \to x$, porque tanto u como v estão entre x e $x+h$. Resulta que

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

por f ser contínua em x. Usando agora o facto de termos funções enquadradas, obtemos

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Concluímos assim que g é derivável em (a,b).
Se x for um dos extremos do intervalo, a ou b, a equação anterior deve ser interpretada como um limite lateral. Como uma função diferenciável é contínua, concluímos que g é contínua em $[a,b]$. $\square$

Exemplo

Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

Solução. Como $\sqrt{1+t^2}$ é contínua, podemos aplicar o TFC, parte I. Obtemos

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Exemplo

Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^{x^4} \sec t\,dt$.

Solução. Aqui g é uma função composta. Teremos de usar a regra da cadeia em conjunto com o TFC, parte I.
Seja $u = x^4$. Então

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt = \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx}$$
$$= \sec u\frac{du}{dx} = \sec\left(x^4\right)\cdot 4x^3$$

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo, parte II (TFC2))

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é uma primitiva de f.

Demonstração. Seja $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Sabemos, pela parte I, que g é uma primitiva de f. Se F for alguma outra primitiva de f em $[a, b]$, então F e g diferem de uma constante:

$$F(x) = g(x) + C \qquad \text{para } x \in (a, b)$$

Como tanto F como g são contínuas em $[a, b]$, tomando os limites laterais apropriados, concluímos que a igualdade acima vale também para $x = a$ e para $x = b$, isto é,

$$F(x) = g(x) + C \qquad \text{para } x \in [a, b]$$

Fazendo $x = a$, tem-se

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Usando agora $x = b$ e $x = a$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Juntamos agora as duas partes do Teorema Fundamental num único enunciado:

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo)

Suponhamos que f é uma função contínua em $[a, b]$.

1. *Se $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, então $g'(x) = f(x)$.*
2. *Tem-se $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f.*

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx$.

Solução. A função $f(x) = e^x$ é contínua em $\mathbb{R}$ (e, portanto, em $[1,3]$)e uma sua primitiva é $F(x) = e^x$. Assim, a segunda parte do teorema fundamental do Cálculo permite-nos escrever:

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Note-se que o TFC2 nos permite usar uma primitiva qualquer. No exemplo anterior poderíamos ter usado, por exemplo, $F(x) = e^x + 7$.

Usa-se frequentemente a notação

$$F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

sendo também comum usar-se $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$, $[F(x)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$.

Exemplo

Encontre a área da região entre 0 e 1 limitada pela parábola $y = x^2$.

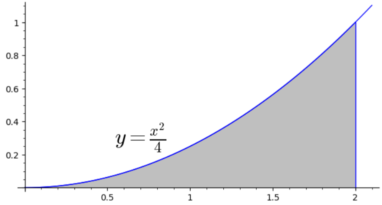
Solução. Uma primitiva de $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.
Podemos encontrar a área pedida usando o TFC2:

$$A = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Já antes tínhamos calculado esta área... Conseguimo-lo usando vários slides...

Exemplo

Calcule a área (A) da região a cinzento na figura ao lado.

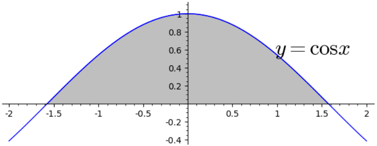


Solução.

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{4}\, dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{12} - 0 = \frac{2}{3}$$

Exemplo

Calcule a área (A) da região a cinzento na figura ao lado.



Solução. Note-se que a curva $y = cosx$ interseta o eixo dos x nos pontos de abcissas $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$.

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = [\operatorname{sen} x]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} = 2$$

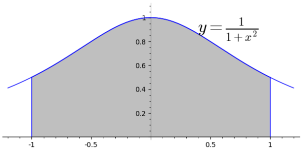
Observando que $\cos x$ é uma função par, poderíamos fazer:

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 \int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 \, [\operatorname{sen} x]_{0}^{x=\pi/2} = 2(1-0) = 2$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule a área (A) da região a cinzento na figura ao lado.



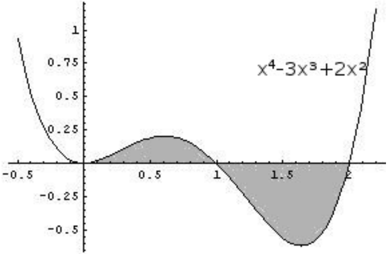
Solução.

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_{x=-1}^{x=1}$$
$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2.$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule a área (A) da região a cinzento na figura ao lado.



Solução.

$$A = \int_0^1 \left(x^4 - 3x^3 + 2x^2\right)\, dx - \int_1^2 \left(x^4 - 3x^3 + 2x^2\right)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2}$$

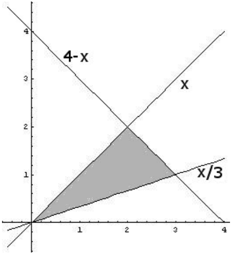
$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - 0 - \left(\left(\frac{2^5}{5} - \frac{3\cdot 2^4}{4} + \frac{2\cdot 2^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2^5}{5} - \frac{3\cdot 2^4}{4} + \frac{2\cdot 2^3}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Exemplo

Calcule a área (A) da região a cinzento na figura ao lado.



Solução. Note-se que $4 - x = x \Leftrightarrow x = 2$ e $4 - x = x/3 \Leftrightarrow x = 3$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 x\,dx - \int_0^2 \frac{x}{3}\,dx + \int_2^3 4 - x\,dx - \int_2^3 \frac{x}{3}\,dx \\
&= \int_0^2 x - \frac{x}{3}\,dx + \int_2^3 4 - x - \frac{x}{3}\,dx = \int_0^2 \frac{2x}{3}\,dx + \int_2^3 4 - \frac{4x}{3}\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{3}\right]_{x=0}^{x=2} + \left[4x - \frac{2x^2}{3}\right]_{x=2}^{x=3} = 2.
\end{aligned}
$$

Para calcular um integral definido usando a regra da substituição podemos encontrar uma primitiva usando a regra, fazendo depois uso do TFC. Alternativamente, podemos usar a regra seguinte, que nos permite mudar os limites de integração ao mesmo tempo que mudamos a variável.

Regra da substituição para integrais definidos

Se g' é uma função contínua em $[a, b]$ e f é contínua no contradomínio de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Demonstração. Seja F uma primitiva de f. Resulta da regra da cadeia que $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$. Pelo TFC2, temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Outra vez pelo TFC2, temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)) \quad \square$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

Solução. Seja $u = 3 - 5x$. Então $du = -5dx$, logo $dx = -1/5du$. Quando $x = 1$ tem-se $u = -2$ e quando $x = 2$ tem-se $u = -7$. Logo

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

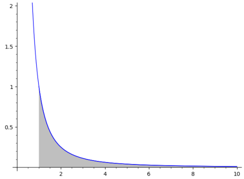
Solução. Fazemos $u = \ln x$. Então $du = dx/x$. Quando $x = 1$ tem-se $u = \ln 1 = 0$ e quando $x = e$ tem-se $u = \ln e = 1$. Logo

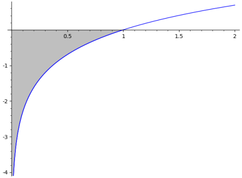
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

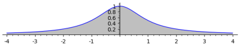
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Integrais impróprios

Os integrais impróprios representam uma tentativa de medir a área de uma região infinita...







...se tal for possível!

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Integrais impróprios (de tipo I)

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$, se este limite existir e for finito.
- Nesse caso diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge*.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^a f(x)\,dx$, se este limite existir e for finito.
- Nesse caso diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ *converge*.
- Diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge* se e só se os integrais impróprios $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ convergirem.
- Nesse caso $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Exemplo

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$:

$$\begin{aligned}\lim_{M\to+\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{M\to+\infty} [\ln x]_{x=1}^{x=M} \\ &= \lim_{M\to+\infty} \ln M = +\infty\end{aligned}$$

pelo que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ não converge.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$:

$$\begin{aligned}\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \tfrac{1}{x^2}\, dx &= \lim_{M\to+\infty} \left[-\tfrac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=M} \\ &= \lim_{M\to+\infty} \left(1-\tfrac{1}{M}\right) = 1.\end{aligned}$$

donde se conclui que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$.

Exemplo

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$:

$$\lim_{M\to-\infty} \int_M^0 e^x \, dx = \lim_{M\to-\infty} \left[e^x\right]_{x=M}^{x=0}$$
$$= \lim_{M\to-\infty} (1 - e^M) = 1.$$

donde resulta que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$ converge e $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = 1$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \tfrac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg} M = \frac{\pi}{2}$$

donde $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ converge e $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2}$.
Analogamente, tem-se

$$\lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{M\to-\infty} -\operatorname{arctg} M = \frac{\pi}{2}$$

donde $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx$ converge e $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2}$.
Podemos então concluir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ converge e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi.$$

Exemplo

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$: começamos por calcular a primitiva

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

sendo então

$$\lim_{M\to+\infty}\int_2^{M} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{M-1}{M+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right)$$
$$= \ln\sqrt{3},$$

donde se conclui que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ converge e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \ln\sqrt{3}.$

FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO Departamento de Matemática

Exemplo

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx,\ a \neq 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^a}\,dx &= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{x=1}^{x=M}\\ &= \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{M^{1-a}}{1-a}-\frac{1}{1-a}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{1}{a-1} & \text{se } a>1\\ +\infty & \text{se } a<1.\end{cases}\end{aligned}$$

Logo:

- se $a>1$, então $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\,dx$ converge e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{a-1}$;
- se $a<1$, então $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}\,dx$ não converge.

Integrais impróprios (de tipo II)

- Se f é uma função contínua em $[a, b)$ e é descontínua em b, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$
se este limite existir e for finito.
- Nesse caso diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*.
- Se f é uma função contínua em $(a, b]$ e é descontínua em a, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$
se este limite existir e for finito.
- Nesse caso diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*.
- Se f tem uma descontinuidade em (a, b) e tanto $\int_a^c f(x)\,dx$ como $\int_c^b f(x)\,dx$ são convergentes, define-se
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Exemplo

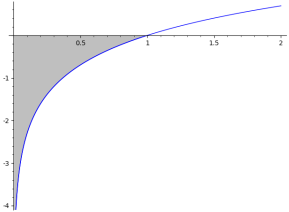
Encontre $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

Solução. O integral é impróprio porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem uma assíntota vertical $x = 2$. A descontinuidade infinita ocorre na extremidade esquerda de $[2, 5]$.

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \left[2\sqrt{x-2}\right]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Exemplo

Encontre $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$.



Solução. A função $f(x) = \ln x$ tem uma assíntota vertical $x = 0$, pois $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Então

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx$$

Integrando por partes, com $u = \ln x, dv = dx, du = dx/x$, e $v = x$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln x dx &= x \ln x]_t^1 - \int_t^1 dx \\ &= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) = -t \ln t - 1 + t\end{aligned}$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Para encontrar o limite do primeiro termo usamos a regra de L'Hôpital.

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0$$

Logo

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

Concluímos que a área da região sombreada na figura acima é 1.

Teorema (Comparação de integrais impróprios)

Suponhamos que f e g são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$, para $x \geq a$.

1. *Se $\int_a^\infty f(x)dx$ for convergente, então $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente.*
2. *Se $\int_a^\infty g(x)dx$ for divergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente.*

Exemplo

Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ é convergente.