UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID

Aerodinámica de Altas Velocidades y Fenómenos de Reentrada

TRABAJO 1

Autor: Daniel DEL RÍO VELILLA

Profesor: Sebastián FRANCHINI

Madrid, 1 de abril, 2021

Las ecuaciones utilizado durante todo el trabajo se han extraído de la documentación aportada en la asignatura, [1] y [2].

Ejercicio 1

Un gas ideal a temperatura T1 = 80K y presión P1 = 1 atm fluye isentrópicamente a un número de Mach $M_1 = 6,9$. La relación de calores específicos del gas es $\gamma = 1,4$ y su masa molecular es $M_m = 29$ g/mol.

Calcular:

a) La densidad ρ_1 y la energía cinética del gas:

La densidad se calcula con la ecuación de gas ideal,

$$\rho_1 = R_g \frac{P_1}{T_1} = 4,418 \quad [\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}], \tag{1}$$

con

$$R_g = \frac{R}{M_m} = 286{,}6 \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}].$$

Para calcular la energía del gas es necesario que obtener previamente el c_v y c_p del gas de la siguiente manera:

$$c_v = \frac{R_{gas}}{\gamma - 1} = 716{,}7 \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}] \quad ; \qquad c_p = \gamma c_v = 1003,4 \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}].$$

Ahora solo hay que multiplicar el c_v por la temperatura para conseguir la engría específica

$$e = c_v T = 2{,}7 \cdot 10^3 \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}]. \tag{2}$$

b) La temperatura y presión de remanso:

Para calcular las diferentes magnitudes de remanso en función del Mach se han usado las siguientes expresiones:

$$T_0 = T\left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2\right], \tag{3}$$

$$P_0 = P\left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{4}$$

$$\rho_0 = \rho\left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{5}$$

Por lo tanto, sustituyendo en estas ecuaciones los valores de $T = T_1$, $P = P_1$ y $M = M_1$ se obtienen la temperatura y presión de remanso en estas condiciones:

$$T_0 = 841{,}76 \quad [\mathrm{K}] \quad ; \qquad P_0 = 3{,}83 \cdot 10^8 \quad [\mathrm{Pa}].$$

c) La entalpía estática y la de remanso:

La expresión de la entalpía es la siguiente:

$$h = c_p T \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}], \tag{6}$$

entonces, solo hay que sustituir los valores de c_p y T, T_0 para obtener la entalpía estática y de remanso:

$$h = 80273 \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}] \quad ; \qquad h_0 = 844634 \quad [\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}].$$

Ejercicio 2

Un gas ideal que fluye a un número de Mach $M_1 = 8$ se encuentra con una onda de choque normal. La temperatura es $T_1 = 80$ K y la presión $P1 = 1$ atm. La relación de calores específicos del gas es $\gamma = 1,4$ y su masa molecular es $M_m = 29$ g/mol. Calcular:

a) La relación entre la temperatura estática corriente abajo de la onda, T_2, y la temperatura de remanso corriente arriba de la onda de choque normal $T_{0,1}$:

La relación entre parámetros antes y después de la onda de choque normal se calcula según las siguientes ecuaciones:

$$M_2 = \left[\frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2)}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$T_2 = T_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)\right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}, \tag{8}$$

$$P_2 = P_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)\right], \tag{9}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}. \tag{10}$$

Aplicando las ecuaciones (3), (8) se calculan ambas temperaturas y después su relación:

$$T_{0,1} = 1104,0 \quad [\mathrm{K}]\ ; \qquad T_2 = 1070{,}9 \quad [\mathrm{K}] \quad ; \qquad \frac{T_{0,1}}{T_2} = 0{,}9701.$$

b) La temperatura de remanso corriente abajo de la onda de choque normal, $T_{0,2}$.

Aplicando la ecuación (3) a la T_2 obtenida en el apartado anterior:

$$T_{0,2} = 1104,0 \quad [\mathrm{K}].$$

Se ve que la temperatura y entalpía de remanso se conservan a través de una onda de choque.

c) La relación entre la presión estática corriente abajo de la onda de choque, P_2, y el doble de la presión dinámica corriente arriba de la onda de choque, $\rho_1 U_1^2$:

Para calcular la presión dinámica se necesita la velocidad del sonido, por lo tanto,

$$a_1 = \sqrt{\gamma R_g T_1} = 179{,}19 \quad [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]\ ; \qquad U_1 = M_1 a_1 = 1434 \quad [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$

y teniendo en cuenta que el gas antes de la onda de choque tiene las mismas propiedades que el Ejercicio 1, su densidad es la misma, por lo que el doble de la presión dinámica es:

$$\rho_1 U_1^2 = 9,08 \cdot 10^6 \quad [\mathrm{Pa}].$$

Igual que se ha hecho en el apartado a), para calcular la presión después de la onda utiliza la expresión (9), obteniendo un valor de:

$$P_2 = 7{,}55 \cdot 10^6 \quad [\mathrm{Pa}].$$

Solo quedaría dividir ambos valores para llegar al resultado buscado:

$$\frac{P_2}{\rho_1 U_1^2} = 0{,}8315.$$

Ejercicio 3

Un gas ideal que fluye a un número de Mach $M_1 = 8$ se encuentra con una onda de choque oblicua que deflecta las líneas de corriente un ángulo $\delta = 20°$. La temperatura es $T_1 = 80$ K y la presión $P1 = 1$ atm. La relación de calores específicos del gas es $\gamma = 1,4$ y su masa molecular es $M_m = 29$ g/mol. Calcular:

a) La componente normal del número de Mach corriente arriba de la onda de choque y la temperatura estática del gas *post-shock*.

La deflexión $\delta = 20°$ puede ser producida por dos ángulos β diferentes, en fincuión de si es una onda débil o fuerte y se obtiene de la siguiente ecuación implicita,

$$\tan(\delta) = 2\,\mathrm{cotg}(\beta)\frac{M_1^2 \sin 2(\beta) - 1}{M_1^2\,(\gamma + \cos(2\beta)) + 2}. \tag{11}$$

Si se pinta la curva que forma esta igualdad para $M_1 = 8$, Figura 1, se puede ver que la deflexión de 20°se puede obtener para dos ángulos, como se había comentado.

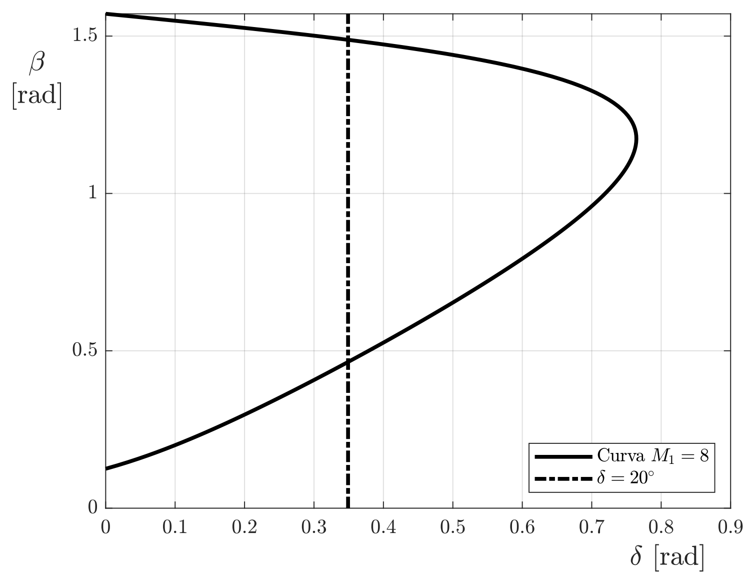

Figura 1: Curva que cumple la ecuación (11) para $M_1 = 8$.

Utilizando MATLAB para encontrar las soluciones de la ecuación implícita llegamos a

$$\beta_{debil} = 0{,}4646 \quad [\text{rad}] = 26{,}6 \quad [°]\ ; \qquad \beta_{fuerte} = 1{,}4882 \quad [\text{rad}] = 85{,}3 \quad [°]$$

Por lo tanto, la corriente normal del número de Mach corriente arriba queda de la siguiente forma:

$$M_{n,1} = M_1 \sin(\beta) \; ; \qquad M_{n,1,debil} = 3{,}58 \; ; \qquad M_{n,1,fuerte} = 7{,}97$$

Y la temperatura *post-shock* se obtiene con aplicando la siguiente expresión:

$$T_2 = T_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n,1}^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma - 1)M_{n,1}^2}{(\gamma + 1)M_{n,1}^2}. \tag{12}$$

Y las temperaturas para los dos ángulos son

$$T_{2,debil} = 274{,}54 \quad [\mathrm{K}] \; ; \qquad T_{2,fuerte} = 1064{,}15 \quad [\mathrm{K}].$$

Ejercicio 4

La Figura 2 muestra la velocidad y la altitud del módulo Soyuz TMA durante la maniobra de reentrada. Asumiendo el modelo de Atmósfera Estándar Internacional (véase ESDU 77021 y ESDU77022) y que la longitud característica del módulo de descenso de la Soyuz es $L = 2,2$ m, calcular para $z = [90, 60, 20]$ km de altitud:

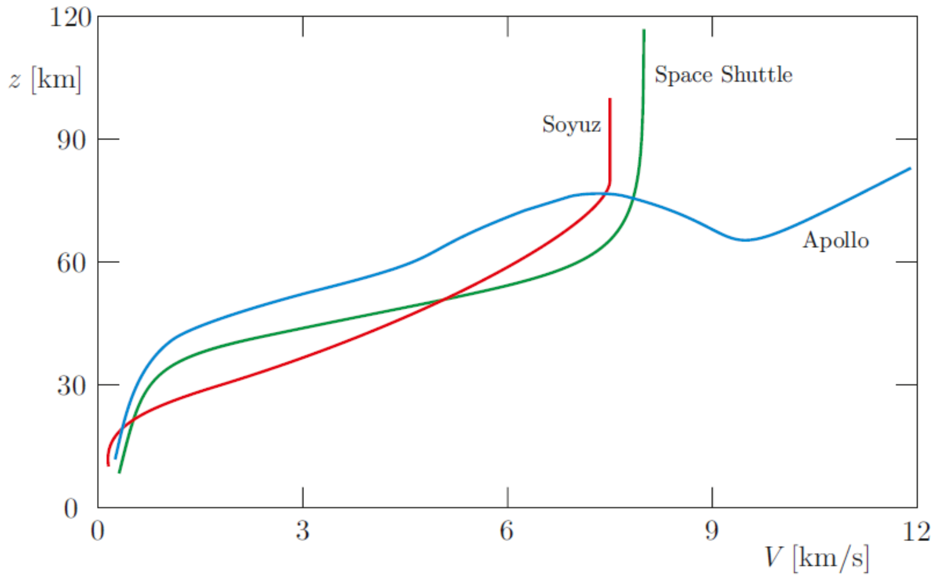

Figura 2: Velocidades de distintos módulos de reentrada.

Calcular:

a) El número de Reynolds de la corriente libre:

El número de Reynolds se define de la siguiente forma:

$$Re = \frac{\rho U L_c}{\mu}, \tag{13}$$

por lo tanto, se necesita conocer la densidad y viscosidad de la atmósfera a distintas alturas. Para ello se han consultado las tablas de los archivos [3] y [4].

En la Tabla 1 se recogen todos los resultados de las propiedades de la atmósfera para las tres alturas propuestas en el ejercicio junto con la velocidad a la que se mueve el módulo de descenso.

Tabla 1: Propiedades de la atmósfera para las distintas alturas.

z [m]	U [m/s]	T [K]	a [m/s]	P [Pa]	ρ [kg/m^3]	μ [Ns/m^2]
$20{\cdot}10^3$	$8{\cdot}10^3$	216.7	295.1	5474.6	$8.8{\cdot}10^{-2}$	$1.42{\cdot}10^{-5}$
$60{\cdot}10^3$	$6{\cdot}10^3$	245.5	314.1	20.3	$2.9{\cdot}10^{-4}$	$1.56{\cdot}10^{-5}$
$90{\cdot}10^3$	$0.5{\cdot}10^3$	186.9	275.2	0.2	$3.4{\cdot}10^{-6}$	$1.25{\cdot}10^{-5}$

Por lo tanto, sustituyendo cada uno de los valores de la tabla en la ecuación (13) con $L_c = 2{,}2$ m se obtienen los siguientes resultados que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Número de Reynolds en función de la altura.

z [m]	$20{\cdot}10^3$	$60{\cdot}10^3$	$90{\cdot}10^3$
Re	$6.8{\cdot}10^6$	$2.4{\cdot}10^5$	$4.8{\cdot}10^3$

b) El número de Mach de la corriente libre:

Para obtener el número de Mach solo hay que dividir la velocidad por la velocidad del sonido de la Tabla 1. Los resultados se pueden ver en la Tabla 3

Tabla 3: Número de Mach en función de la altura.

z [m]	$20{\cdot}10^3$	$60{\cdot}10^3$	$90{\cdot}10^3$
M	1.69	19.10	29.07

c) El número de Knudsen de la corriente libre:

El número de Knudsen se define como

$$Ku = \frac{l}{L_c}, \tag{14}$$

siendo l el camino libre medio entre partículas y L_c una longitud caracterítica, en este caso $L_c = 2{,}2$ m.

El camino medio entre partículas se ha calculado siguiendo la ecuación de [5]

$$l = \frac{\mu}{P}\sqrt{\frac{\pi R_g T}{2}}. \tag{15}$$

Sustituyendo los datos de la Tabla 1 se obtienen los siguientes resultados recogidos en la Tabla 4.

Tabla 4: Camino medio entre partículas y número de Kundsenen función de la altura.

$\boldsymbol{z}$ **[m]**	$20{\cdot}10^3$	$60{\cdot}10^3$	$90{\cdot}10^3$
$\boldsymbol{l}$ **[m]**	$8.1{\cdot}10^{-9}$	$2.6{\cdot}10^{-4}$	$2{\cdot}10^{-2}$
$\boldsymbol{Ku}$	$3.7{\cdot}10^{-7}$	$1.2{\cdot}10^{-4}$	$1{\cdot}10^{-2}$

Referencias

[1] S. Franchini, Modelos de atmósferas planetarias (2020-21).
URL `www.idr.upm.es`

[2] S. Franchini, Introducción a la aerodinámica hipersónica (2020-21).
URL `www.idr.upm.es`

[3] E. Torenbeek, Properties of a standard atmosphere.

[4] E. Torenbeek, Ecuations for calculation of international standard atmosphere and associated off-standard atmospheres contents (2008).

[5] Mean free path - wikipedia.
URL `https://en.m.wikipedia.org/wiki/Mean_free_path`