

Aerodinámica de altas velocidades y fenómenos de re-entrada

Introducción a la aerodinámica hipersónica

Sebastián Franchini

Curso 2020-2021



Instituto Universitario de Microgravitación "Ignacio Da Riva"
Universidad Politécnica de Madrid. IDR/UPM
E.T.S.I. Aeronáutica y del Espacio
www.idr.upm.es

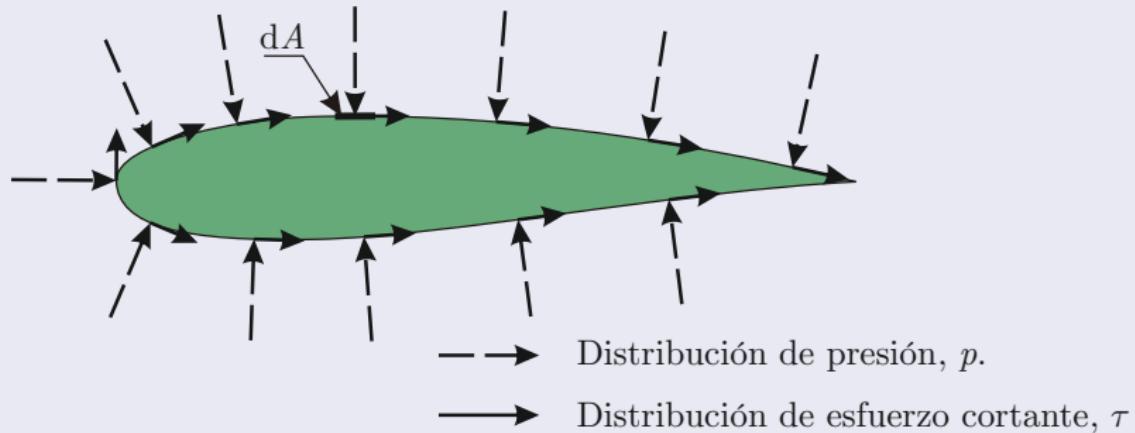
Aerodinámica

Rama de la Mecánica de Fluidos que estudia la interacción entre cuerpos sólidos y el aire cuando existe un movimiento relativo entre ellos.

Objetivos: conocer

- Fuerzas, momentos y transferencia de calor
- Propiedades del flujo a través de conductos.

Origen de las cargas aerodinámicas



$$\mathbf{F}_a = \int p d\mathbf{A} + \int \tau d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{M}_a = \int (p d\mathbf{A}) \times \mathbf{r} + \int (\tau d\mathbf{A}) \times \mathbf{r}$$

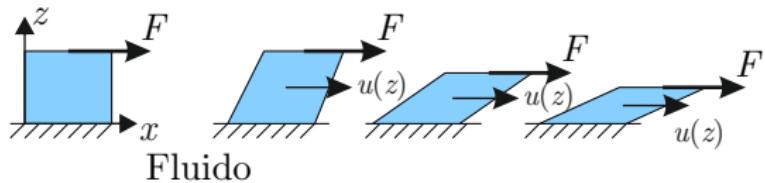
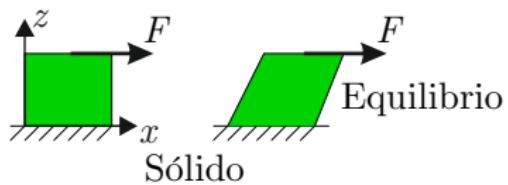
Movimiento de los fluidos

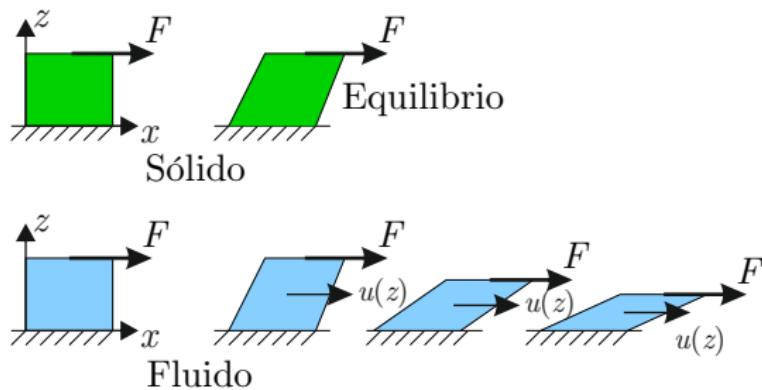
- Origen de las fuerzas aerodinámicas
- Origen de las fuerzas propulsivas

Como se estudia

- Leyes básicas

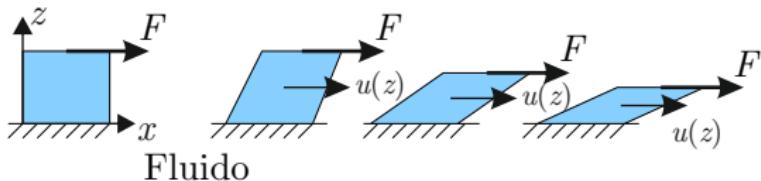
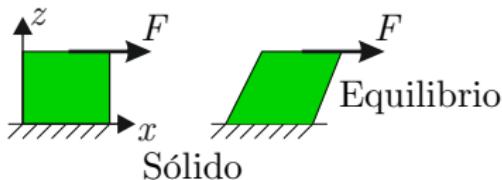
Mecánica de los fluidos





Definición de fluido

Medio material que no es capaz de encontrar una configuración de equilibrio estático cuando sobre él actúan acciones tangenciales



Definición de fluido

Medio material que no es capaz de encontrar una configuración de equilibrio estático cuando sobre él actúan acciones tangenciales

- Reposo \triangleright sólo sometido a presiones.
- A efectos prácticos los fluidos son gases y líquidos.

Método de estudio

- Gran cantidad de moléculas separadas por “grandes distancias”
 - En 1 mm^3 de gas puede haber 10^{16} partículas
 - En líquidos 1000 veces más
- Se estudian las **variables fluidas** macroscópicas definidas en un punto del espacio y un instante de tiempo

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

$$V = V(x, y, z, t)$$

$$E = E(x, y, z, t) \rightarrow \frac{1}{2}V(x, y, z, t)^2 + T(x, y, z, t) + p(x, y, z, t)$$

Método de estudio - Hipótesis de medio continuo

- Permite plantear un modelo matemático

Método de estudio - Hipótesis de medio continuo

- Permite plantear un modelo matemático
- El fluido ocupa una región del espacio

Método de estudio - Hipótesis de medio continuo

- Permite plantear un modelo matemático
- El fluido ocupa una región del espacio
- Distancia media entre partículas << espacio considerado

Método de estudio - Hipótesis de medio continuo

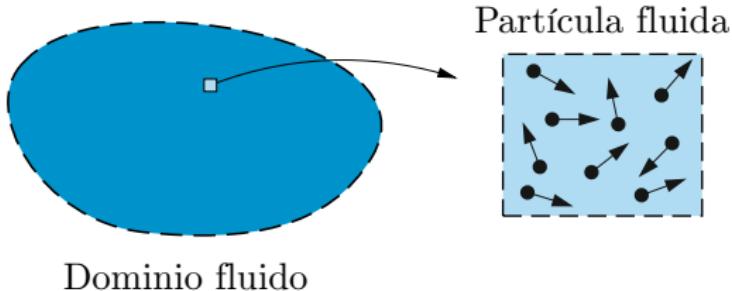
- Permite plantear un modelo matemático
- El fluido ocupa una región del espacio
- Distancia media entre partículas << espacio considerado
- Las variables fluidas son continuas y derivables con respecto a la posición y el tiempo

Método de estudio - Hipótesis de medio continuo

- Permite plantear un modelo matemático
- El fluido ocupa una región del espacio
- Distancia media entre partículas << espacio considerado
- Las variables fluidas son continuas y derivables con respecto a la posición y el tiempo
- En el espacio considerado ▷ muchas partículas (se define la **partícula fluida**)

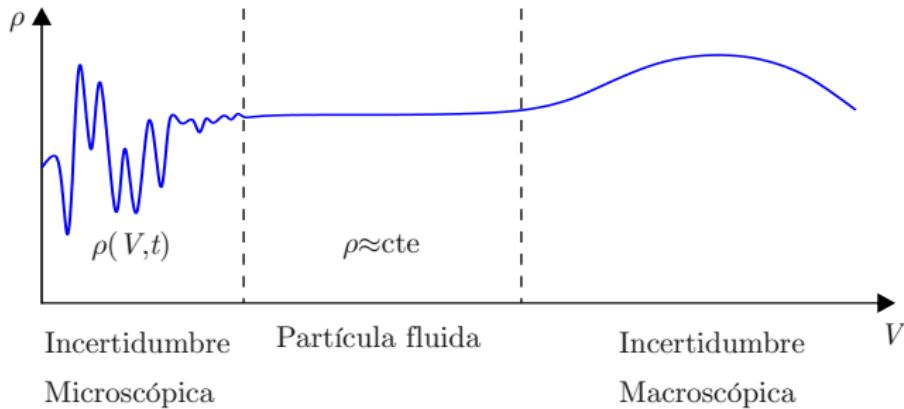
Partícula fluida

- Unidad fundamental para el estudio de los fluidos.
- Suficientemente grande \triangleright eliminar las incertidumbres microscópicas
- Suficientemente pequeña para poder emplear el cálculo diferencial y que las funciones que varíen de forma continua.
 - $V_{pf} \sim 10^{-9} mm^3$ (aprox. $3 \cdot 10^7$ moléculas).



Partícula fluida

- Unidad fundamental para el estudio de los fluidos.
- Suficientemente grande \triangleright eliminar las incertidumbres microscópicas
- Suficientemente pequeña para poder emplear el cálculo diferencial y que las funciones que varíen de forma continua.
 - $V_{pf} \sim 10^{-9} \text{ mm}^3$ (aprox. $3 \cdot 10^7$ moléculas).



Número de Reynolds

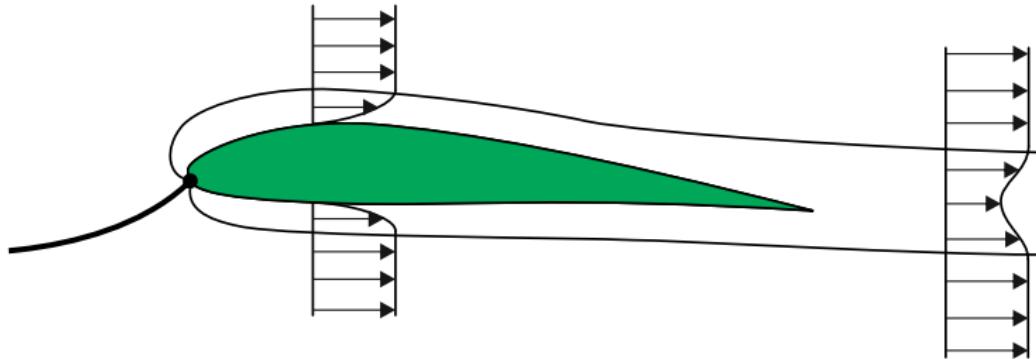
$$Re = \frac{\text{esfuerzos de inercia}}{\text{esfuerzos viscosos}} = \frac{\rho UL_c}{\mu}$$

- Ayuda a definir la configuración del flujo.
- Si Reynolds muy bajo, $Re \ll 1$,
 - Las perturbaciones que aparecen en el flujo son rápidamente amortiguadas.
 - Flujo ordenado y sin fluctuaciones \rightarrow laminar.
- Si Reynolds muy alto, $Re \gg 1$,
 - Las perturbaciones que aparecen en el flujo son difícilmente amortiguadas y son amplificadas por los esfuerzos de inercia.
 - Flujo desordenado y con fluctuaciones \rightarrow turbulento.

Efectos de la viscosidad

Efectos localizados en

- Capas límite
- Estelas



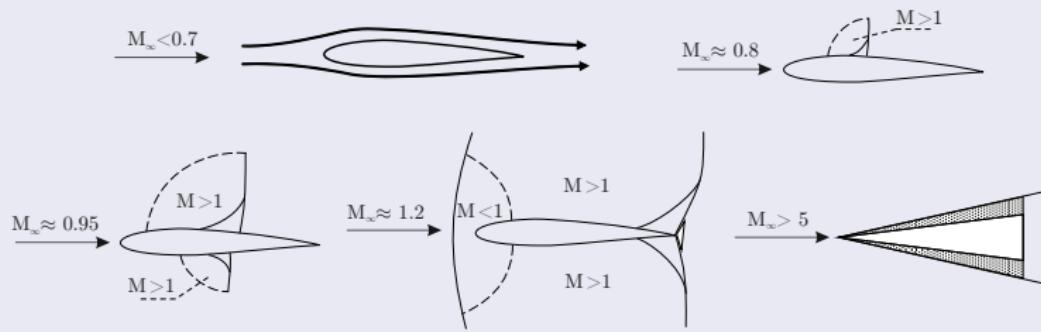
Definición

$$M = \frac{\text{velocidad del flujo}}{\text{velocidad del sonido}} = \frac{U_{\infty}}{a_{\infty}}$$

Regímenes de vuelo

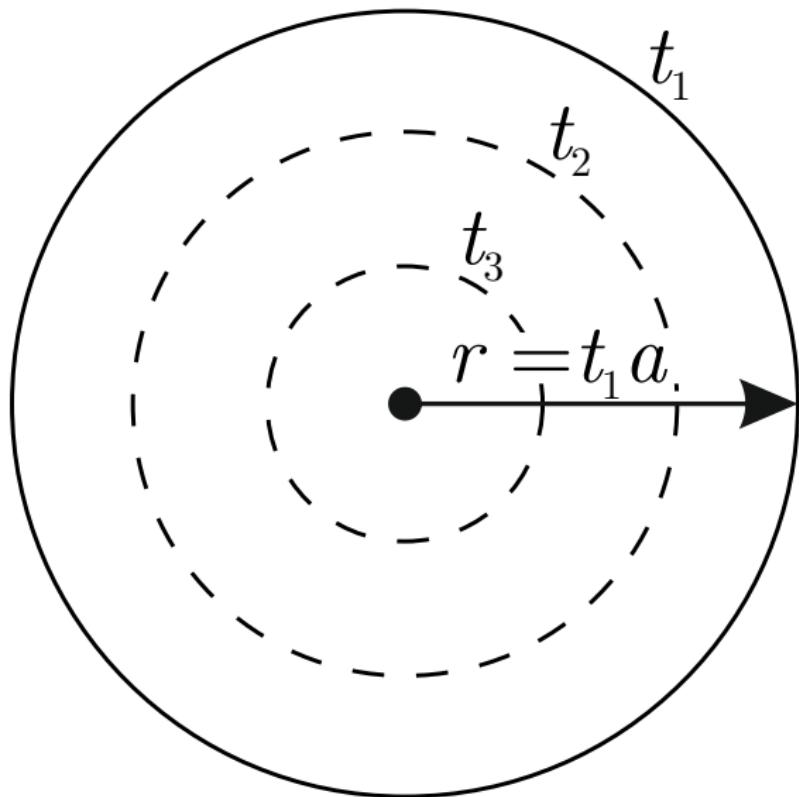
- Incompresible $M_{\infty} \rightarrow 0$
- Compresible $M_{\infty} > 0$,
 - compresible subsónico ($M_{\infty} < 1$),
 - transónico ($M_{\infty} \sim 1$),
 - supersónico ($M_{\infty} > 1$),
 - hipersónico ($M_{\infty} \gg 1$).

Regímenes de vuelo



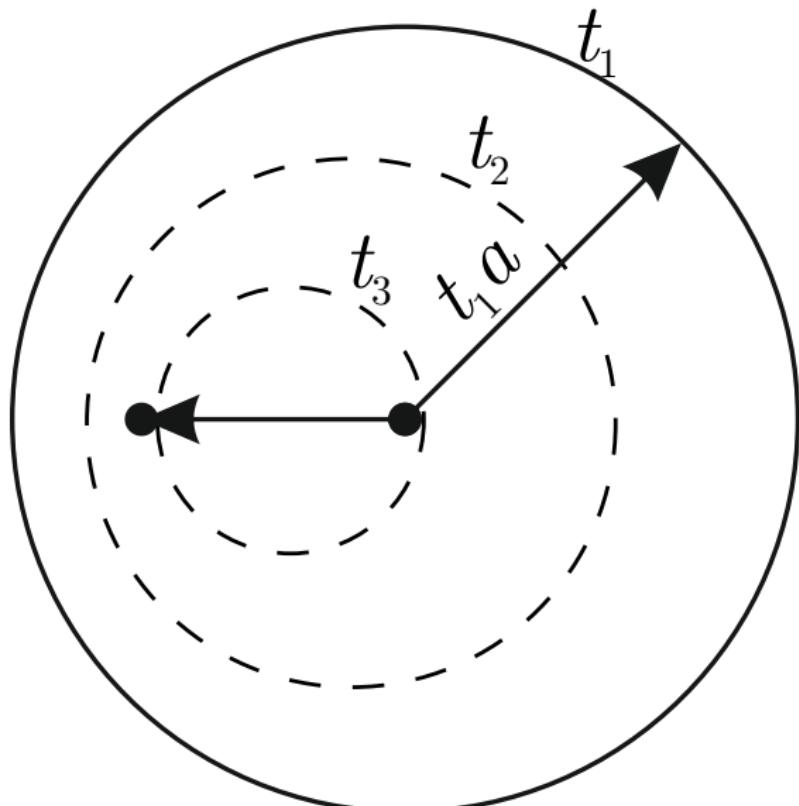
Flujo Comprimido

Ondas de Mach



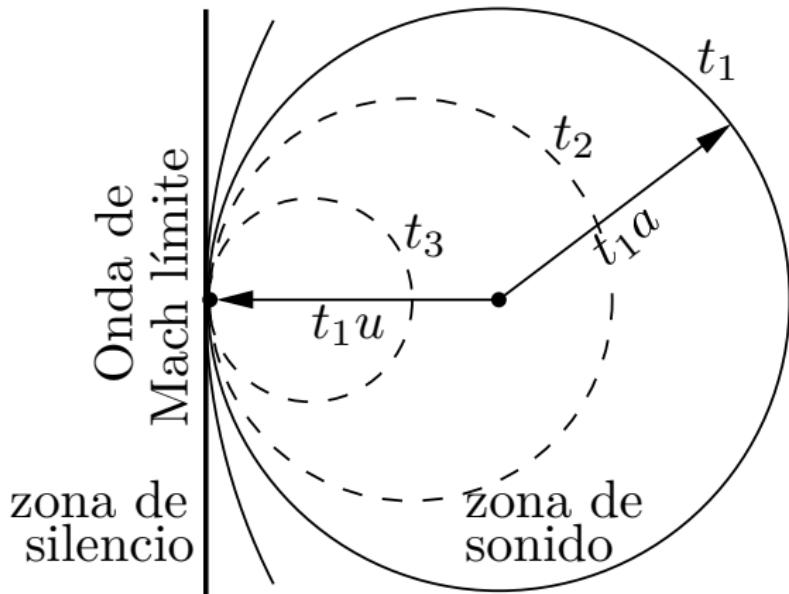
Flujo Comprimido

Ondas de Mach



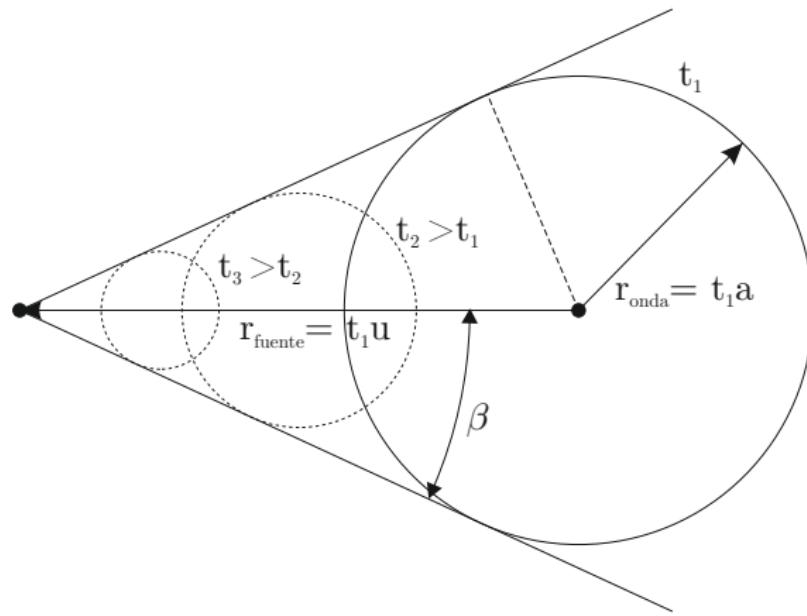
Flujo Comprimido

Ondas de Mach



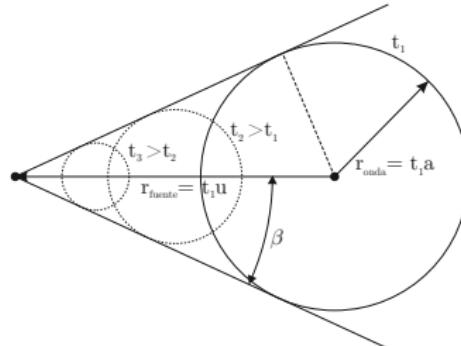
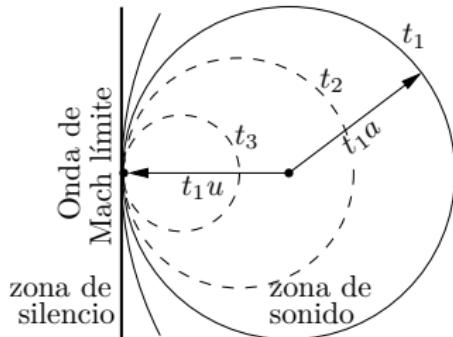
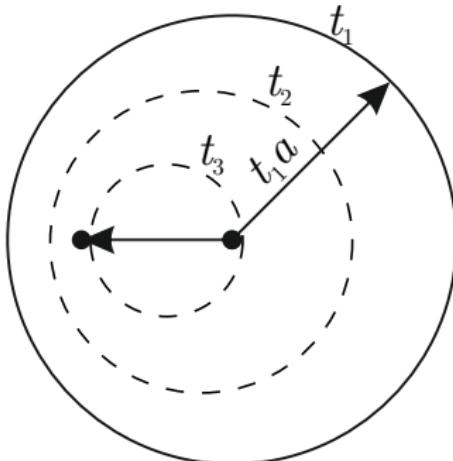
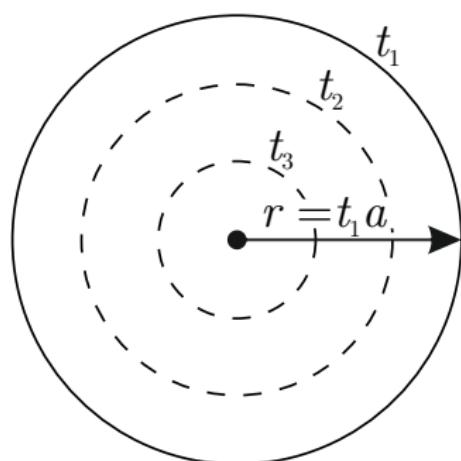
Flujo Comprimido

Ondas de Mach



Flujo Comprimible

Ondas de Mach



Flujo Compresible

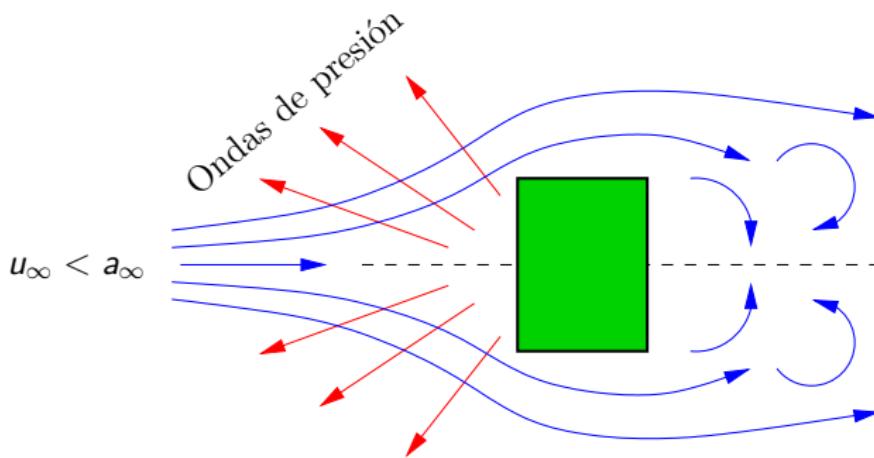
Ondas de Mach

- La onda de Mach genera una gran cantidad de energía pudiendo llegar a exceder en las cercanías de la fuente 200 dB.

Ruidos	dB
Motor a reacción (cerca)	140
Umbral de dolor	125
Discoteca	120
Tráfico medio de una ciudad	80
Susurro	30
Respiración normal	10
Umbral de audición	0

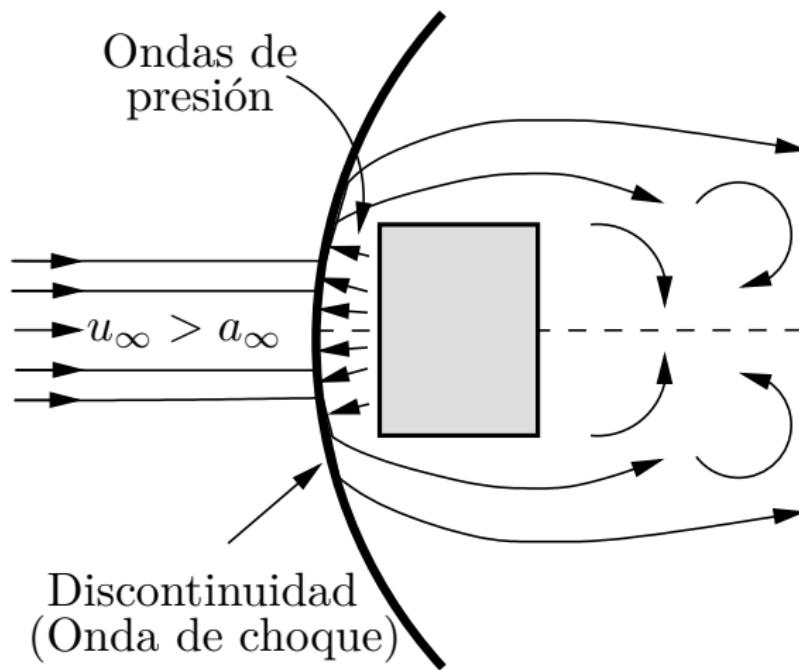
Flujo Comprimible

Onda de choque normal



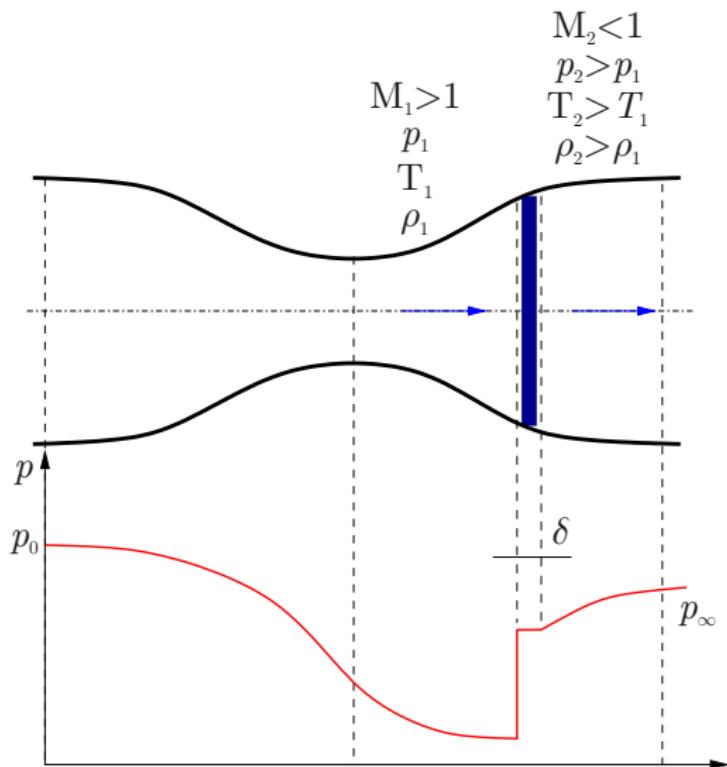
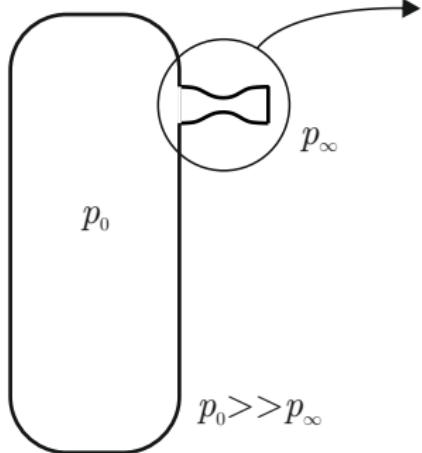
Flujo Comprimible

Onda de choque normal



Flujo Comprimible

Onda de choque normal



Leyes fundamentales

- ① Conservación de la materia,
- ② Segunda ley de Newton,
- ③ Primer principio de la termodinámica, y
- ④ Segundo principio de la termodinámica.
- ⑤ Relaciones constitutivas
 - ① Ley de viscosidad de Stokes
 - ② Ley de Hooke

Principio de conservación de masa - Ecuación de continuidad

- Forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dV + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

- Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

Conservación de la cantidad de movimiento

- Forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho V dv + \int_{\mathcal{S}} \rho V (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds = - \int_{\mathcal{S}} p n ds + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}' ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \mathbf{F}_m dv,$$

- Forma diferencial

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' + \rho \mathbf{F}_m.$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta V + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot V) + \rho \mathbf{F}_m.$$

Conservación de la energía

- Forma diferencial

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot V + \Phi_v - \nabla \cdot q_r + Q_{rq},$$

donde:

- k ▷ conductividad térmica del fluido
- T ▷ temperatura
- Φ_v ▷ la función de disipación de Rayleigh, (energía disipada por la viscosidad)
- q_r ▷ vector del flujo de calor por radiación
- Q_{rq} ▷ calor específico por unidad de tiempo debido a reacciones químicas

Ecuaciones generales

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{F}_m.$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi_v - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + Q_{rq},$$

- Más las condiciones iniciales y de contorno

Ecuaciones generales

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{F}_m.$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi_v - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + Q_{rq},$$

- Más las condiciones iniciales y de contorno

No se conoce una solución analítica general...

Ecuaciones generales

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{F}_m.$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi_v - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + Q_{rq},$$

- Más las condiciones iniciales y de contorno

No se conoce una solución analítica general...

Se buscan simplificaciones para cada situación de interés

Magnitudes características del problema

- C , longitud característica
- p_∞ , ρ_∞ y U_∞ , presión, densidad y velocidad características
- g_0 aceleración de la gravedad

Magnitudes características del problema

- C , longitud característica
- p_∞ , ρ_∞ y U_∞ , presión, densidad y velocidad características
- g_0 aceleración de la gravedad

Variables adimensionales

$$\hat{x} = \frac{x}{C}, \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \hat{V} = \frac{V}{U_\infty}, \hat{t} = \frac{t}{C/U_\infty}, \hat{p} = \frac{p}{p_\infty}, \hat{F}_m = \frac{F_m}{g_0},$$

Forma adimensional de las ecuaciones generales

Magnitudes características del problema

- C , longitud característica
- p_∞ , ρ_∞ y U_∞ , presión, densidad y velocidad características
- g_0 aceleración de la gravedad

Variables adimensionales

$$\hat{x} = \frac{x}{C}, \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \hat{V} = \frac{V}{U_\infty}, \hat{t} = \frac{t}{C/U_\infty}, \hat{p} = \frac{p}{p_\infty}, \hat{F}_m = \frac{F_m}{g_0},$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}\hat{\rho} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho} \hat{V} \cdot \hat{\nabla} \hat{V} &= \\ &= - \frac{p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} \hat{\nabla} \hat{\rho} + \frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty C} \left[\hat{\Delta} \hat{V} + \frac{1}{3} \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \hat{V}) \right] + \frac{g_0 C}{U_\infty^2} \hat{\rho} \hat{F}_m,\end{aligned}$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\dots = -\frac{\rho_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty C} \left[\hat{\Delta} \hat{\mathbf{V}} + \frac{1}{3} \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{V}}) \right] + \frac{g_0 C}{U_\infty^2} \hat{\rho} \hat{\mathbf{F}}_m,$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\dots = -\frac{p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty C} \left[\hat{\Delta} \hat{\mathbf{V}} + \frac{1}{3} \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{V}}) \right] + \frac{g_0 C}{U_\infty^2} \hat{p} \hat{\mathbf{F}}_m,$$

Números adimensionales

- Número de Mach de la corriente incidente, M_∞ ,

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}$$

- Número de Reynolds del flujo no perturbado,

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty C}{\mu}$$

- Número de Froude

$$Fr = \frac{U_\infty^2}{gC}$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\dots = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \left[\hat{\Delta} \hat{V} + \frac{1}{3} \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \hat{V}) \right] + \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{F}_m,$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\dots = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \left[\hat{\Delta} \hat{V} + \frac{1}{3} \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \hat{V}) \right] + \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{F}_m,$$

Típicamente en aeronáutica

$$gC \ll U_\infty^2 \quad \therefore \quad Fr = \frac{U_\infty^2}{gC} \geq O(10^3)$$

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty C}{\mu} \geq O(10^6)$$

$$M_\infty = O(1)$$

Forma adimensional de las ecuaciones generales

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\dots = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \left[\hat{\Delta} \hat{V} + \frac{1}{3} \hat{\nabla} (\hat{\nabla} \cdot \hat{V}) \right] + \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{F}_m,$$

Típicamente en aeronáutica

$$gC \ll U_\infty^2 \quad \therefore \quad Fr = \frac{U_\infty^2}{gC} \geq O(10^3)$$

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty C}{\mu} \geq O(10^6)$$

$$M_\infty = O(1)$$

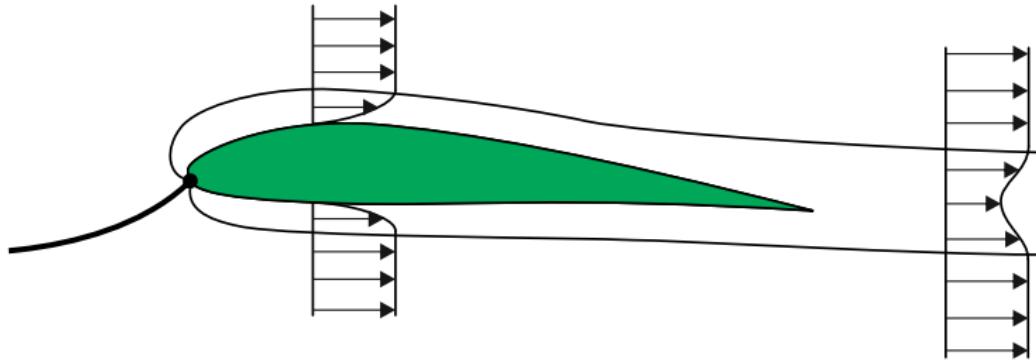
La ecuación de Euler

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p$$

Efectos de la viscosidad

Efectos localizados en

- Capas límite
- Estelas



Ecuación de la energía

De las ecuaciones generales

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot V + \Phi_v - \nabla \cdot q_r + Q_{rq},$$

Ecuación de la energía

De las ecuaciones generales

$$\rho \frac{D\mathbf{e}}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi_v - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + Q_{rq},$$

Hipótesis

Se consideran nulos los flujos de calor por

- Radiación y
- Reacciones químicas

Se reduce a

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v.$$

(Rigurosamente, esto no se puede hacer en régimen hipersónico)

Ecuación de la energía

De las ecuaciones generales

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v.$$

Ecuación de la energía

De las ecuaciones generales

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v.$$

- Órdenes de Magnitud

$$O\left(\rho c_p \frac{DT}{Dt}\right) = \frac{\rho_\infty c_p T_\infty U_\infty}{C} \quad O(\nabla \cdot (k \nabla T)) = \frac{k T_\infty}{C^2}$$

Ecuación de la energía

De las ecuaciones generales

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v.$$

- Órdenes de Magnitud

$$O\left(\rho c_p \frac{DT}{Dt}\right) = \frac{\rho_\infty c_p T_\infty U_\infty}{C} \quad O(\nabla \cdot (k \nabla T)) = \frac{k T_\infty}{C^2}$$

- La relación entre ambos es

$$\frac{\rho_\infty c_p U_\infty C}{k} \frac{\mu}{\mu} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$$

Con $\text{Pr} = \mu c_p / k = 0.72$ (para el aire)

La transmisión de calor por conducción es despreciable \triangleright El movimiento se puede suponer **adiabático**

Ecuación de la energía

Ecuaciones generales

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v.$$

- Orden de magnitud de los términos viscosos

$$O(\Phi_v) = \frac{M_\infty^2}{Re}$$

Ecuación de la energía en función de la entropía

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot V \cdot \nabla s = 0.$$

- Si la entropía es constante en el infinito corriente arriba, esta constante es la misma para todas las líneas de corriente
- Salvo en **ondas de choque y capas límites**

Relación de barotropía

- para flujo isoentrópico

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante},$$

- con $\gamma = 1.4$ para el aire en condiciones estándar
- Líquidos $\rho = \text{constante}$

Relación de barotropía

- para flujo isoentrópico

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante},$$

- con $\gamma = 1.4$ para el aire en condiciones estándar
- Líquidos $\rho = \text{constante}$

Ecuación de estado

- Gases perfectos $p = \rho R T$,
 - $R = 287 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$ para el aire.
- Líquidos $\rho = \text{constante}$

Energía de una molécula individual de un gas

- ① Energía cinética translacional
- ② Energía cinética rotacional
- ③ Energía cinética y potencial debida a la vibración

Energía de una molécula individual de un gas

- ① Energía cinética translacional
- ② Energía cinética rotacional
- ③ Energía cinética y potencial debida a la vibración

Energía interna específica de un volumen de gas

- $e =$ Suma de (1) + (2) + (3) de todas las moléculas del volumen
- La energía necesaria para crear un sistema

Entalpía específica

$$h = e + pv$$

- La energía necesaria para crear un sistema, más
- La necesaria para que el sistema ocupe espacio (el trabajo realizado contra el medio)

Entalpía específica

$$h = e + pv$$

- La energía necesaria para crear un sistema, más
 - La necesaria para que el sistema ocupe espacio (el trabajo realizado contra el medio)
-
- Tanto e como h son funciones de estado
 - No pueden medirse de forma directa, pero

$$e = e(T)$$

$$h = h(T)$$

- Para un gas perfecto

$$de = c_V dT$$

$$dh = c_P dT$$

con

- c_V : calor específico a volumen constante
- c_P : calor específico a presión constante

Gas calóricamente perfecto

- Los calores específicos no dependen de T

$$e = c_V T$$

$$h = c_P T$$

- Para el aire hasta $T \approx 1000\text{ K}$
 - $c_V \approx 714\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
 - $c_P \approx 1000\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

Relaciones útiles

- Para un gas específico

$$c_p - c_v = R$$

- Para el aire $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

donde

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

- Para el aire $\gamma = 1.4$

Relaciones útiles

- Calculo de la entropía

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

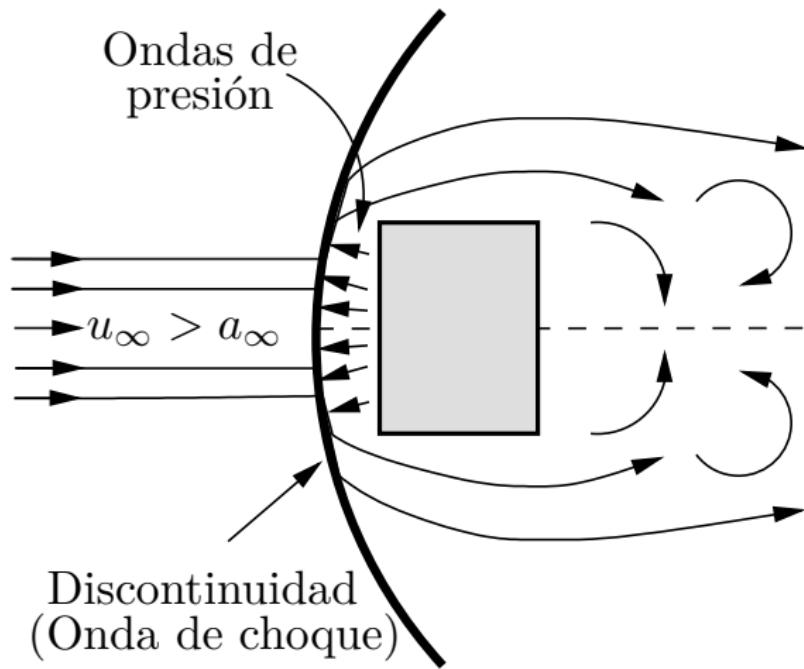
- Si el proceso es isoentrópico, se demuestra que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

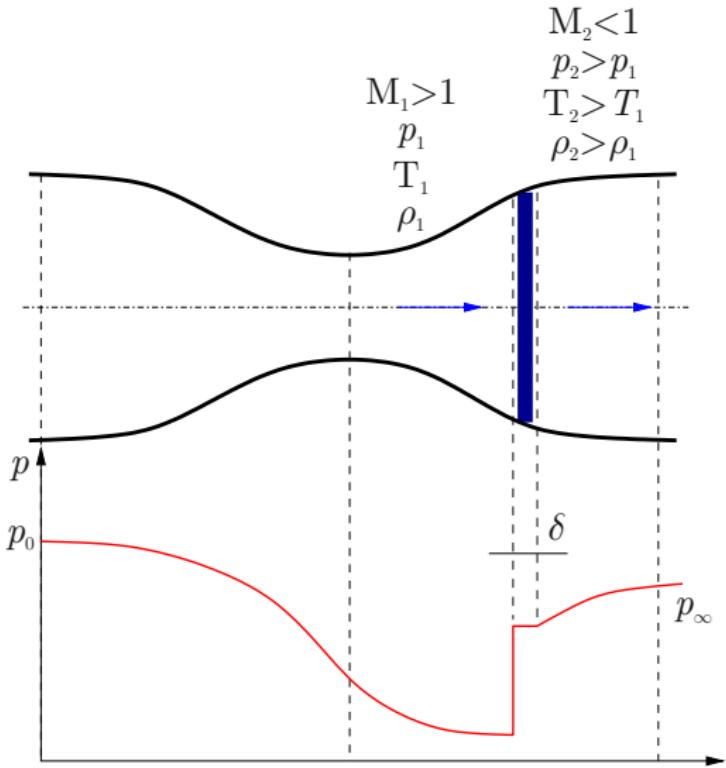
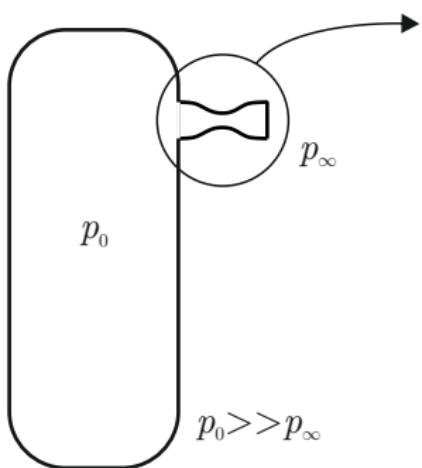
Onda de choque normal

Hablemos de las ondas de choque...

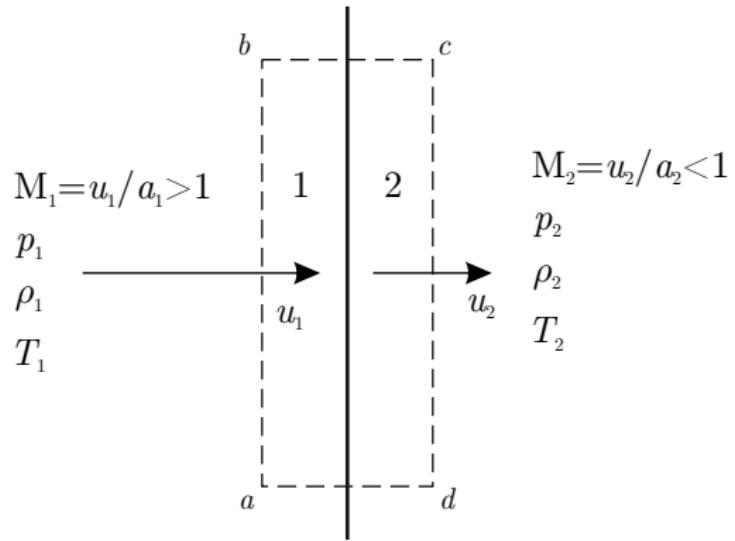
Onda de choque normal



Onda de choque normal



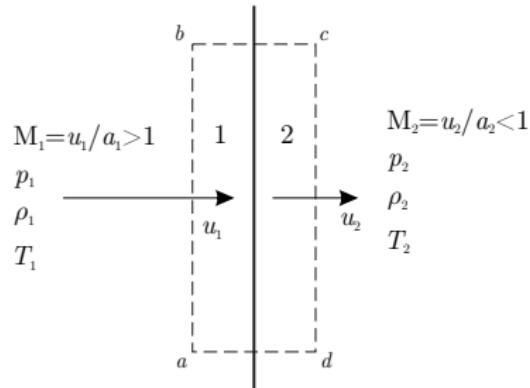
Onda de choque normal I



Hipótesis

- Flujo estacionario, $\partial/\partial t = 0$
- Flujo adiabático, $\dot{q} = 0$
 - La temperatura aumenta a través de la OdC, pero no por aporte de calor.
 - La energía cinética se transforma en energía interna
- No hay efectos viscosos a ambos lados de la OdC
 - Dentro de la onda si los hay.
- No hay fuerzas volumétricas (como el peso)

Ecuaciones de la onda de choque normal

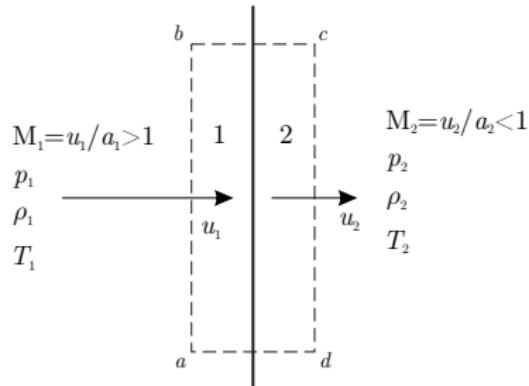


Ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dv + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

$$\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

Ecuaciones de la onda de choque normal



Ecuación de continuidad

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dv + \int_{\mathcal{S}} \rho \nabla \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

$$\int_{\mathcal{S}} \rho \nabla \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

En la dirección horizontal

$$-\rho_1 u_1 A + \rho_2 u_2 A = 0$$

$$\boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$$

Ecuaciones de la onda de choque normal

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho V dv + \int_{\mathcal{S}} \rho V (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} \rho n ds + \int_{\mathcal{S}} n \cdot \tau' ds + \int_{\mathcal{D}} \rho F_m dv,$$

Ecuaciones de la onda de choque normal

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho V dv + \int_{\mathcal{S}} \rho V (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} p n ds + \int_{\mathcal{S}} n \cdot \tau' ds + \int_{\mathcal{D}} \rho F_m dv,$$

$$\int_{\mathcal{S}} \rho V (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} p n ds$$

$$\int_{\mathcal{S}} \rho u (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} p ds$$

Ecuaciones de la onda de choque normal

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho V dv + \int_{\mathcal{S}} \rho V (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} p n ds + \int_{\mathcal{S}} n \cdot \tau' ds + \int_{\mathcal{D}} \rho F_m dv,$$

$$\int_{\mathcal{S}} \rho V (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} p n ds$$

$$\int_{\mathcal{S}} \rho u (V \cdot n) ds = - \int_{\mathcal{S}} p ds$$

En el volumen de control

$$\begin{aligned}\rho_1 (-u_1 A) u_1 + \rho_2 (u_2 A) u_2 &= -(-p_1 A + p_2 A) \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2\end{aligned}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

Ecuaciones de la onda de choque normal

Ecuación de conservación de energía

$$\int_S \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (V \cdot n) ds = - \int_S p n (V \cdot n) ds$$

Ecuaciones de la onda de choque normal

Ecuación de conservación de energía

$$\int_S \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (V \cdot n) ds = - \int_S p n (V \cdot n) ds$$

En el volumen de control

$$-\rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 A + \rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 A = -(-p_1 u_1 A + p_2 u_2 A)$$
$$p_1 u_1 + \rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 = p_2 u_2 + \rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2$$

Dividiendo por la ec. de continuidad, $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

$$\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Ecuaciones de la onda de choque normal

Recordando que la definición de entalpia es $h = e + pv = e + p/\rho$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Resumen

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Conocidas las condiciones corriente arriba, u_1 , p_1 , ρ_1 y h_1 son incógnitas.

Agregando

$$h_2 = c_p T_2$$

$$p_2 = \rho_2 R T_2$$

Tenemos 5 incógnitas y 5 ecuaciones algebraicas.

Antes de resolver, algunas definiciones previas...

Antes de resolver, algunas definiciones previas...

La ecuación de la energía

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 = \text{cte}$$

Antes de resolver, algunas definiciones previas...

La ecuación de la energía

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 = \text{cte}$$

Altenativamente, para un gas calorímetricamente perfecto, $h = c_p T$

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} = c_p T_0$$

Donde T_0 es la temperatura de remanso.

- Si un flujo subsónico con temperatura T se acelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*

- Si un flujo subsónico con temperatura T se acelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*
- Si un flujo supersónico con temperatura T se decelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*

- Si un flujo subsónico con temperatura T se acelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*
- Si un flujo supersónico con temperatura T se decelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*
- La temperatura crítica, T^* , es simplemente una temperatura en un punto dado del flujo.

- Si un flujo subsónico con temperatura T se acelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*
- Si un flujo supersónico con temperatura T se decelera adiabáticamente hasta la velocidad del sonido, la temperatura correspondiente es T^*
- La temperatura crítica, T^* , es simplemente una temperatura en un punto dado del flujo.
- Se define la velocidad del sonido crítica, $a^* = \sqrt{\gamma RT^*}$
- Se define el número de Mach crítico como

$$M^* = \frac{u}{a^*}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

- Veamos diferentes formas útiles de expresar la ecuación de la energía.
- Partiendo de:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 = \text{cte}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

- Veamos diferentes formas útiles de expresar la ecuación de la energía.
- Partiendo de:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 = \text{cte}$$

para un gas calorímetricamente perfecto, $h = c_p T$

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

Por otro lado, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

Por otro lado, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

y como $a^2 = \gamma R T$

$$\boxed{\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

Por otro lado, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

y como $a^2 = \gamma R T$

$$\boxed{\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}}$$

En el punto de remanso

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \text{cte}}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

Si en algun punto se alcanza la velocidad sónica $u = a^*$, entonces

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2}$$

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} = \text{cte}}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

Si en algun punto se alcanza la velocidad sónica $u = a^*$, entonces

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2}$$

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} = \text{cte}}$$

Si consideramos un punto de remanso

$$\boxed{\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} = \text{cte}}$$

Tanto a_0 como a^* son constantes a lo largo de una línea de corriente.

Relación entre el M y el M*

Tomamos la ec. de la energía en la forma:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2}$$

Formas alternativas de la ecuación de la energía

Relación entre el M y el M*

Tomamos la ec. de la energía en la forma:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2}$$

y la dividimos por u^2 :

$$\frac{(a/u)^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \left(\frac{a^*}{u} \right)^2$$

$$\frac{(1/M)^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{M^*} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$M^2 = \frac{2}{(\gamma + 1) / M^{*2} - (\gamma - 1)}$$

Resolviendo para M^{*2} :

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (1)$$

Si

- $M = 1 \implies M^* = 1$
- $M < 1 \implies M^* < 1$
- $M > 1 \implies M^* > 1$
- $M \rightarrow \infty \implies M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$
 - para $\gamma = 1.4$, $M^* \rightarrow \sqrt{6} \approx 2.45$

Parámetros de remanso

Retomando esta forma de la ec. de la energía

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$$

Despejando se obtiene

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_p T} = 1 + \frac{u^2}{2\gamma RT / (\gamma - 1)} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{u^2}{a^2}$$

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

Parámetros de remanso

Retomando esta forma de la ec. de la energía

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$$

Despejando se obtiene

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_p T} = 1 + \frac{u^2}{2\gamma RT / (\gamma - 1)} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \frac{u^2}{a^2}$$

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}$$

De las relaciones para flujo isontrópico

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^\gamma = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Parámetros de remanso

Por tanto se obtiene que

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Estas tres relaciones permiten conocer las condiciones de remanso a partir de número de Mach!

Parámetros de remanso

Si consideramos un punto del flujo en el que se alcanza la velocidad sónica, $M = 1$, tenemos que

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

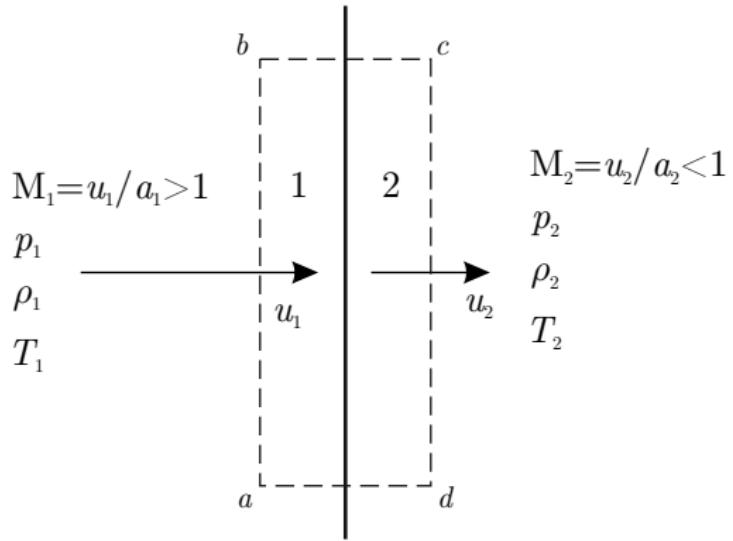
$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma / (\gamma - 1)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1 / (\gamma - 1)}$$

Para $\gamma = 1.4$

$$\frac{T^*}{T_0} = 0.833 \quad \frac{p^*}{p_0} = 0.528 \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.634$$

Parámetros a través de una onda de choque normal



Resumen

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (3)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (4)$$

Conocidas las condiciones corriente arriba, u_1 , p_1 , ρ_1 y h_1 son incógnitas.

Agregando

$$h_2 = c_p T_2 \quad (5)$$

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \quad (6)$$

Tenemos 5 incógnitas y 5 ecuaciones algebraicas.

Parámetros a través de una onda de choque normal

Dividiendo la ecuación (3) por la (2):

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2$$
$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = u_2 - u_1$$

Como $a^2 = \gamma p / \rho$,

$$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1 \quad (7)$$

Esta ecuación combina la de continuidad y la de conservación de cantidad de movimiento.

Parámetros a través de una onda de choque normal

Dividiendo la ecuación (3) por la (2):

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2$$
$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = u_2 - u_1$$

Como $a^2 = \gamma p / \rho$,

$$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} = u_2 - u_1 \quad (7)$$

Esta ecuación combina la de continuidad y la de conservación de cantidad de movimiento.

Usamos una de las formas de la ecuación de la energía:

$$\boxed{\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2} = \text{cte}}$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

En la región 1

$$a_1^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2$$

En la región 2

$$a_2^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_2^2$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

En la región 1

$$a_1^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_1^2$$

En la región 2

$$a_2^2 = \frac{\gamma + 1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2} u_2^2$$

Como el flujo es adiabático a través de la onda, a^* es igual a ambos lados.

Sustituyendo los valores de a_1^2 y a_2^2 en la ecuación (7):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + 1}{2} \frac{a^{*2}}{\gamma u_1} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_1 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{a^{*2}}{\gamma u_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_2 &= u_2 - u_1 \\ \frac{\gamma + 1}{2\gamma u_1 u_2} (u_2 - u_1) a^{*2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_2 - u_1) &= u_2 - u_1 \end{aligned}$$

Dividiendo por $u_2 - u_1$, se obtiene,

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma u_1 u_2} a^{*2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Dividiendo por $u_2 - u_1$, se obtiene,

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma u_1 u_2} a^{*2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = 1$$

Resolviendo para a^* , se obtiene:

$$a^{*2} = u_1 u_2$$

Conocida como la *Relación de Prandtl*. Proporciona una relación intermedia entre ambos lados de la onda.

Parámetros a través de una onda de choque normal

Otras formas

$$1 = M_1^* M_2^*$$

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Otras formas

$$1 = M_1^* M_2^*$$

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

Sustituimos en esta ecuación la relación entre el M y el M^* , ecuación (1):

$$\frac{(\gamma + 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} = \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{-1}$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Otras formas

$$1 = M_1^* M_2^*$$

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

Sustituimos en esta ecuación la relación entre el M y el M^* , ecuación (1):

$$\frac{(\gamma + 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} = \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{-1}$$

Se despeja M_2^2 :

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2}$$

Primera relación entre parámetros de ambos lados de la onda!

Parámetros a través de una onda de choque normal

Analizamos:

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2}$$

Si

- $M_1 = 1 \implies M_2 = 1$
- $M_1 > 1 \implies M_2 < 1$
- $M_1 \rightarrow \infty \implies M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$
 - para $\gamma = 1.4$, $M_2 \rightarrow 0.378$

Parámetros a través de una onda de choque normal

De la ecuación de continuidad, (2):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_2 u_1} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

De la ecuación de continuidad, (2):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_2 u_1} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}$$

Reemplazando en esta ecuación la relación entre el M y el M^* , ecuación de cantidad de movimiento (3):

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}} \quad (8)$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Para encontrar la relación de presiones, combinamos la ecuación de continuidad, (2) y la de cantidad de movimiento (3):

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Para encontrar la relación de presiones, combinamos la ecuación de continuidad, (2) y la de cantidad de movimiento (3):

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)$$

Dividiendo esto por p_1 y recordando que $a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$, se obtiene

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma \rho_1 u_1^2}{\gamma p_1} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Para encontrar la relación de presiones, combinamos la ecuación de continuidad, (2) y la de cantidad de movimiento (3):

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)$$

Dividiendo esto por p_1 y recordando que $a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$, se obtiene

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma \rho_1 u_1^2}{\gamma p_1} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)$$

Sustituyendo u_2/u_1 de la ecuación (8):

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)} \quad (9)$$

Para la relación de temperaturas, de la ecuación de estado de los gases ideales:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Para la relación de temperaturas, de la ecuación de estado de los gases ideales:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8) y (9) en la anterior:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

Resumen

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 2)/2] M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

Parámetros a través de una onda de choque normal

Condiciones para $M_1 \rightarrow \infty$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} = 0.378$$

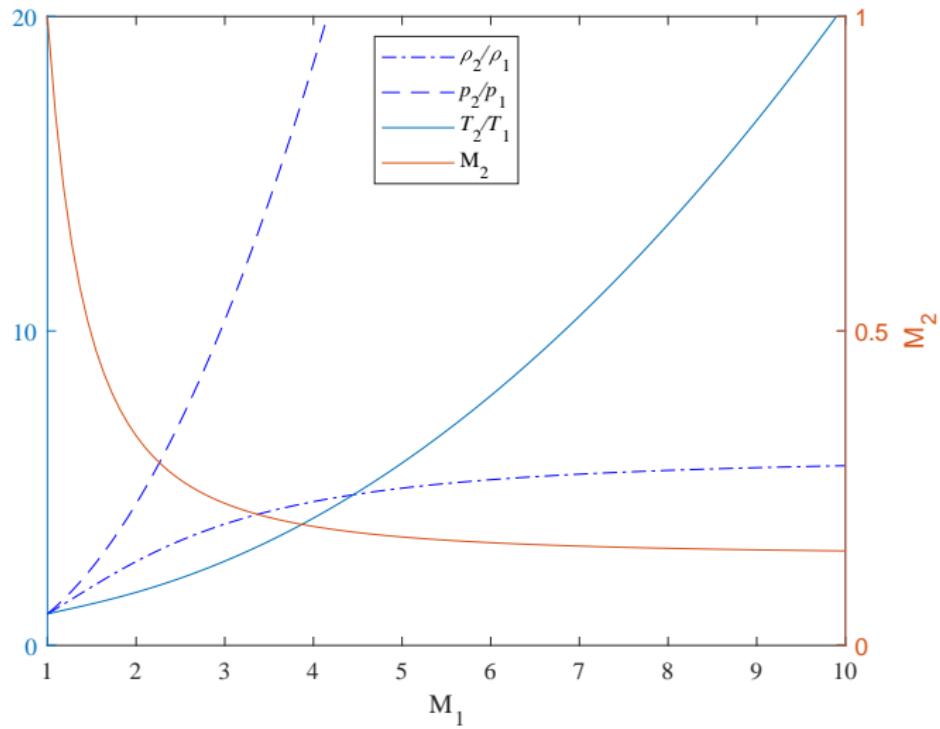
$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = 6$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \infty$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \infty$$

¡¡La temperatura y la presión no están acotadas!!

Parámetros a través de una onda de choque normal



Comentarios finales sobre la OdC normal

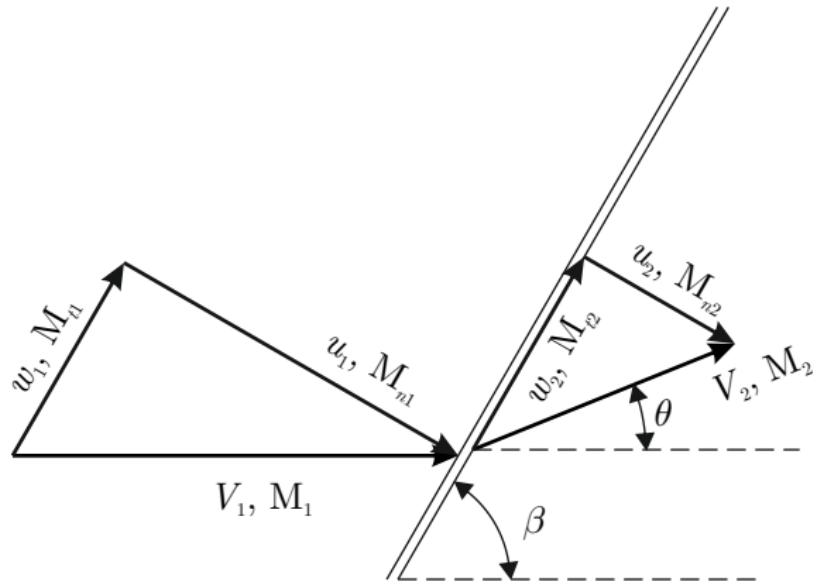
- Las relaciones obtenidas son válidas para flujo supersónico, $M_1 > 1$, pero matemáticamente dan resultados para $M_1 \leq 1$

- Las relaciones obtenidas son válidas para flujo supersónico, $M_1 > 1$, pero matemáticamente dan resultados para $M_1 \leq 1$
- El salto de entropía entre dos puntos:

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

- Si $M_1 > 1 \implies s_2 > s_1$
- Si $M_1 = 1 \implies s_2 = s_1$
- Si $M_1 < 1 \implies s_2 < s_1$
- Dentro de la onda de choque los mecanismos de fricción y transferencia de calor son muy intensos.

Ecuaciones de la onda de choque oblicua



Ecuaciones de la onda de choque oblicua

Se demuestra que

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$h_2 = C_p T_2$$

$$p_2 = \rho_2 R T_2$$

Además $w_1 = w_2$

- Son las mismas ecuaciones que obtuvimos para la OdC normal.
- Se obtienen las mismas relaciones en términos de la componente del número de Mach normal, $M_{n1} = M_1 \sin \beta$

Ecuaciones de la onda de choque oblicua

Resumen

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - (\gamma - 1)/2}$$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)}$$

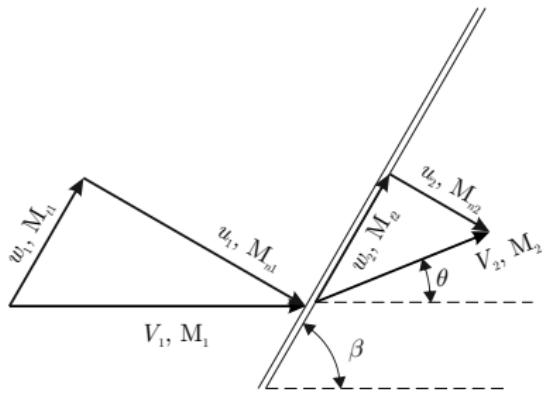
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_{n,1}^2}{2 + (\gamma - 1) M_{n,1}^2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{n,1}^2 - 1) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$

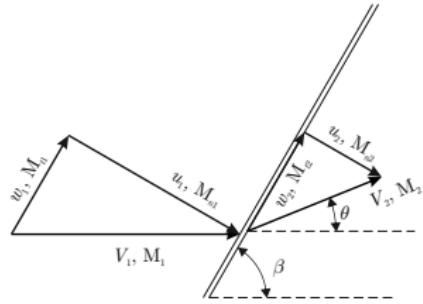
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{(p_2/p_1)}{(\rho_2/\rho_1)} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_{n,1}^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma - 1) M_{n,1}^2}{(\gamma + 1) M_{n,1}^2}$$

Ecuaciones de la onda de choque oblicua

- Las propiedades del flujo a través de una OdCh oblicua dependen de la componente normal a la onda del número de Mach corriente arriba, $M_{n,1}$
- Este parámetro depende del ángulo de inclinación de la onda, β
- Una OdCH normal es un caso particular cuando $\beta = \pi/2$



Ecuaciones de la onda de choque oblicua



Recordando que $w_1 = w_2$

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$
$$= \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}$$

Reordenando...

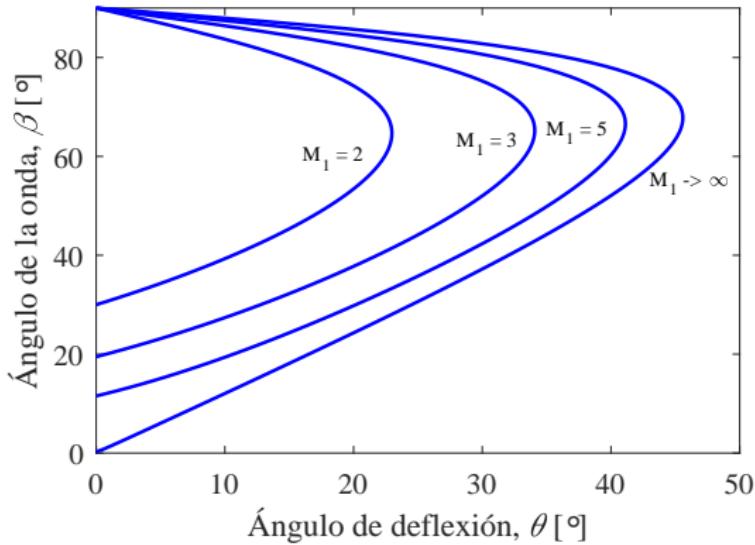
$$\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}$$

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2}$$

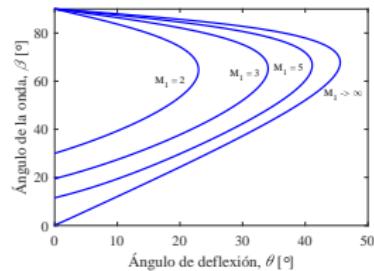
$$\boxed{\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]}$$

Ecuaciones de la onda de choque oblicua

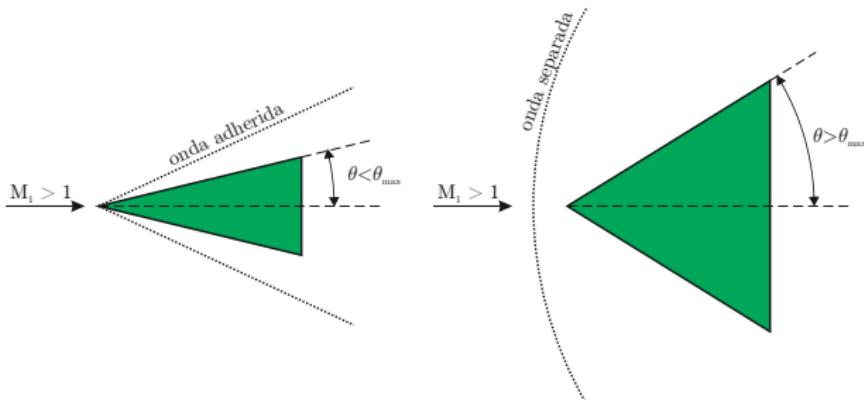
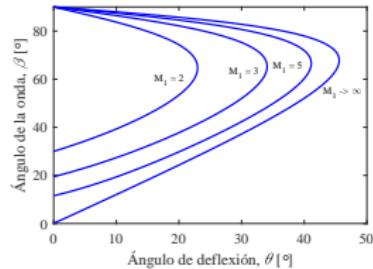
$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]$$



Ecuaciones de la onda de choque oblicua

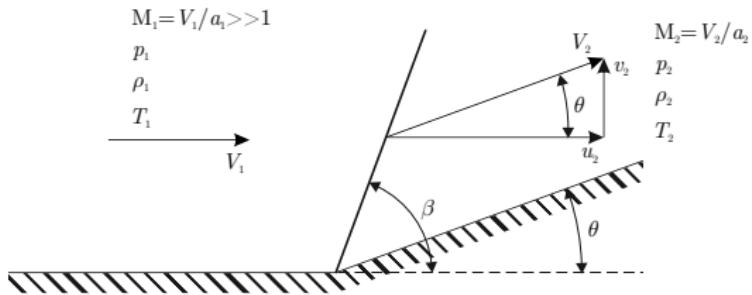


Ecuaciones de la onda de choque oblicua



Onda de choque oblicua en hipersónico

Condiciones del gas

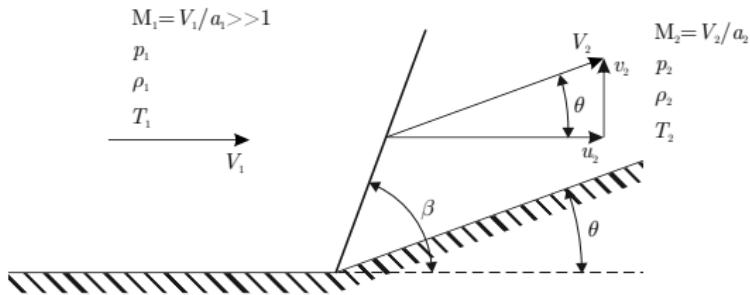


Teniamos:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (10)$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Condiciones del gas



Teniamos:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (10)$$

Si $M_1 \rightarrow \infty$ $M_1^2 \sin^2 \beta \gg 1$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \beta}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

La densidad

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

La densidad

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}$$

Si $M_1 \rightarrow \infty$ $M_1^2 \sin^2 \beta \gg 1$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}}$$

La temperatura

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\rho_2 / \rho_1)}{(\rho_2 / \rho_1)}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

La densidad

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}$$

Si $M_1 \rightarrow \infty$ $M_1^2 \sin^2 \beta \gg 1$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}}$$

La temperatura

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\rho_2 / \rho_1)}{(\rho_2 / \rho_1)}$$

Para $M_1 \rightarrow \infty$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M_1^2 \sin^2 \beta}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Componentes de la velocidad después de la onda

La componente paralela a u_1

$$\frac{u_2}{V_1} = 1 - \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

Para $M_1 \rightarrow \infty$

$$\boxed{\frac{u_2}{V_1} = 1 - \frac{2 \sin^2 \beta}{\gamma + 1}}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Componentes de la velocidad después de la onda

La componente perpendicular a u_1

$$\frac{v_2}{V_1} = \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \cot \beta}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

Para M_1 grandes puede aproximarse

$$\frac{v_2}{V_1} = \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta) \cot \beta}{(\gamma + 1) M_1^2} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{(\gamma + 1)}$$

Usando la relación $2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$.

Para $M_1 \rightarrow \infty$

$$\boxed{\frac{v_2}{V_1} = \frac{\sin 2\beta}{(\gamma + 1)}}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Coeficiente de presión

Definición:

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{q_1}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Coeficiente de presión

Definición:

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{q_1}$$

Sabiendo que $a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ y que $M_1 = u_1/a_1$, la presión dinámica puede escribirse como:

$$q_1 = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 \frac{\gamma p_1}{\gamma p_1} = \frac{\gamma p_1}{2} \frac{U_1^2}{a_1^2}$$

$$q_1 = \frac{\gamma}{2} p_1 M_1^2$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

El coeficiente de presión puede escribirse como

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{p_2 - p_1}{q_1} = \frac{p_1}{q_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \\ c_p &= \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

El coeficiente de presión puede escribirse como

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{p_2 - p_1}{q_1} = \frac{p_1}{q_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \\ c_p &= \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Reemplazando la expresión (10)

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right)$$

$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right)$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

El coeficiente de presión puede escribirse como

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{p_2 - p_1}{q_1} = \frac{p_1}{q_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \\ c_p &= \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Reemplazando la expresión (10)

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right)$$

$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right)$$

Para $M_1 \rightarrow \infty$

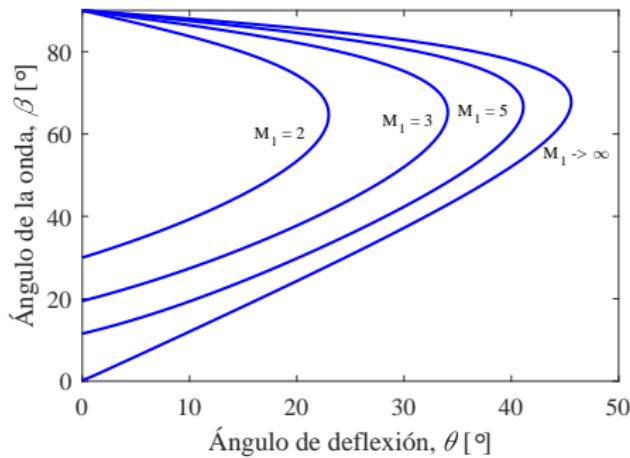
$$c_p = \frac{4}{\gamma + 1} \sin^2 \beta$$

¡No depende de M_1 !

Onda de choque oblicua en hipersónico

Ángulo de la onda y ángulo de deflexión del flujo. Cuerpos esbeltos

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \quad (12)$$



Onda de choque oblicua en hipersónico

Ángulo de la onda y ángulo de deflexión del flujo. Cuerpos esbelto

Para $M_1 \rightarrow \infty$, si θ es pequeño, β también es pequeño y se cumple que

$$\begin{aligned}\sin \beta &\approx \beta \\ \cos 2\beta &\approx 1 \\ \tan \theta &\approx \sin \theta \approx \theta\end{aligned}$$

por lo que queda:

$$\theta = \frac{2}{\beta} \left[\frac{M_1^2 \beta^2 - 1}{M_1^2 (\gamma + 1) + 2} \right] \quad (13)$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Ángulo de la onda y ángulo de deflexión del flujo. Cuerpos esbelto

Considerando el orden de magnitud de los términos con $M_\infty \rightarrow \infty$

$$\theta = \frac{2}{\beta} \left[\frac{\cancel{M_1^2} \beta^2}{\cancel{M_1^2} (\gamma + 1)} \right]$$
$$\theta = \frac{2\beta}{(\gamma + 1)}$$

Onda de choque oblicua en hipersónico

Ángulo de la onda y ángulo de deflexión del flujo. Cuerpos esbelto

Considerando el orden de magnitud de los términos con $M_\infty \rightarrow \infty$

$$\theta = \frac{2}{\beta} \left[\frac{M_1^2 \beta^2}{M_1^2 (\gamma + 1)} \right]$$
$$\theta = \frac{2\beta}{(\gamma + 1)}$$

O bien

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

Es decir que para $M_1 \rightarrow \infty$, $\gamma = 1.4$, θ pequeño, y por tanto β pequeño, se cumple que $\beta = 1.2\theta$

Definición

- Se define el parámetro $K = M_1 \theta$
- Muy influyente en el estudio de cuerpos esbeltos en régimen hipersónico

Definición

- Se define el parámetro $K = M_1\theta$
- Muy influyente en el estudio de cuerpos esbeltos en régimen hipersónico

Buscamos una expresión del coeficiente de presión en función de K

- La expresión (12) (relación $\theta - \beta - M_1$) es una función implícita de $\theta = \theta(\beta)$
- La relación inversa no puede hallarse.

Considerando la ecuación (13) (relación $\theta - \beta - M_1$ para ángulos pequeños) la reescribimos como

$$M_1^2\beta^2 - 1 = \beta\theta \left[\frac{M_1^2(\gamma + 1)}{2} + 1 \right]$$

Parámetro de similitud hipersónico

Si M_1 grande, pero no infinito $\frac{1}{2}M_1^2(\gamma + 1) \gg 1$, pero como β es pequeño, no puede afirmarse que $M_1\beta$ sea mucho más grande que la unidad. Por tanto queda

$$M_1^2\beta^2 - 1 = \frac{(\gamma + 1)}{2}\beta\theta M_1^2$$

dividiendo todo por $M_1^2\theta^2$ queda

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2 - \frac{1}{M_1^2\theta^2} &= \frac{(\gamma + 1)}{2}\frac{\beta}{\theta} \\ \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2 - \frac{(\gamma + 1)}{2}\left(\frac{\beta}{\theta}\right) - \frac{1}{M_1^2\theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Ecuación cuadrática en β/θ . Solución

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{(\gamma + 1)}{4} + \sqrt{\left(\frac{(\gamma + 1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{M_1^2\theta^2}} \quad (15)$$

- La solución con el signo negativo no tiene sentido físico.
- Esta expresión es una relación explícita de $\beta = \beta(\theta)$.
- Retomando la ecuación (10):

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \beta^2 - 1) \quad (16)$$

Si M_1 es muy grande, pero no infinito y β es pequeño, no puede afirmarse que el producto $M_1^2 \beta$ sea mucho mayor que la unidad ==> la expresión no puede reducirse.

Parámetro de similitud hipersónico

- Pero se puede usar la solución (15) (relación explícita de $\beta = \beta(\theta)$) para encontrar una expresión de p_2/p_1 en función del ángulo de deflexión, θ .
- Combinando las ecuaciones (14) y (15):

$$\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2 = \frac{(\gamma + 1)}{2} \left[\frac{(\gamma + 1)}{4} + \sqrt{\left(\frac{(\gamma + 1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{M_1^2 \theta^2}} \right] + \frac{1}{M_1^2 \theta^2}$$

Sustituyendo esto en (16):

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} M_1^2 \theta^2 + \gamma \sqrt{\left(\frac{(\gamma + 1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{M_1^2 \theta^2}} M_1^2 \theta^2$$

Reemplazando $K = M_1 \theta$ en esta última

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} K^2 + \gamma K^2 \sqrt{\left(\frac{(\gamma + 1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}}$$

Parámetro de similitud hipersónico

- Combinando esta expresión con la del c_p , ecuación (11), se tiene que,

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left[\frac{\gamma(\gamma+1)}{4} K^2 + \gamma K^2 \sqrt{\left(\frac{(\gamma+1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}} \right]$$

Multiplicando y dividiendo todo por θ^2

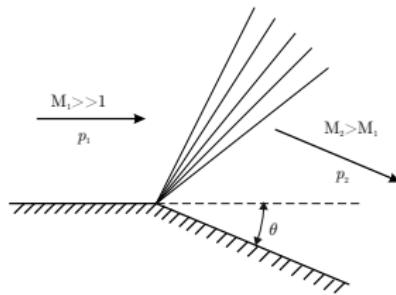
$$c_p = \frac{2\theta^2}{\gamma K^2} \left[\frac{\gamma(\gamma+1)}{4} K^2 + \gamma K^2 \sqrt{\left(\frac{(\gamma+1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}} \right]$$

$$c_p = 2\theta^2 \left[\frac{(\gamma+1)}{4} + \sqrt{\left(\frac{(\gamma+1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}} \right]$$

Es decir que para flujo hipersónico y pequeños ángulos de deflexión el coeficiente de presión es,

$$\frac{c_p}{\theta^2} = f(K, \gamma)$$

Ondas de expansión de Prandtl-Meyer



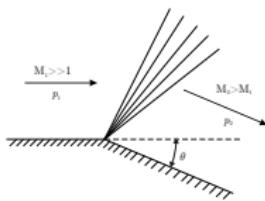
La relación entre θ , M_1 y M_2 es (véase [1]):

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad (17)$$

donde ν es la función de Prandtl-Meyer

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \right]$$

Ondas de expansión de Prandtl-Meyer



Cómo se resuelve un problema de ondas de expansión

Dados con M_1 y θ :

- ① Se calcula el valor de $\nu(M_1)$, o se obtiene de tablas (véase [1])
- ② Con el ángulo θ y el valor de $\nu(M_1)$, se calcula $\nu(M_2)$ a partir de la relación (17)

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

- ③ Con $\nu(M_2)$ se obtiene M_2 de las tablas

Cómo se resuelve un problema de ondas de expansión

- Como la expansión es isoentrópica, los valores de p_0 y T_0 son constantes a través de la onda.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_{0,2}}{T_1/T_{0,1}} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p_{0,2}}{p_1/p_{0,1}} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Ondas de expansión - Caso hipersónico

La relación entre θ , M_1 y M_2 es:

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad (18)$$

donde ν es la función de Prandtl-Meyer

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \right]$$

Ondas de expansión - Caso hipersónico

La relación entre θ , M_1 y M_2 es:

$$\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad (18)$$

donde ν es la función de Prandtl-Meyer

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \right]$$

Para números de Mach grandes, $\sqrt{M^2 - 1} \approx M$, por tanto

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} M - \tan^{-1} M \right] \quad (19)$$

Ondas de expansión - Caso hipersónico

Por otro lado, considerando la identidad trigonométrica

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)$$

y el desarrollo en series,

$$\tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots$$

Combinando estas dos se tiene que

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

Ondas de expansión - Caso hipersónico

Aplicando esta expansión a la función (19):

$$\begin{aligned}\nu(M) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{1}{M} + \dots \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{M} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{1}{M} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{M}\end{aligned}$$

Ondas de expansión - Caso hipersónico

Aplicando esta expansión a la función (19):

$$\begin{aligned}\nu(M) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{1}{M} + \dots \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{M} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{1}{M} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{M}\end{aligned}$$

Sustituyendo en $\theta = \nu(M_2) - \nu(M_1)$:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{M_2} - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} + \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{1}{M_1} \\ \theta &= \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right)\end{aligned}\tag{20}$$

- Expresión para ondas de expansión en flujo hipersónico
- Cuanto más grandes M_1 y M_2 es más exacta

Ondas de expansión - Caso hipersónico

El flujo en las ondas de expansión es isoentrópico. La relación de presiones es

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + (\gamma - 1)/2M_1^2}{1 + (\gamma - 1)/2M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Para flujo hipersónico, M grandes:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (21)$$

Reacomodando la ecuación (20):

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_1 \theta = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} K$$

Ondas de expansión - Caso hipersónico

Remplazando en la (21):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} K\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

Depende de

- El parámetro de similitud K
- La relación de calores específicos γ
- En esta solo se asume M grandes, no ángulos pequeños.

Ondas de expansión - Caso hipersónico

El coeficiente de presión es

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left[\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} K \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

Multiplicando y dividiendo todo por θ^2

$$c_p = \frac{2\theta^2}{\gamma K^2} \left[\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} K \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

Es decir que para flujo hipersónico el coeficiente de presión es,

$$\frac{c_p}{\theta^2} = f(K, \gamma)$$

Referencias

- [1] John D. Anderson.
Fundamentals of Aerodynamics, 5th Edition.
McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2010.