DANIEL ALVES DE BRITO

APRENDENDO GEOGEBRA

LIVRO ONLINE

CAPÍTULOS

APRENDENDO GEOGEBRA

1. CANAL TUTORIAIS DE GEOGEBRA (YOUTUBE)
2. CANAL TELEGRAM - MATEMÁTICA COMPLETA
3. CANAL INSTAGRAM (LIVROS ONLINE)
4. APRENDENDO GEOGEBRA (LIVRO VOLUME 01)
5. DRIVERS DE MODELOS EM GEOGEBRA (GGB)

GEOGEBRA

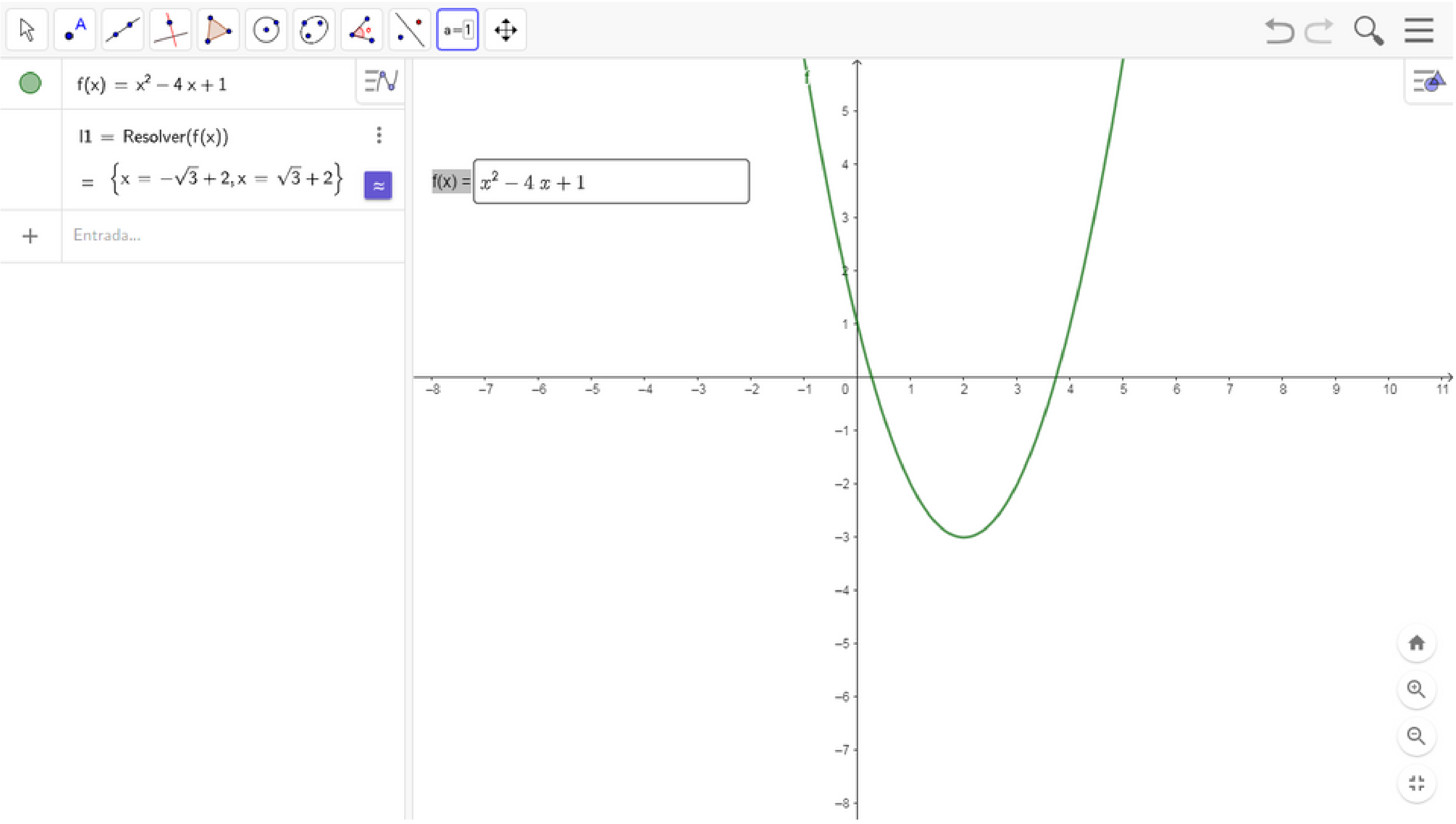
O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que permite a criação de gráficos, cálculos e visualizações interativas em duas e três dimensões. Ele foi desenvolvido com foco na educação matemática e é amplamente utilizado por professores e alunos em todo o mundo.

O GeoGebra também oferece uma ampla variedade de recursos, incluindo ferramentas para criar gráficos em duas e três dimensões, resolver equações, calcular derivadas e integrais, e explorar conceitos geométricos e algébricos. esde estudantes iniciantes até professores avançados e pesquisadores em matemática.

01. Gráfico e Raiz de Equações

Traçar o gráfico de uma função do segundo grau e obter as raízes de uma equação quadrática.

No final, você obterá o seguinte resultado:

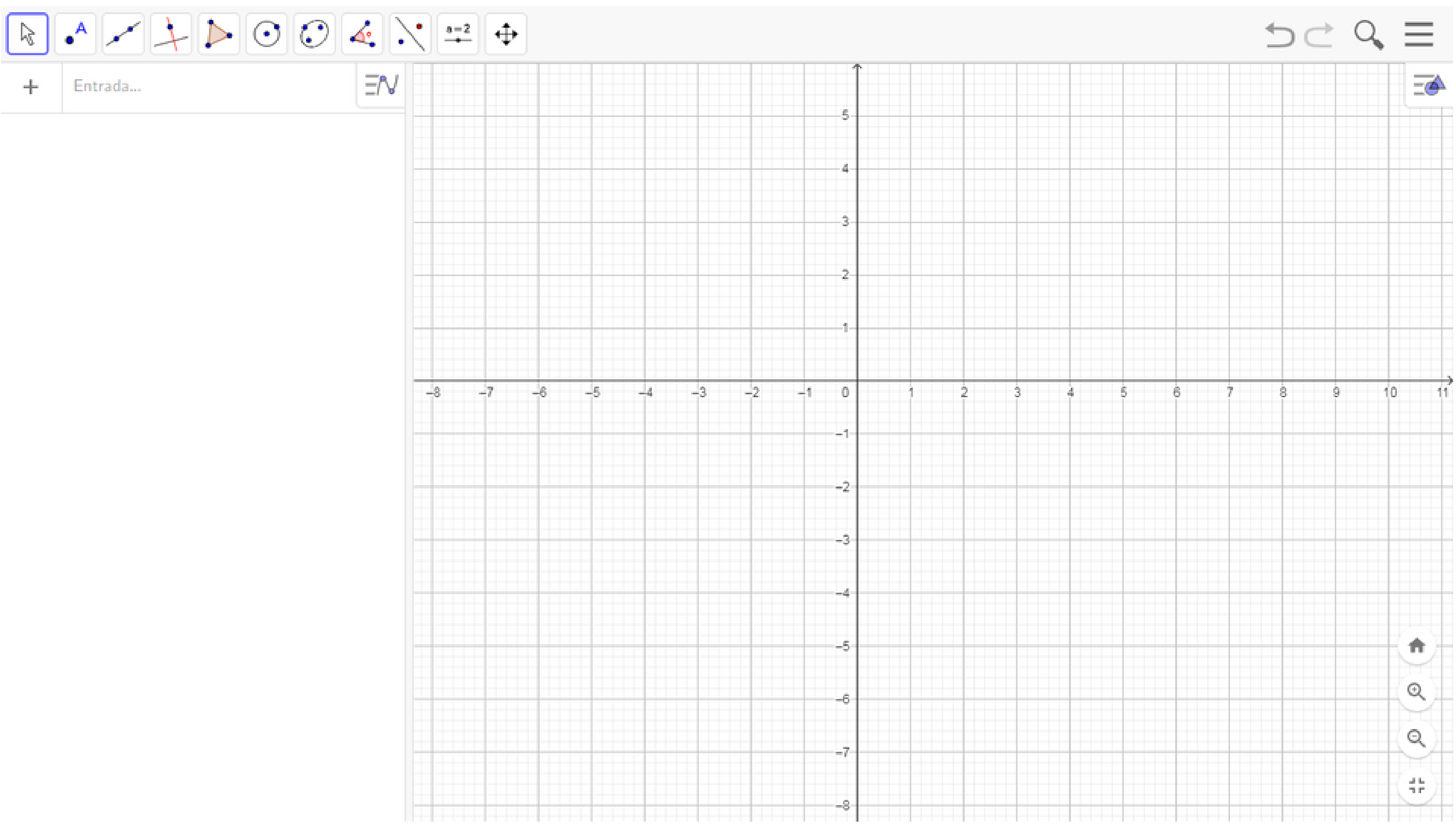


PARTE I: Traçar o gráfico função:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

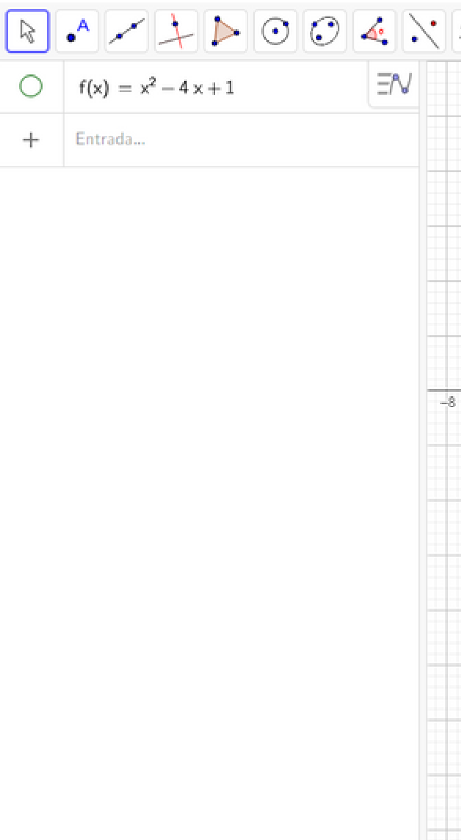
e obter as raízes essa equação quadrática.

Você pode acessar o geogebra online, clicando no ícone:



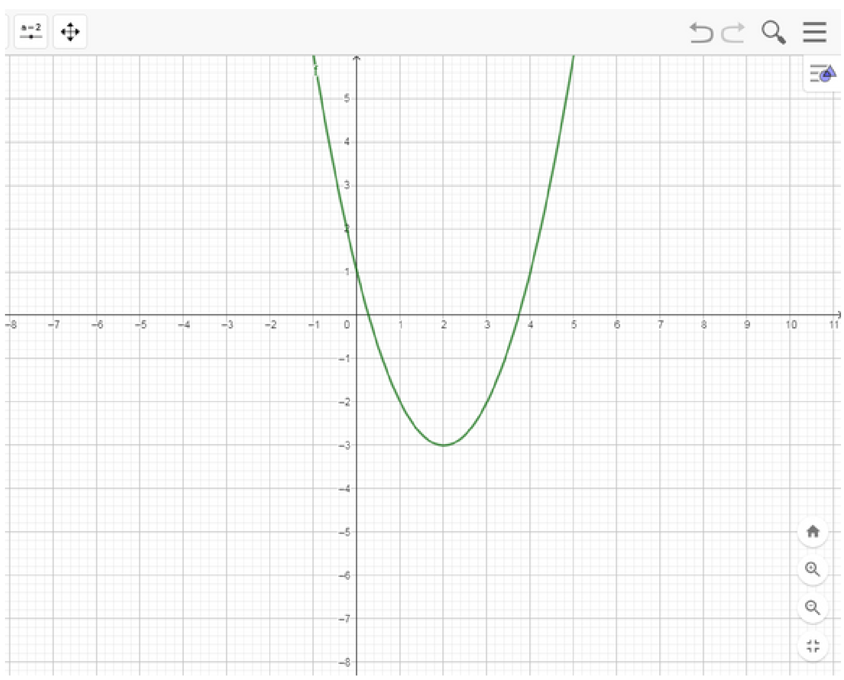
Ao clicar, você terá acesso a área de trabalho do geogebra online, sem a necessidade de listação, conforme imagem acima.

Em seguida você digitará a função na caixa de entrada, da seguinte forma: f(x) = x^2 - 4x +1.

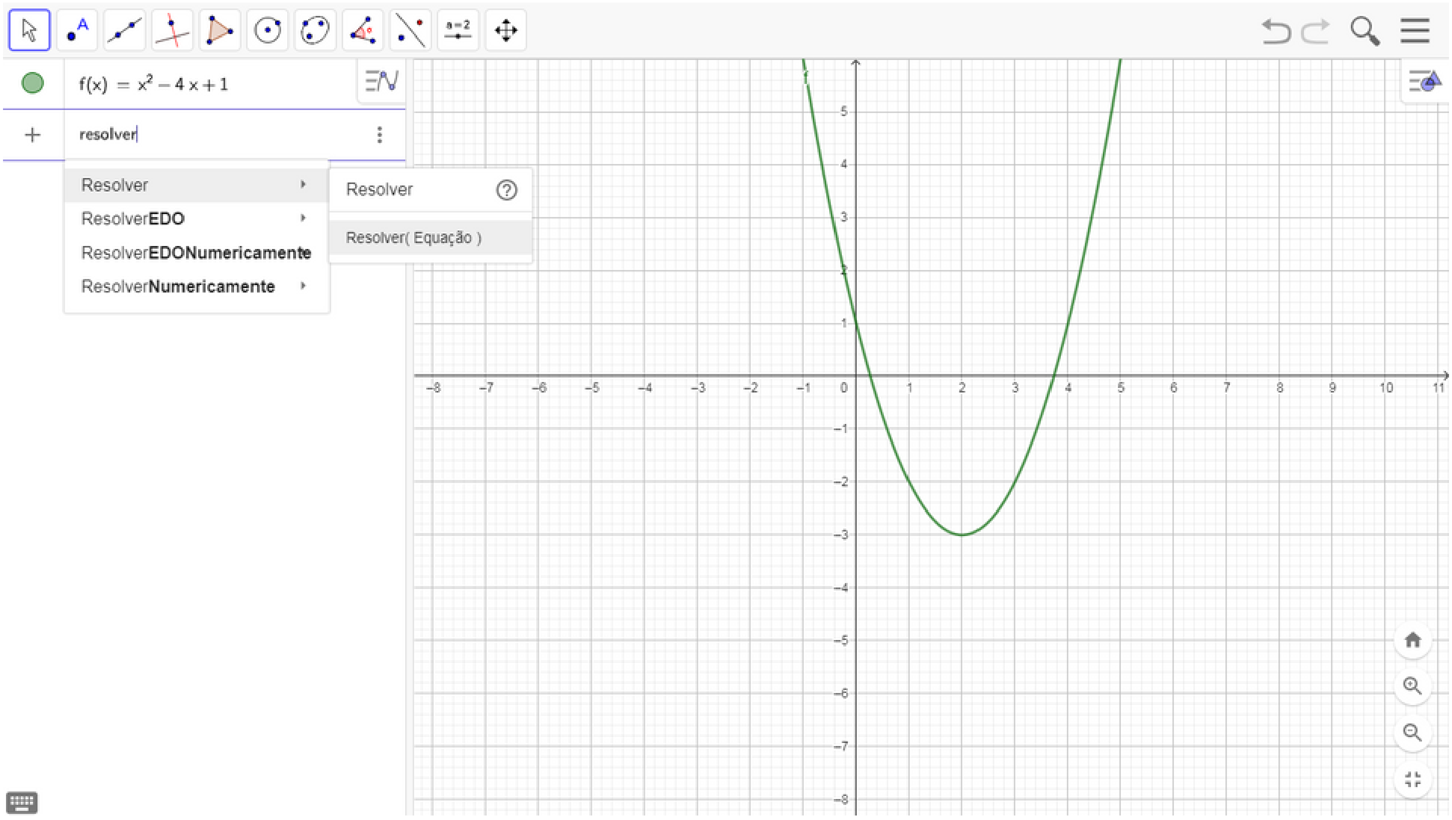


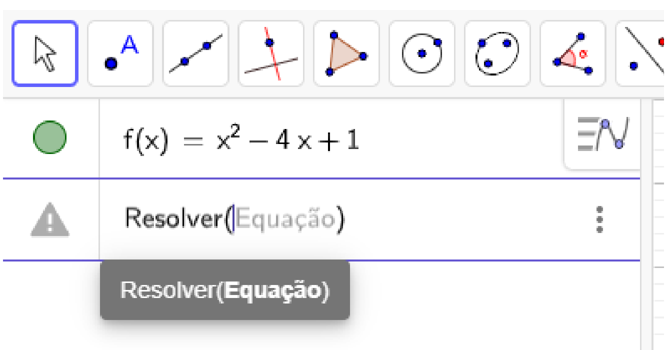
A função deverá ficar nesse formato...

Automaticamente será desenhado o gráfico da função.

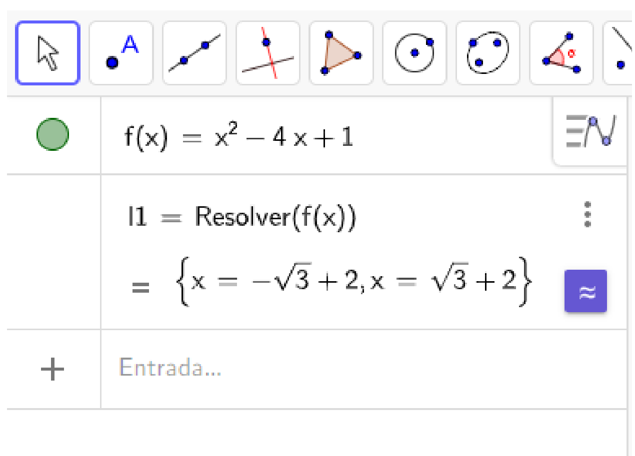


Para resolver a equação, na caixa de entrada você digitará o comando Resolver, e procurará a opção equação, como indica o quadro abaixo.



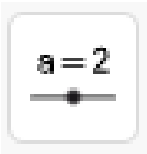


Onde aparece equação, digite f(x)

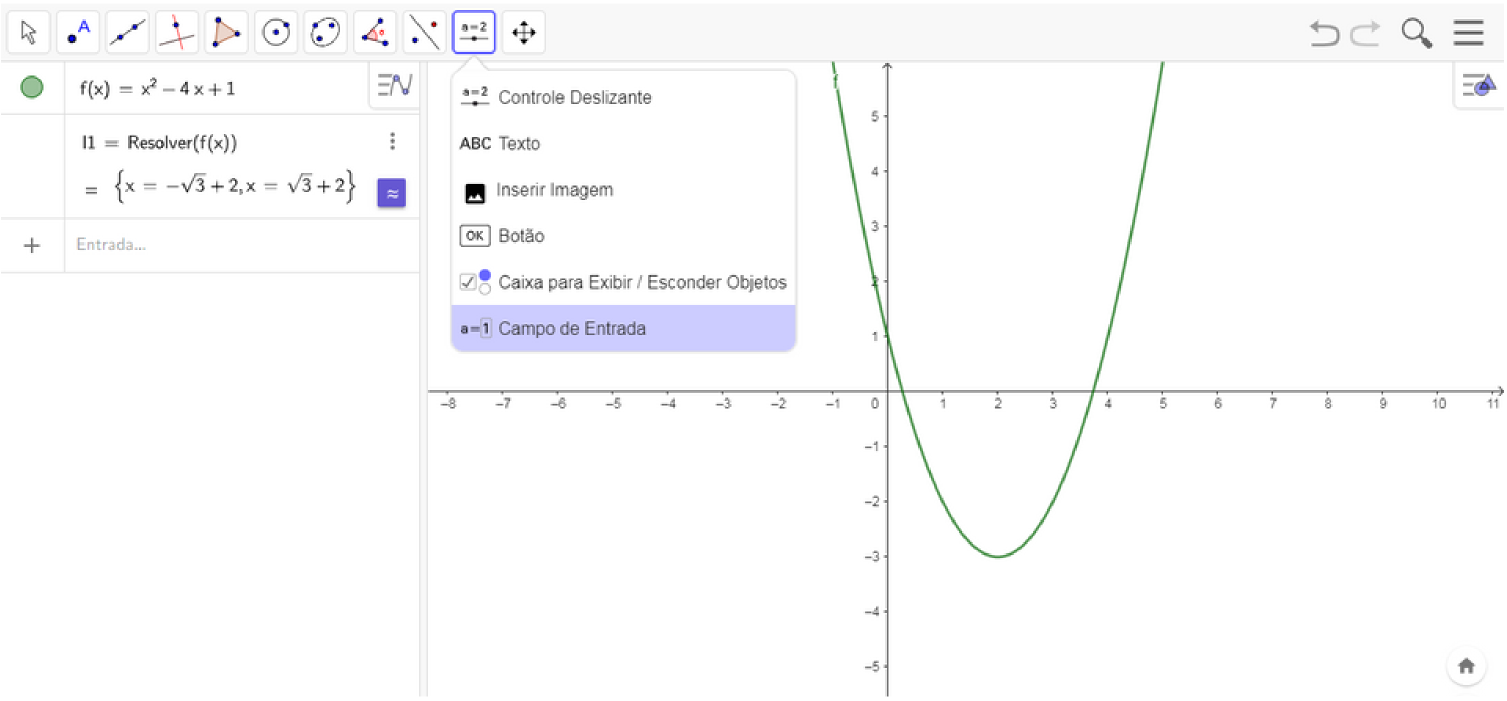


Logo, serão apresentadas as raízes da equação.

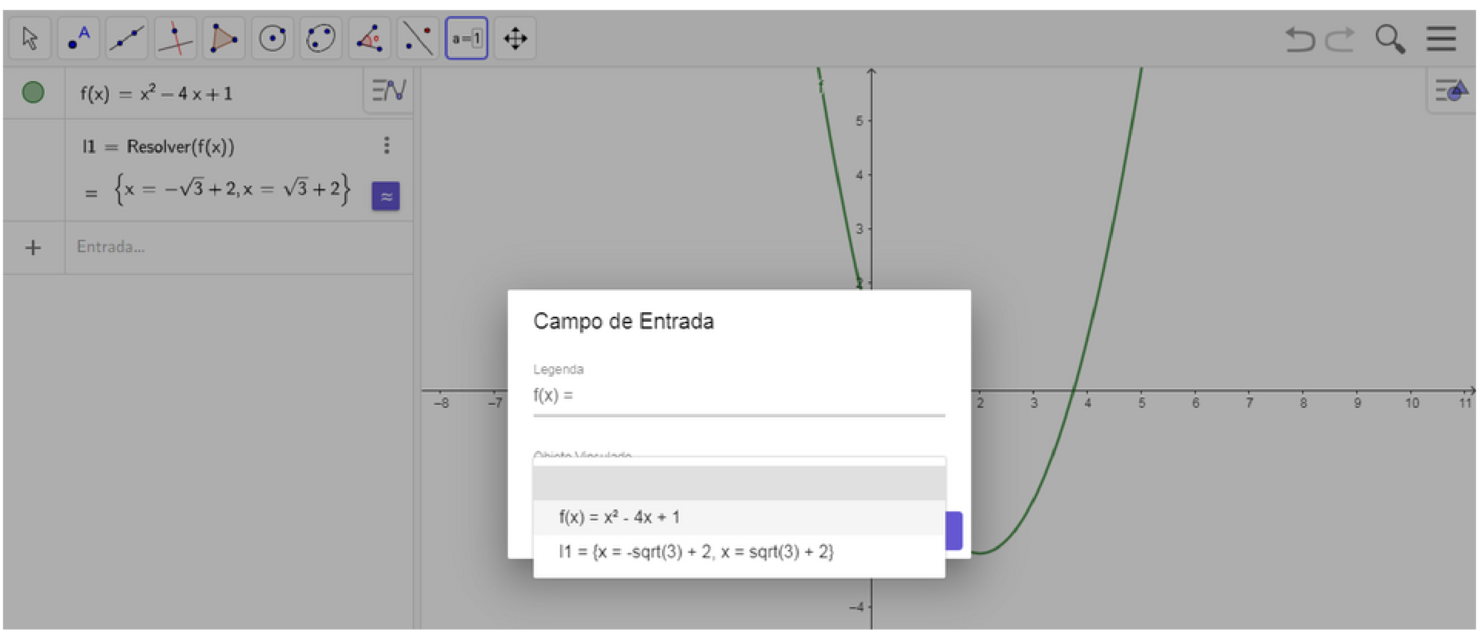
PARTE II: Criar uma caixa de texto na área de trabalho, para que seja possível através dela digitar qualquer outra função.

No menu: 

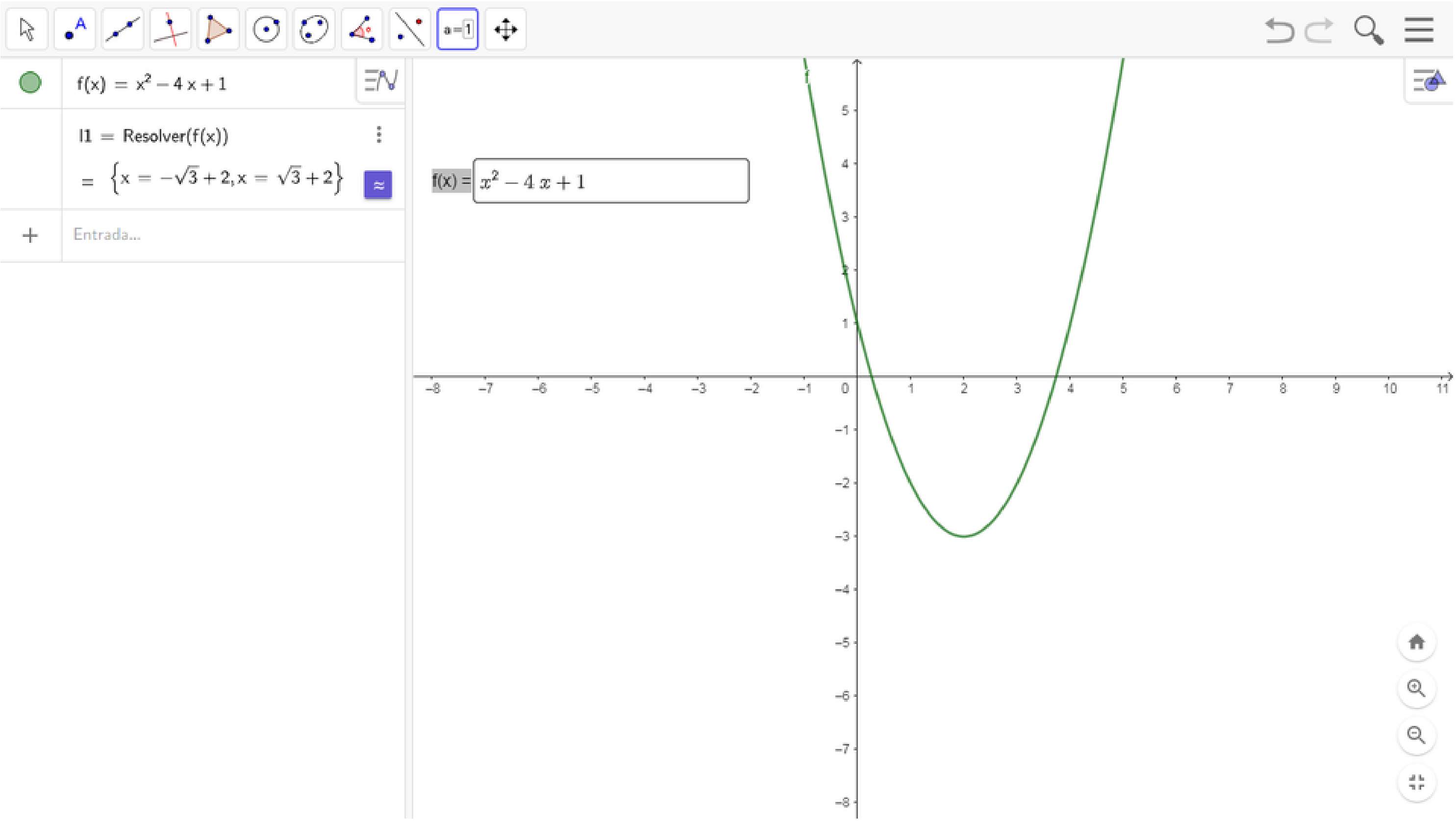
Escolhemos: Caixa de entrada



Em legenda, digitamos f(x) =, para representar a função. E o mais importante em objeto vinculado, procuramos a função em que desejamos que apareça na caixa de entrada.



Obteremos o seguinte resultado:



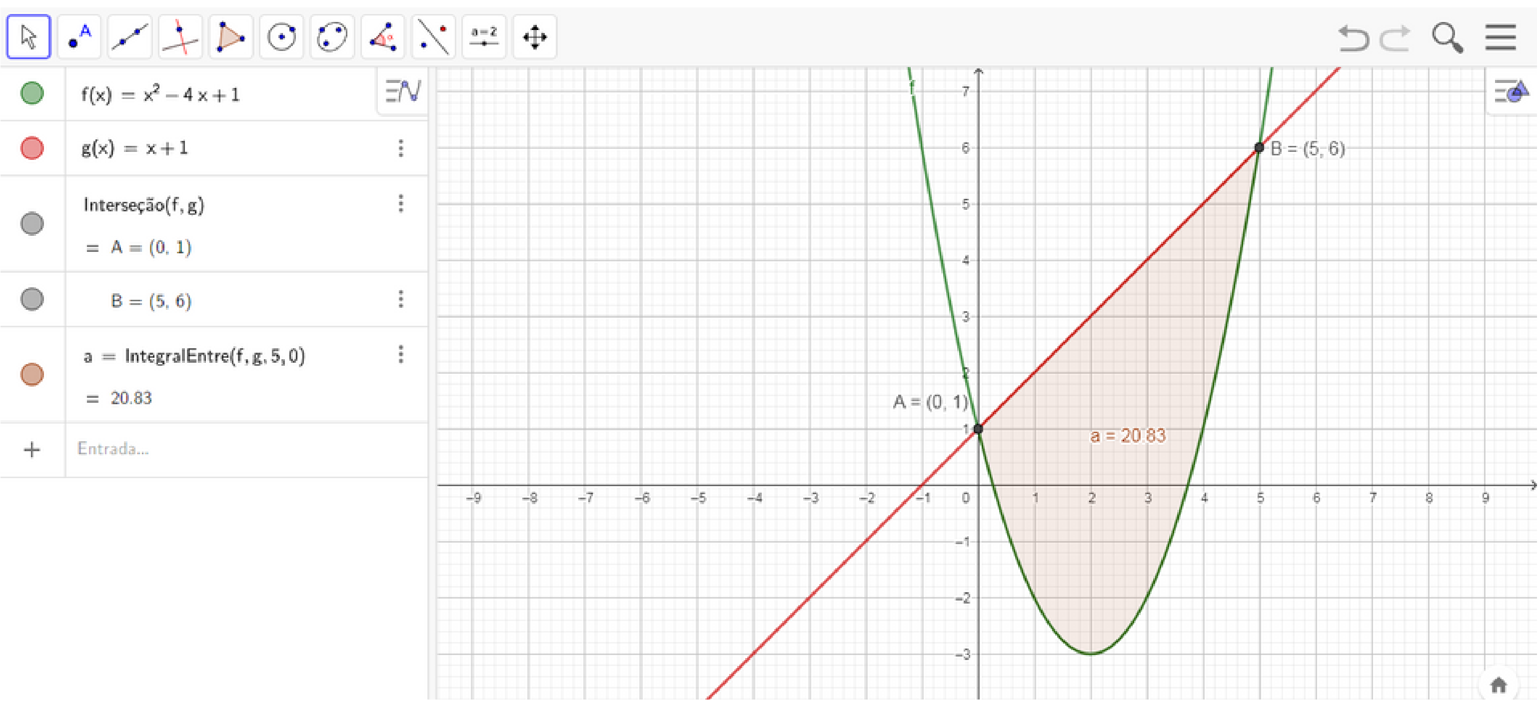
Assim, poderemos digitar qualquer função dentro da caixa de entrada obter o gráfico dessa função e automaticamente obter as raízes dessa equação.

02. Área entre Curvas

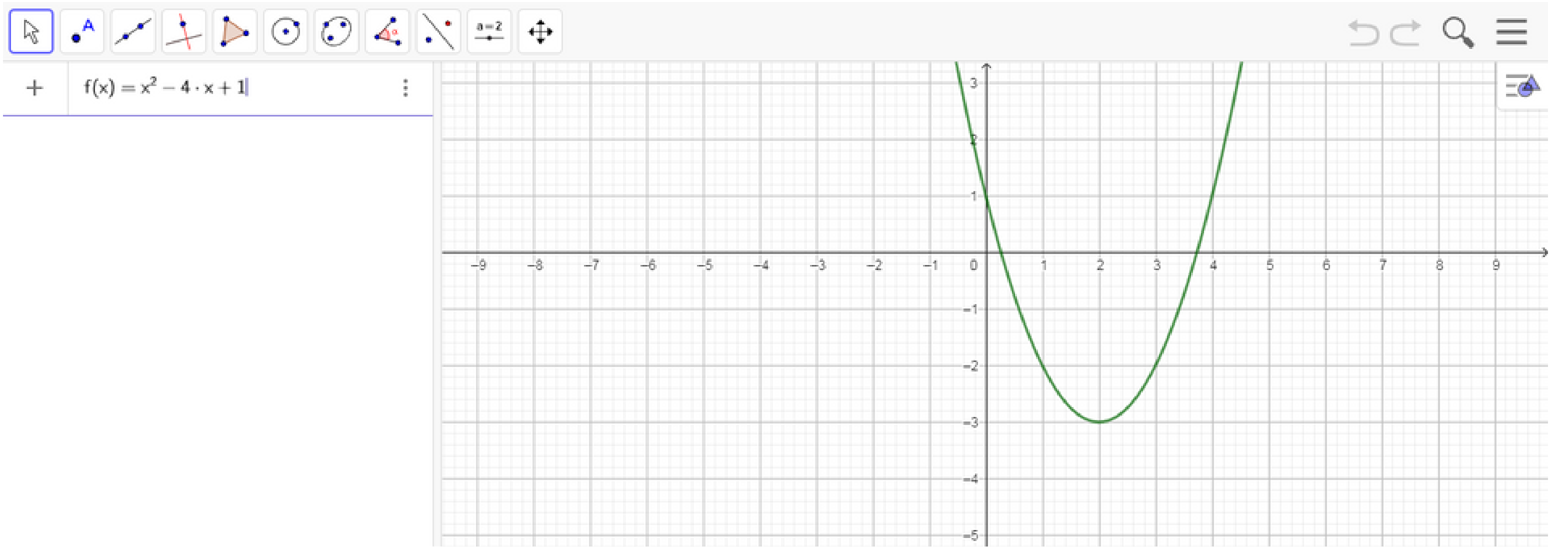
Calcular a área delimitada pelas curvas das funções:

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = x + 1$

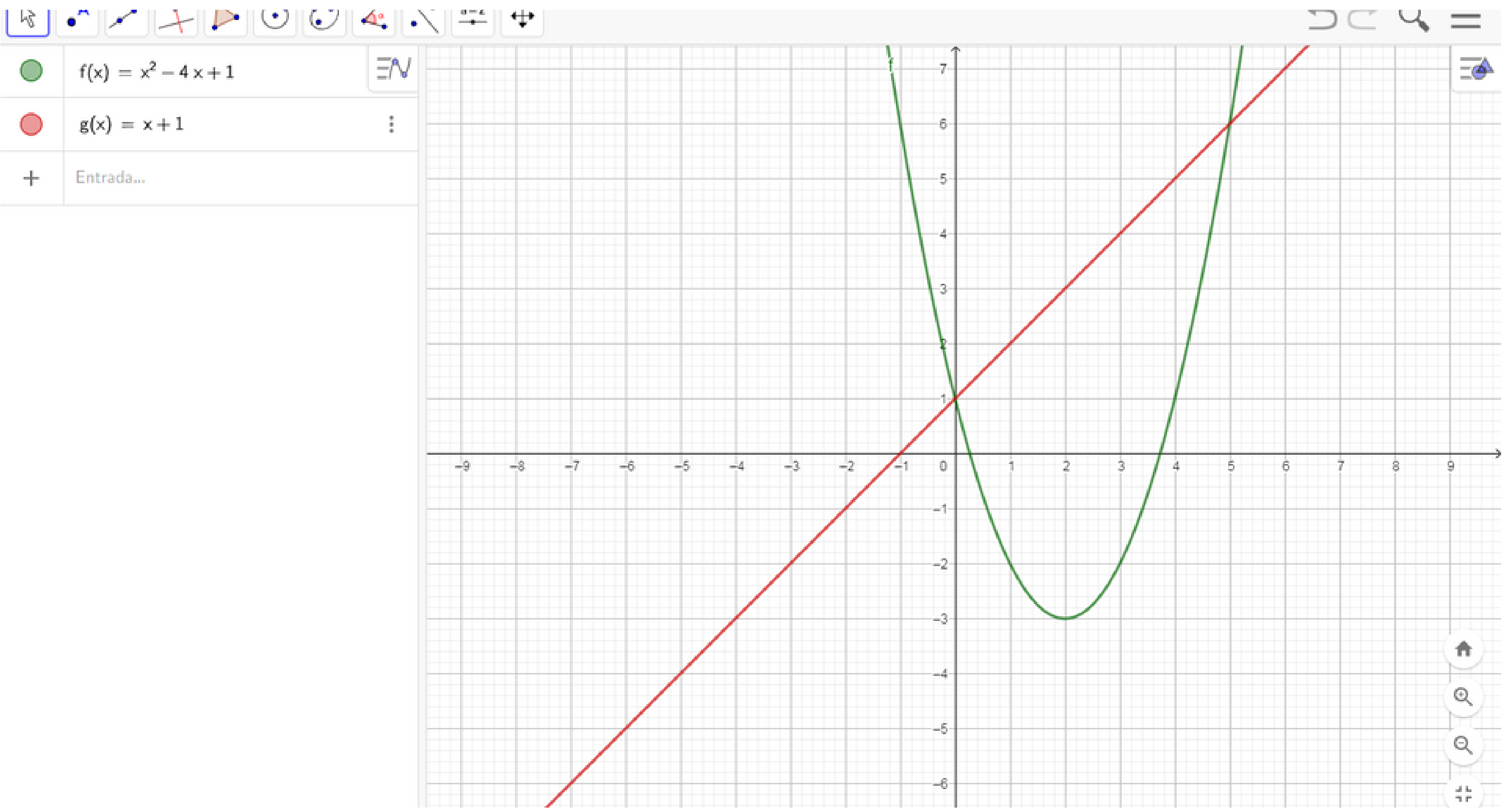
No final, você obterá o seguinte resultado:



Digitaremos a função f(x) = x^2 - 4x +1, na caixa de entrada.

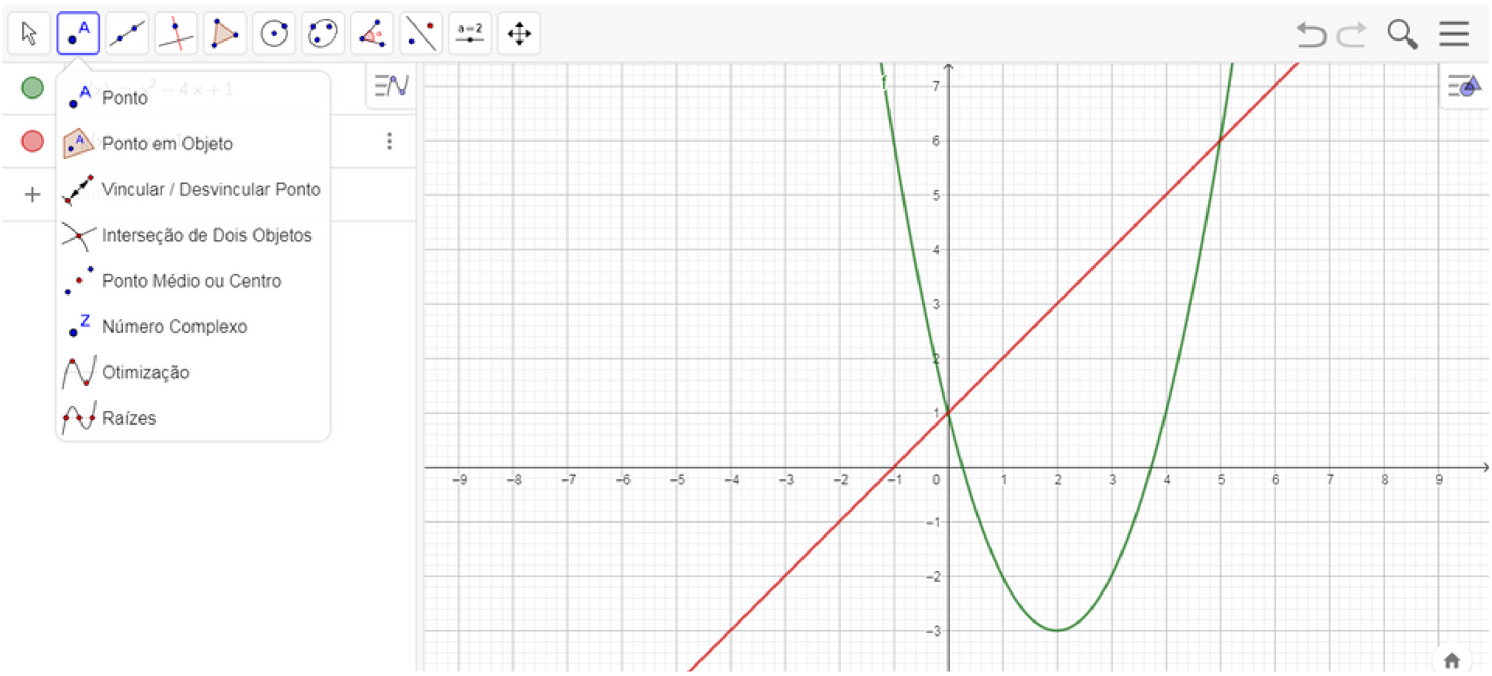


Digitaremos a função g(x) = x + 1, na caixa de entrada.

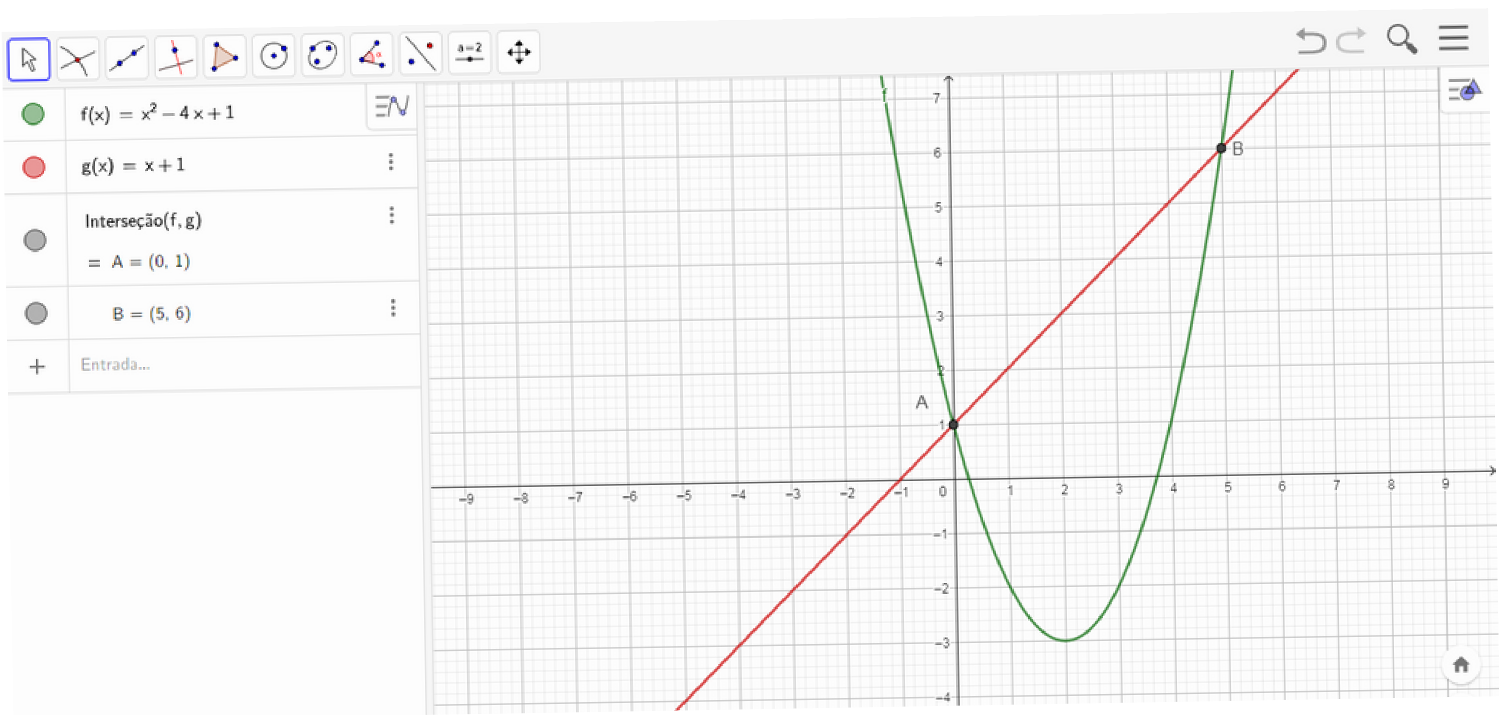


Em seguida, usaremos a ferramenta:

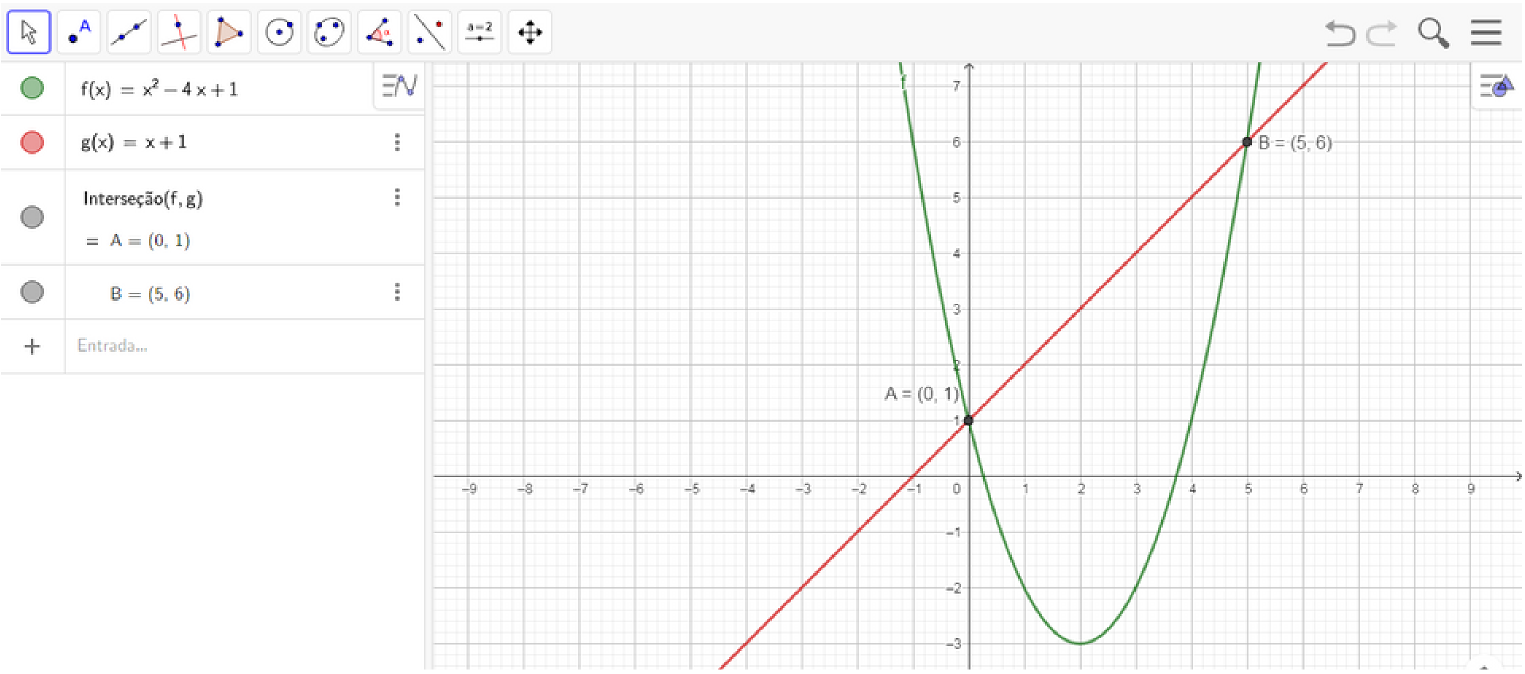
para determinar a interseção entre os gráficos das funções f(x) e g(x).



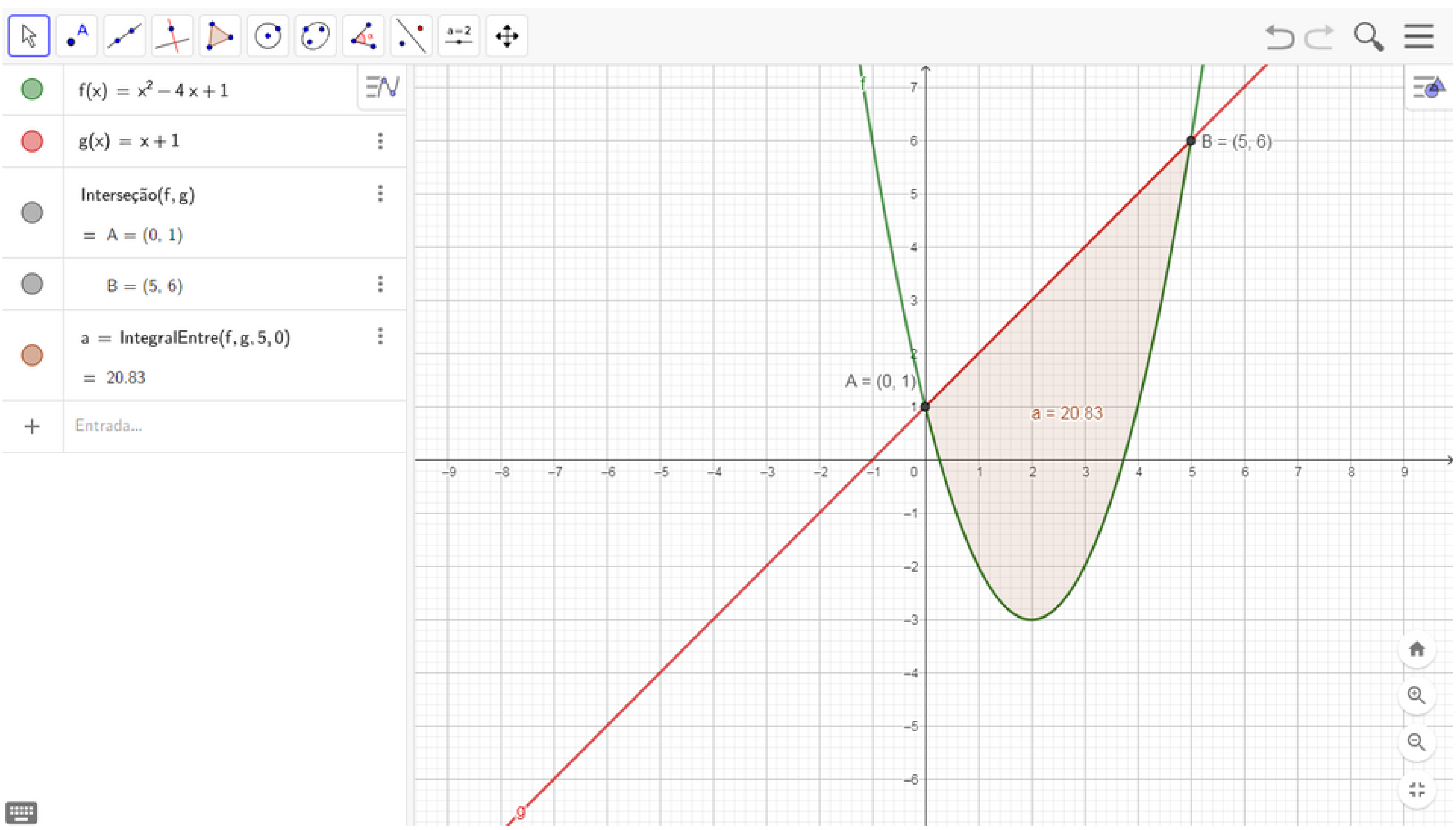
Clincando sobre as curvas em que queremos a interseção obtemos::
os pontos A e B que são: A = (0,1) e B=(5,6). Onde 5 é o limite superior e 1 é o limite inferior.



Para calcular determinar a área entre as curvas, digitaremos na caixa de entrada: integralentre(f,g,5,0).



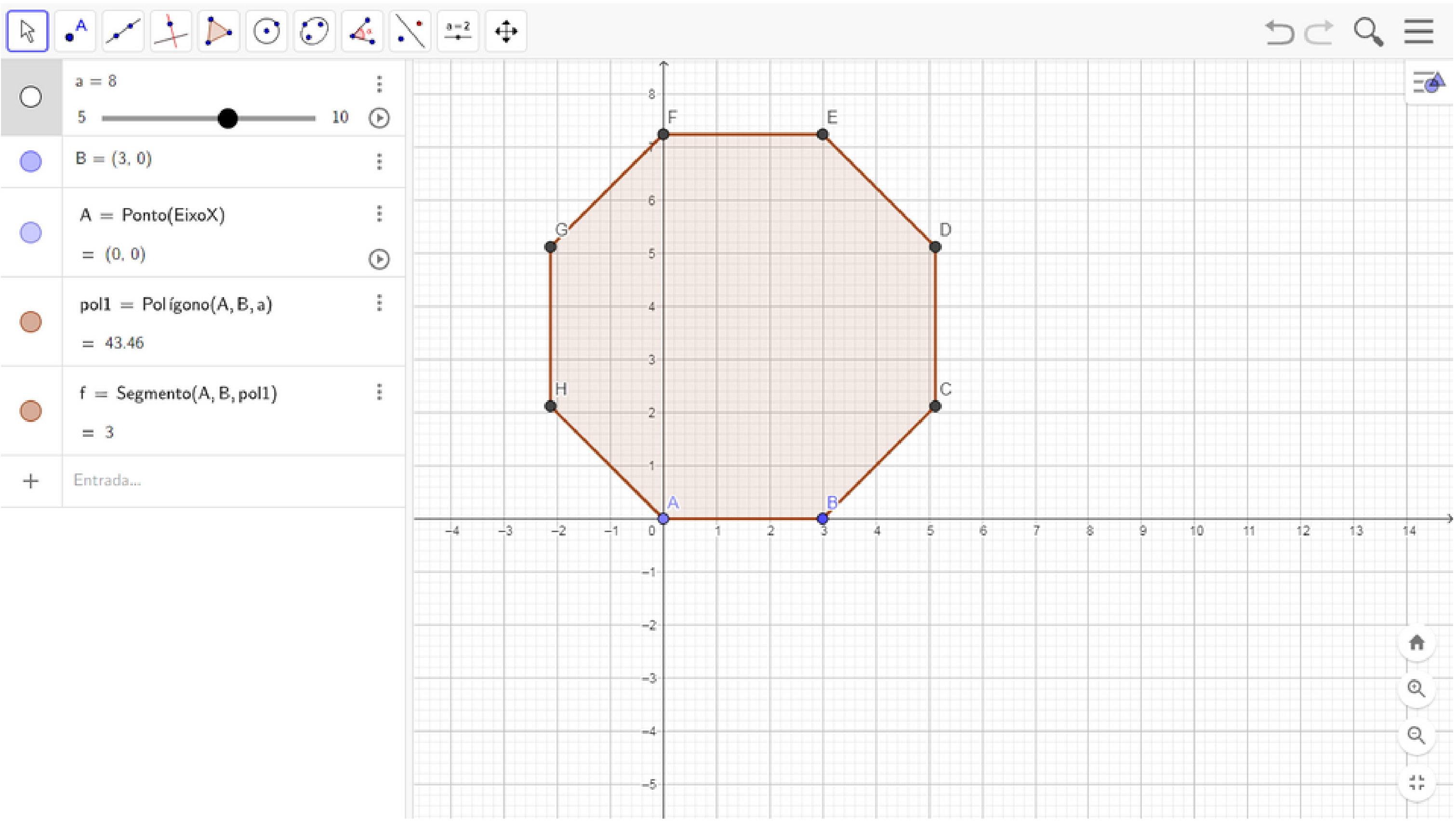
A imagem abaixo representa a área entre curvas das funções, que é 20,83.



03. Polígonos e controles deslizantes

Criaremos um controle deslizante para mudar a quantidade de lados de um polígono regular.

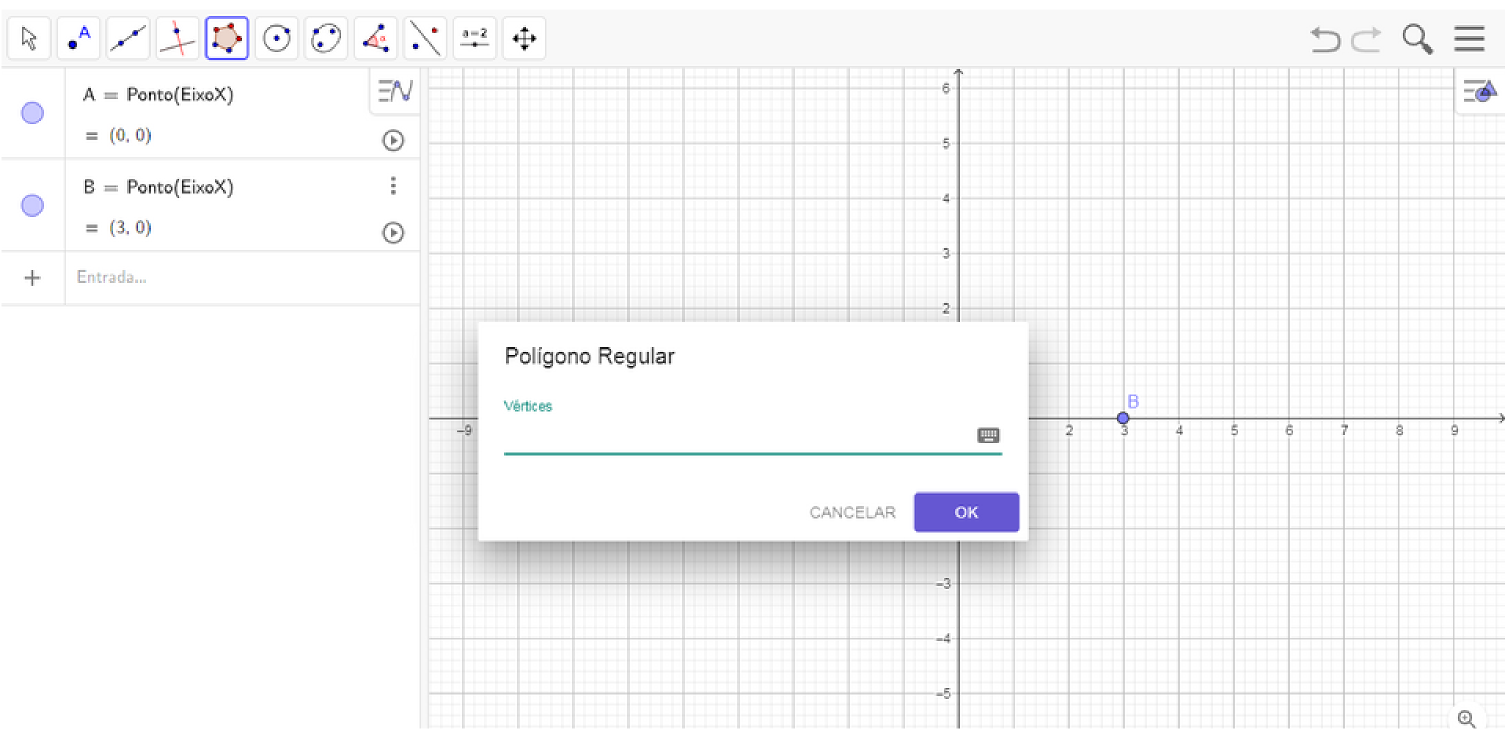
No final, você obterá o seguinte resultado:



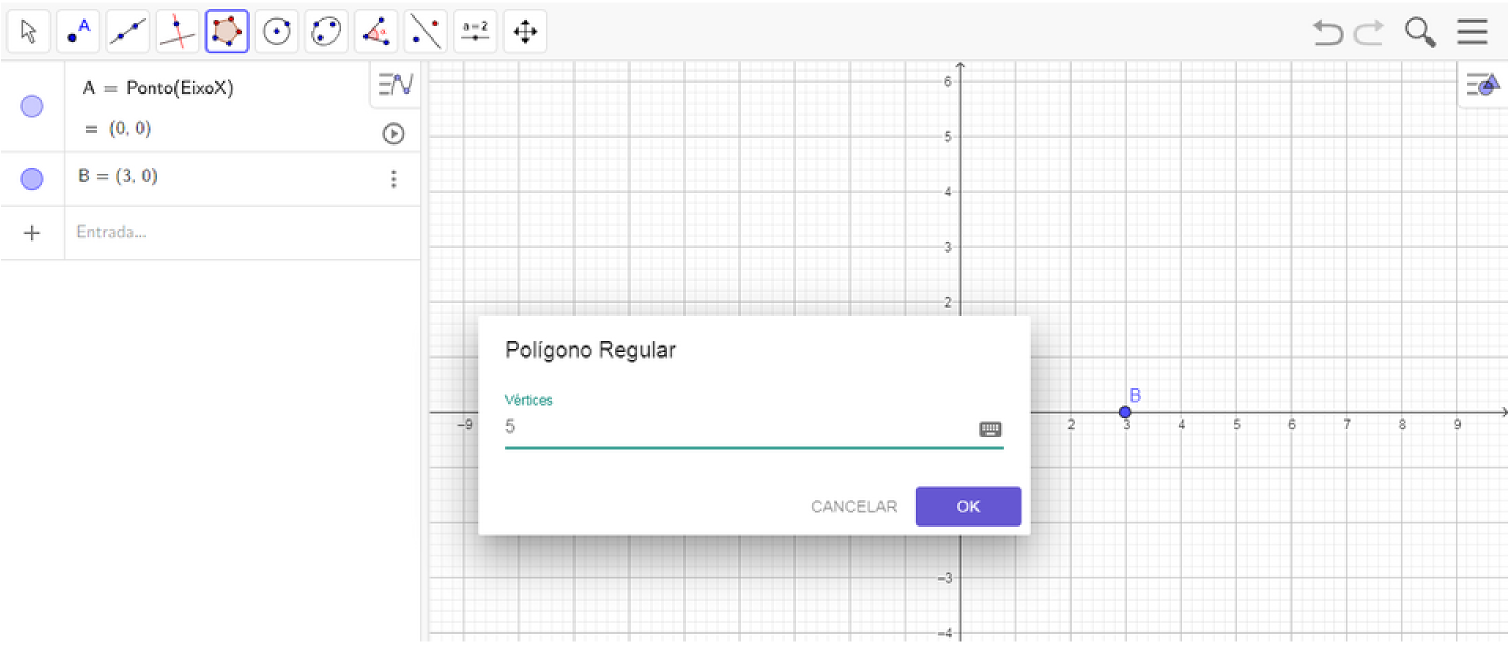
Parte I: Desenhando o polígono regular

Usaremos a ferramenta, polígono regular para desenhar o polígono:

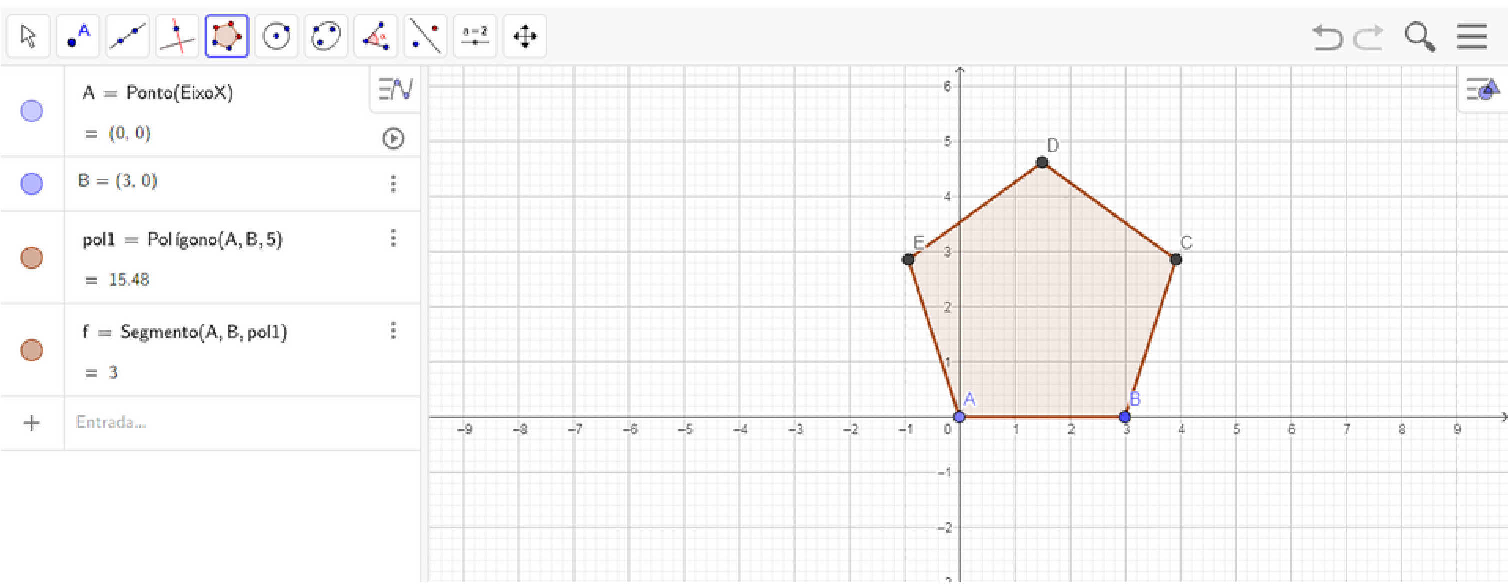
Na área de trabalho construiremos um segmento, passando por dois pontos e obtemos a seguinte caixa de diálogo, basta digitar 5 que é a quantidade de lados do polígono.



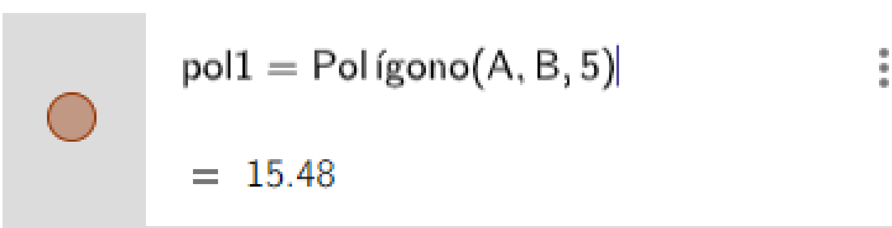
Construiremos um pentágono (polígono de cinco lados)



Obteremos o seguinte polígono.

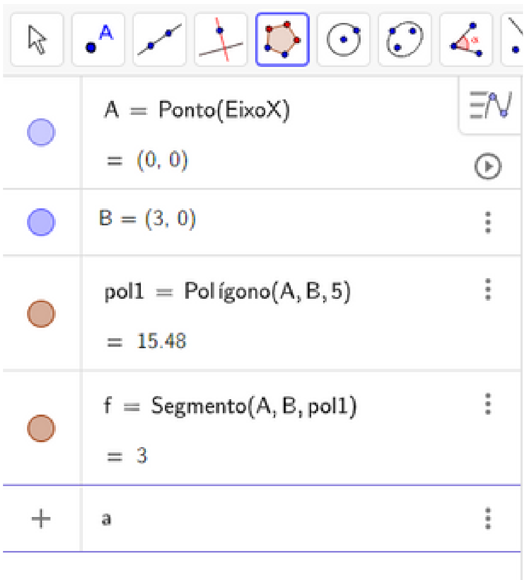


Ao cliicar na caixa de entrada, em polígonos, observamos a seguinte sintaxe:

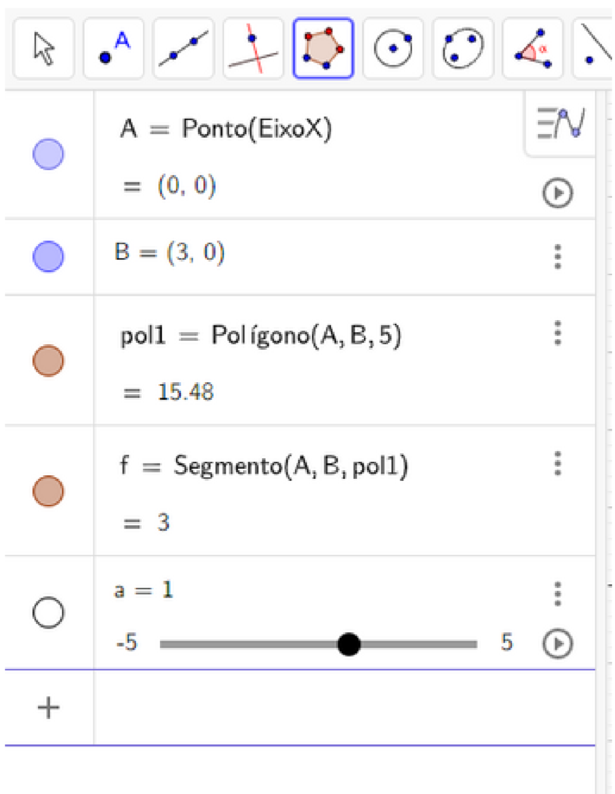


Parte II: Criando o controle deslizante

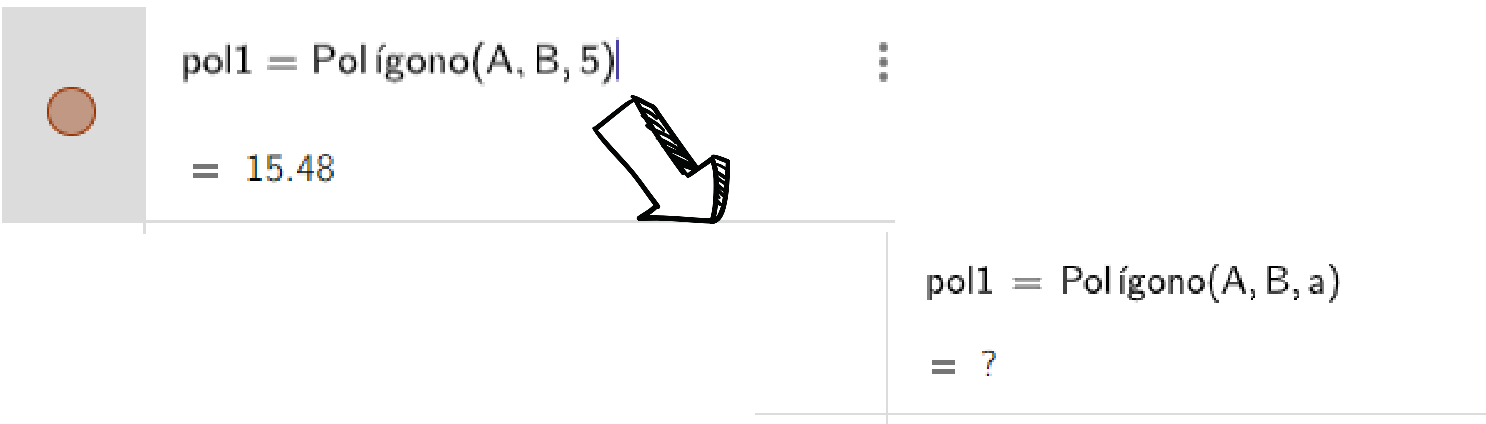
Digitaremos a letra "a" na caixa de entrada, veja:



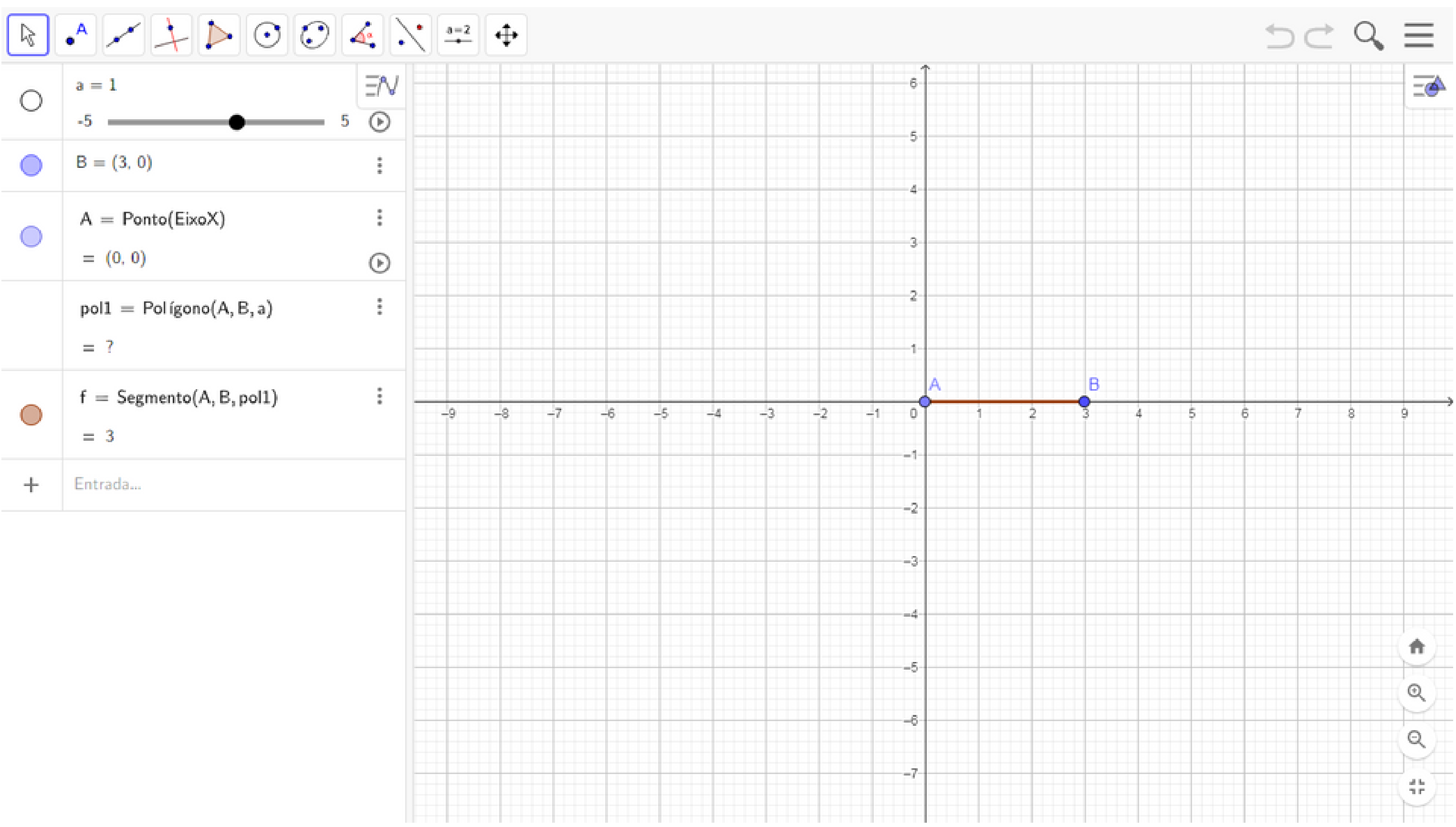
O geogebra mostra a representação desse controle na caixa de entrada.



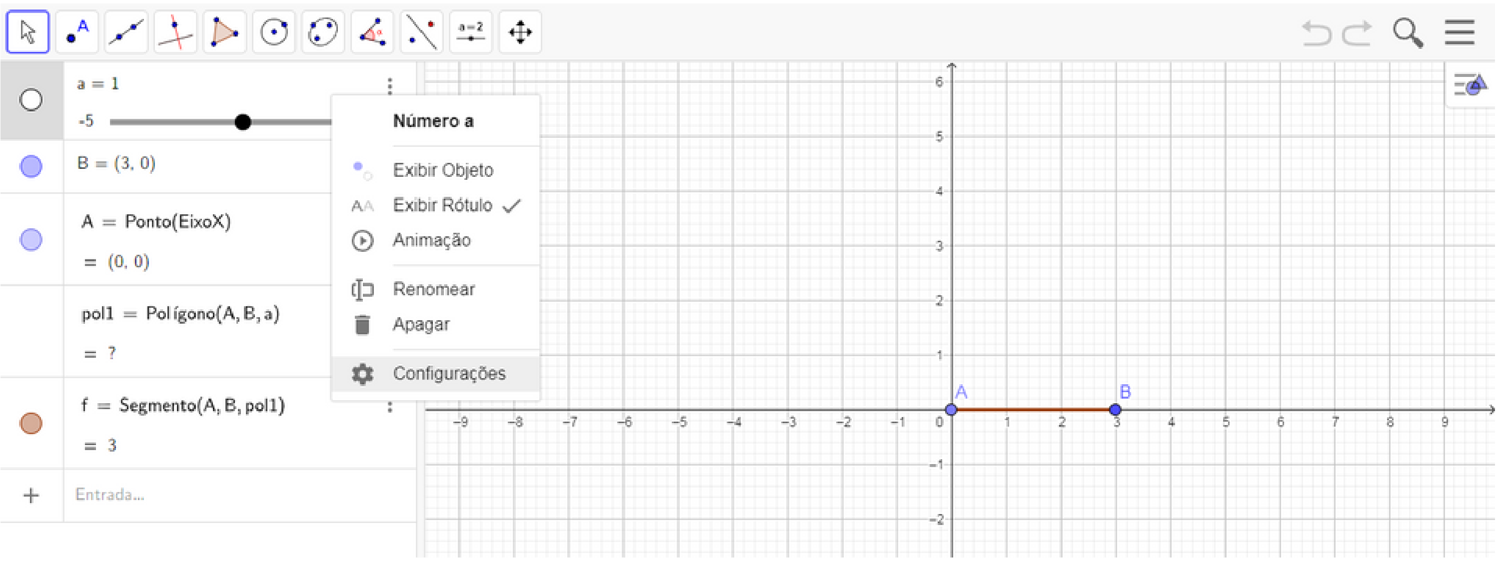
Na sintaxe do polígono, substituiremos o valor 5 pela letra "a", correspondente ao valor do controle deslizante.



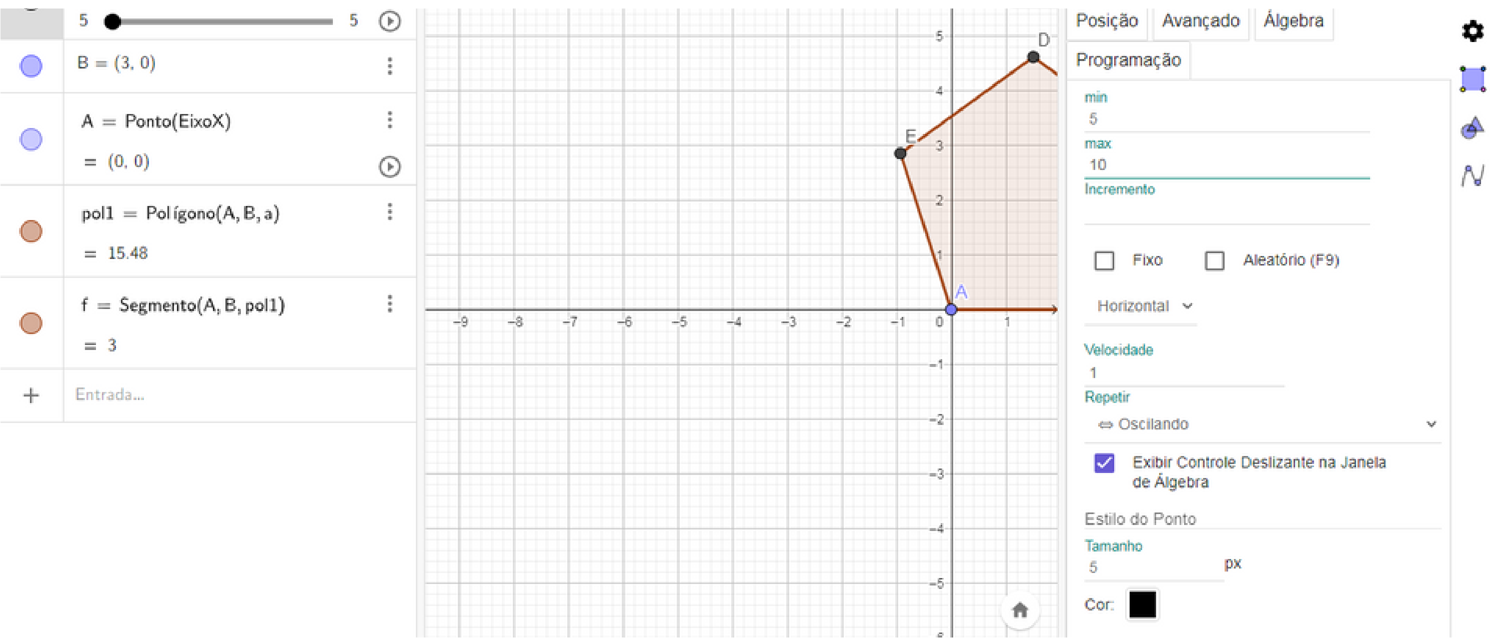
A caixa de entrada ficará da seguinte forma:



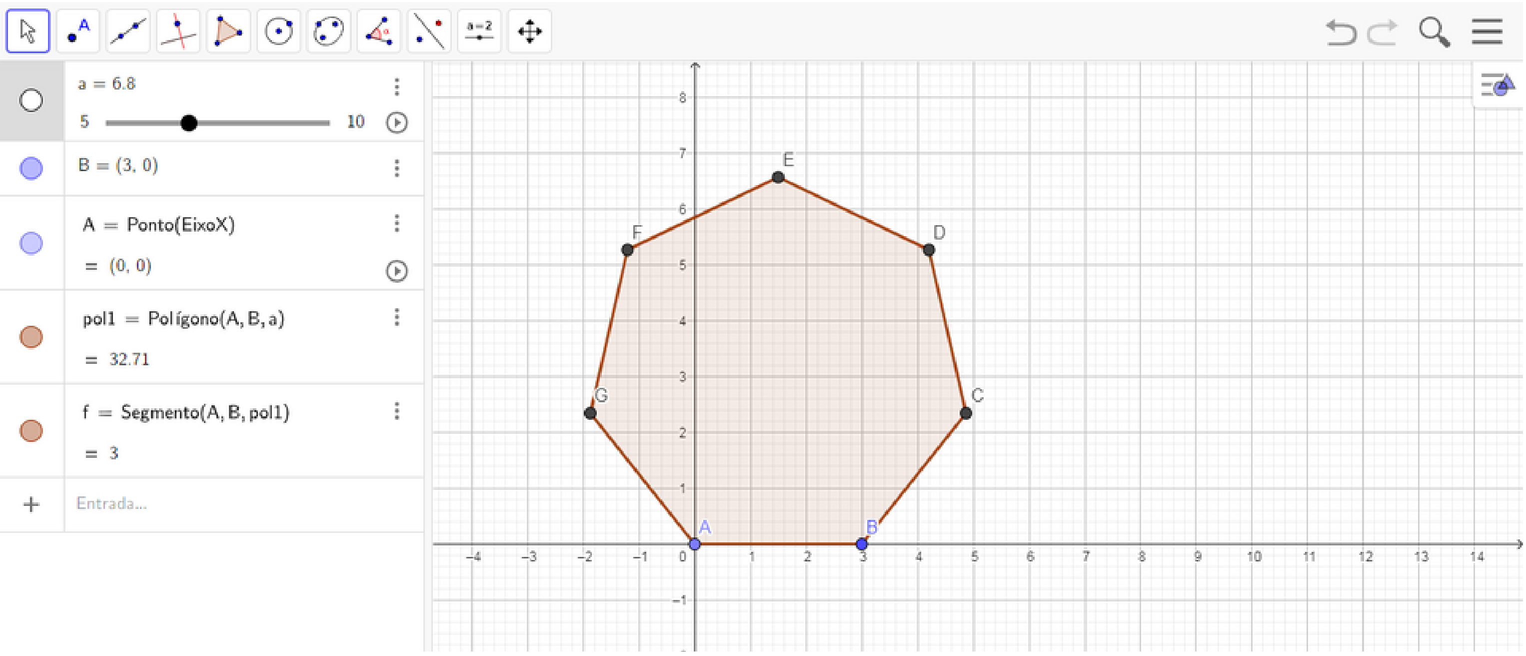
Clicando em configurações do controle deslizante, configuraremos os extremos do controle deslizante, veja:



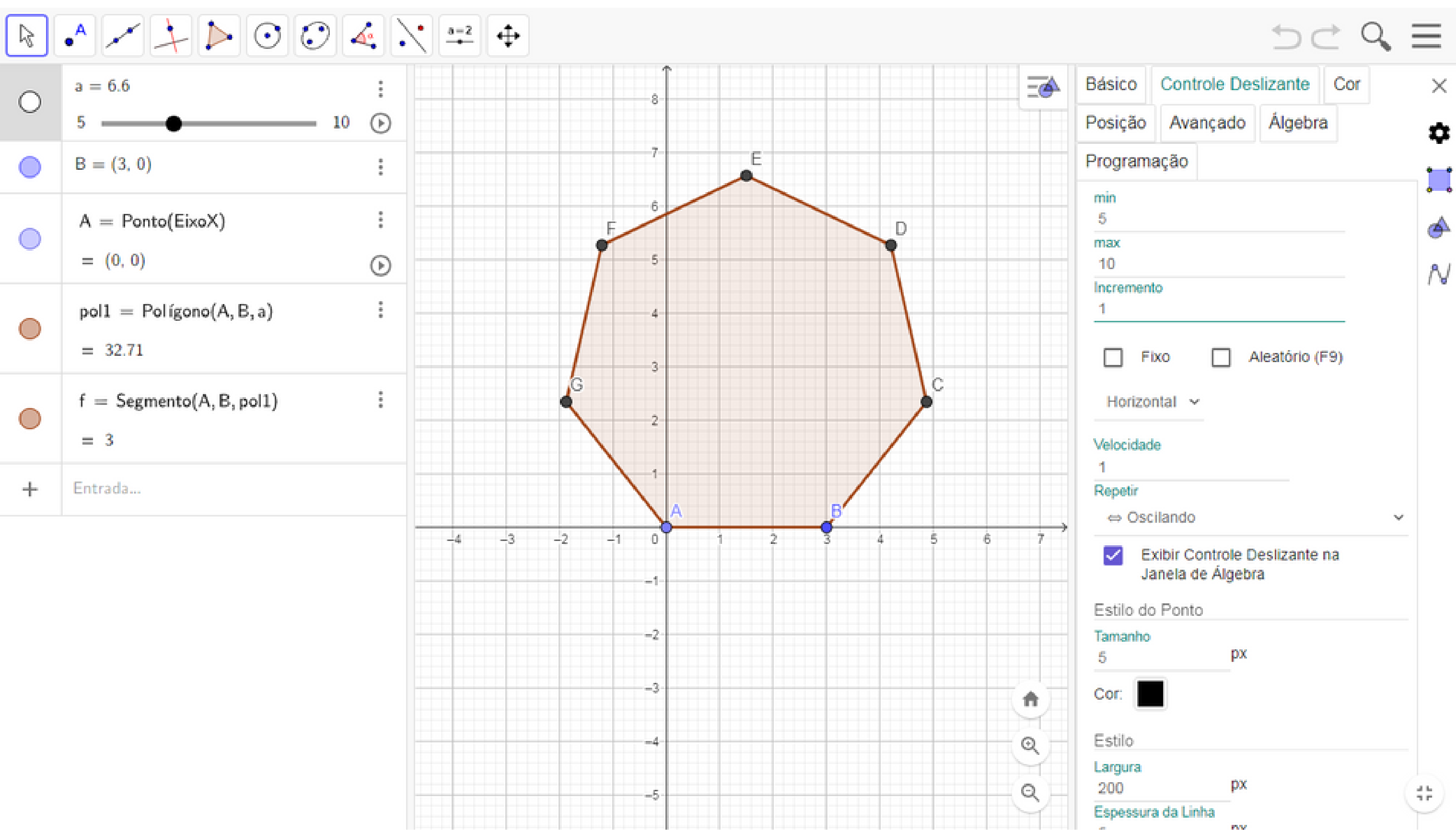
Na aba controle deslizante, modificaremos os extremos mínimo e máximo assim:



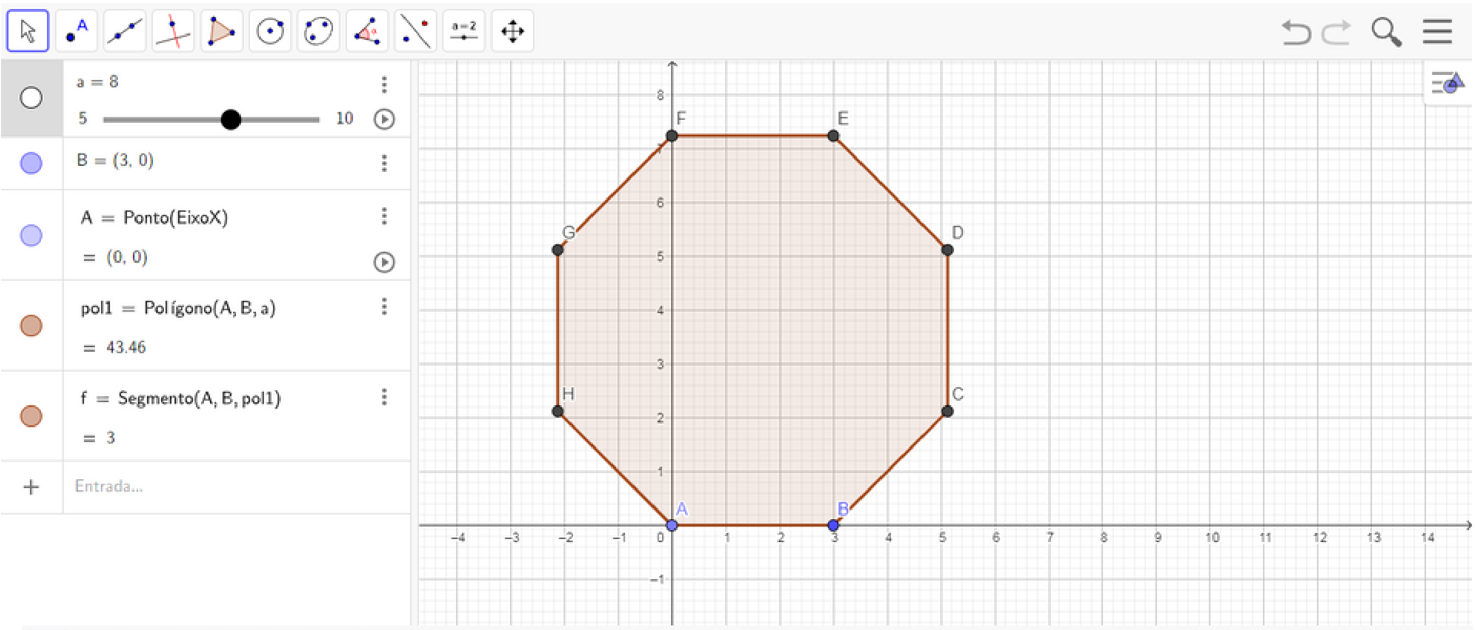
Ao usar o controle deslizante teremos o seguinte resultado...

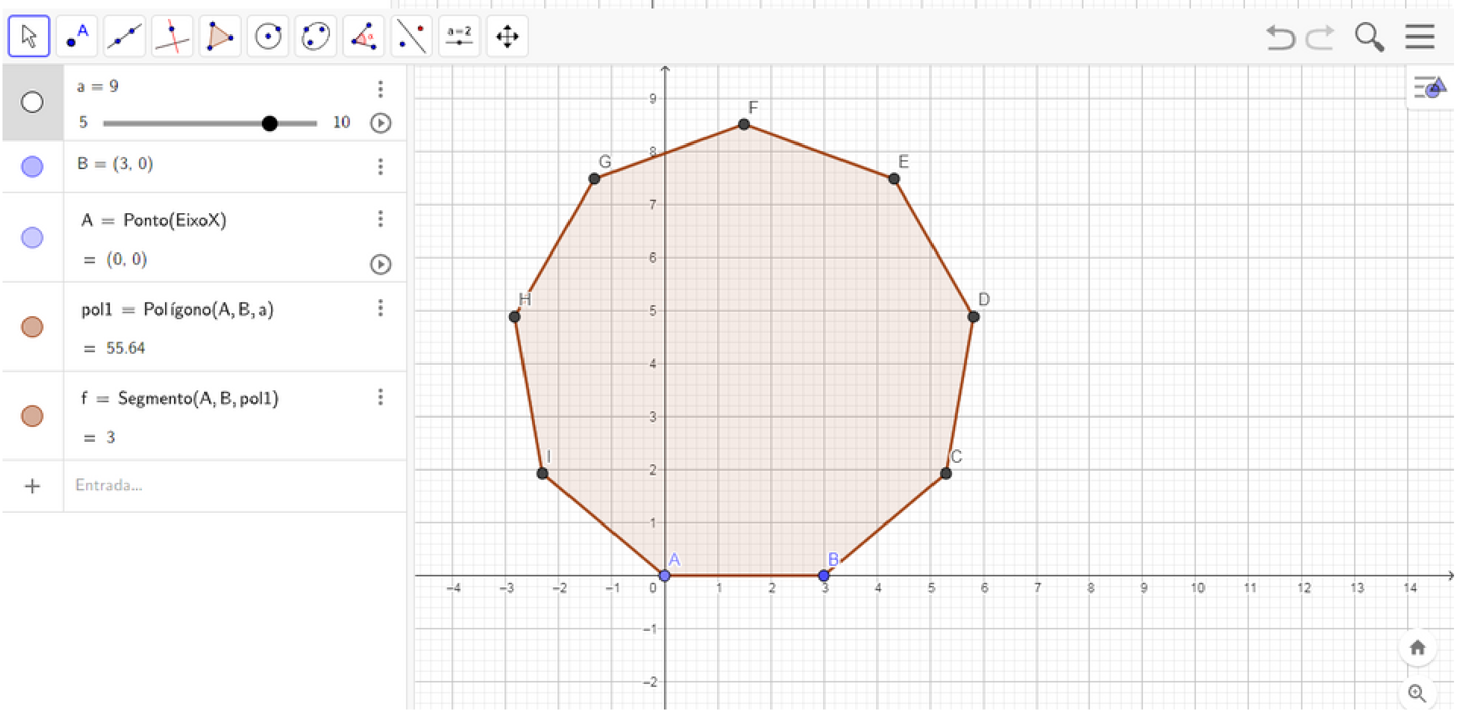


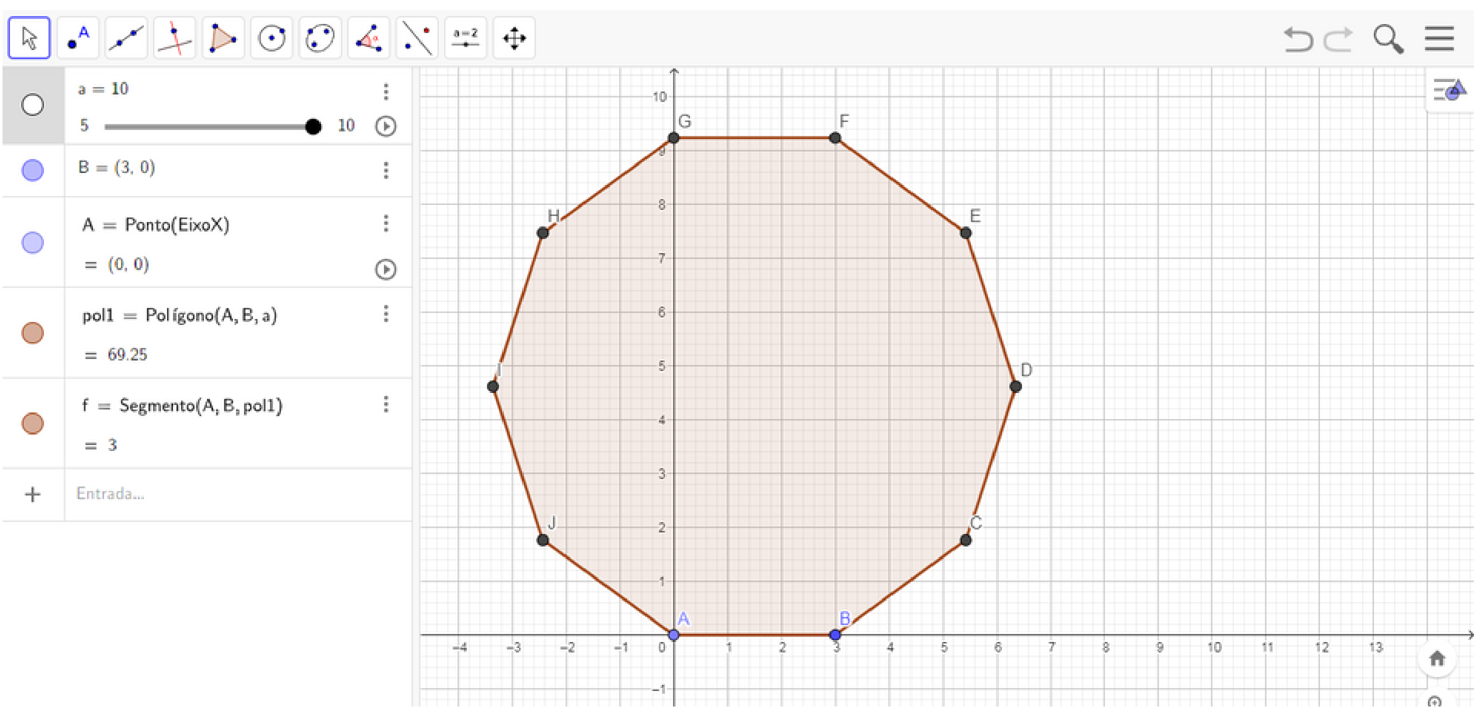
Em configurações faremos a correção, e em incremento digitaremos 1, conforme a imagem.



Agora ao usar o controle desllizante teremos os seguintes polígonos.



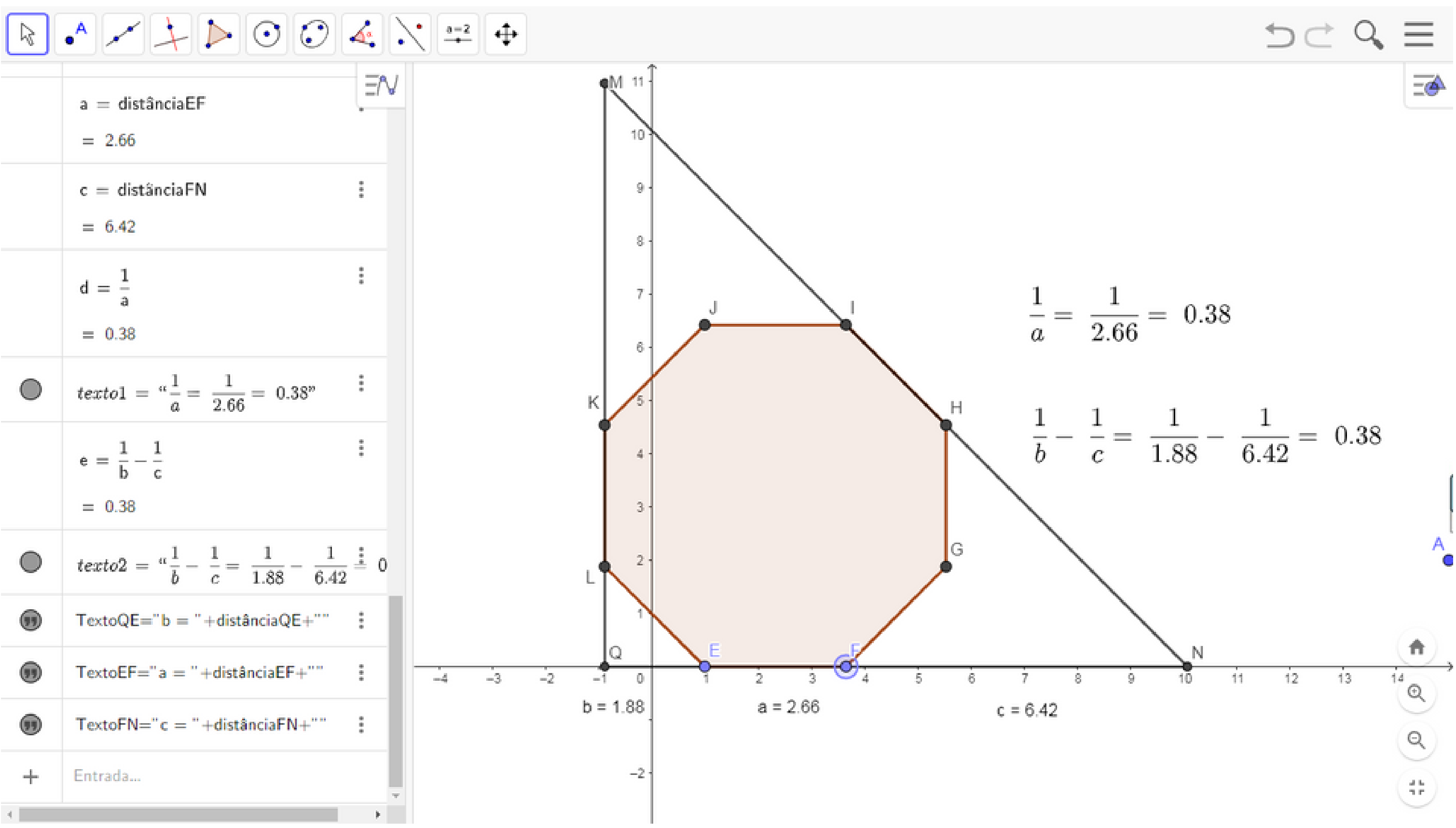




04. Criando animações com polígonos.

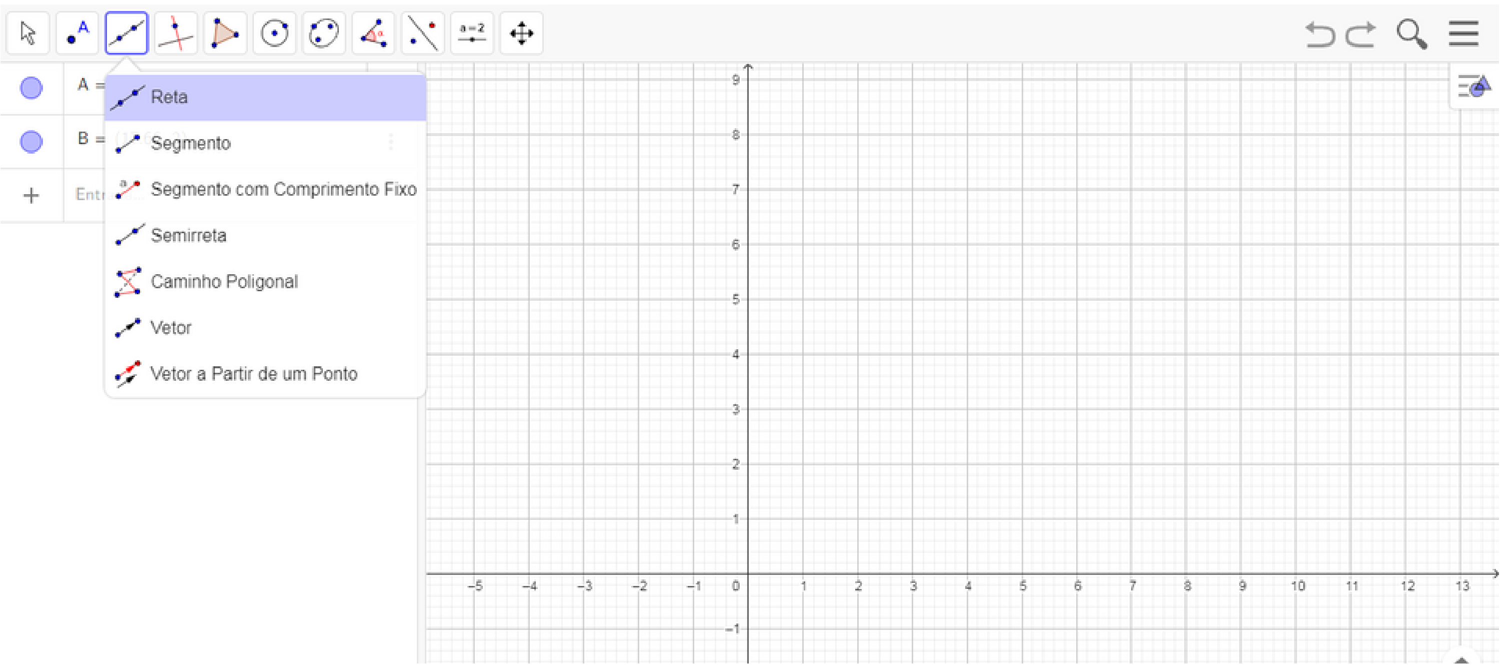
Criaremos um controle deslizante para mudar a quantidade de lados de um polígono regular.

No final, você obterá o seguinte resultado:

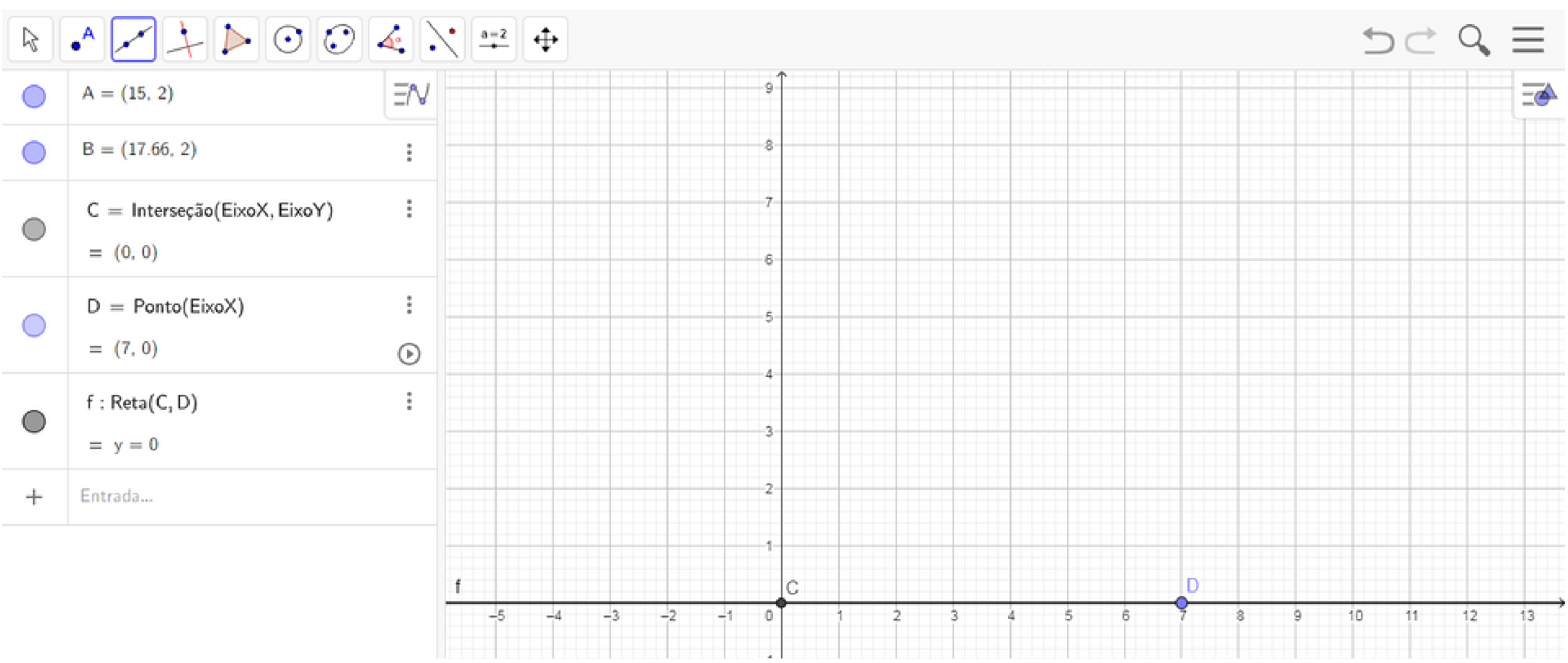


Parte I: Desenhando o polígono regular

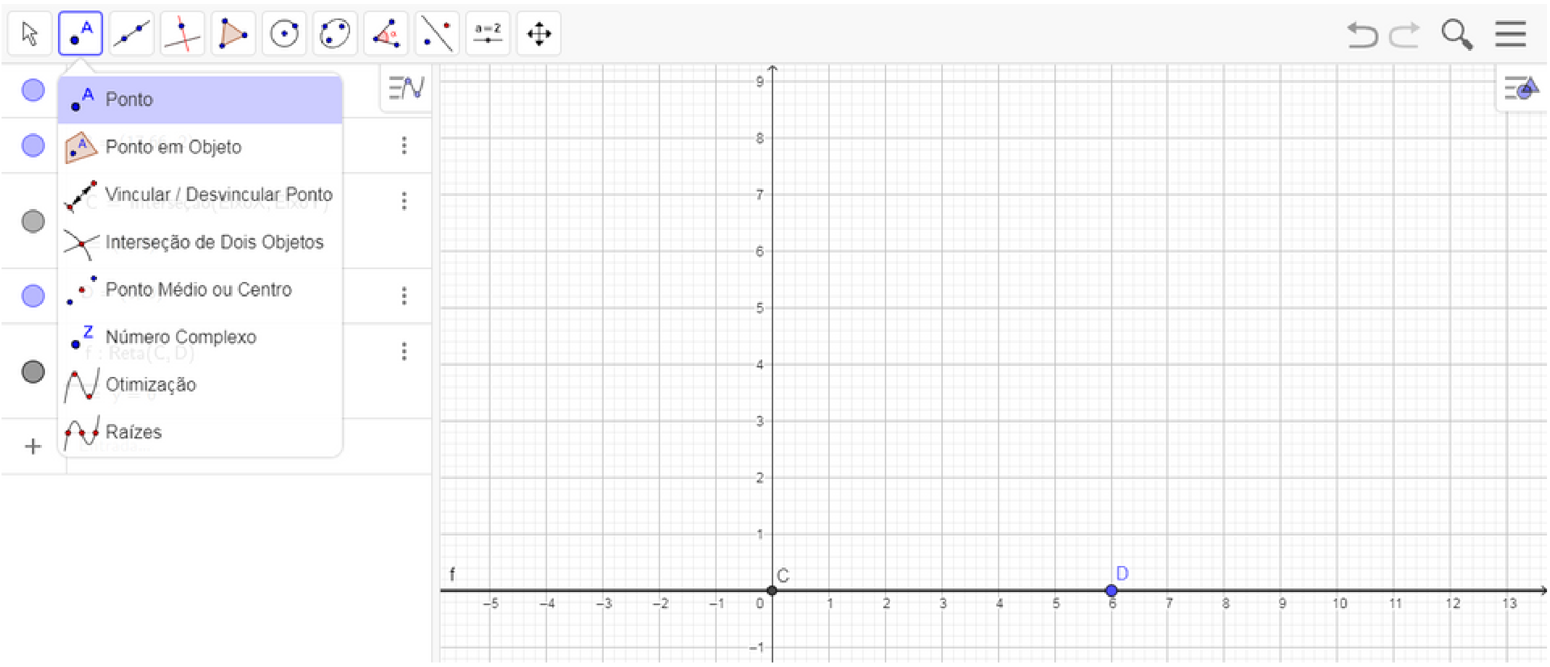
Usando a ferramenta reta, traçaremos uma reta. Isso, porque na animação o polígono deslizará sobre a reta.



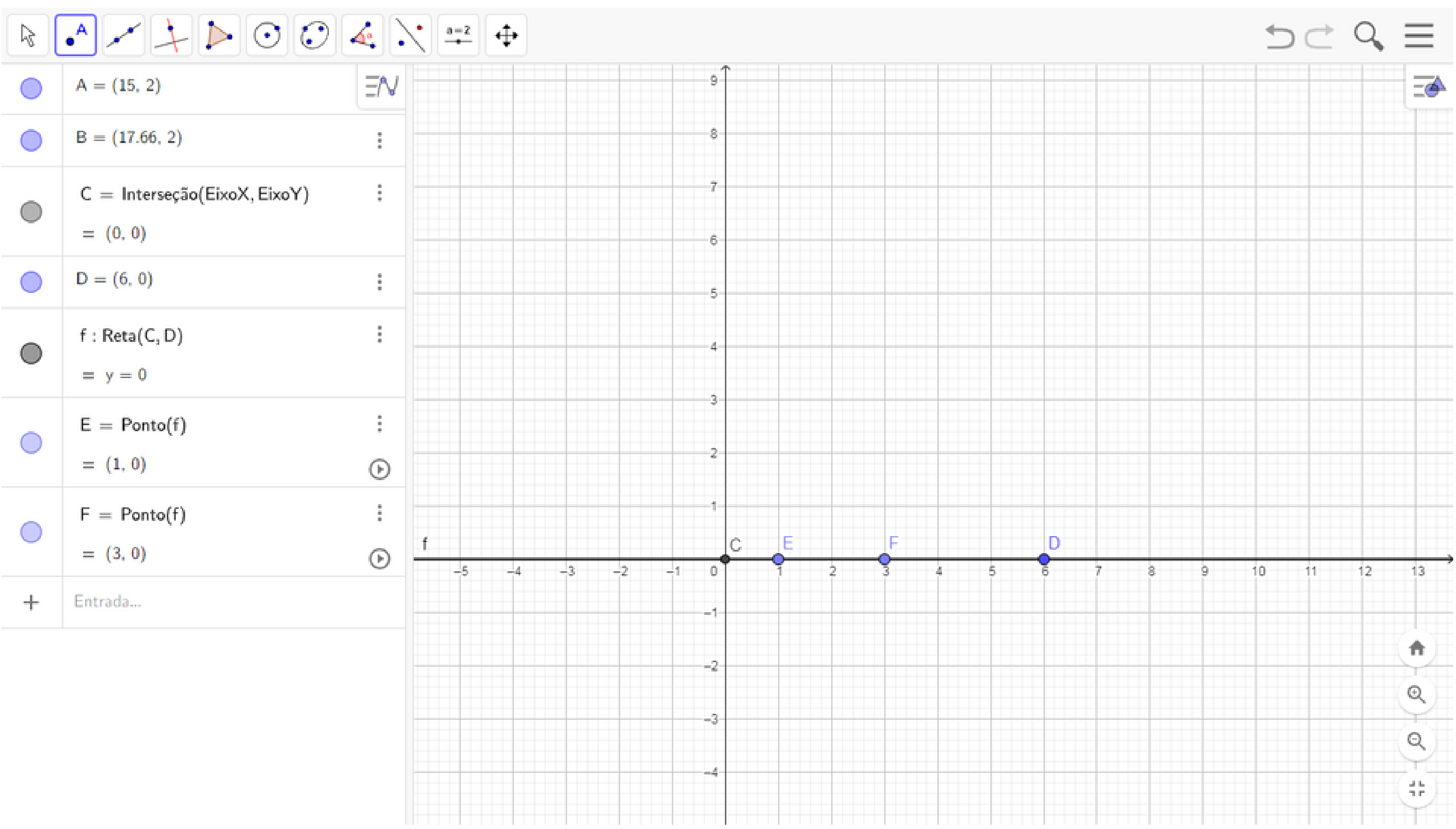
Na imagem abaixo temos uma reta passando pelos pontos C e D.



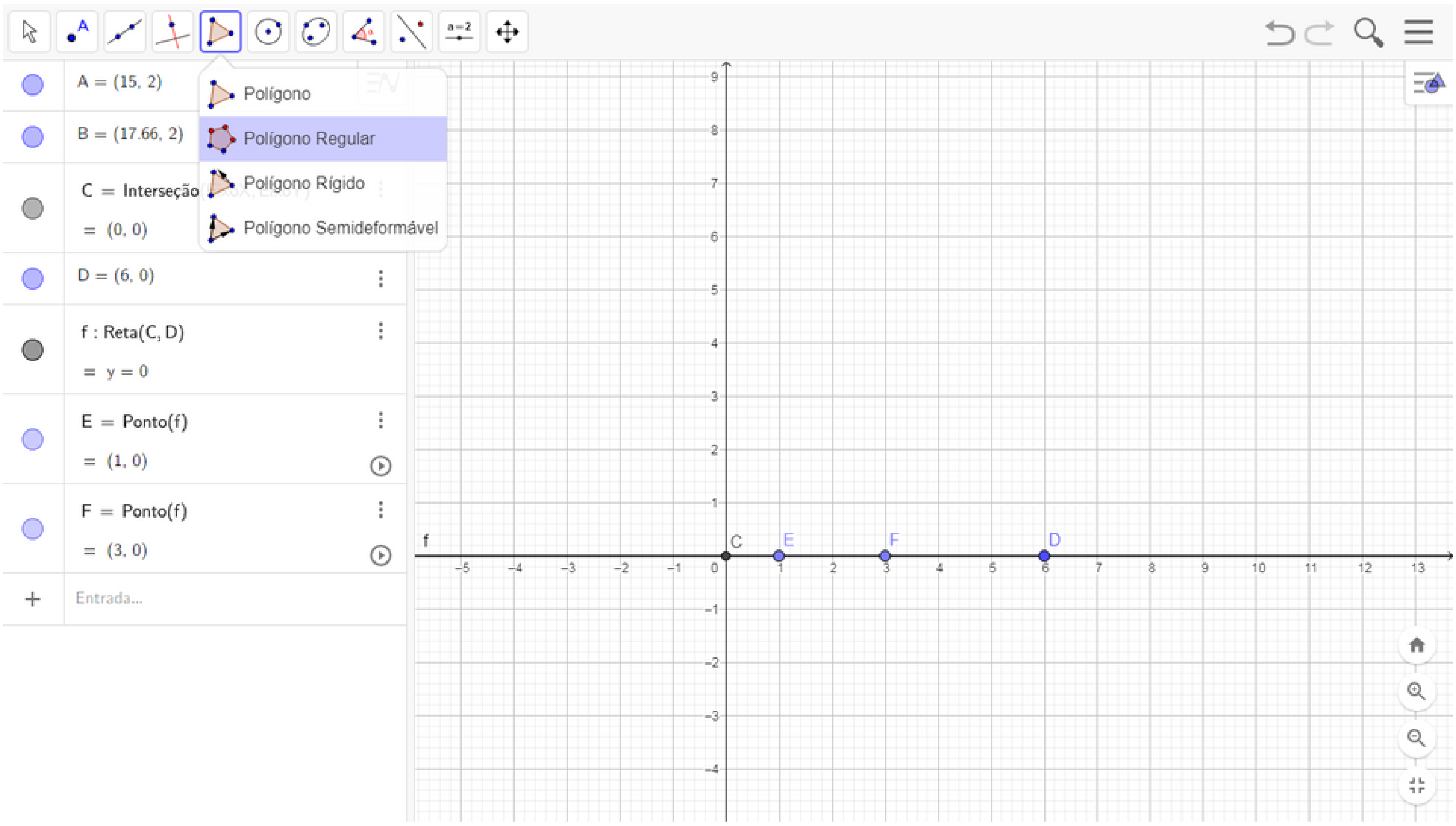
Sobre a reta que criamos, marcaremos dois pontos.



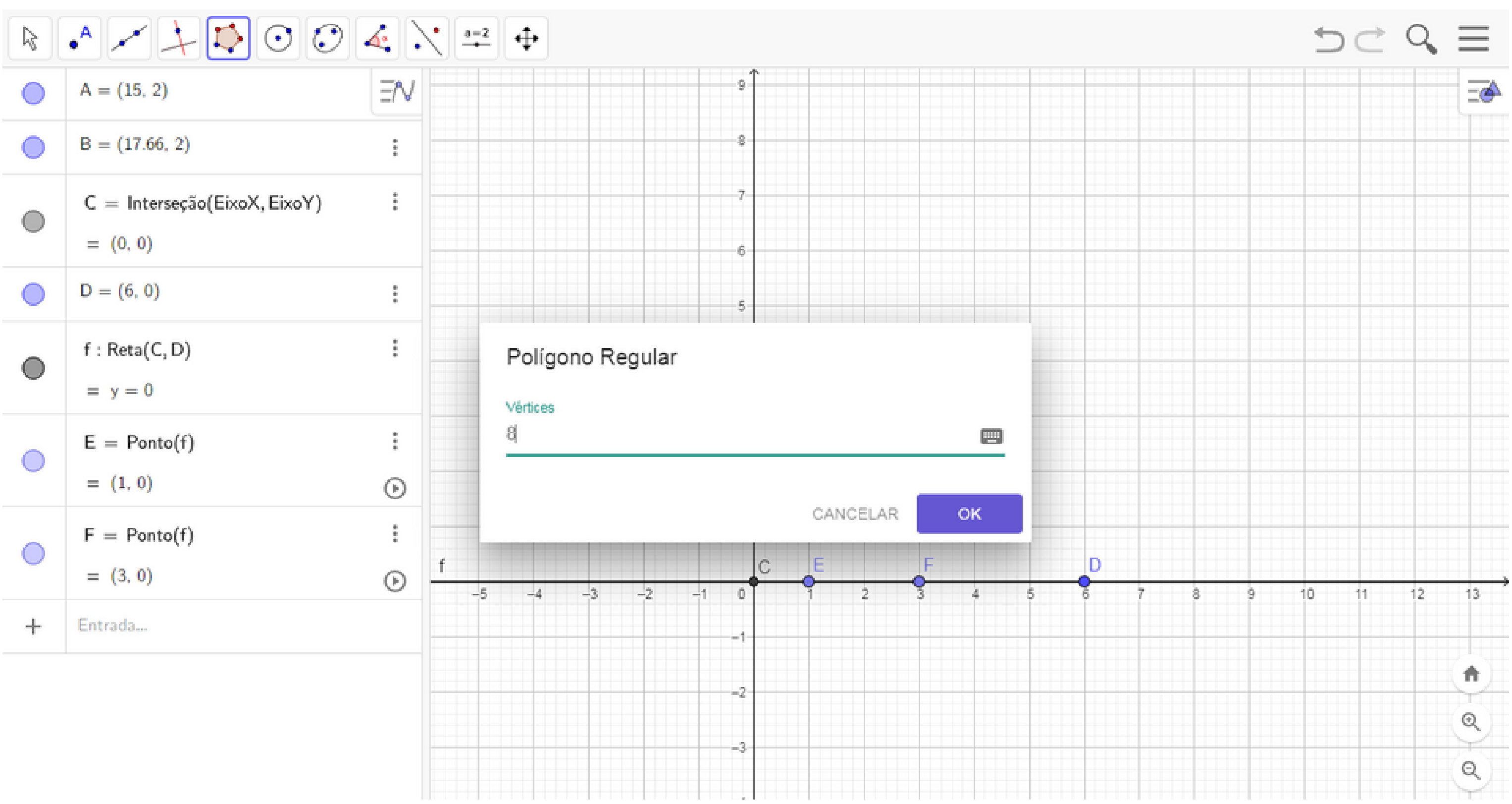
Os pontos gerados são E e F, usando a ferramenta polígono regular, desenharemos um polígono passando por esses pontos (isso é importante).



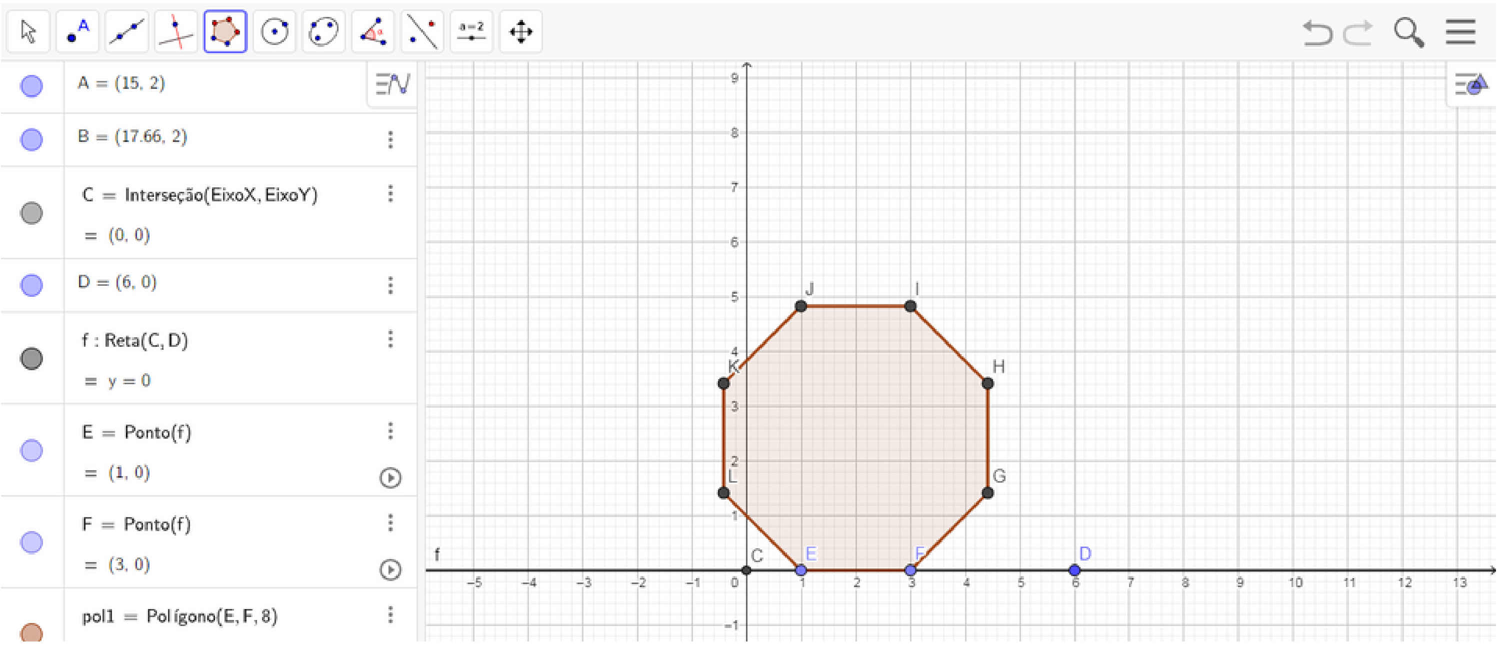
A ferramenta que usaremos para construir o polígono é polígono regular.



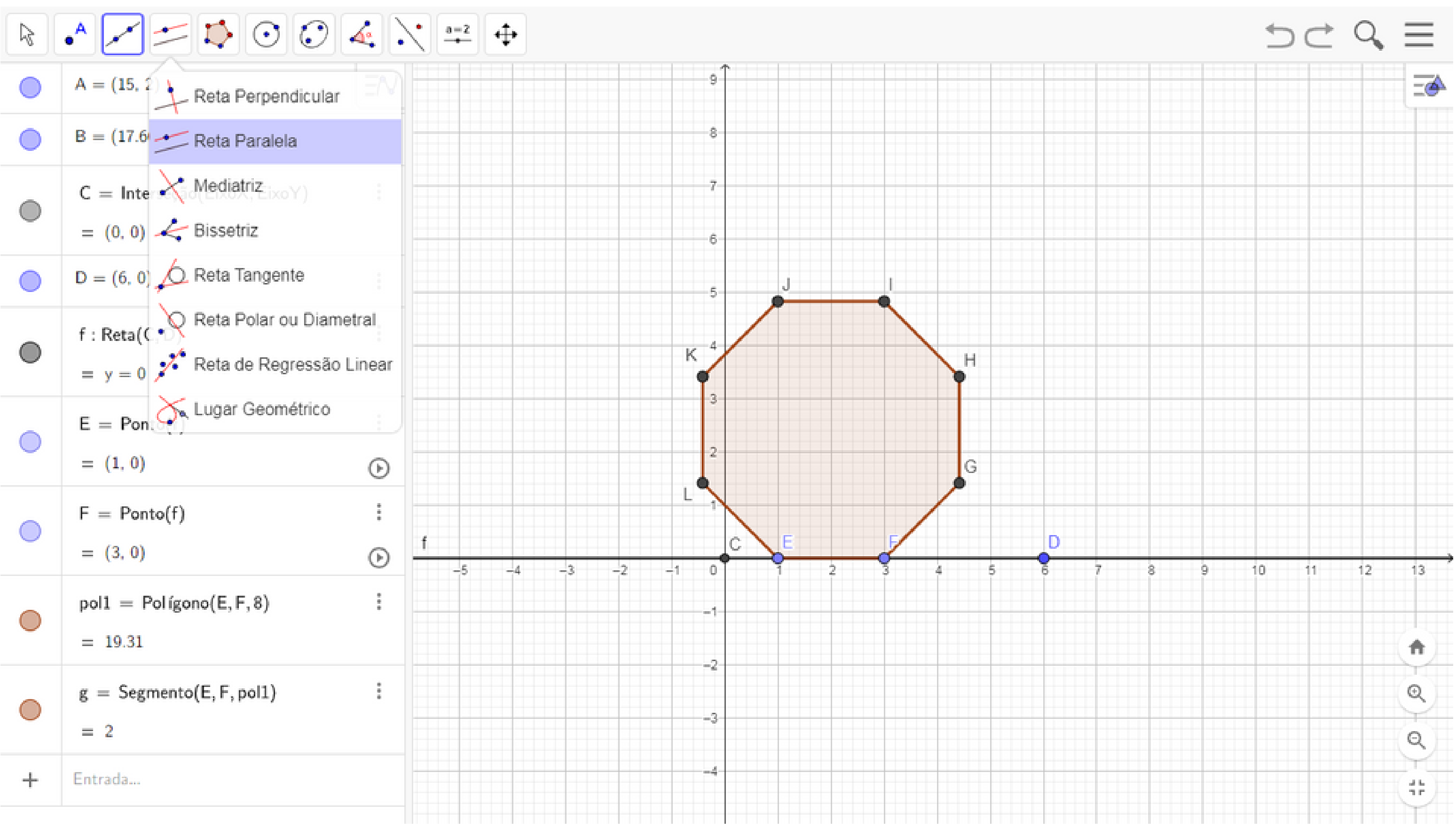
Nessa caixa de entrada digitaremos 8 é o número de lados pedido pelo exercício.



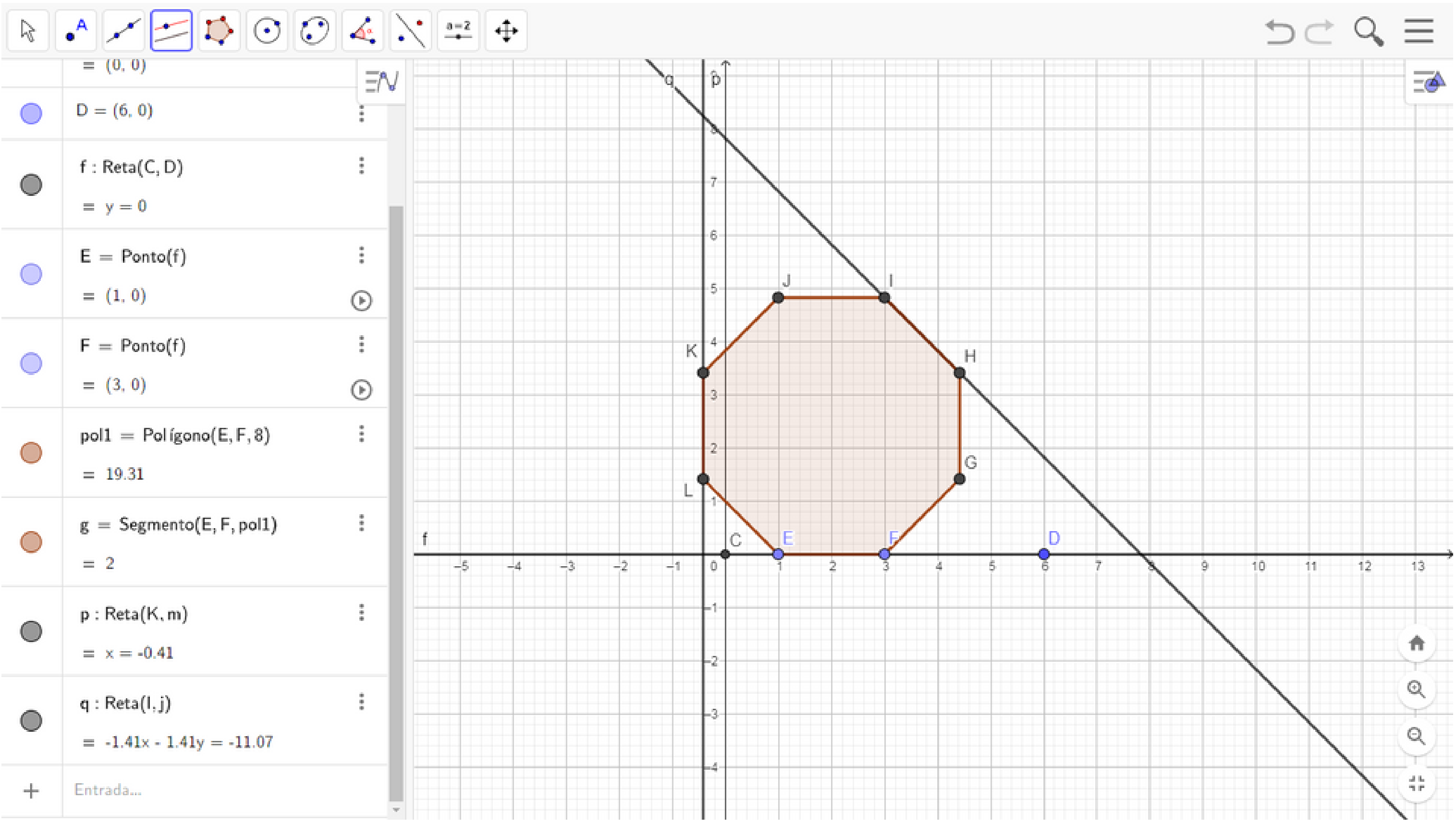
A sua figura deverá ficar semelhante a da figura abaixo.



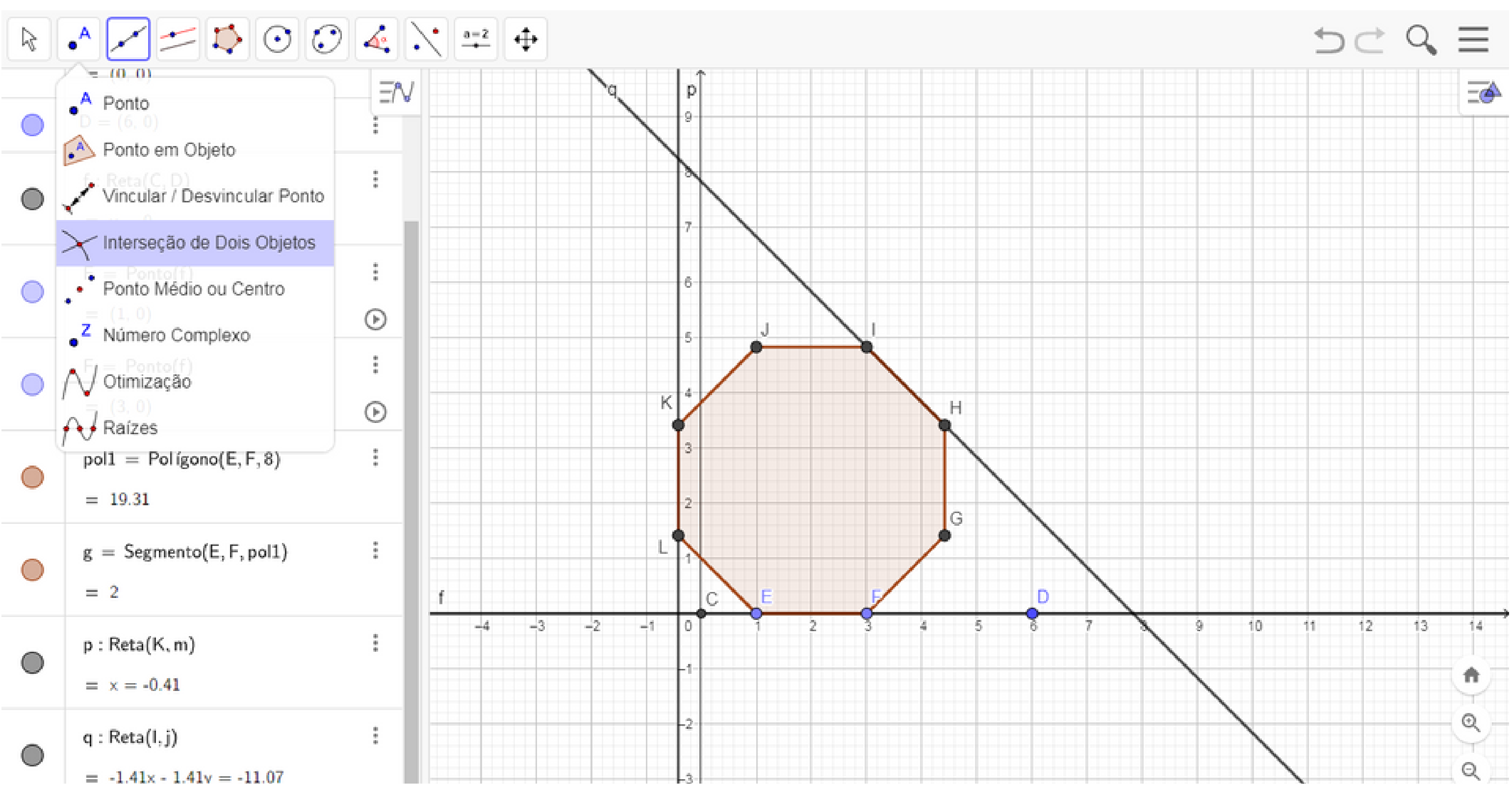
O próximo passo é traçar uma reta paralela passando pelos pontos K e L, e H e G.

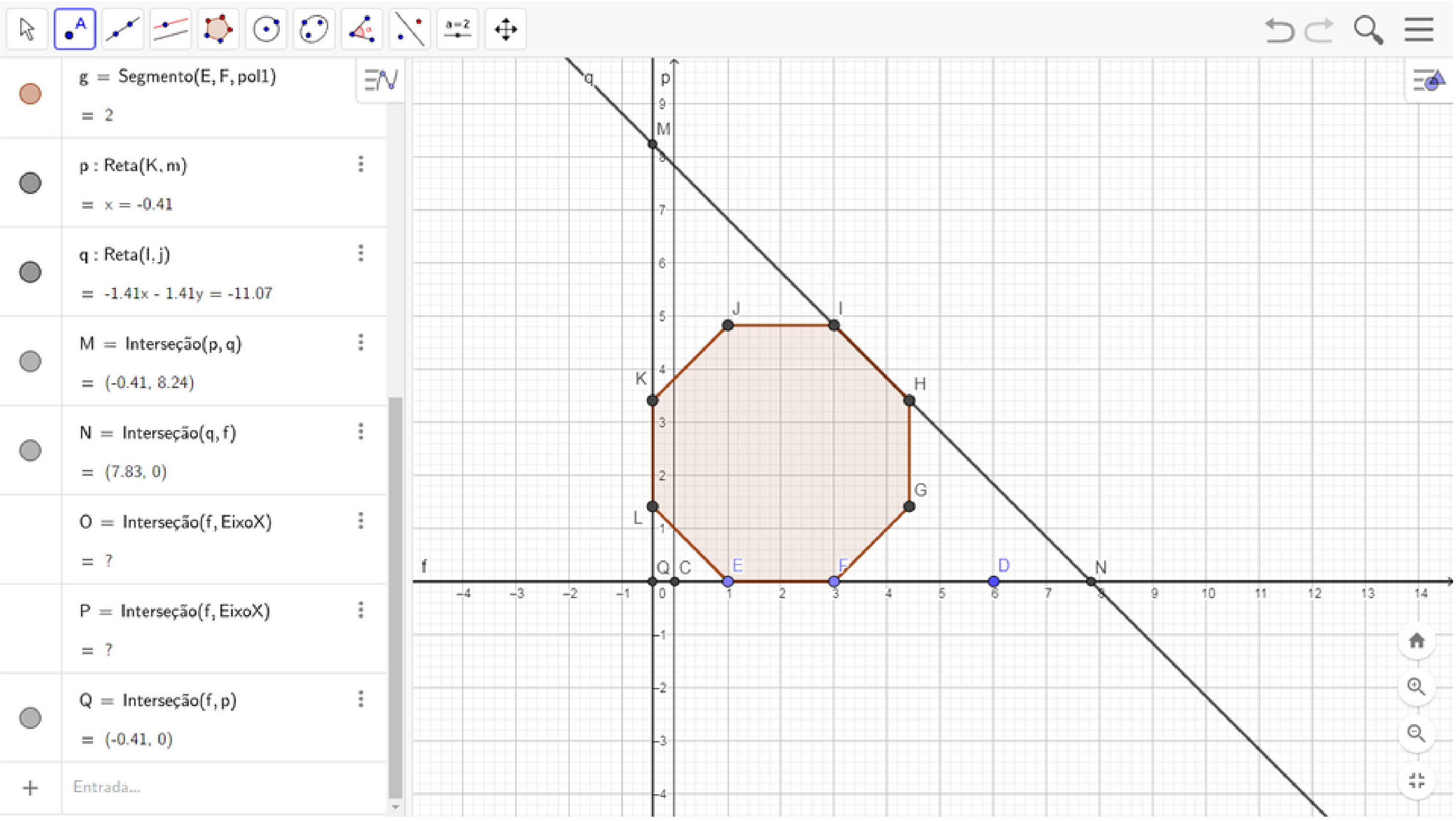


Pronto, sem erros teremos a figura abaixo.

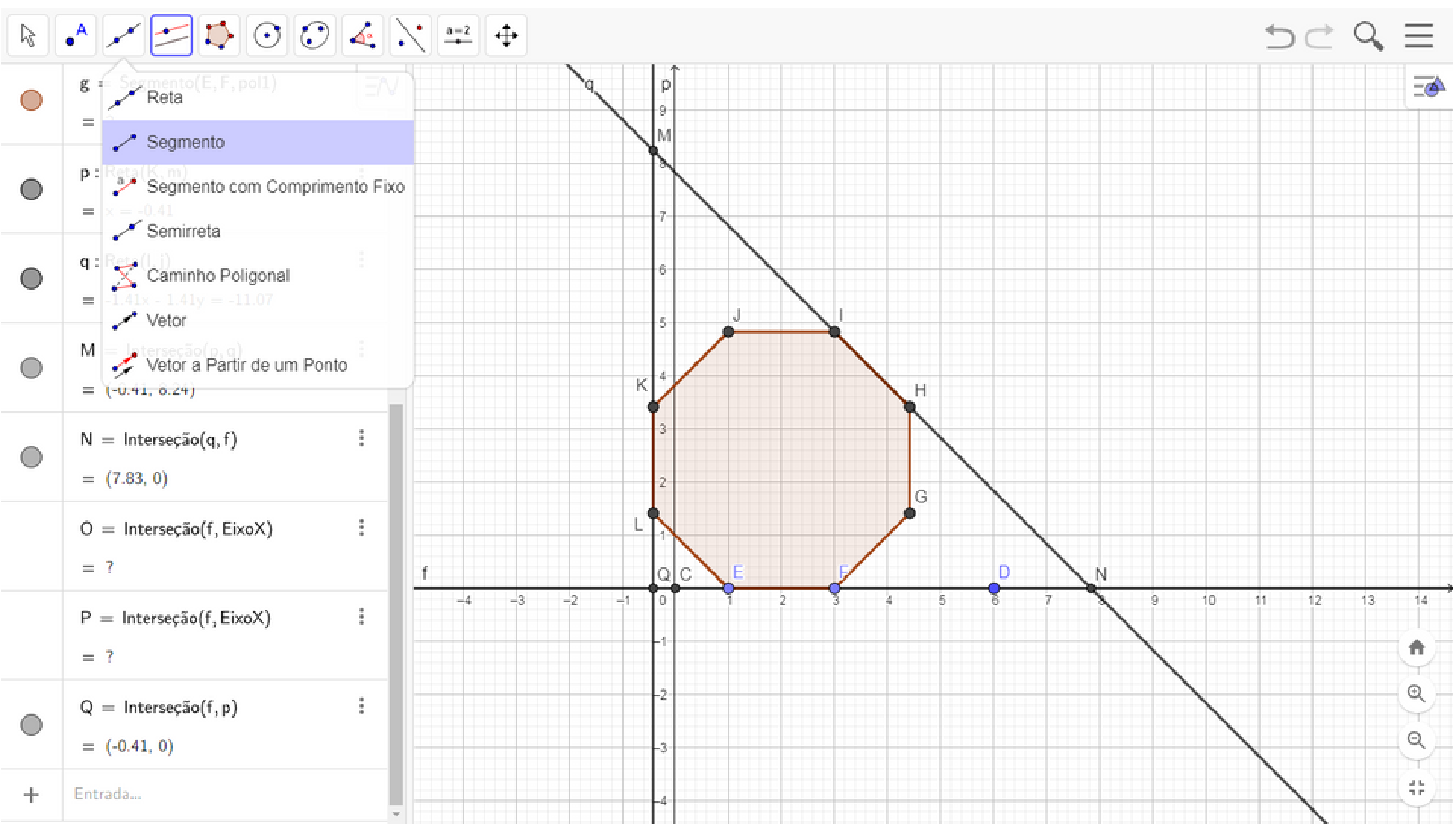


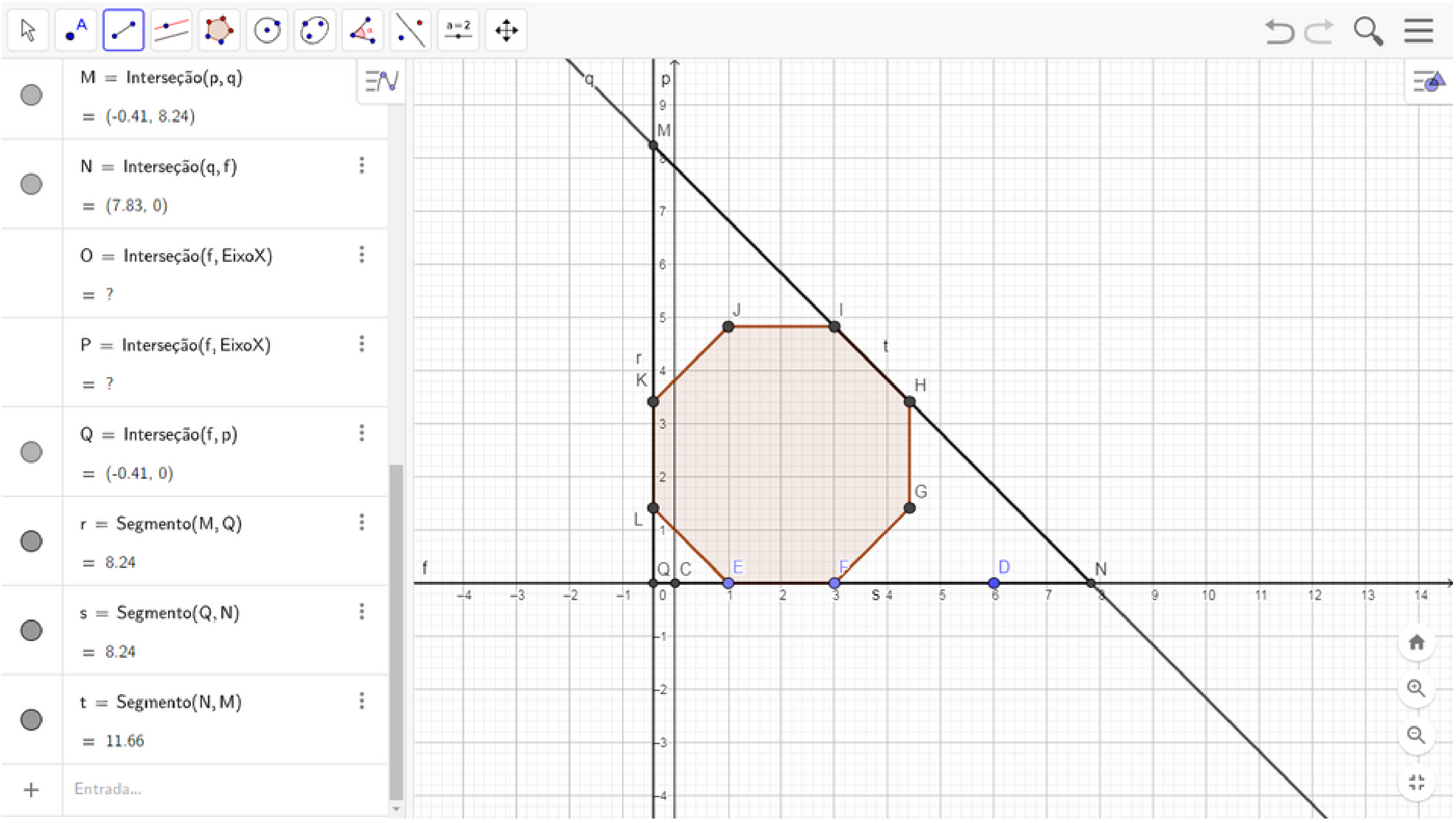
Marcaremos a interseção entre essas retas, usando a ferramenta Interseção entre dois Objetos, é porque o objetivo é ocultar essas retas e traçar segmentos para determinar o triângulo.



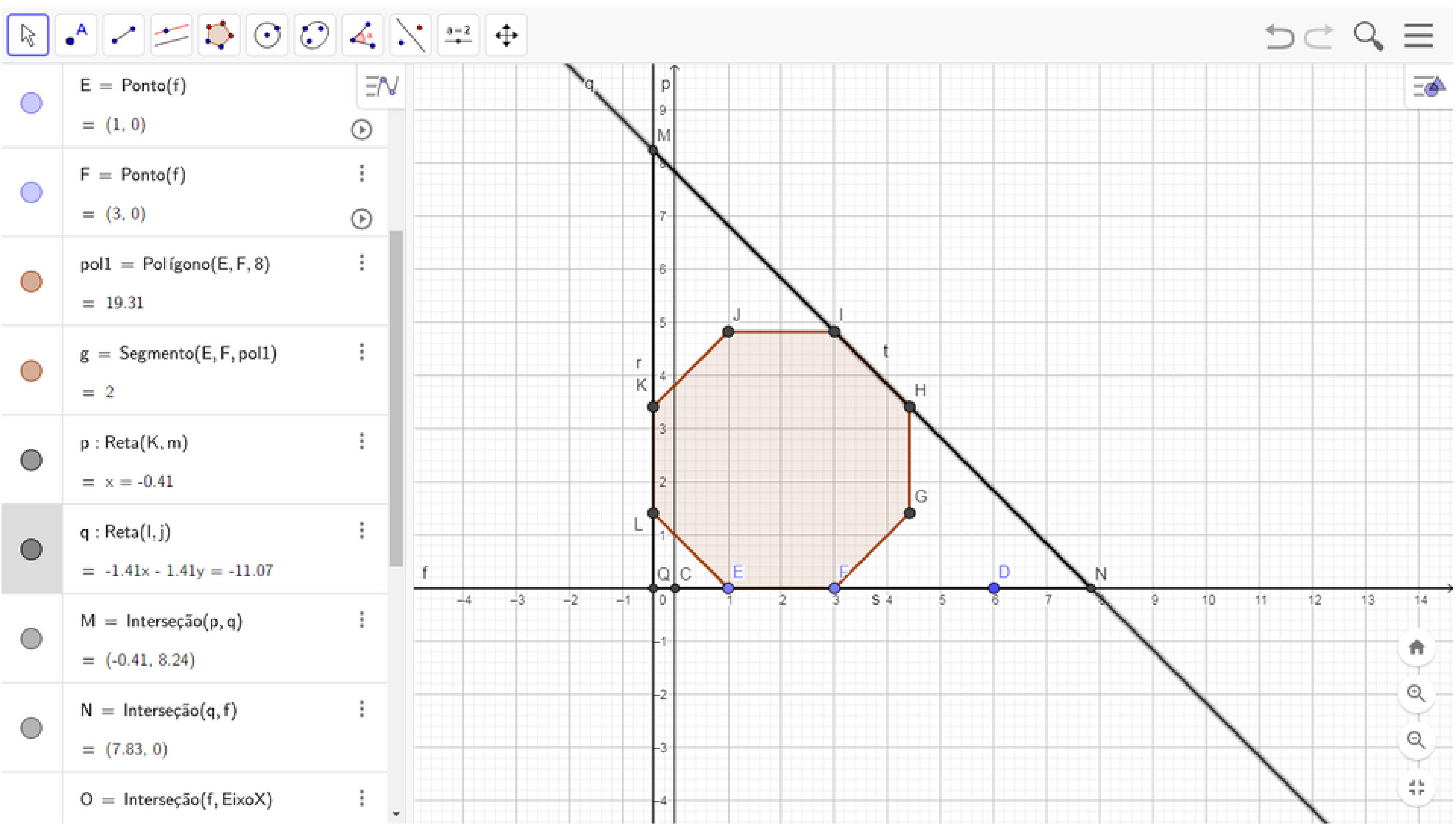


Seguindo, determinaremos os segmentos ligando os pontos M e N, Q e N, e M e Q.

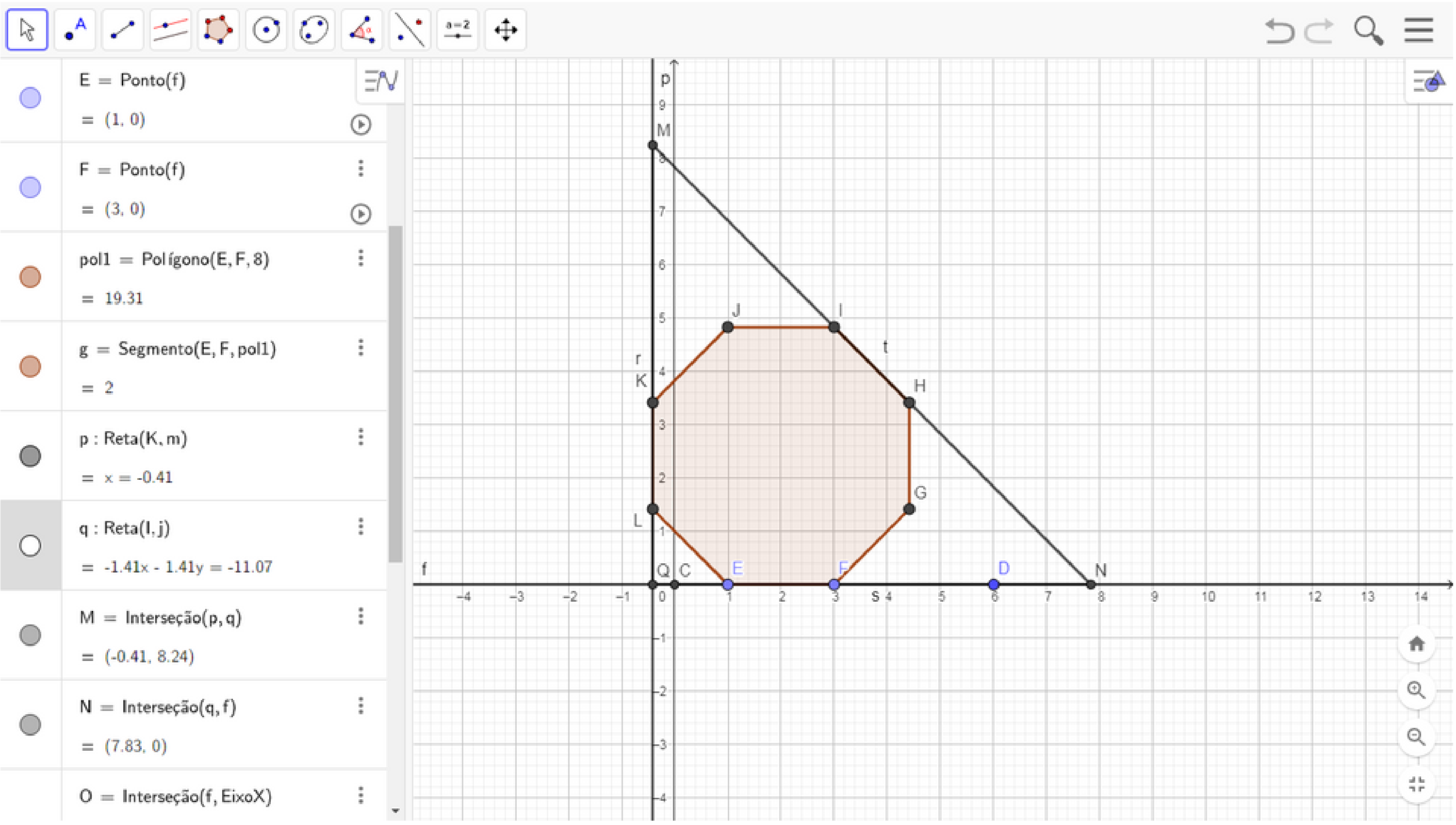




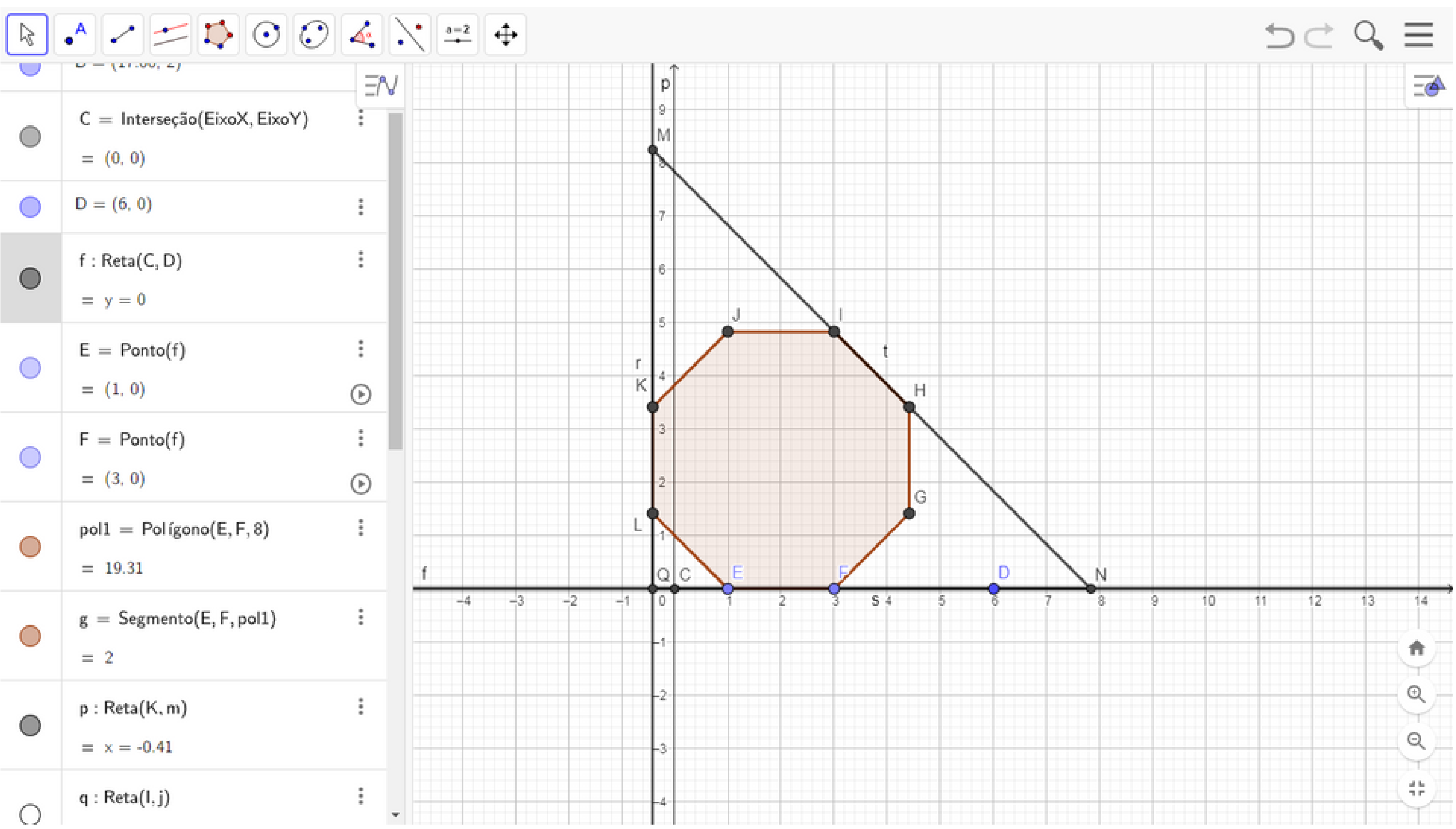
Como citamos anteriormente, deveremos ocultar as retas, clicando na bolinha na caixa de entrada, correspondente ao nome da reta.

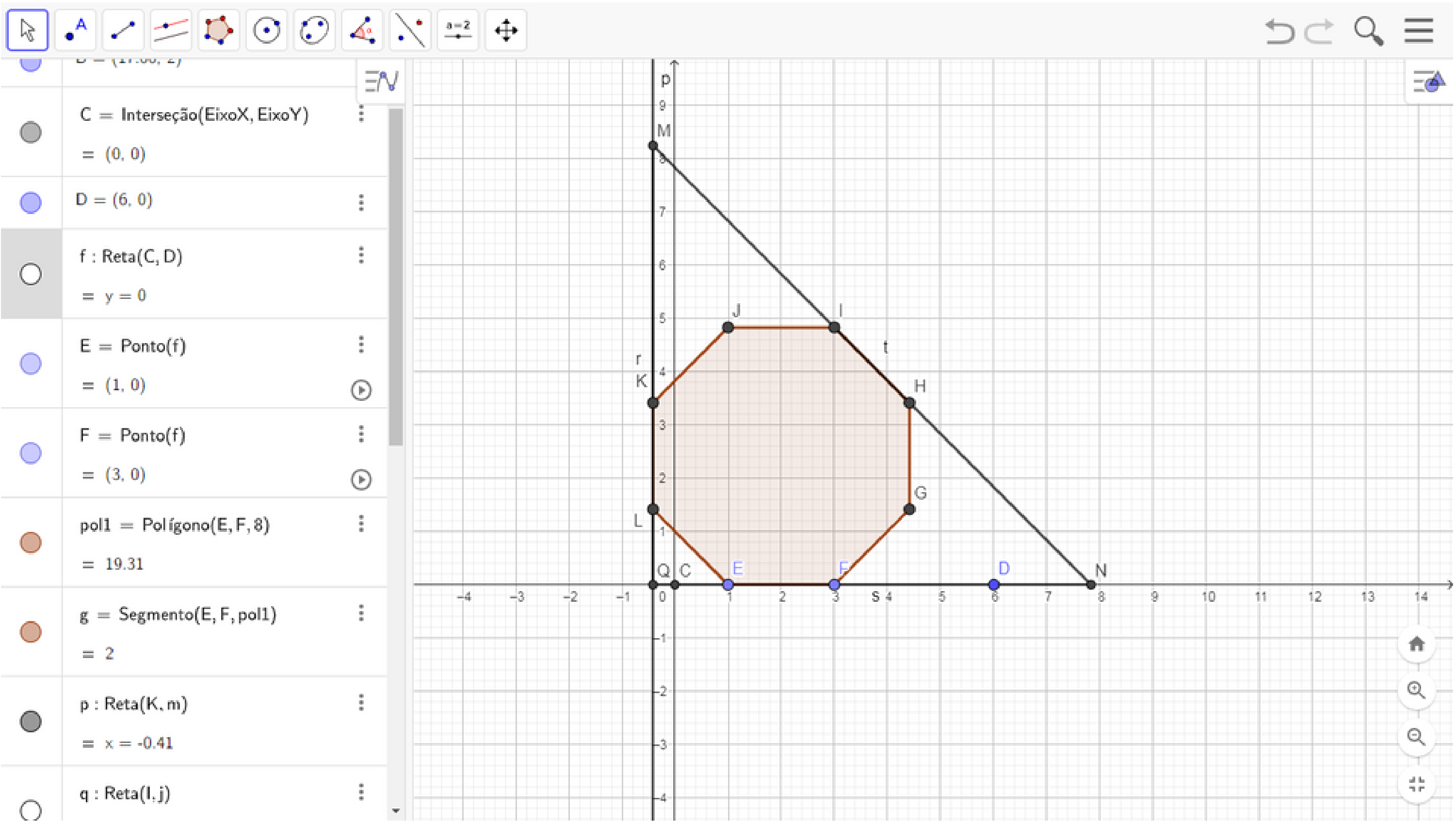


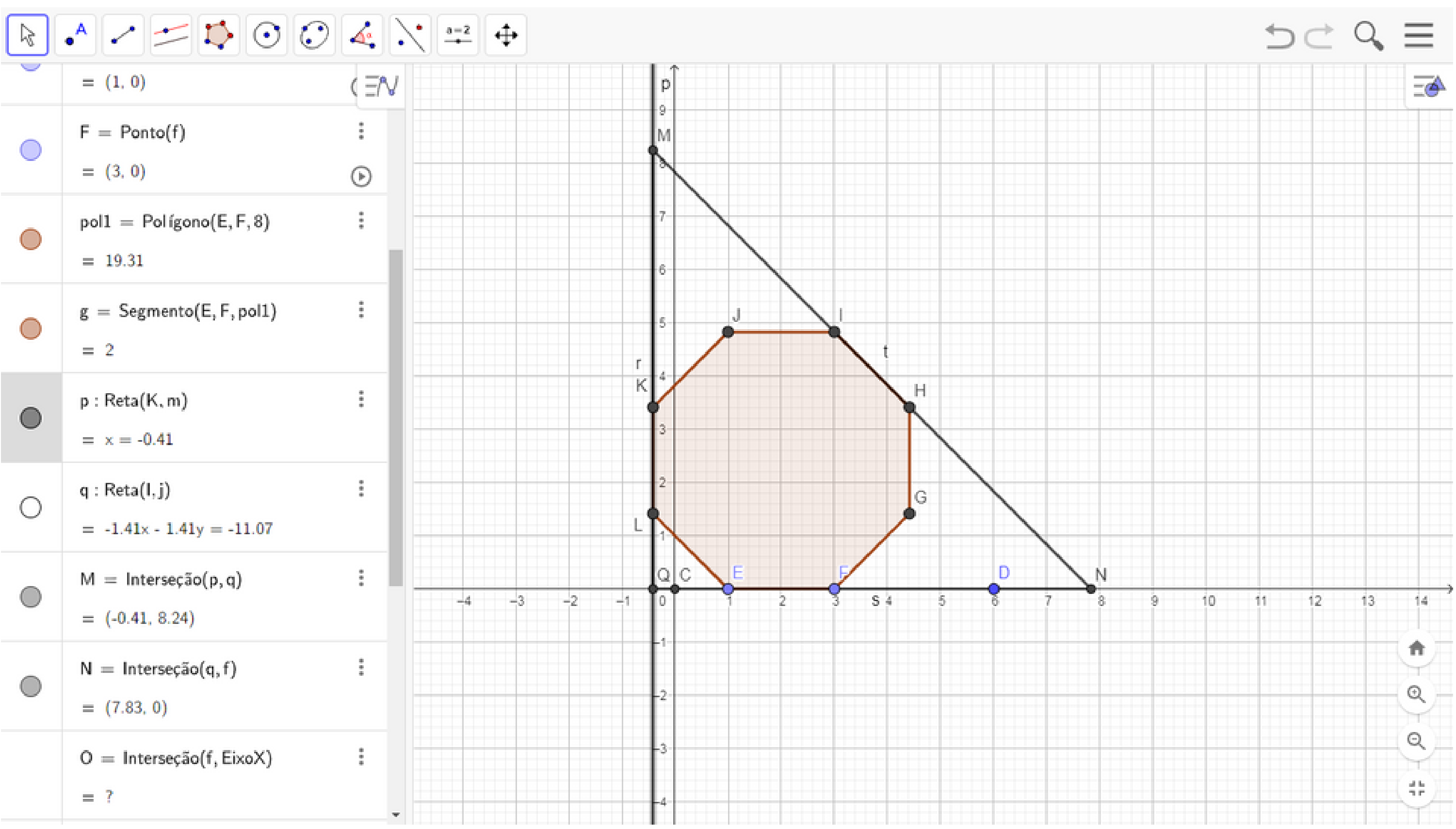
Veja que ao clicar, a bolinha fica na cor branca, indicando que a reta está oculta.



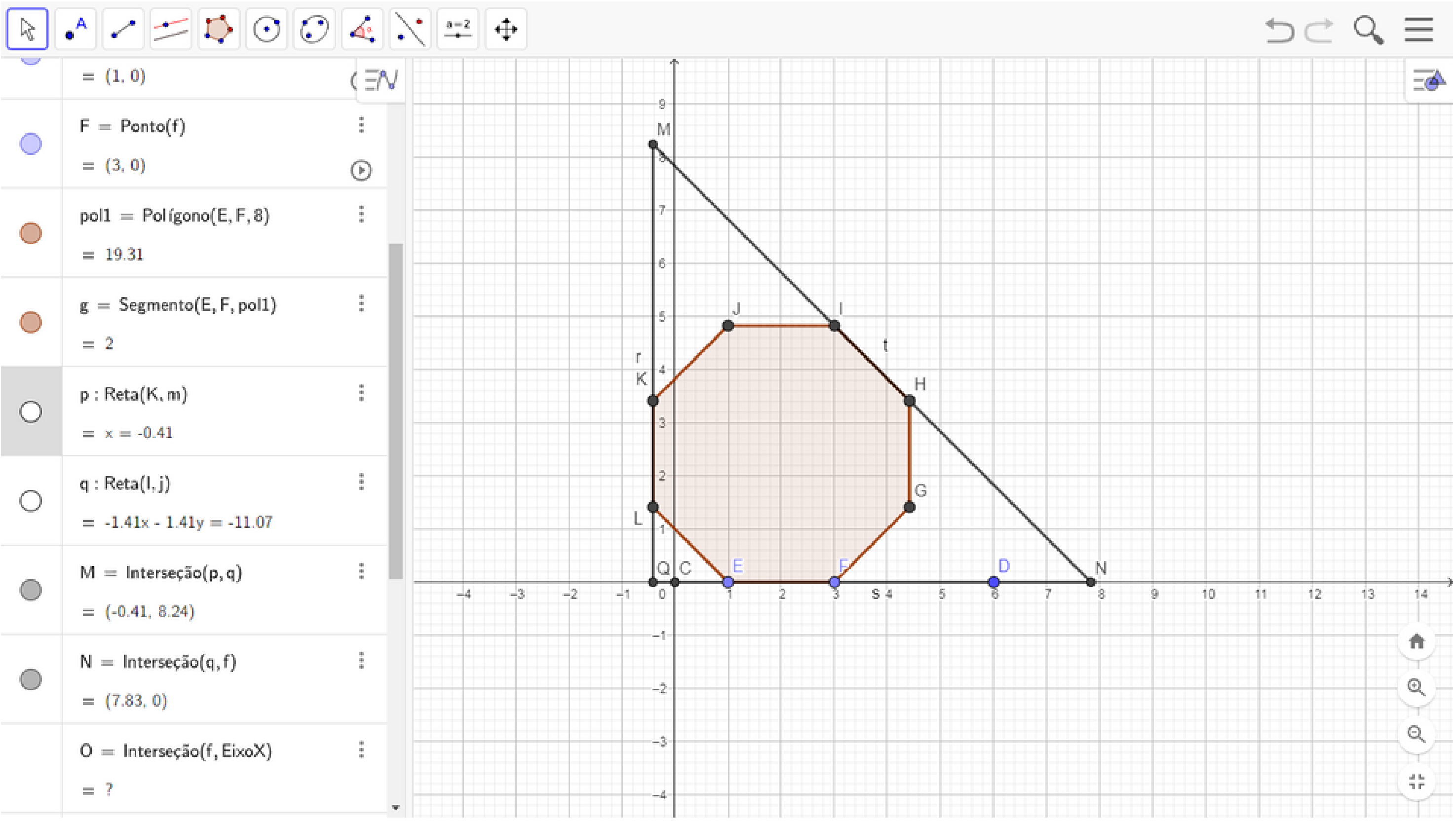
Repetiremos esse procedimento com a reta f, r e p..



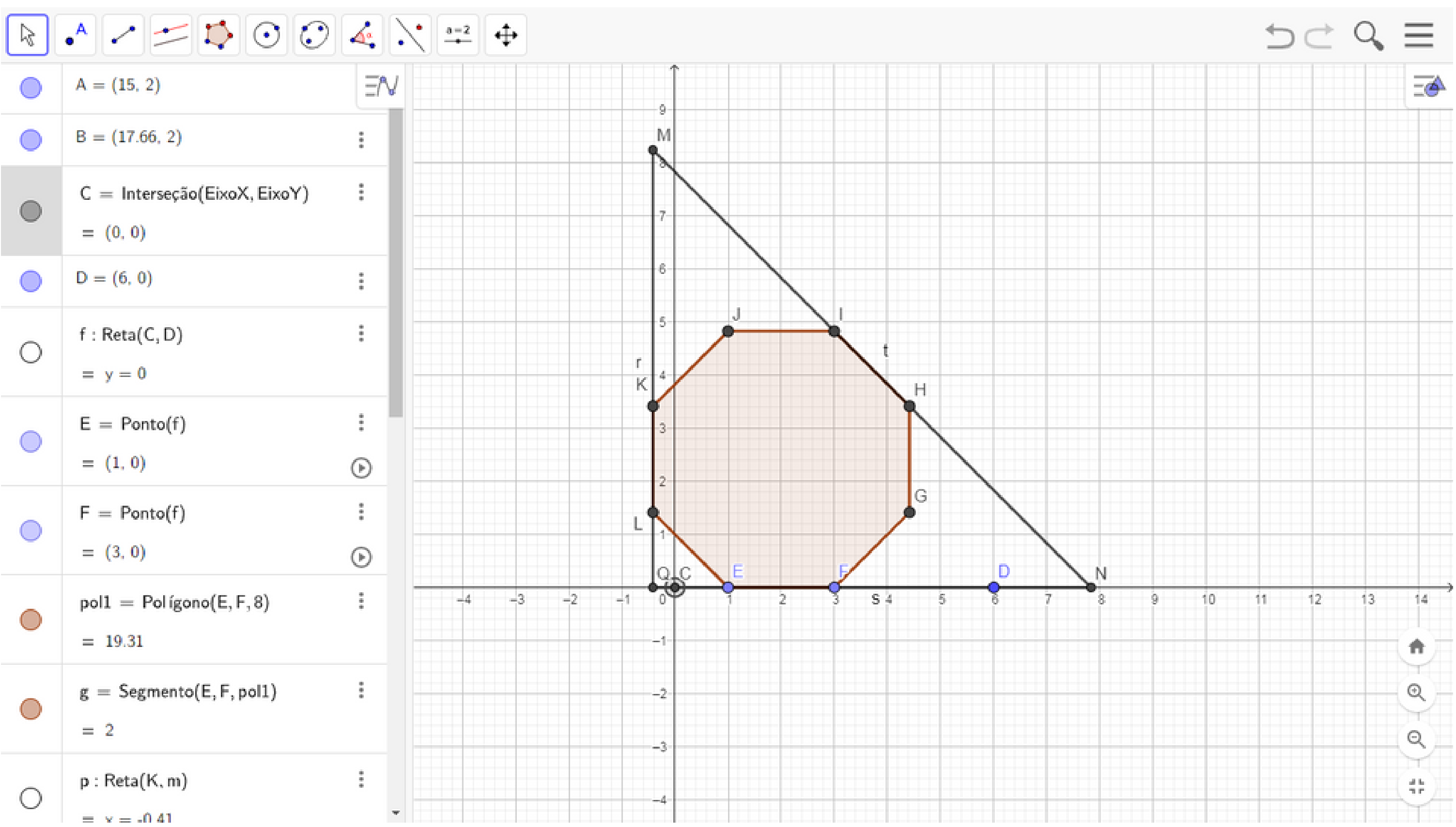

C = Interseção(EixoX, EixoY)
= (0, 0)
D = (6, 0)
f : Reta(C, D)
= y = 0
E = Ponto(f)
= (1, 0)
F = Ponto(f)
= (3, 0)
pol1 = Polígono(E, F, 8)
= 19.31
g = Segmento(E, F, pol1)
= 2
p : Reta(K, m)
= x = -0.41
q : Reta(I, j)

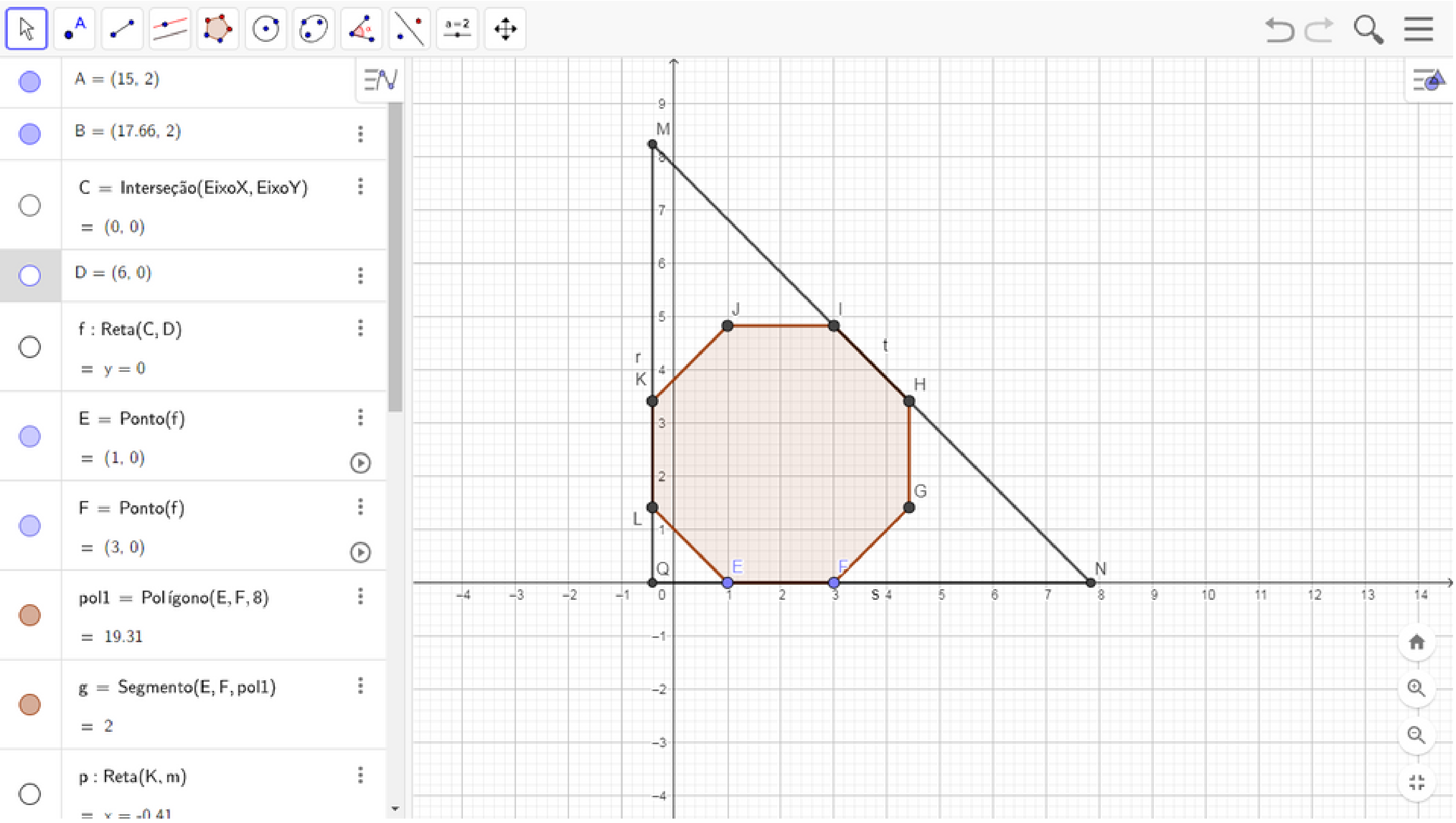

= (1, 0)
F = Ponto(f)
= (3, 0)
pol1 = Polígono(E, F, 8)
= 19.31
g = Segmento(E, F, pol1)
= 2
p : Reta(K, m)
= x = -0.41
q : Reta(I, j)
= -1.41x - 1.41y = -11.07
M = Interseção(p, q)
= (-0.41, 8.24)
N = Interseção(q, f)
= (7.83, 0)
O = Interseção(f, EixoX)
= ?

Pronto, temos o triângulo retângulo e o polígono.

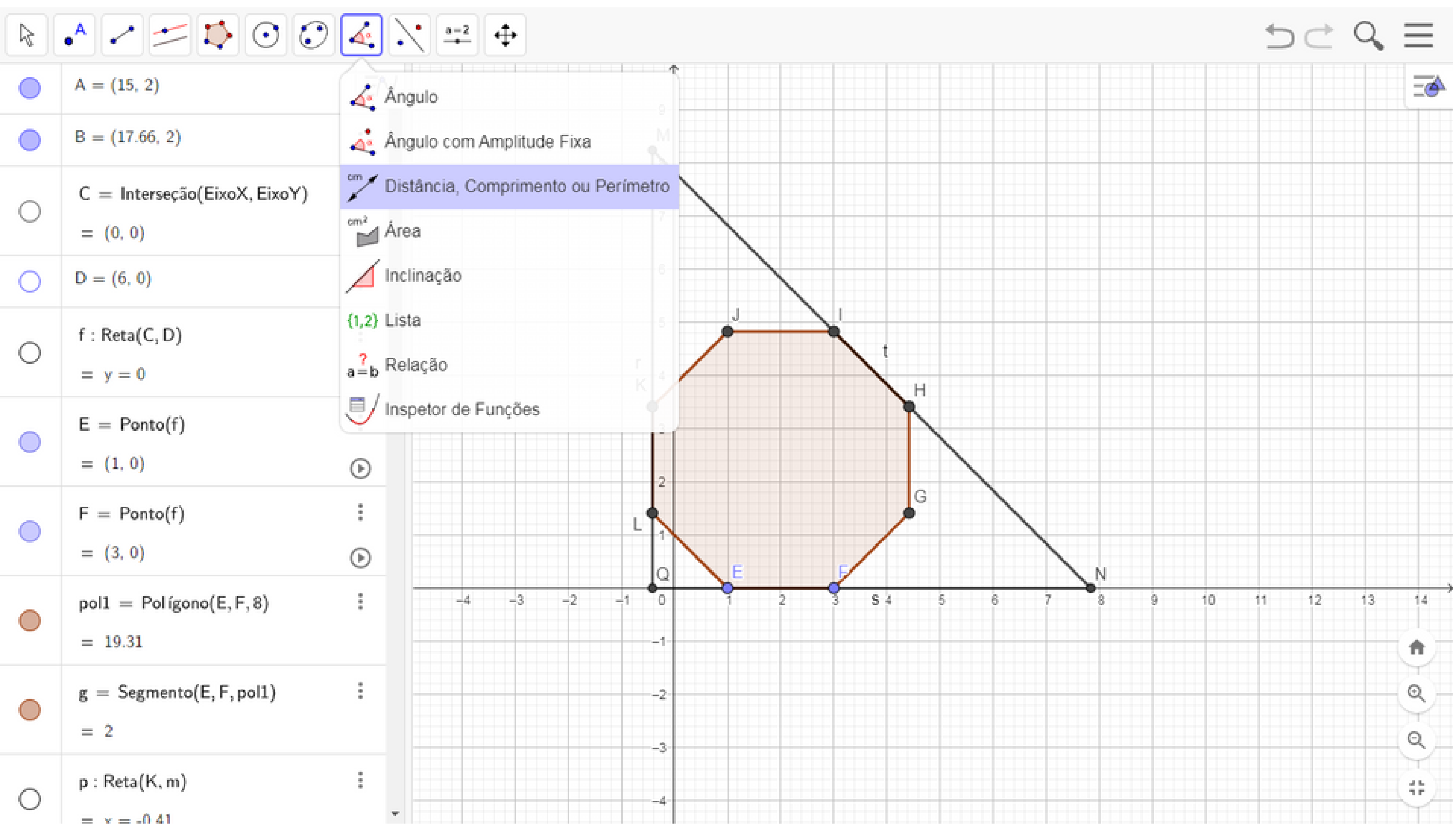


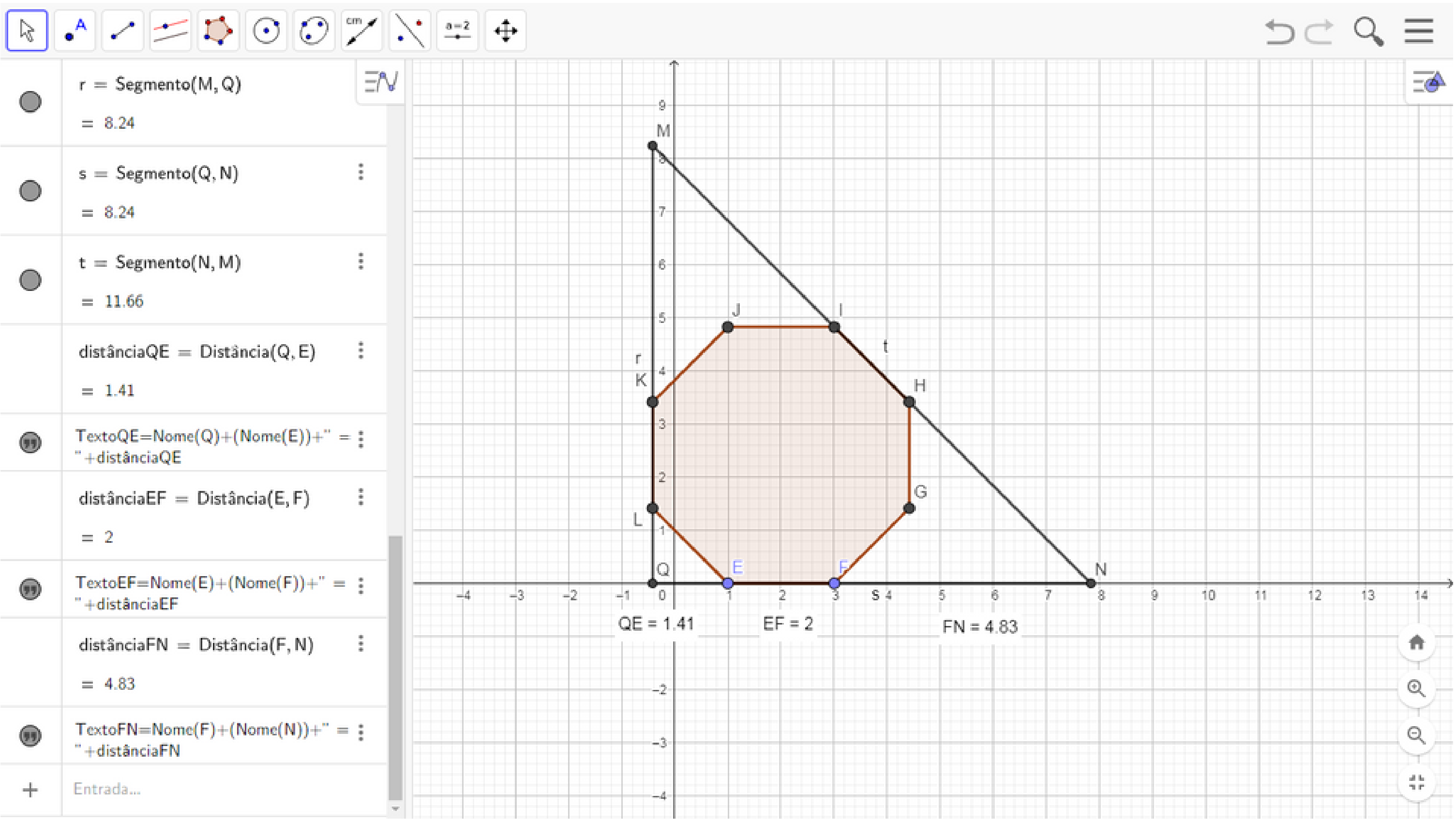
Ocultaremos os pontos C e D, para uma melhor visualização do exercício.



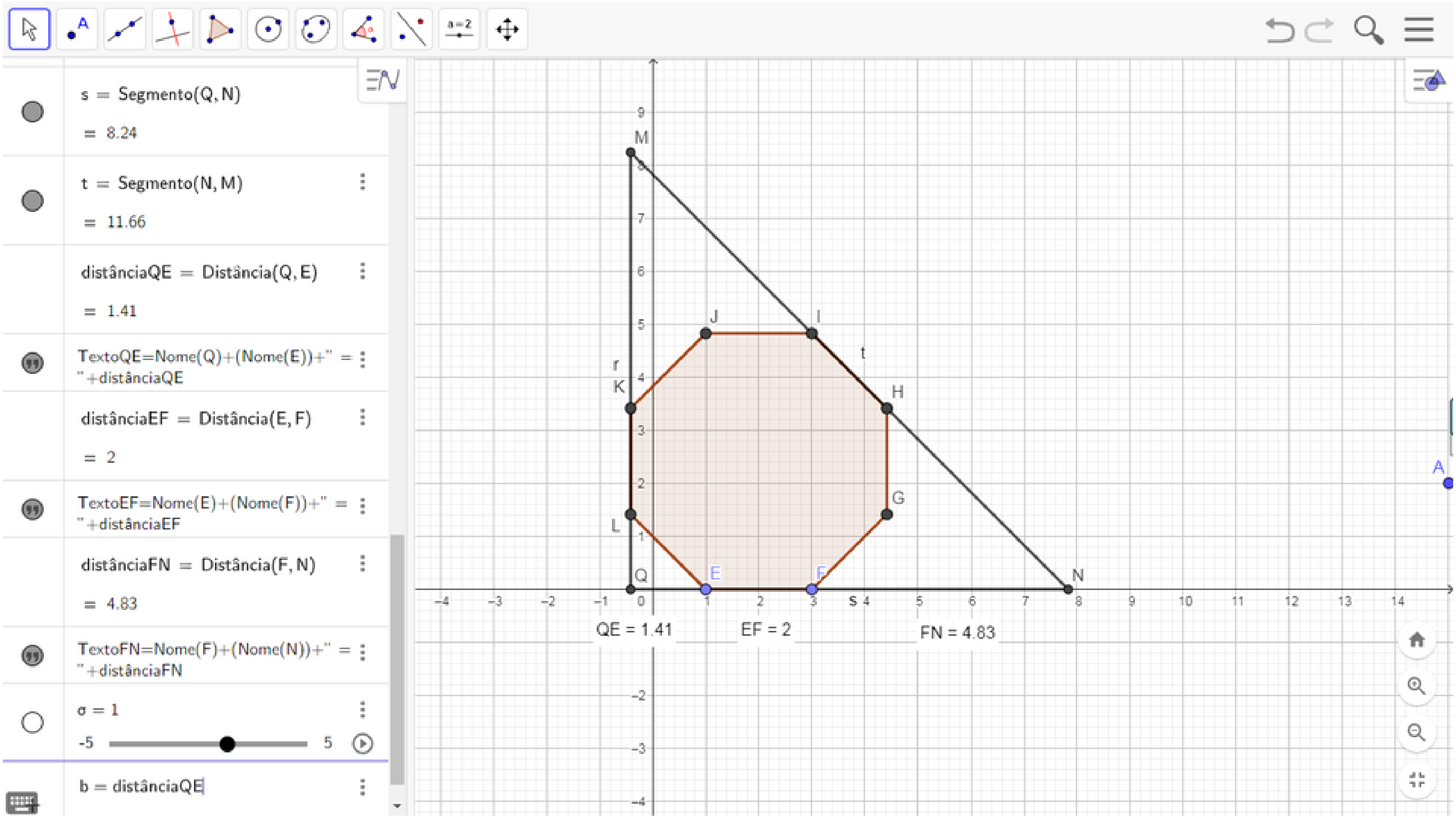


Agora partiremos para determinar a medida dos segmentos, usando a ferramenta distância, comprimento e perímetro.

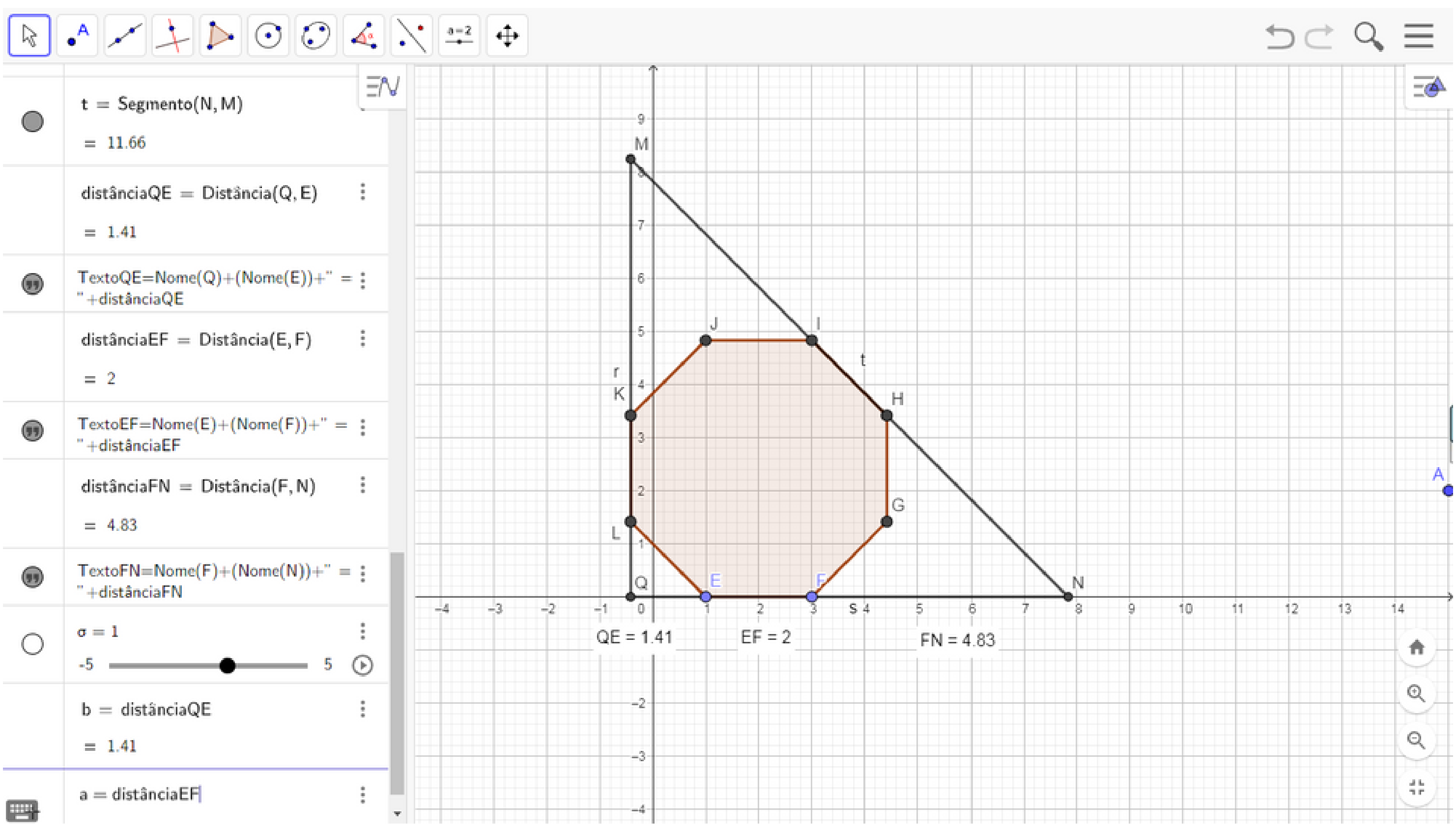



r = Segmento(M, Q)
= 8.24
s = Segmento(Q, N)
= 8.24
t = Segmento(N, M)
= 11.66
distânciaQE = Distância(Q, E)
= 1.41
TextoQE=Nome(Q)+(Nome(E))+" = "+distânciaQE
distânciaEF = Distância(E, F)
= 2
TextoEF=Nome(E)+(Nome(F))+" = "+distânciaEF
distânciaFN = Distância(F, N)
= 4.83
TextoFN=Nome(F)+(Nome(N))+" = "+distânciaFN
Entrada...
QE = 1.41
EF = 2
FN = 4.83

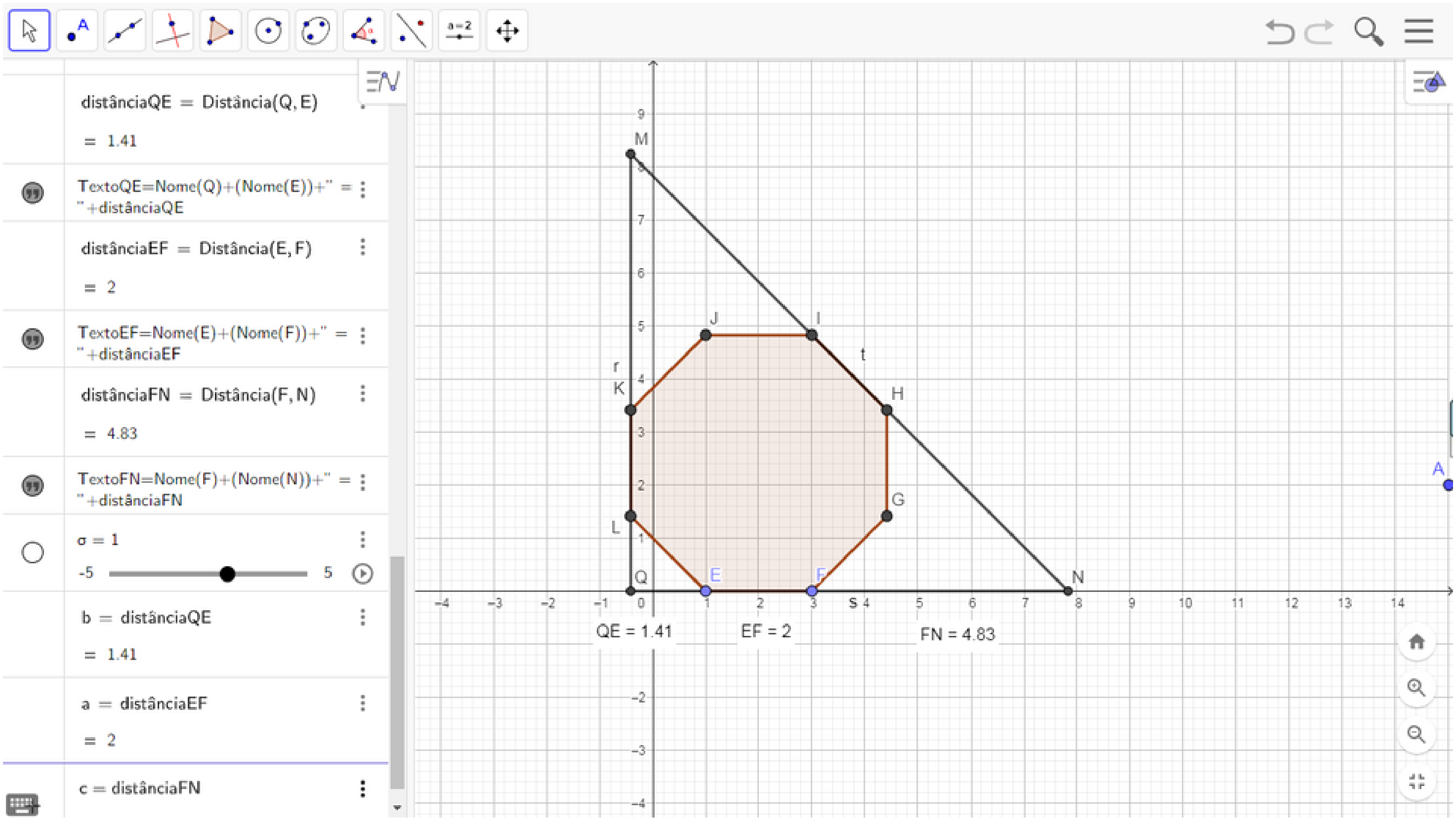
Observe só: Na caixa de entrada digitaremos b = distânciaQE, isso será último na construção da fórmula, que digitaremos na caixa de texto.



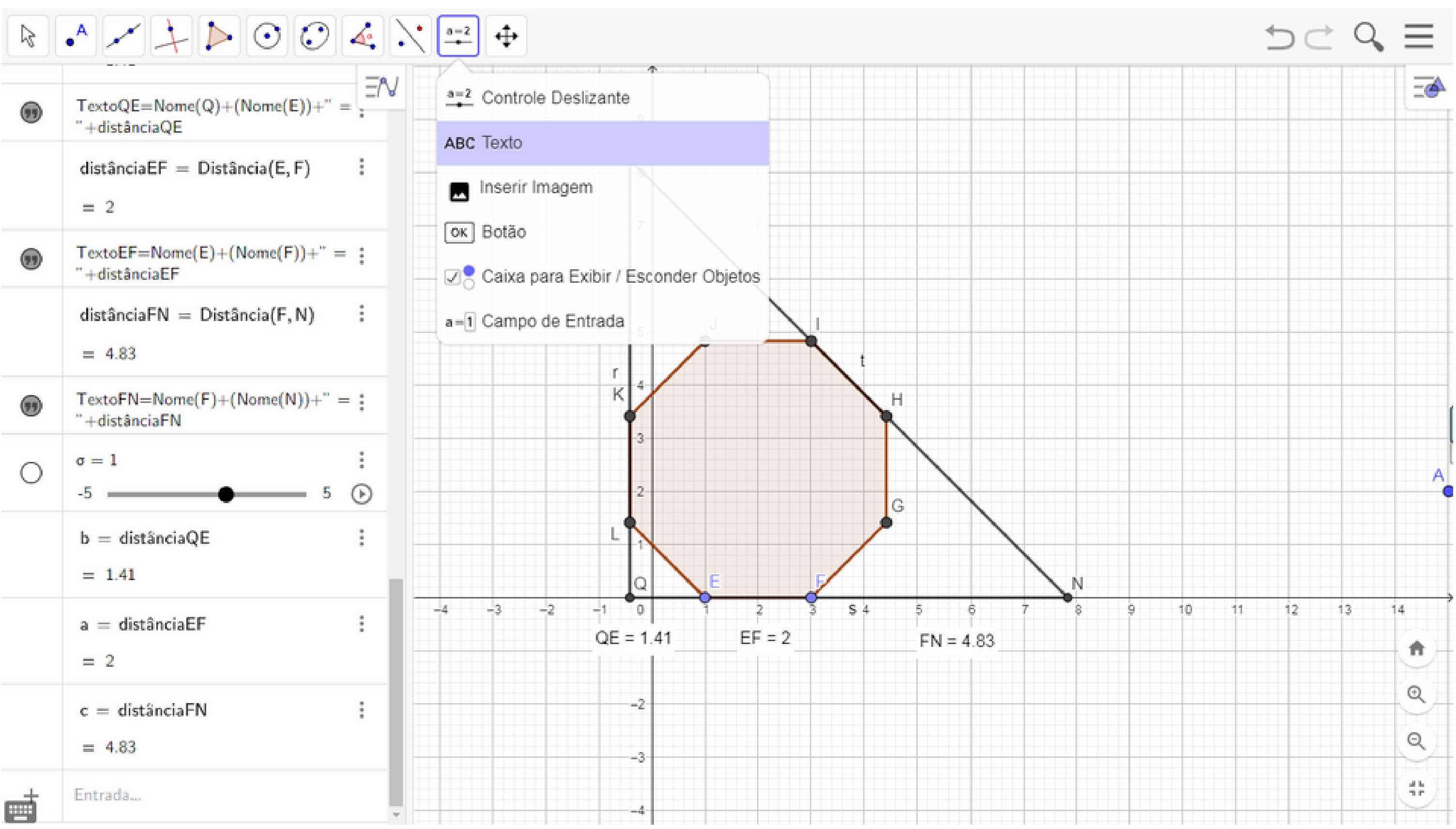
Mais uma vez, na caixa de entrada digitaremos a = distânciaEF.



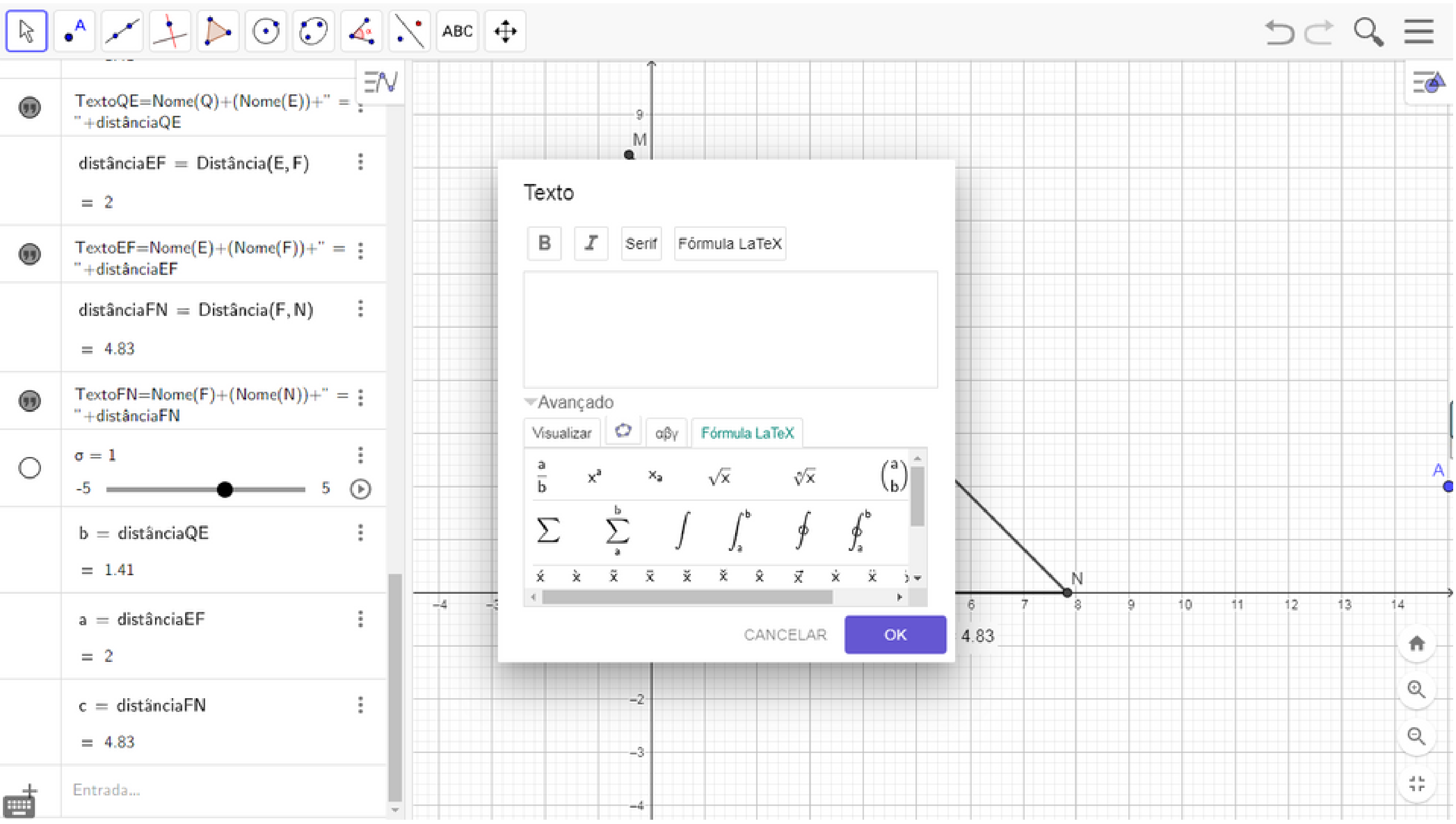
Mais uma vez, na caixa de entrada digitaremos c = distânciaFN.



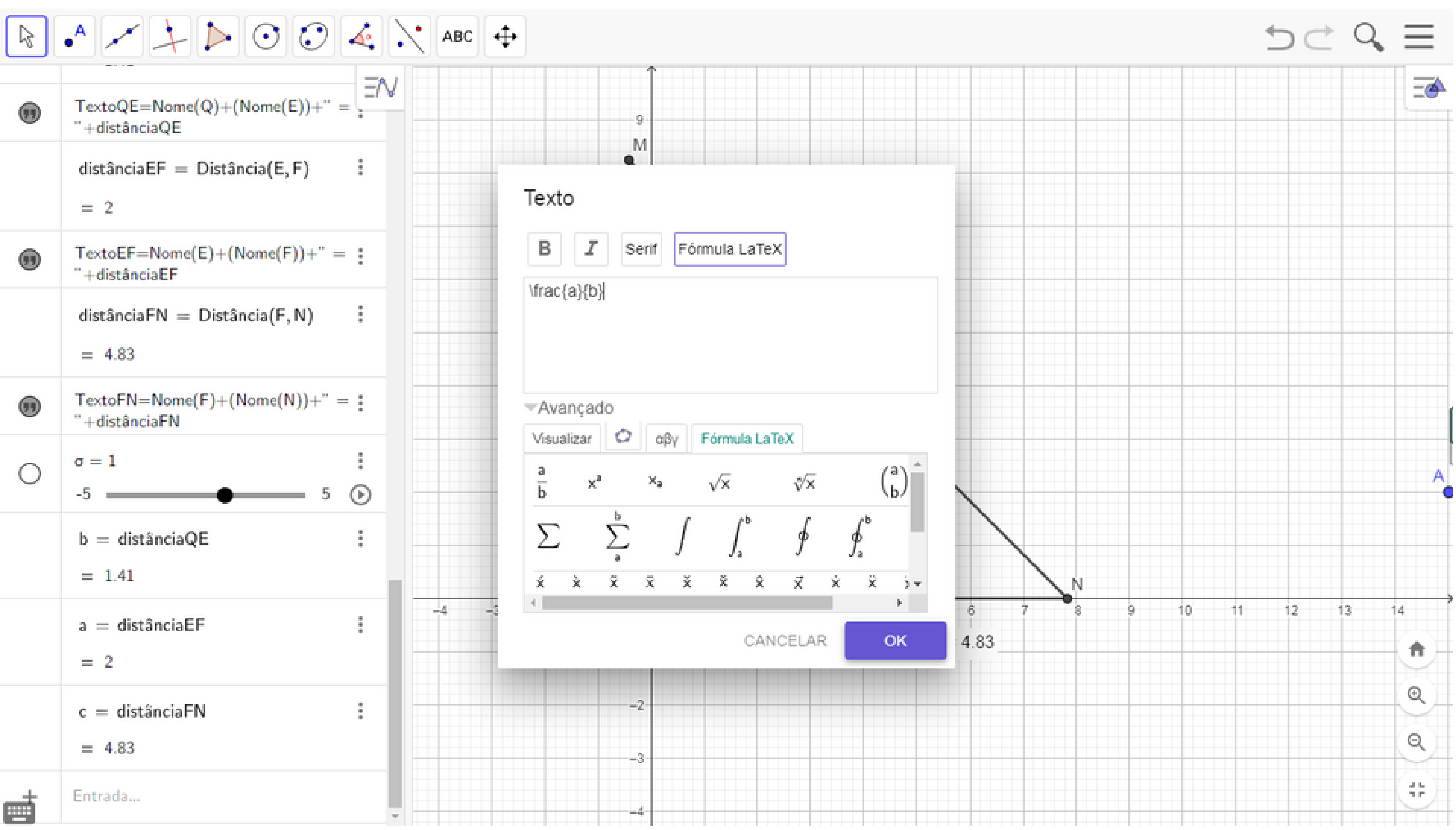
Usaremos ferramenta ABC Texto, para escrever a fórmula.



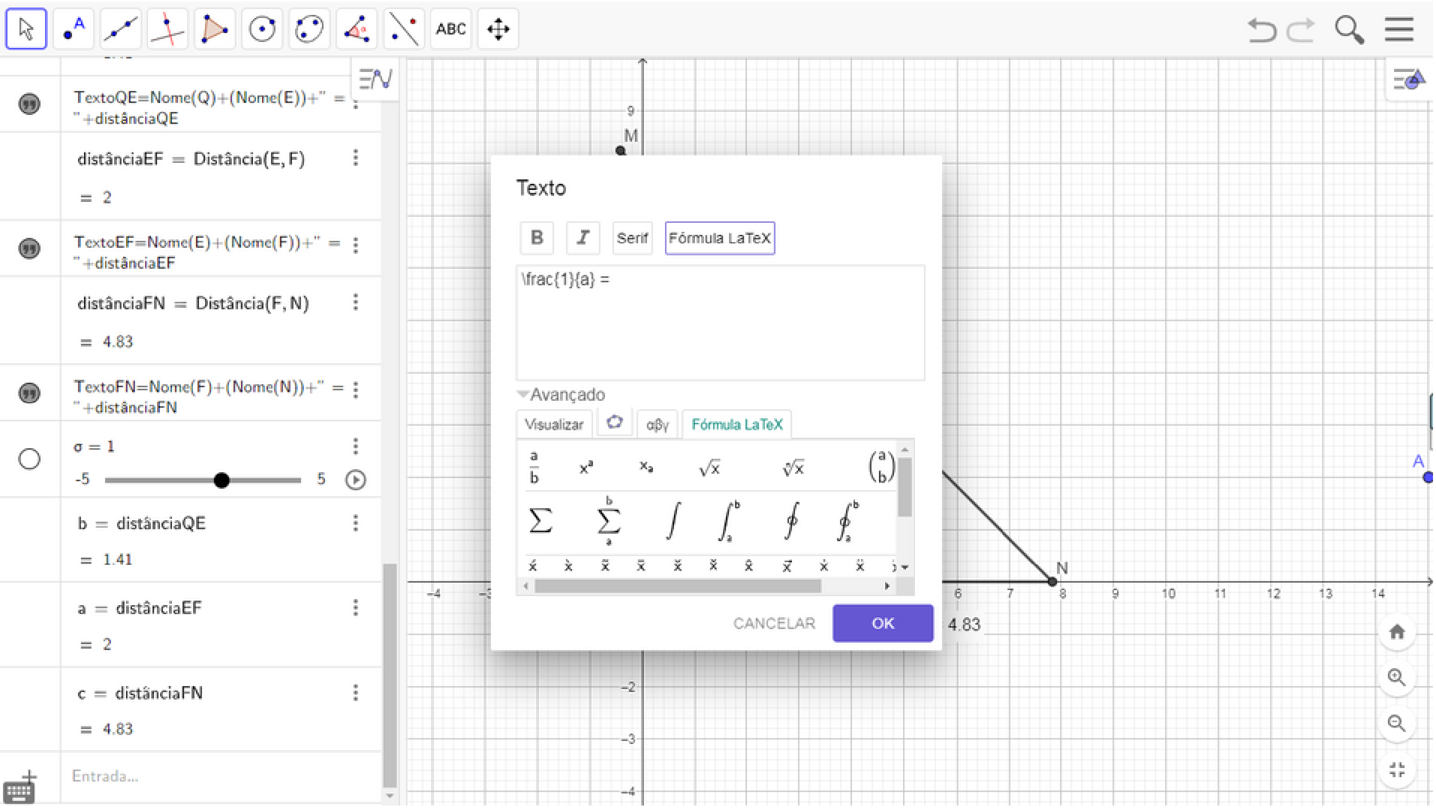
Na aba fórmula LaTex, escolheremos a fórmula correspondente a fração.



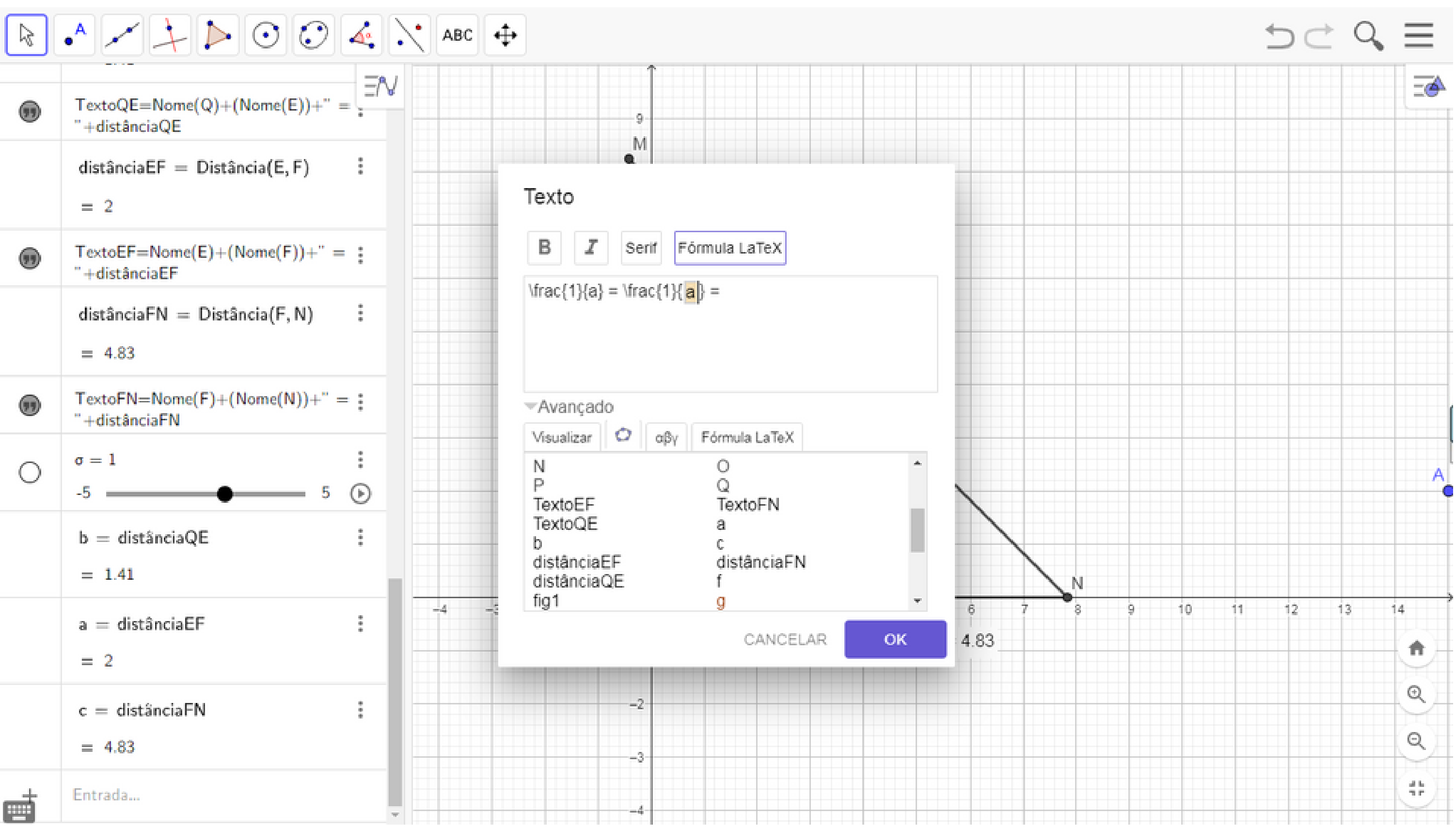
Teremos assim, a fração escrita em LaTex.



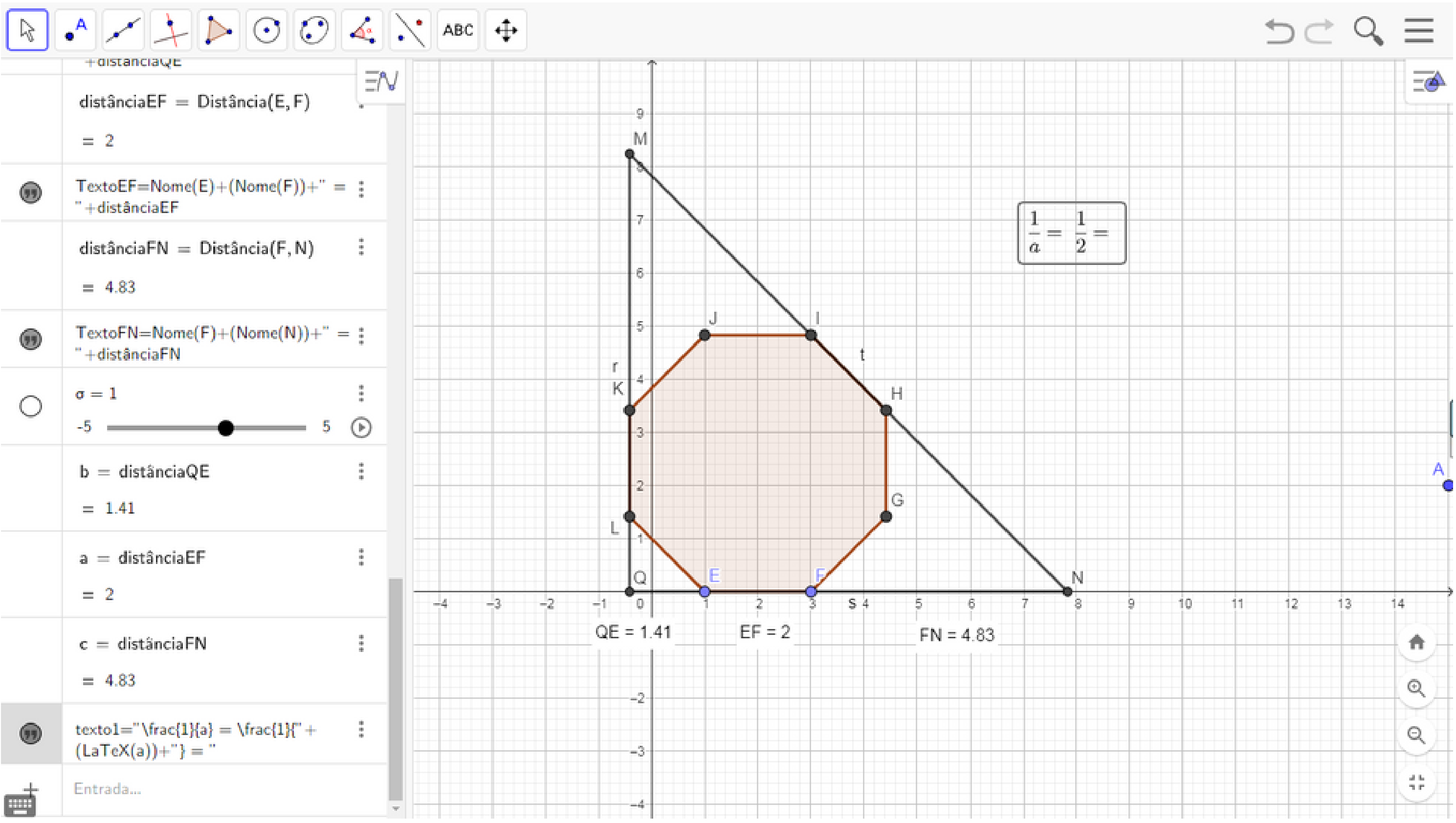
Modificaremos, a fórmula para que fique da seguinte forma:



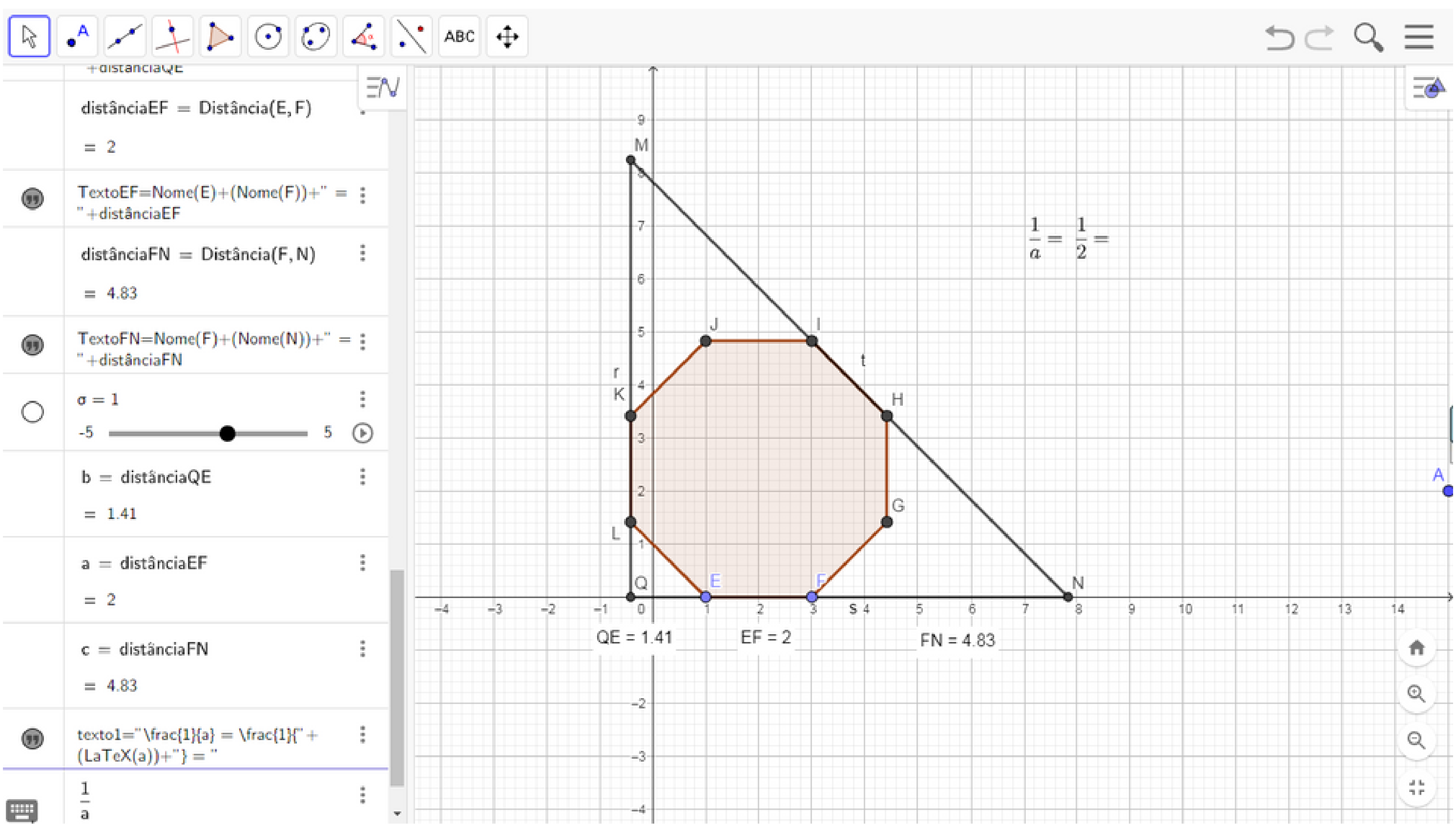
Para vincular a letra, ao segmento correspondente. Usaremos na aba que tem um ícone do geogebra, a letra "a", da seguinte forma.



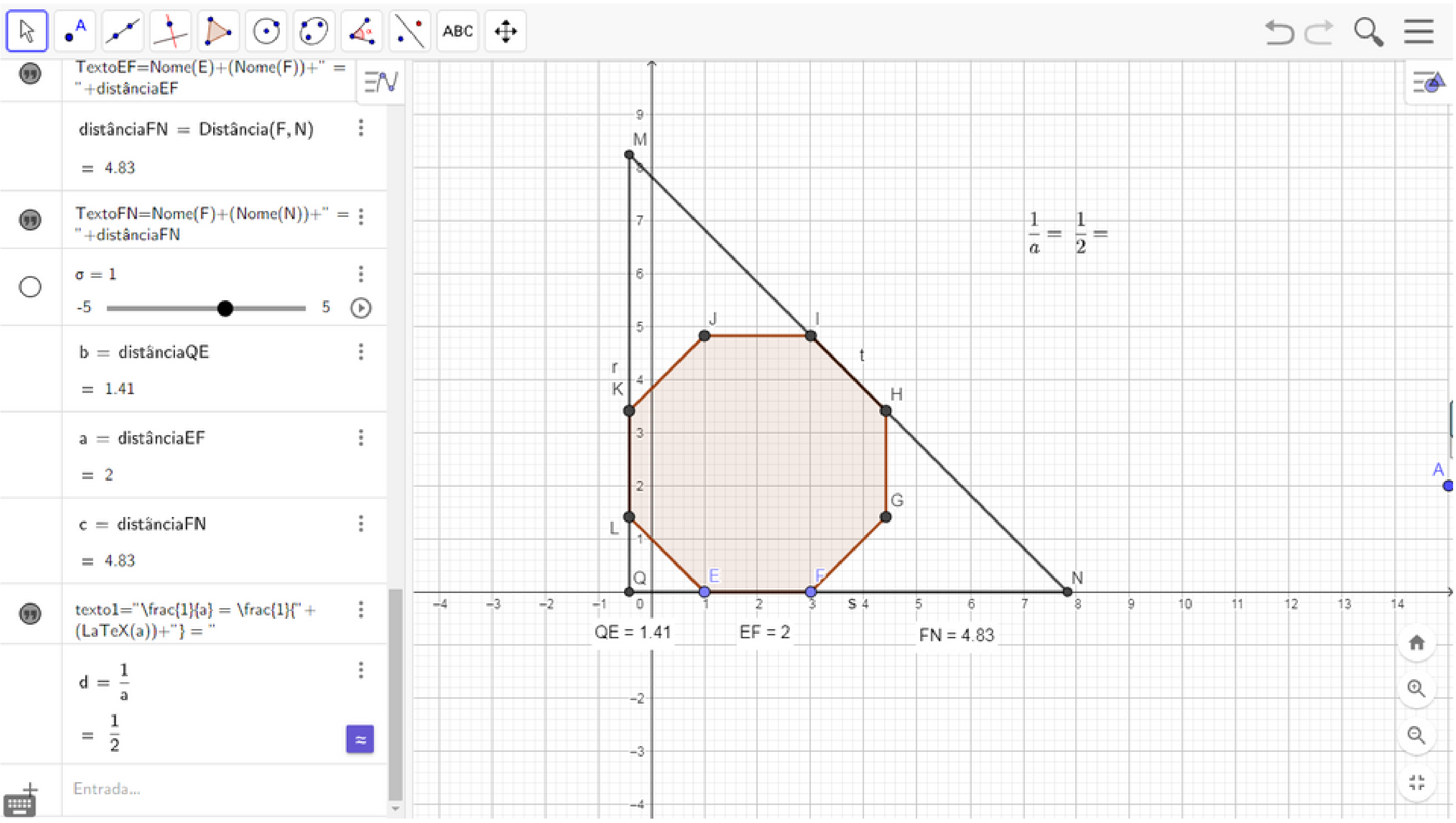
Se tudo estiver correto, teremos o seguinte resultado.



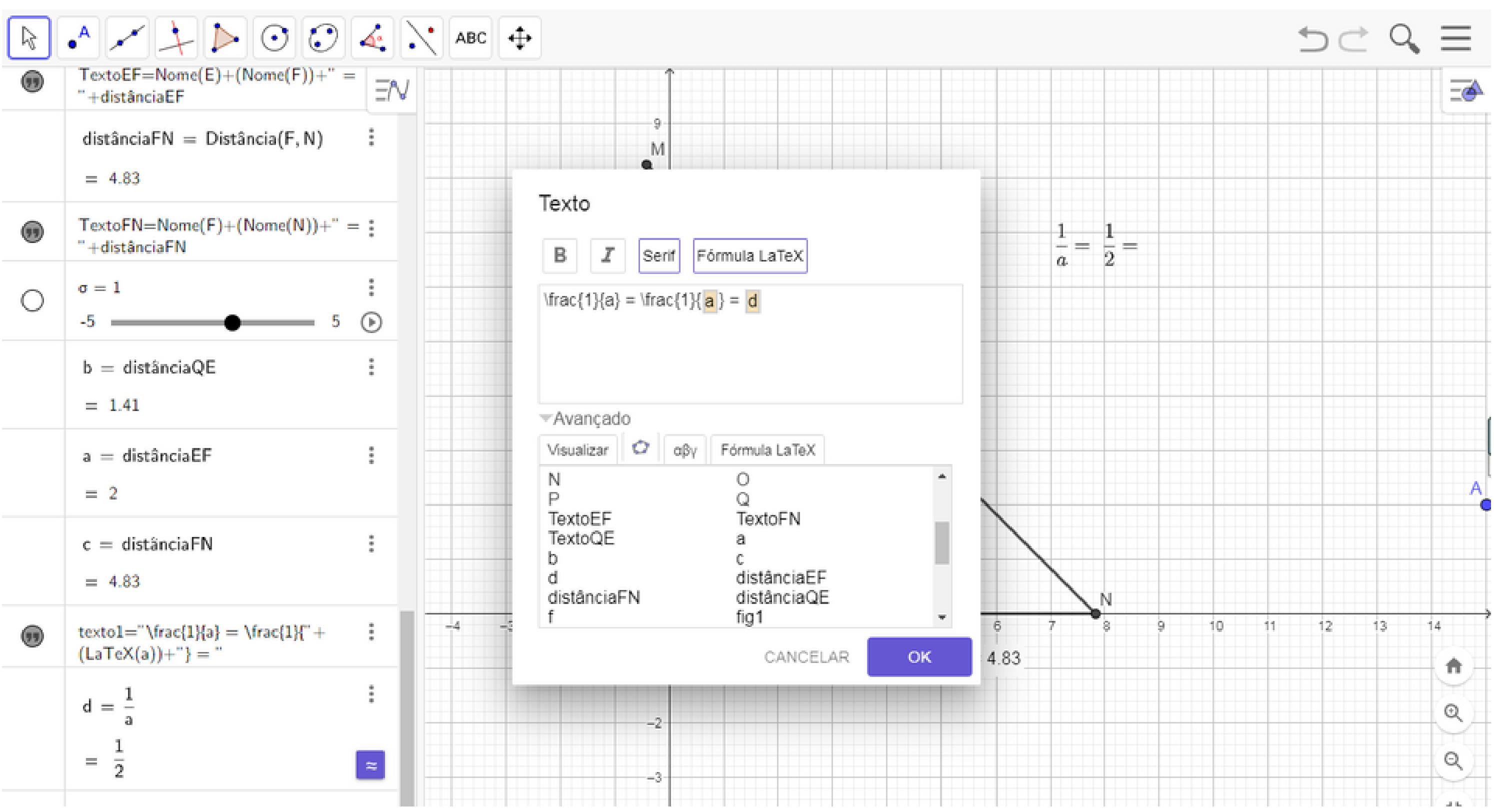
Voltando a caixa de entrada, digitaremos 1/a, para obtermos o valor numérico desse fração.

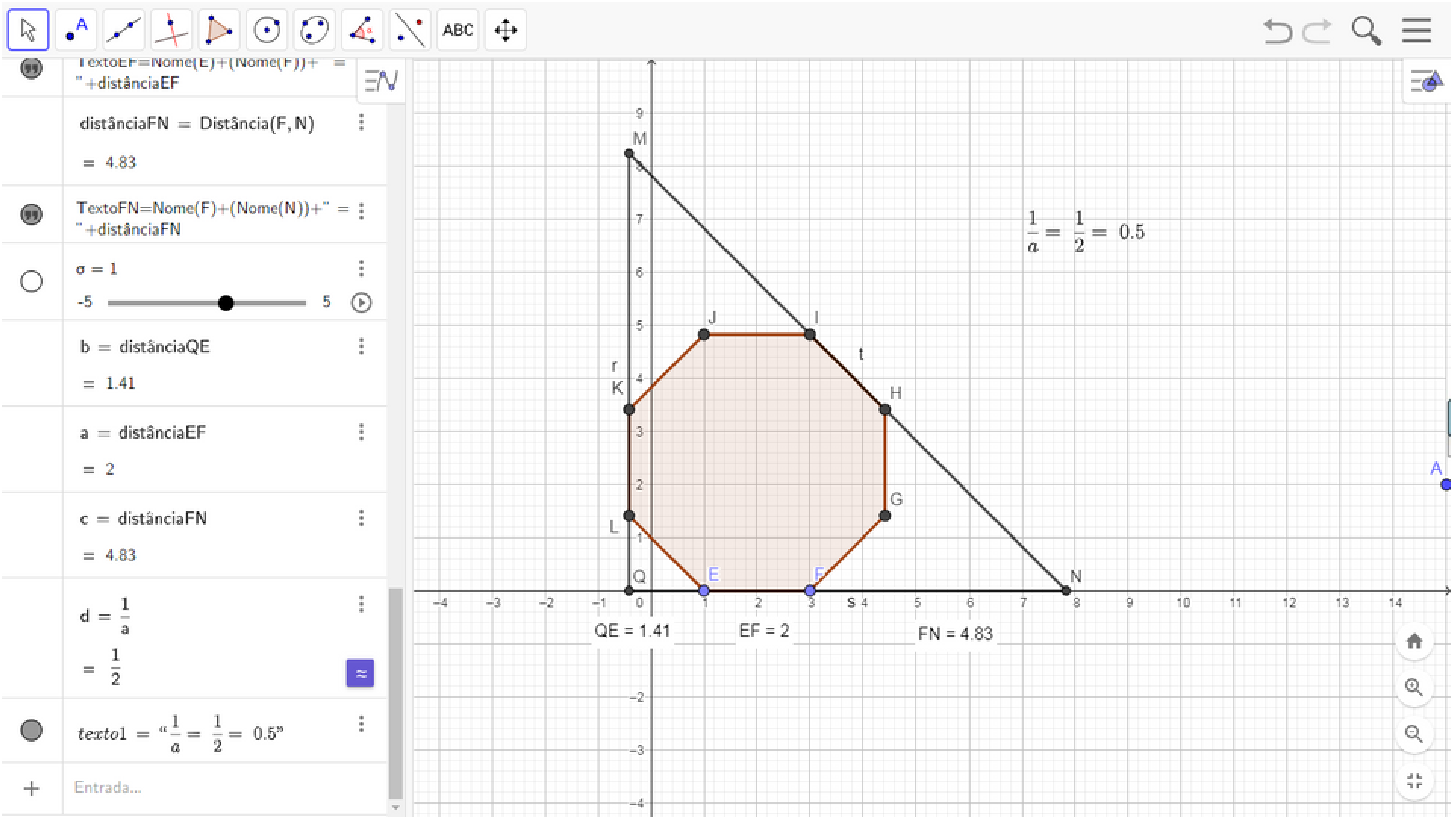


Veja que foi gerada a letra "d", que corresponde ao valor numérico dessa fração. Clicaremos sobre fórmula, e abriremos novamente a caixa de entrada.

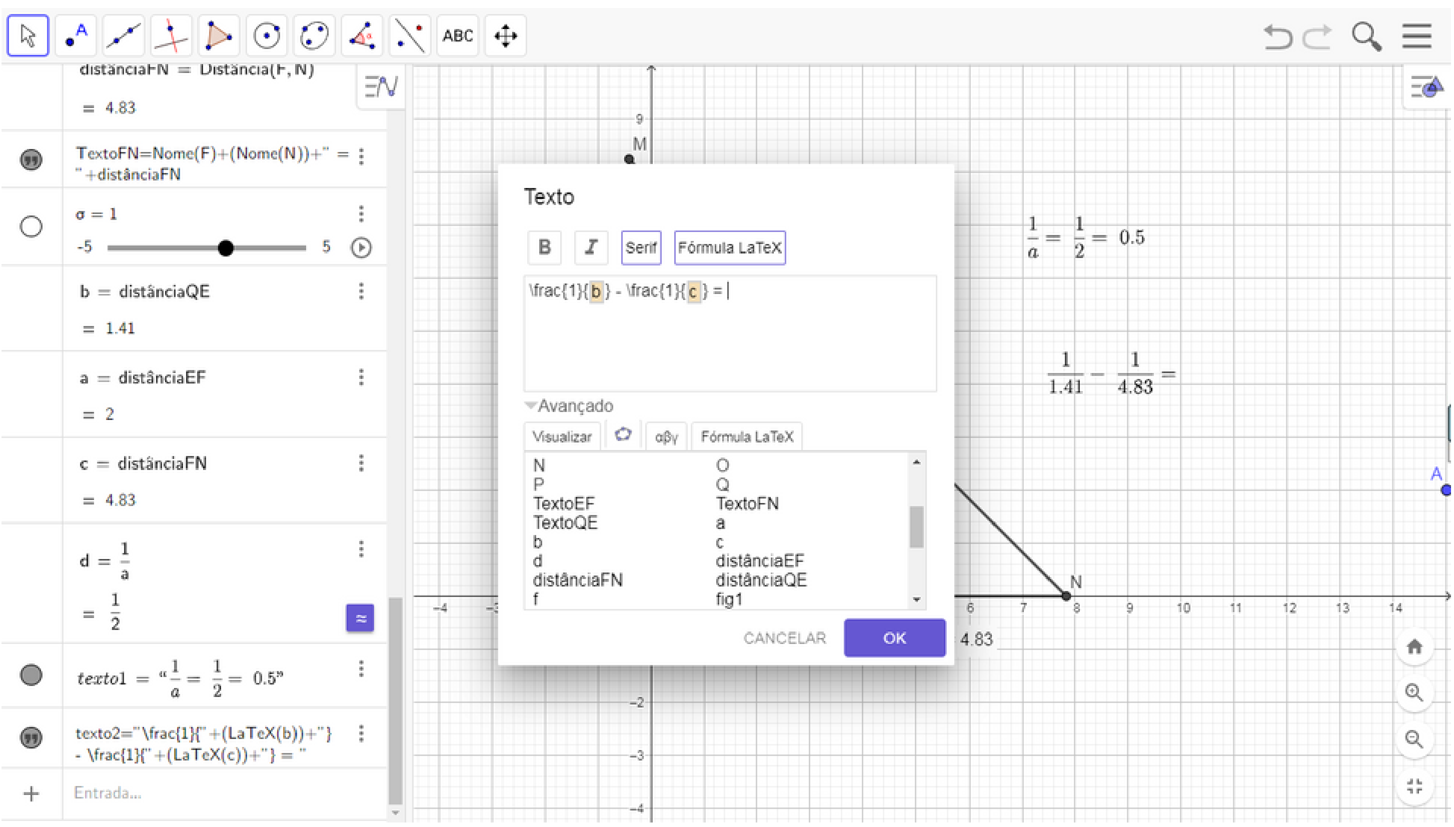


Na aba com o ícone do geogebra, procureremos pela letra "d", vincularemos a letra "d" a fórmula e concluiremos essa parte do exercício.

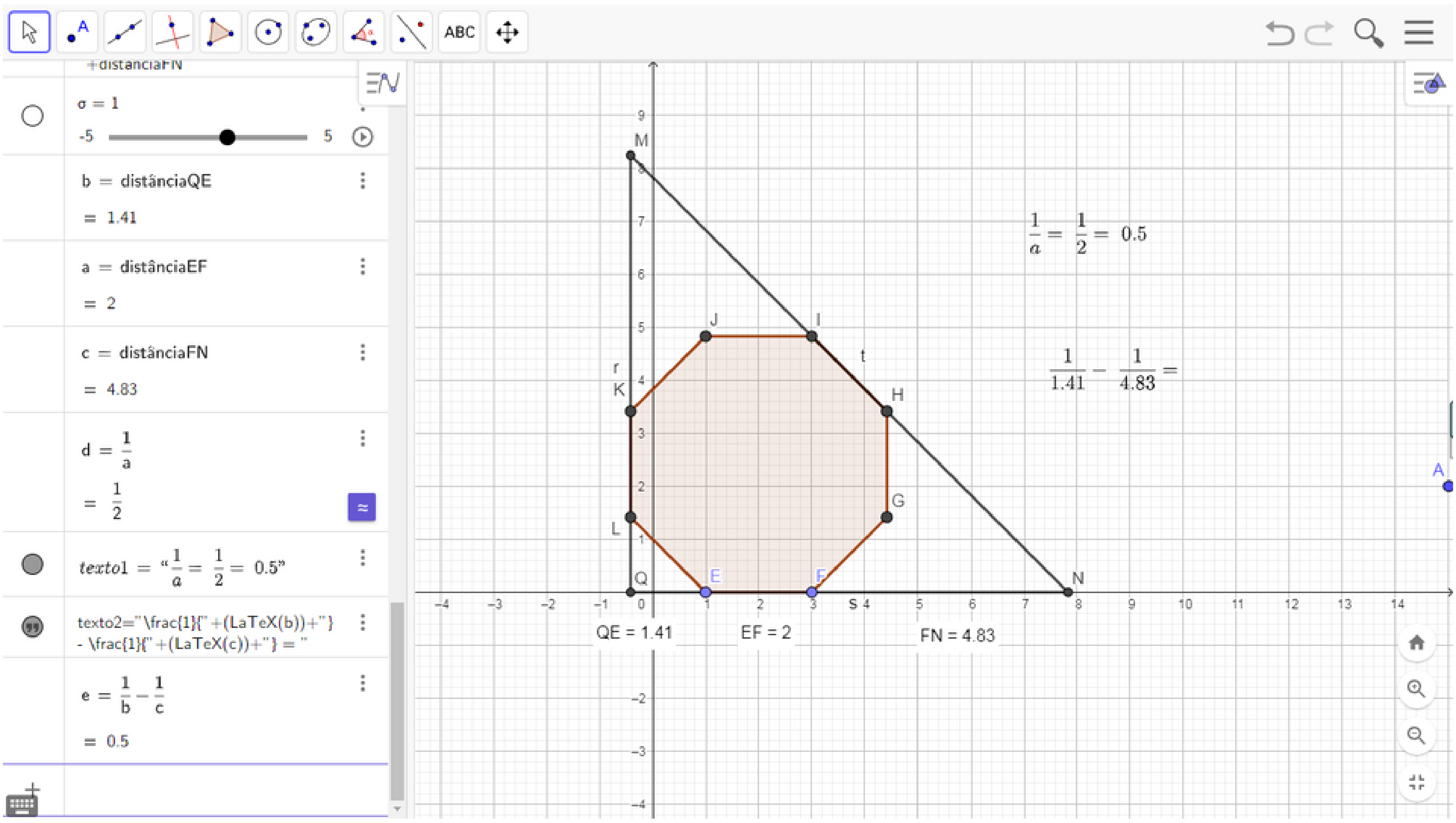


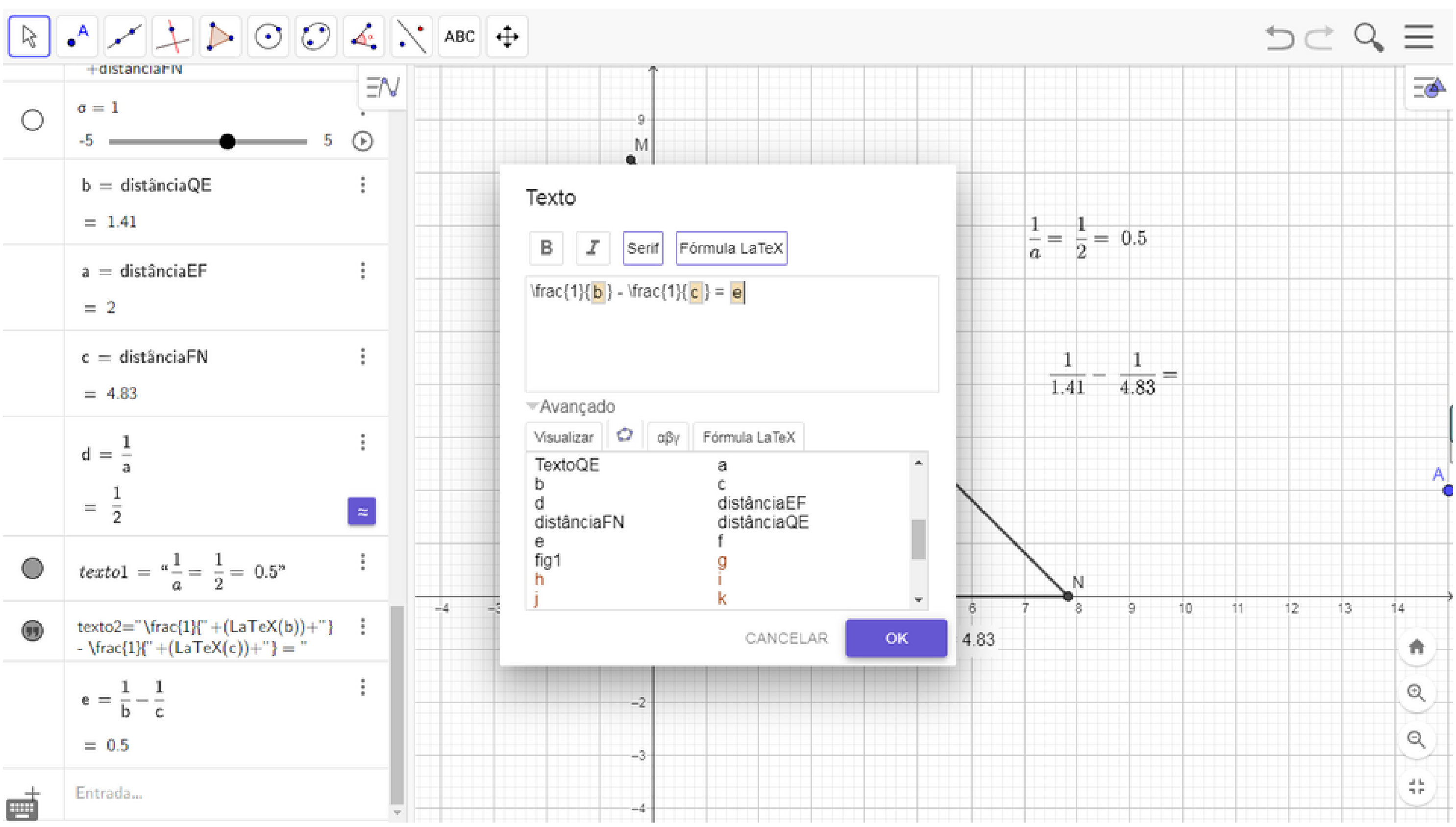


Para escrever a segunda parte da fórmula, repetiremos o exercício da seguinte forma.

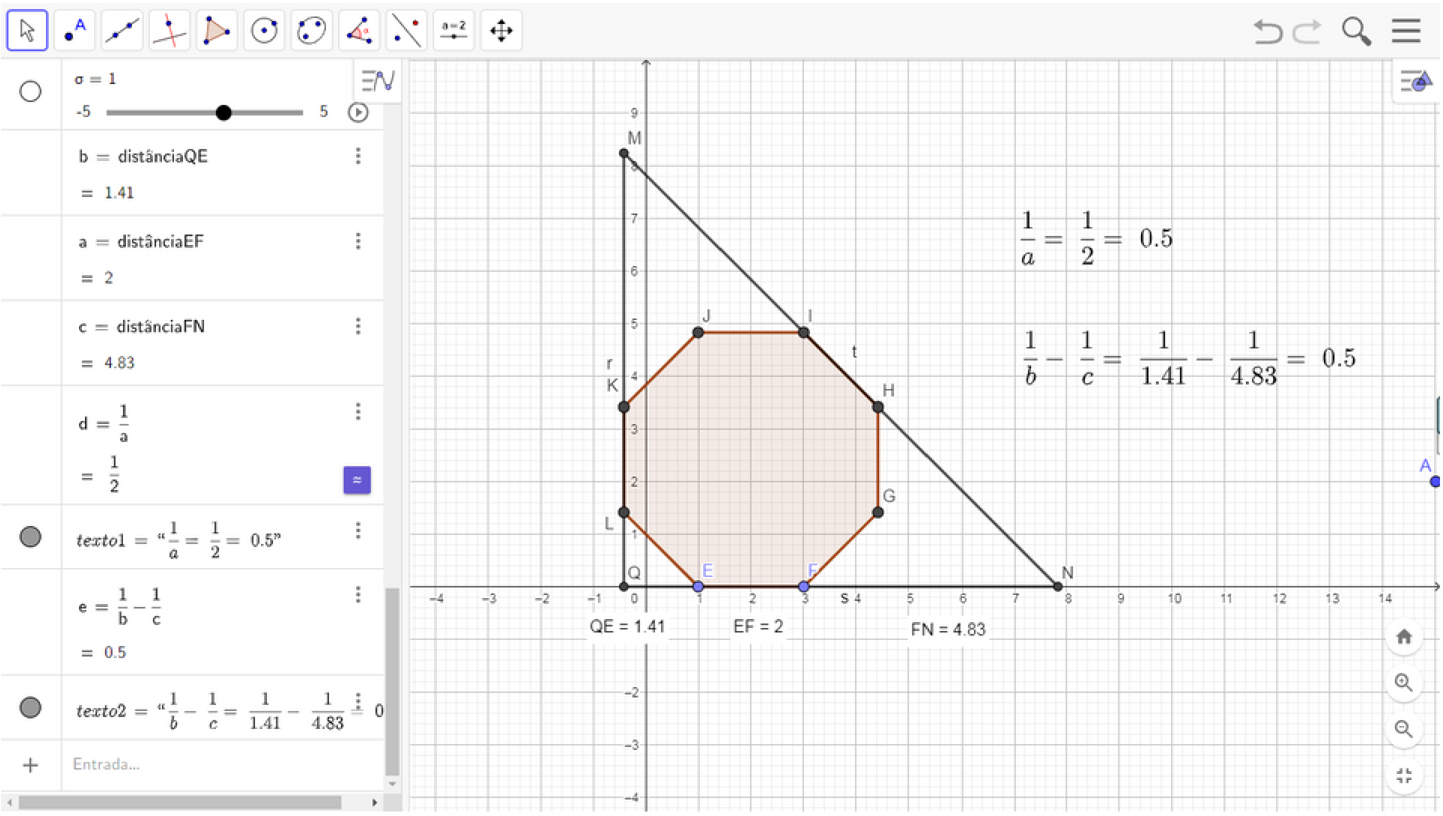


Dessa vez a letra que será vinculada é a letra "e", veja a caixa de entrada.

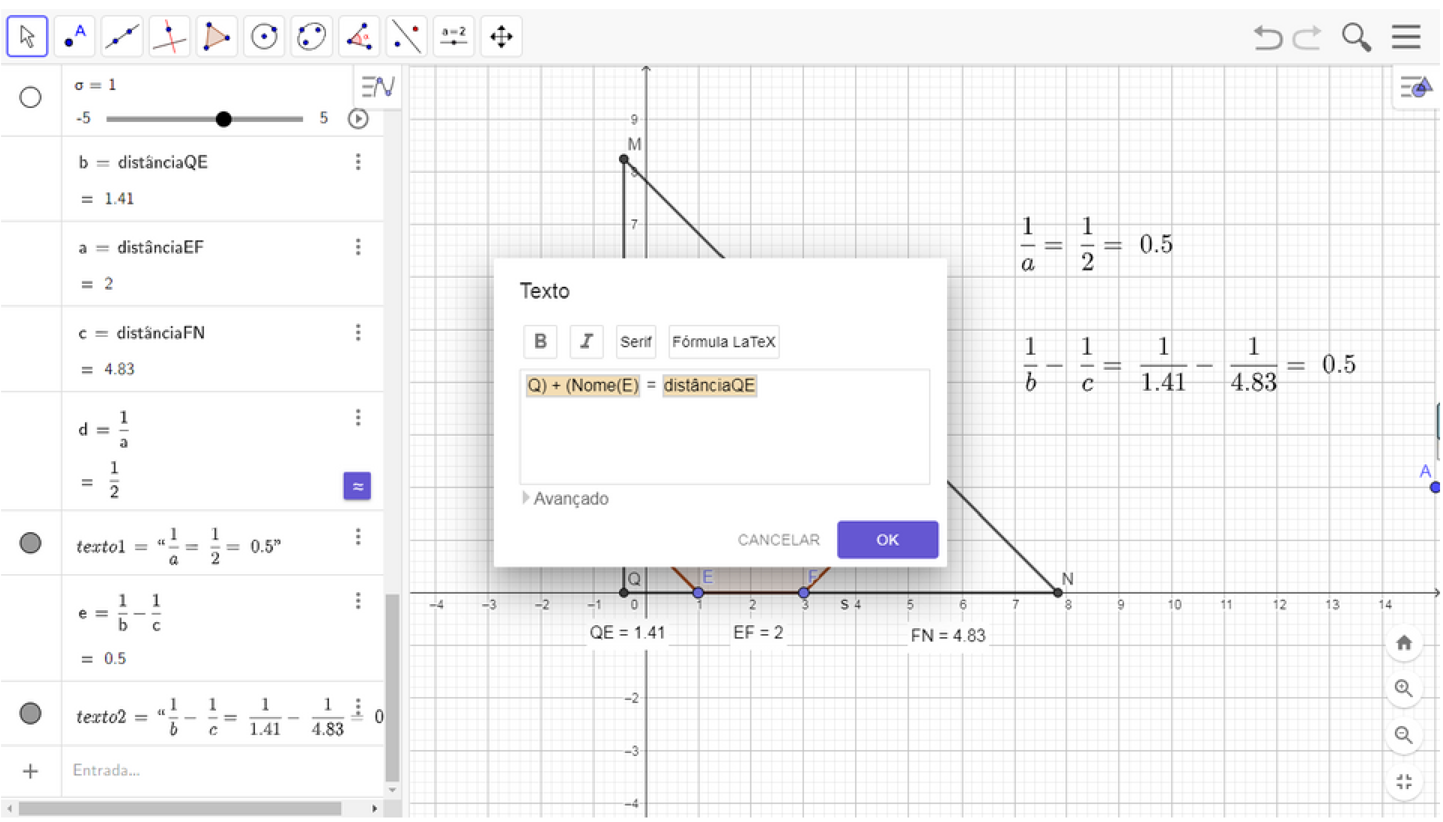


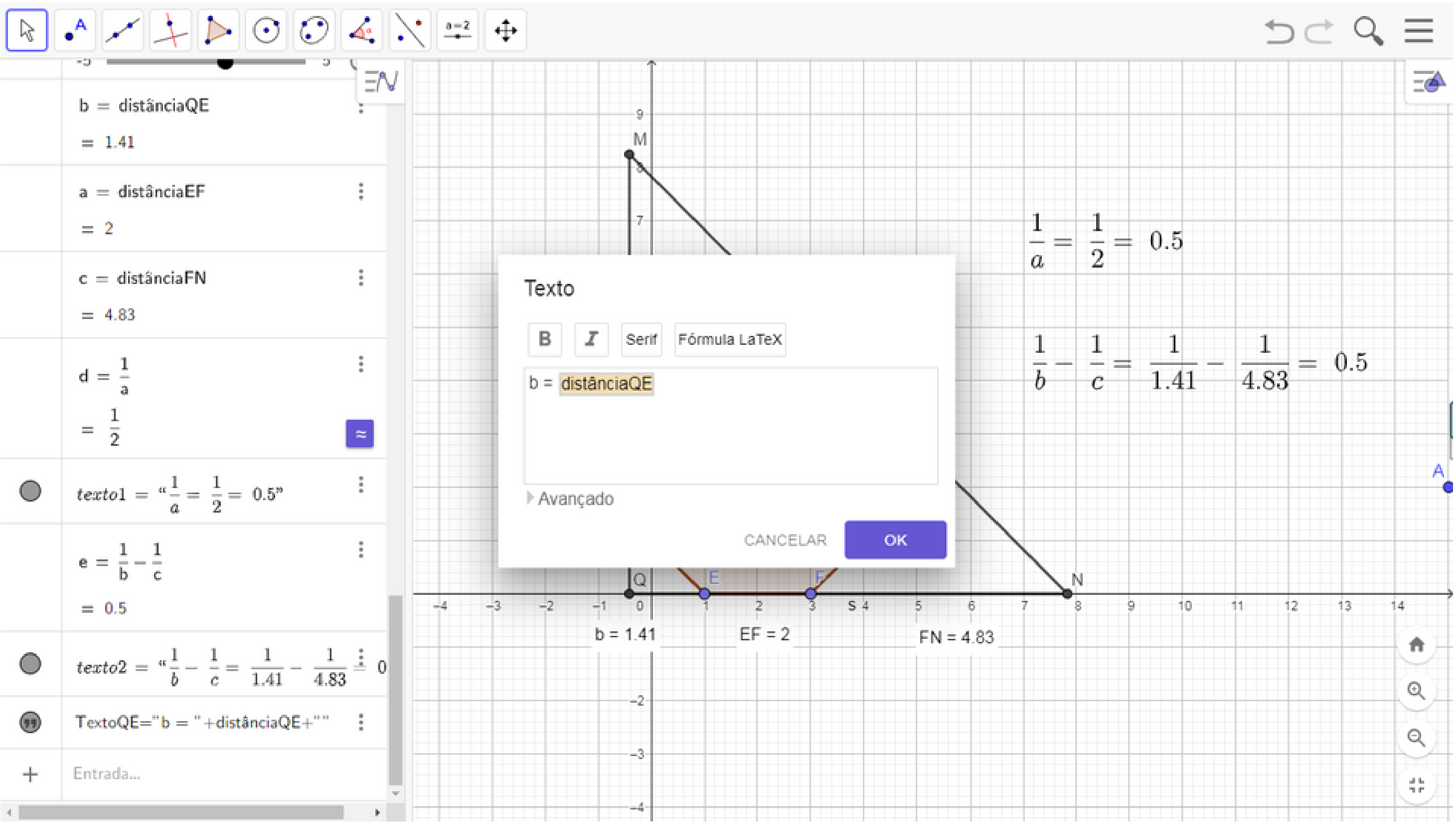


Se você procedeu corretamente, deverá ter o seguinte resultado.

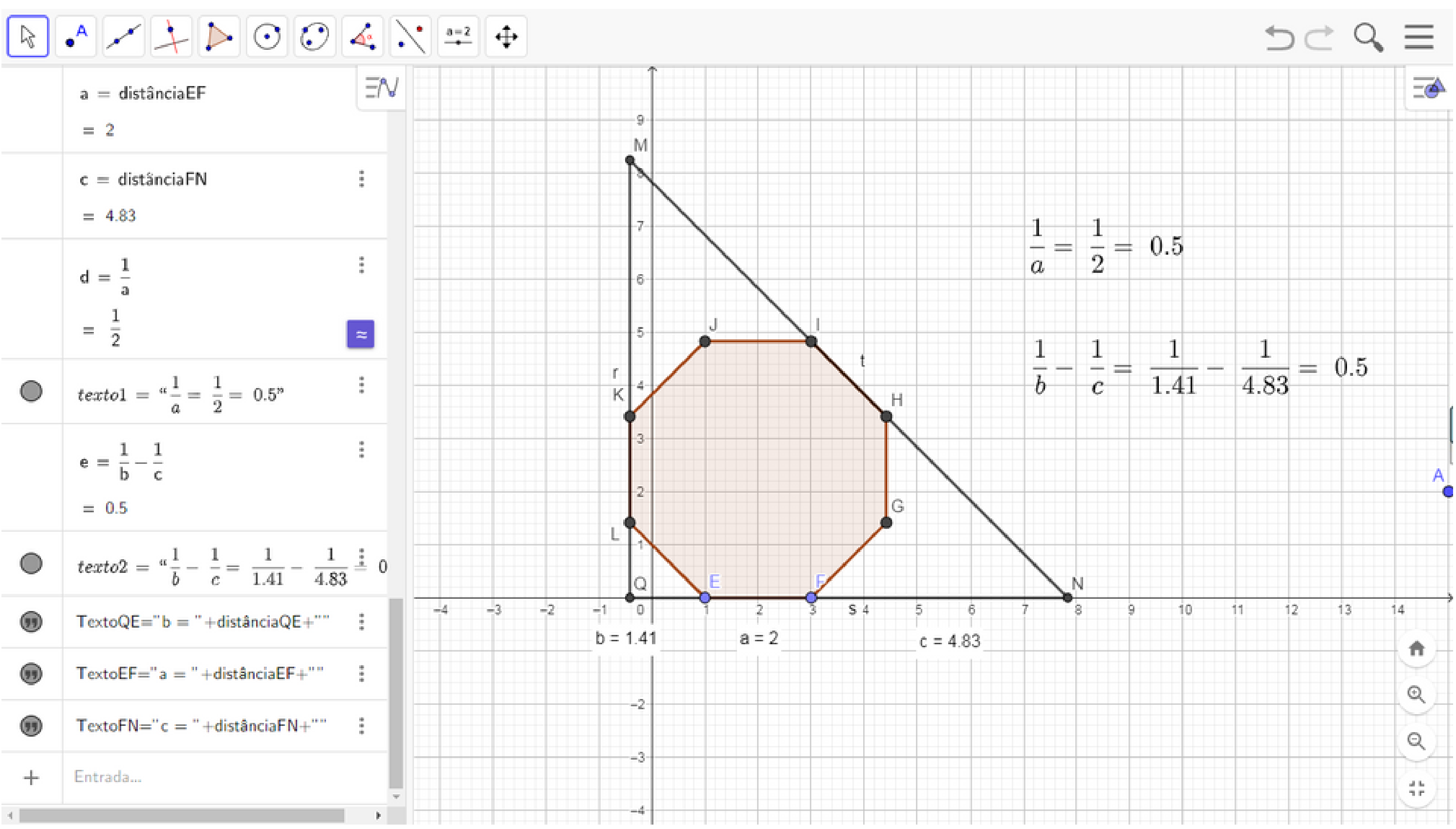


O que falta agora é renomear os segmentos, e faremos isso, por exemplo para o segmento QE, clicaremos nesse segmento, e na caixa de entrada sustituiremos a primeira parte pela letra "b", assim:

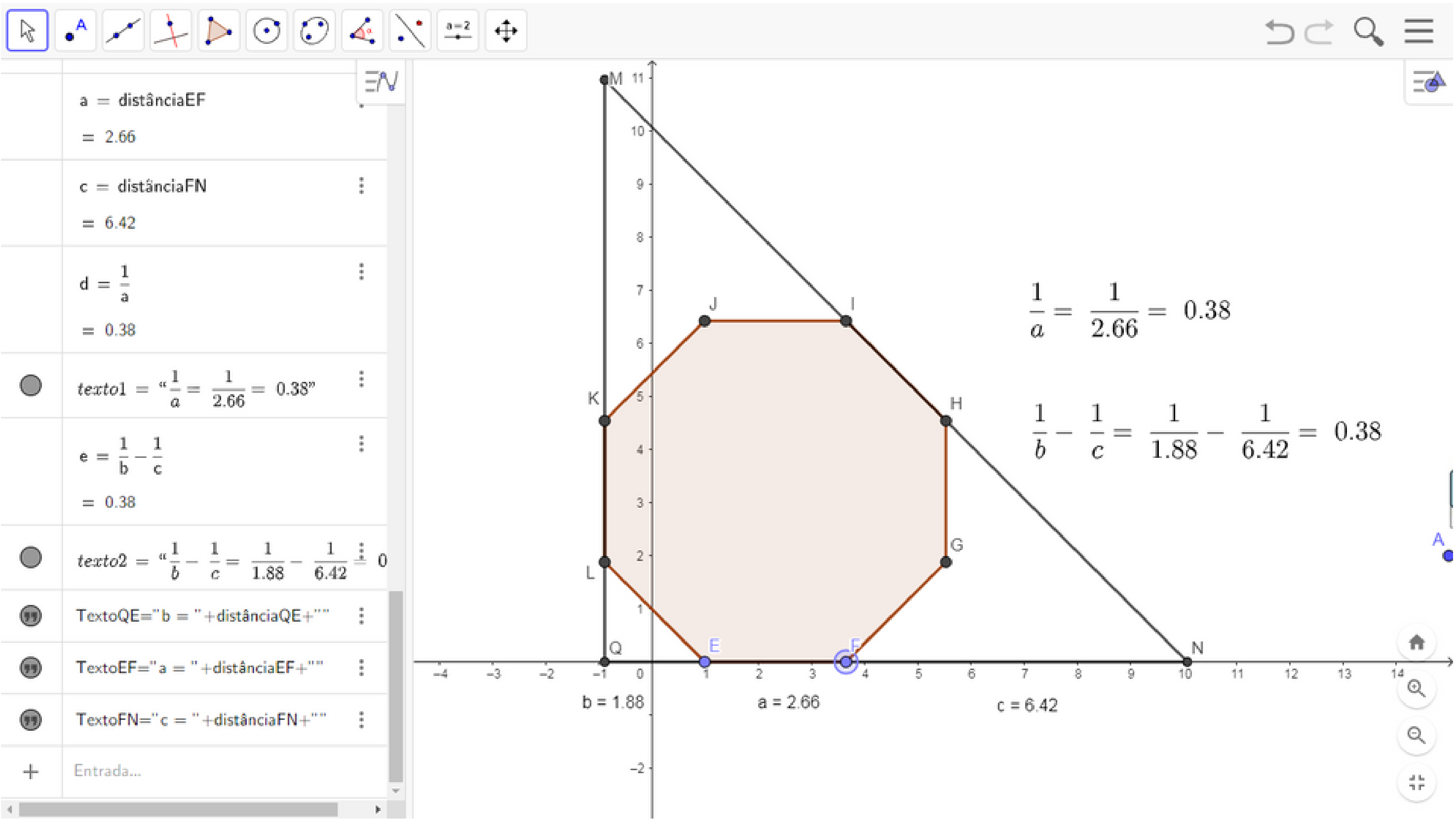




Continuando o processo, e finalizando as configurações chegaremos ao seguinte resultado.



Poderemos mover os pontos F e E, para preceder a animação.



05. Métodos Numéricos

Métodos numéricos são técnicas matemáticas que são utilizadas para resolver problemas que envolvem cálculos numéricos complexos ou impossíveis de resolver de maneira analítica. Esses métodos usam algoritmos e computação para aproximar soluções precisas de problemas matemáticos e científicos que não podem ser resolvidos com fórmulas matemáticas simples.

Os métodos numéricos incluem uma ampla variedade de técnicas, como o método da bissecção, o método de Newton-Raphson, o método das diferenças finitas, o método dos mínimos quadrados, entre outros. Esses métodos são usados em muitas áreas da ciência e da engenharia, incluindo física, química, engenharia civil, engenharia mecânica, ciências biológicas, entre outras.

Os métodos numéricos são importantes porque muitos problemas da vida real são muito complexos para serem resolvidos por métodos analíticos. Além disso, esses métodos são capazes de lidar com dados experimentais e outras informações imprecisas, permitindo a análise e interpretação de dados em diversas áreas.

O Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um método numérico para encontrar uma aproximação para as raízes de uma função não-linear. Ele usa uma abordagem iterativa para se aproximar da raiz, onde a cada iteração, uma nova aproximação é calculada até que uma precisão desejada seja alcançada.

O método de Newton-Raphson é baseado na ideia de que uma função pode ser aproximada por uma reta tangente em um ponto próximo da raiz. A equação da reta tangente pode ser usada para encontrar uma nova estimativa para a raiz da função. Esse processo é repetido até que uma estimativa suficientemente precisa da raiz seja encontrada.

O método de Newton-Raphson pode ser descrito pelos seguintes passos:

O método de Newton-Raphson pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Escolha uma estimativa inicial para a raiz, denotada por xo (xo = ponto inicial).
2. Calcule a equação da reta tangente à função no ponto xo.
3. Encontre a interseção da reta tangente com o eixo x. Esta interseção será a nova estimativa para a raiz e é denotada por x1.
4. Repita os passos 2 e 3 usando x1 como a nova estimativa para a raiz, até que a precisão desejada seja alcançada.

A fórmula para calcular a próxima aproximação xn é dada por:

O método de Newton-Raphson pode convergir rapidamente para a raiz se a estimativa inicial estiver suficientemente próxima da raiz. No entanto, se a estimativa inicial estiver muito longe da raiz, o método pode não convergir ou convergir para uma raiz diferente da desejada. Além disso, o método de Newton-Raphson pode falhar se a função tiver uma derivada nula na raiz ou se houver pontos de inflexão próximos à raiz.

O Método de Newton-Raphson é um dos métodos numéricos mais importantes para encontrar raízes de funções não-lineares. Ele foi desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson no século XVII e tem sido usado em uma variedade de campos, incluindo engenharia, ciências físicas, finanças e biologia. O método é baseado em uma abordagem iterativa que envolve o cálculo da equação da reta tangente à função em um ponto próximo da raiz. Com o passar das iterações, a reta tangente é usada para encontrar uma nova estimativa para a raiz. O processo é repetido até que a precisão desejada seja alcançada. Neste eBook, vamos explorar em detalhes como o método de Newton-Raphson funciona, suas aplicações e variações, e dicas úteis para usar o método com eficiência.

Funcionamento do Método

O método de Newton-Raphson começa com uma estimativa inicial da raiz da função não-linear. A fórmula para a próxima estimativa é calculada usando a equação da reta tangente à função em um ponto próximo à raiz. A equação da reta tangente é dada pela fórmula:

$$f(x) = f(x_o) \ + f'(x_o)(x - x_o)$$

Onde f(x0) é o valor da função na estimativa anterior x0, f'(x0) é a derivada da função no ponto x0 e x é a próxima estimativa para a raiz. Resolvendo esta equação para x, obtemos a fórmula para a próxima estimativa:

Este processo é repetido até que a precisão desejada seja alcançada. É importante notar que a escolha da estimativa inicial pode afetar a convergência do método e que, em alguns casos, o método pode falhar em convergir para uma raiz. Por isso, é importante verificar as condições de convergência do método antes de aplicá-lo a uma função específica. Exemplos numéricos podem ser usados para ilustrar como o método de Newton-Raphson funciona na prática.

$$x = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

Condições de Convergência

O método de Newton-Raphson converge para uma raiz se a função for continuamente diferenciável e se a estimativa inicial estiver suficientemente próxima da raiz. No entanto, existem algumas condições que devem ser satisfeitas para garantir a convergência do método. Uma dessas condições é que a derivada da função não deve ser zero na raiz, pois isso indica um ponto de inflexão ou uma raiz múltipla. Outra condição é que a derivada da função não deve mudar de sinal perto da raiz, pois isso indica que a função pode ter várias raízes próximas. Se essas condições não forem satisfeitas, o método de Newton-Raphson pode não convergir ou pode convergir para uma raiz incorreta.

É importante testar a convergência do método para diferentes valores iniciais e ajustar a estimativa inicial se necessário. Exemplos numéricos podem ser usados para ilustrar como a escolha da estimativa inicial afeta a convergência do método.

Aplicações do Método

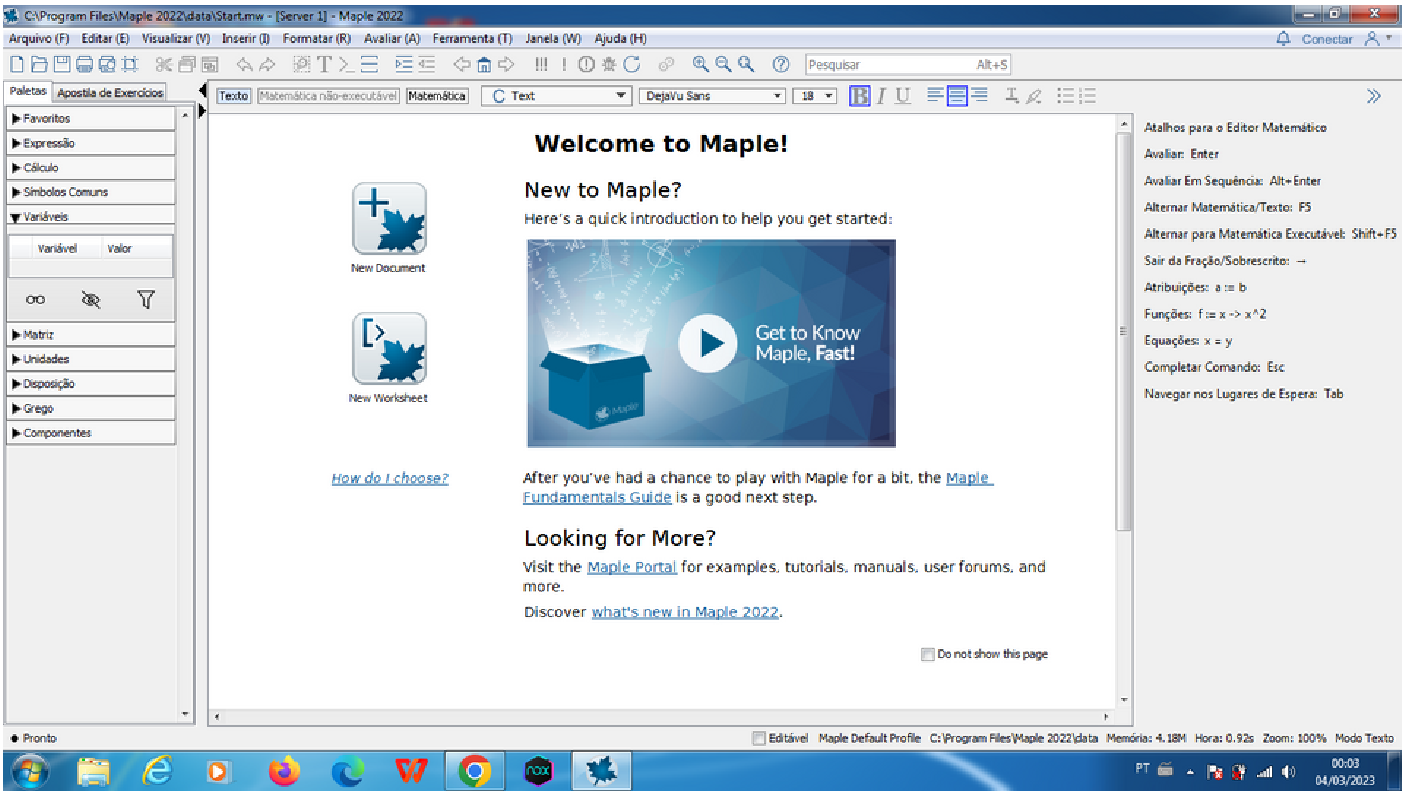
O método de Newton-Raphson é amplamente utilizado em uma variedade de campos para encontrar raízes de funções não-lineares. Ele é usado em engenharia para calcular a tensão crítica em estruturas, em finanças para calcular o valor presente líquido de fluxos de caixa, em física para calcular a trajetória de partículas em campos elétricos, e em biologia para modelar dinâmicas de populações. O método também pode ser usado em combinação com outras técnicas numéricas para resolver problemas mais complexos, como a resolução de sistemas de equações diferenciais não-lineares.

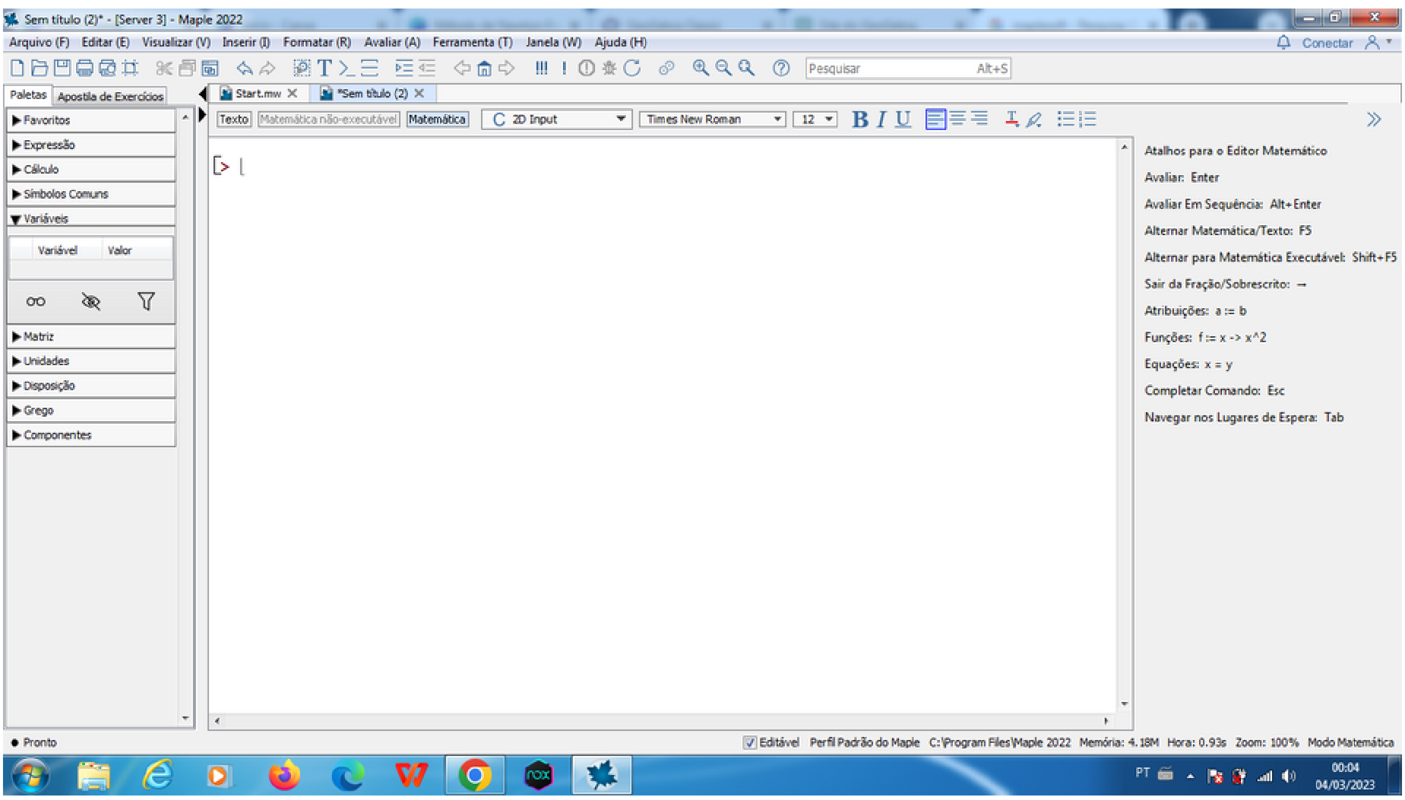
É importante entender as limitações do método de Newton-Raphson e como selecionar o método numérico mais apropriado para uma determinada situação. Exemplos numéricos podem ser usados para ilustrar as limitações do método e quando ele pode não ser a melhor escolha.

Software Maplesoft

O Maple é um sistema computacional de álgebra computacional (CAS) que permite realizar uma ampla variedade de cálculos matemáticos, incluindo cálculo simbólico, numérico e visualização gráfica. Ele possui uma linguagem de programação própria que permite aos usuários criar algoritmos personalizados e rotinas de cálculo. Além disso, o Maple possui uma ampla variedade de ferramentas integradas, como o pacote de análise numérica, o pacote de álgebra linear e o pacote de otimização. O Maple pode ser usado em vários campos, como engenharia, física, ciência da computação e matemática aplicada.

Interface do MapleSoft





Algoritmo usando o Maple

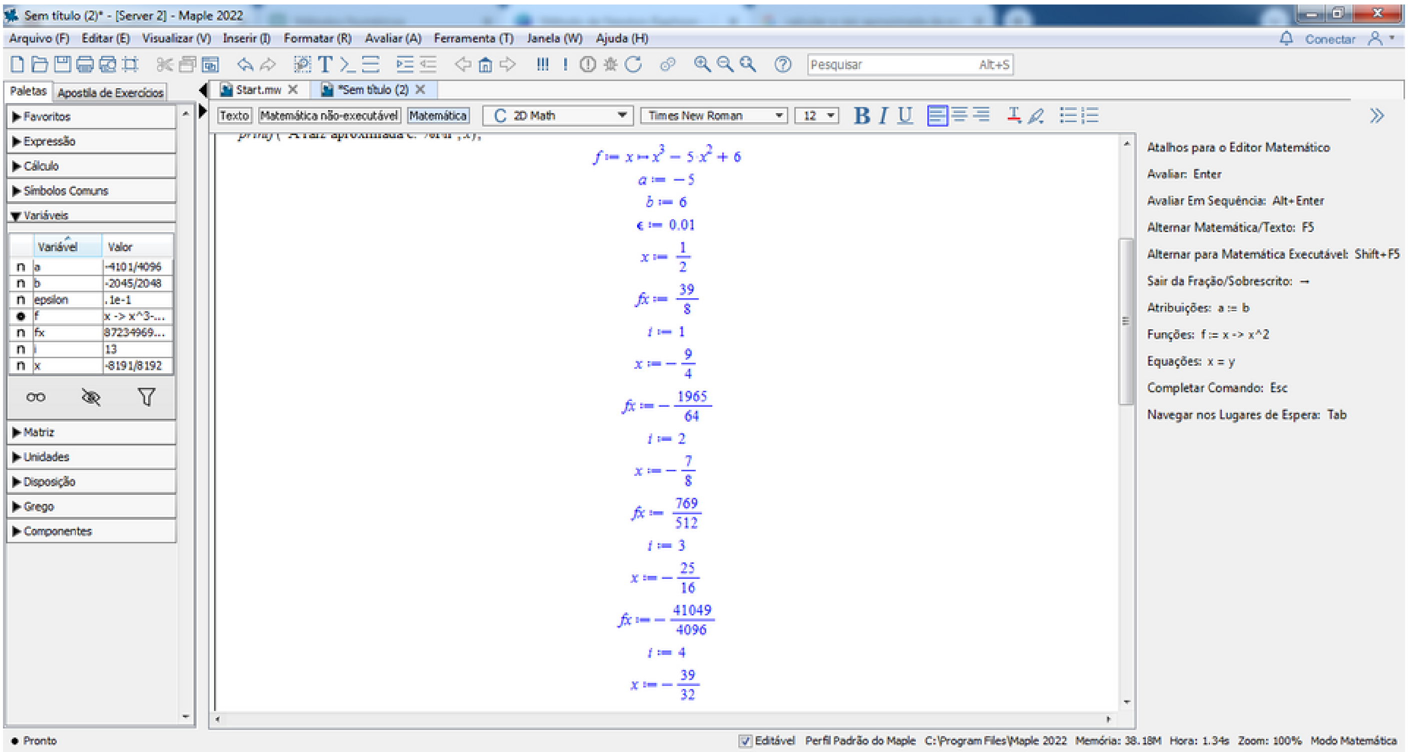
Calcular a raiz aproximada da equação:

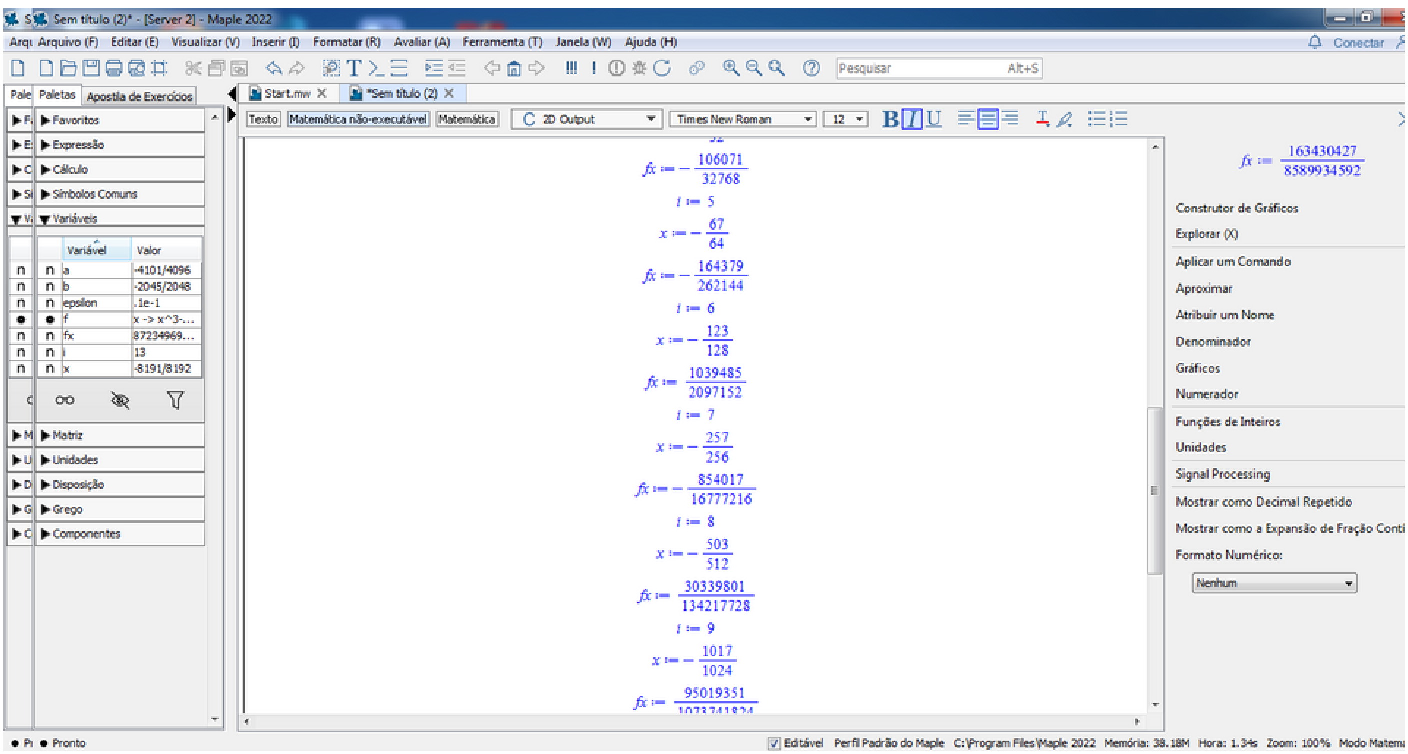
$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

usando o método de newton-raphson.

```
f := x -> x^3 - 5*x^2 + 6;

a := -5;

b := 6;

epsilon := 0.01;

x := (a + b)/2;

fx := f(x);

i := 1;

while epsilon <= abs(fx) do

  if 0 < fx then b := x; else a := x; end if;

  x := (a + b)/2;

  fx := f(x);

  i := i + 1;

end do;

printf("A raiz aproximada é: %f\n", x);
```

O Maple nos mostra o seguinte resultado:





A raíz aproximada é: -0,999878

Apresentando o site do Geogebra

1. O Abra o seu navegador de internet (Google Chrome, Firefox, Edge, etc.).
2. Na barra de endereço, digite "www.geogebra.org" e pressione Enter.
3. A página inicial do site do GeoGebra será carregada. Nela, você encontrará diversas informações sobre o software, como a sua descrição, recursos e funcionalidades, além de uma seção de download.
4. Você pode explorar o site para saber mais sobre o GeoGebra e seus recursos, ou então utilizar a barra de pesquisa na parte superior da página para encontrar informações específicas.

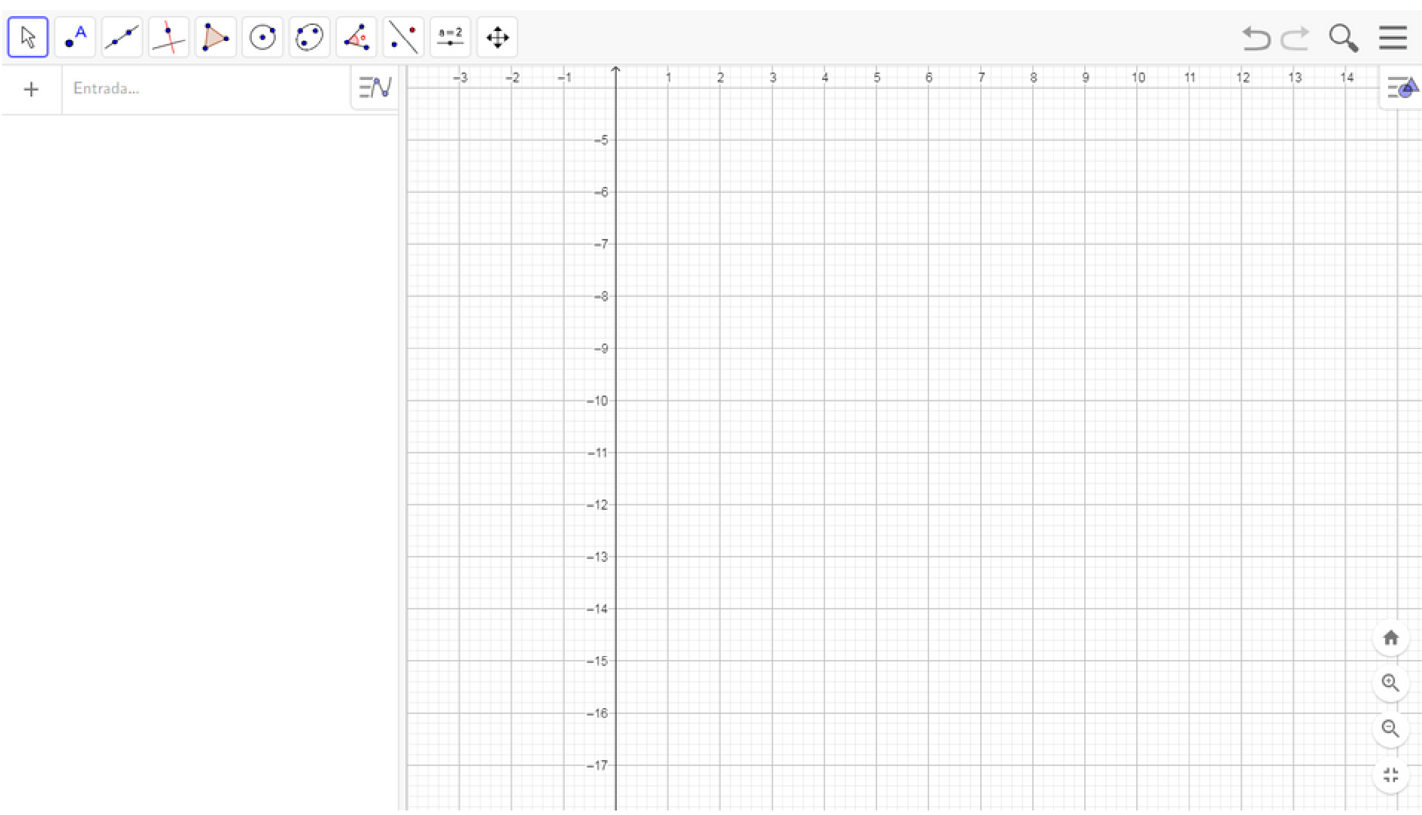
.

5. Se você deseja fazer o download do GeoGebra, clique na opção "Baixar" no menu superior e escolha a versão do software que deseja instalar (GeoGebra Classic, GeoGebra Graphing Calculator, GeoGebra 3D Calculator, etc.).

6. Você pode utilizar o GeoGebra online sem precisar baixar o software, basta clicar em "GeoGebra Online" no menu superior e criar uma conta gratuita para começar a usar

O Geogebra.org

Gogebra Oline



Geobra Online

1. .Abra o seu navegador de internet.
2. Na barra de endereço, digite "www.geogebra.org" e pressione Enter.
3. Na página inicial do site do GeoGebra, clique na opção "GeoGebra Online" no menu superior.
4. Se você já tem uma conta no GeoGebra, faça login. Se não tiver uma conta, clique em "Criar Conta" e siga as instruções para criar uma conta gratuita.

5. Após fazer login, você será direcionado para a página inicial do GeoGebra Online. Nela, você encontrará diversas opções, como criar uma nova planilha, acessar planilhas já criadas e explorar recursos adicionais.

6. Para criar uma nova planilha, clique no botão "Nova Planilha" na parte superior da página. Você poderá escolher entre diferentes tipos de planilhas, incluindo planilhas clássicas, planilhas 3D e planilhas de calculadora gráfica.

7. Para acessar planilhas já criadas, clique em "Minhas Planilhas" no menu superior. Você verá uma lista de todas as suas planilhas salvas. Clique em uma planilha para abri-la.

8. Para explorar recursos adicionais, como materiais didáticos, tutoriais e fóruns de discussão, clique nas opções correspondentes no menu superior.

Software: Geogebra

O Geogebra, por sua vez, é um software livre e gratuito que combina geometria, álgebra e cálculo em um ambiente dinâmico. Ele permite criar construções matemáticas interativas, como gráficos, tabelas, figuras geométricas e animações. O Geogebra é muito útil para ensinar e aprender matemática, pois permite que os usuários visualizem as relações entre os conceitos matemáticos e façam experimentos com as fórmulas e funções. Além disso, o Geogebra pode ser usado em vários níveis de ensino, desde o ensino fundamental até o ensino superior.

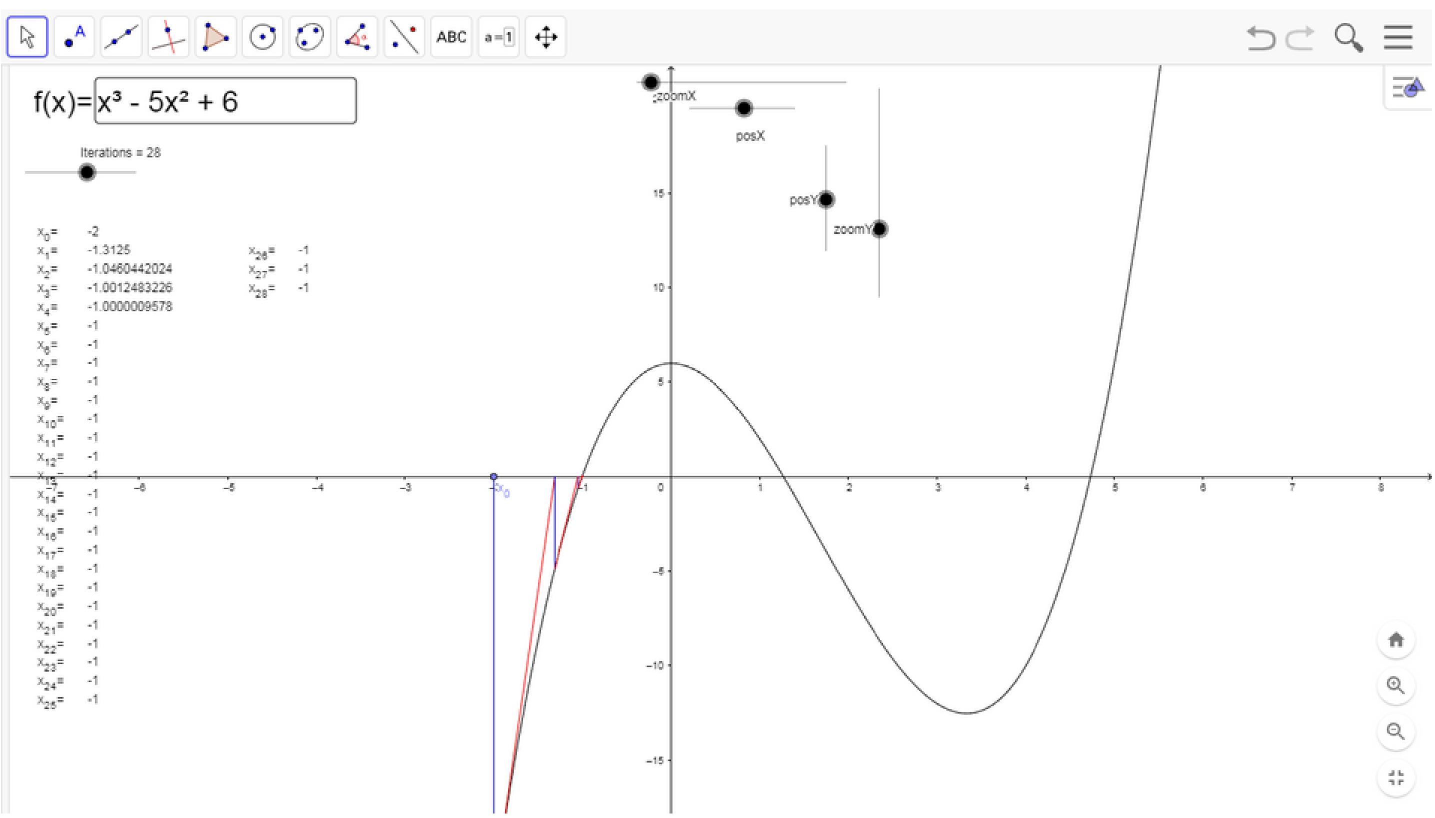
Usando o Maple e o Geogebra em conjunto, é possível criar uma grande variedade de materiais educacionais e recursos para o ensino de matemática e métodos numéricos, incluindo exercícios interativos, animações e visualizações gráficas. Esses softwares podem ser usados para demonstrar conceitos matemáticos complexos, testar hipóteses e ajudar os alunos a entender as aplicações práticas da matemática.

Resolução de Problemas

Calcular a raiz aproximada da equação,

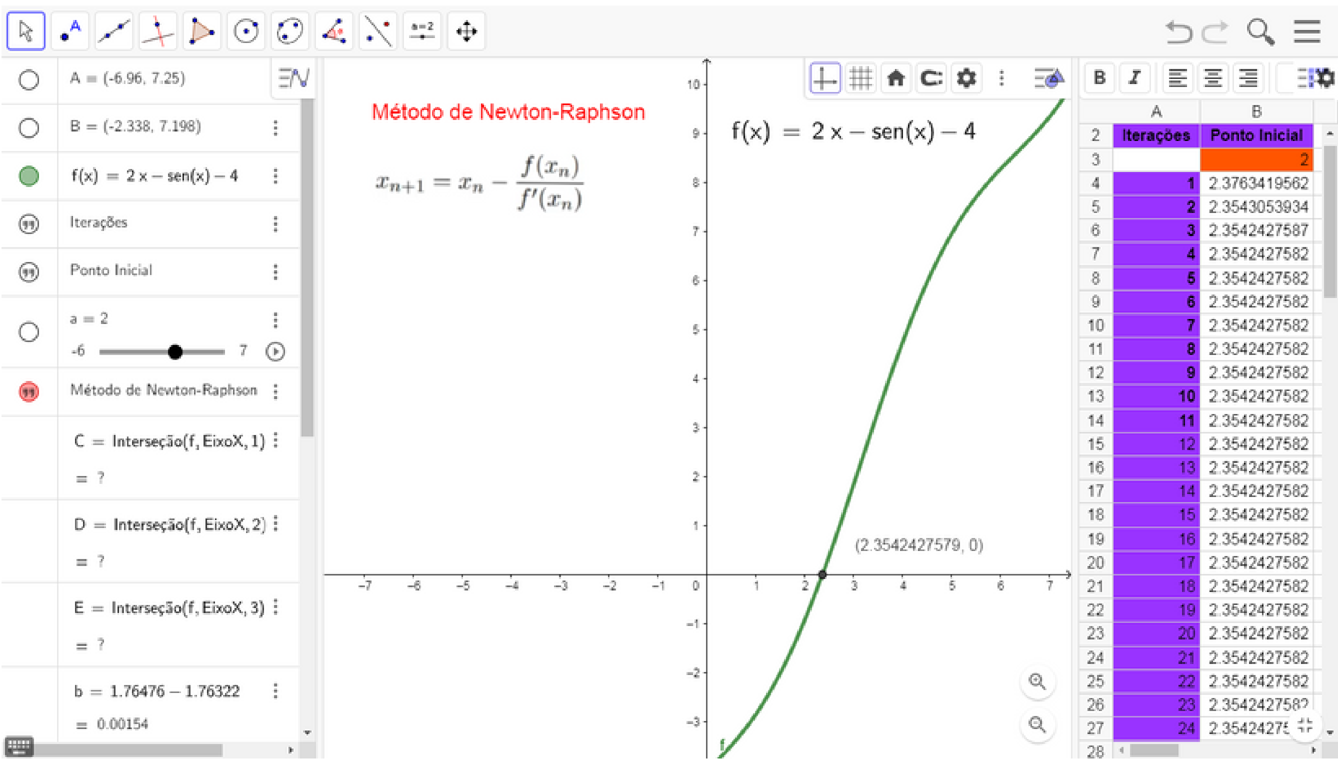
$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

usando o método de Newton-Raphson e uma aproximação inicial de $x = 2$.



Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação f(x) = 2x - sen(x) - 4, partindo do ponto inicial xo = 2.



Veja que o método converge muito rápido, na quarta iteração já temos a raiz aproximada, que é:

x = 2,3542427582

Resolução de Problemas

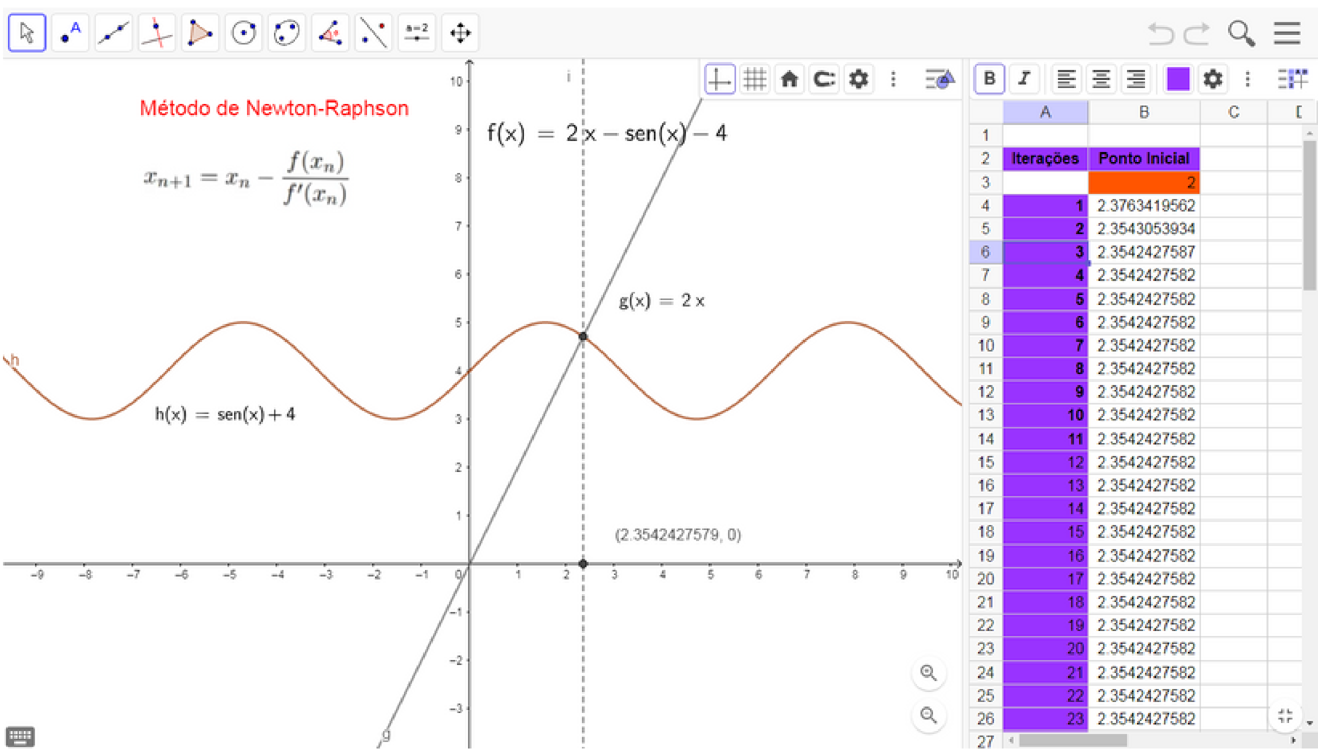
Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação f(x) = 2x - sen(x) - 4.

Resolução:

- Nesse caso não conhecemos os intervalos onde estão presentes as raízes, então podemos fazer:

f(x) = 2x - sen(x) - 4 = 0
2x = sen(x) + 4

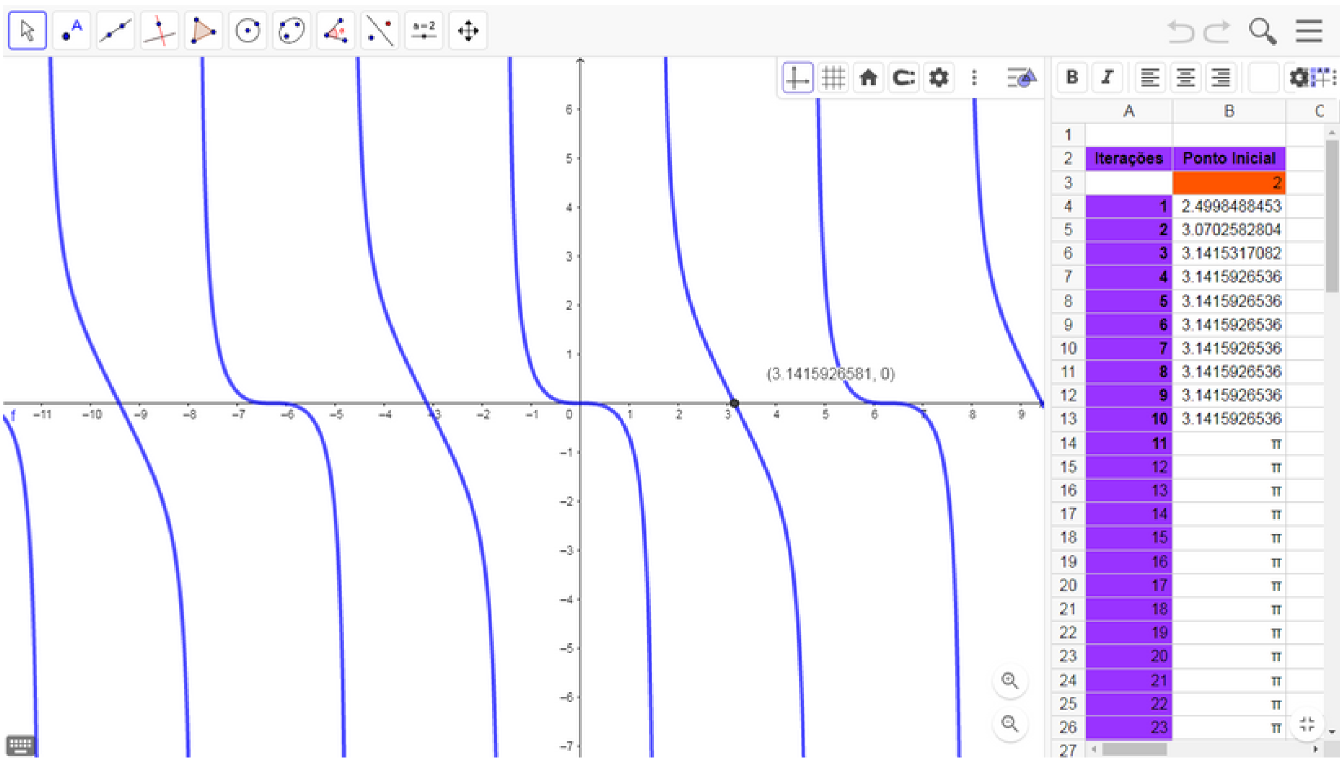
Assim, podemos ter g(x) = 2x e h(x) = - x + 4 (o que podemos chamar de duas funções elementares, e na interseção entre essas duas funções se encontra o intervalo das raízes).



Veja que o método converge muito rádio, na quarta iteração já temos a raiz aproximada, que é: x = 2,3542427582

Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação f(x) = sen(x) - tg(x), partindo do ponto inicial xo = 2.



Veja que o método converge muito rápido, na quarta iteração já temos a raiz aproximada, que é: x = 3.1415926536.

Resolução de Problemas

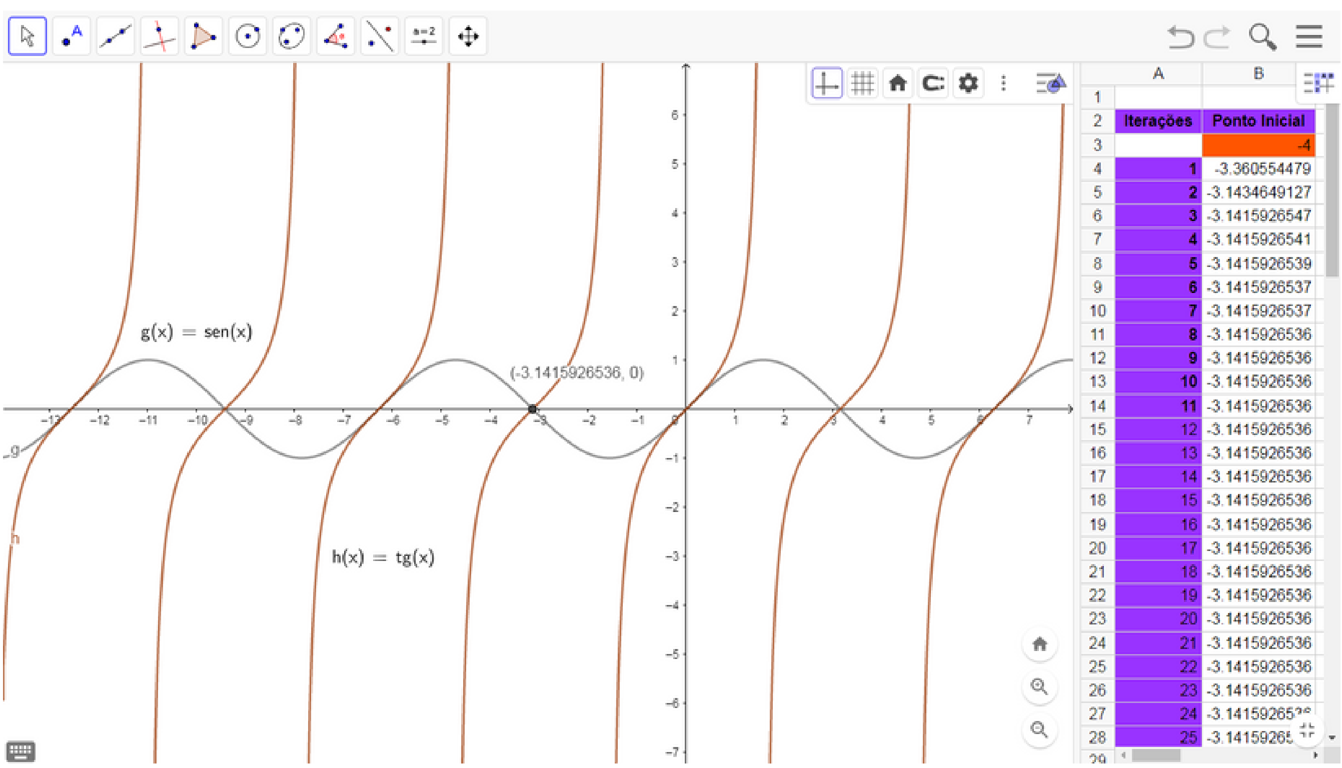
Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação f(x) = sen(x) - tg(x).

Resolução:

- Nesse caso não conhecemos os intervalos onde estão presentes as raízes, então podemos fazer:

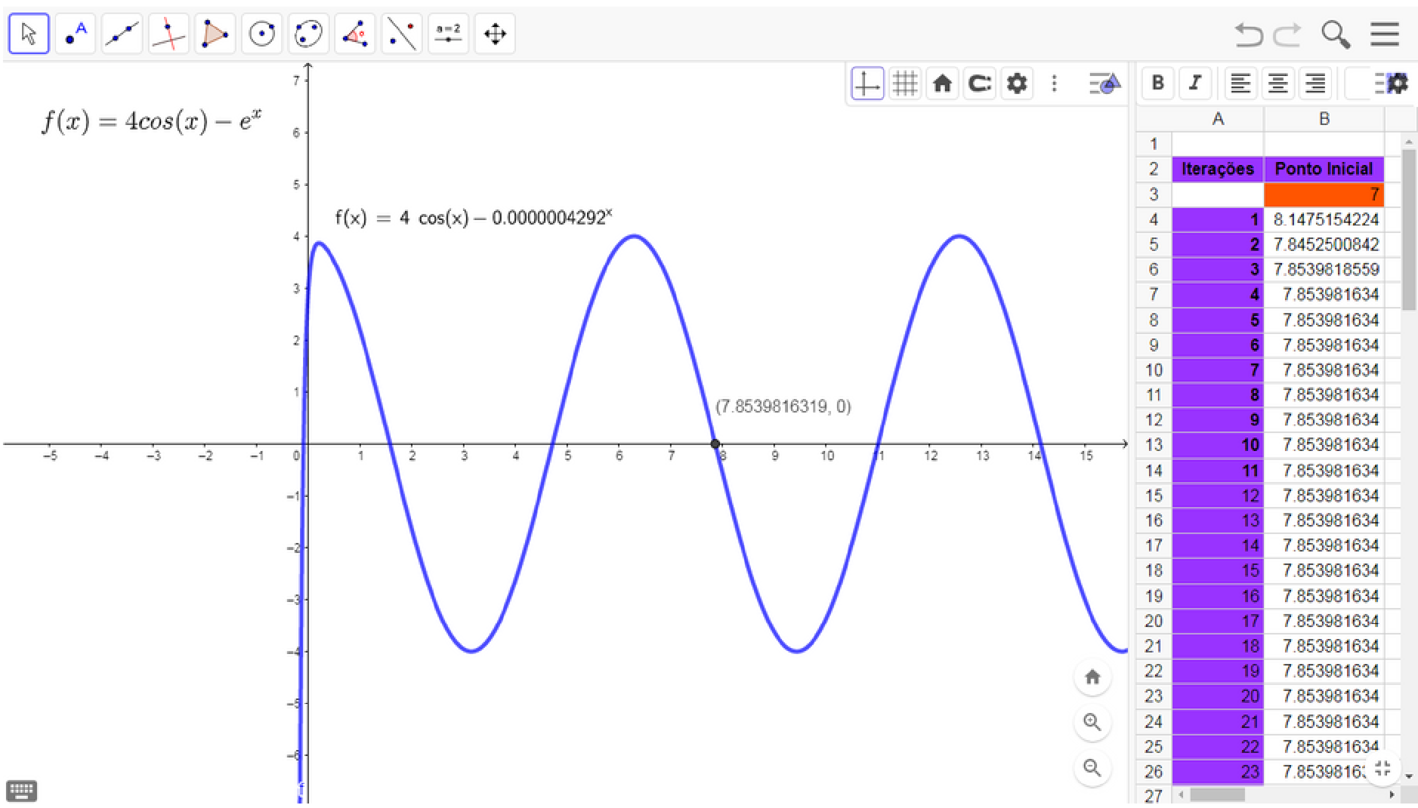
f(x) = sen(x) - tg(x)
sen(x) = tg(x)

Assim, podemos ter g(x) = sen(x) e h(x) = tg(x) (o que podemos chamar de duas funções elementares, e na interseção entre essas duas funções se encontra o intervalo das raízes), como temos várias raízes, vamos escolher o intervalo [-4,-3], fazendo xo = -4.



Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação: $f(x) = 4cos(x) - e^x$ partindo do ponto inicial xo = 7.



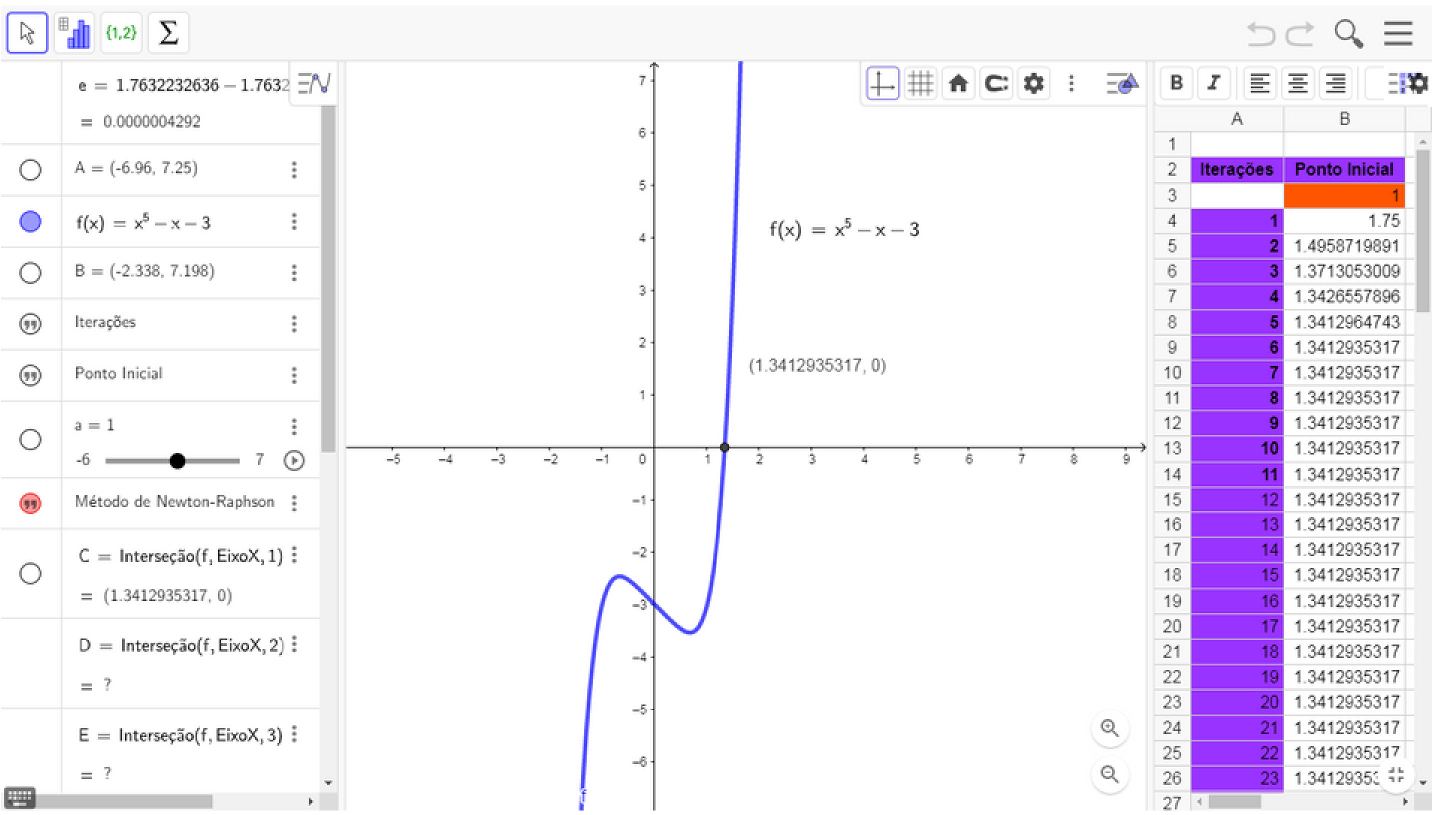
Veja que o método converge muito rápido, na quarta iteração já temos a raiz aproximada, que é:

x = 7,853981634

Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação: $f(x) = x^5 - x - 3$

partindo do ponto inicial xo = 1.



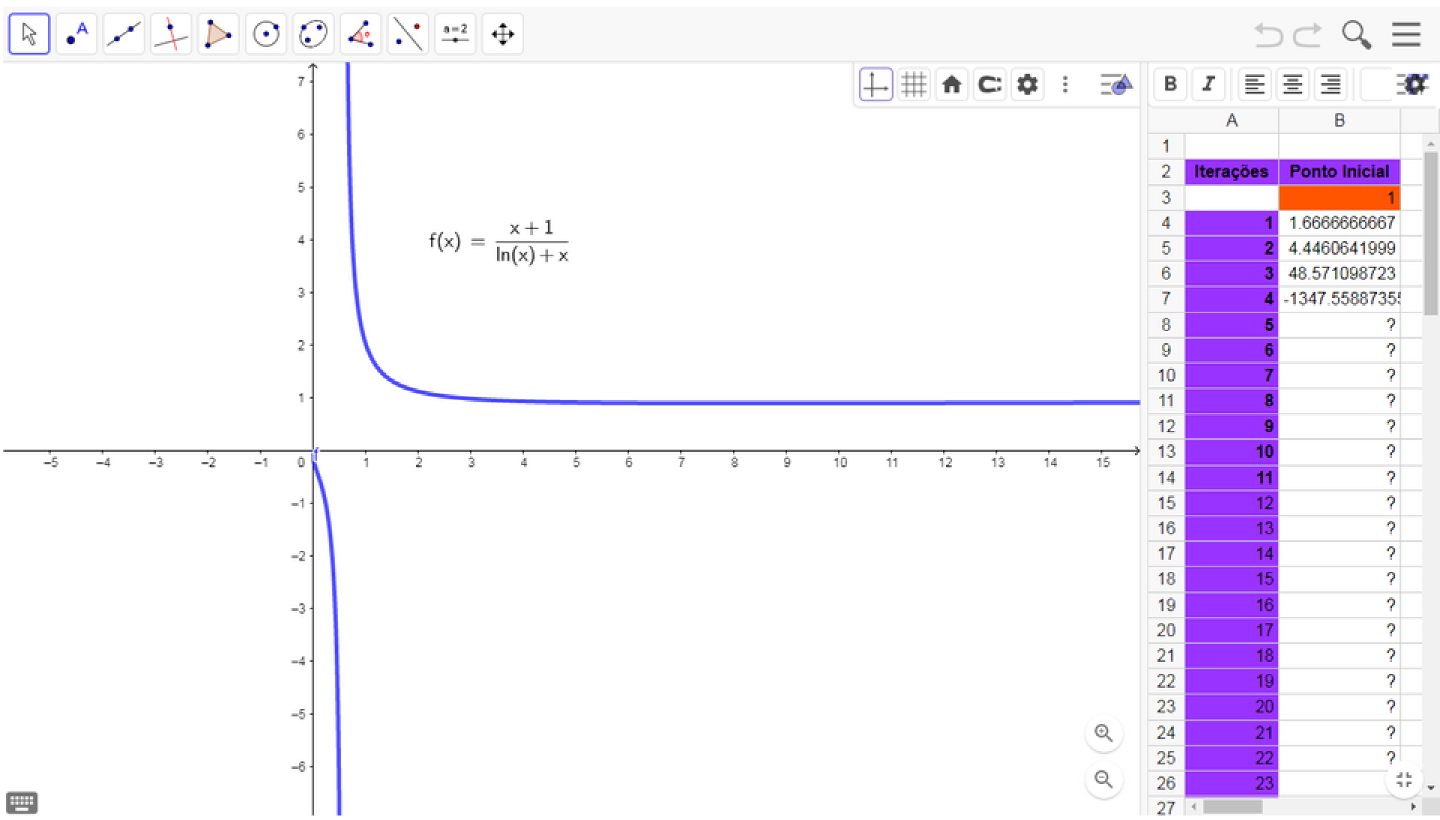
Veja que o método converge muito rápido, na sexta iteração já temos a raiz aproximada, que é:

x=1,3412935317

Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação f(x) =(x + 1)/(ln(x) +1), partindo do ponto inicial xo = 1.

Resolução:
- Observando o gráfico podemos verificar que as raízes não existem, logo não existe uma convergência.
- F(x) é um exemplo de função não contínua.



A função não é convergente.

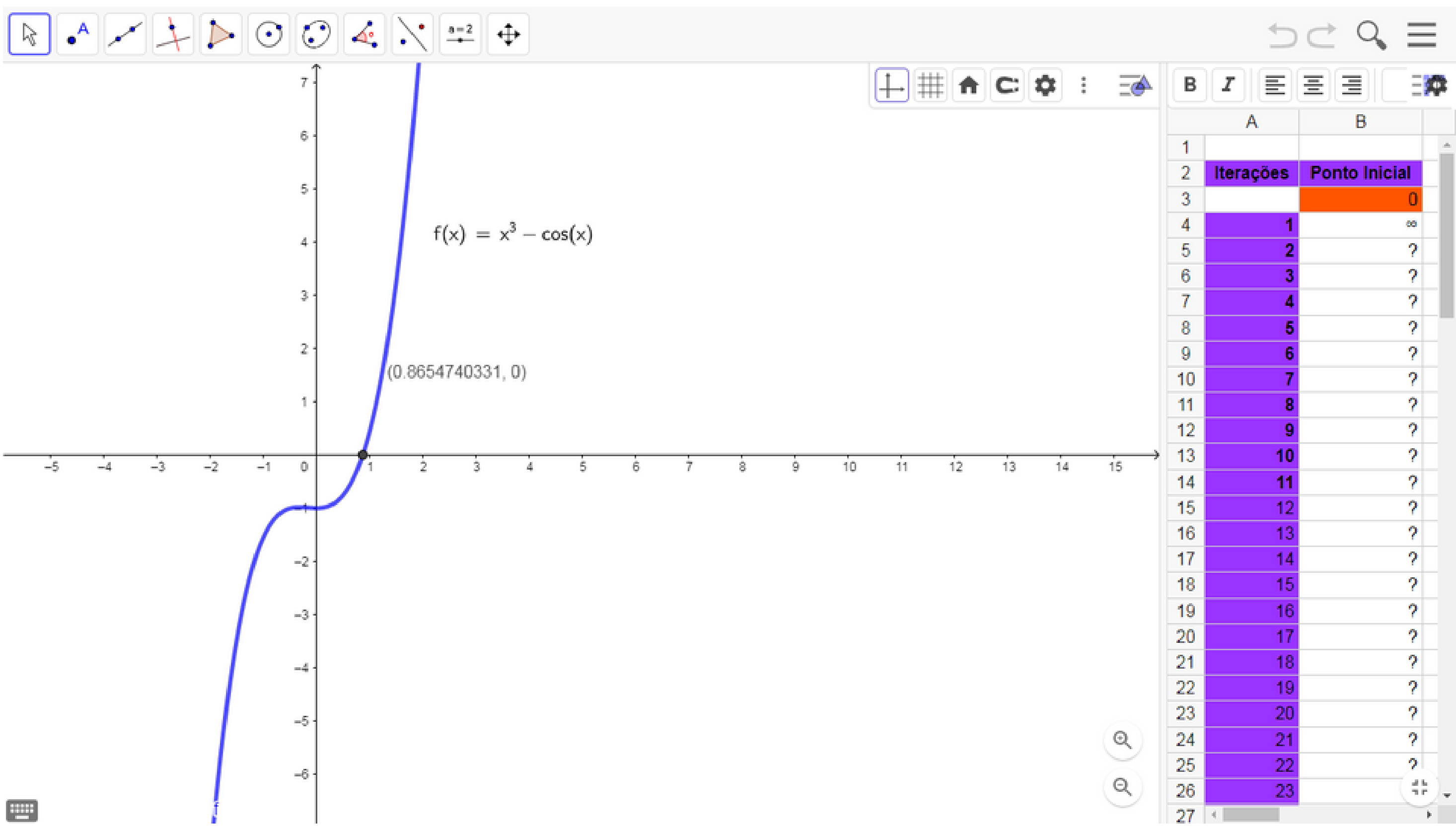
Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz

aproximada da equação : $f(x) = x^3 - \cos(x)$

partindo do ponto inicial xo = 0.

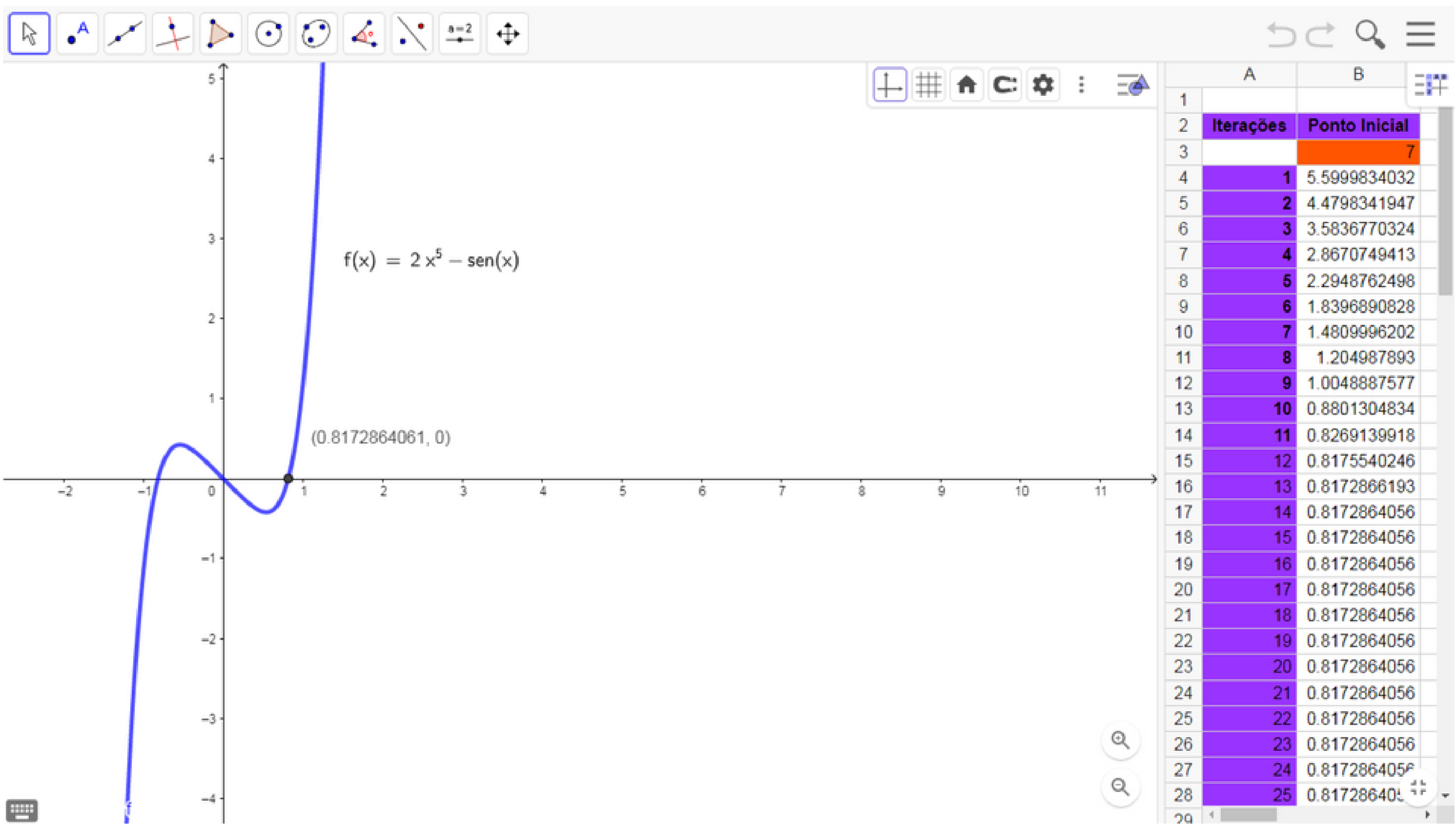
Resolução:
- Observando o gráfico podemos verificar que a raíz existe, o método de Newton-Raphson não funciona para resolver essa equação, pois a derivada da função f'(x)=3x2 + sen(x), quando f'(0) = 0, e causa uma indeterminação quando fazemos:
F(x)/f'(x) = -1/0



A função não é convergente.

Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação: $f(x) = 2x^5 - \text{sen}(x)$ partindo do ponto inicial xo = 7 (um ponto Bdistante da raiz).

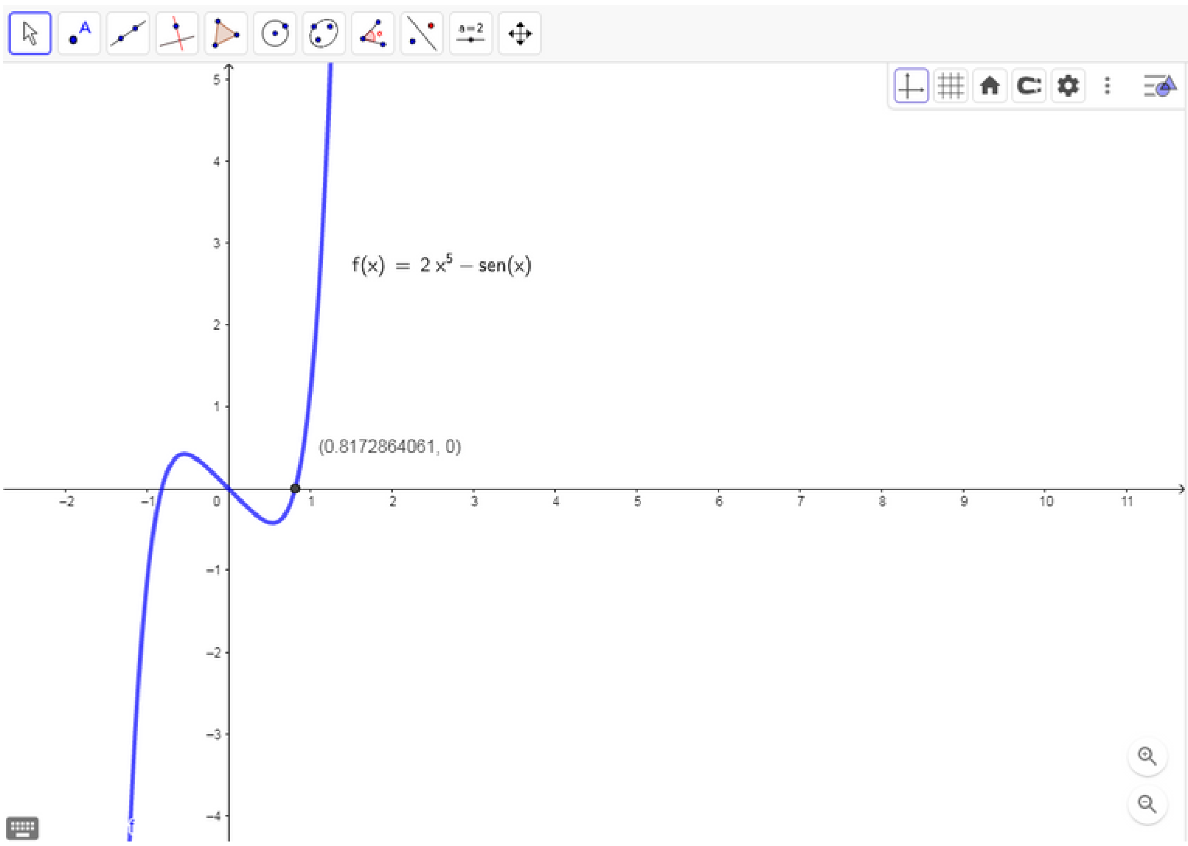


	A	B
1		
2	Iterações	Ponto Inicial
3		7
4	1	5.5999834032
5	2	4.4798341947
6	3	3.5836770324
7	4	2.8670749413
8	5	2.2948762498
9	6	1.8396890828
10	7	1.4809996202
11	8	1.204987893
12	9	1.0048887577
13	10	0.8801304834
14	11	0.8269139918
15	12	0.8175540246
16	13	0.8172866193
17	14	0.8172864056
18	15	0.8172864056
19	16	0.8172864056
20	17	0.8172864056
21	18	0.8172864056
22	19	0.8172864056
23	20	0.8172864056
24	21	0.8172864056
25	22	0.8172864056
26	23	0.8172864056
27	24	0.817286405
28	25	0.817286405

Veja que o método converge na 14 iteração, temos a raiz aproximada, que é: x=0,8172865056.

Resolução de Problemas

Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz aproximada da equação: $f(x) = 2x^5 - \text{sen}(x)$ partindo do ponto inicial xo = 7 (um ponto Bdistante da raiz).



	A	B
1		
2	Iterações	Ponto Inicial
3		7
4	1	5.5999834032
5	2	4.4798341947
6	3	3.5836770324
7	4	2.8670749413
8	5	2.2948762498
9	6	1.8396890828
10	7	1.4809996202
11	8	1.204987893
12	9	1.0048887577
13	10	0.8801304834
14	11	0.8269139918
15	12	0.8175540246
16	13	0.8172866193
17	14	0.8172864056
18	15	0.8172864056
19	16	0.8172864056
20	17	0.8172864056
21	18	0.8172864056
22	19	0.8172864056
23	20	0.8172864056
24	21	0.8172864056
25	22	0.8172864056
26	23	0.8172864056
27	24	0.8172864056
28	25	0.817286405

Veja que o método converge na 14 iteração, temos a raiz aproximada, que é: x=0,8172865056.

Vantagens desse método

1. Convergência rápida: o método converge rapidamente para a raiz desejada, especialmente quando a raiz inicial está próxima da raiz real.
2. Precisão: o método é capaz de calcular raízes com alta precisão, uma vez que leva em consideração a taxa de variação da função.
3. Aplicabilidade: o método pode ser aplicado em uma ampla gama de funções, incluindo funções não-lineares e funções com múltiplas raízes.
4. Facilidade de implementação: o método é relativamente fácil de implementar em programas de computador, devido à sua simplicidade matemática.
5. Convergência global: em muitos casos, o método de Newton-Raphson é capaz de convergir globalmente para a raiz desejada, desde que sejam observadas algumas condições pré-estabelecidas.

O método da bissecção

O método da Bisseção é um algoritmo simples e eficaz para encontrar a raiz de uma função contínua em um intervalo específico. Esse método funciona dividindo repetidamente o intervalo pela metade e determinando em qual metade a raiz da função está localizada.

O método começa com um intervalo inicial [a, b], onde a e b são dois valores iniciais que cercam a raiz da função. Em seguida, o método calcula o valor médio do inter

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Em seguida, a função é avaliada nos pontos a, b e c para determinar qual metade do intervalo contém a raiz. Se o valor da função em a e c tiverem sinais opostos, a raiz deve estar na metade esquerda do intervalo. Caso contrário, se o valor da função em b e c tiverem sinais opostos, a raiz deve estar na metade direita do intervalo.

Esse processo é repetido até que a diferença entre os valores de a e b seja menor que um valor de tolerância pré-determinado. Esse valor de tolerância é definido como a diferença entre os valores de a e b que é considerado suficientemente pequeno para que o valor de c seja aceito como a raiz da função.

O algoritmo da bissecção

Segue abaixo o algoritmo do método da Bisseção:

Entradas:

- Função f(x)
- Intervalo inicial [a, b]
- Tolerância ε

Saídas:

- Aproximação da raiz da função

1. Verificar se a função f(a) e f(b) têm sinais opostos. Caso contrário, interromper o algoritmo e retornar uma mensagem de erro.

2. Enquanto a diferença entre b e a for maior que ε, repetir os passos 3 a 6.

3. Calcular o ponto médio c do intervalo [a, b], dado por $c = (a + b) / 2$.

4. Calcular o valor da função $f(c)$.

5. Se $f(c)$ for zero ou a diferença entre b e a for menor que ε, interromper o algoritmo e retornar c como a aproximação da raiz.

6. Se $f(c)$ e $f(a)$ tiverem sinais opostos, definir b como c. Caso contrário, definir a como c.

7. Retornar c como a aproximação da raiz da função.

O algoritmo acima começa com um intervalo inicial [a, b] que contém a raiz da função f(x) e uma tolerância ε para a precisão da solução. Em seguida, ele verifica se a função tem sinais opostos nos pontos a e b, o que garante a existência de pelo menos uma raiz no intervalo.

Depois disso, o algoritmo entra em um loop que é executado enquanto a diferença entre b e a for maior que a tolerância ε. Dentro do loop, o ponto médio do intervalo é calculado e o valor da função f(c) é avaliado. Se f(c) for zero ou a diferença entre b e a for menor que ε, a solução é aceita como a aproximação da raiz e o algoritmo é interrompido.

Se f(c) e f(a) tiverem sinais opostos, a raiz deve estar na metade esquerda do intervalo e, portanto, b é atualizado para c. Caso contrário, a raiz deve estar na metade direita do intervalo e, portanto, a é atualizado para c.

Finalmente, o algoritmo retorna o valor de c como a aproximação da raiz da função f(x).

Aplicando o Método da Bissecção

Encontrar a raiz aproximada da equação

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

no intervalo [4,6], algebricamente

Podemos resolver a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ no intervalo [4,6] usando o método da Bisseção para encontrar uma raiz aproximada com uma tolerância ε. Antes de aplicar o método, é importante verificar se o intervalo escolhido contém uma raiz da equação. Para isso, podemos verificar se a função muda de sinal no intervalo [4,6].

Agora, podemos aplicar o método da Bisseção para encontrar uma raiz aproximada com uma tolerância ε. O pseudocódigo do método é o seguinte:

```
entrada: intervalo [a,b], tolerância ε
saída: raiz aproximada x da equação f(x) = 0

se f(a)*f(b) >= 0 então
   erro: a e b não delimitam um intervalo onde há uma raiz
senão
   enquanto (b-a)/2 > ε faça
      c ← (a+b)/2
      se f(c) = 0 então
         x ← c
         interromper enquanto
      senão se f(a)*f(c) < 0 então
         b ← c
      senão
         a ← c
   fim enquanto
   x ← (a+b)/2
fim se

retornar x
```

Aplicando o método da Bisseção para a equação:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

no intervalo [4,6] com uma tolerância de 0,01, temos:

a = 4, b = 6

f(a) = 4^2 - 8*4 + 15 = -1

f(b) = 6^2 - 8*6 + 15 = 3

f(a)*f(b) = -1 * 3 = -3 < 0, então há pelo menos uma raiz nesse intervalo a primeira iteração divide o intervalo ao meio: c = (a+b)/2 = (4+6)/2 = 5

f(c) = 5^2 - 8*5 + 15 = 0, então c é uma raiz exata da equação e o método pode ser interrompido caso contrário, a segunda iteração divide o intervalo em [4,5] e [5,6], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal.

a terceira iteração divide o subintervalo em [4,4.5] e [4.5,5], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal.

a quarta iteração divide o subintervalo em [4,4.25] e [4.25,4.5], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal.

a quinta iteração divide o subintervalo em [4,4.125] e [4.125,4.25], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal.

a sexta iteração divide o subintervalo em [4,4.0625] e [4.0625,4.125], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal

a sétima iteração divide o subintervalo em [4.0625,4.09375] e [4.09375,4.125], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal

a oitava iteração divide o subintervalo em [4.0625,4.078125] e [4.078125,4.09375], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal

a nona iteração divide o subintervalo em [4.0625,4.0703125] e [4.0703125,4.078125], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal.

a décima iteração divide o subintervalo em [4.0625,4.06640625] e [4.06640625,4.0703125], escolhendo o subintervalo onde a função muda de sinal

após 10 iterações, o método encontra uma raiz aproximada $x \approx 4.06420898$, que é a solução para a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ no intervalo [4,6] com uma tolerância de 0,01.

Note que o número de iterações necessárias pode variar de acordo com a escolha do intervalo e da tolerância desejada. Em geral, quanto menor a tolerância desejada, mais iterações serão necessárias para se obter uma solução aproximada. Por isso, é importante escolher um intervalo adequado e uma tolerância suficientemente precisa para o problema em questão.

No código acima, a função bissecao implementa o algoritmo do método da Bisseção. Ela recebe como entrada os valores do intervalo [a, b], a tolerância tol e um ponteiro para a função f que se deseja encontrar a raiz.

Dentro do loop while, o ponto médio c do intervalo é calculado e o valor da função f(c) é avaliado. Se f(c) for zero ou abs(b - a) < tol, a solução é aceita como a aproximação da raiz e a função retorna c.

Caso contrário, se f(a) * fc < 0, isso significa que a raiz deve estar na metade esquerda do intervalo e, portanto, o valor de b é atualizado para c. Caso contrário, a raiz deve estar na metade direita do intervalo e o valor de a é atualizado para c.

Critério de Parada

O método da bissecção é um algoritmo de busca de raízes de uma função contínua em um intervalo específico. O critério de parada do método da bissecção é alcançado quando o comprimento do intervalo (também conhecido como amplitude) se torna menor do que um valor pré-determinado de tolerância, indicando que a solução foi encontrada com precisão suficiente.

Mais especificamente, o critério de parada é baseado na diferença entre os valores da função nos pontos médios dos subintervalos criados a cada iteração do algoritmo. Se a diferença entre os valores da função em ambos os pontos médios for menor do que a tolerância estabelecida, então a solução é considerada encontrada com a precisão necessária e o algoritmo é interrompido.

O critério de parada do método da bissecção pode ser formulado matematicamente como:

$$|x1 - x2| < tol$$

onde x1 e x2 são os extremos do intervalo e tol é a tolerância definida pelo usuário.

Este critério de parada garante que o método da bissecção converge para uma solução com precisão arbitrariamente alta, desde que a função seja contínua no intervalo e haja apenas uma raiz no intervalo.

Número de Iterações

A fórmula para calcular o número de iterações necessárias para atingir uma determinada precisão no método da bissecção é dada por:

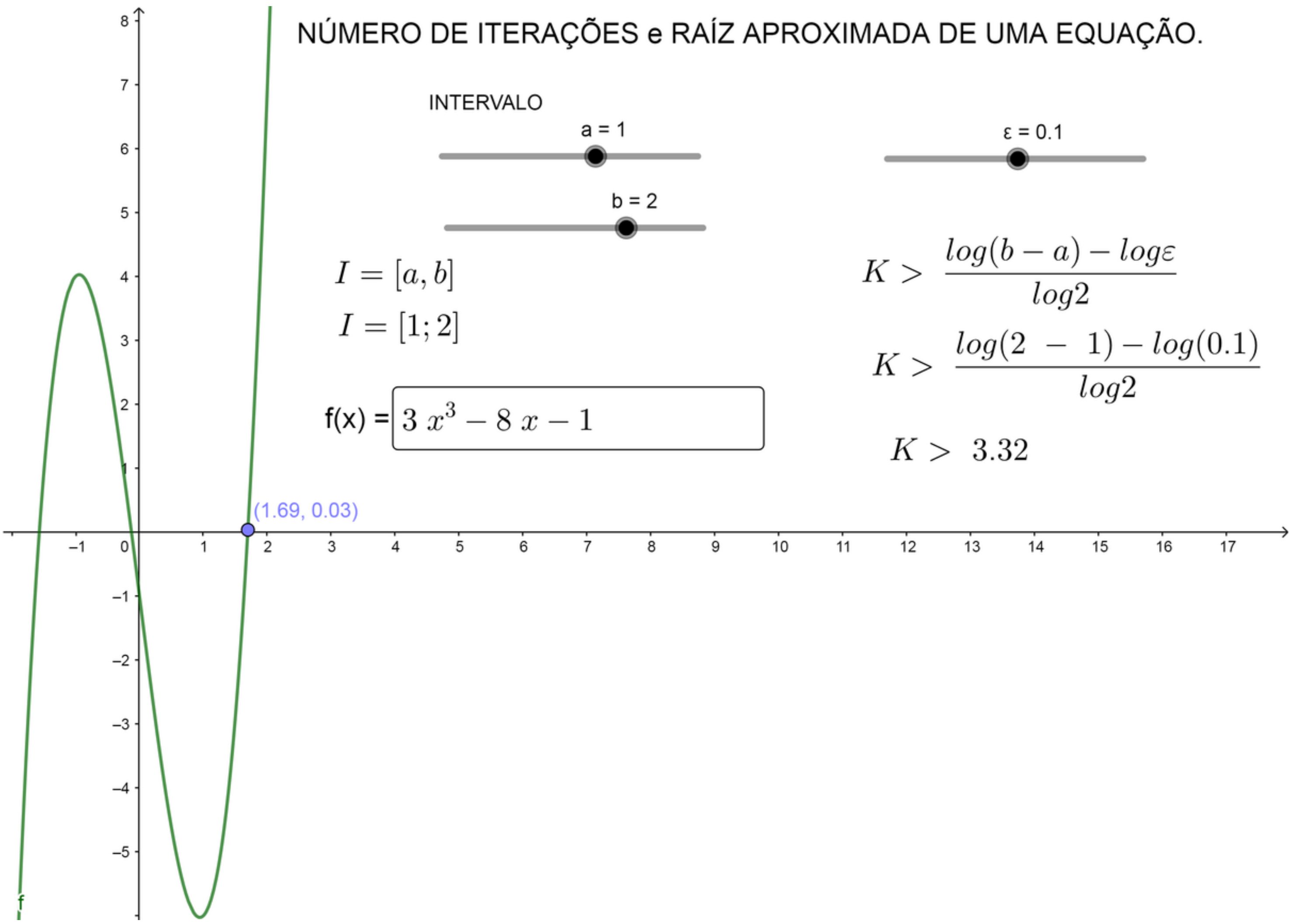
$$K > \frac{log(b-a) - log\varepsilon}{log2}$$

Essa fórmula é derivada do fato de que o método da bissecção divide o intervalo pela metade a cada iteração, ou seja, o comprimento do intervalo é reduzido pela metade a cada iteração. O número de iterações necessárias para atingir a precisão desejada depende do tamanho inicial do intervalo e da tolerância definida pelo usuário.

A fórmula mostra que o número de iterações necessárias é proporcional ao logaritmo do tamanho inicial do intervalo e inversamente proporcional à tolerância. Isso significa que quanto maior o intervalo inicial e menor a tolerância desejada, mais iterações serão necessárias para atingir a precisão desejada.

É importante lembrar que essa fórmula é uma estimativa do número de iterações necessárias e pode variar dependendo das características da função, do intervalo e da precisão desejada. Além disso, a fórmula assume que a função é contínua e unimodal no intervalo e que a tolerância definida pelo usuário é suficientemente pequena para atingir a precisão desejada.

Exemplo usando o geogebra.org



Nesse exemplo são necessárias quatro iterações, para achar a raiz aproximada da equação com precisão.

Código Python: método da bisseção

```
def bissecao(f, a, b, tol=1e-6, maxiter=100):
    """
    Aplica o método da bisseção para encontrar a raiz da função f no intervalo [a,b].
    Retorna o valor da raiz e o número de iterações necessárias para atingir a precisão desejada.

    Parâmetros:
    f (função): a função a ser analisada
    a (float): o limite inferior do intervalo
    b (float): o limite superior do intervalo
    tol (float): a tolerância desejada (padrão: 1e-6)
    maxiter (int): o número máximo de iterações permitido (padrão: 100)
```

```
    Retorna:
    raiz (float): o valor da raiz encontrada
    niter (int): o número de iterações necessárias
    """

    fa = f(a)
    fb = f(b)

    if fa * fb > 0:
        raise ValueError("A função deve ter sinais opostos em a e b")

    niter = 0
    while niter < maxiter:
        c = (a + b) / 2
        fc = f(c)
```

```
        if abs(fc) < tol or abs(b-a)/2 < tol:
            return c, niter

        niter += 1

        if fc * fa < 0:
            b = c
            fb = fc
        else:
            a = c
            fa = fc

    raise RuntimeError(f"O método da bisseção não convergiu após {maxiter} iterações")
```

Veja o exemplo de um applet elaborado em geogebra.org

Exemplo 01

Digite aqui uma função: $4\ \mathrm{sen}(x) - e^x$

Escolha um intervalo incial!

a = 0

b = 1

Verifique se f(a) . f(b) < 0

$f(a) = -1$

$f(b) = 0.6476$

$f(a) \times f(b) = -0.6476$

As iterações ocorrem da seguinte forma:

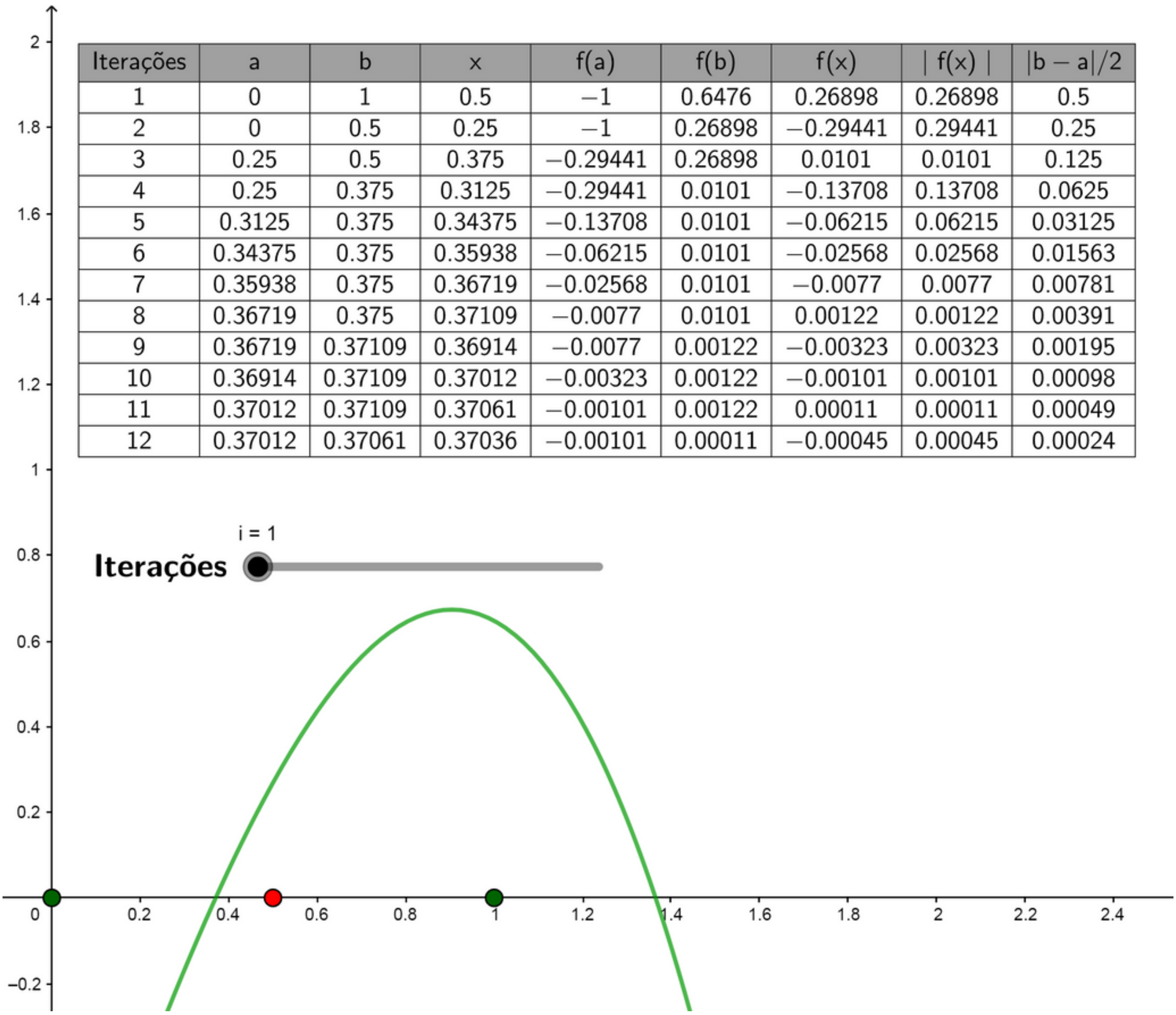
$$x = \frac{a+b}{2}$$

Se $f(a) \cdot f(x) < 0$ então, definimos: $a = a$ e $b = x$

Se $f(a) \cdot f(x) > 0$ então, definimos: $a = x$ e $b = b$

Com esse applet você pode digitar a equação na caixa de entrada, escolher os intervalos compatíveis e obter uma tabela com a raíz aproximada.

Tabela e gráfico com as raízes aproximadas

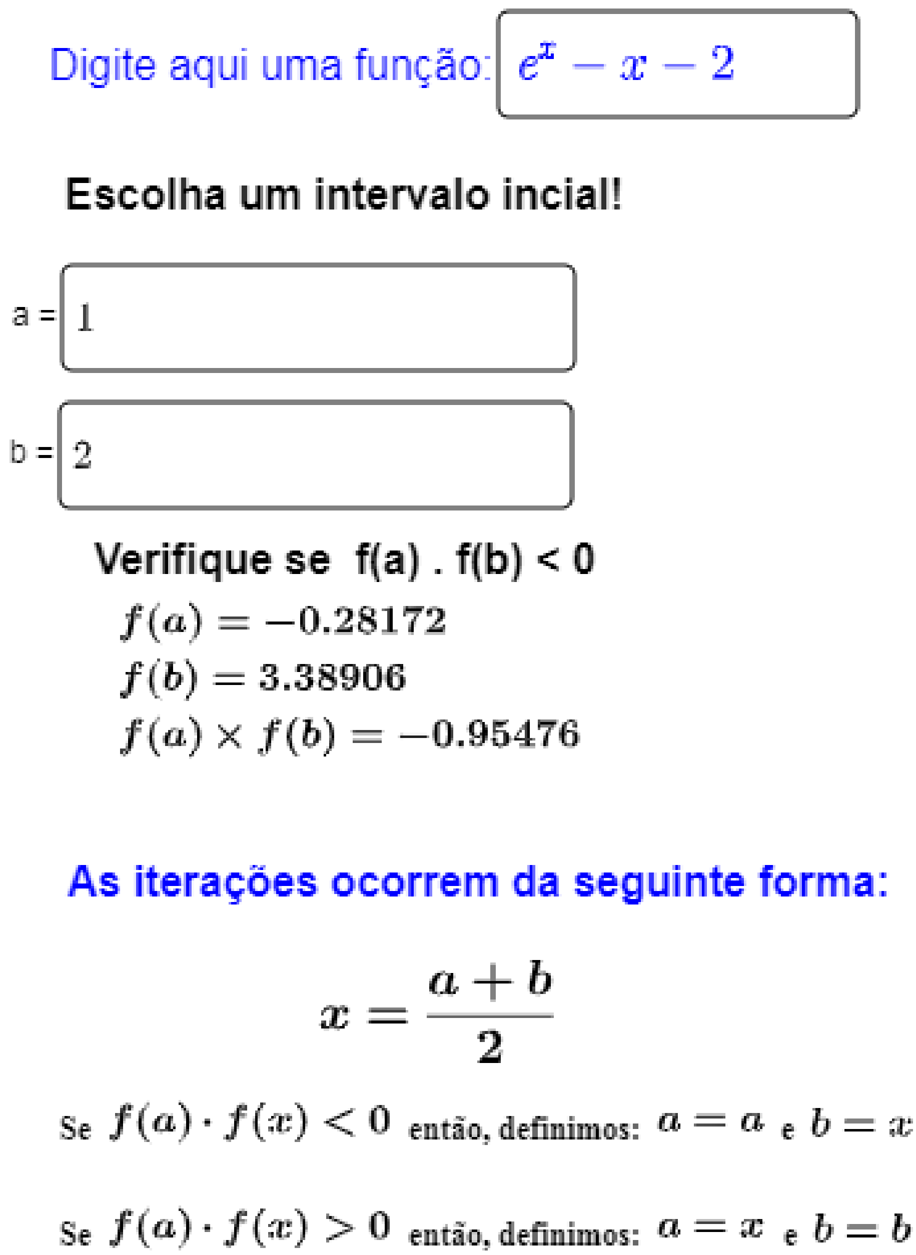


Iterações	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	| f(x) |	|b − a|/2
1	0	1	0.5	−1	0.6476	0.26898	0.26898	0.5
2	0	0.5	0.25	−1	0.26898	−0.29441	0.29441	0.25
3	0.25	0.5	0.375	−0.29441	0.26898	0.0101	0.0101	0.125
4	0.25	0.375	0.3125	−0.29441	0.0101	−0.13708	0.13708	0.0625
5	0.3125	0.375	0.34375	−0.13708	0.0101	−0.06215	0.06215	0.03125
6	0.34375	0.375	0.35938	−0.06215	0.0101	−0.02568	0.02568	0.01563
7	0.35938	0.375	0.36719	−0.02568	0.0101	−0.0077	0.0077	0.00781
8	0.36719	0.375	0.37109	−0.0077	0.0101	0.00122	0.00122	0.00391
9	0.36719	0.37109	0.36914	−0.0077	0.00122	−0.00323	0.00323	0.00195
10	0.36914	0.37109	0.37012	−0.00323	0.00122	−0.00101	0.00101	0.00098
11	0.37012	0.37109	0.37061	−0.00101	0.00122	0.00011	0.00011	0.00049
12	0.37012	0.37061	0.37036	−0.00101	0.00011	−0.00045	0.00045	0.00024

Veja que após a 12 iteração o valor da raíz aproximada é x = 0,37036.

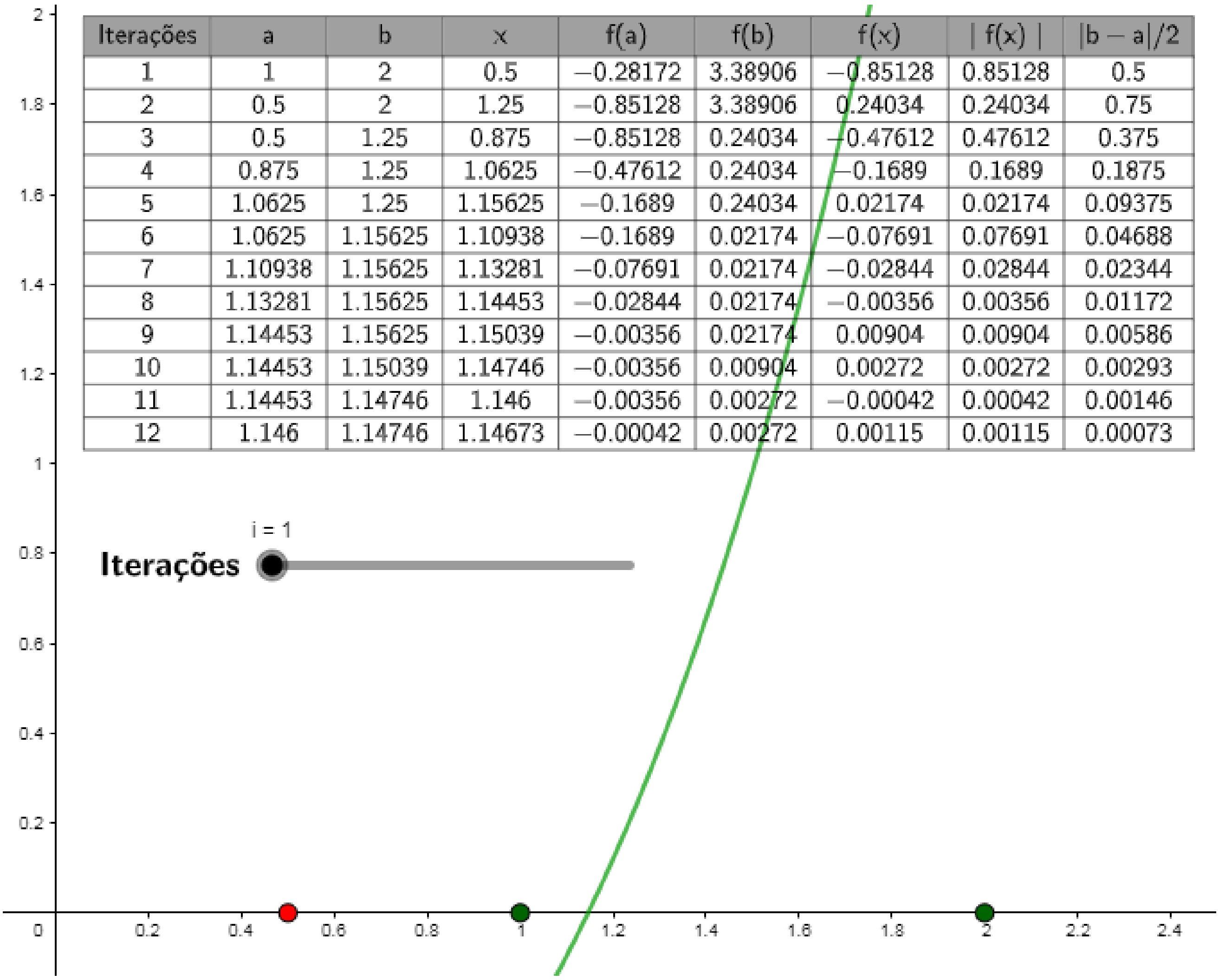
Veja o exemplo de um applet elaborado em geogebra.org

Exemplo 02



Com esse applet você pode digitar a equação na caixa de entrada, escolher os intervalos compatíveis e obter uma tabela com a raíz aproximada.

Tabela e gráfico com as raízes aproximadas



Iterações	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	| f(x) |	|b − a|/2
1	1	2	0.5	−0.28172	3.38906	−0.85128	0.85128	0.5
2	0.5	2	1.25	−0.85128	3.38906	0.24034	0.24034	0.75
3	0.5	1.25	0.875	−0.85128	0.24034	−0.47612	0.47612	0.375
4	0.875	1.25	1.0625	−0.47612	0.24034	−0.1689	0.1689	0.1875
5	1.0625	1.25	1.15625	−0.1689	0.24034	0.02174	0.02174	0.09375
6	1.0625	1.15625	1.10938	−0.1689	0.02174	−0.07691	0.07691	0.04688
7	1.10938	1.15625	1.13281	−0.07691	0.02174	−0.02844	0.02844	0.02344
8	1.13281	1.15625	1.14453	−0.02844	0.02174	−0.00356	0.00356	0.01172
9	1.14453	1.15625	1.15039	−0.00356	0.02174	0.00904	0.00904	0.00586
10	1.14453	1.15039	1.14746	−0.00356	0.00904	0.00272	0.00272	0.00293
11	1.14453	1.14746	1.146	−0.00356	0.00272	−0.00042	0.00042	0.00146
12	1.146	1.14746	1.14673	−0.00042	0.00272	0.00115	0.00115	0.00073

Veja que após a 12 iteração o valor da raíz aproximada é x = 1,14673.

Vantagens do Método da Bissecção

O método da Bisseção possui várias vantagens em relação a outros métodos para encontrar raízes de funções. Algumas dessas vantagens são:

1. Garantia de convergência: o método da Bisseção é garantido para convergir para a raiz de uma função, desde que ela seja contínua e tenha sinais opostos em ambos os lados do intervalo inicial.

2. Simplicidade de implementação: o algoritmo do método da Bisseção é relativamente simples e fácil de implementar, mesmo para iniciantes em programação.

3. Convergência lenta, mas segura: o método da Bisseção pode ser mais lento que outros métodos, como o método de Newton, mas sua convergência é segura e estável. Isso é particularmente importante quando se trabalha com funções que possuem múltiplas raízes ou singularidades.

4. Aproximação da raiz: ao contrário de alguns métodos iterativos, como o método de Newton, o método da Bisseção não exige a obtenção da primeira ou segunda derivada da função. Isso significa que o método pode ser aplicado a funções complexas e não diferenciáveis.

5. Facilidade de controle de erro: a precisão da solução pode ser controlada com facilidade pela escolha da tolerância ε. Quanto menor a tolerância, maior a precisão da solução.

6. Intervalos iniciais amplos: o método da Bisseção é capaz de encontrar a raiz de funções em intervalos iniciais amplos. Isso é especialmente útil quando se tem pouca informação sobre a função e não se sabe onde estão suas raízes.

Desvantagens do Método da Bissecção

Apesar das vantagens que o método da Bisseção apresenta, ele também possui algumas desvantagens.

1. Convergência lenta: o método da Bisseção converge para a raiz da função de maneira lenta, especialmente quando comparado a outros métodos como o método de Newton ou o método das secantes. Isso significa que ele pode levar mais tempo para encontrar a solução.

2. Limitação do número de iterações: o método da Bisseção não permite um número infinito de iterações, pois isso pode causar instabilidade numérica. Portanto, é importante definir um número máximo de iterações permitidas.

3. Necessidade de um intervalo inicial: o método da Bisseção requer um intervalo inicial [a, b] onde a função tem sinais opostos em ambos os lados. Isso significa que se a função não possui essas características, o método pode não ser aplicável.

4. Dificuldade para encontrar múltiplas raízes: se a função possui múltiplas raízes dentro do mesmo intervalo inicial, o método da Bisseção pode encontrar apenas uma delas. Portanto, para encontrar todas as raízes, é necessário repetir o processo várias vezes com diferentes intervalos iniciais.

5. Sensibilidade à escolha do intervalo inicial: a escolha do intervalo inicial pode afetar a convergência do método da Bisseção. Se o intervalo for muito grande, a convergência pode ser lenta. Se for muito pequeno, o método pode não encontrar a raiz correta. Portanto, a escolha do intervalo inicial requer alguma experiência ou conhecimento prévio sobre a função.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A semelhança de triângulos é uma propriedade geométrica que ocorre quando dois triângulos têm medidas proporcionais em seus lados correspondentes e ângulos correspondentes congruentes.

Em outras palavras, se dois triângulos têm ângulos iguais e lados com medidas proporcionais, eles são considerados semelhantes. A semelhança entre dois triângulos é indicada por um símbolo de semelhança, geralmente uma espécie de "t", que indica que os dois triângulos são semelhantes.

A semelhança de triângulos é importante em matemática e em muitas aplicações .práticas, como na arquitetura, engenharia e design gráfico.

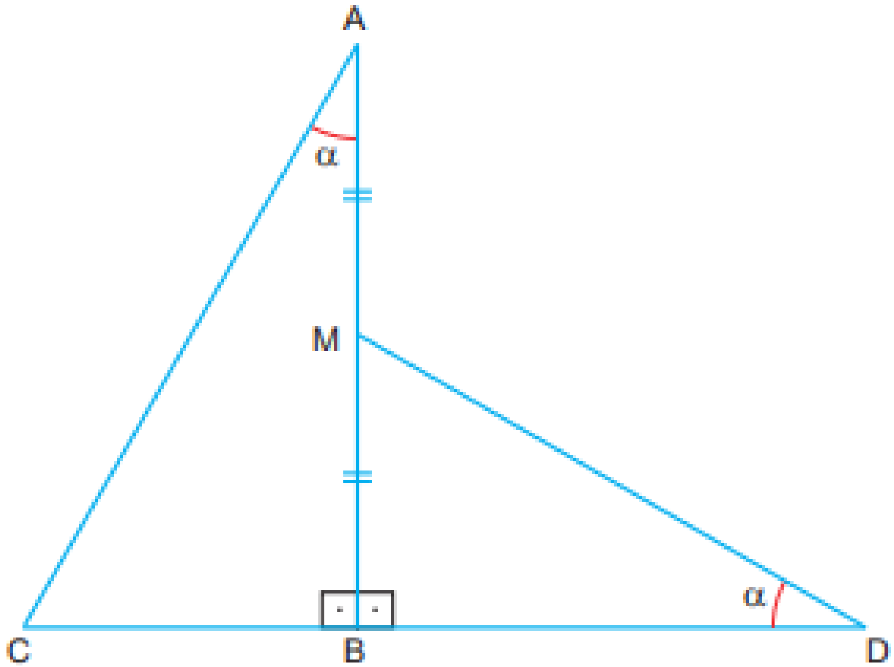
Por exemplo, em um mapa, as estradas e rios são desenhados em escala para representar as distâncias e proporções corretas. Essa escala é possível porque a semelhança de triângulos permite que as proporções sejam mantidas em diferentes tamanhos.

A semelhança de triângulos também é usada para resolver problemas de geometria, como encontrar a altura de um edifício ou a distância entre dois objetos inacessíveis. Para isso, é necessário estabelecer a semelhança entre dois triângulos e usar as proporções para determinar as medidas desejadas.

Em resumo, a semelhança de triângulos é uma propriedade importante na geometria que permite que as proporções sejam mantidas em diferentes tamanhos e é usada para resolver problemas práticos e matemáticos.

Questão 01 - SANTA CASA
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A figura indica triângulos retângulos CBA e MBD. Os pontos A, M e B são colineares, assim como também são colineares os pontos C, B e D. Os ângulos $C\hat{A}B$ e $M\hat{D}B$ são congruentes. Sabe-se ainda que AM = BM = 1 cm e que $CB + BD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, com CB < BD.



Nas condições descritas, a mediana $\overline{CM}$ do triângulo ABC é igual a

a) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ cm

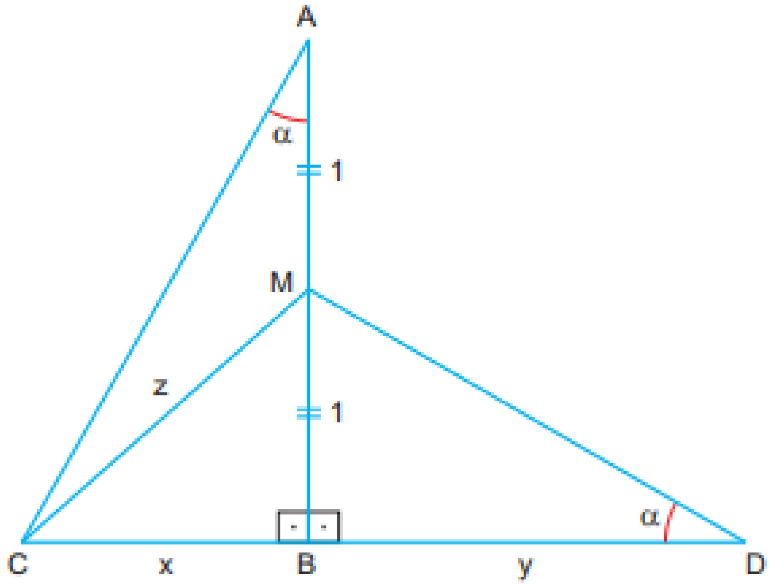
b) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ cm

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm

e) $\frac{16\sqrt{3}}{25}$ cm

Resolução



Sejam CB = x cm, BD = y cm e CM = z cm.

I) Da semelhança dos triângulos ABC e DBN, temos:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{1} \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

II) Como CB + BD = $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, temos: x + y = $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x + \frac{2}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x^2 - 5\sqrt{3}\,x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{6} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ pois, } x < y.$$

III) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCM, temos:

$$z^2 = x^2 + 1^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow z = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Logo, CM = $\sqrt{\frac{7}{3}}$ cm.

Solução usando o Geogebra

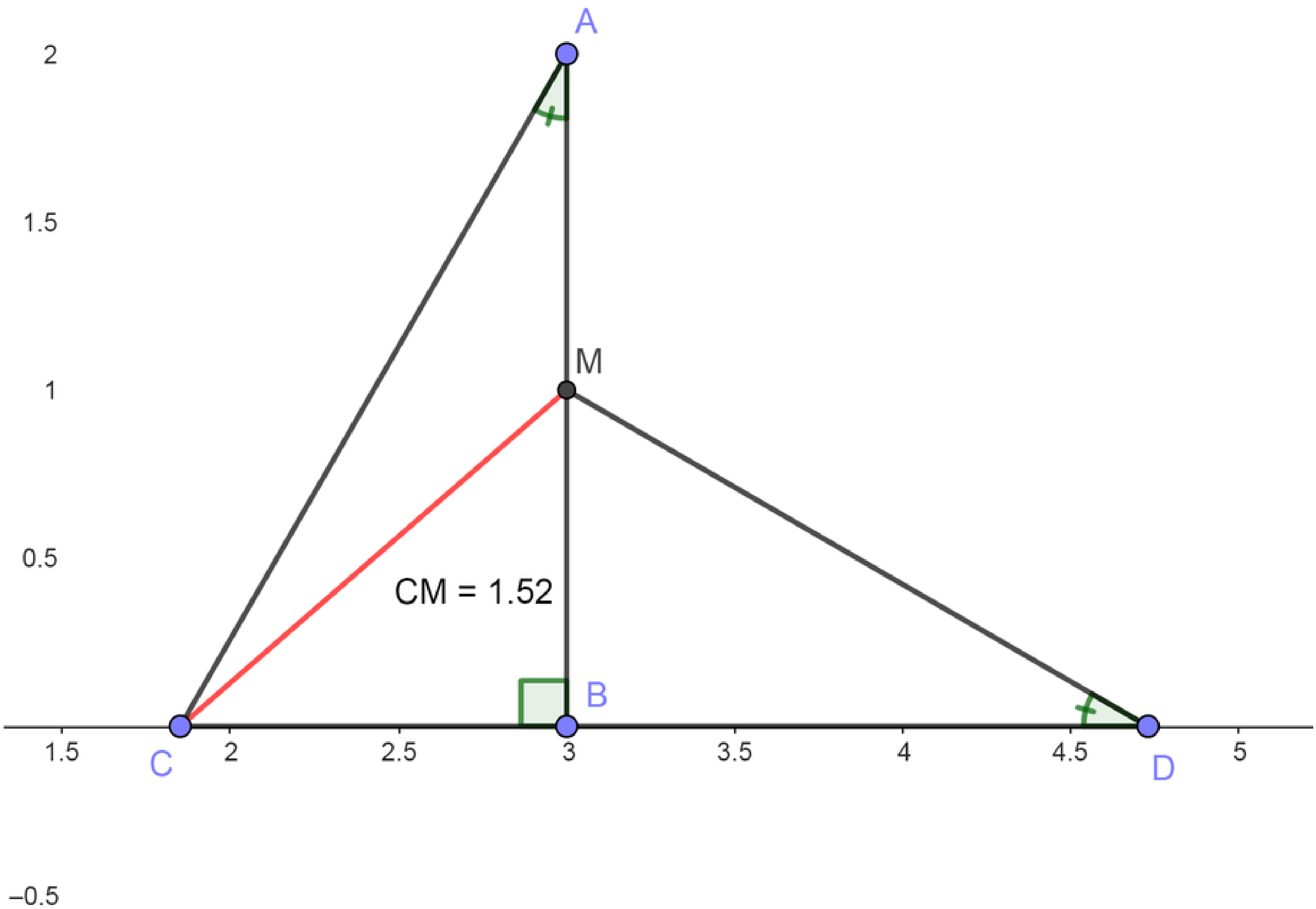


GRÁFICO DE FUNÇÕES

Gráfico de funções é uma representação visual das relações entre as variáveis de uma função. É uma ferramenta útil para visualizar e entender o comportamento de uma função em um determinado intervalo.

O gráfico de uma função é geralmente desenhado em um plano cartesiano, que é um sistema de coordenadas com dois eixos perpendiculares, horizontal e vertical. O eixo horizontal é chamado de eixo x e representa a variável independente da função, enquanto o eixo vertical é chamado de eixo y e representa a variável dependente da função.

Para desenhar o gráfico de uma função, é necessário escolher alguns valores para a variável independente x e, em seguida, calcular os correspondentes valores da variável dependente y.

Esses pares de valores (x,y) podem ser plotados no plano cartesiano como pontos e, em seguida, unidos por uma curva suave para formar o gráfico da função.

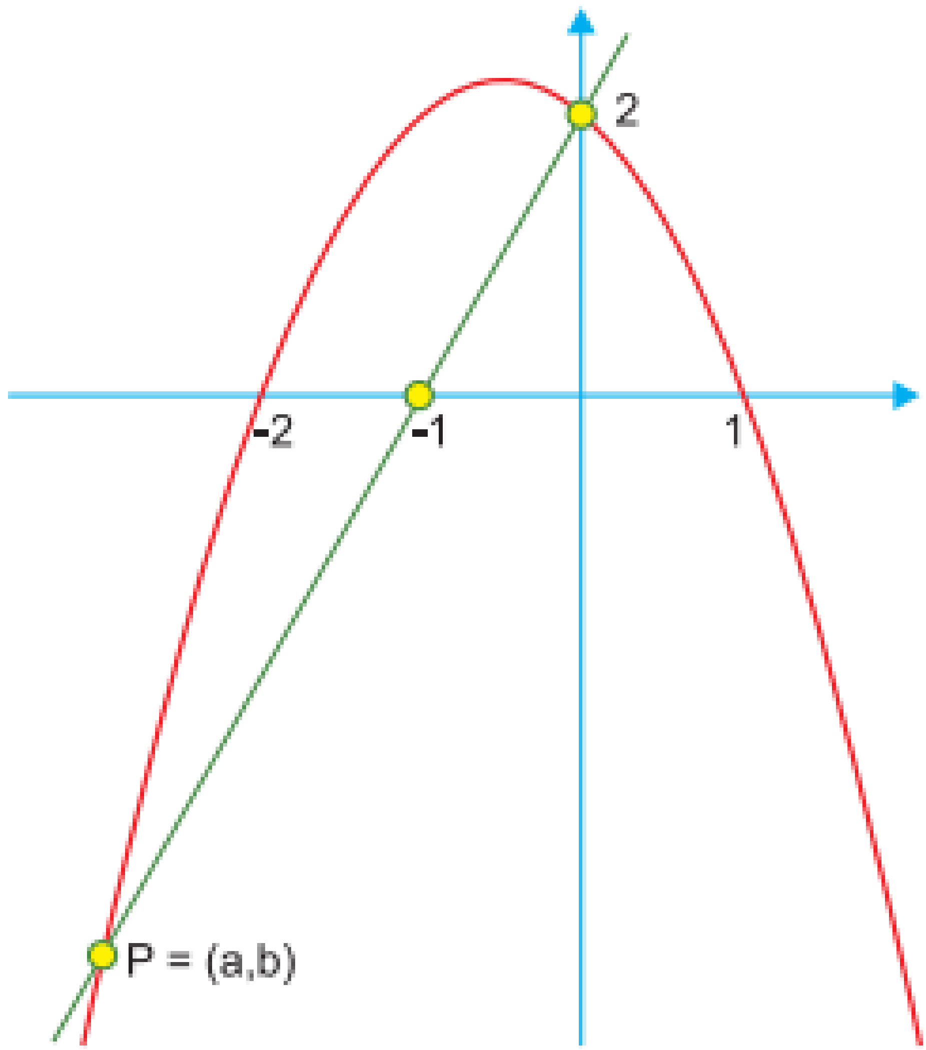
O gráfico de uma função pode fornecer informações importantes sobre o seu comportamento, como os valores mínimo e máximo, o ponto de interceptação com o eixo x e o eixo y, e os pontos de inflexão, onde a curvatura da função muda. Além disso, o gráfico de uma função pode ser usado para encontrar soluções de equações e resolver problemas de aplicação.

Em resumo, o gráfico de funções é uma representação visual útil das relações entre as variáveis de uma função, que pode ajudar a entender o comportamento da função e encontrar soluções de equações.

Ele é desenhado em um plano cartesiano, com o eixo horizontal representando a variável independente e o eixo vertical representando a variável dependente.

Questão 02 - UNICAMP
GRÁFICO DE FUNÇÕES

Na figura abaixo estão representados os gráficos de uma parábola, de uma reta, e o ponto P = (a,b), que é um dos pontos de interseção da reta com a parábola.



O valor de a + b é

a) –7,5.

b) –7.

c) –6,5.

d) –6.

Resolução

I) A reta que passa pelos pontos (–1, 0) e (0, 2) é representanda pela equação $y = mx + n$ onde

$$m = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} \Leftrightarrow m = \frac{2}{1} \Leftrightarrow m = 2$$

Assim $y = 2x + n$

Como (0, 2) pertence à reta, temos:

$2 = 2 \,.\, 0 + n \Leftrightarrow n = 2$

Portanto, $y = 2x + 2$

II) A parábola representada na figura pode ser dada pela equação $y = p \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$ onde x_1 e x_2 são os zeros de y. Pelo gráfico tem-se que $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$; assim

$y = p \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 1)$

Como o ponto (0, 2) pertence à parábola segue que:

$p \,.\, (0 + 2) \,.\, (0 - 1) = 2 \Rightarrow \boxed{p = -1}$ e, desta forma:

$y = -1 \,.\, (x + 2) \,.\, (x - 1)$ ou $y = -x^2 - x + 2$

III) Como P (a, b) pertence à intersecção de $y = 2x + 2$ e $y = -x^2 - x + 2$ segue que:

$$-x^2 - x + 2 = 2x + 2$$

$$-x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -3$$

Logo $a = -3$ e $b - 4$

Portanto, $a + b = -7$

Solução usando o Geogebra