1er apellido																						
2º apellido																						
Nombre																						

N E					

P-1 (Tiempo 60 minutos)

Se desea colocar un satélite en una órbita geoestacionaria. El satélite se lanza desde el Puerto espacial de Kourou, en la Guayana Francesa (latitud de 5º Norte), y el lanzador coloca al satélite en una órbita de aparcamiento de inclinación mínima y 500 km de altitud.

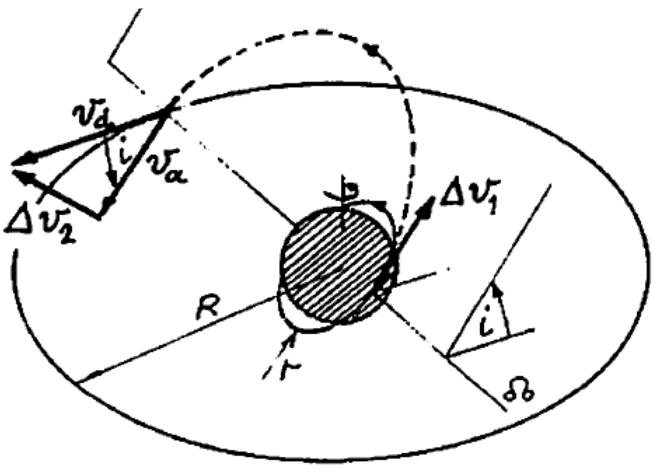
a) Determinar los deltas de velocidad necesarios para realizar una GTO (Geostationary Transfer Orbit) desde la órbita de aparcamiento a una órbita geoestacionaria.

La inclinación de la órbita de aparcamiento es la mínima que se puede conseguir desde Kourou, 5 º , coincidente con la latitud del punto de lanzamiento. La GTO consiste en una maniobra de transferencia elíptica en la que se da un primer ΔV en el nodo ascendente (o descendente) de forma que el radio en el apogeo de la elipse coincida con el de la órbita geoestacionaria. En dicho apogeo se da un segundo ΔV de forma que a un mismo tiempo se modifica la inclinación de la órbita y se deja al satélite con la velocidad de la órbita geoestacionaria.

$$\Delta V_1 = V_P - V_I = \sqrt{\frac{2\mu}{r_I}\frac{r_{GEO}}{r_I + r_{GEO}}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_I}} \quad \text{y} \quad \Delta V_2 = \sqrt{V_a^2 + V_{GEO}^2 - 2V_a V_{GEO}\cos\Delta i}$$

Donde

$$V_a = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{GEO}}\frac{r_I}{r_I + r_{GEO}}} \qquad V_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}}$$



Con lo que

ΔV_1 = 2372 m/s

ΔV_2 = 1460 m/s

Y ΔV_{total} = 3832 m/s

b) Comparar y discutir el delta de velocidad total necesario para la GTO calculada en el apartado anterior con el necesario para realizar una transferencia de Hohmann desde una órbita ecuatorial de igual altitud (500 km), como la que se podría alcanzar desde una base de lanzamiento en el ecuador, a la órbita geoestacionaria. Comparar también con una GTO desde una órbita de aparcamiento a la misma altitud y 45º de inclinación.

1er apellido																						
2º apellido																						
Nombre																						

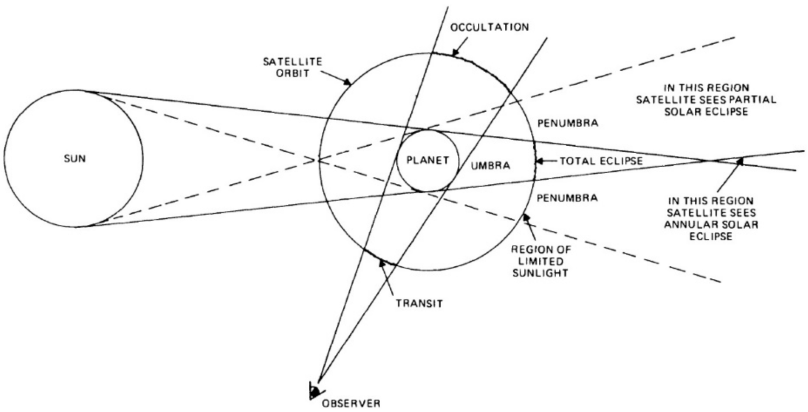
N E					

En este caso se puede emplear exactamente la misma expresión, pero con una inclinación nula, dado que ese es el caso de una transferencia de Hohmann sin cambio de inclinación. El ΔV_1 es el mismo, y el ΔV_2 =1447 m/s. La diferencia provocada por la inclinación de 5 grados es, entonces, de 13 m/s. La diferencia entre la de 0º y 45º es de 795 m/s.

c) **Se pretende calcular los eclipses máximos de la órbita de aparcamiento y la órbita geoestacionaria (tanto en unidades de tiempo como en porcentaje del periodo orbital).**

- **¿Cuál sería la duración de la umbra para ambos en el caso de que se aproxime por un cilindro?**

- **Para el caso geoestacionario se considera que la aproximación anterior no es lo suficientemente buena. Teniendo en cuenta que el vértice del cono de la umbra está a una distancia aproximada de 138.900 km ¿Cuál sería la duración de la umbra en el caso geoestacionario si se aproxima su forma por un cono?**



Se realizan las siguientes simplificaciones:

En primer lugar, se ignora la zona de penumbra, considerando sólo la zona de umbra.

En segundo lugar, dado que el vértice del cono de umbra está a 138900 km de la Tierra, para la órbita de aparcamiento podemos considerar el cono como un cilindro de radio el de la tierra (error de un 5%). Para la órbita más alejada (geoestacionaria), que tiene un radio de 42164 km, esta simplificación es un poco excesiva, resultando en un error entorno al 30%.

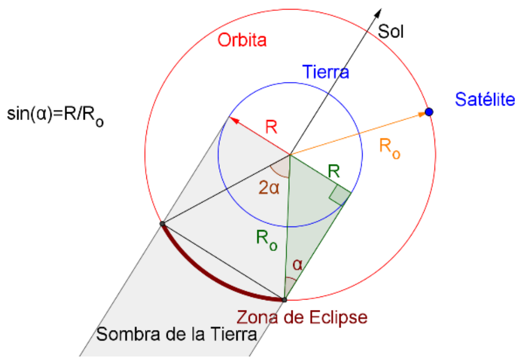
1er apellido																					
2º apellido																					
Nombre																					

N E					

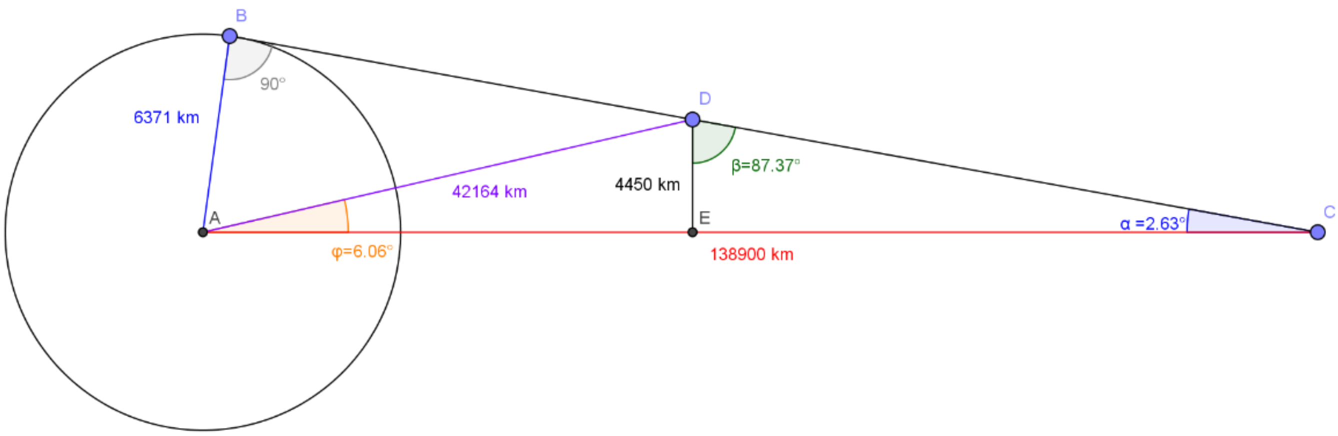
Para la órbita de aparcamiento:

2α=136º

Lo cual resulta en un 37,78% del periodo en eclipse. Como $T = 2\pi\sqrt{r^3/\mu}$, T_1=94,46 minutos, resulta en 35,7 minutos de eclipse máximo.



Para la órbita geoestacionaria, siguiendo el esquema inferior (que no está a escala), se puede determinar empleando trigonometría básica que la altura sobre el punto D, en el que comienza el eclipse son 4450 km, con lo que el semiángulo del eclipse φ=6.06º, y por lo tanto el ángulo total de eclipse máximo son 12.12º. Eso se traduce en un 3,37% del periodo de eclipse máximo. Como el periodo son, lógicamente, 24 horas, el eclipse máximo dura 48 minutos y medio. La simplificación anterior en este caso nos daría 69 minutos de eclipse.



1er apellido		N E
2º apellido		
Nombre		

P-2 (Tiempo 60 minutos)

Se pretende lanzar una sonda interplanetaria desde la Tierra y se quiere estudiar el incremento de velocidad (Δv) que se obtendría al realizar una maniobra de asistencia gravitatoria (fly-by) con la propia Tierra así como el impulso necesario para que se produzca dicho fly-by.

Datos:

$$\mu_{Tierra} = 3.986 \cdot 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^{-2}$$

$$\mu_{Sol} = 1.327 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^{-2}$$

$$a_{Tierra} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$R_{Tierra} = 6378 \text{ km}$$

a) Calcule el semieje mayor de la órbita heliocéntrica necesaria para que se produzca un fly-by con la Tierra dos años después del lanzamiento, coincidiendo con el momento en el que la sonda completa una órbita. Asumir que la posición inicial de la sonda será el periapsis de la órbita heliocéntrica.

Teniendo en cuenta que el periodo de la órbita y su semieje están relacionados según:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Para un periodo de 2 años la órbita tendría un semieje:

$$a = \left(\frac{2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot \sqrt{\mu}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.37 \cdot 10^8 \text{ km}$$

b) Calcular el exceso de velocidad hiperbólica necesario para obtener dicha órbita heliocéntrica.

Para obtener el exceso de velocidad hiperbólica calculamos primero la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol y la velocidad en el perihelio de la trayectoria. La velocidad en una órbita kepleriana es:

$$V = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$$

Considerando que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular:

1er apellido																						
2º apellido																						
Nombre																						

N E					

$$V_{\text{Tierra}} = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{a_{Tierra}}} = 29.74 \text{ km/s}$$

Para la órbita heliocéntrica usamos los datos del apartado anterior:

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p} - \frac{\mu}{a}} = 34.79 \text{ km/s}$$

Así, el exceso de velocidad hiperbólica ser igual a la diferencia entre la velocidad orbital de la Tierra y la de la sonda en su perihelio:

$$V_\infty = V_p - V_{Tierra} = 5.05 \text{ km/s}$$

c) Calcular el semieje mayor de la hipérbola (seguir el convenio de signos según el cual el semieje de las hipérbolas es negativo) y el impulso necesario para insertar la sonda en la órbita de escape si la maniobra se realiza desde una órbita de aparcamiento circular de 500 km de altura.

Para calcular el impulso requerido para inyectar la sonda en la hipérbola de salida, es necesario obtener la velocidad de la órbita circular de aparcamiento y la velocidad en el perigeo de la hipérbola de salida. Esta última queda definida con el radio del perigeo de la hipérbola, que es igual que el radio de la órbita circular y con el semieje mayor de la hipérbola.

A su vez, el semieje mayor de la hipérbola se obtiene del exceso de velocidad hiperbólica, calculado en el apartado anterior.

$$a_{hiperb} = -\frac{\mu_{Tierra}}{V_\infty^2} = -15659 \text{ km}$$

La velocidad en el perigeo de la hipérbola es:

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu_{Tierra}}{r_p} - \frac{\mu_{Tierra}}{a_{hiperb}}} = 11.89 \text{ km/s}$$

Luego el impulso necesario será la diferencia entre esta velocidad y la velocidad de la órbita de aparcamiento:

$$\Delta V_{inyeccion} = V_p - \sqrt{\frac{\mu_{Tierra}}{r_{aparc}}} = 4.28 \text{ km/s}$$

d) Calcular el ΔV (en módulo) ganado si se realiza un fly-by a una altura de 5000 km sobre la Tierra. Tengase en cuenta que al realizar el fly-by la sonda se hallará en el mismo punto de la órbita heliocéntrica que en el momento de partida.

1er apellido																					
2º apellido																					
Nombre																					

N E					

Teniendo en cuenta que el exceso de velocidad hiperbólica será el mismo que cuando la sonda partió de la Tierra y que en este caso r_p es el radio del fly-by:

$$|\Delta V| = \frac{2V_\infty}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_{Tierra}}} = 5.84 \text{ km/s}$$

e) Calcular la distancia asintótica de la hipérbola de llegada.

De acuerdo con la expresión de la distancia asintótica y con los resultados de apartados anteriores:

$$\Delta = \frac{r_p}{V_\infty}\sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_{Tierra}}{r_p}} = 22041 \text{ km}$$