

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Métodos Estatísticos – L.EIC

Semana 11

Aula 9

30 de maio de 2022

Métodos Estatísticos – L.EIC

Aula 9

Inferência Estatística – Testes de Hipóteses

Comparação de 2 Amostras Independentes

Testes de Aleatorização

Amostras Grandes

Amostras Independentes e Emparelhadas

Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

Testes Unilaterais

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

6

INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

Testes de Hipóteses

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes

Testes de Aleatorização

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses (TH)

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes

Quão diferentes devem ser duas amostras para que possamos inferir que as populações que as geraram são realmente diferentes?

Uma maneira de abordar esta questão é determinar as **médias das duas amostras e comparar a sua diferença** (por exemplo) com aquela que seria **expectável devido ao acaso**.

Os designados **testes de aleatorização** permitem avaliar a **variabilidade na diferença de duas médias** amostrais.

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Um investigador estudou a flexibilidade de cada uma de 7 mulheres, 4 das quais frequentavam aula de aeróbica e 3 delas aula de dança.

Uma medida observada, e registada, neste grupo foi a "flexão do tronco".

Aerobics	Dance
38	48
45	59
58	61
64	
média 51.25	56.00

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Será que os dados evidenciam que a flexibilidade está associada ao facto de se ser um dançarino(a)?

Se ser um dançarino **não tem nenhum efeito na flexibilidade**, então pode aceitar-se que as 7 observações (dados do estudo), **pertencem à mesma população.**

Isto é, algumas mulheres têm maior “flexão do tronco” do que outras, **mas esse facto é independente de ser um dançarino.**

→ Formulação de uma **hipótese**

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Hipótese: As sete medições de flexão do tronco vieram de uma única população.

A flexibilidade de cada indivíduo (medida pela flexão do tronco), não está relacionada com a modalidade praticada (aeróbica ou dança).

Aerobics	Dance
38	48
45	59
58	61
64	
média 51.25	56.00

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Hipótese: As sete medições de flexão do tronco vieram de uma única população.

A flexibilidade de cada indivíduo (medida pela flexão do tronco), não está relacionada com a modalidade praticada (aeróbica ou dança).

Se a **hipótese for verdadeira** então qualquer reagrupamento dos 7 valores em dois grupos (4 “aeróbica” + 3 “dança”) é tão provável como qualquer outro.

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Hipótese: As sete medições de flexão do tronco vieram de uma única população.

A flexibilidade de cada indivíduo (medida pela flexão do tronco), não está relacionada com a modalidade praticada (aeróbica ou dança).

Vamos supor que **escrevemos as sete observações em sete cartas**, baralhamos, e depois selecionamos 4 ao acaso para o grupo "aeróbica", ficando as restantes 3 para o grupo "dança".

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

De quantas maneiras se podem dividir as 7 observações em dois grupos com dimensões 4 e 3? (No **R**: `choose(7,4)` [1] 35)

Consideram-se esses 35 agrupamentos e para cada um é calculada a diferença das médias:

Sample 1 ("aerobics")	Sample 2 ("dance")	Mean of sample 1	Mean of sample 2	Difference in means
38 45 58 64	48 59 61	51.25	56.00	-4.75
38 45 58 48	64 59 61	47.25	61.33	-14.08
38 45 58 59	64 48 61	50.00	57.67	-7.67
38 45 58 61	64 48 59	50.50	57.00	-6.50
38 45 64 48	58 59 61	48.75	59.33	-10.58
38 45 64 59	58 48 61	51.50	55.67	-4.17
...

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Diferença entre as médias de cada uma das amostras
para os 35 agrupamentos possíveis

Aerobics	Dance
38	48
45	59
58	61
64	
51.25	56.00

-4.75	-14.08	-7.67	-6.50	-10.58	-4.17	-3.00
-13.50	-12.33	-5.92	-3.00	3.42	4.58	-5.92
-4.75	1.67	-2.42	-1.25	5.17	-4.17	1.08
7.50	-1.83	-0.67	5.75	1.67	2.83	9.25
10.42	16.83	7.50	11.00	8.67	-0.08	9.25

Diferença observada
para as médias:
 $51.25 - 56.00 = -4.75$

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Todas as diferenças de médias amostrais possíveis (ordenadas):

-14,08	-13,50	-12,33	-10,58	-7,67	-6,50	-5,92
-5,92	-4,75	-4,75	-4,17	-4,17	-3,00	-3,00
-2,42	-1,83	-1,25	-0,67	-0,08	1,08	1,67
1,67	2,83	3,42	4,58	5,17	5,75	7,50
7,50	8,67	9,25	9,25	10,42	11,00	16,83

Entre as 35 diferenças, 20 são de valor absoluto igual ou superior a 4.75 (que é a diferença observada).

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Todas as diferenças de médias amostrais possíveis (ordenadas):

-14,08	-13,50	-12,33	-10,58	-7,67	-6,50	-5,92
-5,92	-4,75	-4,75	-4,17	-4,17	-3,00	-3,00
-2,42	-1,83	-1,25	-0,67	-0,08	1,08	1,67
1,67	2,83	3,42	4,58	5,17	5,75	7,50
7,50	8,67	9,25	9,25	10,42	11,00	16,83

Assim, se a hipótese formulada é verdadeira, existem 20 possibilidades em 35 de obter uma diferença igual ou superior à diferença observada (aqui, $\text{valor-p} = 20/35$).

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Hipótese: As sete medições de flexão do tronco vieram de uma única população; a flexibilidade de cada indivíduo não está relacionada com a modalidade praticada.

Existem 20 possibilidades em 35 de obter uma diferença igual ou superior à diferença observada ($20/35 \simeq 0.57$).

Este valor é bastante elevado, **sugerindo** que os dados são consistentes com a hipótese formulada.

Inferência Estatística

TH – Teste de Aleatorização

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Amostras Independentes – Exemplo

Hipótese: As sete medições de flexão do tronco vieram de uma única população; a flexibilidade de cada indivíduo não está relacionada com a modalidade praticada.

Supondo a **hipótese verdadeira**, espera-se observar uma diferença de magnitude das médias amostrais **igual ou superior à observada (4.75) devida unicamente a flutuações aleatórias em mais de metade dos casos**

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 A.I.

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Teste de Aleatorização

O exemplo do procedimento que acabámos de ver, é, como dissemos, designado por **Teste de Aleatorização**.

Observação:

Os **testes t**, assunto que abordámos anteriormente, podem ser considerados uma boa aproximação ao **Teste de Aleatorização**, no caso em que todas as possibilidades são consideradas.

O valor $20/35 \simeq 0.57$, do exemplo anterior, corresponde aproximadamente ao **valor-p** do **teste t**.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Teste de Aleatorização – Amostras Grandes – Exemplo

Um botânico investigou o efeito do stress mecânico no crescimento de plantas de soja.

As plantas foram plantadas individualmente em vasos, e divididas em **dois grupos** de 9 plantas cada um:

- as plantas do primeiro grupo foram abanadas durante 20 minutos duas vezes ao dia; as do segundo grupo (grupo de controlo), não;
- após 16 dias de crescimento, as plantas foram colhidas e foi registada a área foliar total (em cm²) de cada planta.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

Teste de Aleatorização – Amostras Grandes – Exemplo

Control	Stressed
314	283
320	312
310	291
340	259
299	216
268	201
345	267
271	326
285	241
mean 305.8	266.2

Notar que a **média amostral** para o grupo de controlo é superior

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

Teste de Aleatorização – **Amostras Grandes** – Exemplo

Control	Stressed
314	283
320	312
310	291
340	259
299	216
268	201
345	267
271	326
285	241
mean 305.8	266.2

Hipótese: a área foliar para cada planta de soja não está relacionada com o stress mecânico provocado.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Teste de Aleatorização – Amostras Grandes – Exemplo

Número possível de amostras: 48620

No R:

```
choose(18,9)
```

```
[1] 48620
```

Atendendo ao **número elevado de agrupamentos** possíveis, não é razoável considerar todos agrupamentos, e para cada um calcular a diferença das médias.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Teste de Aleatorização – Amostras Grandes – Exemplo

Número possível de amostras no exemplo: 48620

Poderá selecionar-se um grupo de amostras, e, utilizando ferramentas informáticas, **calcular a proporção** de valores iguais ou superiores (em valor absoluto) à diferença de médias observada.

A **veracidade da hipótese** será avaliada com base nesta proporção (**valor-p aproximado**).

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AI)

Este procedimento aplica-se quando pretendemos comparar as médias de uma **variável quantitativa** em dois grupos diferentes de indivíduos, e se desconhecem as respectivas variâncias.



$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AI)

	População X_1	População X_2
tamanho da amostra	n_1	n_2
média da amostra	\bar{x}_1	\bar{x}_2
desvio padrão da amostra	s_1	s_2

Valor da estatística do teste: $t_S = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{se}$, $\left(se = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right)$

t_S é o valor (correspondente às amostras de que dispomos) de uma variável aleatória T , que no caso de **populações normais** e sendo a hipótese H_0 **verdadeira**, segue **aproximadamente** uma distribuição **t de Student** com $n_1 + n_2 - 2$ **graus de liberdade**.

Sem a hipótese de normalidade, mas $n_i > 30$, a conclusão é a mesma!

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AI)

Tal como dito anteriormente, por vezes é usado o **erro padrão ponderado**.

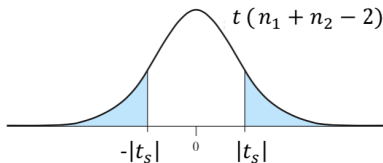
No caso das duas amostras terem o mesmo tamanho, ou se as suas variâncias forem iguais, os dois erros padrão coincidem.

O número de graus de liberdade ($n_1 + n_2 - 2$), da distribuição t de Student é também aproximado de modo a facilitar os cálculos.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AI)



Tal como já foi dito, o **valor-p** é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a observada, sob a condição da hipótese nula H_0 ser verdadeira.

Valor-p $< \alpha$: evidência de H_1 a um nível de significância α .

Ou: μ_1 é significativamente diferente de μ_2 ao nível de α .

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AI) – Exemplo

Foi realizada um estudo para avaliar se há diferenças significativas nas dores sentidas após a cirurgia às amígdalas por dois métodos distintos.

Registaram-se as classificações (escala de 0-10) das dores sentidas 4 dias após a cirurgia em 2 grupos de crianças:

Nível de Dor		
Cirg.	Convencional	Inovadora
\bar{x}	4,3	1,9
s	2,8	1,8
n	49	52

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AI) – Exemplo

Uma vez que são amostras grandes, poderá ser feito um **teste t** para avaliar se as médias são diferentes.

Nível de Dor		
Cirg.	Convencional	Inovadora
\bar{x}	4,3	1,9
s	2,8	1,8
n	49	52

$$t_S = \frac{\bar{X}_{co} - \bar{X}_{in}}{se} \approx 5.1 \quad \left(se = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \approx 0.47 \right)$$

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

**Amostras
Independentes (AI)**

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de duas Médias

Amostras Emparelhadas (AE)

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE)

O procedimento que veremos a seguir, aplica-se quando pretendemos comparar as médias em dois grupos de alguma forma correlacionados (por exemplo, antes e depois de um tratamento).



$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

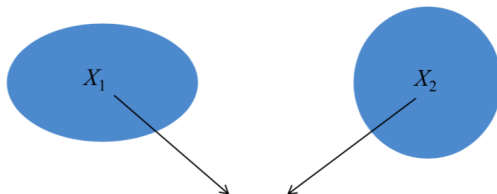
Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE)

Neste caso, e de forma inteiramente análoga à determinação de um intervalo de confiança, consideramos a amostra constituída pelas diferenças, e aplicamos o teste-t para uma só amostra.



Amostra Emparelhada

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) \cdots (x_n, y_n)$$

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

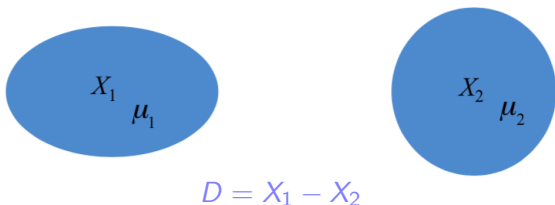
Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE)



A média de D é $\mu = \mu_1 - \mu_2$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Amostra emparelhada: $(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) \cdots (x_n, y_n)$

Amostra simples: $d_1 = x_1 - y_1, \quad d_2 = x_2 - y_2, \cdots d_n = x_n - y_n$

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE)

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Testam-se agora estas hipóteses a partir de uma única amostra

$$(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Assim, reduzimos este caso ao primeiro que tratámos anteriormente:

Comparação de uma média desconhecida com um valor específico (que neste caso é 0), a partir de **uma amostra**.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE) – Exemplo

Para investigar se a ingestão de cafeína afeta a circulação sanguínea, fez-se um estudo com 8 indivíduos saudáveis. O fluxo sanguíneo miocárdico (FSM) em ml/(min gr) foi registado antes e depois da toma de um comprimido contendo 200 mg de cafeína.

indivíduo	antes (x)	depois (y)
1	6.37	4.52
2	5.69	5.44
3	5.58	4.70
4	5.27	3.81
5	5.11	4.06
6	4.89	3.22
7	4.70	2.96
8	3.53	3.20

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE) – Exemplo

indivíduo	antes (x)	depois (y)	$d = x - y$
1	6.37	4.52	1.85
2	5.69	5.44	0.25
3	5.58	4.70	0.88
4	5.27	3.81	1.46
5	5.11	4.06	1.05
6	4.89	3.22	1.67
7	4.70	2.96	1.74
8	3.53	3.20	0.33

$$\bar{d} = 1.15$$

$$s = 0.63$$

$$se = \frac{0.63}{\sqrt{8}} = 0.22$$

Como a amostra é pequena, **assumimos** que a diferença do FSM, antes e depois da toma de cafeína, tem **distribuição normal**.

Sendo μ_a e μ_d as médias do FSM antes e depois da toma de cafeína, pretende-se testar as hipóteses a seguir indicadas.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE) – Exemplo

$$H_0 : \mu_a - \mu_d = 0$$

$$H_1 : \mu_a - \mu_d \neq 0$$

Que é equivalente a testar:

$$H_0 : \mu = 0$$

$$H_1 : \mu \neq 0$$

onde μ é a média da diferença entre o FSM antes e depois da ingestão de cafeína.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Comparação de 2 Médias Desconhecidas (AE) – Exemplo

$$\bar{d} = 1.15$$

$$s = 0.63$$

$$se = \frac{0.63}{\sqrt{8}} = 0.22$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{1.15}{se} \approx 5.227$$

E temos

$$T \sim t(7) \quad \Rightarrow \quad P(|T| > 5.227) \approx 0.0012$$

Para $\alpha = 1\%$ os dados evidenciam que as médias do FSM são diferentes antes e depois da ingestão de cafeína.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Significância Estatística

A **significância estatística** permite verificar a discrepância de uma hipótese estatística em relação aos dados observados, utilizando uma medida de evidência (**valor-p**).

Em testes de hipóteses, diz-se que há significância estatística ou que o resultado é estatisticamente significativo quando o **valor-p** observado é **menor que o nível de significância** α .

O nível de significância é geralmente fixado pelo investigador antes da recolha de dados, e usualmente fixado em 0.05 ou menos, dependendo da área de estudo.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Testes de Hipóteses & Intervalos de Confiança

Existe uma relação estreita entre os intervalos de confiança e os testes de hipóteses que estudámos.

Quando é construído um I.C. = $]a, b[$, com confiança $1 - \alpha$, todos os valores no intervalo são plausíveis para o parâmetro a estimar; valores fora do intervalo são considerados implausíveis.

Se o valor do parâmetro especificado por H_0 **pertencer** ao intervalo de confiança $]a, b[$, então H_0 não pode ser rejeitada a um nível α ; **caso contrário**, rejeita-se H_0 ao nível de α .

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

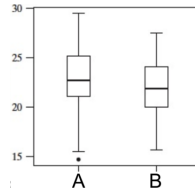
Utilização do R

T.H. & I.C. – Exemplo

Foram recolhidas amostras de lagostins de uma certa espécie em dois rios distintos, e medido o comprimento (mm) de cada lagostim capturado.

Os dados estão resumidos na tabela seguinte, acompanhada pelos diagramas caixa-de-bigodes:

	rio A	rio B
n	25	20
\bar{x}	22.91	21.97
s	3.78	2.90



Pretende-se saber se o comprimento dos lagostins difere significativamente nos dois rios.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 A.I.

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

T.H. & I.C. – Exemplo

Como as amostras têm tamanho inferior a 30, assumimos que o comprimento X_A dos lagostins no rio A, e o comprimento X_B dos lagostins no rio B, têm distribuições normais com médias μ_A e μ_B respetivamente.

As hipóteses a testar são:

$$H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$$

$$H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$$

Iremos tirar a conclusão através das duas abordagens: testes de hipóteses (T.H.) e intervalos de confiança (I.C.).

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

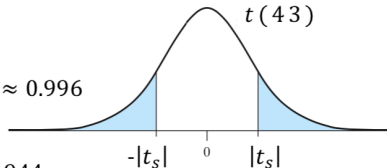
Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

T.H. & I.C. – Exemplo: T.H. (com base no valor-p)

$$se = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{3.78^2}{25} + \frac{2.90^2}{20}} \approx 0.996$$

$$t_s = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{se^*} \approx \frac{22.91 - 21.97}{0.996} \approx 0.944$$



$$\text{valor-p} = 0.350 > 0.05$$

A um **nível de significância** 0.05, os dados não fornecem prova suficiente (**valor-p** = 0.350), de que o comprimento médio dos lagostins é diferente nos dois rios.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

T.H. & I.C. – Exemplo: Intervalo de Confiança

$$se = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{3.78^2}{25} + \frac{2.90^2}{20}} \approx 0.996$$

Grau de confiança: 95% $\rightarrow t_{0.025,43} = 2.0167 \approx 2.02$

Intervalo de Confiança: $\bar{x}_A - \bar{x}_B \pm t_{0.025,43}se$, i.e.: 0.94 ± 2.02

O intervalo de confiança é portanto $(-1.08, 2.96)$.

O intervalo contém 0 e portanto **não se pode rejeitar** H_0 (igualdade das médias), a um nível de significância de 0.05.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade

Na comparação de duas populações, muitas vezes o interesse recai na relação entre duas variáveis:

- uma **variável de resposta** Y , que representa a característica de interesse
- uma **variável explicativa** X , usada para 'explicar', ou prever a resposta

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade

Num **estudo experimental** podemos avaliar se existem evidências de que **possíveis diferenças** em X 'causem' **diferenças** em Y .

Num **estudo observacional** as conclusões são mais limitadas, pois **não é possível estabelecer relações de causalidade**.

Neste caso apenas podemos avaliar se existe evidência de que **diferenças** em X estejam **associadas a diferenças** em Y .

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade – Exemplo 1

Selecionaram-se duas amostras aleatórias de jovens de 17 anos (35 rapazes e 40 raparigas), e medidos os níveis de hematócrito (concentração de glóbulos vermelhos no sangue). Obteve-se:

Hematócrito (%)		
	35 rapazes	40 raparigas
média	45.8	41.6
desvio padrão	3.1	3.2

Trata-se de um **estudo observacional**, e a **questão** é:

Existe evidência estatística de que o nível de hematócrito esteja **associado** ao género?

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade – Exemplo 1

Para responder à questão foi feito um **teste t** comparando duas médias desconhecidas a partir de duas **amostras independentes**.

$$H_0 : \mu_m - \mu_f = 0; \quad H_1 : \mu_m - \mu_f \neq 0$$

$$se = \sqrt{\frac{s_m^2}{35} + \frac{s_f^2}{40}}; \quad t_s = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}_f}{se} = \frac{45.8 - 41.6}{se} \approx 5.76$$

$$\therefore \text{valor-p} < 10^{-6}$$

Há forte evidência estatística de diferença de médias, e portanto de que o nível de hematócrito está **associado** ao género.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade – Exemplo 2

Para perceber o efeito de um fertilizante no crescimento de uma certa espécie de planta, foram selecionadas aleatoriamente 32 sementes para serem semeadas em solo fertilizado, e 35 sementes para fazerem parte do grupo de controlo. Todas as outras condições foram mantidas iguais nos dois grupos.

Duas semanas após a germinação foram medidas as alturas dos caules:

	altura (em cm)	
	com fertilizador	controlo
média	2.04	2.58
desvio padrão	0.72	0.65

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade – Exemplo 2

altura (em cm)		
	com fertilizador	controle
média	2.04	2.58
desvio padrão	0.72	0.65

Trata-se agora de um **estudo experimental**.

Questão: Existe evidência estatística de que o fertilizante **tenha efeito** no crescimento dessa espécie?

Para responder à questão fez-se um **teste t** comparando duas médias desconhecidas a partir de duas **amostras independentes**.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Associação e Causalidade – Exemplo 2

Para responder à questão foi feito um **teste t** comparando duas médias desconhecidas a partir de duas **amostras independentes**.

$$H_0 : \mu_f - \mu_c = 0; \quad H_1 : \mu_f - \mu_c \neq 0$$

$$se = \sqrt{\frac{s_f^2}{32} + \frac{s_c^2}{35}}; \quad t_s = \frac{\bar{x}_f - \bar{x}_c}{se} = \frac{2.04 - 2.58}{se} \approx -3.21$$

$$\therefore \text{valor-p} \approx 0.002$$

A um nível de significância de 1%, **existe evidência** estatística de que as médias são diferentes (**valor-p** < α), e portanto o fertilizante **tem efeito** no crescimento dessa espécie.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

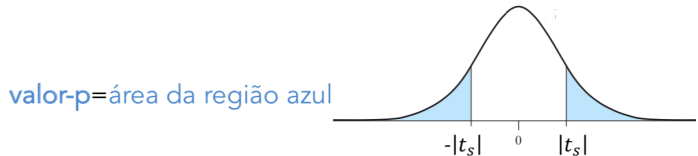
Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Testes de Hipóteses Unilaterais

Os testes t que estudámos são testes **bilaterais**, uma vez que a hipótese nula é rejeitada se o valor da estatística do teste t_s cair numa de duas caudas da distribuição t de Student.

Recorde-se que o **valor-p** é a área de duas regiões simétricas.



Os testes bilaterais aplicam-se quando a hipótese alternativa é da forma $\mu \neq VE$ ou $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

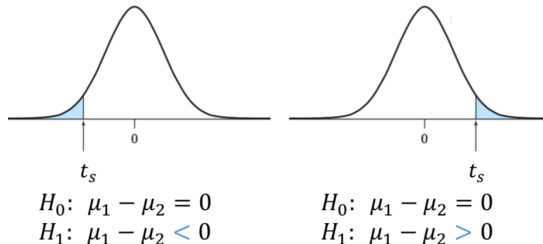
Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Testes de Hipóteses Unilaterais

Mas poderemos estar interessados em hipóteses H_1 da forma $\mu > VE$ ou $\mu_1 - \mu_2 < 0$, por exemplo.

Nesse caso a região de rejeição deverá ser unilateral.



Nota: o **valor-p** é, em qualquer dos casos, a área da região azul

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Testes de Hipóteses Unilaterais – Exemplo

O tempo médio, por operário, gasto na execução de uma tarefa, é de 100 minutos.

Foi introduzida uma modificação de modo a diminuir este tempo, e após certo período, selecionou-se uma amostra aleatória de 35 operários, e mediu-se o tempo de execução gasto por cada um.

O tempo médio da amostra foi 92 minutos, com desvio padrão de 12 minutos.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de
Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas
Médias

Amostras
Independentes (AI)

Amostras
Emparelhadas (AE)

Significância
Estatística

T.H. & I.C.

Associação e
Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de
Aplicabilidade

Utilização do R

Testes de Hipóteses Unilaterais – Exemplo

A um nível de significância de 1%, este resultado evidencia uma melhoria no tempo gasto para realizar a tarefa?

Hipóteses a testar:

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu < 100$$

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

AULA 9

6. Inferência Estatística TH

Comparação de 2 AI

Teste de Aleatorização

Amostras Grandes

Comparação de duas Médias

Amostras Independentes (AI)

Amostras Emparelhadas (AE)

Significância Estatística

T.H. & I.C.

Associação e Causalidade

Testes Unilaterais

Testes t

Condições de Aplicabilidade

Utilização do R

Condições de Aplicabilidade

Os **testes t** (e os I.C.) que acabámos de descrever são apropriados se forem satisfeitas as condições seguintes:

- 1 Os **dados** devem ser **obtidos aleatoriamente** das respetivas populações e as **observações** em cada amostra devem ser **independentes**.
- 2 As **distribuições das médias** amostrais devem ser (**aproximadamente**) **normais**.

Isto pode ser alcançado se as populações tiverem distribuição normal, ou então, no caso de populações não normais, tendo amostras grandes e usando o teorema do limite central.

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

Testes de Hipóteses no



(t.test)

```
y<-c(1.2,1.5,...,3.4) #amostra
```

```
t.test(y,mu=2,alternative="less") # testa H0:mu=2 contra H1:  
mu<2 a partir da amostra y
```

```
y1<-c(1.2,1.5,...,3.4) #amostra 1
```

```
y2<-c(2.4,1.4,...,2.4) #amostra 2
```

```
t.test(y1,y2) # teste t para duas amostras independentes
```

```
y1<-c(1.2,1.5,...,3.4) #amostra 1
```

```
y2<-c(2.4,1.4,...,2.4) #amostra 2
```

```
t.test(y1,y2,paired=T) # teste t para amostras emparelhadas
```

Inferência Estatística

Testes de Hipóteses

Testes de Hipóteses no



(t.test)

```
y<-c(1.2,1.5,...,3.4) #amostra
```

```
t.test(y,mu=2,alternative="less") # testa H0:mu=2 contra H1:  
mu<2 a partir da amostra y
```

```
y1<-c(1.2,1.5,...,3.4) #amostra 1
```

```
y2<-c(2.4,1.4,...,2.4) #amostra 2
```

```
t.test(y1,y2, alternative="greater") # teste t para  
duas amostras independentes com H1:diferença de médias >0
```