插值多項式

1021021 bee

雖然聽說以後高中課程不會再教這個東西，不過，還是要把它說清楚吧！

1. 緣由問題

問題 1：找一個 ____________ 多項式，使其圖形通過點 $(1,2)$。

這是一個有趣的問題，找哪一個多項式好呢？

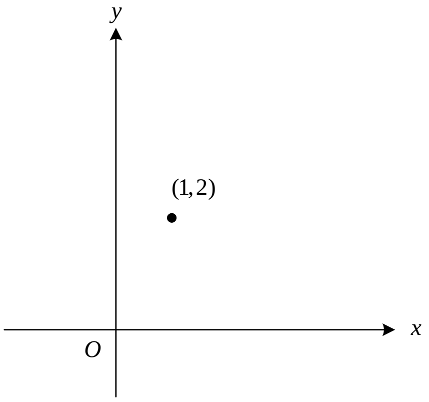

圖 1

找 $y=x+1$，不錯喔！找 $x=1$，可以嗎？找 $y=2$，超簡單！

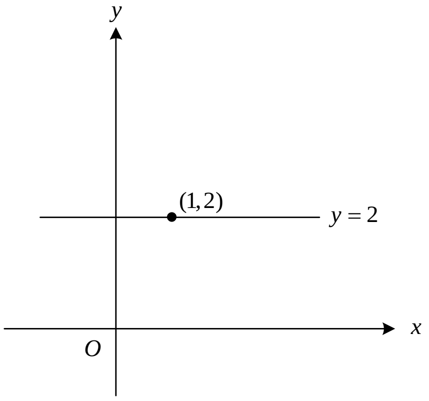

圖 2

在上面的空格中，我想寫的是找一個 __最低次的__ 多項式，使其圖形通過點 $(1,2)$，那 $y=2$ 比 $y=x+1$ 要好！($x=1$ 是不行的) 注意看，如果只要通過一個點，那麼通過此點的水平線是一個最簡單的選擇。

問題 2：找一個 <u>　最低次的　</u>多項式，使其圖形通過點 $(1,2)$，$(2,0)$。

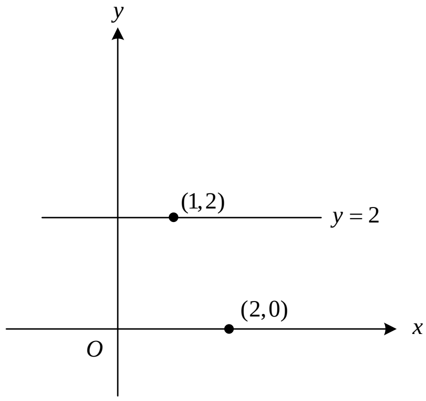

圖 3

給兩個點，如果這兩個點不在同一水平線上，那麼，$y=2$ 就不合格了，怎辦？看圖可以發現：連接兩點的直線是一個選擇，計算一下過這兩點的直線方程式為 $y=\dfrac{2-0}{1-2}(x-2)$，$y=-2x+4$。畫在圖上如下圖：

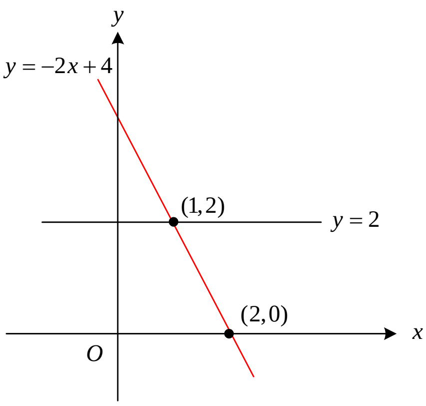

圖 4

多一點，多項式的次數跳上一次，由常數跳上一次，恩！

問題 3：找一個 <u>　最低次的　</u>多項式，使其圖形通過點 $(1,2)$，$(2,0)$，$(3,4)$。

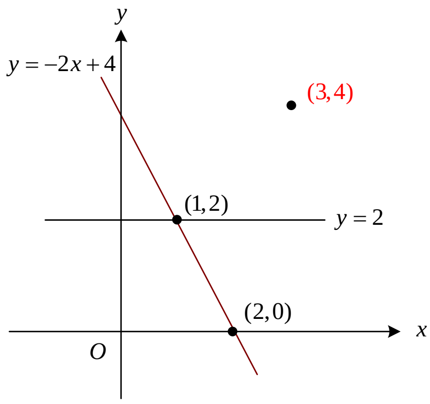

圖 5

顯然，直線 $y=-2x+4$ 不合格，事實上，沒有直線是合格的，那麼怎麼辦呢？「再跳上一次」吧！找 $y=ax^2+bx+c$ 。恩！

將三點代入得 $\begin{cases} 2=a+b+c \\ 0=4a+2b+c \\ 4=9a+3b+c \end{cases}$ ，解聯立方程式得： $a=3, b=-11, c=10$ 。

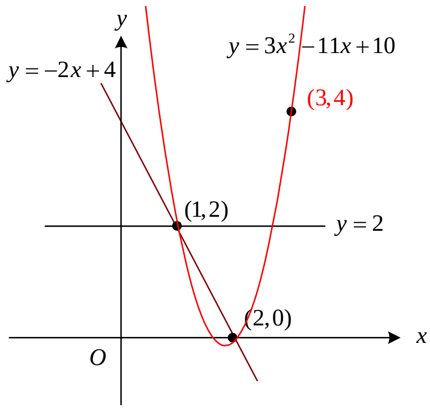

圖 7

找一個拋物線通過給定的三點，是一個不錯的選擇，事實上也是最簡單的選擇。

問題 4：找一個 <u>最低次的</u> 多項式，使其圖形通過點 $(1,2)$，$(2,0)$，$(3,4)$，$(4,3)$ 。

由前面的討論，我們知道二次函數是不夠的！

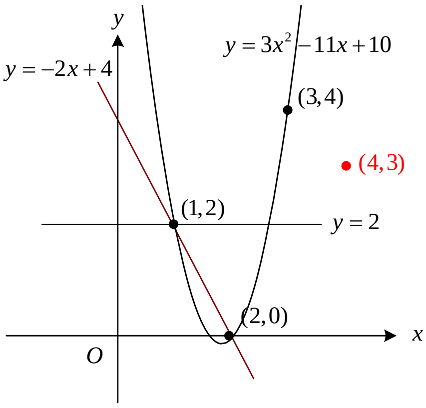

圖 8

於是我們可以找三次函數 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$，然後將各點代入求出 a,b,c,d 四個值，然後心裡想，有點煩！

上面的方法很一般 (一般是很容易理解的意思，是好方法)，而數學家發明其他求多項式的方法，底下我們介紹兩種方法：牛頓法與拉格朗日插值法。

2. 牛頓插值多項式

問題：找一個 <u>最低次的</u> 多項式，使其圖形通過點 $(1,2)$，$(2,0)$，$(3,4)$，$(4,3)$。

和前面的方法一樣，我們先找到通過點 $(1,2)$ 的水平線，即常數函數 $y = 2$。

接著，把這一個多項式留著，然後往上加一次：

$$y = 2 + a(x-1)$$

哇！這一個方法真是神奇！把前面的結論留下來，然後想辦法加上去，但是，加上去時，不要影響到原來的式子，所以只能使用 $(x-1)$。

接下來，計算 a 的值。把 $x = 2$ 代入，得 $0 = 2 + a(2-1)$，解得 $a = -2$，即 $y = 2 + (-2)(x-1)$，整理得 $y = -2x + 4$，和第 2 頁的結論一樣。

再加一個點$(3,4)$，原來的 $y = -2x + 4$ 被沿用，於是往上再加一次：

$$y = -2x + 4 + b(x-1)(x-2)，$$

多加 $(x-1)(x-2)$ 就不會影響原來的點 $(1,2)$, $(2,0)$，但要滿足 $(3,4)$，就必須將 $x=3$ 代入，得 $4=-2\cdot 3+4+b(3-1)(3-2)=-2+2b$，解得 $b=3$，即 $y=-2x+4+3(x-1)(x-2)$，整理得 $y=3x^2-11x+10$，和第 3 頁的結論一樣。

如果還要再加上點 $(4,3)$，那麼取

$$y=3x^2-11x+10+c(x-1)(x-2)(x-3)，$$

再利用 $(4,3)$ 求出 c 的值即可。

這樣一層一層往上的方法，就是「插值的意思」，每多一個資料，只要多加一項，就可以把原來的多項式「保留且擴充」，這真是一個很棒的方法。

3. 拉格朗日插值多項式

雖然牛頓法很棒，但是，還是需要計算，我們可以「不需要計算」，一次到位的把滿足問題的多項式找到嗎？

問題：找一個 <u>最低次的</u> 多項式 $F(x)$，使其圖形通過點 $(1,2)$, $(2,0)$, $(3,4)$, $(4,3)$。

底下我們建立 4 個基本函數：

第一個 $f_1(x)$。因為這一個基本函數是為了 $(1,2)$ 這一個點建立的，所以我們希望 $f_1(2)=f_1(3)=f_1(4)=0$，而 $f_1(1)=1$。

於是將 $f_1(x)$ 設計為 $f_1(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{?}$，這樣子把 $x=2,3,4$ 代入，都可以使得函數值為 0，即 $f_1(2)=f_1(3)=f_1(4)=0$。但是因為要讓 $f_1(1)=1$，所以設計

$$f_1(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}，$$

這樣子，$f_1(1)=1$，真是「超級讚的設計」(什麼？你看不出來？)

於是接連著我們設計出

原來的

$$f_1(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \text{ 使得 } f_1(2)=f_1(3)=f_1(4)=0 \text{ ，} f_1(1)=1 \text{ 。}$$

再加上

$$f_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \text{ 使得 } f_2(1)=f_2(3)=f_2(4)=0 \text{ ，} f_2(2)=1 \text{ ，}$$

$$f_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \text{ 使得 } f_3(1)=f_3(2)=f_3(4)=0 \text{ ，} f_3(3)=1 \text{ ，}$$

$$f_4(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \text{ 使得 } f_4(1)=f_4(2)=f_4(3)=0 \text{ ，} f_4(4)=1 \text{ 。}$$

這樣寫看起來很複雜，但是要找 $F(x)$ 卻非常容易。把問題再寫一次：

問題：找一個 最低次的 多項式 $F(x)$ ，使其圖形通過點 $(1,2)$, $(2,0)$, $(3,4)$, $(4,3)$ 。

答案是：

$$F(x)=2\cdot f_1(x)+0\cdot f_2(x)+4\cdot f_3(x)+3\cdot f_4(x) \text{ 。}$$

這一個方法透過設計，在「沒有計算的情形下」，直接抓到 $F(x)$ ，這是一個給計算機使用的超級好方法。

想想看！如果我把問題改成如下：

問題：找一個 最低次的 多項式 $F(x)$ ，使其圖形通過點 $(1,2231)$, $(2,119)$, $(3,421)$, $(4,-115)$ 。

那麼， $F(x)$ 該如何呢？

答案是：

$$F(x)=2231\cdot f_1(x)+119\cdot f_2(x)+421\cdot f_3(x)+(-115)\cdot f_4(x) \text{ 。}$$

你會發現，每一個點由一個基本函數掌控，設計好基本函數，你就可以利用基本函數控制「通過既定點坐標的函數」。

補充說明一下：基本函數的寫法中，$f_{\square}(x)$ 下標的寫法是依據該點的 x 坐標，所以例如：通過點 $(\frac{3}{2},5)$，那麼該點的基本函數記為 $f_{\frac{3}{2}}(x)$。

練習：問題：找一個 ＿最低次的＿ 多項式 $F(x)$，使其圖形通過點 $(\frac{1}{2},3)$, $(10,25)$, $(\sqrt{2},5)$, $(4,16)$。

我們將上面的方法稱為「拉格朗日插值法」。

4. 結語

如果不把它當作考試，這個小主題還滿有意思的。這樣的主題把數學應用在計算機上，是很有意思的。不過，考試當道，總得考試同學才要唸書！恩！

我盡可能把它說清楚，有興趣的同學自行參閱囉！