

Álgebra Linear e Geometria Analítica (M1002)

Exame da Época de Recurso (parte 1) 22/04/2021 Duração: Duas horas

Cotação: 10 valores. Todas as respostas devem ser convenientemente justificadas.

1. (3,5 valores) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + 3y - z = a + b \\ y - 2z = a - b \end{cases}$$

nas variáveis x , y e z e com parâmetros a e b reais.

- (a) Obtenha a matriz em escada reduzida associada ao sistema.
- (b) Termine de resolver o sistema para $(a, b) = (2, 1)$.
- (c) Justifique a afirmação seguinte: “Este sistema nunca será possível e determinado, independentemente dos valores atribuídos aos parâmetros a e b ”.
- (d) Averigue se existem parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ para os quais $(1, -1, 3)$ é solução do sistema.

2. (1,5 valores) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quando estão bem definidas calcule as operações indicadas, quando não estão bem definidas justifique:

$$A + B, B^{-1}, C^2, A \times C, -B \times C^T.$$

3. (1 valor) Dê exemplos de matrizes 2×2 , A e B , tais que $(A \times B)^3$ seja uma matriz nula, mas $A \times B$ não.

4. (4 valores) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante de A pelo desenvolvimento da segunda coluna.
- (b) Calcule a matriz dos co-fatores de A .
- (c) A partir das alíneas (a) e (b), obtenha a matriz A^{-1} .
- (d) Resolva a equação matricial

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$