



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID

VALIDACIÓN DE ANÁLISIS ESTRUCTURALES

PRÁCTICA 1

ESTRUCTURAS DE USO ESPACIAL

Autor: Daniel DEL RÍO VELILLA

Profesores: Elena ROIBÁS
Andrés GARCÍA
Alejandro GÓMEZ
Gustavo ALONSO

MADRID, 7 DE ABRIL, 2021

Índice

Índice de figuras	I
Índice de tablas	II
1. Introducción	1
2. Documentos de referencia	2
3. Modos propios: Ejemplo 3	3
3.1. Cálculo teórico: método de desplazamiento estático	3
3.2. Descripción modelo FEM	6
3.3. Resultados del modelo FEM	7
3.4. Comparación de resultados	9
4. Pandeo: Ejemplo 1	10
4.1. Cálculo teórico: formula de Euler	10
4.2. Descripción modelo FEM	11
4.3. Resultados del modelo FEM	13
4.4. Comparación de resultados	13
5. Conclusiones	15

Índice de figuras

1.	Configuración del modelo de estudio.	3
2.	Cargas y desplazamientos en el cono.	4
3.	Cono y centro de masas del satélite modelados en Patran.	7
4.	Modo 1: $f_1 = 104.97$ [Hz]	8
5.	Modo 2: $f_2 = 104.97$ [Hz]	8
6.	Modo 3: $f_3 = 114.46$ [Hz]	9
7.	Condiciones de contorno aplicadas al caso de pandeo.	10
8.	Geometría de la varilla con las condiciones de contorno y carga aplicadas.	12
9.	Deformada producida por la carga crítica.	13

Índice de tablas

1.	Propiedades del acero.	6
2.	Información sobre los elementos del modelo FEM.	7
3.	Modos propios obtenidos con el modelo FEM.	8
4.	Comparación de resultados para el ejemplo de modos propios.	9
5.	Propiedades del aluminio.	11
6.	Información sobre los elementos del modelo FEM.	12
7.	Cargas críticas a pandeo obtenidos con el modelo FEM.	13
8.	Comparación de resultados para el ejemplo de pandeo. Resultados en N.	13

1. Introducción

En este documento se presenta la realización de la primera práctica correspondiente a la asignatura Estructuras de uso Espacial del Máster Universitario de Sistemas Espaciales.

Su objetivo es tener una primera aproximación a los programas Nastran-Patran a modo de preparación de cara a la segunda práctica. Para ello, se van a resolver dos ejercicios académicos de forma analítica y numérica, con Nastran-Patran, para comparar los resultados posteriormente.

El primer ejercicio va a consistir en encontrar los modos propios de un satélite fijado a un soporte cónico, mientras que el segundo se procederá a calcular la carga crítica a pandeo de una varilla con dos configuraciones diferentes.

2. Documentos de referencia

- [1] J. J. Wijker, Spacecraft structures, Springer Berlin Heidelberg, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75553-1.
- [2] A. García, J. J. Fernández, Manual de cálculo estructural.

3. Modos propios: Ejemplo 3

En el primer ejercicio se van a calcular las dos primeras frecuencias propias laterales y primera longitudinal de un satélite fijado a un soporte cónico por su sección superior. Por otro lado, el cono está fijado al suelo por su sección inferior, como se muestra en la Figura 1.

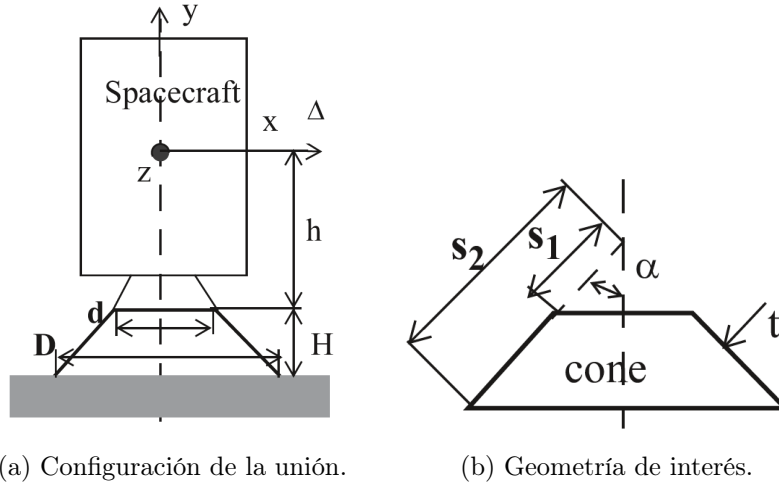


Figura 1: Configuración del modelo de estudio.

El soporte cónico tiene una sección inferior y superior de diámetros $D = 2$ [m] y $d = 1$ [m] respectivamente, una altura $H = 0,5$ [m] y espesor de pared $t = 2$ [mm]. El cono ha sido fabricado de acero, con un módulo elástico $E = 200$ [GPa], densidad $\rho = 7900$ [kg/m³] y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Por otro lado, el centro de masas del satélite está a una altura $h = 0,25$ [m] sobre la sección superior del cono, con una masa total $M_t = 2500$ [kg].

3.1. Cálculo teórico: método de desplazamiento estático

Para el cálculo teórico se ha utilizado el método del desplazamiento estático. Toda la formulación se ha extraído del libro [1].

En este método se parte de que la frecuencia natural de un sistema con un grado de libertad viene dada por

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1)$$

Por lo tanto, al aplicar sobre el sistema una aceleración, g , provocará una fuerza inercial, $g \times M_t$ [N], que tendrá como consecuencia un desplazamiento, x_{sat} [m].

Sustituyendo esto en la ecuación (1) y particularizando para el caso de $g = 1 \text{ [m/s}^2\text{]}$ se obtiene la frecuencia natural lateral del sistema

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_{sat}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Delta}}. \quad (2)$$

Entonces, para calcular la frecuencia natural asociada al modo de flexión en el plano XY se aplica una aceleración unitaria en dirección X , que provocará un desplazamiento del centro de masas del satélite de valor Δ .

Esta aceleración produce una fuerza cortante $D_S = 1 \times M_t \text{ [N]}$ y un momento $M = h \times 1 \times M_t \text{ [Nm]}$, junto con un desplazamiento $\delta \text{ m}$ y un giro $\theta \text{ rad}$, como se ve en la Figura 2.

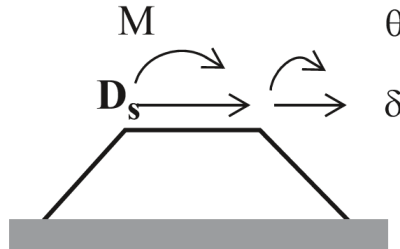


Figura 2: Cargas y desplazamientos en el cono.

Entonces, el desplazamiento total, Δ , se obtiene de la siguiente forma:

$$\Delta = \delta + h \cdot \theta,$$

Por lo tanto, solo hace falta calcular δ y θ para obtener la frecuencia natural lateral.

Para calcular el desplazamiento y giro es necesario obtener previamente los valores geométricos s_1 y s_2 de la Figura 1,

$$\begin{aligned} L &= \frac{D}{D-d} h = 1 \quad [\text{m}], \\ s_1 &= \sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} = 0,7071 \quad [\text{m}], \\ s_2 &= \sqrt{(L-h)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1,4142 \quad [\text{m}], \\ \alpha &= \arcsin \frac{D}{2s_2} = 0,7854 \quad [\text{rad}]. \end{aligned}$$

Después de calcular la geometría, se utiliza la expresión (3), extraída de [1], donde se introducen las propiedades geométricas y elásticas del cono:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1-\frac{s_1}{s_2}}{\pi Et \sin^3(\alpha)} \left\{ \frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{1-\frac{s_1}{s_2}} - 2 + \left(1 + \frac{s_1}{s_2}\right) \left[\frac{1}{2} + (1+v) \sin^2(\alpha)\right] \right\} D_s \\ &+ \frac{1-\frac{s_1}{s_2}}{\pi Et \sin^3(\alpha) s_1 \cos(\alpha)} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{s_1}{s_2}\right) \left[\frac{1}{2} + (1+v) \sin^2(\alpha)\right] \right\} M, \\ \theta &= \frac{1-\frac{s_1}{s_2}}{\pi Et \sin^3(\alpha) s_1 \cos(\alpha)} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{s_1}{s_2}\right) \left[\frac{1}{2} + (1+v) \sin^2(\alpha)\right] \right\} D_s \\ &+ \frac{1-\frac{s_1}{s_2}}{\pi Et \sin^3(\alpha) s_1^2 \cos^2(\alpha)} \left\{ \left(1 + \frac{s_1}{s_2}\right) \left[\frac{1}{2} + (1+v) \sin^2(\alpha)\right] \right\} M\end{aligned}\quad (3)$$

que de forma compacta queda así

$$\begin{aligned}\delta &= G_{\delta,\delta} D_s + G_{\delta,\theta} M, \\ \theta &= G_{\theta,\delta} D_s + G_{\theta,\theta} M,\end{aligned}\quad (4)$$

y sustituyendo los datos del enunciado se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta &= 1,2506 \cdot 10^{-9} \cdot 2500 - 1,6318 \cdot 10^{-9} \cdot 625 = 2,1067 \cdot 10^{-6} \quad [\text{m}], \\ \theta &= 1,6318 \cdot 10^{-9} \cdot 2500 + 7,7652 \cdot 10^{-9} \cdot 625 = 7,7371 \cdot 10^{-7} \quad [\text{rad}].\end{aligned}$$

Finalmente, solo faltaría calcular el desplazamiento Δ y la frecuencia natural

$$\begin{aligned}\Delta &= \delta + h\theta = 2,3002 \cdot 10^{-6} \quad [\text{m}], \\ f_{lat,1} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Delta}} = 104,94 \quad [\text{Hz}].\end{aligned}$$

Como el cono tiene simetría de revolución, las dos primeras frecuencias laterales coinciden, $f_{lat,1} = f_{lat,2} = 104,94 \text{ [Hz]}$.

La frecuencia longitudinal obtiene aplicando la ecuación extraída directamente de [1]:

$$f_{lon,1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) Et}{\ln \frac{s_2}{s_1} M_t}} = 113,97 \quad [\text{Hz}]. \quad (5)$$

3.2. Descripción modelo FEM

Después de haber obtenido los resultados analíticos se va a modelar el problema en Patran y, posteriormente, se procederá a obtener los resultados requeridos mediante Nastran.

A continuación se presenta una descripción general:

1. Sistema de unidades

En el modelo FEM se ha utilizado el Sistema Internacional de unidades para todas las variables implicadas en el desarrollo del mismo.

2. Sistema de coordenadas

El modelo se ha referenciado respecto a un sistema cartesiano con origen en $[0, 0, 0]$.

3. Masa

La masa del satélite es 2500 [kg] y la masa del cono son 37,18 [kg] (volumen de 0.0047 [m³]).

4. Características del Material

El material utilizado para modelar el cono ha sido acero. Se pueden las propiedades utilizadas en la Tabla 1.

Tabla 1: Propiedades del acero.

Material	Propiedad	Valor	Unidades
Acero	Densidad	7900	kg/m ³
	Módulo de elasticidad	$2 \cdot 10^{11}$	Pa
	Coefficiente de Poisson	0.3	NA

Ahora se procede a la descripción del modelo FEM:

1. Pre/Post Procesador del código FEM

Los programas utilizados para realizar el estudio han sido MSC PATRAN 2020 Student Edition y MSC NASTRAN 2020 Student Edition.

2. Asunciones e idealizaciones

Se han utilizado elementos bidimensionales tipo *shell*, *QUAD4*, para modelar el cono.

El satélite se ha modelado como una masa puntual localizada en su centro de masas geométrico. Para ello se le ha asignado la propiedad *masa* a un elemento cero dimensional. La unión del satélite con la sección superior del cono se ha simulado mediante elementos rígidos *REB2* que

fijan el nodo que tiene asociado el elemento de masa con los nodos de la sección superior del cono.

3. Geometría

La geometría del modelo en Patran se puede ver en la Figura 3.

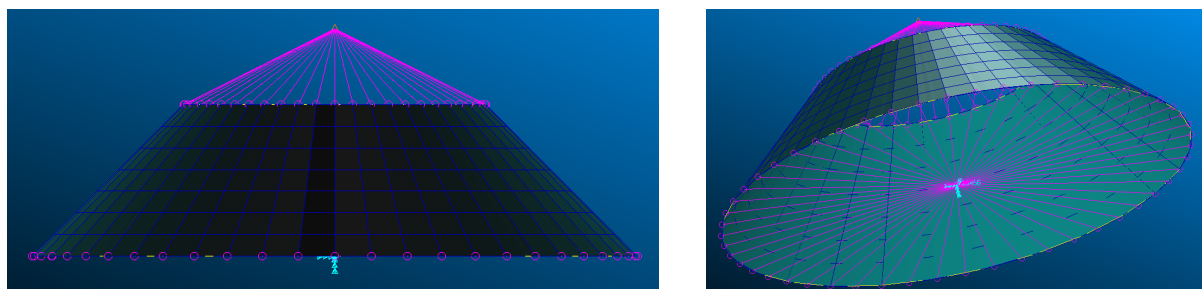


Figura 3: Cono y centro de masas del satélite modelados en Patran.

El cono se ha creado a con dos circunferencias, sección inferior y superior, a las alturas y radios correspondientes. Después se ha generado el cono a partir de una superficie apoyada en las circunferencias. Se ha creado un punto a la altura del centro de masas del satélite.

4. Cargas y condiciones de contorno

La condición de contorno aplicada ha sido la restricción de los grados de libertad de rotación y traslación de la sección inferior del cono en el nodo central de los elementos *RBE2* que se ven en la Figura 3.

Al ser un análisis de modos propios, no ha sido necesaria la aplicación de ninguna carga.

5. Material y propiedades

El material utilizado se ha definido en la Tabla 1. Los elementos utilizados en el modelo han sido *Quad4* para el cono y un elemento puntual para simular la masa del satélite. Los elementos que tienen asociadas estas propiedades se pueden ver en la Tabla 2.

Tabla 2: Información sobre los elementos del modelo FEM.

Propiedad	Tipo	Espesor [mm]	Masa [kg]	Representa	Rango num.
2D_Shell_Acero	Quad4	2	53	Cono	1000 - 1363
Masa	Point	N/A	2500	Satélite	1

3.3. Resultados del modelo FEM

Una vez generado el modelo en Patran se procede a presentar los resultados obtenidos con Nastran para el análisis de modos propios.

En la Tabla 3 se recogen las tres primeras frecuencias naturales y en las Figuras 4 a 6 se pueden ver los modos propios asociados a las frecuencias.

Tabla 3: Modos propios obtenidos con el modelo FEM.

Modo	Frecuencia [Hz]
1	104.97
2	104.97
3	114.46

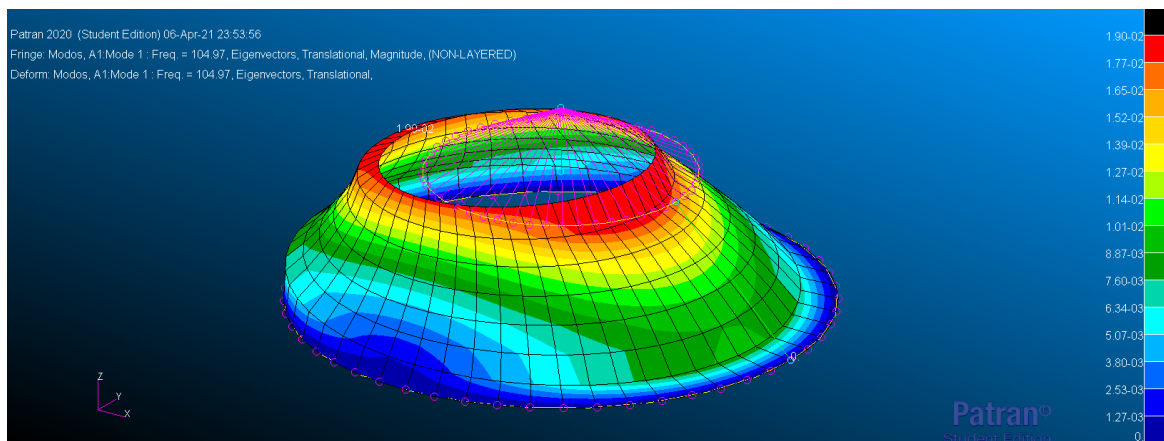


Figura 4: Modo 1: $f_1 = 104.97$ [Hz]

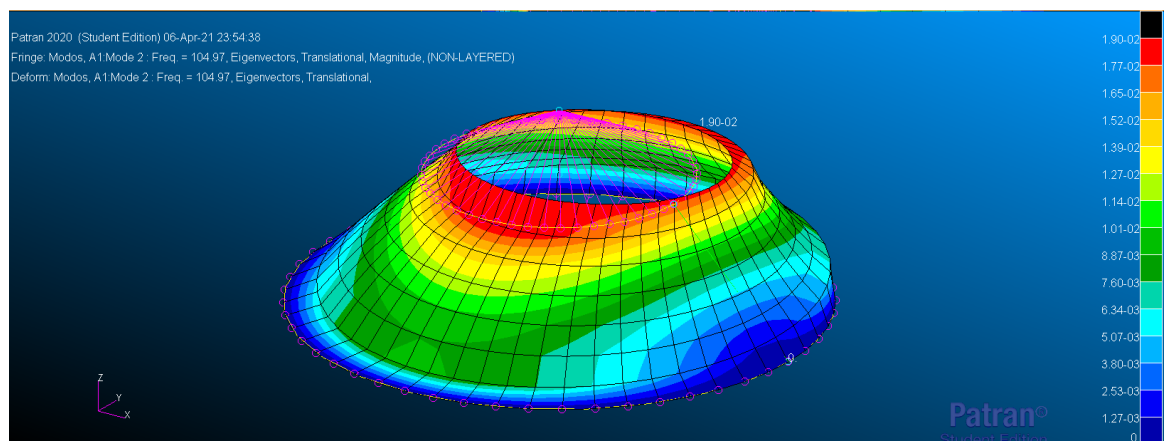


Figura 5: Modo 2: $f_2 = 104.97$ [Hz]

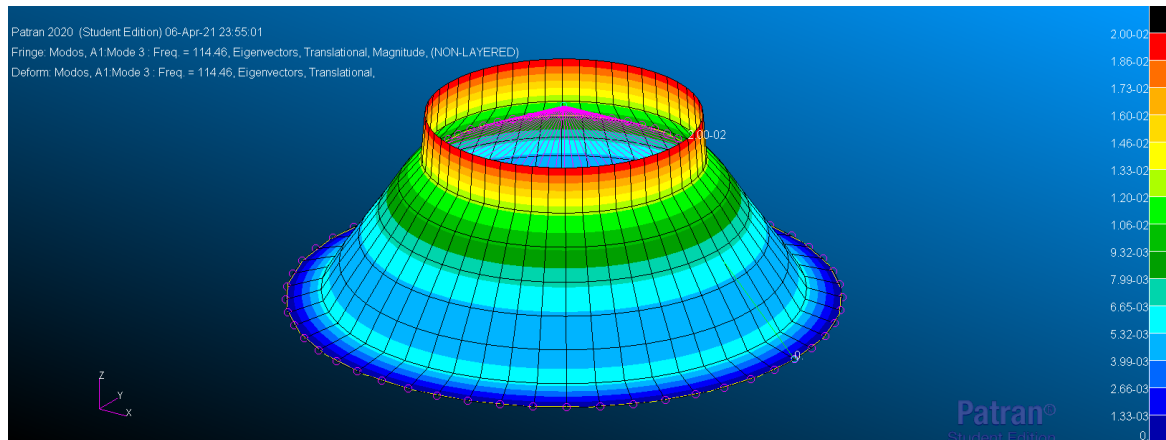


Figura 6: Modo 3: $f_3 = 114.46$ [Hz]

3.4. Comparación de resultados

Una vez que se han obtenido los resultados para el caso analítico y FEM se pueden comparar ambos entre sí. La recopilación de los resultados se puede ver en la Tabla 4. En esta tabla se ha llamado frecuencia lateral a las frecuencias 1 y 2 de la Tabla 3, mientras que la 3 se ha definido como longitudinal.

Tabla 4: Comparación de resultados para el ejemplo de modos propios.

Frecuencia	Analítico [Hz]	FEM [Hz]	Error [%]
Lateral	104.94	104.97	0.03
Longitudinal	113.97	114.43	0.4

El error ha sido calculado como

$$Error = \frac{F_{c,FEM} - F_{c,an}}{F_{c,an}} \times 100 \quad [\%].$$

4. Pandeo: Ejemplo 1

El segundo ejemplo a estudiar consiste en calcular la carga crítica a pandeo de una varilla.

Se van a estudiar dos configuraciones destinadas de la varilla:

1. Sección recta $A = 44 \text{ [mm}^2\text{]}$ y segundo momento de inercia $I = 3092 \text{ [mm}^4\text{]}$.
2. Sección recta $A = 30 \text{ [mm}^2\text{]}$ y segundo momento de inercia $I = 12000 \text{ [mm}^4\text{]}$.

Ambas configuraciones van a tener una longitud total $L = 1100 \text{ [mm]}$ y el material del que están fabricadas es un aluminio con módulo elástico $E = 73,2 \text{ [GPa]}$, densidad $\rho = 2800 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ y un límite elástico $\sigma_y = 276 \text{ [N/mm}^2\text{]}$.

Las condiciones de contorno va a ser simplemente apoyado en ambos extremos, como se ve en la Figura

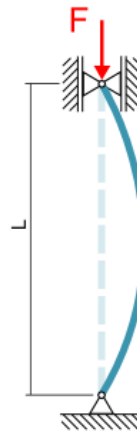


Figura 7: Condiciones de contorno aplicadas al caso de pandeo.

4.1. Cálculo teórico: formula de Euler

La ecuación de Euler para carga crítica a pandeo es la siguiente:

$$F_c = C\pi^2 \frac{EI}{L}, \quad (6)$$

tomando C distintos valores para cada una de las posibles condiciones de contorno aplicables. En este caso, al tener los extremos simplemente apoyados $C = 1$.

Para calcular las cargas críticas basta con sustituir las variables en la ecuación (6):

$$F_{c,1} = 1846,1 \quad [\text{N}],$$

$$F_{c,2} = 7164,8 \quad [\text{N}].$$

4.2. Descripción modelo FEM

Después de haber obtenido los resultados analíticos se va a modelar el problema en Patran y, posteriormente, se procederá a obtener los resultados requeridos mediante Nastran.

A continuación se presenta una descripción general:

1. Sistema de unidades

En el modelo FEM se ha utilizado el Sistema Internacional de unidades para todas las variables implicadas en el desarrollo del mismo.

2. Sistema de coordenadas

El modelo se ha referenciado respecto a un sistema cartesiano con origen en $[0, 0, 0]$.

3. Masa

Como en el estudio de la carga crítica a pandeo la masa no influye, no se ha tenido en cuenta en este apartado.

4. Características del Material

El material utilizado para modelar el cono ha sido aluminio. Se pueden las propiedades utilizadas en la Tabla 5.

Tabla 5: Propiedades del aluminio.

Material	Propiedad	Valor	Unidades
Aluminio	Densidad	2800	kg/m ³
	Módulo de elasticidad	$7.32 \cdot 10^{10}$	Pa
	Coefficiente de Poisson	0.33	NA
	Límite elástico	$2.76 \cdot 10^8$	Pa

Ahora se procede a la descripción del modelo FEM:

1. Pre/Post Procesador del código FEM

Los programas utilizados para realizar el estudio han sido MSC PATRAN 2020 Student Edition y MSC NASTRAN 2020 Student Edition.

2. Asunciones e idealizaciones

Para modelar la varilla se han utilizado elementos unidimensionales tipo viga.

3. Geometría

La geometría del modelo en Patran se puede ver en la Figura 8.



Figura 8: Geometría de la varilla con las condiciones de contorno y carga aplicadas.

La varilla se ha modelado de forma unidimensional, por lo que la geometría es una recta.

4. Cargas y condiciones de contorno

Las condiciones de contorno aplicadas han sido la restricción de los desplazamientos y giro Z en el nodo inferior y restricción de desplazamientos X e Y en el nodo superior.

Se ha aplicado una carga unidad en el nodo superior y con dirección $-Z$. Se ha elegido el valor unidad ya que la carga crítica será el autovalor calculado por Nastran por la carga aplicada. Así se tiene que el autovalor es igual a la carga crítica.

Se pueden ver las condiciones de contorno y la carga en la Figura 8.

5. Material y propiedades

El material utilizado se ha definido en la Tabla 5. Los elementos utilizados en el modelo han sido *Bar2* a lo largo de toda la varilla. Los elementos que tienen asociadas estas propiedades se pueden ver en la Tabla 6.

Tabla 6: Información sobre los elementos del modelo FEM.

Propiedad	Tipo	Área [mm ²]	Inercia [mm ⁴]	Representa	Rango num.
Seccion_1	Bar2	44	3092	Varilla 1	1 - 100
Seccion_2	Bar2	30	12000	Varilla 2	1 - 100

4.3. Resultados del modelo FEM

Una vez generado el modelo en Patran se procede a presentar los resultados obtenidos con Nastran para el análisis de carga crítica de pandeo.

En la Tabla 7 se recogen las cargas críticas para cada sección y en la Figura 9 se puede ver la deformada producida por la carga, que coincide en ambas varillas.

Tabla 7: Cargas críticas a pandeo obtenidos con el modelo FEM.

Varilla	Carga crítica [N]
Sección 1	1846.1
Sección 2	7164.6

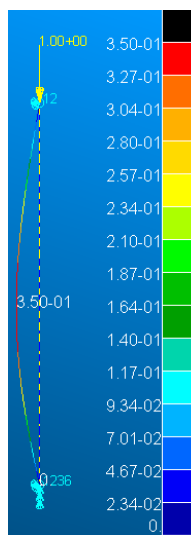


Figura 9: Deformada producida por la carga crítica.

4.4. Comparación de resultados

Una vez que se han obtenido los resultados para el caso analítico y FEM se pueden comparar ambos entre sí. La recopilación de los resultados se puede ver en la Tabla 8.

Tabla 8: Comparación de resultados para el ejemplo de pandeo. Resultados en N.

Sección	Analítico	FEM	Error [%]
1	1846,1	1846.1	0
2	7164,8	7164.6	0.003

El error ha sido calculado como

$$Error = \frac{F_{c,FEM} - F_{c,an}}{F_{c,an}} \times 100 \quad [\%].$$

5. Conclusiones

Una vez comparadas las soluciones de los dos problemas obtenidas por el método analítico y numérico, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos tienen un error muy reducido, en el caso de la varilla de sección 1 incluso nulo (con las cifras significativas utilizadas).
- El modelo FEM correspondiente al análisis de modos propios tiene en cuenta la masa del cono, mientras que la solución analítica no lo hace. Esto afecta más a la frecuencia longitudinal que a la lateral ya que el error es un orden de magnitud mayor.
- Al no ser una malla muy fina, la masa del cono en el modelo FEM se aleja de la que debería tener en la realidad.
- El orden a la hora de construir el modelo FEM es muy importante para evitar *FATAL ERRORS*, ya que el saltarse un paso ha sido el causante de todos los errores que han aparecido durante la realización de esta práctica.
- La práctica ha sido útil para coger soltura y disciplina en el uso de Nastran-Patran.