Aerodinámica de altas velocidades y fenómenos de re-entrada

Métodos de Inclinación Local

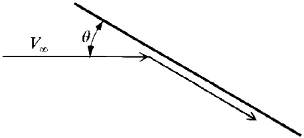
Sebastián Franchini

Curso 2020-2021

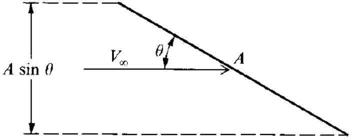
Instituto Universitario de Microgravedad "Ignacio Da Riva"
Universidad Politécnica de Madrid. IDR/UPM
E.T.S.I. Aeronáutica y del Espacio
www.idr.upm.es

Flujo Newtoniano

- Modelo desarrollado por Newton para calcular la fuerza sobre una placa inclinada. Publicado en el *Principia* en 1687
- Considera el fluido como un choro de partículas que inciden sobre la placa
- Cuando chocan con la placa pierden toda la cantidad de movimiento en la dirección normal a la placa, pero la conservan en la dirección tangencial



a)



b)

- La variación de la velocidad en la dirección normal a la placa es

$$\Delta u = u_\infty \sin\theta$$

y el gasto que incide sobre la placa de área A es

$$G = \rho_\infty u_\infty A \sin\theta$$

- La variación de la velocidad en la dirección normal a la placa es

$$\Delta u = u_\infty \sin\theta$$

  y el gasto que incide sobre la placa de área A es

$$G = \rho_\infty u_\infty A \sin\theta$$

- La fuerza debe ser igual a la variación en la cantidad de movimiento en la dirección normal a la placa:

- La variación de la velocidad en la dirección normal a la placa es

$$\Delta u = u_\infty \sin\theta$$

y el gasto que incide sobre la placa de área A es

$$G = \rho_\infty u_\infty A \sin\theta$$

- La fuerza debe ser igual a la variación en la cantidad de movimiento en la dirección normal a la placa:

$$\begin{aligned} F &= G\Delta u = (\rho_\infty u_\infty A \sin\theta)(u_\infty \sin\theta) \\ &= \rho_\infty u_\infty^2 A \sin^2\theta \end{aligned}$$

- O bien,

$$\frac{F}{A} = \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2\theta$$

presión debida al chorro de partículas.

- O bien,
$$\frac{F}{A} = \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2\theta$$
presión debida al chorro de partículas.
- Debe sumarse la presión estática debido al movimiento aleatorio de la partículas de gas $\triangleright$la presión estática

- O bien,

$$\frac{F}{A} = \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2\theta$$

presión debida al chorro de partículas.

- Debe sumarse la presión estática debido al movimiento aleatorio de la partículas de gas $\triangleright$ la presión estática

$$p - p_\infty = \frac{F}{A} = \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2\theta$$

Método de Newton

- O bien,
$$\frac{F}{A} = \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2\theta$$
presión debida al chorro de partículas.
- Debe sumarse la presión estática debido al movimiento aleatorio de la partículas de gas $\triangleright$ la presión estática

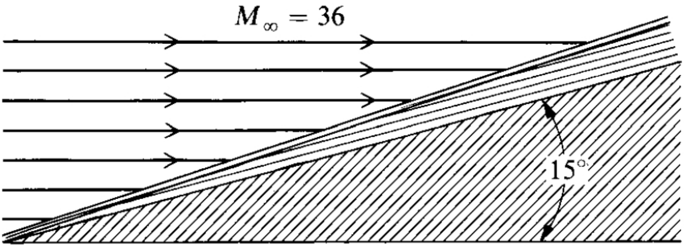
$$p - p_\infty = \frac{F}{A} = \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2\theta$$

Por lo que el coeficiente de presión sobre la placa queda:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = 2\sin^2\theta$$

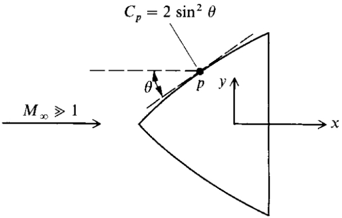
El flujo hipersónico tiene semejanza geométrica y cinemática con el modelo de Newton, por lo que presenta semejanza dinámica.

El flujo hipersónico tiene semejanza geométrica y cinemática con el modelo de Newton, por lo que presenta semejanza dinámica.

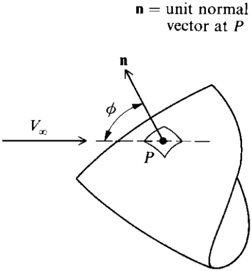


$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = 2\sin^2\theta$$

Puede extenderse para figuras bidimensionales con curvatura y cuerpos tridimensionales



a)



b)

Se determina la componente de la velocidad u_∞ normal a al superficie:

$$\boldsymbol{u}_\infty \cdot \boldsymbol{n} = u_\infty \cos\phi = u_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

Se determina la componente de la velocidad u_∞ normal a al superficie:

$$\boldsymbol{u}_\infty \cdot \boldsymbol{n} = u_\infty \cos\phi = u_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

Como $\theta = \pi/2 - \phi$

$$\boldsymbol{u}_\infty \cdot \boldsymbol{n} = u_\infty \sin\theta$$

Se determina la componente de la velocidad u_∞ normal a al superficie:

$$\boldsymbol{u}_\infty \cdot \boldsymbol{n} = u_\infty \cos\phi = u_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

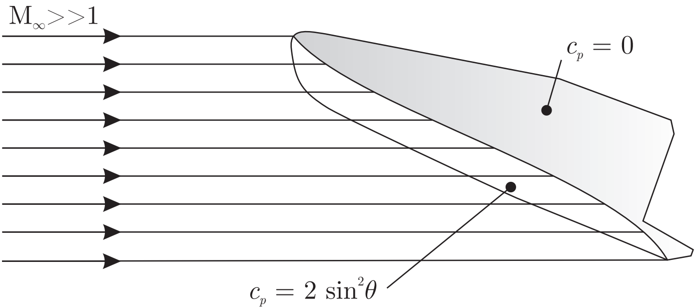
Como $\theta = \pi/2 - \phi$

$$\boldsymbol{u}_\infty \cdot \boldsymbol{n} = u_\infty \sin\theta$$

O bien

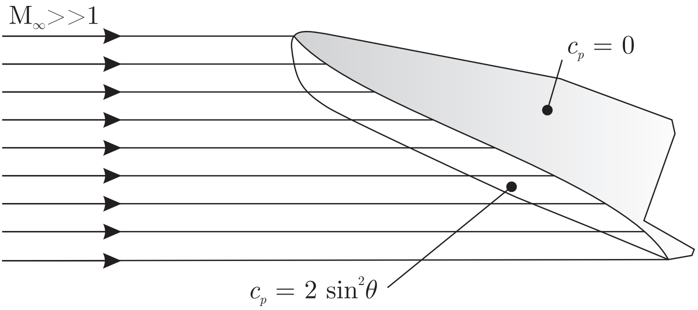
$$\sin\theta = \frac{\boldsymbol{u}_\infty}{u_\infty} \cdot \boldsymbol{n}$$

Método de Newton



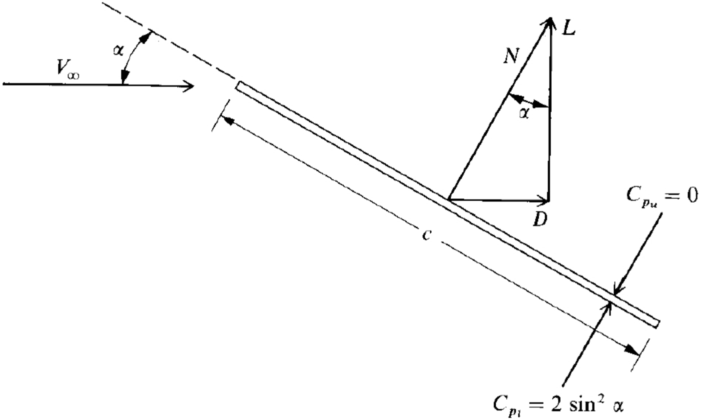
- En el flujo newtoniano las partículas de aire inciden sobre el área frontal del cuerpo.
- En el área que se encuentra a sotavento puede suponerse que $p = p_\infty$ ==> $c_p = 0$

Método de Newton



- En el flujo newtoniano las partículas de aire inciden sobre el área frontal del cuerpo.
- En el área que se encuentra a sotavento puede suponerse que $p = p_\infty$ ==> $c_p = 0$

Conocer la distribución de coeficiente de presión se reduce a un problema geométrico



El coeficiente de presión en el intradós es

$$c_{p,l} = 2\sin^2\alpha$$

En el extradós es

$$c_{p,E} = 0$$

En el extradós es

$$c_{p,E} = 0$$

Integrando a lo largo de la cuerda se obtiene el coeficiente de fuerza normal:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{c}\int_0^c \left(c_{p,I} - c_{p,E}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{c}\left(2\sin^2\alpha\right) c \end{aligned}$$

O bien,

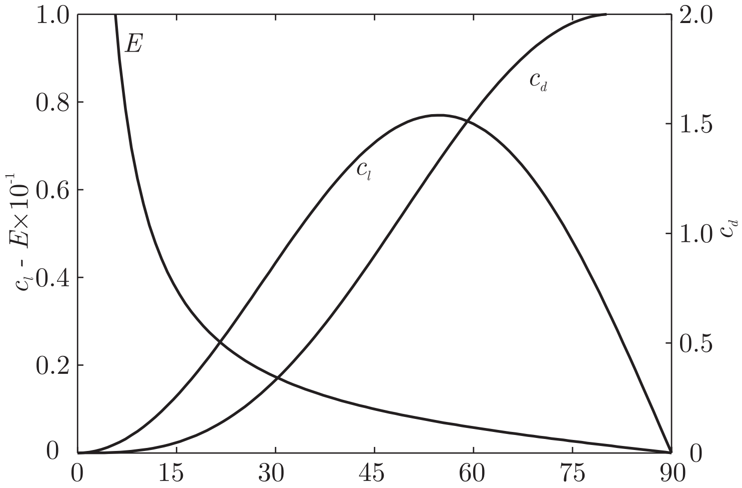
$$c_n = 2\sin^2\alpha$$

Los coeficientes de sustentación y resistencia son:

$$\begin{aligned} c_l &= c_n \cos\alpha = 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ c_d &= c_n \sin\alpha = 2\sin^3\alpha \end{aligned}$$

Y la eficiencia aerodinámica:

$$\frac{c_l}{c_d} = \cot\alpha$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
c_l - $E\times10^{-1}$
0
15
30
45
60
75
90
2.0
1.5
1.0
0.5
0
c_d
E
c_l
c_d

Observaciones

- **Estos resultados no dependen implícitamente del número de Mach**

Observaciones

- **Estos resultados no dependen implícitamente del número de Mach**
- La eficiencia crece infinitamente para $\alpha \to 0$, no se considera la resistencia de fricción

Observaciones

- **Estos resultados no dependen implícitamente del número de Mach**
- La eficiencia crece infinitamente para $\alpha \to 0$, no se considera la resistencia de fricción
- El $c_{l\,\text{máx}}$ ocurre a $\alpha \approx 55^\circ$. El coeficiente máximo de mucho vehículos hipersónicos ocurre en el entorno a ese ángulo.

Observaciones

- **Estos resultados no dependen implícitamente del número de Mach**
- La eficiencia crece infinitamente para $\alpha \to 0$, no se considera la resistencia de fricción
- El $c_{l\,\text{máx}}$ ocurre a $\alpha \approx 55^\circ$. El coeficiente máximo de mucho vehículos hipersónicos ocurre en el entorno a ese ángulo.
- Para ángulos de ataque pequeños la curva de c_l no es lineal, en contraste con los perfiles en régimen subsónico. **El flujo hipersónico es no-lineal.**

Método de Newton modificado

Método de Newton modificado

El el 55' se propuso la siguiente modificación:

$$c_p = c_{p\,\text{máx}} \sin^2 \theta$$

Método de Newton modificado

El el 55' se propuso la siguiente modificación:

$$c_p = c_{p\,\text{máx}} \sin^2 \theta$$

Donde:

$$c_{p\,\text{máx}} = \frac{p_{0,2} - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = \frac{2}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{0,2}}{p_\infty} - 1\right)$$

Método de Newton modificado

El el 55' se propuso la siguiente modificación:

$$c_p = c_{p\,\text{máx}} \sin^2\theta$$

Donde:

$$c_{p\,\text{máx}} = \frac{p_{0,2} - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = \frac{2}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2}\left(\frac{p_{0,2}}{p_\infty} - 1\right)$$

La relación de Rayleigh para el tubo de pitot es:

$$\frac{p_{0,2}}{p_\infty} = \left[\frac{(\gamma+1)^2\,\mathrm{M}_\infty^2}{4\gamma\mathrm{M}_\infty^2 - 2(\gamma-1)}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left[\frac{1-\gamma+2\gamma\mathrm{M}_\infty^2}{\gamma+1}\right]$$

Reemplazando en el $c_{p\,\text{máx}}$

$$c_{p\,\text{máx}} = \frac{2}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2} \left\{ \left[\frac{(\gamma+1)^2\, \mathrm{M}_\infty^2}{4\gamma \mathrm{M}_\infty^2 - 2(\gamma-1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{1-\gamma+2\gamma \mathrm{M}_\infty^2}{\gamma+1} \right] - 1 \right\}$$

Reemplazando en el $c_{p\,\text{máx}}$

$$c_{p\,\text{máx}} = \frac{2}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2}\left\{\left[\frac{(\gamma+1)^2\,\mathrm{M}_\infty^2}{4\gamma\mathrm{M}_\infty^2 - 2(\gamma-1)}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left[\frac{1-\gamma+2\gamma\mathrm{M}_\infty^2}{\gamma+1}\right] - 1\right\}$$

Si $\mathrm{M}_\infty \to \infty$

$$c_{p\,\text{máx}} \to \left[\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left[\frac{4}{\gamma+1}\right]$$

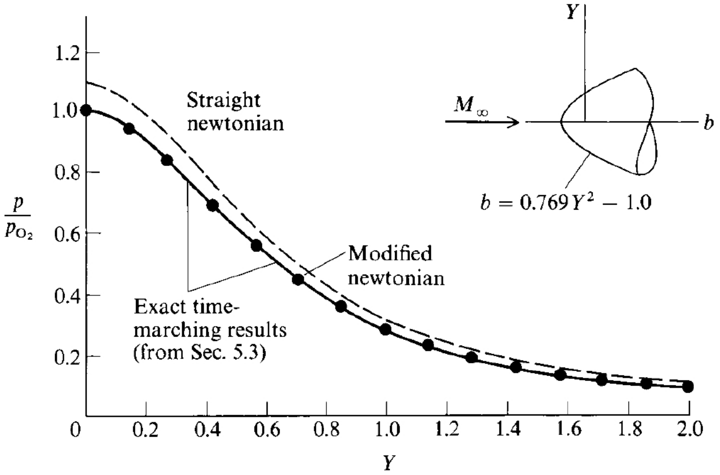
Reemplazando en el $c_{p\,\text{máx}}$

$$c_{p\,\text{máx}} = \frac{2}{\gamma \mathrm{M}_\infty^2}\left\{\left[\frac{(\gamma+1)^2\,\mathrm{M}_\infty^2}{4\gamma\mathrm{M}_\infty^2 - 2\,(\gamma-1)}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left[\frac{1-\gamma+2\gamma\mathrm{M}_\infty^2}{\gamma+1}\right] - 1\right\}$$

Si $\mathrm{M}_\infty \to \infty$

$$c_{p\,\text{máx}} \to \left[\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\left[\frac{4}{\gamma+1}\right]$$

- Si $\gamma = 1.4$ ==> $c_{p\,\text{máx}} = 1.839$
- Si $\gamma = 1$ ==> $c_{p\,\text{máx}} = 2$



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$\frac{p}{p_{O_2}}$
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
Y
Straight newtonian
Modified newtonian
Exact time-marching results (from Sec. 5.3)
M_∞
Y
b
$b = 0.769\,Y^2 - 1.0$

Observaciones

- **El MDN modificado no es independiente del número de Mach**

Método de Newton modificado

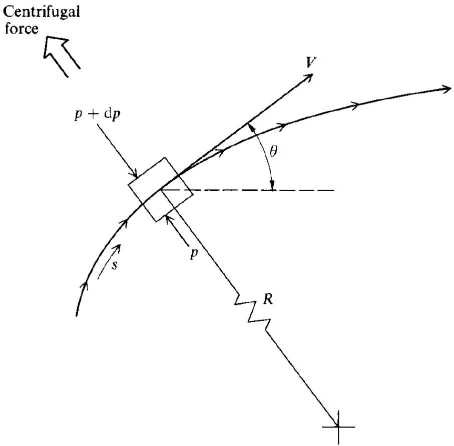
Observaciones

- **El MDN modificado no es independiente del número de Mach**
- El MDN modificado hace que en el punto de remanso el método de Newton sea exacto

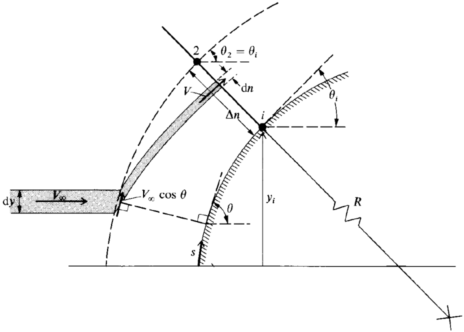
Método de Newton modificado

Observaciones

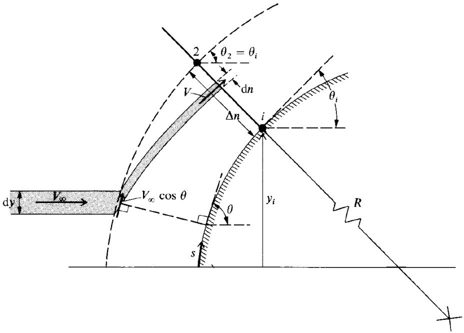
- **El MDN modificado no es independiente del número de Mach**
- El MDN modificado hace que en el punto de remanso el método de Newton sea exacto
- Cuando $\mathrm{M}_\infty \to \infty$ y $\gamma \to 1$, $\triangleright$ $c_p = 2\sin^2\theta$



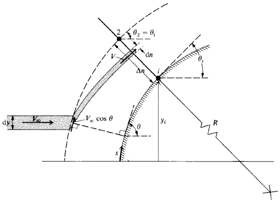
Centrifugal force
V
p + dp
θ
p
s
R



- Consideramos una capa de espesor Δn en la que las partículas se mueven luego de impactar
  - luego haremos $\Delta n \to 0$ para consistencia con la teoría de Newton



- Se asume que la capa de fluido también tiene radio R
- Se considera el tubo de corriente de alto dy
    - cuando entra en la capa cercana al cuerpo su dirección cambia a θ

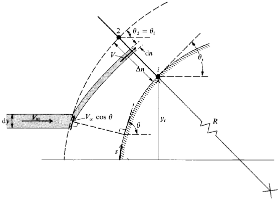


- En al sección $i-2$, de la segunda ley de Newton:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho u^2}{R}$$

Corrección por fuerza centrífuga

Método de Newton-Busemann

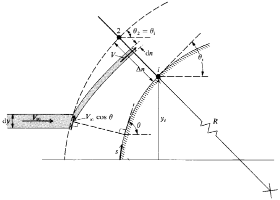


- En al sección $i - 2$, de la segunda ley de Newton:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho u^2}{R}$$

- Integrando entre $i - 2$:

$$\int_{p_i}^{p_2} \mathrm{d}p = \int_0^{\Delta n} \frac{\rho u^2}{R} \mathrm{d}n$$



- Por continuidad:

$$\rho_\infty u_\infty \mathrm{d}y = \rho u \mathrm{d}n$$

Por tanto

$$p_2 - p_i = \int_0^{y_i + \Delta n \cos\theta_i} \frac{\rho_\infty u_\infty}{R} u \mathrm{d}y$$

  - Hemos cambiado la integración de $i \to 2$ en el sistema dentro de la capa de fluido, a $0 \to y_i + \Delta n \cos\theta_i$ en el flujo no perturbado.

- Haciendo $\Delta n \to 0$:

$$p_2 - p_i = \int_0^{y_i} \frac{\rho_\infty u_\infty}{R} u \mathrm{d}y$$

- Haciendo $\Delta n \to 0$:

$$p_2 - p_i = \int_0^{y_i} \frac{\rho_\infty u_\infty}{R} u \mathrm{d}y$$

- A lo largo del tubo de corriente la velocidad es $u = u_\infty \cos\theta$

$$p_2 - p_i = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{R} \int_0^{y_i} \cos\theta \mathrm{d}y$$

- Haciendo $\Delta n \to 0$:

$$p_2 - p_i = \int_0^{y_i} \frac{\rho_\infty u_\infty}{R} u \mathrm{d}y$$

- A lo largo del tubo de corriente la velocidad es $u = u_\infty \cos\theta$

$$p_2 - p_i = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{R} \int_0^{y_i} \cos\theta \mathrm{d}y$$

- De la definición del radio de curvatura en el punto i:

$$\frac{1}{R} = -\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)_i = -\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_i \sin\theta_i$$

Remplazando en la integral:

$$p_i = p_2 + \rho_\infty u_\infty^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_i \sin\theta_i \int_0^{y_i} \cos\theta \mathrm{d}y$$

- Restando p_∞ en ambos lados y dividiendo por q_∞

$$c_{p,i} = c_{p,2} + 2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_i \sin\theta_i \int_0^{y_i} \cos\theta \mathrm{d}y$$

- En el punto 2 se puede considerar que no hay fuerza centrífuga, es directamente el coeficiente de presión según la ley de Newton

$$\boxed{c_{p,i} = 2\sin^2\theta + 2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_i \sin\theta_i \int_0^{y_i} \cos\theta \mathrm{d}y}$$

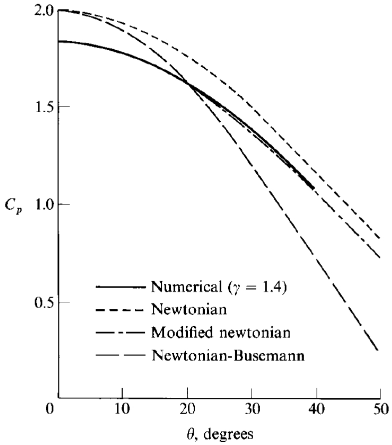
Expresión del **coeficiente de presión en un punto** i **sobre una superficie bidimensional con curvatura.**

- Para cuerpos con simetría axial se puede demostrar:

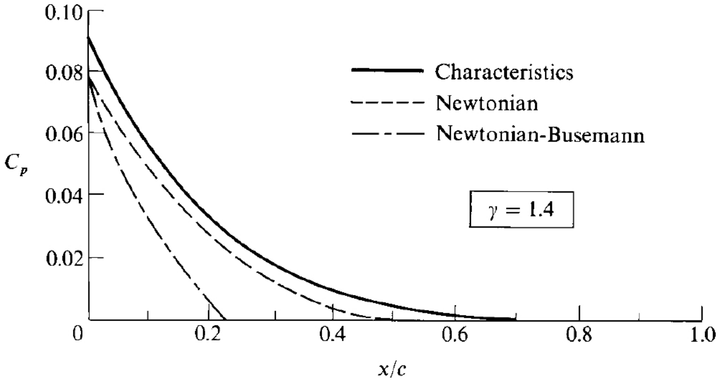
$$\boxed{c_{p,i} = 2\sin^2\theta + 2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_i \frac{\sin\theta_i}{y_i}\int_0^{y_i} y\cos\theta \mathrm{d}y}$$

O bien, expresado en términos del área de la sección transversal, $A = \pi y_i^2$

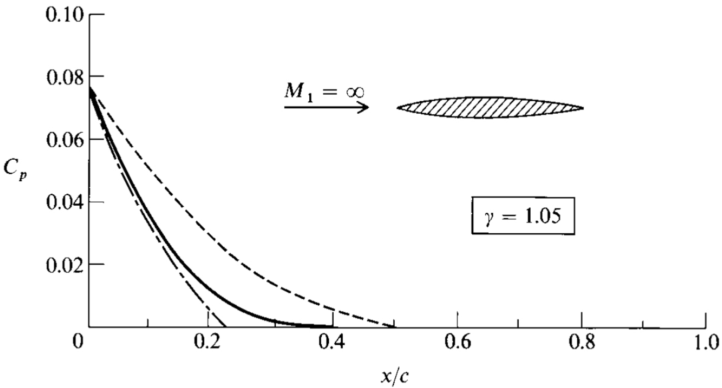
$$c_{p,i} = 2\sin^2\theta + 2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}A}\right)_i \sin\theta_i \int_0^{A_i} \cos\theta \mathrm{d}A$$



Cilindro circular



Perfil biconvexo



Perfil biconvexo

Observaciones

1. El método de Newton-Busemann añade una corrección por fuerza centrífuga en cuerpos con curvatura
2. Los resultados difieren de métodos exactos.

Recordamos: el coeficiente de presión detrás de una OdCh oblicua es:

$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1}\left(\sin^2\beta - \frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2}\right)$$

Recordamos: el coeficiente de presión detrás de una OdCh oblicua es:

$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2} \right)$$

En el límite de $\mathrm{M}_\infty \to \infty$

$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1} \sin^2 \beta$$

Recordamos: el coeficiente de presión detrás de una OdCh oblicua es:

$$c_p = \frac{4}{\gamma+1}\left(\sin^2\beta - \frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2}\right)$$

En el límite de $\mathrm{M}_\infty \to \infty$

$$c_p = \frac{4}{\gamma+1}\sin^2\beta$$

Si además se considera que $\gamma \to 1$

$$c_p = 2\sin^2\beta$$

Esto no es el método de Newton $\triangleright$ β es el ángulo de inclinación de la onda, no el ángulo de deflexión del flujo.

- Por otro lado, detrás de una OdChO la densidad es

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta + 2}$$

- Por otro lado, detrás de una OdChO la densidad es
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta + 2}$$
- Si $\mathrm{M}_\infty \to \infty$ $\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta \gg 1$

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

- Por otro lado, detrás de una OdChO la densidad es

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta + 2}$$

- Si $\mathrm{M}_\infty \to \infty$ $\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta \gg 1$

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

- Si además se considera que $\gamma \to 1$

$$\frac{\rho_2}{\rho_\infty} \to \infty$$

- Si $\rho \to \infty \ \Rightarrow$ la OdCh coincide con la superficie del cuerpo.
- Si además consideramos la relación entre el ángulo de deflexión y el de la onda, para $\mathrm{M}_\infty \to \infty$

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

Análisis de la teoría de flujo Newtoniano

- Si $\rho \to \infty$ $\Rightarrow$ la OdCh coincide con la superficie del cuerpo.
- Si además consideramos la relación entre el ángulo de deflexión y el de la onda, para $\mathrm{M}_\infty \to \infty$

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

- y hacemos $\gamma \to 1$

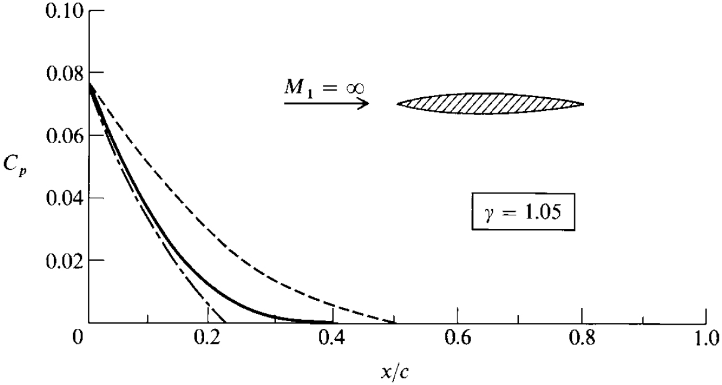
$$\beta = \theta$$

Reemplazando en la expresión del coeficiente de presión:

$$c_p \quad = \quad 2\sin^2\theta$$

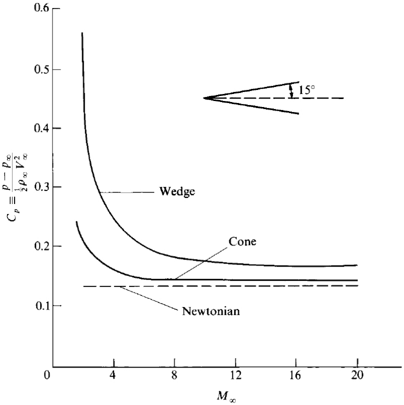
Es decir que la Ley de Newton se puede obtener de la teoría exacta de OdCh Oblicuas para $\mathrm{M}_\infty \to \infty$ y $\gamma \to 1$

Con esto límites la Teoría de Newton-Busemann arroja mejores resultados que la de Newton original.



Comparación de Newton para una cuña y un cono de 15º.

- Cuña: de la teoría exacta de OdCh oblicuas
- Cono: de la ecuación clásica de Taylor- Maccoll [1]



Análisis de la teoría de flujo Newtoniano

Observaciones

- Cuanto mayor es el M_∞ mejores resultados arroja la teoría de Newton

Análisis de la teoría de flujo Newtoniano

Observaciones

- Cuanto mayor es el M_∞ mejores resultados arroja la teoría de Newton
- Funciona mejor para cuerpos tridimensionales

Análisis de la teoría de flujo Newtoniano

Observaciones

- Cuanto mayor es el M_∞ mejores resultados arroja la teoría de Newton
- Funciona mejor para cuerpos tridimensionales
- La teoría de Newton modificada es mejor para cuerpos romos, pero no para cuerpos esbeltos.

Observaciones

- Cuanto mayor es el M_{∞} mejores resultados arroja la teoría de Newton
- Funciona mejor para cuerpos tridimensionales
- La teoría de Newton modificada es mejor para cuerpos romos, pero no para cuerpos esbeltos.
- Cuanto mayor es el M_{∞} los coeficientes tienden a ser constantes ==> *Principio de independencia del número de Mach*

Referencias

[1] John D. Anderson.
Modern Compressible Flow: With Historical Perspective, 3 edition.
McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2002.