FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

U.PORTO

Álgebra Linear e Geometria Analítica (M1002)
Parte 2 do Exame da Época de Recurso
22/04/2021 Duração: Duas horas

Cotação: 10 valores.
Todas as respostas devem ser **convenientemente justificadas**.

Devem resolver as questões 1 e 2 numa folha e as questões 3, 4 noutra folha.

1. **(3,0 valores)** Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine a equação caraterística de A e os valores próprios de A.

   (b) Determine os vetores próprios de A associados a cada um dos valores próprios de A.

   (c) Justifique que A é invertível. **Sem calcular** A^{-1}, relacione os valores próprios de A^{-1} com os valores próprios de A.

2. **(2,0 valores)** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que
$$f(1,1,0) = (0,0,0), \quad f(1,1,1) = (1,2,3), \quad f(1,-1,-1) = (5,2,-1).$$
   (a) Obtenha a expressão geral de f.

   (b) Determine uma condição necessária e suficiente em x, y, z para que (x, y, z) pertença ao contradomínio de f.

3. **(2,5 valores)** Em $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $v_1 = (1,1,-1)$ e $v_2 = (1,2,0)$ e o subespaço vetorial $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot v_1 = v \cdot v_2 = 0\}$.

   (a) Determine uma base de W.

   (b) Escolha um vetor v_3 não nulo de W e mostre que qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de v_1, v_2, v_3.

4. **(2,5 valores)** (a) Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ de entradas reais tal que $AA^t = \mathrm{id}_n$. Mostre que A é invertível.

   (b) Averigue se o conjunto das matrizes A quadradas $n \times n$ de entradas reais tais que $A = A^t$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$.