Departamento de Ciência de Computadores FCUP

Modelos de Computação CC1004 2020/2021

Folha Prática 8

Autómatos de Pilha

Para um autómato de pilha $A = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$, a função de transição δ é definida de $S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ em $2^{S \times \Gamma^\star}$. Assim, para $(s, \alpha, K) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$, o valor de $\delta(s, \alpha, K)$ é um **subconjunto** de $S \times \Gamma^\star$ e define as possíveis alterações de estado e da pilha se no estado s, com K no **topo** da pilha, o autómato consumir α.

- $(s', \varepsilon) \in \delta(s, \alpha, K)$ significa que o autómato pode passar ao estado s' e retirar o topo da pilha;
- $(s', \gamma) \in \delta(s, \alpha, K)$, sendo $\gamma \neq \varepsilon$, significa que o autómato pode passar ao estado s' e substituir K pela sequência γ. Por convenção, os símbolos de γ são inseridos da direita para a esquerda (o símbolo de γ mais à esquerda que fica no topo).
- $\delta(s, \alpha, K) = \emptyset$, significa que não há transições.

Qualquer transição requer que a pilha não esteja vazia, isto é, requer que a pilha tenha algum símbolo.

Uma configuração é um terno de $S \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$ que descreve o estado em que o autómato se encontra, a palavra que falta consumir e o conteúdo da pilha num instante. A relação de mudança de configuração por uma transição, denotada por $\vdash$, é definida em $S \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$ por

$$(s, \alpha x, K\gamma) \vdash (s', x, \beta\gamma) \ \text{ se } \ (s', \beta) \in \delta(s, \alpha, K),$$

para $s, s' \in S$, $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $x \in \Sigma^\star$, $K \in \Gamma$, e $\beta, \gamma \in \Gamma^\star$. Recorde que $\vdash^n$ define a relação de **mudança de configuração por n transições** e $\vdash^\star$ define a relação de **mudança de configuração por zero ou mais transições (em número finito)**.

A linguagem aceite por pilha vazia é $\{x \in \Sigma^\star \mid (s_0, x, Z_0) \vdash^\star (s, \varepsilon, \varepsilon)$, para algum $s \in S\}$.

A linguagem aceite por estados finais é $\{x \in \Sigma^\star \mid (s_0, x, Z_0) \vdash^\star (f, \varepsilon, \gamma)$, para algum $f \in F,\ \gamma \in \Gamma^\star\}$.

Note que, em ambos os casos, **a palavra x tem de ser totalmente consumida**. Para x ser aceite por pilha vazia, importa que a pilha possa ficar **vazia** (isto é, sem qualquer símbolo), mas não interessa o estado em que termina. Para x ser aceite por estados finais, tem de conseguir levar o autómato a um estado final, mas não interessa o conteúdo final da pilha.

A definição de um autómato de pilha para reconhecimento de uma linguagem dada pressupõe a indicação do **critério de aceitação** (ou por pilha vazia ou por estados finais). Para aceitação por pilha vazia, podemos tomar sempre $F = \emptyset$.

Se uma linguagem puder ser reconhecida por um autómato de pilha por pilha vazia então também pode ser reconhecida por um autómato de pilha por estados finais, e vice-versa.

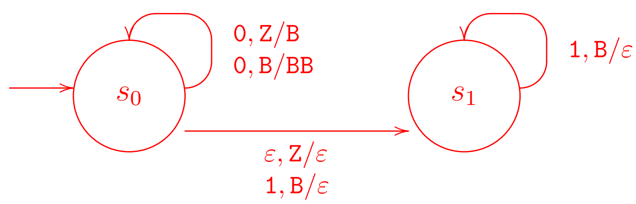
Um autómato de pilha pode ser representado por um **diagrama de transição**, como um autómato finito. Se $(s', \beta) \in \delta(s, \alpha, K)$ terá **um ramo de s para s' com etiqueta** $\alpha, K/\beta$. Etiquetas alternativas colocam-se na vertical.

Exemplo

Seja $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{\})$ um autómato de pilha, com aceitação por pilha vazia, e $\delta(s, \alpha, X) = \emptyset$, para $(s, \alpha, X) \in S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$, exceto para

$$\begin{array}{lcl} \delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_0, \mathtt{0}, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{B})\} \\ \delta(s_0, \mathtt{0}, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} \\ \delta(s_0, \mathtt{1}, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \\ \delta(s_1, \mathtt{1}, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \varepsilon)\} \end{array}$$

Diagrama de transição de $\mathcal{A}$



A linguagem aceite pelo autómato é $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Sem a transição $\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \varepsilon)\}$, o autómato seria determinístico, e reconheceria $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$.

A configuração inicial para o autómato $\mathcal{A}$ é $(s_0, x, \mathtt{Z})$, sendo x a palavra que vai ser analisada.

- Se usarmos a transição $\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \varepsilon)\}$, teriamos $(s_0, x, \mathtt{Z}) \vdash (s_1, x, \varepsilon)$ e de (s_1, x, ε) não há transição. Apenas $x = \varepsilon$ seria aceite desta forma.

- Sem a transição $\delta(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z}) = \{(s_1, \varepsilon)\}$, o autómato não aceita ε, pois de $(s_0, \varepsilon, \mathtt{Z})$ não teria transição.

  Para palavras que começam por $\mathtt{0}$, teria:

  - $(s_0, \mathtt{0}^n, \mathtt{Z}) \vdash^k (s_0, \mathtt{0}^{n-k}, \mathtt{B}^k)$, para $1 \leq k \leq n$. Se $n = k$, a configuração final é $(s_0, \varepsilon, \mathtt{B}^n)$. A pilha não está vazia. Não aceita $\mathtt{0}^n$, para $n \geq 1$.
  - $(s_0, \mathtt{0}^n\mathtt{1}^{n+m}y, \mathtt{Z}) \vdash^n (s_0, \mathtt{1}^{n+m}y, \mathtt{B}^k) \vdash^n (s_1, \mathtt{1}^m y, \varepsilon)$, para $n \geq 1$. De $(s_1, \mathtt{1}^m y, \varepsilon)$ não tem transição. Aceita a palavra só se $m = 0$ e $y = \varepsilon$. Ou seja, se for $\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n$, com $n \geq 1$.
  - $(s_0, \mathtt{0}^n\mathtt{1}^p y, \mathtt{Z}) \vdash^n (s_0, \mathtt{1}^p y, \mathtt{B}^n) \vdash^p (s_1, y, \mathtt{B}^{n-p})$, para $1 \leq p < n$ e $y \in \mathcal{L}(\varepsilon + \mathtt{0}(\mathtt{0} + \mathtt{1})^\star)$. De $(s_1, y, \mathtt{B}^{n-p})$ não tem transição. Não aceita a palavra.

  Para palavras que começam por $\mathtt{1}$, a configuração inicial é $(s_0, \mathtt{1}y, \mathtt{Z})$, com $y \in \Sigma^\star$. Não teria transição. Portanto, não seriam aceites.

Exercícios

1. Para cada uma das linguagens indicadas, todas com alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, apresente um autómato de pilha que a reconheça. Deve indicar o critério de aceitação adotado. Indique a interpretação dos estados e símbolos da pilha, de modo a justificar sucintamente a correção do autómato.

a) $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}\mathtt{a}^n \mid n > 1\}$

b) $\mathcal{L}(\mathtt{aa}^\star\mathtt{bbc}^\star)$

c) $\mathcal{L}((\mathtt{aa})^\star(\mathtt{bbc})^\star)$

d) $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^{i+j}\mathtt{a}^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$

e) $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{a}^k\mathtt{c}^i \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ e } k > 0 \text{ se } j > 0\}$

f) $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{2n} \mid n \geq 1\}$

g) $(\{\mathtt{c}\}\{\mathtt{c}\}^\star\{\mathtt{a}^{2n}\mathtt{b}^n \mid n \geq 1\})^\star\{\mathtt{c}\}\{\mathtt{c}\}^\star$

h) palavras que têm número de $\mathtt{a}$'s igual ao número de $\mathtt{b}$'s e terminam em $\mathtt{c}$.

i) palavras que têm mais $\mathtt{a}$'s do que $\mathtt{b}$'s.

j) palavras que não têm $\mathtt{cc}$ como subpalavra e têm mais $\mathtt{a}$'s do que $\mathtt{b}$'s.

k) palavras que não têm $\mathtt{c}$'s e o número de $\mathtt{a}$'s é o dobro do número de $\mathtt{b}$'s.

2. Justificar a afirmação: *"As linguagens regulares podem ser reconhecidas por autómatos de pilha mas nem todas as linguagens que podem ser reconhecidas por autómatos de pilha são regulares."*

3. Seja $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{s_1\})$ um autómato de pilha, com $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $\Gamma = \{\mathtt{B}, \mathtt{Z}\}$ e a função de transição δ de $S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ em $2^{S \times \Gamma^\star}$ dada por

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) & = & \{(s_1, \mathtt{Z})\} & \delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & \delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \mathtt{B})\} \\
\delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & \delta(s_1, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_2, \varepsilon)\} & \delta(s_1, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) & = & \{(s_1, \mathtt{Z}), (s_1, \varepsilon)\} \\
\delta(s_1, \mathtt{a}, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \mathtt{B})\} & \delta(s_2, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_2, \varepsilon)\} & \delta(s_2, \varepsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(s_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

sendo $\delta(s, \alpha, X) = \emptyset$, para os restantes ternos (s, α, X) de $S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$.

a) Desenhe o diagrama de transição do autómato M.

b) Mostre que $(s_0, \mathtt{bbba}, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s_1, \varepsilon, \mathtt{BBBZ})$ e conclua que $\mathtt{bbba}$ seria aceite por estados finais.

c) Mostre que se $(s_0, \mathtt{bbba}, \mathtt{Z}) \vdash^\star (s, \varepsilon, \gamma)$ então $s = s_1$ e $\gamma = \mathtt{BBBZ}$. Conclua que $\mathtt{bbba}$ não seria aceite por pilha vazia.

d) Mostre que $\mathtt{aaaa}$ seria aceite por pilha vazia e também por estados finais.

e) Mostre que a palavra $\mathtt{bbaaabb}$ seria aceite por pilha vazia mas não por estados finais.

f) Mostre que as palavras $\mathtt{bbabbb}$ e $\mathtt{bbbabb}$ não seriam aceites nem por estados finais nem por pilha vazia.

g) Justifique que nenhuma palavra de $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^\star$ que tenha $\mathtt{b}$'s à direita de $\mathtt{a}$'s é aceite por estados finais.

h) Justifique que qualquer palavra da linguagem $\mathcal{L}(\mathtt{b}^\star\mathtt{a}\mathtt{a}^\star)$ é aceite por estados finais.

i) Justifique que qualquer palavra da linguagem $\mathcal{L}(\mathtt{a}\mathtt{a}\mathtt{a}^\star)$ é aceite por pilha vazia.

j) Justifique que nenhuma palavra da linguagem $\mathcal{L}(\varepsilon + \mathtt{b}\mathtt{b}^\star\mathtt{a}^\star)$ é aceite por pilha vazia.

k) Descreva a linguagem que o autómato aceitaria se o critério fosse "aceitação por estados finais" e a que aceitaria se o critério fosse "aceitação por pilha vazia".

4. Dado um autómato de pilha $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, F)$ com aceitação por estados finais, definir um autómato de pilha $\mathcal{A}' = (S', \Sigma, \Gamma, \delta', s_0, Z_0, \emptyset)$, análogo a $\mathcal{A}$, mas δ' permite retirar todos os símbolos da pilha sempre que estiver num estado de F. Justificar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ e concluir que *"as linguagens que podem ser reconhecidas por autómatos de pilha com aceitação por estados finais podem ser reconhecidas por autómatos de pilha com aceitação por pilha vazia"*.

5. Dado um autómato de pilha $\mathcal{A} = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, Z_0, \emptyset)$ com aceitação por pilha vazia, definir um autómato de pilha $\mathcal{A}' = (S \cup \{s_0', s_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{Z_0'\}, \delta', s_0', Z_0', \{s_f\})$, com $s_0', s_f \notin S$ e $Z_0' \notin \Gamma$, análogo a $\mathcal{A}$ mas com $\delta'(s_0', \varepsilon, Z_0') = \{(s_0, Z_0 Z_0')\}$ e $\delta'(s, \varepsilon, Z_0') = \{(s_f, \varepsilon)\}$, para $s \in S$. Justificar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ e concluir que *"as linguagens que podem ser reconhecidas por autómatos de pilha com aceitação por pilha vazia podem ser reconhecidas por autómatos de pilha com aceitação por estados finais"*.

6. Seja $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ a linguagem aceite pelo autómato de pilha $\mathcal{A} = (\{q\}, \{\boxed{,}, \mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{x}, (,)\}, \{\mathtt{S}, \mathtt{V}, \mathtt{E}, \mathtt{D}\}, \delta, q, \mathtt{S}, \{\})$ por pilha vazia, com $\delta(q, \alpha, Z) = \emptyset$, para todos os ternos (q, α, Z), excepto os seguintes:

$$\begin{array}{lll} \delta(q, \mathtt{f}, \mathtt{S}) = \{(q, \mathtt{ESVSD})\} & \delta(q, \mathtt{x}, \mathtt{S}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, \boxed{,}, \mathtt{V}) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \mathtt{g}, \mathtt{S}) = \{(q, \mathtt{ESD})\} & \delta(q, (, \mathtt{E}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q,), \mathtt{D}) = \{(q, \varepsilon)\} \end{array}$$

Para ser mais legível, na descrição do alfabeto e das transições usou-se $\boxed{,}$ para representar a vírgula.

Seja $G = (\{S\}, \{\boxed{,}, \mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{x}, (,)\}, P, S)$ a gramática independente de contexto, com P dado por:

$$S \to \mathtt{f}(S\boxed{,}S) \qquad S \to \mathtt{g}(S) \qquad S \to \mathtt{x}$$

a) Usando a relação de mudança de configuração $\vdash$ (e, se for útil, as relações $\vdash^\star$ e $\vdash^n$, com $n \in \mathbb{N}$), justifique que:

$$\begin{array}{ll} \mathtt{g(x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) & \mathtt{f(x}\boxed{,}\mathtt{x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ \mathtt{f(f(g(x)}\boxed{,}\mathtt{x)}\boxed{,}\mathtt{g(x))} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) & \mathtt{f(g(x}\boxed{,}\mathtt{x))} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}) \end{array}$$

b) Justifique que as palavras $\mathtt{g(x)}$, $\mathtt{f(x}\boxed{,}\mathtt{x)}$ e $\mathtt{f(f(g(x)}\boxed{,}\mathtt{x)}\boxed{,}\mathtt{g(x))}$ pertencem a $\mathcal{L}(G)$, indicando as suas derivações pela esquerda.

c) Sabe-se que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Analise a correspondência entre derivações pela esquerda para palavras $x \in \mathcal{L}(G)$ e as configurações e mudanças de configuração do autómato $\mathcal{A}$ no processamento de x.

7. Seja L a linguagem de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \emptyset, \boxed{\varepsilon}, +, \mathtt{)}, \mathtt{(}, *\}$ que é reconhecida por pilha vazia pelo autómato de pilha $M = (\{q\}, \Sigma, \{\mathtt{S}, \mathtt{D}, \mathtt{P}, \mathtt{K}\}, \delta, q, \mathtt{S}, \{\,\})$, em que $\delta(q, \alpha, X) = \emptyset$, para todos os ternos exceto

$$\begin{array}{lll} \delta(q, \mathtt{a}, \mathtt{S}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, \boxed{\varepsilon}, \mathtt{S}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, \mathtt{(}, \mathtt{S}) = \{(q, \mathtt{SKD}), (q, \mathtt{SSD}), (q, \mathtt{SPSD})\} \\ \delta(q, \mathtt{b}, \mathtt{S}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, +, \mathtt{P}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, \mathtt{)}, \mathtt{D}) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, *, \mathtt{K}) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, \emptyset, \mathtt{S}) = \{(q, \varepsilon)\} & \end{array}$$

a) Usando $\vdash$, mostre que as palavras $\mathtt{(a+b)}$ e $\mathtt{((((a+b)+(\emptyset*))a)*)}$ são reconhecidas pelo autómato.

b) Usando $\vdash$, mostre que as palavras $\mathtt{(a)}$, $\mathtt{a+b+\emptyset}$ e $\mathtt{(a+}\boxed{\varepsilon}$ não são reconhecidas pelo autómato.

c) Indique todas as palavras x que são aceites pelo autómato, tais x tem algum $\mathtt{b}$ ou algum $\mathtt{a}$ e $1 < |x| < 6$.

d) Averigue se a palavra $\mathtt{((a+}\boxed{\varepsilon}\mathtt{)+(b)}$ é reconhecida pelo autómato.

NB: mais adiante, vamos ver que este autómato reconhece *a linguagem das expressões regulares sobre* $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. No seu alfabeto, usámos $\boxed{\varepsilon}$ para distinguir a palavra vazia do símbolo ε e usámos $*$ (em vez de *) para denotar o operador de fecho de Kleene.