

PRÁCTICA 1: VALIDACIÓN DE ANÁLISIS ESTRUCTURALES

1 Propósito

Esta práctica consiste en resolver problemas estructurales sencillos (sistemas de pocos grados de libertad, elementos simples, etc...) de forma analítica mediante la utilización de fórmulas, y después construir estos modelos mediante el programa MSC Patran y analizarlos mediante el programa MSC Nastran. La formulación correspondiente a los cálculos teóricos se puede encontrar en el libro de referencia “Spacecraft Structures” de J. Wjker. En este libro se pueden encontrar ejemplos sencillos calculados que pueden servir para este trabajo. Si se considera necesario, también se puede utilizar como referencia fórmulas de otros documentos.

El objetivo consiste en comparar los resultados teóricos con los obtenidos por los programas de elementos finitos.

El último paso es elaborar un informe con la descripción del modelo FEM de cada ejemplo y con los resultados obtenidos en los análisis y la comparación entre los resultados teóricos con los resultados obtenidos con Nastran. Estos informes deben incluir tablas y gráficas comparando los resultados (tomando como referencia los resultados teóricos).

2 Casos prácticos

Para cada uno de los ejercicios que se comentan a continuación, se debe obtener en primer lugar los resultados teóricos. Posteriormente, se crea el modelo FEM y se realiza los análisis correspondientes. Es recomendable utilizar en algunos casos los cabeceros correspondientes para cada análisis, especialmente para los análisis de vibraciones sinusoidales y vibraciones aleatorias.

2.1 Análisis de modos propios

Los ejemplos que se van a usar para los análisis de modos propios son los siguientes:

2.1.1 Ejemplo 1

Un instrumento, cuya masa es de 20 kg, debe estar montado en un vehículo espacial mediante un brazo en voladizo de sección anular (Radio = 60 mm y espesor = 3 mm) hecho de una aleación de aluminio con un módulo de Young de 70 GPa y una densidad de 2700 kg/m³. La longitud del brazo es de 600 mm. Determina las primeras frecuencias laterales y la primera frecuencia longitudinal de este sistema. Para ello, se asume que el brazo se comporta como una viga empotrada en un extremo y libre en el otro y la masa del instrumento se localiza en el extremo libre. Crear 2 modelos FEM: uno utilizando elementos 1D y otro utilizando elementos 2D.

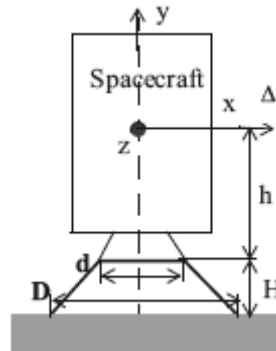
2.1.2 Ejemplo 2

Un cilindro hueco vertical de 500 mm de alto, 200 mm de diámetro y 5 mm de espesor está empotrado en su base. Este cilindro está hecho de aluminio ($E = 71$ GPa, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2800$ kg/m³).

kg/m^3) y sobre la sección superior está unida una masa de 5000 kg, cuyo centro de masas está a 25 cm sobre esta sección en dirección vertical. Determina las primeras frecuencias laterales y la primera frecuencia longitudinal de este sistema. El cilindro se debe modelar con elementos 2D. Para el cálculo teórico se recomienda utilizar el método de desplazamiento estático (Spacecraft Structures, Chapters 9.6.2 and 15.2).

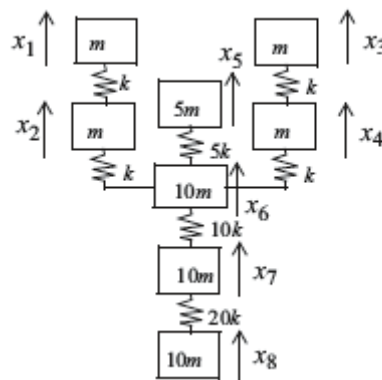
2.1.3 Ejemplo 3

Un tronco de cono hueco de 50 cm de altura, diámetro de la base $D = 2$ m, diámetro de la sección superior $d = 1$ m y espesor de 2 mm está empotrado en su base, mientras que en la sección superior se apoya una masa de 2500 kg cuyo centro de masas está a una altura $h = 0.25$ m sobre la sección superior. El material del cono es acero ($E = 200$ GPa, $\rho = 7900$ kg/m^3 , $\nu = 0.3$). Determina las primeras frecuencias propias de este sistema (2 frecuencias laterales y 1 frecuencia longitudinal). El cono se debe modelar con elementos 2D. Para el cálculo teórico se recomienda utilizar el método de desplazamiento estático (Spacecraft Structures, Chapters 9.6.4 and 15.2).



2.1.4 Ejemplo 4

Se debe calcular los modos propios y las masas modales efectivas del siguiente sistema donde $m = 1$ kg y $k = 100000$ N/m. En este sistema, se debe restringir el DOF x_8 .



2.1.5 Ejemplo 5

Una viga de 450 mm de longitud de sección rectangular maciza (20 x 40 mm) está simplemente apoyada en los dos extremos. Esta viga es de acero ($E = 200$ GPa, $\rho = 7900$ kg/m^3 , $\nu = 0.3$) y en la mitad de su longitud se apoya una masa puntual de 50 kg. Determinar el valor de las dos primeras frecuencias propias de flexión de la viga. (Para el cálculo analítico, se puede despreciar el valor de la masa de la viga).

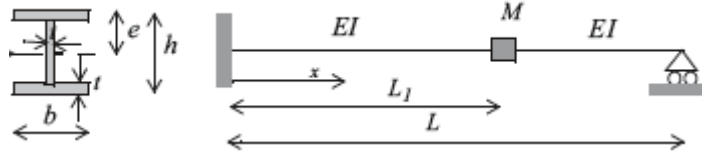
2.1.6 Ejemplo 6

Se dispone de una placa plana cuadrada de 500 mm de lado, hecha de titanio ($E = 114 \text{ GPa}$, $\rho = 4430 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.342$) y con un espesor de 5 mm. Determinar la primera frecuencia propia en estas 2 condiciones:

- 4 bordes simplemente apoyados.
- 4 bordes empotrados.

2.1.7 Ejemplo 7

Se dispone de una viga de 1.5 m de longitud, cuya sección se muestra en la siguiente figura ($e = 75 \text{ mm}$, $b = 75 \text{ mm}$, $h = 150 \text{ mm}$, $t = 5 \text{ mm}$). La viga es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$, $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$) y está empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro. A una distancia $L_1 = 1 \text{ m}$ desde el extremo empotrado se haya una masa puntual de 200 kg. Determinar la primera frecuencia propia. Para el cálculo analítico, utiliza el método aproximado de Rayleigh (Spacecraft Structures, Chapter 15.6.3).

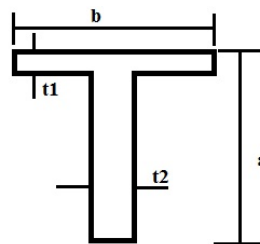


2.1.8 Ejemplo 8

Se dispone de una viga de 1 m de longitud cuya sección es un cuadrado (15 cm x 15 cm) de pared delgada cuyo espesor es de 2 cm. La viga es de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2710 \text{ kg/m}^3$). Un extremo está empotrado y en el otro extremo se encuentra una masa puntual de 500 kg. Se pide determinar las frecuencias de flexión y la frecuencia longitudinal de este sistema. Crea 2 modelos FEM: uno utilizando elementos 1D y el otro utilizando elementos 2D.

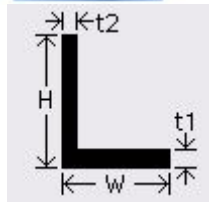
2.1.9 Ejemplo 9

Se considera una viga de 550 mm de longitud de sección en T como se muestra en la figura, donde $a = 80 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$, $t_1 = 1.5 \text{ mm}$ y $t_2 = 2.5 \text{ mm}$. La viga es de titanio ($E = 114 \text{ GPa}$, $\rho = 4430 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.342$) y está empotrada en un extremo y en el otro se apoya una masa puntual de 10 kg. Determina las frecuencias propias laterales y la frecuencia propia longitudinal del sistema.



2.1.10 Ejemplo 10

Se dispone de una viga de 65 cm de longitud de sección en L donde $H = 7.5 \text{ cm}$, $W = 7.5 \text{ cm}$, $t_1 = t_2 = 0.5 \text{ cm}$. La viga es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$, $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$), y está empotrada en un extremo mientras que en el otro extremo está unida una masa puntual de 50 kg. Determinar las 2 primeras frecuencias laterales del sistema.



2.1.11 Ejemplo 11

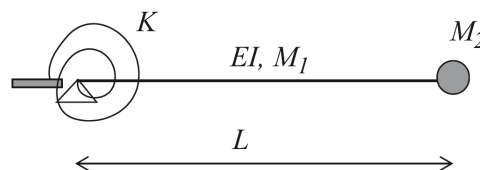
Se dispone de una viga corta de 2 cm de longitud, y de sección rectangular maciza de 15 x 12 mm, hecha de titanio ($E = 114 \text{ GPa}$, $\rho = 4430 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.342$). Un extremo está empotrado y en el otro, que está libre, hay unida una masa puntual de 50 kg. Se pide calcular la frecuencia longitudinal y las 2 primeras frecuencias laterales. Para los cálculos analíticos, suponer que se trata de una viga de masa despreciable frente a la masa puntual y que trabaja de forma conjunta a flexión y a cortadura en los modos laterales. Para el modelo FEM, se debe modelar mediante elementos 3D hexaédricos.

2.1.12 Ejemplo 12

Se dispone de una viga de 50 cm de longitud de sección anular con un radio medio de 15 cm y un espesor de 1 cm, hecho de aluminio ($E = 71 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$), donde uno de sus extremos está empotrado y en el otro, que está libre, hay una masa puntual de 100 kg y con un momento de inercia alrededor del eje longitudinal de la viga de $3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Se pide calcular las frecuencias laterales de flexión y la frecuencia de torsión. Para el modelo FEM, se debe definir el tubo con elementos 2D.

2.1.13 Ejemplo 13

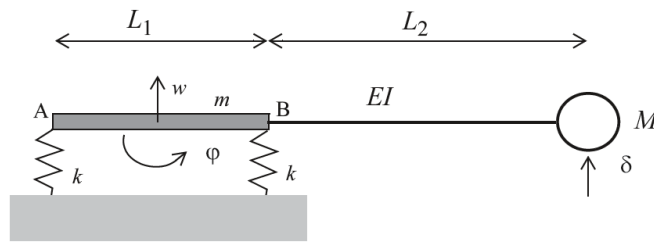
En la figura se muestra un modelo simplificado de un panel solar desplegable, compuesto por una barra elástica de rigidez a flexión $EI = 2.73 \times 10^5 \text{ Nm}^2$, de longitud $L = 7 \text{ m}$, y de masa total $M_1 = 14 \text{ kg}$. En el extremo izquierdo, la barra está apoyada para evitar el desplazamiento, mientras que hay un muelle a torsión que actúa cuando gira, con una rigidez de $K = 50000 \text{ Nm/rad}$. En el otro extremo, hay una masa puntual de $M_2 = 50 \text{ Kg}$. Se pide calcular las primeras frecuencias naturales de este sistema.



2.1.14 Ejemplo 14

El sistema dinámico de la figura tiene 3 grados de libertad: el desplazamiento vertical w y el giro ϕ de la barra infinitamente rígida AB, y el desplazamiento vertical δ con respecto a la línea A-B de la masa puntual M. La barra rígida AB tiene un valor de masa por unidad de longitud $m = 0.075 \text{ kg/m}$, y una longitud $L_1 = 0.2 \text{ m}$. En los puntos A y B hay dos muelles de $k = 10000 \text{ N/m}$. La viga B-M es de masa despreciable, de longitud $L_2 = 0.25 \text{ m}$ y con una rigidez a flexión EI tal que $3EI/L_2^3 = (2\pi 100)^2 M$, siendo $M = 0.15 \text{ kg}$ la masa puntual del extremo derecha. Se pide determinar la frecuencia natural más baja. Para el cálculo analítico, se recomienda usar el

método de Dunkerley. Para el modelo FEM, se debe usar el comando AUTOSPC = NO en el Case Control.

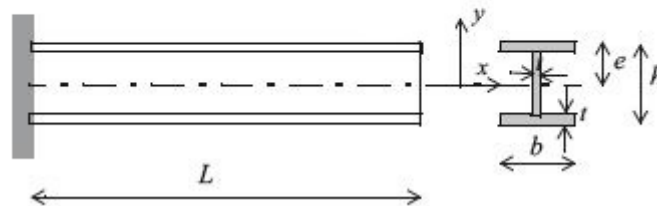


2.2 Análisis estático

Los ejemplos que se van a usar para los análisis de carga estática son los siguientes:

2.2.1 Ejemplo 1

Encontrar la máxima tensión normal (σ_{xx}) en la viga de la siguiente figura donde $L = 500$ mm, $b = 75$ mm, $h = 150$ mm, $e = 75$ mm y $t = 25$ mm. La carga aplicada es una aceleración vertical de $6g$ y la viga está empotrada en un extremo y libre en el otro. El material de la viga es aluminio 7075-T6 ($E = 71$ GPa, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2800$ kg/m³). Calcular además la distribución del momento flector y el desplazamiento del extremo libre.

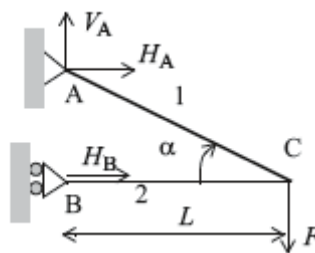


2.2.2 Ejemplo 2

Encontrar la máxima tensión normal (σ_{xx}), la distribución del momento flector y el desplazamiento máximo en la viga del ejemplo anterior, pero en este caso la viga está simplemente apoyada en ambos extremos (restringidos todos los grados de traslación, pero no los de rotación). La carga y las dimensiones son las mismas.

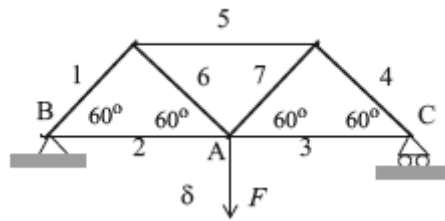
2.2.3 Ejemplo 3

Se dispone de una estructura articulada como la mostrada en la figura formada por varillas de sección $A = 1$ cm², y donde $L = 1$ m, $F = 10000$ N, $\alpha = 30^\circ$ y el módulo elástico de las varillas es de 72 GPa. Determinar las fuerzas de reacción, tensiones y deformaciones en cada una de las varillas.



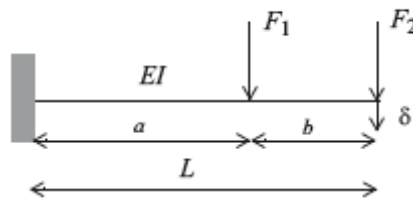
2.2.4 Ejemplo 4

Se dispone de la siguiente estructura articulada formada por varillas de sección $A = 1$ cm², donde todas las varillas tienen la misma longitud $L = 0.5$ m y son del mismo material con un módulo elástico $E = 114$ GPa. Se aplica una fuerza vertical en el punto A de 5000 N. Se pide determinar las fuerzas de reacción, y las tensiones y deformaciones de cada varilla.



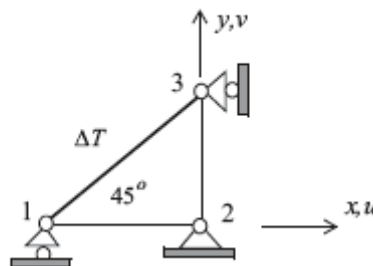
2.2.5 Ejemplo 5

Una viga empotrada en un extremo y libre en el otro de $L = 0.658$ m de longitud, con una sección cuya área es $A = 5E-4$ m², cuyo momento de área de la sección es $I = 5E-7$ m⁴ y con un módulo elástico de 71 GPa, está cargada mediante dos fuerzas puntuales como se muestra en la figura. ($F_1 = 1000$ N y $F_2 = 5400$ N). Se pide calcular la distribución del momento flector a lo largo de la viga y la máxima deflexión (desplazamiento, δ) del extremo libre si la distancia 'a' de aplicación de F_1 es de 0.4 m.



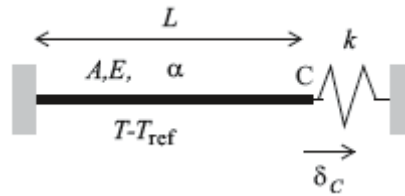
2.2.6 Ejemplo 6

Una estructura como la mostrada en la figura está constituida por varillas de sección $A = 0.0001$ m², módulo elástico $E = 70$ GPa y coeficiente de expansión térmica $\alpha = 22.5E-6$ K⁻¹. La longitud de la varilla 1-3 es de 0.25 m y es sometida a una diferencia de temperatura $\Delta T = 50$ °C, mientras que las otras dos varillas se mantienen a la temperatura de referencia. Se pide determinar las fuerzas de reacción en los apoyos, los desplazamientos de los nodos 1 y 3 y las fuerzas y tensiones de cada varilla.



2.2.7 Ejemplo 7

Considera una viga que es calentada uniformemente desde la temperatura de referencia $T_{ref} = 20$ °C hasta una temperatura final de 70 °C. La viga es de longitud $L = 0.5$ m, sección recta $A = 1$ cm², módulo de Young $E = 70$ GPa y coeficiente de expansión térmica $\alpha = 22.5 \times 10^{-6}$ K⁻¹. La expansión de la viga es frenada por un muelle de rigidez $k = 1 \times 10^8$ N/m situado en un extremo, tal y como se muestra en la figura. Calcula las fuerzas y momentos de reacción, la máxima tensión de la viga y el desplazamiento axial del punto C.



2.2.8 Ejemplo 8

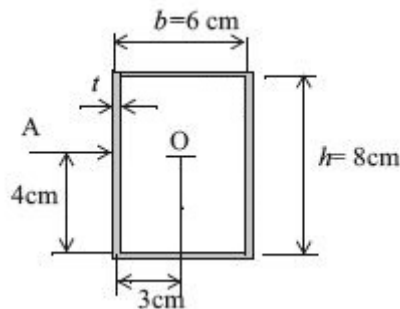
Se considera un tubo de sección circular de pared delgada ($R = 0.1$ m, $t = 0.002$ m) de 0.75 m de longitud, empotrado en un extremo. En el otro extremo, se encuentra una masa puntual de 50 Kg. El tubo es de aluminio ($E = 70$ GPa, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2710$ kg/m³). Se pide determinar el valor de la tensión máxima, la distribución del momento flector y la deflexión del extremo libre cuando se aplica una aceleración de 20 g en dirección perpendicular al tubo.

2.2.9 Ejemplo 9

Se considera un tubo de sección circular de pared delgada ($R = 0.15$ m, $t = 0.005$ m) de 0.85 m de longitud. El tubo está simplemente apoyado en ambos extremos, y en el centro se coloca una masa puntual de 60 Kg. El tubo es de aluminio ($E = 70$ GPa, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2710$ kg/m³). Se pide determinar el valor de la tensión máxima, la distribución del momento flector y el desplazamiento de la sección central del tubo cuando se aplica una aceleración de 25 g en dirección perpendicular al tubo.

2.2.10 Ejemplo 10

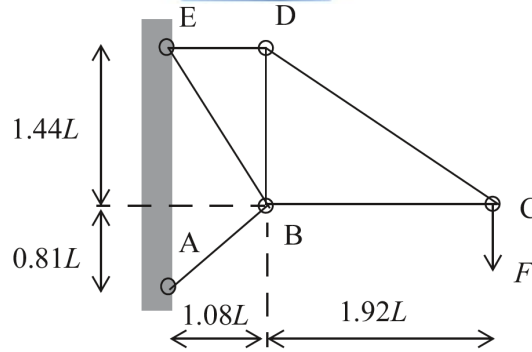
Se dispone de una viga de 1 m de largo y de sección en cuadrada de pared delgada (ver figura) hecha de titanio ($E = 114$ GPa, $\rho = 4430$ kg/m³, $\nu = 0.342$). La viga está empotrada en un extremo y en el extremo libre se encuentra una masa puntual de 20 kg. Se pide determinar la tensión máxima, la distribución del momento flector y el desplazamiento máximo de la viga cuando se somete a una fuerza inercial de 30 g en sentido perpendicular a la viga.



2.2.11 Ejemplo 11

Se dispone de la siguiente estructura articulada compuesta por elementos unidimensionales que sólo trabajan a tracción-compresión. Todas las barras están hechas de aluminio ($E = 71$ GPa), y con un área de la sección de 1 mm². El valor de $L = 1$ m, y la fuerza aplicada en el punto C es de $F = 1200$ N. Se pide calcular:

- Las fuerzas internas axiales en cada barra.
- Las tensiones en cada barra.
- Las deformaciones en cada barra.
- Los desplazamientos en cada punto.



2.3 Análisis de pandeo

Los ejemplos que se van a usar para los análisis de pandeo son los siguientes:

2.3.1 Ejemplo 1

Se dispone de una varilla de longitud $L = 1100 \text{ mm}$, de sección recta $A = 44 \text{ mm}^2$, con un segundo momento de área $I = 3092 \text{ mm}^4$ y un módulo de Young $E = 73200 \text{ N/mm}^2$. Se pide determinar la carga crítica de pandeo de la varilla usando la fórmula de Euler teniendo en cuenta que la varilla está apoyada en ambos extremos. La densidad del material es de 2800 kg/m^3 y su límite elástico es de 276 N/mm^2 .

Determinar la carga crítica de pandeo para un segundo caso donde el área es $A = 30 \text{ mm}^2$ y el segundo momento de área $I = 12000 \text{ mm}^4$, manteniendo iguales el resto de parámetros.

2.3.2 Ejemplo 2

Se pide determinar la fuerza crítica de pandeo bajo una carga de compresión axial de un cilindro de pared delgada de 0.5 m de longitud, 0.2 m de radio y 1 mm de espesor que está hecho de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$). El cilindro se encuentra simplemente apoyado en los dos extremos. Utiliza elementos 2D para modelar el cilindro.

2.3.3 Ejemplo 3

Un tubo de pared delgada de diámetro de la sección $D = 72 \text{ mm}$, espesor $t = 0.5 \text{ mm}$ y longitud $L = 2$, está simplemente apoyado en ambos extremos. El tubo está hecho de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$). Determinar la fuerza crítica de pandeo bajo una carga de compresión. Construir para este caso dos modelos, uno mediante elementos 1D y otro mediante elementos 2D y comparar los resultados de ambos con los teóricos.

2.3.4 Ejemplo 4

Una placa plana cuadrada de 446 mm de lado y 2 mm de espesor está simplemente apoyada en 2 lados opuestos, mientras que los otros 2 lados están libres. Está hecha de aluminio 7075-T6 ($E = 71 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$). Determinar la tensión crítica de pandeo a compresión (cargas en el plano) cuando la carga se aplica en los bordes apoyados y en dirección perpendicular a éstos.

2.3.5 Ejemplo 5

Se pide determinar la carga crítica de pandeo a compresión axial de un tronco de cono vertical de 0.5 m de altura de pared delgada (espesor = 0.5 mm) hecho de aluminio ($E = 71 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$). El diámetro de la base es de 0.4 m , mientras que el diámetro superior

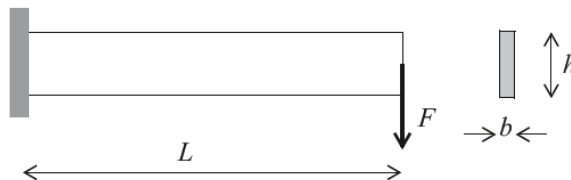
es de 0.2 m. La carga de compresión se aplica en dirección vertical y considera que el desplazamiento lateral de la base y la sección superior está impedido.

2.3.6 Ejemplo 6

Se pide determinar la carga de pandeo local frente a una carga axial de compresión de un tubo de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ y $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) de 500 mm de largo y de sección cuadrada de pared delgada de 100 mm de lado y 2 mm de espesor. Realizar el modelo FEM con elementos 2D.

2.3.7 Ejemplo 7

Determinar la carga de pandeo de la viga en voladizo de la figura, donde se aplica una fuerza lateral en el extremo libre. Está hecha de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$), con una longitud de 1 m, y con una sección rectangular de 100 mm de alto y 2 mm de espesor. Realizar el modelo FEM con elementos 2D.

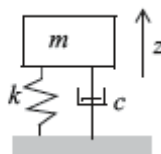


2.4 Análisis de vibraciones sinusoidales

Los ejemplos que se van a usar para los análisis de vibraciones sinusoidales son los siguientes:

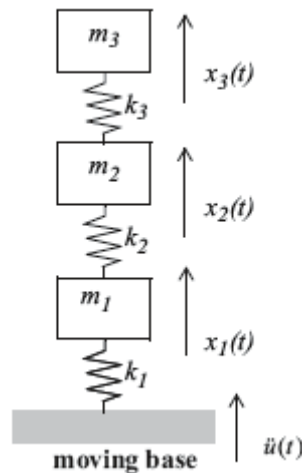
2.4.1 Ejemplo 1

Un sistema de un grado de libertad es excitado en la base por una aceleración sinusoidal cuya función temporal es: $a_{base}(t) = A \sin(2\pi ft)$. La masa es de 20 kg, su amortiguamiento es de 1.5% y la rigidez es de 100000 N/m. Calcular la función de aceleración en el punto donde se sitúa la masa si la amplitud de la excitación es de 1 g en el rango de frecuencia de 1 a 100 Hz.



2.4.2 Ejemplo 2

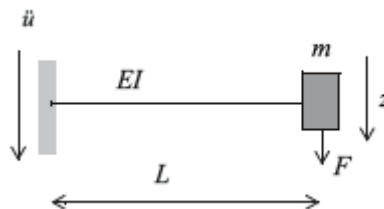
Un sistema amortiguado de 3 grados de libertad es excitado en la base por una aceleración sinusoidal $a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi ft)$. Determinar el valor de la respuesta en el nodo superior en todo el rango de frecuencias desde 5 a 1000 hz si la amplitud de la excitación es constante e igual a 3.5 g en el mismo rango de frecuencias.



$m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $m_3 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 3 \times 10^7 \text{ N/m}$, $k_2 = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$ y $k_3 = 10^7 \text{ N/m}$. El amortiguamiento modal (ξ) es de 0.05 para todos los modos.

2.4.3 Ejemplo 3

Un instrumento, cuya masa es $m = 20 \text{ kg}$, debe estar montado en un vehículo espacial mediante un brazo en voladizo de sección anular (Radio = 60 mm y espesor = 3 mm) hecho de una aleación de aluminio con un módulo de Young (E) de 70 GPa. La longitud (L) del brazo es de 600 mm. El sistema se excita en la base en la dirección que se indica en la figura con la siguiente carga armónica: $a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi f t)$. La amplitud A de excitación es constante en todo el rango de frecuencias de 5 a 100 Hz e igual a 3.5g y el amortiguamiento modal (ξ) es de 0.05 para todos los modos. Determinar la respuesta (aceleración y desplazamiento del extremo libre) considerando despreciable la densidad del material del brazo.



2.4.4 Ejemplo 4

Se dispone de una viga de 0.5 m de longitud cuya sección es un cuadrado (20 cm x 20 cm) de pared delgada cuyo espesor es de 2 cm. La viga es de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2710 \text{ kg/m}^3$). Un extremo está empotrado y en el otro extremo se encuentra una masa puntual de 500 kg. Al sistema se le aplica una excitación sinusoidal $a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi f t)$ en el extremo empotrado en dirección perpendicular a la viga, donde $A = 3.75 \text{ g}$ en el rango de excitación desde 5 a 100 Hz, y el amortiguamiento modal (ξ) es constante e igual a 0.015. Determinar el valor de la respuesta (aceleración) en el extremo libre. Crear para el modelo FEM 2 casos, uno con el valor de la densidad anteriormente dado y el otro caso con la densidad igual a 0 y comparar los resultados de ambos con los resultados teóricos.

2.4.5 Ejemplo 5

Un cilindro hueco vertical de 500 mm de alto, 200 mm de diámetro y 5 mm de espesor está empotrado en su base. Este cilindro está hecho de aluminio ($E = 71 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$) y sobre la sección superior está unida una masa de 50 kg, cuyo centro de masas está a 25 cm sobre esta

sección en dirección vertical. Se aplica en la base del cilindro una excitación sinusoidal ($a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi ft)$) en dirección lateral, donde la amplitud $A = 4$ g en el rango desde 5 a 100 Hz. El amortiguamiento modal (ξ) es constante e igual a 0.025 en todo el rango de frecuencias.

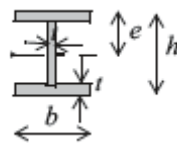
Se pide calcular la respuesta (aceleración) en el nodo de la masa puntual. El cilindro se debe modelar con elementos 2D y se puede despreciar la densidad del material.

2.4.6 Ejemplo 6

Una viga de 450 mm de longitud de sección rectangular (20 x 20 mm) está simplemente apoyada en los dos extremos. Esta viga es de acero ($E = 200$ GPa, $\rho = 7900$ kg/m³, $\nu = 0.3$) y en la mitad de su longitud se apoya una masa puntual de 50 kg. Se transmite una excitación sinusoidal a través de los dos puntos de apoyo en dirección perpendicular a la viga $a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi ft)$ donde $A = 5$ g en el rango de frecuencias desde 5 a 100 Hz. El amortiguamiento (ξ) es constante en este rango e igual a 0.02. Se pide determinar la curva de la aceleración del nodo donde está localizada la masa puntual. Crear para el modelo FEM 2 casos, uno con el valor de la densidad anteriormente dado y el otro caso con la densidad igual a 0 y comparar los resultados de ambos con los resultados teóricos.

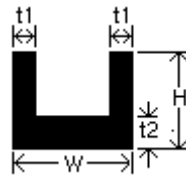
2.4.7 Ejemplo 7

Se dispone de una viga de 0.3 m de longitud, cuya sección se muestra en la siguiente figura ($e = 100$ mm, $b = 50$ mm, $h = 200$ mm, $t = 5$ mm). La viga es de acero ($E = 200$ GPa, $\rho = 7900$ kg/m³, $\nu = 0.3$) y está empotrada en un extremo y libre en el otro. En el extremo libre se haya una masa puntual de 20 kg. Se aplica una carga sinusoidal a través del extremo empotrado en dirección perpendicular a la viga del tipo $a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi ft)$, donde la amplitud $A = 4.5$ g en el rango de frecuencias desde 5 a 100 Hz. El amortiguamiento es constante e igual a 0.015 en todo el rango de frecuencias. Se pide determinar la respuesta (aceleración) del nodo del extremo libre. Crear para el modelo FEM 2 casos, uno con el valor de la densidad anteriormente dado y el otro caso con la densidad igual a 0 y comparar los resultados de ambos con los resultados teóricos.



2.4.8 Ejemplo 8

Una parte de la estructura de un telescopio espacial es una viga de 1.1 m de longitud, cuya sección en forma de U se muestra en la siguiente figura ($W = 100$ mm, $H = 80$ mm, $t_1 = 5$ mm, $t_2 = 10$ mm). La viga es de aluminio ($E = 71$ GPa, $\nu = 0.33$ y $\rho = 2800$ kg/m³) y está empotrada en un extremo y libre en el otro. En el extremo libre se haya un espejo que se representa como una masa puntual de 20 kg. Se aplica una carga sinusoidal a través del extremo empotrado en dirección vertical del tipo $a_{base}(t) \equiv \ddot{u}(t) = A \sin(2\pi ft)$, donde la amplitud $A = 3$ g es constante en el rango de frecuencias desde 5 a 150 Hz. El factor amortiguamiento es constante e igual a 0.02 en todo el rango de frecuencias. Se pide determinar la respuesta (amplitud de aceleración) del nodo del extremo libre. Crear 2 casos para el modelo FEM, uno con el valor de la densidad anteriormente dado y el otro caso con la densidad igual a 0 y comparar los resultados de ambos con los resultados teóricos.



2.5 Análisis de vibraciones aleatorias

Los ejemplos que se van a usar para los análisis de vibraciones aleatorias son los siguientes:

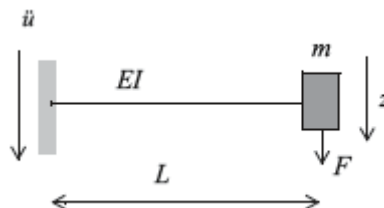
2.5.1 Ejemplo 1

Un sistema masa-muelle es excitado en la base por una aceleración aleatoria con una función PSD indicada en la tabla. La masa del sistema es de 20 kg, la frecuencia natural es de 300 Hz y el amortiguamiento es de 5%. Determina el valor 3σ RMS de la aceleración del nodo y de la fuerza del muelle.

Frequency (hz)	PSD (g^2/hz)	m,n	Área (g^2)
20 – 100	9 dB/oct	3	A1 = 23.7
100 – 250	0.95	-	A2=142.5
250 – 2000	-15dB/oct	-5	A3=59.4
	Grms=15.0		A=225.6

2.5.2 Ejemplo 2

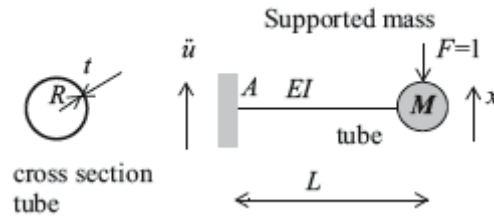
Una viga sin densidad, de longitud $L = 0.1$ m, y rigidez a flexión $EI = 2.2 \cdot 10^3$ Nm², con una masa puntual $M = 1$ kg en su extremo libre, está empotrada por el otro extremo donde se aplica una aceleración forzada aleatoria con una PSD constante de $W_{\ddot{u}}(f) = 0.0727$ g^2/Hz entre el rango de frecuencias desde 20 a 2000 Hz. Se pide determinar los valores 3σ RMS de la aceleración del extremo libre (\ddot{z}) y de la fuerza y momento de reacción en el extremo empotrado si el amortiguamiento (ξ) es constante e igual a 0.01.



2.5.3 Ejemplo 3

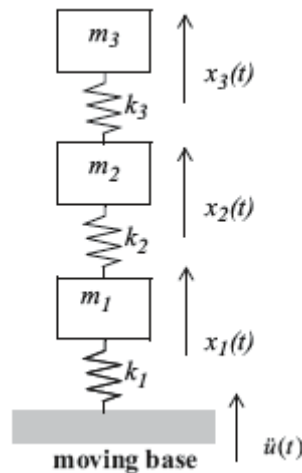
Una viga empotrada hecha de aluminio ($E = 70$ GPa, $\nu = 0.33$) con una longitud $L = 0.6$ m tiene una sección cilíndrica hueca de radio $R = 0.09$ m y espesor $t = 0.004$ m. En el extremo libre se encuentra una masa puntual $M = 20$ kg y la masa o densidad de la viga se puede despreciar. Se aplica en el extremo empotrado una aceleración forzada aleatoria con una PSD constante de $W_{\ddot{u}}(f) = 0.95$ g^2/Hz entre el rango de frecuencias desde 20 a 2000 Hz. El amortiguamiento (ξ) es constante e igual a 0.01.

Calcula los valores 3σ RMS de la aceleración del extremo libre, de la fuerza y momento de reacción del extremo empotrado y del máximo valor de tensión de flexión.



2.5.4 Ejemplo 4

Un sistema dinámico masa-muelle de 3 grados de libertad como el mostrado en la figura, es excitado en la base con una aceleración aleatoria constante de $0.01 \text{ g}^2/\text{hz}$ en el rango de frecuencias de 5 a 500 hz. Los valores del sistema son $m_1 = 200 \text{ kg}$, $m_2 = 150 \text{ kg}$, $m_3 = 100 \text{ kg}$, $k_1 = 3 \times 10^8 \text{ N/m}$, $k_2 = 2 \times 10^8 \text{ N/m}$ y $k_3 = 1 \times 10^8 \text{ N/m}$. El amortiguamiento modal es $\xi = 0.05$ o $Q = 10$. Calcula los valores 3σ RMS de las aceleraciones en cada punto.



2.5.5 Ejemplo 5

Un cilindro vertical de pared delgada de 5mm de espesor, de 0.1 m de altura y 0.07 m de radio está empotrado en su base. A través de la base se transmite vibraciones aleatorias con un PSD constante e igual a $0.1 \text{ g}^2/\text{Hz}$ en el rango de frecuencias desde 20 a 2000 Hz y en dirección lateral. El amortiguamiento modal es $\xi = 0.05$ en todo el rango de frecuencias. En la parte superior del cilindro se encuentra una masa puntual de 200 kg. El cilindro es de titanio ($E = 114 \text{ GPa}$, $\nu = 0.342$) y su densidad se puede considerar despreciable. Se pide calcular la aceleración 3σ RMS del nodo y los valores 3σ RMS de las fuerzas y momentos de reacción totales. Utiliza elementos 2D para representar el cilindro en Patran.

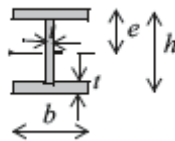
2.5.6 Ejemplo 6

Se dispone de una viga de 0.1 m de longitud cuya sección es un cuadrado (2 cm x 2 cm) de pared delgada cuyo espesor es de 1 mm. La viga es de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$). Un extremo está empotrado y en el otro extremo se encuentra una masa puntual de 1 kg. En el extremo empotrado se aplica una excitación dinámica aleatoria en dirección paralela a la viga, cuyo PSD es igual a $0.05 \text{ g}^2/\text{Hz}$ en el rango de frecuencias desde 20 a 2000 Hz, siendo el amortiguamiento $\xi = 0.05$ en todo el rango de frecuencias.

Se pide determinar el valor 3σ RMS de la aceleración del nodo de la masa puntual, y los valores 3σ RMS de las fuerzas y momentos de reacción y de las tensiones máximas.

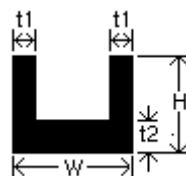
2.5.7 Ejemplo 7

Se dispone de una viga de 0.3 m de longitud, cuya sección se muestra en la siguiente figura ($e = 50$ mm, $b = 50$ mm, $h = 100$ mm, $t = 1$ mm). La viga es de acero ($E = 200$ GPa, $\rho = 7900$ kg/m³, $\nu = 0.3$) y está empotrada en un extremo y libre en el otro. En el extremo libre se haya una masa puntual de 2 kg. Se aplica una carga dinámica aleatoria a través del extremo empotrado en dirección perpendicular a la viga cuyo PSD es constante e igual a 0.1 g²/Hz en el rango de frecuencias desde 20 a 2000 Hz. El amortiguamiento es constante e igual a 0.015 en todo el rango de frecuencias. Se pide determinar los valores 3σ RMS de la aceleración del nodo del extremo libre, la fuerza y momento de reacción y la tensión máxima. Para el cálculo analítico se puede despreciar la densidad.



2.5.8 Ejemplo 8

Se dispone de una viga para una estructura de un telescopio espacial de 0.6 m de longitud, cuya sección en forma de U se muestra en la siguiente figura ($W = 40$ mm, $H = 250$ mm, $t_1 = 5$ mm, $t_2 = 5$ mm). La viga es de aluminio ($E = 71$ GPa, $\nu = 0.33$) y está empotrada en un extremo y libre en el otro. En el extremo libre se haya un espejo que se representa como una masa puntual de 20 kg. Se aplica una vibración aleatoria a través del extremo empotrado en dirección vertical cuya función PSD es la mostrada en la tabla, para el rango entre 20 – 2000 Hz. El factor amortiguamiento es constante e igual a 0.02 en todo el rango de frecuencias. Se pide determinar los valores 3σ RMS de la aceleración del nodo del extremo libre, y la fuerza y momento de reacción que se produce en el encastre, así como la máxima tensión. Para el cálculo analítico y para el modelo FEM se puede despreciar la densidad de la viga.



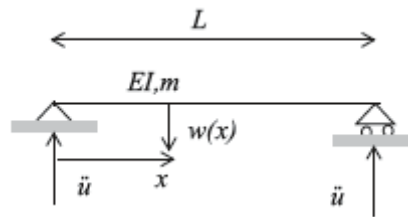
Frequency (hz)	PSD (g ² /hz)
20 – 100	9 dB/oct
100 – 250	0.95
250 – 2000	-15dB/oct
	Grms=15.0

2.6 Análisis de choque

Los ejemplos que se van a usar para los análisis de choque son los siguientes:

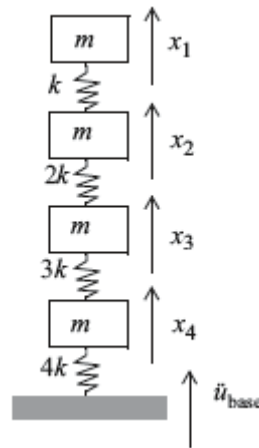
2.6.1 Ejemplo 1

Una viga simplemente apoyada en ambos extremos, de sección cuadrada (10 cm x 10 cm) y de longitud $L = 1$ m es sometida a una carga de choque aplicada a ambos extremos cuyo valor de SRS es de 90 g para el rango de frecuencias naturales desde 100 a 500 Hz (amortiguamiento $\xi = 0.05$). La barra está hecha de aluminio ($E = 70 \times 10^9$ Pa, $\rho = 2800$ kg/m³ y $\nu = 0.33$). Determina el máximo momento de flexión y la tensión provocada por esta carga.



2.6.2 Ejemplo 2

Un sistema de 4 grados de libertad que se muestra en la figura, con $m = 5 \text{ kg}$ y $k = 1000000 \text{ N/m}$ y un factor de amortiguamiento de ξ , es sometido a una carga de choque en su base cuya función es la siguiente: $\ddot{u}_{base} = 200 \sin \frac{\pi t}{\tau}$, $0 \leq t \leq \tau$ y $\ddot{u}_{base} = 0$, $t \leq 0$ y $t \geq \tau$. (la amplitud está en g y $\tau = 0.0005 \text{ s}$). Calcula las funciones temporales de las fuerzas en los muelles y las aceleraciones de cada masa.



2.6.3 Ejemplo 3

Partiendo del sistema de 4 grados de libertad del ejemplo anterior, calcula la función SRS de la excitación y aplícasela con el método SRSS. Determina el valor de las aceleraciones y fuerzas comparándolas con el método anterior.

3 Trabajos

Cada uno de los siguientes paquetes de trabajo va a ir asignado a un alumno.

Paquete de trabajo	Casos	Alumno
Paquete 1	Modos propios: Ejemplo 1 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 7	María Alonso Álvarez
Paquete 2	Modos propios: Ejemplo 2 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 7	Andrea Bravo Asián
Paquete 3	Modos propios: Ejemplo 3 Pandeo: Ejemplo 1	Daniel del Río Velilla
Paquete 4	Modos propios: Ejemplo 4 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 4	David Estébanez Merida
Paquete 5	Modos propios: Ejemplo 5 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 1	Jaime Fernández Diz
Paquete 6	Modos propios: Ejemplo 6 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 6	Laura García Moreno
Paquete 7	Modos propios: Ejemplo 7 Pandeo: Ejemplo 3	David Huergo Perea
Paquete 8	Modos propios: Ejemplo 8 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 3	Rafael Luque López
Paquete 9	Modos propios: Ejemplo 9 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 2	Noelia Martínez Figueira
Paquete 10	Modos propios: Ejemplo 10 Pandeo: Ejemplo 5	Diego Mataix Caballero
Paquete 11	Estático: Ejemplo 1 Pandeo: Ejemplo 2	Marina Merchán Bravo
Paquete 12	Estático: Ejemplo 2 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 5	Gonzalo Moreno Arriaga
Paquete 13	Estático: Ejemplo 3 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 2	Siro Muela Márquez
Paquete 14	Estático: Ejemplo 4 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 3	Daniel Navajas Ortega
Paquete 15	Estático: Ejemplo 5 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 4	María Fuencisla Páez López
Paquete 16	Estático: Ejemplo 6 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 6	Andrés Pedraza Rodríguez
Paquete 17	Estático: Ejemplo 7 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 5	María Elena Piqueras Carreño
Paquete 18	Estático: Ejemplo 9 Pandeo: Ejemplo 4	Miguel Ramiro Aguirre
Paquete 19	Estático: Ejemplo 10 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 1	Pablo Romero Ramos
Paquete 20	Modos propios: Ejemplo 11 Vibraciones sinusoidales: Ejemplo 8	Ana Isabel Soria Carro
Paquete 21	Modos propios: Ejemplo 13 Vibraciones aleatorias: Ejemplo 8	Javier Vega Mateos
Paquete 22	Estático: Ejemplo 11 Modos propios: Ejemplo 12	José María Vergara Pérez
Paquete 23	Estático: Ejemplo 8 Pandeo: Ejemplo 6	Pablo Zapatero Montaña
Paquete 24	Modos propios: Ejemplo 14 Pandeo: Ejemplo 7	

4 Resultados

Se debe elaborar un informe con los siguientes apartados:

1. Introducción
2. Documentos de referencia
3. Ejemplo X1
 - 3.1. Cálculo teórico
 - 3.2. Descripción modelo FEM (tipo de elementos, restricciones, condiciones de carga, tipo de análisis, etc.).
 - 3.3. Resultados del modelo FEM
 - 3.4. Comparación de resultados (con tablas y gráficas si se considera necesario)
4. Ejemplo X2
 - 4.1. Cálculo teórico
 - 4.2. Descripción modelo FEM (tipo de elementos, restricciones, condiciones de carga, tipo de análisis, etc.).
 - 4.3. Resultados del modelo FEM
 - 4.4. Comparación de resultados (con tablas y gráficas si se considera necesario)
5. Conclusiones