

Mecánica de Sólidos

Roger A. Bustamante Plaza

Índice general

1. Introducción	5
2. Introducción a la estática de estructuras y mecanismos	10
2.1. Motivación	10
2.2. Definiciones y conceptos básicos	11
2.2.1. Ecuaciones de equilibrio. Introducción	11
2.2.2. Tipos de fuerzas. Momento Puro	13
2.3. Fuerzas equivalentes y cálculo de reacciones	25
2.3.1. Fuerzas distribuídas	29
2.3.2. Apoyos y reacciones	37
2.3.3. Ecuaciones de equilibrio	42
2.4. Ejemplos y ejercicios para estática de estructuras	49
3. Esfuerzo y deformación	60
3.1. Introducción	60
3.2. Fuerzas internas en vigas	61
3.2.1. Fuerzas internas en vigas para vigas sometidas a cargas distribuídas	76
3.2.2. Ejemplos y ejercicios	80
3.3. Esfuerzos	85
3.3.1. Esfuerzos axial y de corte	86
3.3.2. Principio de Saint Venant	88
3.3.3. Esfuerzos caso general	89
3.3.4. Esfuerzos caso bidimensional. Ecuaciones de equilibrio	92
3.4. Deformación	97
3.4.1. Deformación axial y de corte	97
3.4.2. Deformación problema bidimensional	99
3.5. Relación esfuerzos-deformaciones. Comportamiento mecánico del material	102
3.5.1. Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson. Ensayo uniaxial	103
3.5.2. Ecuaciones constitutivas. Caso general lineal elástico	108
3.5.3. Relación entre el módulo de corte, el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson	112

3.6.	Deformaciones térmicas	114
3.7.	Ejemplos y ejercicios para problemas con deformaciones y fuerzas axiales	116
3.7.1.	Ejemplos	116
3.7.2.	Ejercicios	123
4.	Torsión	126
4.1.	Torsión en eje de sección circular	126
4.2.	Torsión en eje de sección rectangular	132
4.3.	Torsión en eje de sección delgada abierta	133
4.4.	Torsión en eje de sección delgada cerrada	135
4.5.	Ejemplos y ejercicios de torsión	139
4.5.1.	Ejemplos	139
4.5.2.	Ejercicios	144
5.	Flexión y deflexión en vigas	148
5.1.	Flexión en vigas	149
5.1.1.	Eje neutro, segundo momento de inercia y esfuerzos . . .	149
5.1.2.	Deformación y deflexión	151
5.1.3.	Observaciones adicionales	155
5.1.4.	Ejemplo de problema con esfuerzos por flexión	160
5.1.5.	Ejercicios	167
5.2.	Deflexion en vigas	168
5.2.1.	Resumen de ecuaciones	168
5.2.2.	Primer ejemplo	168
5.2.3.	Distribuciones o funciones especiales	170
5.2.4.	Ejemplos con el uso de distribuciones	172
5.2.5.	Ejercicios	182
6.	Corte en vigas	184
6.1.	Corte en vigas de sección rectangular	185
6.2.	Corte en vigas de sección arbitraria	188
6.3.	Corte en vigas de sección delgada abierta	190
6.4.	Centro de cortadura	195
6.5.	Ejemplos para cálculo de centros de cortadura	197
6.6.	Ejercicios	206
7.	Energía de deformación	208
7.1.	Motivación. Energía específica	208
7.2.	Forma alternativa	212
7.3.	Ejemplos	212
8.	Teorema de Castigliano	217
8.1.	Ejemplos	219
8.2.	Ejercicios	223

9. Esfuerzos combinados: Esfuerzos normales y de corte máximos	226
9.1. Esfuerzos normales y de corte máximo	227
9.2. Círculo de Mohr	231
9.3. Problema con esfuerzos combinados	233
9.3.1. Fuerzas internas para el caso de una viga o barra empo-	
trada en un extremo y libre en el otro	233
9.3.2. Ejemplo para un problema en donde se tiene flexión, tor-	
sión, corte y cargas axiales combinadas	235
10. Teoría de falla: Criterios para la deformación plástica	244
10.1. Introducción	244
10.2. Criterios de falla para deformación plástica	246
10.2.1. Criterio del esfuerzo normal máximo	247
10.2.2. Criterio del esfuerzo de corte máximo	249
10.2.3. Criterio de Von Mises	251
10.3. Ejercicios de esfuerzos combinados y teoría de falla	256
11. Inestabilidad elástica: Pandeo en vigas y columnas	261
11.1. Introducción a la inestabilidad elástica	261
11.2. Pandeo en columnas	267
11.2.1. Solución para un caso particular	270
11.2.2. Columna con deflexión inicial	272
11.2.3. Columna cargada de forma excéntrica	274
11.3. Ejercicios	277
12. Introducción a la teoría de la elasticidad lineal elástica	281
12.1. Notación. Notación indicial. Vectores y tensores	281
12.1.1. Notación indicial	282
12.1.2. Símbolos especiales	285
12.1.3. Tensor de segundo orden: Definición, Producto tensorial	
y la doble contracción	287
12.1.4. Cambio de base para vectores	288
12.1.5. Transformación de las componentes de un tensor de se-	
gundo orden	289
12.1.6. Operadores diferenciales en coordenadas Cartesianas . . .	290
12.2. Fuerzas y esfuerzos	291
12.2.1. Tensor de esfuerzos	293
12.3. Ecuaciones de equilibrio de Cauchy	296
12.4. Esfuerzos principales	298
12.4.1. Esfuerzo normal máximo	298
12.4.2. Esfuerzo de corte máximo	303
12.5. Desplazamientos y deformaciones	307
12.5.1. Desplazamientos	307
12.5.2. Deformación	309
12.5.3. Ecuaciones de compatibilidad	313
12.6. Ecuaciones constitutivas	317

12.6.1. Material monoclinico	319
12.6.2. Material ortotrópico	320
12.6.3. Material transverso isotrópico	321
12.6.4. Material isotrópico	324
12.6.5. Forma <i>práctica</i> de las ecuaciones constitutivas	326
12.7. Problema de valor de frontera	329
12.7.1. Ecuaciones	329
12.7.2. Condiciones de borde	330
12.7.3. Ecuación de Navier	333
12.7.4. Ecuaciones en coordenadas Cartesianas	334
12.7.5. Ecuaciones en coordenadas cilíndricas	335
12.7.6. Ecuaciones en coordenadas esféricas	344
12.7.7. Modelos simplificados en elasticidad	346
12.8. Algunos métodos de solución exacta del problema de valor de frontera en elasticidad lineal	349
12.8.1. Potencial para el campo de desplazamiento	350
12.8.2. Potencial para el campo de esfuerzos	357
12.9. Solución de algunos problemas de valor de frontera en elasticidad lineal	363
12.9.1. Tubo cilíndrico bajo el efecto de presión interna y tracción axial	363
12.9.2. Esfera inflada bajo el efecto de presión interna (<i>problema propuesto</i>)	365
12.9.3. Una revisión del problema de torsión en ejes de sección circular	366
12.9.4. Problemas simples de placas y vigas con el uso del poten- cial de esfuerzos de Airy	369
12.9.5. Placa plana con agujero circular bajo el efecto de una tracción uniforme aplicada lejos	374
12.9.6. Medio semi-infinito bajo el efecto de una carga puntual (problema propuesto)	379
12.9.7. Viga empotrada bajo el efecto de una carga uniforme (de- formación plana)	380
12.9.8. Viga empotrada bajo el efecto de una carga uniforme (caso 3D, problema propuesto)	398
12.10 El problema de torsión en ejes de sección arbitraria	400
12.10.1 Revisión del problema de torsión en un eje de sección circular	403
12.10.2 Torsión en eje de sección elíptica	405
12.10.3 Torsión en eje de sección rectangular	407
13. Fatiga	411

Capítulo 1

Introducción

Dos son las razones principales que motivan el estudio de la mecánica de sólidos: primero, en el diseño de elementos de máquinas o de cualquier otro tipo de estructura, es de vital importancia escoger los materiales y/o las dimensiones adecuadas para evitar cualquier tipo de ‘falla’¹, y segundo, en el análisis de falla propiamente tal, es decir cuando una componente o cuerpo ha fallado, es necesario hacer un estudio de sus causa de manera tal de prevenir dichas situaciones en el futuro.

Siempre ha habido una necesidad de poder cuantificar o de saber de forma anticipada si una estructura puede o no resistir las fuerzas u otras cargas a las que podría verse sometida. Originalmente los constructores usaban simplemente la experiencia para determinar dimensiones y materiales para sus construcciones, con pruebas y errores acumulaban experiencia que les permitía resolver casos simples y conocidos. Es claro que un método así no podía servir para el diseño de nuevas estructuras, y una serie de conceptos fueron siendo elaborados de forma lenta hasta llegar a teorías (o deberíamos decir métodos) más menos generales para predecir el comportamiento de cuerpos simples como cilindros o vigas de secciones rectangulares. No fue sino hasta el trabajo fundamental de Cauchy en la teoría de esfuerzos, en que se dispuso de herramientas generales para poder predecir el comportamiento de cuerpos sólidos bajo el efecto de distintas cargas externas².

Desde el momento en que conceptos como ‘fuerzas’, ‘esfuerzos’ y deformaciones fueron establecidos de forma más menos clara a mediados del siglos XIX, distintos métodos han sido desarrollados para predecir (siguiendo ahora procedimientos más racionales) el comportamiento de un sólido frente a cargas o

¹La palabra ‘falla’ puede tener significados muy diversos, quizás la imagen más simple que se viene a la mente es la rotura de una pieza o elemento; pero podríamos también reconocer como falla la formación de deformación plástica, la cual al producir cambios permanentes en la forma de un cuerpo, podría producir problemas en el funcionamiento de un mecanismo.

²Este trabajo de Cauchy, basado en otras investigaciones, en las leyes formuladas por Euler, quien a su vez tomo como punto de partida las bien conocidas investigaciones de Newton, es la piedra angular de todos los desarrollos posteriores, y es frecuente no encontrar referencias claras a la importancia de dicho trabajo en la literatura.

fuerzas externas. En un principio solo algunas geometrías sencillas fueron tratadas bajo deformaciones o fuerzas simples. Es así como se desarrollaron métodos para predecir el comportamiento de cilindros bajo torsión, vigas bajo flexión, o barras bajo el efecto de fuerzas de compresión o tracción. Esta es la base principal de los cursos y textos tradicionales en resistencia de materiales, es decir se hace una revisión de algunos conceptos importantes, y el desarrollo de métodos simples que nos permitan predecir el comportamiento de algunos cuerpos de geometrías sencillas.

Sin embargo, el trabajo de Cauchy nos lleva finalmente a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, cuya solución nos entregaría (bajo ciertas simplificaciones) de forma más precisa la forma como cuerpos (de geometrías más generales) se comportaría bajo la acción de cualquier tipo de fuerzas actuando sobre él. El desarrollo de estas ecuaciones en derivadas parciales así como de métodos de solución analíticas de las mismas es la parte central del área de estudios conocida como ‘elasticidad’.

Es claro que el número de problemas para los cuales es posible encontrar soluciones analíticas para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es limitado, y por ese motivo desde ya varias décadas se han desarrollado métodos de solución numérica de las mismas, entre los que cabe destacar el ‘método de elementos finitos’. Dicho método permite, con la potencia y versatilidad de los computadores actuales, resolver problemas más cercanos a la realidad, en relación al estudio del comportamiento de cuerpos sólidos no solos frente a fuerzas, si no también frente a cambios de temperatura e incluso cargas electromagnéticas³.

Existiendo métodos numéricos y teniendo en cuenta la potencia cada vez mayor y el menor precio de los computadores, surge la duda del porqué en un momento dado uno debería estar interesado en aprender los distintos tópicos usualmente vistos en mecánica de sólidos. La respuesta a esta pregunta tiene que ver con las limitaciones de los métodos numéricos mencionados anteriormente. Lo usual cuando alguien conoce por primera vez los programas comerciales de elementos finitos en mecánica de sólidos, es pensar que uno está en condiciones de resolver cualquier tipo de problema con dichos métodos, en donde pudiese tener cuerpos con geometrías tridimensionales muy complejas, posiblemente también interactuando con otros cuerpos (todos ellos bajo cargas externas). Si bien es cierto los computadores son cada vez más potentes, aun hoy en día es todavía difícil resolver problemas en tres dimensiones con geometrías muy complejas, por la cantidad de memoria y recursos computacionales que estos trabajos requieren. Peor es la situación cuando uno desea modelar varias componentes interactuando unas con otras, pues en dicho caso nos enfrentamos

³Respecto a los tipos de problemas que se pueden analizar, con los métodos clásicos en resistencia de materiales uno adquiere herramientas que posibilitan resolver sobre todo problemas en una dimensión, por ejemplo problemas con ejes o vigas en donde la longitud sea mucho mayor que el diámetro u otra dimensión en la sección. Por otra parte, con los métodos analíticos estudiados en elasticidad, el tipo de problema normal que puede ser resuelto corresponden a problemas planos (o más general en donde se trabaja con dos dimensiones). Son los métodos numéricos los que se aproximan mejor a situaciones reales con cuerpo tridimensionales.

a problemas muy complejos que tienen que ver con la forma como los distintos cuerpos interactúan en sus superficies de contacto, que generalmente lleva a problemas no lineales muy difíciles de resolver. Lo que se quiere decir aquí, es que los métodos numéricos y los programas comerciales basados en ellos, si bien de gran utilidad y de una importancia cada vez mayor en diseño, no son una panacea que puedan ser usados de forma apresurada en cualquier tipo de problema que se nos presente. Hay siempre aproximaciones, y en muchos casos un buen método analítico y simplificado no solo nos permite obtener buenos resultados para modelar de forma aproximada el comportamiento de un sólido, sino también a un costo en cuanto a tiempo de solución mucho menor, sin mencionar que es mucho más fácil determinar el efecto de los distintos parámetros que influyen en un problema por medio del análisis de una expresión analítica (por muchas simplificaciones que se hayan hecho para llegar a ellas) que tratar de obtener las mismas conclusiones estudiando una gran cantidad de datos numéricos expresados a través de gráficos y tablas.

Se ha tratado de justificar el porqué de esta asignatura, quizás parezca algo extraño intentar hacer algo así, pero es fundamental tener algunas ideas respecto al propósito final de algo antes de intentar hacerlo. Siempre es bueno saber porqué deberíamos gastar tiempo y energías en comprender conceptos y métodos como los desarrollados en este curso, y ojala también saber en qué tipo de problemas podríamos usar dichos conocimientos.

El objetivo final de esta asignatura es entregar conceptos que nos permitan modelar de forma aproximada el comportamiento de cuerpos sólidos bajo el efecto en particular de fuerzas externas de superficie. El uso de dichos conocimientos se encuentra en particular en el área de diseño mecánico, en donde en el momento de proponer el diseño de una estructura o mecanismo, nos interesa dar dimensiones y/o tipo de materiales para las distintas piezas y partes, de forma tal de evitar que estas fallen bajo condiciones normales de funcionamiento.

En concordancia con los objetivos anteriores, este texto está dividido en los siguientes capítulos: Primero hay una introducción a la estática, en donde nos interesa especialmente estudiar algunos métodos prácticos para determinar de forma aproximada las ‘fuerzas de reacción o contacto’ cuando varios cuerpos interactúan unos con otros. A continuación se explora el concepto de las fuerzas internas, partiendo con el caso simple en donde se estudia un modelo para dichas fuerzas aplicable al caso de vigas. El concepto de fuerzas internas es generalizado apareciendo el concepto del vector y del tensor de esfuerzos. Posteriormente se estudia el concepto de deformación y su conexión con los esfuerzos a partir de algo que conoceremos como las ecuaciones constitutivas. Varios problemas simples son estudiados ahora, tales como el problema de torsión en ejes, el problema de flexión y de cálculo de deflexión en vigas, así como también el problema de cálculo de esfuerzos de corte en vigas. Los cuerpos cuando se deforman acumulan energía elástica, y dicha energía es usada en el método de Castigliano para determinar deformaciones producto de fuerzas o torques externos. En el capítulo siguiente los distintos métodos estudiados en los capítulos anteriores ahora son usados para analizar problemas con geometrías simples en las que más de un tipo de esfuerzo está actuando sobre el cuerpo. En uno de los

capítulos más importantes se abordará el tema de falla en materiales, enfocado especialmente a fallas relacionadas con formación de deformación plástica en un cuerpo. Un modo adicional de falla es estudiado también que corresponde a la falla por inestabilidad en columnas esbeltas en compresión. Comprendiendo la importancia de los métodos numéricos de solución en mecánica de sólidos, varios conceptos de la elasticidad lineal son estudiados, que son generalizaciones de las cosas vistas en capítulos anteriores. En el último capítulo se una introducción a la fatiga como modo de falla.

Esta es una lista de referencias que pueden servir para complementar los temas a tratar en este texto, y que también han servido de inspiración y base para varios capítulos del mismo:

- I. Shames, Engineering Mechanics: Statics 4ta Edicion, Prentice Hall, 1996
- I. Shames, Introduction to Solid Mechanics, Prentice-Hall, 3era Edicion, 1999
- J. Gere y S. Timoshenko, Mechanics of Materials, 8va Edicion, Cengage Learning, 2012
- S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3ra Edicion, Mac Graw-Hill, 1970
- A. S. Saada, Elasticity: Theory and Applications, 2da Edicion, J. Ross Publishing, Inc. 2009.
- N.I. Muskhelishvili Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 1953.

Notación

En el texto se usará la siguiente notación:

$a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots,$: Escalares
$\vec{F}, \vec{f}, \vec{w}, \dots,$: Vectores
$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \dots,$: Vectores en el Capítulo 12
$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \dots,$: Tensores de segundo orden en el Capítulo 12
$\mathcal{C}, \mathcal{S}, \dots,$: Tensores de cuarto orden en el Capítulo 12
F_i o F_1, F_2, F_3 o F_x, F_y, F_z	: Componentes de un vector
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots,$: Cuerpos (su volumen en algunas ocasiones)
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ o $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$: Vectores unitarios

En las figuras para facilitar su comprensión, se usará en general el siguiente código de colores

- Líneas de color negro: Representan los contornos de un cuerpo.
- Líneas de color rojo: Fuerzas y momentos (torques) externos e internos.

- Líneas de color verde: Cotas, dimensiones para las figuras, flechas que indican vectores de posición o desplazamiento.
- Líneas de color café: Muro, suelo, soportes u otras partes que interactúan con el cuerpo.
- Los símbolos, fuerzas, dimensiones, etc, se representan en color azul.

Capítulo 2

Introducción a la estática de estructuras y mecanismos

2.1. Motivación

Cuando se piensa en mecanismos o estructuras y se desea determinar si las distintas componentes que los forman pueden o no fallar, una manera simplificada de hacer el análisis es separar todas estas componentes o cuerpos y estudiarlos por separado. Esto requiere modelar de alguna forma simple y al mismo tiempo realista la interacción de las distintas piezas o componentes. Esto se puede hacer si dicha interacción se modela como fuerzas de interacción o bien a través de restricciones al desplazamiento de esa parte de las superficies de contacto, debido a la interacción con el medio o con otros cuerpos.

Es evidente que un modelo basado en fuerzas y/o restricciones para la interacción es solo una aproximación. Sabemos que si un cuerpo sufre fuerzas y deformaciones por la interacción superficial con otro, este cuerpo también influirá en la forma como las otras componentes se deforman y comportan, o sea, en una mejor aproximación estas fuerzas de interacción en realidad serían función de la misma deformación que causan. Tales modelos son en general no-lineales, y por tanto provocan grandes problemas al intentar resolverlos.

En este capítulo abordaremos el problema de determinar las fuerzas de reacción en las distintas componentes de un mecanismo, haciendo una serie de supuestos cuyo objetivo es obtener métodos simples, rápidos, directos y claros en relación a los resultados obtenidos.

Antes de analizar en detalle si un cuerpo va a fallar o no, o como un cuerpo se deforma o comporta bajo la acción de fuerzas externas, es natural primero determinar de la forma más precisa posible dichas fuerzas, y ese es el objetivo de este primer capítulo.

2.2. Definiciones y conceptos básicos

En este capítulo la primera simplificación que se hará es asumir que el cuerpo es rígido, en particular para efecto de determinar algo que conoceremos como las ‘reacciones’. Considérese la Figura 2.1, en donde se ve un esquema simplificado de una viga (vista de forma lateral) sometida a una fuerza \vec{F} , la cual además estaría interactuando en este caso con el suelo. La interacción solo ocurre en los extremos derecho e izquierdo, y el medio mediante el cual la viga está interactuando se dibuja por medio de símbolos estandarizados (que aparecen dibujados en color café), cuyo significado preciso estudiaremos más adelante.

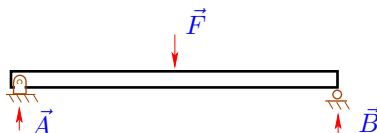


Figura 2.1: Cuerpo rígido y fuerzas de reacción.

En la Figura 2.1 podemos ver que los soportes (las figuras en color café) van a generar fuerzas de reacción, que hemos asumido como fuerzas puntuales y que hemos simbolizado como \vec{A} y \vec{B} . El asumir que un cuerpo es rígido implica especialmente que dichas fuerzas no dependen de la forma como el cuerpo se deforma bajo la acción de estas fuerzas¹

2.2.1. Ecuaciones de equilibrio. Introducción

En este primer capítulo, en donde estamos asumiendo que los cuerpos son rígidos, las reacciones con el entorno se obtendrán mediante el uso de las ecuaciones de equilibrio. De ahora en adelante asumiremos que los fenómenos dinámicos no serán tomados en cuenta en nuestros cálculos, es decir asumiremos o trabajaremos solo con cuerpos o mecanismos en equilibrio estático², luego las ecuaciones que deben ser satisfechas son

$$\sum \vec{F}_{uerzas} = \vec{0}, \quad (2.1)$$

$$\sum \vec{M}_{omentos} = \vec{0}, \quad (2.2)$$

¹Es evidente que asumir que un cuerpo es rígido es solo una aproximación de un caso real, en donde sabemos que la interacción de un cuerpo con otros provoca deformaciones, que a su vez influyen siempre en dicha interacción. Sin embargo, el supuesto en realidad es muy útil, y entrega en la mayor parte de los problemas reales muy buenas aproximaciones.

²Hay muchos problemas en los que la aceleración juega un papel importante en la forma como un cuerpo se deforma y comporta, pero dichos tópicos se encuentran fuera de los alcances de este curso, y son parte de otros cursos avanzados en dinámica de mecanismo y en vibraciones mecánicas.

es decir suma de fuerzas \vec{F}_{uerzas} y suma de momentos (o torques³) $\vec{M}_{momentos}$ debe ser igual a cero (vector). Las dos ecuaciones (2.1), (2.2) en realidad forman un sistema de 3 ecuaciones escalares cada una (en problemas tridimensionales), o sea en total tendríamos 6 ecuaciones que se podrían usar para obtener las reacciones o interacciones que mencionamos anteriormente.

No todos los problemas en los que estemos interesados en determinar reacciones son susceptibles de ser resueltos de manera única a través del uso de (2.1) y (2.2). Existen casos en los que el número de fuerzas de reacción o interacción es muy elevado y las 6 ecuaciones en (2.1) y (2.2) no son suficientes para obtenerlas. En problemas tridimensionales el caso clásico que se puede mencionar es mostrado en la Figura 2.2.

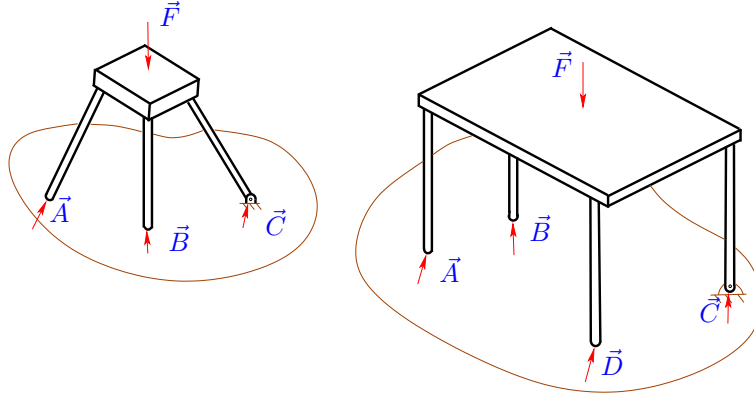


Figura 2.2: Problema estáticamente determinado y problema hiperestático.

En la figura del lado izquierdo se tiene un esquema de un taburete o banco de tres patas. Se asume no hay roce y que en el punto C hay un pasador que impediría el movimiento del taburete a lo largo y ancho del suelo. En un problema como este se puede demostrar que las reacciones \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} se pueden encontrar todas solo por medio del uso de (2.1) y (2.2), bajo el supuesto que el taburete es un cuerpo rígido.

Por otra parte, en la figura del lado derecho tenemos un esquema típico de una mesa con cuatro patas, también apoyadas en un suelo, el que podemos en una primera aproximación asumir que no presenta roce. Nuevamente en C puede haber un pasador que impediría el movimiento a lo largo y ancho del suelo (dado que no hay roce). En un problema de esta naturaleza, en donde ahora tenemos que encontrar 4 fuerzas de reacción, \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} y \vec{D} , se puede demostrar que las ecuaciones de equilibrio (2.1), (2.2) no son suficientes para encontrar de forma única dichas fuerzas de reacción⁴.

³A lo largo de este texto usaremos la palabra momento en lugar de torque, salvo en el caso del fenómeno de torsión (Capítulo 4) en donde se usará la palabra torque para ese tipo específico de fenómeno.

⁴El hecho que no se pueda encontrar todas las fuerzas de reacción en un problema como el

Un problema como el mostrado en el lado izquierdo de la Figura 2.2 es denominado un problema ‘estáticamente determinado’, en tanto que un problema como el mostrado en el lado derecho de la Figura 2.2 es conocido como un problema ‘estáticamente indeterminado’ o ‘hiperestático’.

2.2.2. Tipos de fuerzas. Momento Puro

Tal como se ha indicado en la Sección 2.2.1, la interacción de distintos cuerpos que componen una estructura o mecanismo se puede modelar de forma simplificada asumiendo que esta interacción ocurre a través de fuerzas de contacto o bien a través de restricciones al desplazamiento. Partamos estudiando primero las fuerzas, para esto se necesitan algunas definiciones.

Las fuerzas se clasificarán en dos tipos:

Fuerzas de superficie: son las fuerzas que requieren del contacto directo de la superficie de un cuerpo sobre otro para actuar. Se clasifican (o deberíamos decir se pueden modelar) de dos formas, como fuerzas puntuales, en puntos específicos en los cuales el cuerpo está interactuando con el medio, tal como se muestra en la Figura 2.3. O bien como una distribución de fuerzas de

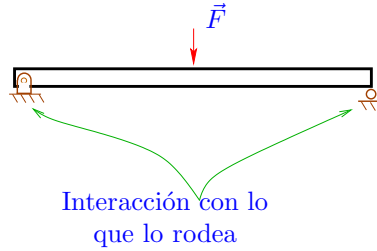


Figura 2.3: Fuerzas de superficie concentradas.

superficie, como la que se produciría en el contacto de dos cuerpos \mathcal{A} y \mathcal{B} mostrados en la Figura 2.4. En el lado derecho de dicha figura podemos ver un acercamiento a la zona del cuerpo \mathcal{B} que estaba en contacto con \mathcal{A} ; esa interacción ha sido representada por medio de una distribución de fuerza \vec{f} , que en un problema tridimensional sería fuerza por unidad de área, en tanto en un modelo bidimensional sería fuerza por unidad de longitud.

mostrado en la Figura 2.2 (derecha) tiene una curiosa implicancia desde el punto de vista de lo que uno observa en la realidad. Cualquier persona que haya construido una mesa o taburete con tres patas reconocerá que nunca esta muestra alguna pata coja, es decir las tres patas se asientan de manera más menos perfecta en el piso. Por otra parte, no importa cuan preciso sea la fabricación de una mesa con cuatro patas, siempre una pata estará coja, y para lograr que las cuatro patas esten todas tocando el suelo, se requiere deformar estas. En consecuencia las fuerzas de reacción no podrían encontrarse asumiendo que el cuerpo es rígido, en este caso las fuerzas dependerían de la deformación.

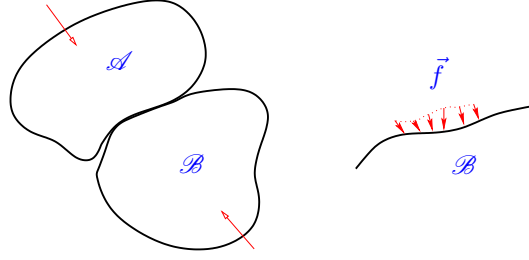


Figura 2.4: Fuerzas de superficie distribuidas.

Fuerzas de cuerpo: son aquellas fuerzas que actúan a distancia y no necesitan el contacto directo; ejemplo de las mismas son la fuerza de gravedad y las fuerzas debido a la aplicación de campos electromagnéticos.

Las fuerzas generan momentos (o torques) y estas cantidades tienen un papel importante en la determinación de las reacciones o interacciones, de modo que ahora se repasarán aquí dichos conceptos. Primero necesitamos algunas definiciones. En la Figura 2.5 tenemos un sistema de coordenadas Cartesianas x_1, x_2, x_3 ,

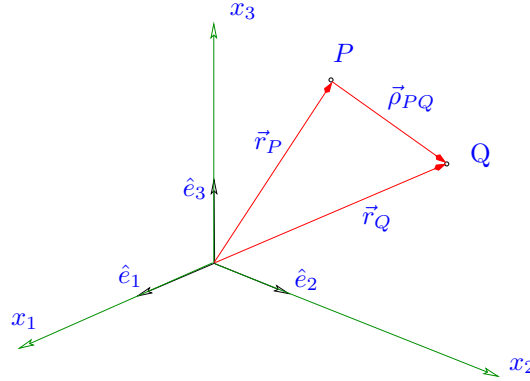


Figura 2.5: Vectores de interés.

en donde se pueden apreciar los tres vectores unitarios de la base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, y se tiene dos puntos P, Q . Los vectores que indican las posiciones de dichos puntos se denotarán como \vec{r}_P y \vec{r}_Q , respectivamente, en tanto que el vector que va desde P a Q se denotará como $\vec{\rho}_{PQ}$.

Vector momento de una fuerza

Considérese la Figura 2.6, en donde se tiene un cuerpo bajo la acción de una fuerza \vec{F} aplicada en el punto P . Se define el vector momento de la fuerza

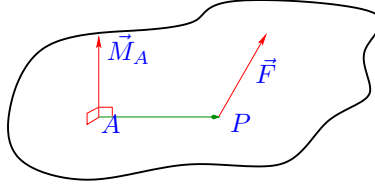


Figura 2.6: Vector momento de una fuerza.

respecto al punto A como

$$\vec{M}_A = \vec{\rho}_{AP} \times \vec{F}. \quad (2.3)$$

Se puede apreciar de la definición que el vector \vec{M}_A es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{\rho}_{AP}$ y \vec{F} , y debido a lo anterior existe la siguiente propiedad para el vector \vec{M}_A . En la Figura 2.7 se tiene una vista superior de la Figura 2.6, es decir aquí se está viendo el plano formado por los vectores $\vec{\rho}_{AP}$ y \vec{F} y el vector \vec{M}_A estaría apuntando hacia fuera de la figura. La línea que pasa

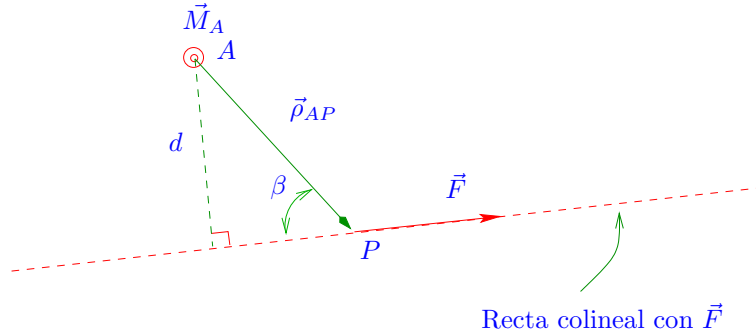


Figura 2.7: Vector momento de una fuerza. Vista superior.

por P y tiene la dirección del vector \vec{F} es llamada la ‘línea de acción de la fuerza \vec{F} ’. La distancia entre el punto A y dicha línea de acción es d y el ángulo entre el vector $\vec{\rho}_{AP}$ y esta línea de acción lo denotamos como β . Se sabe que

$$\|\vec{M}_A\| = \|\vec{\rho}_{AP} \times \vec{F}\| = \|\vec{\rho}_{AP}\| \|\vec{F}\| \sin \beta = d \|\vec{F}\|, \quad (2.4)$$

luego la magnitud de \vec{M}_A no cambiaría si movemos el punto de aplicación de la fuerza \vec{F} a lo largo de su línea de acción; es más, la dirección de dicho vector tampoco cambiaría al mover \vec{F} a lo largo de su línea de acción, pues dicha línea se encuentra siempre en el plano formado por los vectores originales $\vec{\rho}_{AP}$ y \vec{F} .

Vector momento de una fuerza respecto a un eje

Considerémos la situación en la cual un eje gira impulsado por algún tipo de fuerza aplicado en él. Un esquema de dicho eje se muestra en la Figura 2.8. Aquí

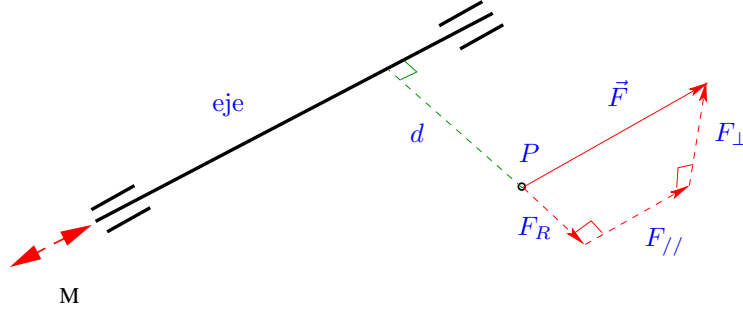


Figura 2.8: Vector momento de una fuerza respecto a un eje.

se tiene un esquema muy simplificado de un eje (la línea larga negra central), el que gira en dos apoyos, los cuales son mostrados como dos líneas paralelas en ambos extremos del eje. El eje en realidad puede tener una forma irregular, pero lo importante es notar que gira respecto a esos dos apoyos mostrados ahí.

En algún punto P a una distancia d del eje se aplica una fuerza sobre él⁵ \vec{F} . Ahora, esta fuerza \vec{F} se puede descomponer de la siguiente forma

$$\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}, \quad (2.5)$$

donde \vec{F}_R sería la componente en la dirección radial de la fuerza \vec{F} , en tanto que $\vec{F}_{//}$ sería la componente de la fuerza en la dirección del eje, y finalmente \vec{F}_{\perp} sería la componente normal a las otras dos, que llamaremos la componente tangencial.

La pregunta es: ¿De estas tres componentes de la fuerza, cual es la única importante en relación al momento que genera en el eje desde el punto de vista de su funcionamiento? Podemos ver que las tres componentes generan algún tipo de momento, pero de las tres, la única que genera un momento cuya dirección va en la dirección del eje es \vec{F}_{\perp} . El momento generado por \vec{F}_{\perp} es simbolizado con las flechas rojas puestas en el extremo inferior del esquema del eje.

Si reconocemos entonces que \vec{F}_{\perp} es la componente importante para efectos de calcular momento en el eje, dicho momento estaría dado simplemente por⁶

$$M = dF_{\perp}. \quad (2.6)$$

⁵La fuerza es está aplicando en alguna parte del eje, pero como lo estamos mostrando de forma muy simplificada, no se muestra de forma gráfica en donde realmente se está aplicando dicha fuerza.

⁶Para denotar la norma de un vector usaremos dos notaciones: en algunas ocasiones la norma del vector \vec{A} se denotara como se hace usualmente $\|\vec{A}\|$ y a veces se usará una notación mucho más simplificada A .

Vector momento puro

Considérese la Figura 2.9 en donde se tiene un cuerpo sometido dos fuerzas de magnitud F con igual dirección, apuntando en sentido contrario, y separadas por una distancia d . En este caso el equilibrio de fuerzas (Ecuación (2.1)) es

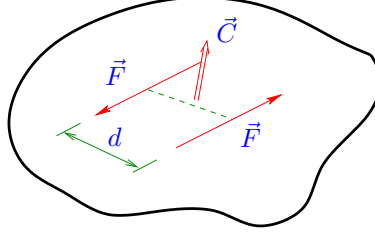


Figura 2.9: Vector momento puro.

satisfecho de forma automática (si bien no hay equilibrio al momento).

El momento (también llamado ‘par de fuerzas’) que generan estas dos fuerzas \vec{F} se denotará como \vec{C} y es llamado un momento puro, debido a que el cuerpo solo siente el efecto de este \vec{C} , dado que (2.1) es satisfecha de forma automática. La norma de este vector se puede calcular como

$$\|\vec{C}\| = d\|\vec{F}\|. \quad (2.7)$$

En principio vamos a ubicar a este vector justo en medio de los puntos de aplicación de las fuerzas \vec{F} , es decir a una distancia $d/2$ de cada una de ellas.

Considerémos la Figura 2.10, en donde tenemos el mismo cuerpo en dos casos adicionales, en donde se sigue aplicando las mismas fuerzas \vec{F} , siempre separadas una distancia d , pero con direcciones diferentes a las originalmente mostradas en la Figura 2.9. Imaginemos que los pares de fuerzas \vec{F} empiezan

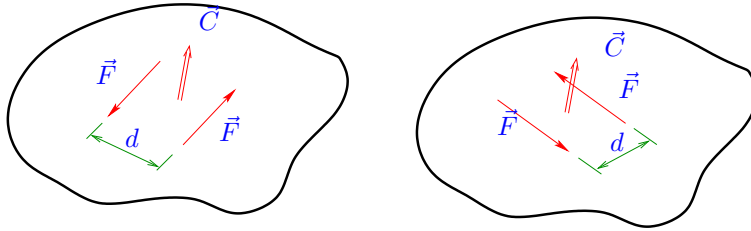


Figura 2.10: Vector momento puro. Situaciones en las que son equivalentes.

a rotar, siempre manteniéndose en el plano original en el que estaban. Podemos apreciar que en este caso $C = dF$ va a tener el mismo valor que en la Figura 2.9, y si las fuerzas \vec{F} están siempre en el mismo plano, entonces la dirección y

orientación de \vec{C} va a ser siempre la misma, o sea podemos ver que el mismo \vec{C} se puede obtener de muchas formas distintas.

En la Figura 2.11 se muestran los símbolos que se usarán para representar el vector momento puro. Normalmente en problemas planos se usará una flecha circular, y en problemas tridimensionales se usará una flecha doble, la correspondencia entre estas dos formas de representación se muestra en la misma Figura 2.11.



Figura 2.11: Vector momento puro. Representaciones.

Teorema 1 *Para cuerpos rígidos el vector momento puro es un vector ‘libre’ es decir su punto de aplicación se puede cambiar y el efecto que genera sobre el cuerpo es el mismo.*

Demostración La demostración de este teorema la haremos de dos formas, primero entregaremos una demostración más general para problemas tridimensionales y posteriormente para el caso particular de problemas planos.

Considérese la Figura 2.12 en donde tenemos dos puntos A, B en donde se está aplicando dos fuerzas \vec{F} con la misma magnitud y dirección pero con sentidos opuestos. Estas fuerzas van a generar un momento puro sobre el cuerpo,

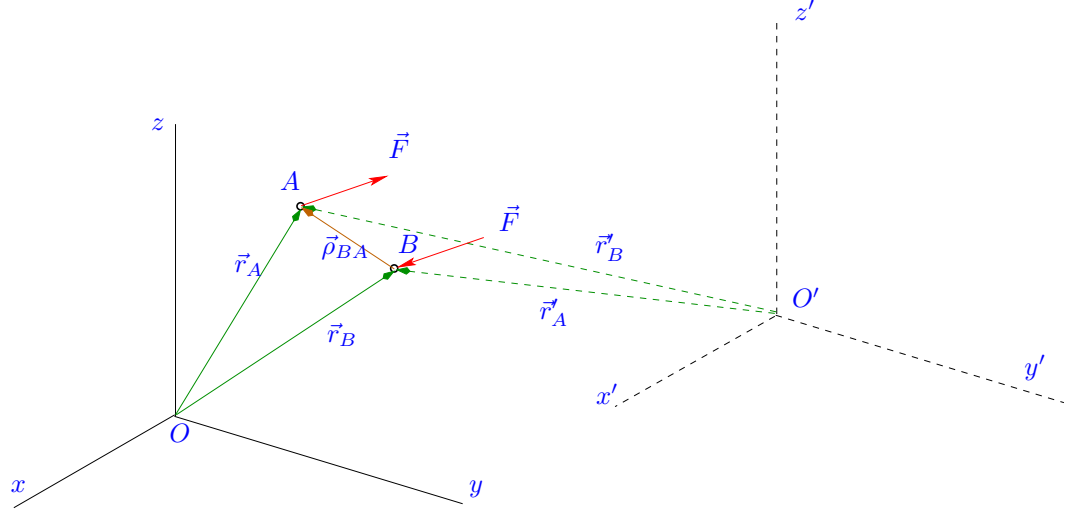


Figura 2.12: Vector momento puro. Demostración que es invariante.

el cual se puede ubicar en principio a media distancia entre los puntos A y

B. Hay varias formas de calcular dicho momento puro, si se escoge el sistema coordenado x, y, z con origen O , el momento puro \vec{C} se puede calcular como

$$\vec{C} = \underbrace{\vec{\rho}_{BA}}_{\vec{r}_A - \vec{r}_B} \times \vec{F}, \quad (2.8)$$

en donde \vec{F} en este caso corresponde a la fuerza aplicada en A . Podemos ver que en la expresión anterior el vector $\vec{\rho}_{BA}$ ha sido definido usando los vectores posición de A y B respecto a la referencia O . Pero

$$\vec{\rho}_{BA} \times \vec{F} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = (\vec{r}'_A - \vec{r}'_B) \times \vec{F} = \vec{C}', \quad (2.9)$$

luego $\vec{C} = \vec{C}'$, es decir el vector momento puro calculado desde las dos referencias es el mismo. Ahora como un cambio de referencia es en realidad equivalente a mantener al vector fijo y mover en su lugar al cuerpo y por tanto esto significaría que el cambiar de posición el punto de aplicación de \vec{C} no afecta la forma como este vector actúa sobre el cuerpo rígido, con lo que la demostración se ha finalizado⁷.

Como resultado de la demostración anterior para momentos puros tendremos situaciones como las mostradas en la Figura 2.13.

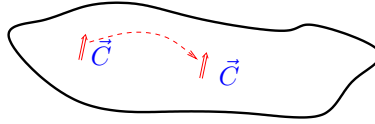


Figura 2.13: Vector momento puro: Traslación a un punto distinto del cuerpo

La demostración basada en la Figura 2.12 si bien es bastante general, de todas formas no apela mucho a la intuición de lo que uno esperaría en un problema como este. Por dicho motivo aquí se agrega una segunda forma de demostrar este teorema, válida eso sí en este caso solo para problemas bidimensionales.

Como paso previo considérese la siguiente observación basada en lo que se muestra en la Figura 2.14. En dicha figura tenemos dos sistemas de fuerzas paralelas (caso plano), en un caso de magnitud F y separadas una distancia d , y en el otro caso de magnitud $2F$ y separadas una distancia $d/2$. De (2.7) es fácil ver que la magnitud del vector momento puro en un caso sería dF y en el segundo caso sería $2Fd/2 = dF$, es decir en ambos casos obtendríamos la misma magnitud para este vector, y además podríamos ubicar este vector en el mismo punto central entre estas dos fuerzas.

Teniendo presente la observación anterior, consideremos ahora la Figura 2.15, en la parte superior tenemos un cuerpo el que está sometido a dos fuerzas

⁷Es relativamente claro que para el caso de cuerpos deformables cambiar de posición el punto de aplicación de \vec{C} no genera los mismos ‘efectos’, pues de forma intuitiva se puede ver que la deformación no sería igual. A pesar de esto en varios problemas con cuerpos deformables seguiremos usando este teorema, claro está solo como una aproximación.

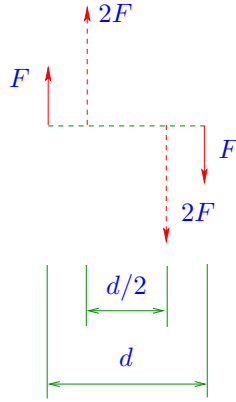


Figura 2.14: Vector momento puro: Distintas formas de cálculo

opuestas de magnitud F separadas una distancia d , y que por tanto generan un momento puro $C = dF$. Imaginemos ahora que deseamos mover este momento puro a un punto ubicado hacia la derecha a una distancia L del punto original de aplicación de C .

La traslación se puede hacer de la siguiente forma. En la segundo cuerpo mostrado en la Figura 2.15 dibujamos a una distancia L de las fuerzas originales dos pares de fuerzas opuestas F , tal como se aprecia en el lado derecho del segundo cuerpo. Podemos ver que en realidad aquí la suma nos da cero.

Sin embargo, si juntamos ahora cada una de las fuerzas del lado izquierdo con un par de las fuerzas opuestas en el lado derecho, tal como se muestra con líneas punteadas en el segundo cuerpo de la Figura 2.15, tendremos que se forman momentos puros y opuestos de magnitud FL , los cuales se ubican a una distancia d entre ellos, tal como lo muestra el tercer cuerpo de la Figura 2.15.

En este tercer cuerpo mostrado en la Figura 2.15 tenemos ahora dos momentos puros y opuestos de magnitud FL , y además ahora tenemos dos fuerzas de magnitud F separadas una distancia d en el extremo izquierdo.

Lo que se hace ahora es hacer F tender a infinito y d tender a cero, de forma tal que la multiplicación $dF = C$ se mantenga constante, recordando lo que se había discutido respecto a la Figura 2.14. En ese caso podemos ver que los dos momentos puros FL al final se aplicarían en el mismo punto, y que al tener sentidos opuestos, esto significa que se anulan y por tanto nos queda el cuerpo con el momento puro C ahora aplicado en la derecha, a una distancia L del punto original de aplicación, con lo que hemos terminado esta demostración gráfica ■

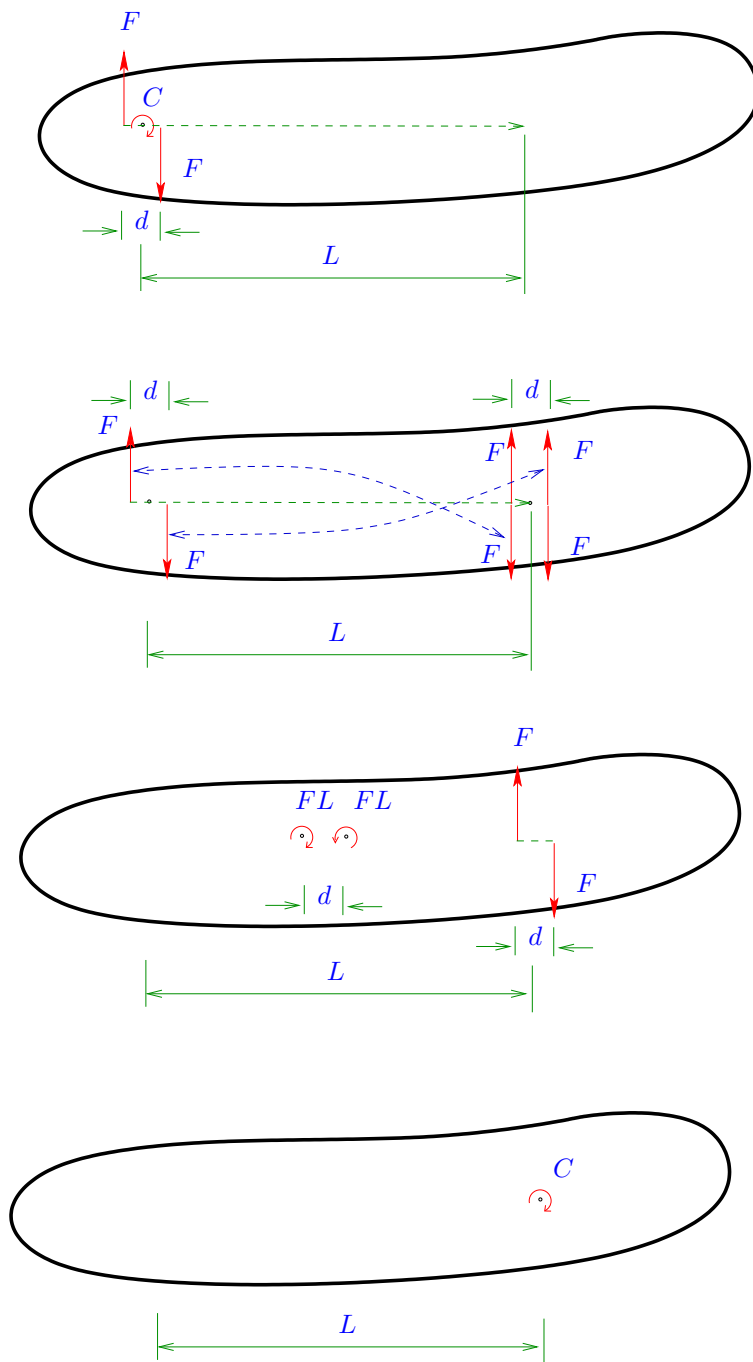


Figura 2.15: Vector momento puro. Traslación a un punto distinto del cuerpo (caso 2D).

Ejemplos de cálculo del momento causado por una fuerza

1. Calcule el momento causado por \vec{F} respecto al punto O para la rueda mostrada en la Figura 2.16.

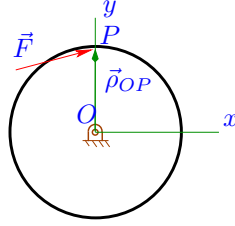


Figura 2.16: Vector momento. Ejemplo de cálculo.

En este problema tenemos que $\vec{F} = (F_x, F_y)$ y que $\vec{\rho}_{OP} = (0, r)$ para el sistema de coordenadas mostrado en la figura, en donde r sería el radio de la rueda. De la definición (2.3) tenemos

$$\vec{M}_O = \vec{\rho}_{OP} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & r & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix},$$

por lo que

$$\vec{M}_O = -F_x r \hat{k}. \quad (2.10)$$

O sea como ya sabemos, en un problema plano los momentos solo tiene componente en la dirección normal al plano. Del resultado anterior además podemos ver que la única componente importante de \vec{F} para el cálculo del momento es la que es normal al vector $\vec{\rho}_{OP}$.

2. Determine el momento de la fuerza de 100lbf con respecto a los puntos A y B mostrados en la Figura 2.17

Usaremos la definición (2.3), en este caso primero necesitamos expresar la fuerza como vector, de la figura vemos que el vector fuerza se encuentra en el interior de un cubo de dimensiones $8 \times 4 \times 4$, luego podemos expresar la fuerza aplicada en ese punto \vec{F} como (el punto de aplicación de \vec{F} lo podemos llamar P)

$$\vec{F} = 100 \left(\frac{8}{\sqrt{8^2 + 2 \cdot 4^2}} \hat{i} + \frac{4}{\sqrt{8^2 + 2 \cdot 4^2}} \hat{j} - \frac{4}{\sqrt{8^2 + 2 \cdot 4^2}} \hat{k} \right),$$

simplificando tenemos

$$\vec{F} = \frac{100}{\sqrt{96}} (8\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}). \quad (2.11)$$

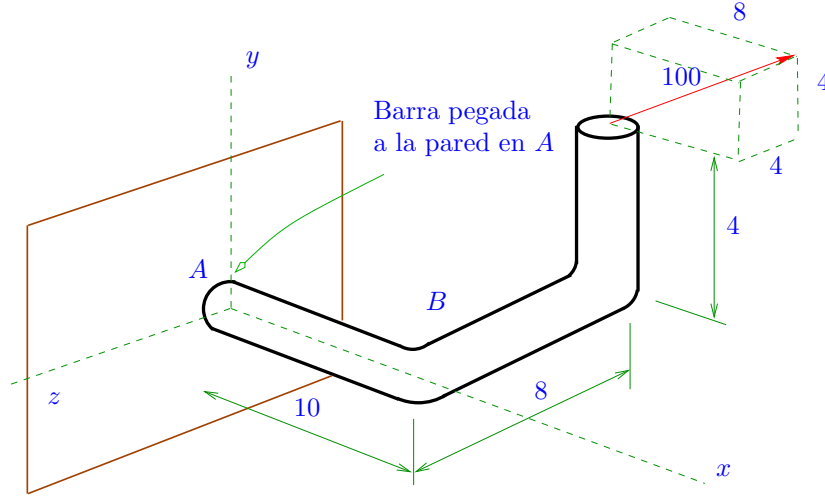


Figura 2.17: Vector momento. Ejemplo de cálculo (dimensiones en pies).

Para calcular el momento hace falta el vector que va desde el punto respecto al que se quiere calcular dicho momento al punto en donde se aplica la fuerza, y de la figura podemos ver que

$$\vec{\rho}_{AP} = 10\hat{i} + 4\hat{j} - 8\hat{k}, \quad \vec{\rho}_{BP} = 4\hat{j} - 8\hat{k}. \quad (2.12)$$

Luego los momentos se calculan simplemente con los productos cruz

$$\vec{M}_A = \vec{\rho}_{AP} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_B = \vec{\rho}_{BP} \times \vec{F}, \quad (2.13)$$

usando (2.11) y (2.12). Se deja como ejercicio realizar dicho cálculo.

3. Calcular el momento causado por \vec{F} respecto a D como se muestra en la Figura 2.18 para dos casos: En que la fuerza se aplique en P y que se aplique en Q , respectivamente.

En este problema verificaremos directamente el principio enunciado con la Figura 2.7. Para ambos casos en que \vec{F} se aplique en P y Q tenemos $\vec{F} = F\hat{i}$.

En el caso del momento calculado respecto al punto P , necesitamos el vector que va desde el origen del sistema (que llamaremos O) al punto en cuestión $\vec{\rho}_{OP}$ y se tiene que $\vec{\rho}_{OP} = r\hat{j}$, por lo que

$$\vec{M}_O = \vec{\rho}_{OP} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & r & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = -Fr\hat{k}.$$

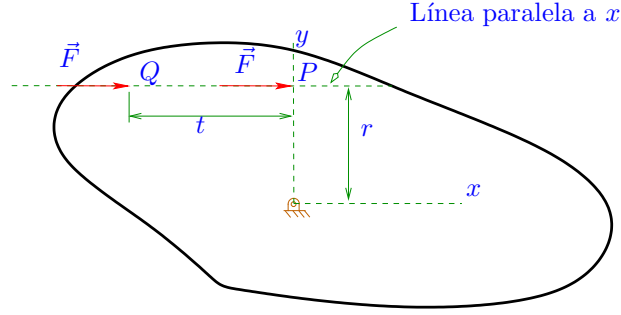


Figura 2.18: Vector momento. Ejemplo de cálculo.

En el caso del momento calculado respecto al punto Q usamos el vector $\vec{\rho}_{OQ} = -t\hat{i} + r\hat{j}$, luego tenemos

$$\vec{M}_O = \vec{\rho}_{OQ} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -t & r & 0 \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} = -Fr\hat{k},$$

que es igual al resultado anterior, confirmando el hecho mencionado anteriormente respecto a la Figura 2.7, en donde indicamos que si se mueve la fuerza a lo largo de su línea de acción, el momento que esta fuerza hace es el mismo. En la Figura 2.18 podemos ver que los puntos P y Q se ubican ambos en la línea de acción de \vec{F} .

2.3. Fuerzas equivalentes y cálculo de reacciones

Nuestro propósito en esta sección es desarrollar métodos que nos permitan reducir el numero de fuerzas actuando en un cuerpo, de modo que se tenga un sistema ‘equivalente’ de fuerzas más simple que genere el mismo ‘efecto’ sobre el cuerpo. Para entender esto considérese la Figura 2.19. En el lado izquierdo

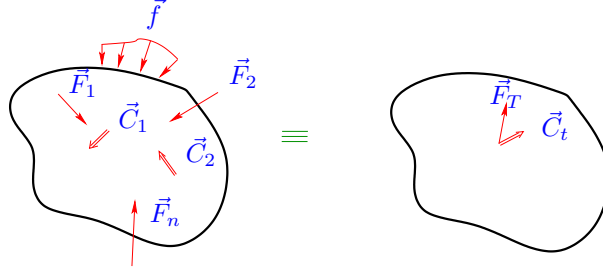


Figura 2.19: Sistema de fuerzas equivalentes. Figura de la izquierda muestra la situación inicial, la figura de la derecha mostraría la situación final ‘equivalente’.

tenemos un cuerpo bajo estudio en su situación inicial con un cierto número de fuerzas puntuales, de fuerzas distribuidas y de momentos puros actuando sobre él. La idea de esta sección es desarrollar algunos métodos que nos permitan reemplazar el sistema de fuerzas y momento puros original, por uno más simple, que sea equivalente, en el sentido que el ‘efecto’ que sienta el cuerpo sea el mismo. El sistema equivalente es mostrado de forma esquemática en el lado derecho de la Figura 2.19.

Ahora veremos varios casos particulares:

- Si un conjunto de fuerza actúa en un punto, tal como lo vemos en el lado izquierdo de la Figura 2.20, la fuerza equivalente total es simplemente la suma de las fuerzas, como se ve en el lado derecho de la misma figura para el mismo punto.

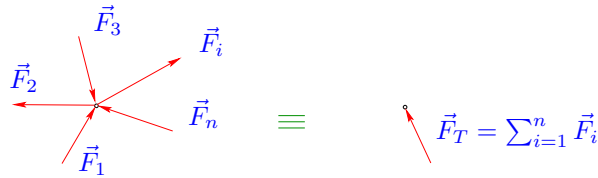


Figura 2.20: Sistema de fuerzas equivalentes. Fuerzas aplicadas en un punto.

- Para un cuerpo rígido la fuerza se puede trasladar a lo largo de su línea de acción y el cuerpo sentiría el mismo ‘efecto’, tal como se muestra en la Figura 2.21.

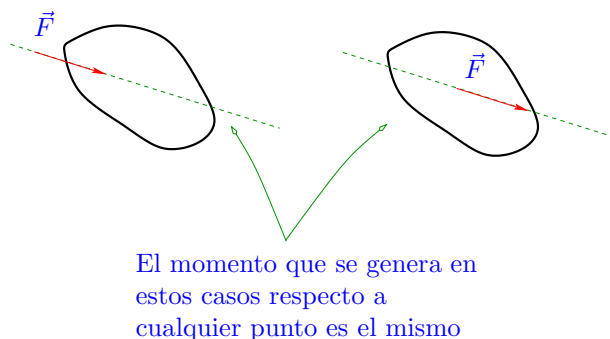


Figura 2.21: Sistema de fuerzas equivalentes. Fuerzas se puede mover a lo largo de su línea de acción.

Ya habíamos comentado este hecho importante en el contexto de la Figura 2.18. Al mover la fuerza a lo largo de su línea de acción, el momento que esta genera es el mismo para cualquier punto, y como el cuerpo es rígido, no importaría si la deformación no fuese la misma, como si ocurriría con cuerpos deformables.

- En la Figura 2.22 en la parte superior izquierda tenemos un cuerpo con una fuerza \vec{F} aplicada en un punto A . Lo que nos interesa ahora es ver cual sería un sistema de fuerzas y/o momentos puros equivalentes si quisieramos mover esa fuerza de A a B . El resultado que mostraremos ahora en realidad ya fue usado en el contexto de la demostración que se hizo respecto a que el momento puro era un vector libre (Figura 2.15), pero de todas formas repetiremos el método aquí.

Para trasladar la fuerza al punto B se dibuja en dicho punto dos fuerzas iguales pero opuestas con la misma dirección que la original, tal como se muestra en la Figura 2.22 parte superior derecha.

La fuerza original \vec{F} en A puede usarse para formar un momento puro junto con la fuerza $-\vec{F}$ aplicada en B . Luego tal como se muestra en la Figura 2.22 parte inferior central, tendremos la fuerza \vec{F} ahora aplicada en B más un vector momento puro \vec{C} , que proviene del cálculo anterior.

Ejercicio : En la Figura 2.23, ¿cual es el sistema de fuerzas y/o momentos equivalentes en el punto A ?

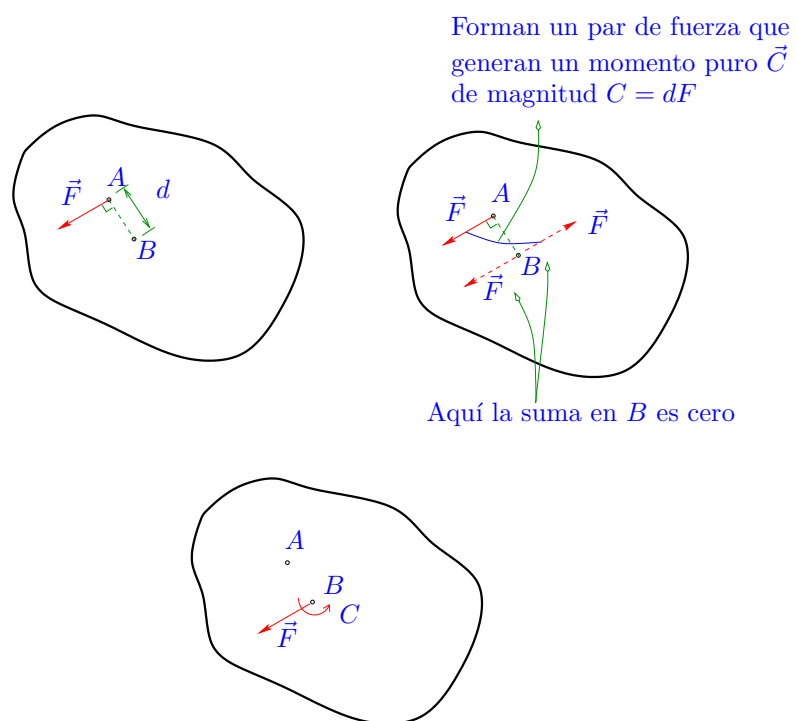


Figura 2.22: Sistema de fuerzas equivalentes. Fuerza que se mueve a una posición paralela a su línea de acción.

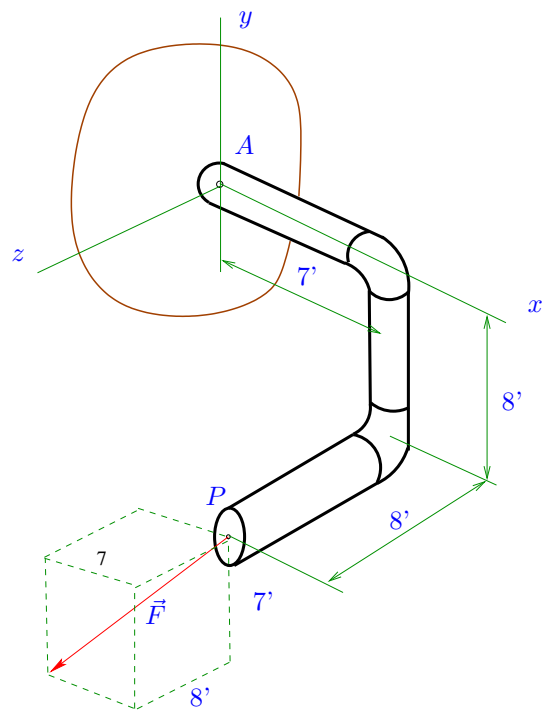


Figura 2.23: Ejemplo de sistema de fuerzas equivalentes.

2.3.1. Fuerzas distribuidas

Al inicio de esta sección se clasificaron las fuerzas de contacto en fuerzas puntuales y distribuidas (ver Figura 2.4). Es claro que en problemas ‘reales’ las fuerzas distribuidas son una mucho mejor representación de las interacciones reales entre cuerpos. Considérese por ejemplo la Figura 2.24. En el lado izquierdo

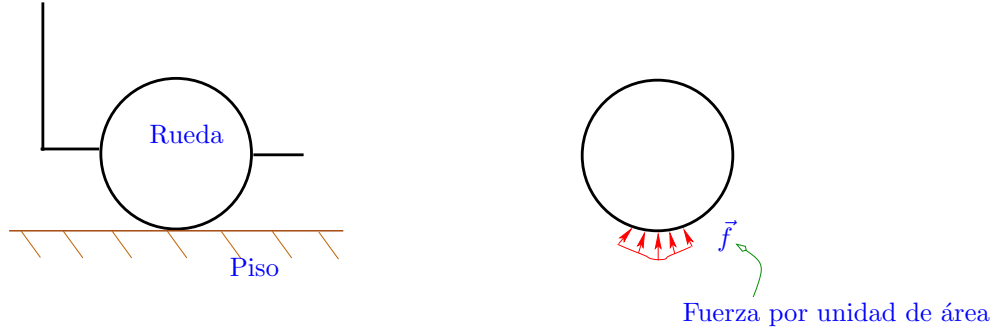


Figura 2.24: Ejemplo de fuerzas distribuidas de superficie.

se tiene un esquema de la parte frontal de un auto, en particular de la rueda y del piso en la que esta está apoyada. Sabemos que las ruedas sufren algo de deformación (debido al peso del auto) y que por tanto el contacto con el piso ocurre en un área de tamaño finito, tal como se muestra en el lado derecho de la misma figura. Luego la interacción del piso sobre la rueda se puede modelar como una fuerza distribuida \vec{f} por unidad de área.

Otro tipo de fuerza distribuida corresponde a las fuerzas de cuerpo. Por ejemplo la fuerza debido a la gravedad se puede considerar como una fuerza por unidad de volumen, tal como se muestra en la Figura 2.25.

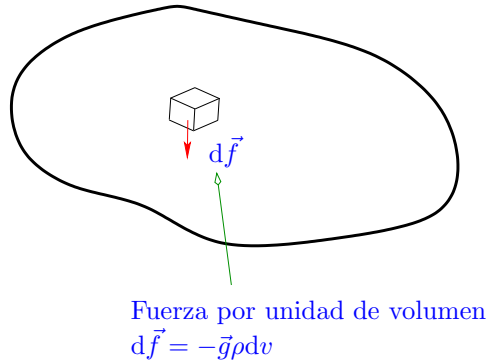


Figura 2.25: Ejemplo de fuerzas distribuidas de volumen.

Densidad de línea

En este texto nos concentraremos en particular en fuerzas por unidad de longitud, llamadas también por unidad de línea, las cuales tienen unidades en el sistema internacional N/m, tal como se muestra en la Figura 2.27. Nuestro interés ahora es encontrar una fuerza puntual ‘equivalente’ que pueda reemplazar estas distribuciones de línea \vec{w} , para ello necesitaremos algunos resultados preliminares concernientes al momento causado por una fuerza.

En la Figura 2.26 (lado izquierdo) tenemos (para un problema plano) un esquema con una fuerza \vec{F} en donde interesa determinar el momento causado respecto al punto A. En dicho caso (en donde los vectores son ortogonales) se

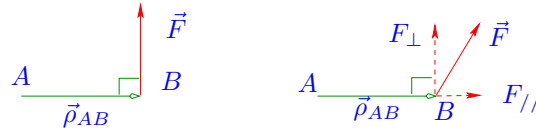


Figura 2.26: Cálculo simplificado del momento en problemas planos.

cumple que

$$\|\vec{\rho}_{AB} \times \vec{F}\| = \rho_{AB} F. \quad (2.14)$$

Es fácil demostrar para un problema más general como el mostrado en el lado derecho de la Figura 2.26 se tendrá

$$\|\vec{\rho}_{AB} \times \vec{F}\| = \rho_{AB} F_{\perp}. \quad (2.15)$$

El sentido del momento para problemas planos está apuntando fuera o hacia dentro de la pizarra.

Concentrémonos ahora en el esquema mostrado en la Figura 2.27, del resultado anterior, para efectos del momento, la componente tangencial de la fuerza no es importante, de modo que aquí asumiremos que \vec{w} solo tiene componente en la dirección del eje y .

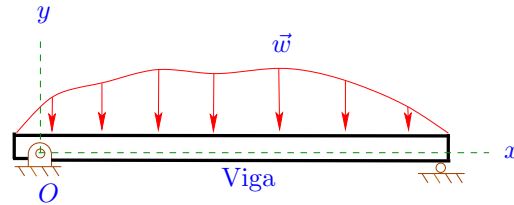


Figura 2.27: Fuerzas distribuídas. Fuerza por unidad de línea.

La fuerza está siendo aplicada, por ejemplo, a una viga de longitud L , y para un diferencial de longitud la magnitud de la fuerza actuando sobre dicho

elemento df se puede calcular como

$$df = w(x) dx. \quad (2.16)$$

Ahora bien, queremos reemplazar la fuerza⁸ $w(x)$ por una fuerza puntual equivalente (o resultante) que llamaremos F_R . Una primera condición que es natural pedir es que F_R sea igual a la fuerza total que $w(x)$ estaría generando sobre la viga, o sea

$$F_R = \int_o^L w(x) dx. \quad (2.17)$$

Ahora necesitamos ver donde aplicar esta fuerza resultante, y para ello ahora podemos pedir que el momento causado por F_R respecto a cualquier punto sea el mismo que causaría $w(x)$. Calcularemos el momento respecto al punto O mostrado en la Figura 2.27 (extremo izquierdo de la viga). Debemos recordar que si el momento es cero respecto a un punto, lo es respecto a cualquier otro, como consecuencia de (2.9). Para calcular el momento causado por w consideremos la Figura auxiliar 2.28. Podemos ver en este caso que la fuerza en un diferencial

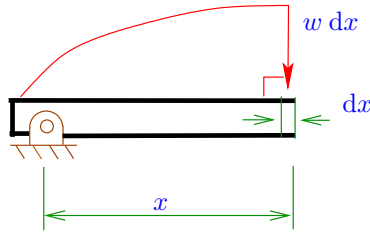


Figura 2.28: Fuerzas distribuidas. Momento causado por la fuerza.

dx sería $w(x) dx$ y que el momento causado respecto al extremo derecho (dado que la fuerza sería ortogonal respecto al vector posición) sería $xw(x) dx$, por lo que el momento total es $\int_o^L xw(x) dx$. Ahora bien, asumamos que la fuerza F_R se aplica a una distancia \bar{x} desde el extremo izquierdo de la viga, el momento causado por F_R sería igual a $\bar{x}F_R$, luego imponemos la condición

$$\int_o^L xw(x) dx = \bar{x}F_R,$$

y de (2.17) tenemos⁹

$$\bar{x} = \frac{\int_o^L xw(x) dx}{\int_o^L w(x) dx}. \quad (2.18)$$

Veamos dos ejemplo simples de aplicación de estos resultados.

⁸Como \vec{w} solo tiene componente en y de ahora en adelante en general usaremos el símbolo w para hablar de estas fuerzas distribuidas, a menos que de manera explícita esta pueda tener las dos componentes en el caso plano en las direcciones x e y .

⁹Nótese la similitud de esta expresión con las ecuaciones que se derivan usualmente en el cálculo de centro de masa para distribuciones lineales de densidad.

Distribución constante: En este caso tal como se muestra en la Figura 2.29 consideramos el caso $w(x) = w_o$ constante. De (2.17) en este caso tenemos

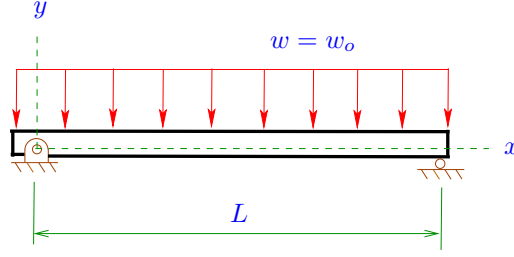


Figura 2.29: Fuerzas distribuídas. Distribución constante.

$$F_R = \int_0^L w_o \, dx = w_o L, \quad \int_0^L x w_o \, dx = w_o \frac{L^2}{2}, \quad (2.19)$$

luego de (2.18)

$$\bar{x} = \frac{w_o \frac{L^2}{2}}{w_o L} = \frac{L}{2}, \quad (2.20)$$

y por tanto la fuerza equivalente se aplica en la mitad de la zona en la que se está aplicando w_o , tal como se muestra en la Figura 2.30.

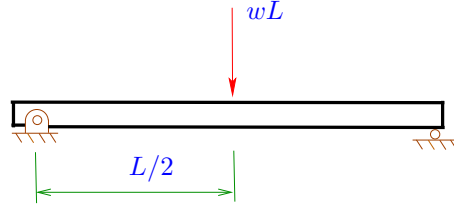


Figura 2.30: Fuerzas distribuídas. Fuerza equivalente a una distribución constante.

Distribución lineal: En este problema se considera una distribución de fuerza por unidad de longitud lineal con un valor máximo en un extremo igual a w_o , tal como se muestra en la Figura 2.31. En este caso se tiene

$$w(x) = \frac{x}{L} w_o,$$

y de (2.17) se llega a

$$F_R = \int_0^L \frac{x}{L} w_o \, dx = \frac{w_o L}{2}, \quad (2.21)$$

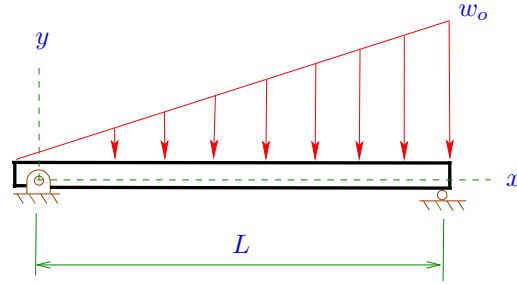


Figura 2.31: Fuerzas distribuídas: Distribución lineal

que no es otra cosa que el área del triángulo que forma esta distribución lineal.

Por otra parte

$$\int_0^L \frac{x^2}{L} w_0 \, dx = \frac{w_0 L^2}{3},$$

luego de (2.18) tenemos

$$\bar{x} = \frac{w_0 \frac{L^2}{3}}{w_0 \frac{L}{2}} = \frac{2L}{3}, \quad (2.22)$$

o sea la resultante se aplica a dos tercios de la distancia desde el inicio de la distribución lineal original, tal como se muestra en la Figura 2.32.

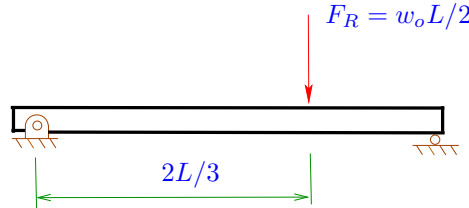


Figura 2.32: Fuerzas distribuídas. Fuerza equivalente a una distribución lineal.

Ejemplo: Para el sistema de fuerzas mostrado en la Figura 2.33 determine la fuerza y momentos resultantes en el punto A y también determine el sistema de fuerzas y momentos más simple que sea equivalente a las fuerzas originales. Las unidades de longitud son ‘pie’ y las de fuerza están en libras-fuerza.

- Usando los resultados mostrados en (2.20) y (2.22) vamos primero a reemplazar las distribuciones de fuerza por unidad de línea por fuerzas puntuales. La fuerza uniforme de 5lbf/pie se reemplazaría por una puntual

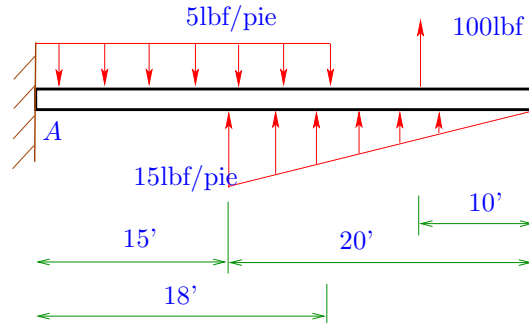


Figura 2.33: Ejemplo. Fuerzas distribuidas.

de $5 \times 18 = 90 \text{ lbf}$, que se aplica en la mitad de los 18 pies originales, en tanto la distribución lineal se reemplaza por una puntual de magnitud de $15 \times 20 / 2 = 150 \text{ lbf}$ que se aplicaría a dos tercios de 20 desde el extremo derecho de la viga, tal como se muestra en la Figura 2.34.

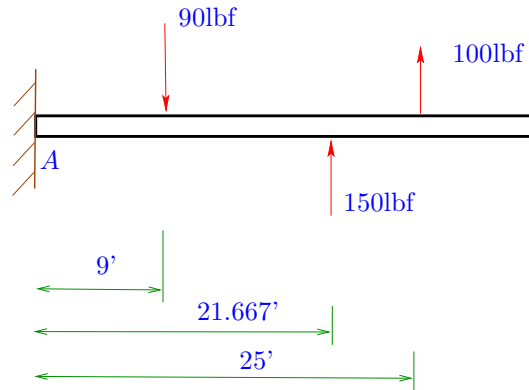


Figura 2.34: Ejemplo. Fuerzas distribuidas.

- Ahora para determinar las resultantes en el punto A dibujamos en dicho punto pares opuestos de las fuerzas de magnitud 90, 150 y 100 lbf tal como se muestra en la Figura 2.35.
- Se usan pares opuestos de fuerzas tal como se muestra con líneas punteadas en la Figura 2.35 para generar con estas momentos puros tal como se muestra en la Figura 2.36.
- Las magnitudes de estos momentos son $C_1 = 90 \times 9 = 810 \text{ lbf-pie}$, $C_2 = 150 \times 21,67 \text{ lbf-pie}$ y $C_3 = 100 \times 25 = 2500 \text{ lbf-pie}$. El resultado final de este proceso

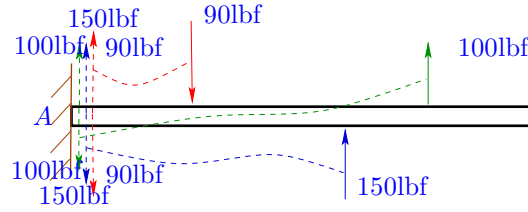


Figura 2.35: Ejemplo. Fuerzas distribuidas.

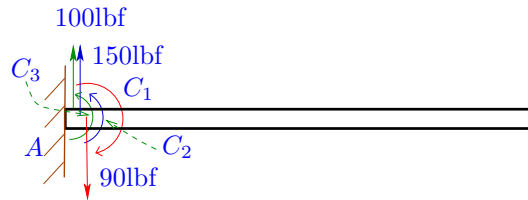


Figura 2.36: Ejemplo. Fuerzas distribuidas.

se muestra en la Figura 2.36. Podemos sumar todos los momentos y todas la fuerzas que aparecen en la Figura 2.36 y finalmente nos quedaría una fuerza resultante total que podemos llamar F_R y un momento resultante total C_R , tal como se muestra en la Figura 2.37, y este sería el resultante en el punto A que se mencionaba en la pregunta original.

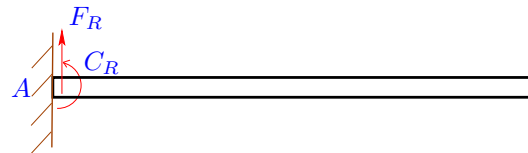


Figura 2.37: Ejemplo. Fuerzas distribuidas.

- Pero hay un sistema equivalente aun más simple y para encontrarlo podemos mirar la Figura 2.38, en donde trasladaremos la fuerza resultante F_R hacia la derecha una distancia en principio desconocida d .
- Para encontrar dicha distancia asumimos que el momento puro generado al trasladar F_R (que en este caso tendrá un sentido opuesto al C_R original mostrado en la Figura 2.37) es el mismo en magnitud a C_R , luego $d = C_R/F_R$. O sea llegamos finalmente a algo como lo mostrado en la Figura 2.39 en donde solo tenemos una fuerza resultante final equivalente al sistema original de fuerzas mostrado en la Figura 2.33.

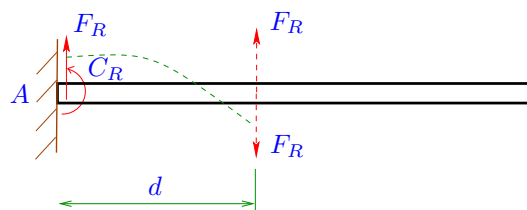


Figura 2.38: Fuerzas distribuídas: Ejemplo

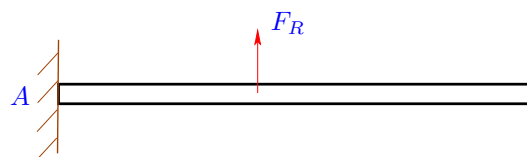


Figura 2.39: Ejemplo. Fuerzas distribuídas.

2.3.2. Apoyos y reacciones

En las figuras mostradas en las secciones anteriores pudimos apreciar esquemas de vigas en cuyos extremos se incluían algunos símbolos que indicamos representaban algún tipo de interacción con otros cuerpos o con el medio. Hemos discutido en detalle acerca de la interacción de varios cuerpos que, por ejemplo, forman un mecanismo, y que dicha interacción se puede modelar a través de fuerzas y/o de restricciones a los posibles desplazamiento que esas superficies de interacción pueden presentar. En el caso de vigas modelaremos estas interacciones de forma simplificada a través de ‘apoyos’, que generarán fuerzas de reacción puntuales de magnitud apropiada para lograr dichas restricciones a los desplazamientos.

Pasador: Este tipo de apoyo se representará de la forma como se muestra en la Figura 2.40, en donde tenemos el extremo de una viga y dos formas equivalentes para representar este apoyo.

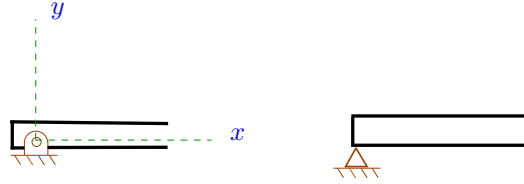


Figura 2.40: Apoyos tipo Pasador.

Se asumirá que un apoyo tipo pasador impide el desplazamiento (del punto en donde este se aplica) tanto en la dirección x como en la dirección y . Por otra parte no impide movimientos angulares para ese extremo de la viga, o sea la viga es libre de rotar en cualquier dirección. Por este motivo el tipo de ‘reacción’ que este tipo de apoyo generará consistirá de una fuerza puntual \vec{R} , que para el caso plano tiene dos componentes R_x , R_y , tal como se muestra en la Figura 2.41

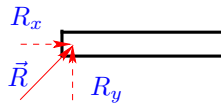


Figura 2.41: Pasador. Fuerzas de reacción.

Rodillo: Un apoyo tipo rodillo se simbolizará de tres formas equivalentes como se muestra en la Figura 2.42.

Un apoyo de esta naturaleza colocado en el extremo de una viga se asumirá que impide el movimiento de ese punto en la dirección normal a la

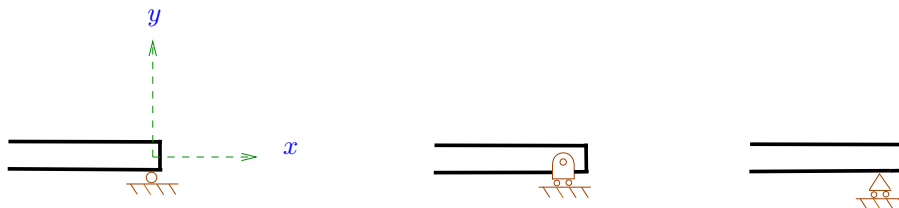


Figura 2.42: Apoyos tipo Rodillo.

superficie de apoyo, por tanto se generará una fuerza normal N de reacción en dicho punto, tal como se muestra en la Figura 2.43

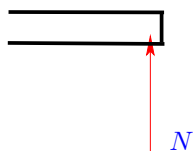


Figura 2.43: Rodillo. Fuerza de reacción.

El apoyo mostrado en la Figura 2.42 en realidad generaría un efecto similar a lo que se muestra en la Figura 2.44. En dicha figura se tiene un pasador

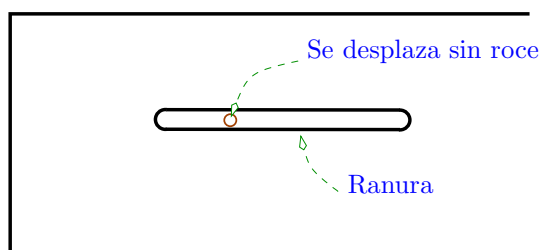


Figura 2.44: Rodillo. Equivalencia al efecto de una ranura.

conectado a una viga (que no se muestra en la figura) que puede desplazarse a través de una ranura sin roce. La ranura impide el movimiento del pasador y por tanto de ese punto de la viga en la dirección normal a la dirección tangente de la ranura, y si no hay roce el único tipo de fuerza de reacción que se genera es normal a la dirección de esta ranura.

Empotramiento: Una viga con un extremo empotrado se mostrará de forma simbólica como se indica en el lado izquierdo de la Figura 2.45. El empotramiento se asumirá que impide todo tipo de movimiento en ese punto o

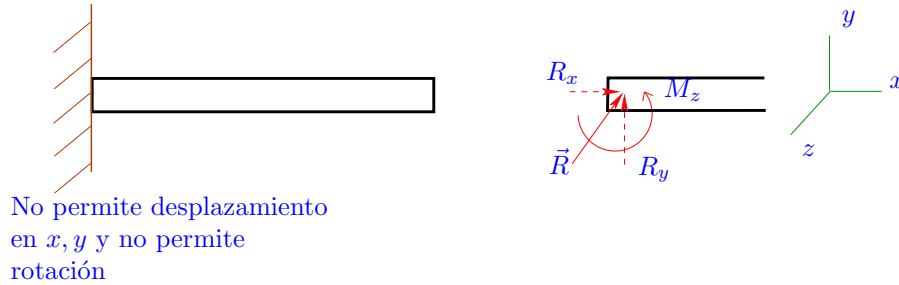


Figura 2.45: Apoyos tipo empotramiento.

extremo de la viga, es decir no se puede mover ni en la dirección x , y (y eventualmente z), ni tampoco puede girar libremente en dicho punto.

En el lado derecho de la Figura 2.45 tendríamos los tipos de fuerzas y momentos de reacción que este apoyo generaría sobre la viga en ese punto. Tenemos una fuerza puntual \vec{R} con dos componentes (en el caso plano) R_x y R_y , más un momento puro de reacción que denotamos M_z para el caso plano.

Rotula 3D: Este es un apoyo que aparece en problemas tridimensionales, cuyo esquema se muestra en el lado izquierdo de la Figura 2.46. En esa figura

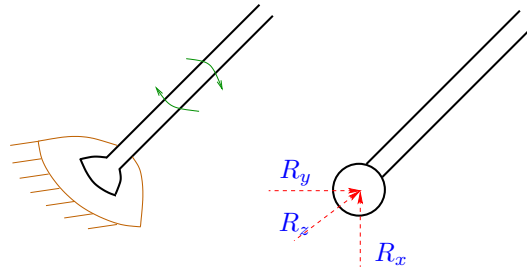


Figura 2.46: Apoyos tipo rotula 3D.

podemos ver una barra unida (pegada) a una esfera, la cual está parcialmente inserta en una cavidad de forma esférica (el soporte dibujado en color café). Un apoyo de este tipo no permitiría ningún tipo de desplazamiento pero por otra parte permitiría cualquier tipo de rotación, como lo muestran las flechas verdes. El tipo de reacciones que este apoyo generaría si no hay roce se muestra en el lado derecho de la figura y consistiría en una fuerza puntual con tres componentes (3D) R_x , R_y , R_z .

Dos barras conectadas por un pasador: Un caso adicional, que en realidad es una extensión del apoyo tipo pasador visto anteriormente, corresponde al problema de dos o más barras unidas a través de un pasador.

Como ejemplo veamos la Figura 2.47, en donde podemos apreciar dos barras o vigas unidas en un extremo por un pasador.

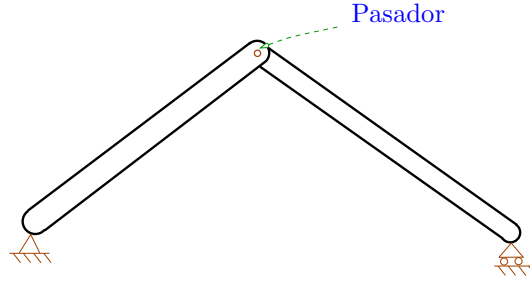


Figura 2.47: Pasador conectando dos barras.

La pregunta, desde el punto de vista de las reacciones, es: ¿Qué simplificación se podría hacer en ese caso? Para ello podemos apreciar la vista ampliada de la zona de interacción mostrada en la Figura 2.48, en donde tenemos diagramas de los extremos de las barras y un diagrama adicional del pasador.

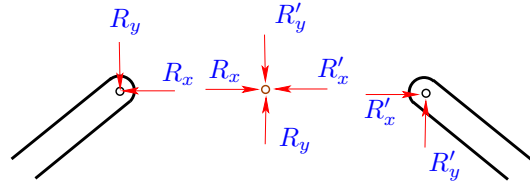


Figura 2.48: Pasador conectando dos barras. Fuerzas de interacción.

Si asumimos no hay roce, de la discusión del apoyo tipo pasador, la reacción que el pasador generaría sobre cada barra sería solo una fuerza puntual con dos componentes, por lo tanto en el caso de la barra del lado izquierdo el efecto del pasador sobre esa barra se manifestaría por medio de R_x y R_y , en tanto que en la barra del lado derecho se manifestaría por medio de reacciones R'_x y R'_y . Por acción y reacción las mismas fuerzas actuarían sobre el pasador mostrado en el medio, y como estamos en un caso de equilibrio estático tenemos para este pasador que se debe cumplir

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x = R'_x \text{ y } \sum F_y = 0 \Rightarrow R_y = R'_y, \quad (2.23)$$

o sea en este caso el pasador simplemente ‘transmitiría’ la fuerza de una barra a la otra¹⁰.

¹⁰En el caso de tres barras unidas en un punto por un pasador, si además hay una fuer-

za externa actuando en dicho punto, entonces esta conclusión no es válida, y necesitamos hacer diagramas de cuerpo libre de cada una de las barras y el pasador, pudiendo hacer la simplificación adicional que la fuerza externa se estaría aplicando solo en el pasador.

2.3.3. Ecuaciones de equilibrio

En la Sección 2.2.1 (y también en la Sección 2.3) hemos mencionado las ecuaciones de equilibrio. Hemos indicado en extenso que en este texto en su mayor parte nos preocuparemos solo de problemas estáticos, es decir como supuesto consideraremos que cualquier efecto que pueda tener la velocidad o aceleración en el comportamiento de un sólido no se tomará en cuenta. Ahora bien, en la sección anterior hemos definidos algunos tipos de ‘apoyos’ que no son otra cosa que modelos de interacción entre cuerpos que pueden componer un mecanismo. Dichos apoyos generan restricciones al desplazamiento y de manera indirecta generan ‘fuerzas de reacción’. Debería ser claro, al menos de manera intuitiva, que en el comportamiento mecánico de un cuerpo no solo serían importantes las fuerzas o momentos externo sino también estas fuerzas de reacción o interacción. En esta sección (la última de este capítulo de estática) veremos métodos simplificados para calcular dichas reacciones.

Primero que todo veamos un esquema general a estudiar del tipo de problema como se muestra en la Figura 2.49. Se tiene aquí un cuerpo con un cierto numero

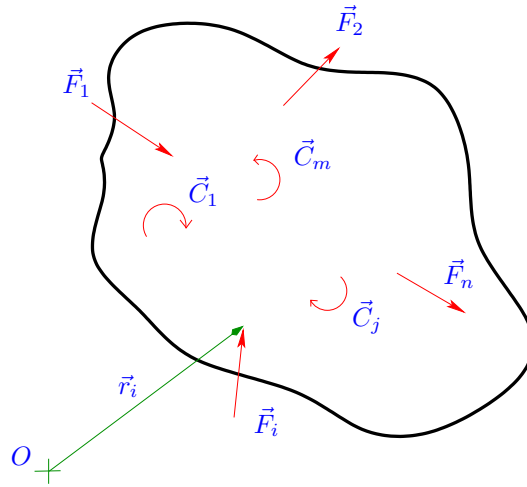


Figura 2.49: Ecuaciones de equilibrio.

de fuerzas y momentos puros actuando sobre él, junto con un punto de referencia O . En un problema general de este tipo las fuerzas y momentos puros deben

satisfacer las ecuaciones de equilibrio¹¹

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (2.24)$$

$$\sum_j \vec{M}_j = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_j \vec{C}_j = \vec{0}. \quad (2.25)$$

Estas ecuaciones son bien conocidas en física y nada nuevo se ha mostrado. Considerando ambas en problemas tridimensionales tenemos 6 ecuaciones escalares. Lo que nos interesa ahora es ver como resolverlas de forma rápida y práctica, para ello veamos el siguiente listado de casos especiales:

Fuerzas coplanares (caso plano): En un problema de este tipo se asumirá que todas las fuerzas (tanto externas como de interacción) pertenecen a un plano (por ejemplo el plano $x-y$), y que todos los momentos puros solo tienen componente en z , tal como se muestra en la Figura 2.50. Tenemos

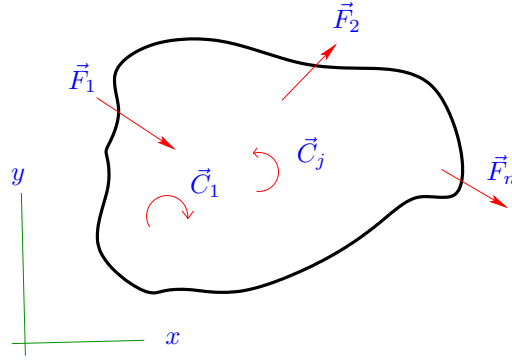


Figura 2.50: Ecuaciones de equilibrio. Caso plano.

entonces que las fuerzas son de la forma $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ y que los momentos puros son como $\vec{C} = C_z \hat{k}$, luego de (2.24), (2.25) solo tenemos tres ecuaciones que satisfacer

$$\sum F_x = 0, \quad (2.26)$$

$$\sum F_y = 0, \quad (2.27)$$

$$\sum M_z = 0. \quad (2.28)$$

Fuerzas paralelas: En este caso como ejemplo podemos asumir que todas las fuerzas aplicadas en un cuerpo tienen la dirección del eje z , tal como se muestra en la Figura 2.51. Las fuerzas externas entonces tienen la forma

¹¹La ecuación (2.25) en realidad es equivalente a tomar todas las fuerzas sobre el cuerpo y moverlas a un punto común para sumarlas en dicho punto. El proceso de mover estas fuerzas generan los momentos mostrados en el primer término de la segunda ecuación en (2.25).

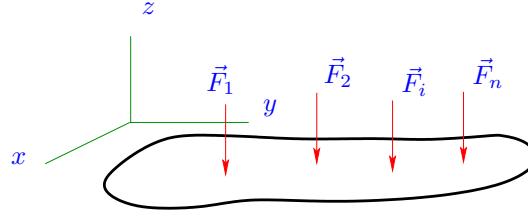


Figura 2.51: Ecuaciones de equilibrio. Fuerzas paralelas.

$\vec{F} = F_z \hat{k}$ y los momentos puros (que no aparecen dibujados en la Figura 2.51) tendrían la forma $\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}$, luego en un problema de esta naturaleza de (2.24), (2.25) tenemos que resolver solo tres ecuaciones

$$\sum F_z = 0, \quad (2.29)$$

$$\sum M_x = 0, \quad (2.30)$$

$$\sum M_y = 0. \quad (2.31)$$

Fuerzas concurrentes: Si en un cuerpo todas las fuerzas (o sus líneas de acción) pasan por un solo punto tal como se muestra en la Figura 2.52, y si no se aplica ningún momento puro externo, entonces de (2.24), (2.25) solo debemos resolver

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (2.32)$$

es decir aquí no es necesario verificar el equilibrio al momento.

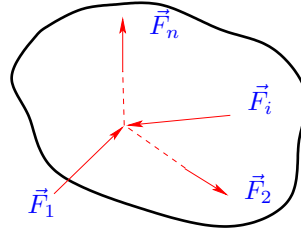


Figura 2.52: Ecuaciones de equilibrio. Fuerzas concurrentes.

Cuerpo bajo la acción de una sola fuerza: En la Figura 2.53 se muestra un cuerpo bajo la acción de una sola fuerza. Esquemas de esta forma se han usado y mostrado en secciones anteriores, sin embargo en estática desde el punto de vista riguroso no estamos considerando aceleración, y por tanto es necesario que $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$, y cuando hay solo una fuerza aplicada sobre un cuerpo, esto de manera inmediata implica que $\vec{F} = \vec{0}$, o sea en

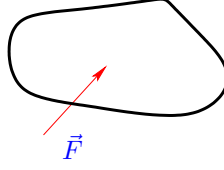


Figura 2.53: Ecuaciones de equilibrio. Cuerpo bajo la acción de una sola fuerza.

estática no es posible tener solo una fuerza aplicada sobre un cuerpo para que este esté en equilibrio.

Cuerpo bajo la acción de solo dos fuerzas: Este es un caso muy importante, el resultado mostrado aquí se aplica en la mayor parte de los ejemplos y ejercicios mostrados en la Sección 2.4. Considérese la Figura 2.54 en donde tenemos un cuerpo bajo la acción de dos fuerzas. Estas fuerzas

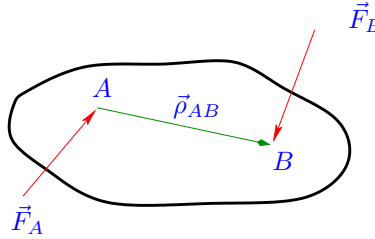


Figura 2.54: Ecuaciones de equilibrio. Cuerpo bajo la acción de dos fuerzas.

pueden ser fuerzas externas o fuerzas externas de reacción o interacción con otros cuerpos. Tenemos pues una fuerza \vec{F}_A aplicada en un punto A y una fuerza \vec{F}_B aplicada en un punto B. Asumiremos que los puntos A, B son diferentes, pues en otro caso estaríamos en la situación de fuerzas concurrentes visto en un punto anterior.

En este caso especial las ecuaciones (2.24) deben también ser satisfechas, luego (2.24) implica que

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0},$$

de modo que, por ejemplo, $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$. O sea las fuerzas deben ser iguales pero opuestas en sentido.

Por otra parte de (2.25) tenemos que $\sum \vec{M}_j = \vec{0}$, que en este caso en donde hay solo fuerzas y no hay momento puro externo aplicado, de (2.25) es equivalente (si se calcula por ejemplo respecto al punto A) a

$$\vec{\rho}_{AB} \times \vec{F}_B = \vec{0},$$

pues respecto a A la fuerza \vec{F}_A no hace momento. Ahora bien, la ecuación anterior nos dice finalmente que para que haya equilibrio al momento la fuerza \vec{F}_B debería ser paralela a $\vec{\rho}_{AB}$, y como teníamos que $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ esto finalmente implica que:

Para que un cuerpo con solo dos fuerzas aplicadas sobre él esté en equilibrio las fuerzas deben ser de igual magnitud, dirección y sentido opuesto, y su dirección debe ser la misma dirección del vector que une los puntos de aplicación.

Tenemos dos casos posibles entonces, tal como se muestra en la Figura 2.55.

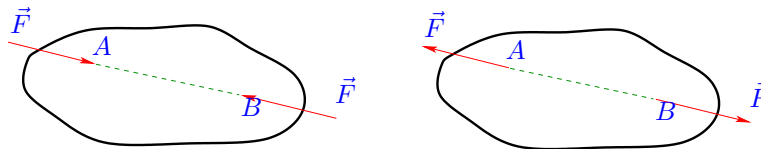


Figura 2.55: Cuerpo bajo la acción de dos fuerzas. Dos situaciones posibles.

Cuerpo bajo la acción de solo tres fuerzas: En este problema tenemos dos sub-casos que detallaremos a continuación.

- Cuerpo bajo la acción de tres fuerzas y dos de ellas concurrentes.

En la Figura 2.56 tenemos un esquema de un cuerpo bajo la acción de tres fuerzas \vec{F}_A , \vec{F}_B y \vec{F}_C . Asumimos, por ejemplo, que \vec{F}_A y \vec{F}_B (sus líneas de acción) se intersectan en un punto común que llamaremos O .

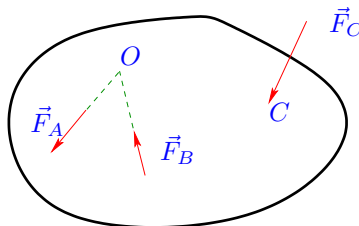


Figura 2.56: Ecuaciones de equilibrio. Cuerpo bajo la acción de tres fuerzas.

Como \vec{F}_A y \vec{F}_B (sus líneas de acción) coinciden en un punto, podemos trasladar estas fuerzas a dicho punto, y esto es posible pues al moverlas a lo largo de sus líneas de acción el efecto de cada una de estas fuerzas en cuerpo rígidos es el mismo. Finalmente en O suma-

mos estas dos fuerzas de modo que tenemos una situación como la mostrada en la Figura 2.57.

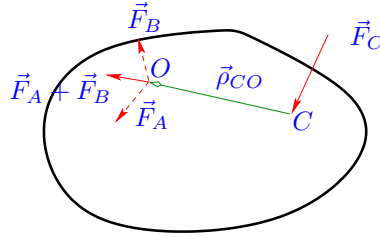


Figura 2.57: Cuerpo bajo la acción de tres fuerzas. Dos fuerzas concurrentes.

Como ahora en la Figura 2.57 tenemos solo dos fuerzas actuando sobre el cuerpo, $\vec{F}_A + \vec{F}_B$ en O y \vec{F}_C en C , podemos aplicar el principio visto en el punto anterior para un cuerpo con dos fuerzas, de donde concluimos que \vec{F}_C debe necesariamente tener la dirección del vector que va desde C a O , en consecuencia \vec{F}_C (su línea de acción) también pasaría por el punto O y tenemos que :

Cuando un cuerpo esté sometido solo a tres fuerzas, con dos de ellas (sus líneas de acción) concurrentes a un punto, la tercera fuerza también (su línea de acción) intersecta dicho punto.

Es decir en un caso como este tenemos algo como lo que se muestra en la Figura 2.58.

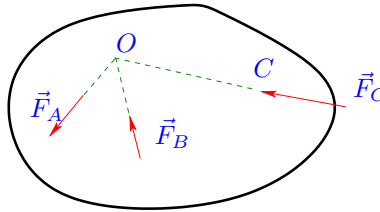


Figura 2.58: Cuerpo bajo la acción de tres fuerzas. Caso más general.

■ Cuerpo bajo la acción de tres fuerzas y dos de ellas paralelas.

En este caso nuevamente tenemos un cuerpo sobre el que actúan tres fuerzas \vec{F}_A , \vec{F}_B y \vec{F}_C en los puntos A , B , C , respectivamente. Asumimos ahora, por ejemplo, que \vec{F}_A y \vec{F}_B son paralelas, tal como se muestra en la Figura 2.59.

Bajo la acción de estas tres fuerzas el cuerpo debe estar en equilibrio, o sea (2.24) y (2.25) deben ser satisfechas. En el caso particular de

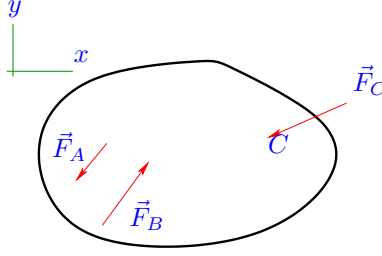


Figura 2.59: Cuerpo bajo la acción de tres fuerzas. Dos fuerzas paralelas.

(2.25) esto implicaría que

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

Ahora bien, la ecuación (2.24) debe ser válida para cualquier sistema de coordenadas, no solo para el sistema $x - y$ mostrado en la Figura 2.59, luego en lugar de resolver (2.24) con ese sistema podemos escoger un sistema de coordenadas alternativo $x' - y'$ tal como se muestra en la Figura 2.60. En dicha figura escogemos ahora la dirección del

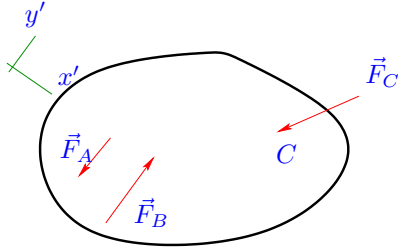


Figura 2.60: Dos fuerzas paralelas. Sistema alternativo de ejes coordenados.

eje y' de forma que sea paralelo a las fuerzas \vec{F}_A y \vec{F}_B . En este sistema alternativo de coordenadas las fuerzas \vec{F}_A y \vec{F}_B solo tendrían componente en y' en tanto que \vec{F}_C tendría tanto una componente en x' como en y' , o sea $\vec{F}_C = F_{C_{x'}}\hat{i}' + F_{C_{y'}}\hat{j}'$, luego en particular de (2.24) para este sistema de coordenadas tenemos que

$$\sum F_{x'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{C_{x'}} = 0,$$

o sea \vec{F}_C solo debería tener componente en y' , luego tenemos que:

Si un cuerpo está sometido solo a tres fuerzas y dos de ellas son paralelas, la tercera fuerza también es paralela.

2.4. Ejemplos y ejercicios para estática de estructuras

En esta sección se resolverán algunos problemas en donde estemos interesados en determinar fuerzas de reacción o interacción, algunos ejercicios aparecen al final de la sección.

1. Para la viga doblada mostrada en la Figura 2.61 determine las fuerzas de reacción en los apoyos A , B . La viga está siendo sometida a una fuerza uniforme $w = 50\text{N/m}$.

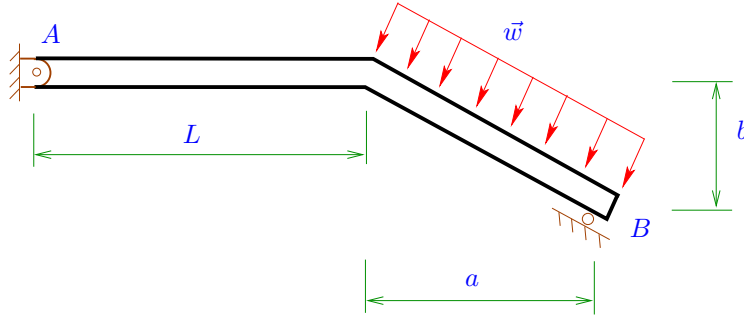


Figura 2.61: Ejemplo de cálculo de reacciones.

Datos: $L = 4\text{m}$, $a = 2\text{m}$, $b = 1,5\text{m}$.

Solución: Si se hace un diagrama de cuerpo libre de la viga, es decir si se dibuja solo la viga reemplazando los apoyos por las fuerzas de reacción que estos generarían, tenemos un esquema como el mostrado en la Figura 2.62. El apoyo tipo pasador en A se reemplaza por una fuerza puntual

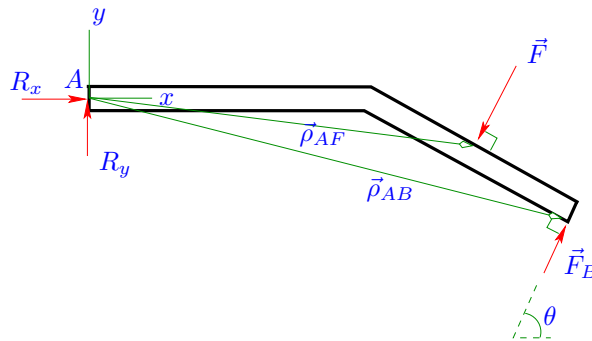


Figura 2.62: Ejemplo de cálculo de reacciones.

con dos componentes R_x , R_y en tanto que el apoyo tipo rodillo en B se reemplazaría por una fuerza normal, en este caso a la superficie en donde este rodillo se ubica, esta fuerza la denotamos como \vec{F}_B y su dirección θ es conocida donde $\theta = \arctan(2/1,5)$.

En la Figura 2.62 la fuerza uniforme por unidad de línea \vec{w} ha sido reemplazada por una puntual equivalente \vec{F} y de (2.19)₁ $\|\vec{F}\| = 50 * 2,5\text{N}$ justo en la mitad de la zona de aplicación de \vec{w} .

Tenemos pues tres incógnitas para este problema, en A nos interesa conocer R_x , R_y y en C queremos conocer la magnitud de \vec{F}_B (puesto que su dirección es ya conocida). Si observamos bien este es un problema de fuerzas coplanares por tanto usaremos

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0 \quad (2.33)$$

para encontrar estas incógnitas. Podemos ver tenemos tres incógnitas y tres ecuaciones. Un problema de este tipo es llamado un problema estáticamente determinado.

Para resolver este sistema de ecuaciones de la Figura 2.62 podemos ver que

$$\vec{F}_B = F_B \cos \theta \hat{i} + F_B \sin \theta \hat{j}, \quad \vec{F} = -F \cos \theta \hat{i} - F \sin \theta \hat{j}, \quad (2.34)$$

de modo que (2.33)₁, (2.33)₂ queda como

$$R_x + F_B \cos \theta - F \cos \theta = 0, \quad R_y + F_B \sin \theta - F \sin \theta = 0. \quad (2.35)$$

Respecto a (2.33)₃, haremos el balance de momento respecto al punto A , de la Figura 2.62 es fácil ver que

$$\vec{\rho}_{AF} = 5\hat{i} - 0,75\hat{j} \quad \vec{\rho}_{AB} = 6\hat{i} - 1,5\hat{j}.$$

Y (2.33)₃ queda como

$$\vec{\rho}_{AF} \times \vec{F} + \vec{\rho}_{AB} \times \vec{F}_B = \vec{0},$$

que usando las expresiones anteriores para $\vec{\rho}_{AF}$ y $\vec{\rho}_{AB}$, después de algunas manipulaciones, nos queda como

$$\hat{k}(-5F \sin \theta - 0,75F \cos \theta) + \hat{k}(6F_B \sin \theta + 1,5F_B \cos \theta) = \vec{0}.$$

Como esta ecuación vectorial solo tiene una componente (en z lo que está correcto para problemas de fuerzas coplanares), esta ecuación es equivalente finalmente a

$$-F(5 \sin \theta + 0,75 \cos \theta) + F_B(6 \sin \theta + 1,5 \cos \theta) = 0. \quad (2.36)$$

En (2.36) conocemos F y θ por lo que podemos despejar F_B . Este valor para F_B se puede reemplazar en el sistema de dos ecuaciones (2.35) para despejar R_x y R_y ■

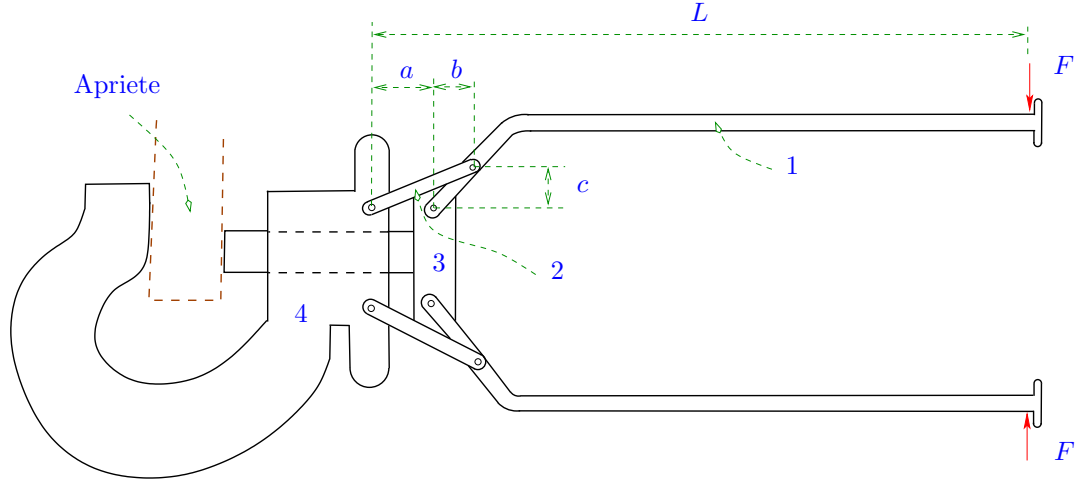


Figura 2.63: Ejemplo de cálculo de reacciones.

2. Para la llave mostrada en la Figura 2.63 calcule la fuerza de apriete si se aplica una fuerza $F = 50\text{ lbf}$.

Datos: $L = 10$, $a = 1$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ (las dimensiones están en pulgadas).

Solución: En la Figura 2.63 indentificamos con un número las piezas o partes más importantes de la llave y a continuación se dibujan diagramas de cuerpo libre para cada una de estas partes.

En relación a barra 2, de la Figura 2.63 podemos notar que está conectada por medio de pasadores solo a dos puntos, luego estamos en la situación de un cuerpo sometido solo a dos fuerzas (en los pasadores) y por tanto dichas fuerzas deben ser igual y tener la dirección del vector que une dichos pasadores como se muestra en la Figura 2.64.

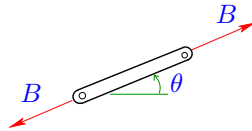


Figura 2.64: Ejemplo de cálculo de reacciones. Diagrama de cuerpo libre de 2.

La fuerza sobre la barra 2 se asume de magnitud (por el momento desconocida) B , el ángulo θ es conocido e igual a $\theta = \arctan[c/(a + b)]$. El sentido de B todavía no se conoce, hemos asumido que está en 'tracción', pero de los resultados numéricos el signo de B nos dirá si ese supuesto es

correcto o no.

Con el resultado anterior ahora nos preocupamos de la barra 1 como se muestra en la Figura 2.65. Ya sabemos la dirección de la fuerza B y luego

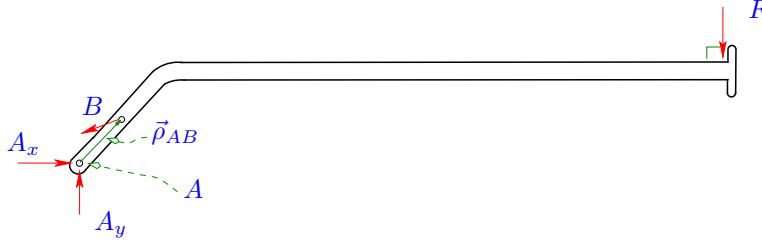


Figura 2.65: Ejemplo de cálculo de reacciones. Diagrama de cuerpo libre de 1.

por acción y reacción la dibujamos en la barra 1 en el sentido opuesto pero con la misma dirección θ .

Además en la barra 1 tenemos la fuerza externa F y la fuerza en el pasador que se conecta con el cuerpo 3. El cuerpo 3 está sometido a más de dos fuerzas, de modo que no sabemos la dirección de dichas reacciones, y por tanto el efecto del cuerpo 3 sobre la barra 1 en ese pasador se debe manifestar en general por medio de una fuerza que llamaremos \vec{A} con dos componentes A_x , A_y . No conocemos el sentido de estas reacciones, pero los cálculos con las ecuaciones de equilibrio nos deberían indicar esto.

En el problema mostrado en la Figura 2.65 tenemos tres incógnitas A_x , A_y y B , luego este es un problema plano, por tanto tenemos tres ecuaciones de equilibrio (2.26)-(2.28) para obtenerlas, lo que hacemos ahora. Partimos con el equilibrio al momento escogiendo el punto A , luego¹² $\sum_A M_z = 0$ es equivalente a

$$\vec{\rho}_{AB} \times (-B \cos \theta \hat{i} - B \sin \theta \hat{j}) - 50 * 9 \hat{k} = \vec{0},$$

donde $\vec{\rho}_{AB} = b \hat{i} + c \hat{j}$. Después de algunas manipulaciones esta ecuación nos da

$$B = \frac{450}{b \sin \theta - c \cos \theta}. \quad (2.37)$$

De (2.26) tenemos $\sum F_x = 0$ para la barra 1 es equivalente a

$$A_x - B \cos \theta = 0,$$

de donde tenemos

$$A_x = B \cos \theta, \quad (2.38)$$

¹²De ahora en adelante el subíndice en la suma indicará el punto respecto al cual se está haciendo el equilibrio al momento agular.

como B se conoce de (2.37) ahora tenemos A_x . No necesitamos determinar A_y por motivos veremos ahora a continuación.

Ahora nos concentramos en el cuerpo 3 cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 2.66. Se asume que entre el cuerpo 3 y 4 no hay

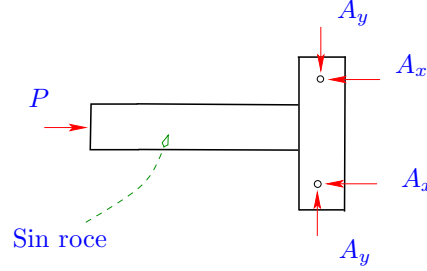


Figura 2.66: Ejemplo de cálculo de reacciones. Diagrama de cuerpo libre de 3.

roce, y debido a que la barra 1 y la barra inferior son simétricas tanto en forma como en relación a las fuerzas que se aplican, vemos entonces que no hay interacción entre 3 y 4, y por tanto las únicas fuerzas que se aplican sobre 3 vienen del cuerpo 1 y la fuerza de apriete que llamamos P . Sobre 3 tenemos A_x y A_y por acción y reacción, que por simetría actúan en el pasador superior e inferior de la misma forma.

De $\sum F_x = 0$ aplicada al cuerpo 3 nos da

$$P - 2A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{900 \cos \theta}{b \sin \theta - c \cos \theta}. \quad (2.39)$$

■

3. Para la Figura 2.67 determine la fuerza en E que se produce como función de P , no hay roce en todo el sistema y tampoco se considera el peso de las distintas componentes.

Datos: $a = 4$, $b = 7$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 2\frac{1}{2}$ y $f = 5$, las dimensiones están en pulgadas.

Solución: Una forma simple de resolver el problema es partiendo con el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 1, que se muestra en la Figura 2.68. En esa figura podemos ver la fuerza externa P , y las fuerzas de interacción en B y C . En C el cuerpo 1 está interactuando con la barra 2, pero la barra dos solo está bajo el efecto de dos fuerzas en los pasadores C y D , de modo que estas fuerzas en C y D son iguales y sus direcciones siguen la línea que va de C a D , luego la fuerza en C proveniente de la barra 2 actuando sobre el cuerpo 1 tiene una dirección conocida, pero su magnitud debe todavía calcularse.

En la Figura 2.68 tenemos la dirección de la fuerza C con ángulo $\theta = \arctan(d/e) = 51,34^\circ$. El cuerpo 3 está sometido a fuerzas en tres puntos,

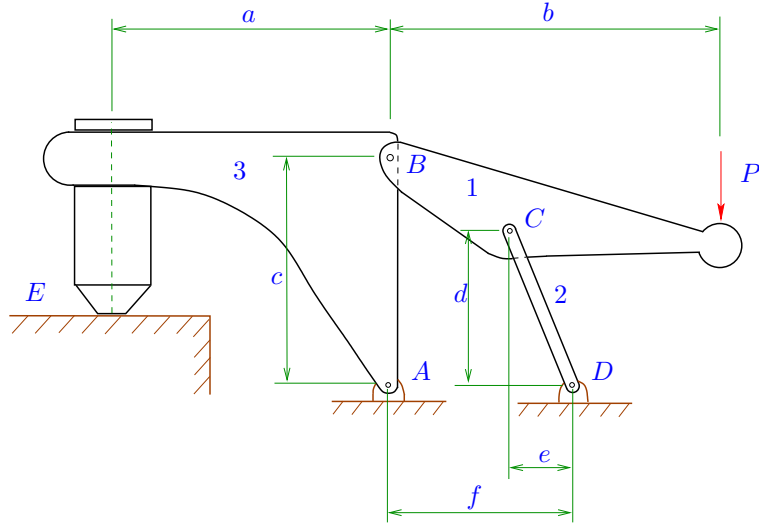


Figura 2.67: Ejemplo de cálculo de reacciones.

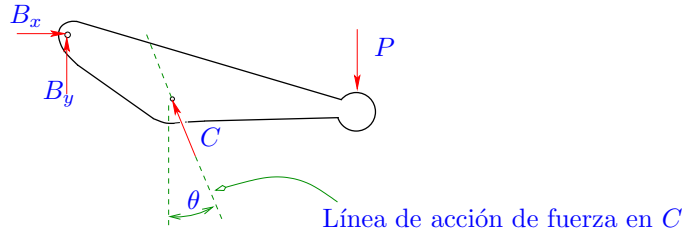


Figura 2.68: Ejemplo de cálculo de reacciones. Diagrama cuerpo libre 1.

en A , B y E , y por ese motivo la fuerza que se transmite a través del pasador en B tiene en general dos componentes que no se conocen.

Este nuevamente es un problema plano, luego tenemos solo tres ecuaciones de equilibrio para determinar B_x , B_y y C en la Figura 2.68, y por conveniencia partimos con (2.28), de modo que si $\vec{\rho}_{BC} = (f - e)\hat{i} - (c - d)\hat{j}$ tenemos

$$\sum_B M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -Pb\hat{k} + C(-\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \times \vec{\rho}_{BC} = \vec{0},$$

de donde podemos obtener C en función de P . Queda como ejercicio resolver la ecuación anterior.

Conociendo C ahora podemos obtener B_x y B_y de resolver (2.26), (2.27),

de donde tenemos

$$B_x = C \cos \theta, \quad B_y = P - C \sin \theta.$$

Conociendo ahora B_x y B_y ahora hacemos un diagrama de cuerpo libre de 3 tal como se muestra en la Figura 2.69. En el diagrama de cuerpo libre

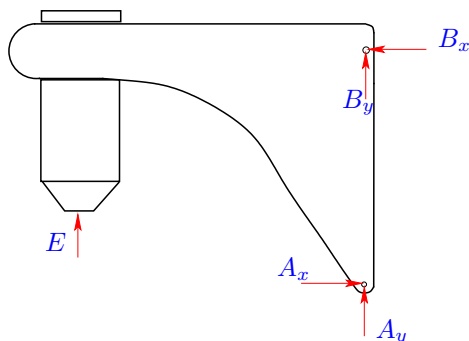


Figura 2.69: Ejemplo de cálculo de reacciones. Diagrama cuerpo libre 3.

de 3 tenemos la fuerza E (que es la que se quiere calcular), las fuerzas en B que ya se conocen, y las componentes de la fuerza en el pasador A , que denotamos como A_x y A_y .

Para obtener E podemos simplemente usar (2.28) haciendo equilibrio de momento respecto al punto A , en cuyo caso tenemos

$$\sum_A M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_x c = E a,$$

luego $E = B_x c / a$ y hemos resuelto el problema.

4. Para el mecanismo mostrado en la Figura 2.70 dibuje los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema. Desprecie el peso y sustituya la carga distribuida por su resultante.
5. En el elevador de automóviles de la Figura 2.71 los vehículos suben a la plataforma y después se alzan las ruedas traseras. Si la carga debido a estas es de 6kN, encuentre la fuerza en el cilindro hidráulico AB . Desprecie el peso de la plataforma. El miembro BCD es una palanca acodada a 90° articulada en C a la rampa.
6. El bastidor de la Figura 2.72 se usa para soportar cables de alta tensión (en C , F e I tenemos un peso W por los cables). ¿Qué valor tiene la fuerza axial en el elemento HJ ?

Datos: $b = 1\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $W = 1000\text{Kgf}$.

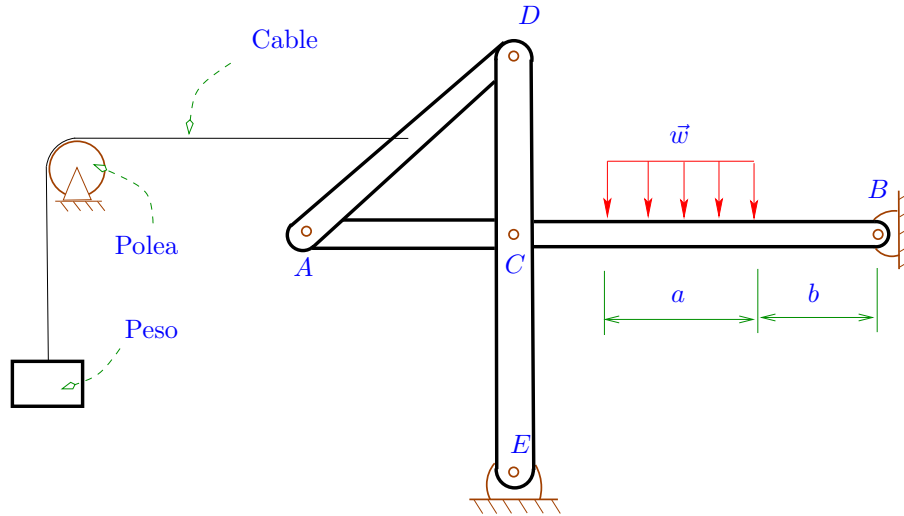


Figura 2.70: Ejemplo de cálculo de reacciones.

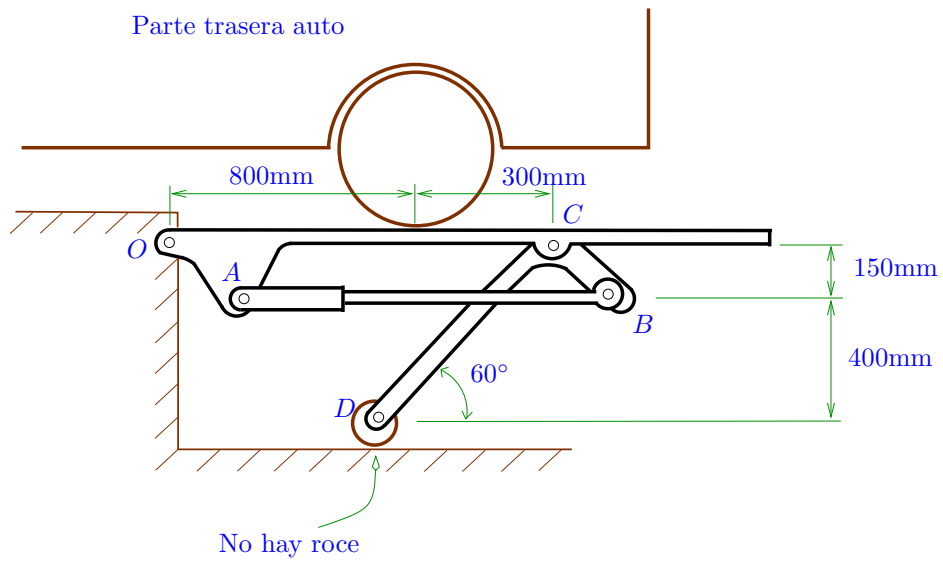


Figura 2.71: Rampa para auto.

7. Para el mecanismo mostrado en la Figura 2.73 determine las fuerzas sobre el elemento ABC . Solo considere la fuerza externa w_o y no el peso de las barras. El elemento DCG se conecta por medio de un pasador a una ranura en G (no hay roce). Las dimensiones están en metros y $w_o = 5\text{kN/m}$.

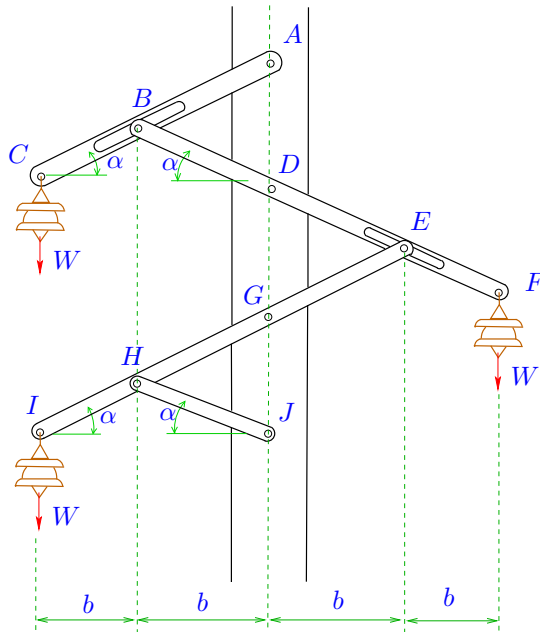


Figura 2.72: Bastidor.

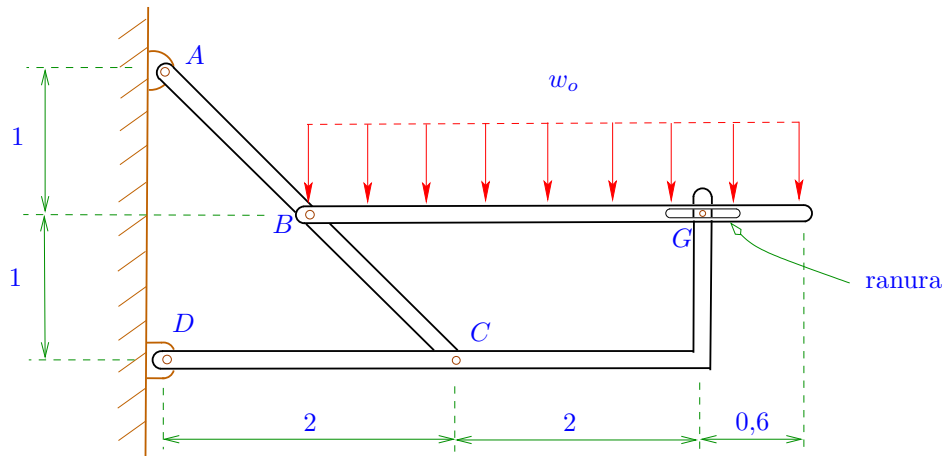


Figura 2.73: Mecanismo.

8. En la Figura 2.74 se tiene un mecanismo para elevar carga. La fuerza soportada es de $W = 10\text{kN}$. Asumiendo que las distintas barras y componentes de este montacarga tienen un peso despreciable, determine las

reacciones sobre el elemento CDE.

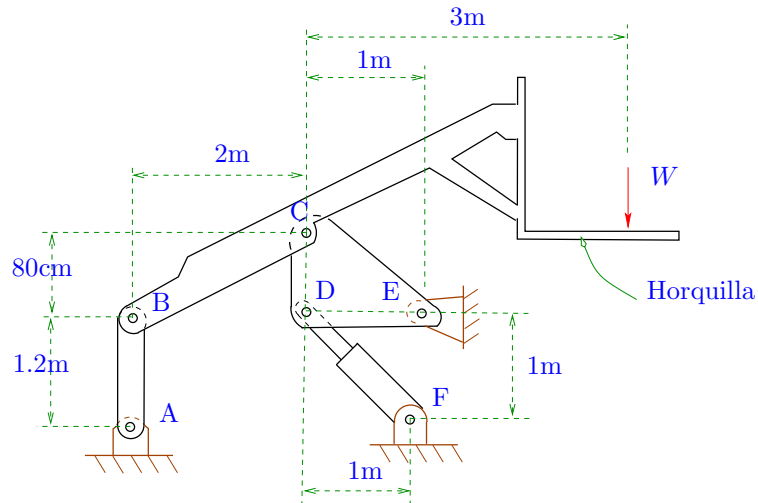


Figura 2.74: Mecanismo para elevar carga.

9. En la Figura 2.75 tenemos dos placas A , B , las cuales están conectadas por medio de un pasador en G . La placa A pesa 10kN y la placa B pesa 4kN .

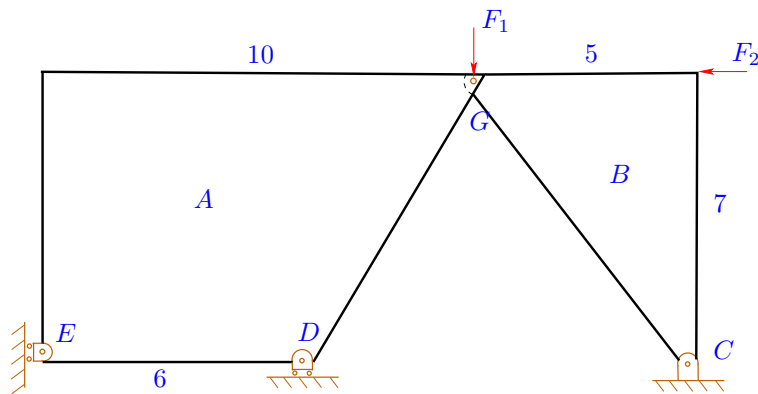


Figura 2.75: Dos placas unidas por un pasador.

Determine las reacciones en E , D , G y C . Las dimensiones están en metros y $F_1 = 20\text{kN}$, $F_2 = 10\text{kN}$.

10. En la Figura 2.76 se muestra una parte de una máquina llamada ‘destoconadora’ (usada para cortar partes de troncos pegados al suelo). Su peso es de 3000N y el centro de gravedad está ubicado en G . En la posición presentada el miembro CE está horizontal y los dientes de la sierra circular están a ras de suelo. Si la magnitud de la fuerza F ejercida por el disco de la sierra sobre el tronco es de 500N , determine la fuerza P sobre el cilindro hidráulico y la magnitud de la fuerza que soporta el pasador C . Todas las dimensiones están en milímetros. En la parte inferior derecha se presenta un detalle de la forma como actúa la fuerza F sobre el tronco.

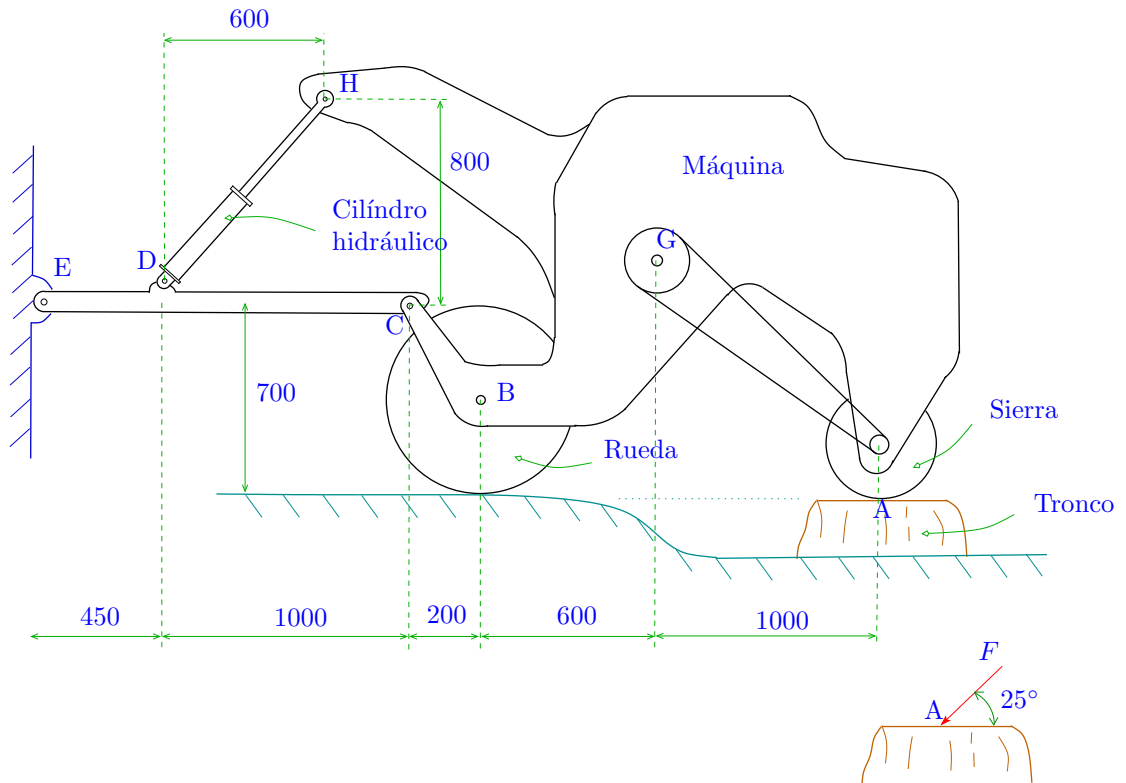


Figura 2.76: Máquina destoconadora.

Capítulo 3

Esfuerzo y deformación

3.1. Introducción

Sabemos que las fuerzas no solo pueden generar movimiento en un cuerpo sino que además pueden deformarlo. Este capítulo es el más importante de este curso, pues en él entregaremos los conceptos y supuestos básicos para modelar el fenómeno de deformación.

Si pensamos de forma detenida respecto de como podríamos modelar la deformación causada por fuerzas externas, quizás en un primer intento trabajaríamos con algún cuerpo de geometría simple, como por ejemplo una viga empotrada en un extremo y con una fuerza externa en el otro; luego podríamos, por ejemplo, estudiar la deflexión (el desplazamiento vertical de la viga) como función de la fuerza externa, y a partir de dichas observaciones experimentales proponer algún tipo de ley o relación entre ambas cantidades. Este fue el esquema seguido por mucho tiempo antes de los trabajos de Euler y de Cauchy.

Es claro que el método anterior solo serviría para problemas específicos, y nada nos podría decir para casos generales con cuerpos de geometrías arbitrarias y fuerzas generales aplicados sobre ellos. La teoría mostrada aquí es el producto de muchas investigaciones, respaldadas por diversos resultados experimentales, sin embargo como toda teoría siempre es posible extenderla o eventualmente reemplazarla por algo más general y ‘mejor’.

Este capítulo está basado en cuatro conceptos fundamentales:

- Las fuerzas externas.
- Las fuerzas internas (esfuerzos).
- Las deformaciones.
- Los desplazamientos.
- Las ecuaciones constitutivas.

Los desplazamientos son las cantidades que realmente se pueden medir de forma directa en un experimento, basta establecer una referencia y a partir de esta se puede determinar fácilmente los desplazamientos que sufren los puntos de un cuerpo bajo la acción de una fuerza externa. En general en sólidos solo podemos ver los desplazamientos en la superficie, en el interior solo a través de la teoría podemos determinar de forma indirecta dichos desplazamientos.

Un cuerpo puede rotar como cuerpo rígido o solo desplazarse sin cambio en su ‘forma’. En ambos casos podemos ver que la fuerza solo cambiaría la posición del cuerpo completo y/o solo lo rotaría. No nos interesaremos por ese tipo de problemas, en su lugar nos preocupará cuando un cuerpo bajo la acción de fuerzas externas sufre un cambio en su forma, en otras palabras cuando puntos en el mismo cuerpo sufren un cambio relativo de posición. Este cambio relativo nos servirá para introducir el concepto de deformación, que no es otra cosa que una medida de cuanto se distorsiona o cambia la forma de un cuerpo bajo la acción de fuerzas externas.

Se verá que las fuerzas externas no se relacionan de forma directa con las deformaciones. Es necesario primero definir algo que conoceremos como fuerzas internas (esfuerzos), los cuales se generan por la acción de las fuerzas externas, pero que están ahora relacionados de forma directa a la deformación en el interior de un cuerpo. El concepto de fuerza en realidad no se puede definir, solo podemos a partir de él proponer otras definiciones y teorías, pero las fuerzas propiamente tal no se pueden definir¹.

Todos los conceptos anteriores son generales, en el sentido que se pueden aplicar a cualquier tipo de material (en nuestro caso un sólido). Sin embargo es bien sabido que cuerpos de la misma forma inicial pero hechos de materiales distintos se comportan (deforman) de forma diferente. Esta diferencia la introduciremos por medio de las ‘ecuaciones constitutivas’, que serán relaciones entre los esfuerzos (fuerzas internas) y las deformaciones.

3.2. Fuerzas internas en vigas

Consideremos un cuerpo sometido a fuerzas externas y con algunos apoyos aplicados en su superficie tal como se muestra en la Figura 3.1. Este cuerpo está en equilibrio, es decir incluyendo las fuerzas de interacción por los apoyos tenemos que

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum_j \vec{M}_j = \vec{0}.$$

Imaginemos que el cuerpo sufre un corte como el que se muestra en la Figura 3.2, de modo que ahora tenemos dos cuerpos. Es necesario indicar ahora que este corte es un corte imaginario, es decir no es un corte real el que se está

¹En física no existen realmente definiciones de lo que son las fuerzas, solo de los efectos que estas generan. Ya hemos visto en el capítulo anterior que las fuerzas se usaban para, de forma simplificada, estudiar la interacción de un cuerpo con su entorno o con otros cuerpos en un mecanismo. En mecánica racional se dice que las fuerzas son un concepto ‘primitivo’.

haciendo, solo se está asumiendo que sucedería si de manera repentina el cuerpo fuese separado en dos partes.

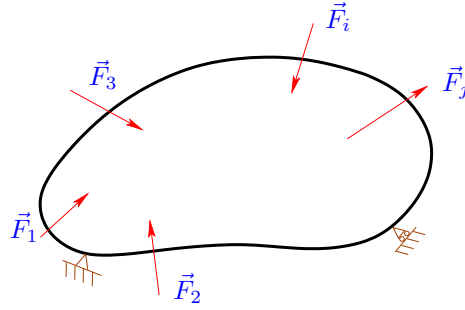


Figura 3.1: Cuerpo bajo la acción de fuerzas externas.

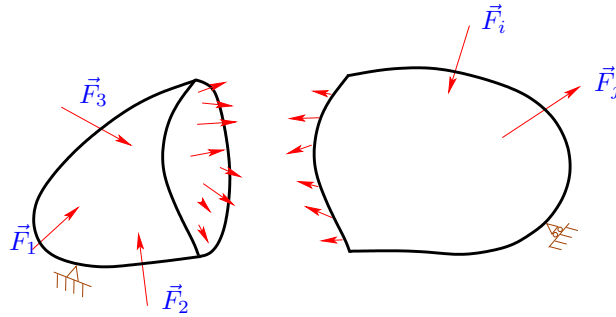


Figura 3.2: Cuerpo con corte imaginario y distribución de fuerzas internas en la zona de corte.

Ahora establecemos un principio que es la base de todos los capítulos posteriores:

Si un cuerpo, como el mostrado en la Figura 3.1, está sometido a fuerzas externas y está en equilibrio, cualquier parte de él que se extraiga por medio de un corte imaginario deberá también estar en equilibrio, es decir para cada parte por separado $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$, $\sum_j \vec{M}_j = \vec{0}$ también deben ser satisfechas.

Este es un principio, es decir no lo probaremos sino que simplemente lo asumiremos como cierto y a partir de esto (que se podría considerar como axioma) desarrollaremos nuestra teoría.

Si el principio es válido, luego es posible ver que si tomamos la parte del cuerpo en el lado derecho después del corte (Figura 3.2), solo con el efecto de las fuerzas externas que quedan sobre él (y de los soportes) no es posible en general que el cuerpo esté en equilibrio. Hace falta algo más, y esto extra se

asumirá es una distribución de fuerzas ‘internas’ que aparecen en la superficie de corte tal como se muestra en la misma Figura 3.2. En la superficie de corte opuesta podemos ver la misma distribución de fuerza interna pero con sentido opuesto, de modo tal que si estos dos cuerpos se unen nuevamente, tenemos que estas fuerzas se cancelan y recobraríamos el problema original mostrado en la Figura 3.1. Es natural pedir que las fuerzas internas sean igual pero opuestas en las superficies de corte imaginario opuestas, pues es una forma de que el ‘principio’ de acción y reacción se cumpla.

Lo que nos interesaría ahora es determinar este tipo de distribuciones de fuerzas internas, pues son ellas las que asociaremos no solo a la deformación sino que como veremos más adelante a la ‘falla’ que pueda sufrir un cuerpo bajo las fuerzas externas.

Partiremos con un tipo de problema sencillo y un modelo aproximado para dichas fuerzas. Considérese la Figura 3.3 en donde tenemos una viga, que asumiremos es larga en relación a cualquier dimensión en su sección. La viga está sometida a fuerzas externas y está sobre dos apoyos, que podemos asumir de rodillo y de pasador. Imaginemos que se hace un corte imaginario tal como lo

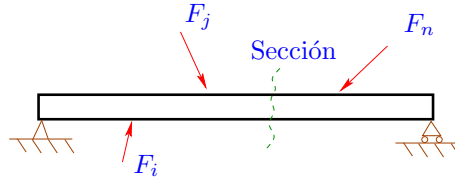


Figura 3.3: Viga bajo la acción de fuerzas externas.

muestra la línea punteada en la misma figura. Asumiremos para simplificar el problema que este corte imaginario es recto y vertical.

En la Figura 3.4 tenemos la parte de la viga que quedaría en el lado izquierdo después de realizar el corte imaginario. El modelo aproximado que asumiremos para las fuerzas internas consistirá en dos fuerzas puntuales H (horizontal) y V vertical (o de corte) más un momento puro interno que denotaremos simplemente como M .

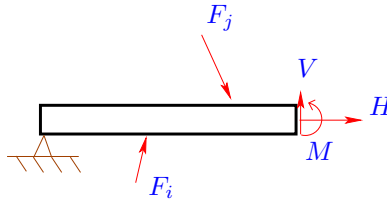


Figura 3.4: Modelo para fuerzas internas en vigas.

En general H , V y M dependerán de la posición en la que se hace el corte, y

en los ejemplos que se muestran a continuación veremos como determinar estas cantidades.

1. Para la viga de la Figura 3.5 que está sometida solo a una fuerza puntual P determine H , V y M y grafique en función de la posición a la que se hace el corte.

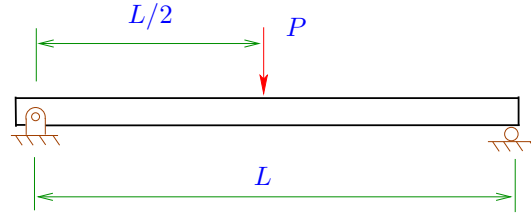


Figura 3.5: Ejemplo de cálculo para fuerzas internas en vigas.

En la Figura 3.6 tenemos un diagrama de cuerpo libre de la viga completa en donde el efecto de los apoyos (queda como ejercicio) se manifiesta como fuerzas puntuales de magnitud $P/2$.

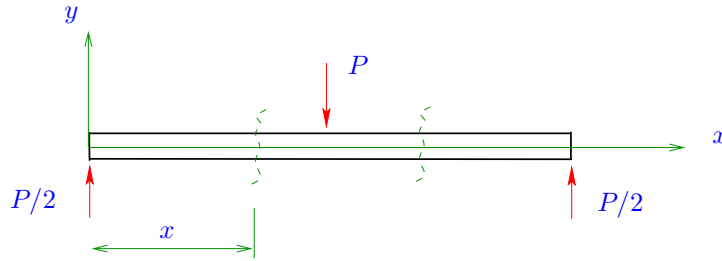


Figura 3.6: Ejemplo de cálculo para fuerzas internas en vigas. Cortes necesarios para calcular dichas fuerzas.

Vamos a escoger dos ‘zonas’ en las que se realizará el corte imaginario como se muestra con líneas segmentadas en la misma figura. La distancia a la que se realizará este corte será x .

En el primer caso asumiremos que $0 < x < L/2$ tal como se muestra en la Figura 3.7, como el corte imaginario se hace en ese intervalo, al dibujar el diagrama de cuerpo libre de este trozo de viga, solo incluimos la fuerza en el apoyo derecho $P/2$ y las cargas internas que aparecen allí dibujadas.

Siguiendo el principio, si la viga completa estaba en equilibrio, también el trozo mostrado en la Figura 3.7 debe estar en equilibrio, de modo que

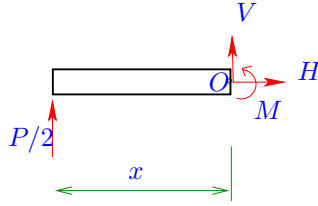


Figura 3.7: Ejemplo de cálculo para fuerzas internas en vigas. Primer corte.

para esa figura tenemos

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 0, \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{P}{2} \quad (3.1)$$

y

$$\sum_O M_z = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{2}x, \quad (3.2)$$

en donde en esta última ecuación el balance de momento se realiza respecto al punto O (como lo indica el subíndice en la suma) que se muestra en el lado derecho de la Figura 3.7.

Ahora procedemos a estudiar el caso en el que el corte se realiza $L/2 < x < L$. Es necesario hacer notar que el corte se realiza en un punto en ese intervalo, pero la viga se considera o dibuja desde el origen en el extremo izquierdo. En la Figura 3.8 tenemos una representación de la parte de la viga que queda si se hace un corte imaginario entre $L/2$ y L , podemos ver que ahora es necesario agregar al diagrama de cuerpo libre no solo la fuerza $P/2$ en el extremo izquierdo sino además la fuerza externa original P aplicada en $L/2$, junto con las cargas internas.

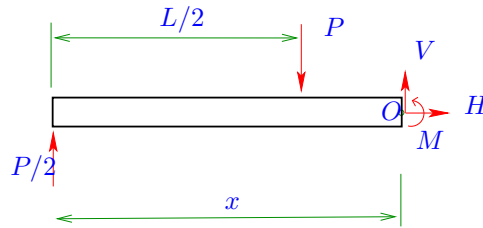


Figura 3.8: Ejemplo de cálculo para fuerzas internas en vigas. Segundo corte.

La parte de la viga mostrada en la Figura 3.8 debe también estar en

equilibrio si el principio es cierto, de modo que

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P}{2} + V - P = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2}, \quad (3.4)$$

y

$$\sum_O M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M + P \left(x - \frac{L}{2} \right) = \frac{P}{2} x \Rightarrow M = \frac{P}{2} (L - x). \quad (3.5)$$

En la Figura 3.9 tenemos representaciones esquemáticas de V como función de la distancia de corte x usando (3.1)₂ y (3.4), y de M como función de x de (3.2) y (3.5). Podemos observar en particular que $M(x \rightarrow 0) = 0$

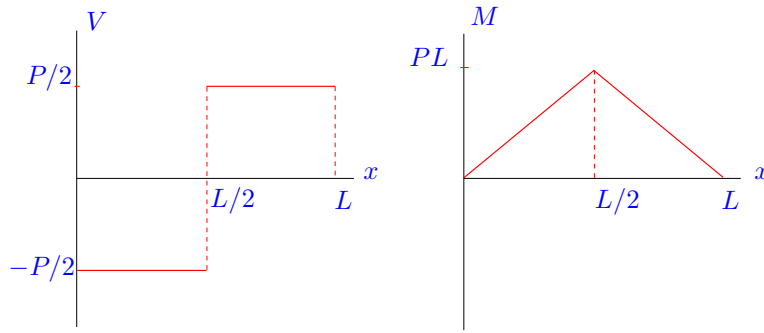


Figura 3.9: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Gráfico de V y M .

y que $M(x \rightarrow L) = 0$, lo que es correcto, pues en esos extremos tenemos soportes tipo pasador y tipo rodillo, los cuales no impiden el giro de la viga en esos extremos, por tanto no generan momento de reacción, luego el momento interno en esos puntos debe ser cero.

2. Para la viga mostrada en la Figura 3.10 determine y grafique las distribuciones de cargas internas. La viga está sosteniendo a un peso P en su extremo derecho.

En la Figura 3.11 tenemos un diagrama de cuerpo libre de la viga completa. En el punto A solo tendríamos una fuerza vertical, pues como no hay fuerza externa horizontal, entonces no se genera una reacción en esa dirección en ese soporte. Vamos a asumir que A es positiva hacia abajo tal como se muestra en esa figura. En el punto B se genera una reacción vertical y asumimos que es positiva hacia arriba.

La viga completa debe estar en equilibrio por lo que

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -A + B = P$$

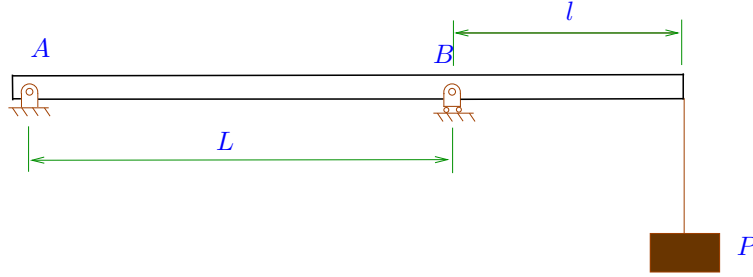


Figura 3.10: Ejemplo de fuerzas internas en vigas.

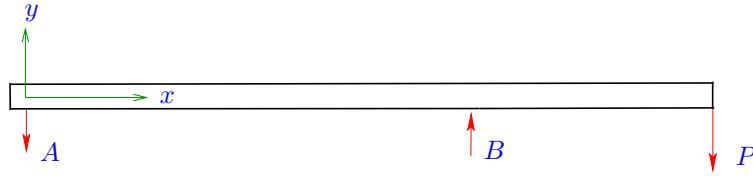


Figura 3.11: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Diagrama de cuerpo libre de la viga completa.

$$\sum_A M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad BL = P(L + l),$$

de donde tenemos que

$$A = \frac{Pl}{L}, \quad B = \frac{P(L + l)}{L}. \quad (3.6)$$

Por la forma como están siendo aplicadas las fuerzas externas vamos a considerar dos zonas para los cortes imaginarios, primero con cortes hechos para $0 < x < L$ y después para $L < x < L + l$.

En la Figura 3.12 tenemos un esquema de la porción de viga que queda (desde el extremo izquierdo) si el corte se hace $0 < x < L$. En ese caso las únicas fuerzas que aparecen son A y las cargas internas. Como no hay fuerza externa horizontal no dibujamos H en este esquema.

Nuevamente asumimos que esta porción de viga debe estar en equilibrio, de modo que tenemos

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V = A, \quad \sum_O M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -Ax. \quad (3.7)$$

En la Figura 3.13 tenemos ahora la parte que queda en la izquierda de la viga si se hace el corte entre $L < x < L + l$. En este caso debemos dibujar

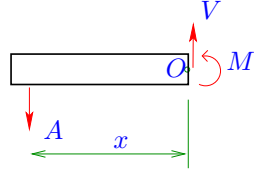


Figura 3.12: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Primer corte.

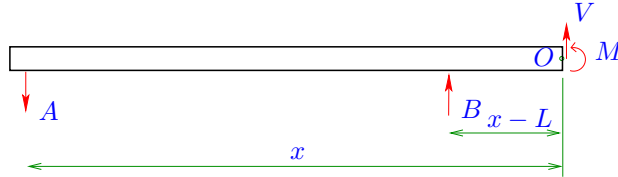


Figura 3.13: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Segundo corte.

no solo las fuerzas A y las cargas internas V , M sino además la fuerza B . Asumiendo ahora que esta parte de la viga que queda después del corte debe también estar en equilibrio tenemos

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = A - B, \quad \sum_{O} M_z = 0 \Rightarrow M = -Ax + B(x - L). \quad (3.8)$$

Usando (3.6) en (3.7) y (3.8) tenemos las funciones V y M cuyos gráficos se muestran en la Figura 3.14. En la figura del lado derecho en donde

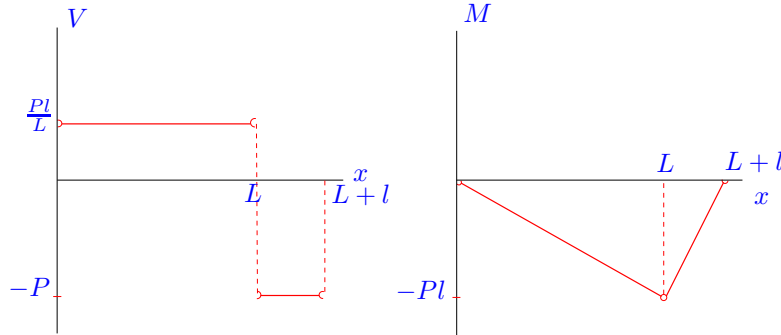


Figura 3.14: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Diagramas para V y M .

tenemos $M(x)$ podemos ver que M no es igual a cero en $x = L$ aunque tenemos ahí un soporte tipo rodillo. Esto es debido a que en ese punto no

estamos al final de la viga, es decir si bien no hay reacción del rodillo tipo momento, si tenemos material a los lados derecho e izquierdo de modo que el momento puede ser distinto de cero y se balancearía por ambos lados. En la misma figura podemos ver que $M = 0$ en $x = L+l$, lo que es correcto pues si bien en ese extremo tenemos un cable atado que transmite el peso P , no hay nada que genere (en el caso ideal) momento puro en ese punto.

3. La viga mostrada en la Figura 3.15 está sometida a una fuerza uniforme $w_o = \frac{P}{a}$ en su zona central. Determine las distribuciones de fuerzas internas.

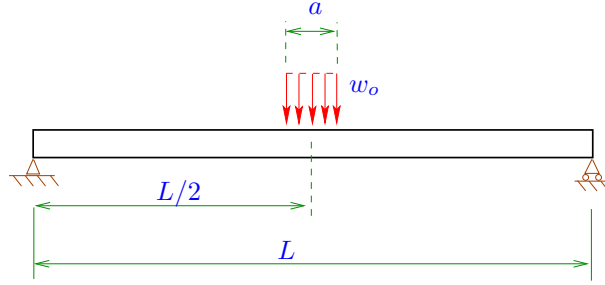


Figura 3.15: Ejemplo de fuerzas internas en vigas.

En la Figura 3.16 tenemos un diagrama de cuerpo libre de toda la viga, en los extremos izquierdo y derecho de la viga tenemos solo fuerzas puntuales verticales que llamamos A y B , no hay fuerza horizontal en el soporte del extremo izquierdo puesto que no hay fuerza horizontal externa sobre la viga. En este diagrama la fuerza w_o se reemplaza por su equivalente

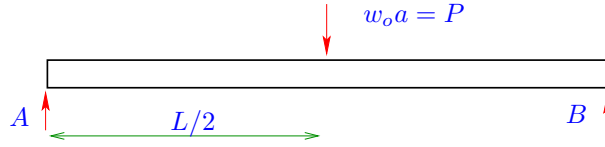


Figura 3.16: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Diagrama de cuerpo libre de la viga completa y fuerza equivalente.

puntual $w_o a = P$.

La viga completa debe estar en equilibrio de modo que

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A + B = w_o a, \quad \sum_A M_z = 0 \Rightarrow B = \frac{w_o a}{2}, \quad (3.9)$$

de modo que $A = \frac{w_o a}{2}$.

Para hacer los cálculos de $V(x)$ y $M(x)$ debemos considerar la Figura 3.15 no la Figura 3.16. Esto es debido a que los cortes imaginarios afectan la forma de la fuerza equivalente puntuales, de modo que hacer los cortes imaginarios desde la Figuras 3.15 y 3.16 no es en general equivalente.

De la Figura 3.15 vemos que es necesario considerar tres zonas de corte, desde el extremo izquierdo x entre $0 < x < \frac{1}{2}(L - a)$, $\frac{1}{2}(L - a) < x < \frac{1}{2}(L + a)$ y $\frac{1}{2}(L + a) < x < L$.

En la Figura 3.17 tenemos un esquema de la viga si el corte imaginario se hace en $0 < x < \frac{1}{2}(L - a)$. Debido a la forma del corte en el diagrama de

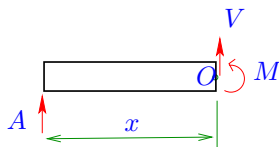


Figura 3.17: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Primer corte.

cuerpo libre solo aparecen la fuerza A y las cargas internas $V(x)$ y $M(x)$. Este trozo de viga debe estar en equilibrio de modo que

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{P}{2}, \quad \sum_o M_z = 0 \Rightarrow M = \frac{xP}{2}. \quad (3.10)$$

Si el corte imaginario se hace en la zona $\frac{1}{2}(L-a) < x < \frac{1}{2}(L+a)$, tenemos un diagrama de cuerpo libre como se muestra en la Figura 3.18. Podemos

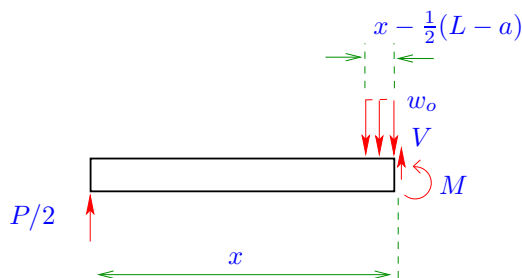


Figura 3.18: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Segundo corte.

comprobar que en este caso la fuerza uniforme w_o está siendo aplicada en una zona de longitud $x - \frac{1}{2}(L - a)$. Aparte de esta fuerza uniforme tenemos actuando a la fuerza A y a las cargas internas $V(x)$ y $M(x)$.

A partir de lo mostrado en la Figura 3.18 ahora podemos reemplazar a la fuerza uniforme w_o por una puntual equivalente. La puntual equivalente tendría magnitud $w_o [x - \frac{1}{2}(L - a)]$ y debería colocarse en la posición $\frac{1}{2} [x - \frac{1}{2}(L - a)]$ desde el punto O hacia la izquierda, tal como se muestra en la Figura 3.19.

Ahora podemos imponer la condición de que ese trozo de viga mostrado

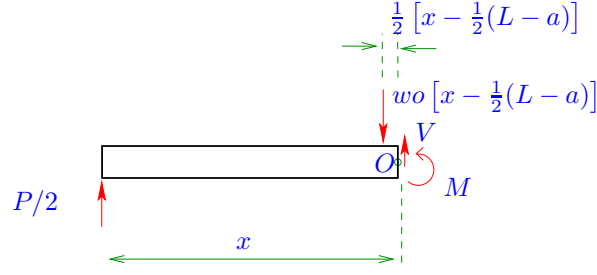


Figura 3.19: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Segundo corte y fuerza equivalente.

en la Figura 3.19 esté en equilibrio (con $A = P/2$) de modo que

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V &= -\frac{P}{2} + w_o \left[x - \frac{1}{2}(L-a) \right], \\ &= P \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{a} \left[x - \frac{1}{2}(L-a) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_o M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad M &= \frac{Px}{2} - w_o \left[x - \frac{1}{2}(L-a) \right] \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2}(L-a) \right], \\ &= \frac{Px}{2} - \frac{P}{2a} \left[x - \frac{1}{2}(L-a) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente si se hace el corte en la zona $\frac{1}{2}(L+a) < x < L$ tenemos un diagrama de cuerpo libre como el mostrado en la Figura 3.20, en donde en particular podemos apreciar el hecho que ahora si reemplazamos desde el inicio la fuerza distribuída w_o por una puntual P . Esto es debido a que

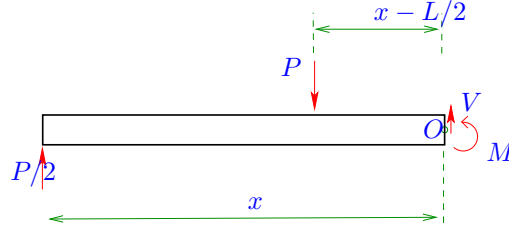


Figura 3.20: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Tercer corte.

ahora w_o está siendo aplicada en toda la zona a .

El trozo de viga debe estar en equilibrio de modo que

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}, \quad (3.13)$$

y

$$\sum_O M_z = 0 \Rightarrow M = \frac{Px}{2} - P\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2}(L - x). \quad (3.14)$$

De (3.10)₁, (3.11) y (3.13) vemos que el comportamiento de $V(x)$ es constante en el primer tramo, es lineal en el segundo y constante en el tercero. Es fácil probar también que es una función continua en $x = \frac{L-a}{2}$ y $x = \frac{L+a}{2}$, también es cero en $x = \frac{L}{2}$. En la Figura 3.21 (lazo izquierdo) tenemos un gráfico aproximado del comportamiento de esta función. En

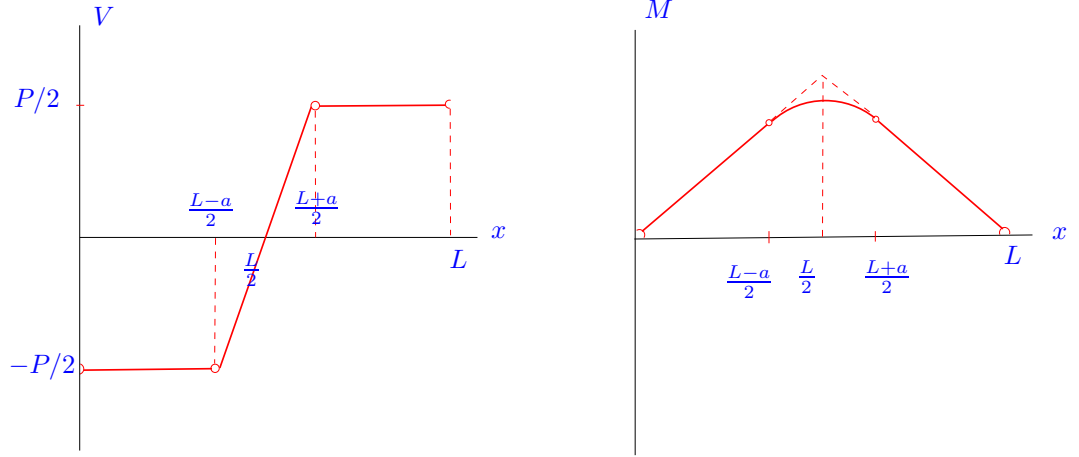


Figura 3.21: Ejemplo de fuerzas internas en vigas. Diagramas para V y M .

la misma Figura (lado derecho) tenemos el comportamiento de $M(x)$. De (3.10)₂, (3.12) y (3.14) vemos que $M(x)$ es una función lineal en el primer tramo, es cuadrática en el segundo y lineal nuevamente en el tercer tramo, siendo también continua en $x = \frac{L-a}{2}$ y $x = \frac{L+a}{2}$ (estando su máximo además en $x = \frac{L}{2}$).

Una última observación para este problema, podemos ver que si $a \rightarrow 0$ el producto aw_o permanece constante e igual a P , luego en este caso el problema mostrado en la Figura 3.15 se transforma en el mostrado en la Figura 3.5, en tanto que los resultados mostrados en la Figura 3.21 se transformarían en los mostrados en la Figura 3.9.

4. En la Figura 3.22 tenemos una viga sometida a dos fuerzas iguales pero opuestas de magnitud P ubicadas a una distancia a una de otra. Determine $V(x)$ y $M(x)$ para este problema.
5. En la Figura 3.23 tenemos una viga sometida a varias fuerzas. Una fuerza distribuida constante de magnitud $w_o = 30\text{N/m}$, una fuerza distribuida

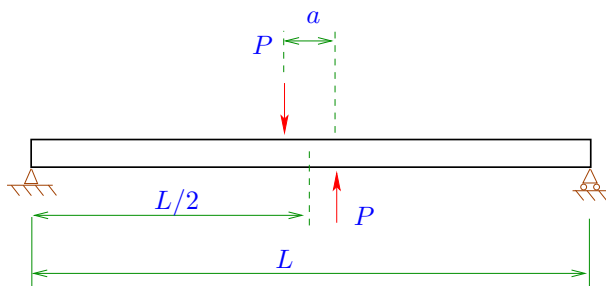


Figura 3.22: Ejemplo de fuerzas internas en vigas.

lineal en el extremo izquierdo y una puntual $F = 10\text{N}$. Calcule $V(x)$ y $M(x)$.

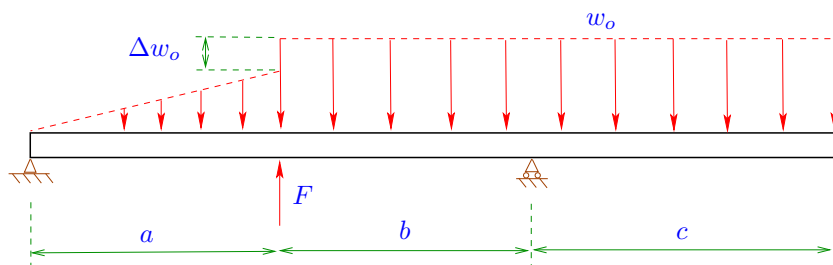


Figura 3.23: Ejemplo de fuerzas internas en vigas.

Otros datos: $a = 4\text{m}$, $b = 6\text{m}$, $c = 4\text{m}$ y $\Delta w_o = 10\text{N/m}$.

6. Para la viga mostrada en la Figura 3.24 determine las posiciones y los valores máximos de $V(x)$ y $M(x)$.

Datos: $F = 10\text{T}$, $a = 7\text{m}$, $b = 4\text{m}$, $c = 4\text{m}$ $w_o = 1\text{T/m}$. Las fuerzas están en toneladas-fuerza T.

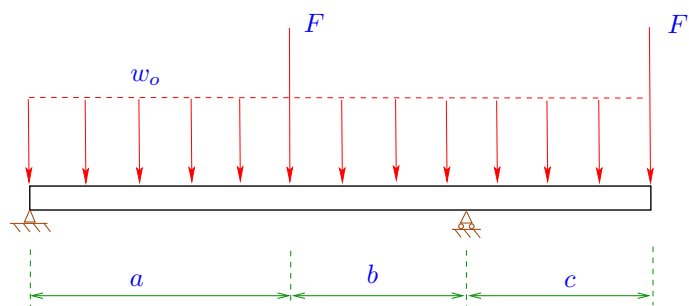


Figura 3.24: Ejemplo de fuerzas internas en vigas.

3.2.1. Fuerzas internas en vigas para vigas sometidas a cargas distribuidas

En el problema mostrado en la Figure 3.15 habíamos considerado un ejemplo de problema en donde teníamos una carga uniforme actuando en una parte de una viga. Ahora veremos un método más general para obtener las distribuciones de cargas internas $V(x)$ y $M(x)$, para problemas en los que tenemos fuerzas distribuidas, para ello consideremos la viga mostrada en la Figura 3.25 en donde tenemos algún tipo de fuerza distribuida $w(x)$ actuando sobre ella ².

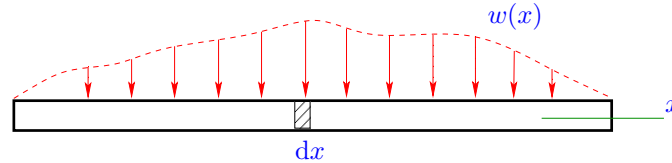


Figura 3.25: Viga sometida a una carga distribuida.

De la viga extraemos un trozo diferencial de largo dx , el cual es mostrado de forma ampliada en la Figura 3.26. El trozo diferencial se ha extraído mediante

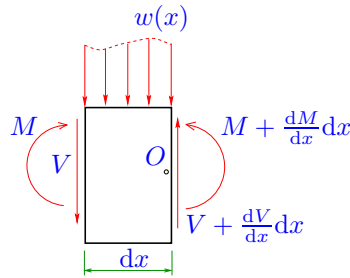


Figura 3.26: Elemento de longitud diferencial de una viga sometida a una carga distribuida.

dos cortes imaginarios a los lados derecho e izquierdo, de modo que debemos dibujar cargas internas a ambos lados del diferencial. En el lado derecho se dibuja la fuerza de corte y el momento interno con los sentidos usuales, en tanto por medio del uso del ‘principio’ de acción y reacción para la viga (ver la Figura 3.27) en el corte del lado izquierdo debemos dibujarlas en el sentido contrario.

Para la Figura 3.26 tenemos el trozo diferencial bajo la acción de $w(x)$, en el corte del lado izquierdo tenemos V y M , en tanto en el lado derecho por

²Nuevamente hacemos énfasis en que para hacer el cálculo de las cargas internas no se debe reemplazar las fuerzas distribuidas por las puntuales equivalentes. El reemplazo solo se puede hacer para facilitar el cálculo de las reacciones en los soportes.

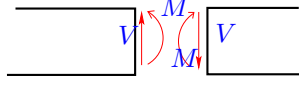


Figura 3.27: Acción y reacción en las cargas internas para una viga.

medio de una aproximación con series de Taylor³ (al primer término) tenemos actuando $V + \frac{dV}{dx}dx$ y $M + \frac{dM}{dx}dx$.

Es razonable asumir que si tanto la viga completa como partes que se extraigan de ellas están en equilibrio, entonces también lo debería estar el trozo diferencial de la Figura 3.26, luego se debe cumplir⁴

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \left(V + \frac{dV}{dx}dx \right) - V - w(x)dx = 0,$$

de donde es fácil obtener

$$\frac{dV}{dx} = w(x). \quad (3.15)$$

Por otra parte también debe cumplirse⁵

$$\sum_O M_z = 0 \Rightarrow -M + \left(M + \frac{dM}{dx}dx \right) + Vdx + w(x)dx \frac{dx}{2} = 0,$$

de donde si se desprecian términos de orden dx^2 se llega a

$$\frac{dM}{dx} = -V(x). \quad (3.16)$$

Las ecuaciones diferenciales (3.15), (3.16) nos permiten obtener $V(x)$ y $M(x)$ conociendo $w(x)$. Para una solución completa del problema son necesarias condiciones de borde, las cuales se deben discutir para cada problema en particular.

En la Figura 3.28 tenemos un ejemplo en el que haremos uso de (3.15) y (3.16). Para la viga completa de $\sum F_y = 0$ y $\sum M_z = 0$ se obtiene $A = B = \frac{w_o L}{2}$.

³En diversas secciones de este texto se hará uso de aproximaciones con series de Taylor para obtener expresiones aproximadas para las diversas variables en un problema. Por ejemplo en la Figura 3.26 si en el lado izquierdo el valor de V es $V(x)$, es decir evaluado en x , en el lado derecho tendríamos que V debería calcularse como $V(x + dx)$, pero

$$V(x + dx) = V(x) + \frac{dV}{dx}dx + \dots$$

luego se obtiene la siguiente aproximación $V(x + dx) \approx V(x) + \frac{dV}{dx}dx$.

⁴La fuerza distribuida w actuando en el trozo diferencial causaría una fuerza total de $w(x)dx$, resultado aproximado que es válido si el trozo es muy corto.

⁵El momento causado por la distribución w en el trozo de viga respecto al punto O en la Figura 3.26 se puede aproximar como $w(x)dx \frac{dx}{2}$, puesto que la fuerza total se aproximó como $w(x)dx$ y se puede asumir también como aproximación, que esta fuerza total es aplicada en el centro del trozo diferencial, a una distancia $\frac{dx}{2}$ del punto O .

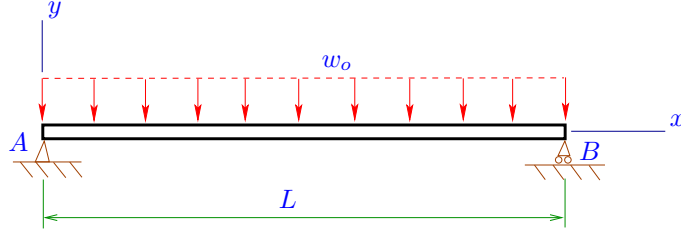


Figura 3.28: Ejemplo de cálculo de cargas internas en el caso de vigas sometidas a fuerzas distribuídas.

Con $w(x) = w_o$ de (3.15) integrando se obtiene $V(x) = w_o x + c_o$ donde c_o es una constante. Con la ayuda de la Figura 3.27 es posible ver que $V(x \rightarrow 0) = -A$, luego de esta condición podemos obtener c_o , de donde se tiene

$$V(x) = w_o \left(x - \frac{L}{2} \right). \quad (3.17)$$

Con la expresión anterior para $V(x)$ resolviendo (3.16) se llega a $M(x) = -\left(\frac{w_o x^2}{2} - \frac{w_o Lx}{2} + c_1\right)$, donde c_1 es otra constante. Nuevamente usando como ayuda la Figura 3.27 podemos ver que debido a que en la izquierda tenemos un soporte tipo pasador, se cumple que $M(x \rightarrow 0) = 0$, puesto que en un soporte de este tipo no hay restricción al ‘giro’, es decir no hay momento de reacción. Usando esta condición podemos obtener $c_1 = 0$, con lo que

$$M(x) = \frac{w_o x}{2}(L - x). \quad (3.18)$$

Es fácil probar que $M(x \rightarrow L) = 0$, lo que está correcto puesto que en el extremo derecho de la viga hay un soporte tipo rodillo, el cual tampoco genera esfuerzo de reacción, o sea ahí el momento debe ser igual a cero, tal como lo indica la evaluación de la expresión (3.18).

En la Figura 3.29 tenemos gráficos para $V(x)$ y $M(x)$ de (3.17) y (3.18).

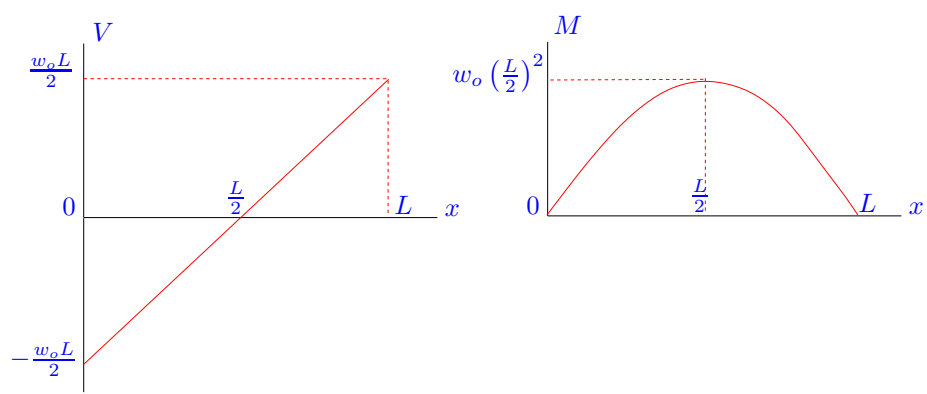


Figura 3.29: Ejemplo de cálculo de cargas internas en el caso de vigas sometidas a fuerzas distribuidas. Gráficos para V y M .

3.2.2. Ejemplos y ejercicios

Ejemplos

1. En la Figura 3.30 tenemos un sistema con tres barras unidas por pasadores en B , C , D , y que están sometidas a una fuerza P en C . En los puntos A y B tenemos soportes tipo pasador y rodillo, respectivamente. Determine la distribución para $V(x)$ y $M(x)$ en la barra AB .

Datos: $L = 3\text{m}$, $\overline{BC} = l = 1\text{m}$, $\theta = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 1000\text{N}$.

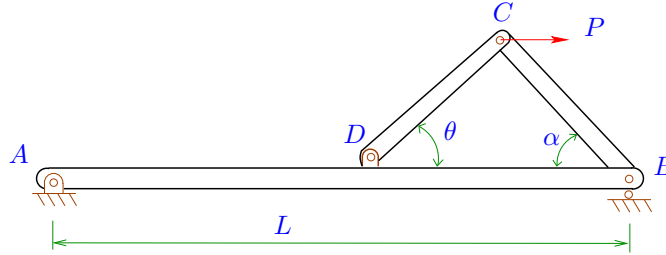


Figura 3.30: Ejemplo de cálculo de cargas internas.

Antes de iniciar el cálculo con los cortes imaginarios, es necesario determinar las fuerzas de reacción e interacción entre las barras. Para ello hacemos diagramas de cuerpo libre de todas las barras y del pasador en C , tal como se muestra en la Figura 3.31.

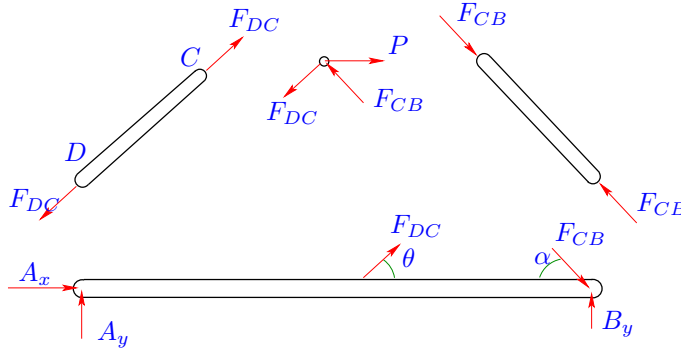


Figura 3.31: Ejemplo de cálculo de cargas internas. Diagramas de cuerpo libre.

Se asume que P actúa directamente en el pasador en C . Las barras CD y BC estarían sometidas solo a fuerzas en D , C y B , C , respectivamente, de modo que estamos en presencia de cuerpos sometidos solo a dos fuerzas iguales pero opuestas en la dirección de las líneas que unen los puntos

CD y BC , respectivamente. Estas fuerzas se denotan como F_{DC} y F_{CB} , respectivamente.

El pasador en C recibe la fuerza P y también las fuerzas de reacción F_{DC} y F_{CB} .

Finalmente la barra AB está sometida a las fuerzas F_{DC} y F_{CB} , y a las reacciones en A y B .

Haciendo equilibrio de fuerzas en el pasador C tenemos

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow P - F_{CB} \cos \alpha - F_{DC} \cos \theta = 0, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{CB} \sin \alpha - F_{DC} \sin \theta = 0.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación tenemos que $F_{CB} = F_{DC} \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$ de modo que usando la primera ecuación se llega a

$$F_{DC} = 896,575\text{N} \quad F_{CB} = 732,05\text{N}. \quad (3.19)$$

Haciendo ahora equilibrio en la barra AB se tiene

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x = F_{DC} \cos \theta + F_{CB} \cos \alpha = -P = -1000\text{N}, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y = -F_{DC} \sin \theta + F_{CB} \sin \alpha = 0,\end{aligned}$$

y

$$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow 3B_y = 3 \sin \alpha F_{CB} - 1,633975 \sin \theta F_{DC},$$

de donde tenemos

$$A_x = -1000\text{N} \quad A_y = -288,6745\text{N}. \quad (3.20)$$

Con (3.19) y (3.20) ahora podemos proceder a realizar los cortes imaginarios en AB , para ellos vemos el esquema de esta barra mostrado en la Figura 3.31, de donde vemos que necesitamos estudiar dos zonas para los cortes, zona AD , zona DB .

Si el corte se hace en la zona AD , donde $0 < x < 1,633975\text{m}$ se tiene un diagrama de cuerpo libre como el mostrado en la Figura 3.32. Luego

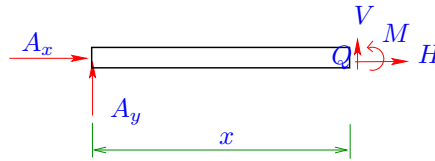


Figura 3.32: Ejemplo de cálculo de cargas internas. Primer tramo.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = -A_x = 1000\text{N}, \quad (3.21)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -A_y = 288,6745\text{N}, \quad (3.22)$$

$$\sum_Q M_z = 0 \Rightarrow M = A_y x = 288,6745x\text{Nm}. \quad (3.23)$$

En el segundo tramo DB donde $1,633975 < x < 3$ tenemos un diagrama como el mostrado en la Figura 3.33. Se tiene luego

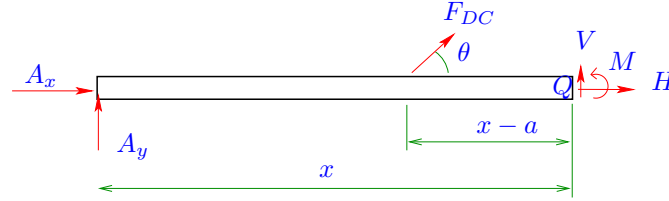


Figura 3.33: Ejemplo de cálculo de cargas internas. Segundo tramo.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = -F_{DC} \cos \theta - A_x = 366,02573\text{N} = F_{CB} \cos \beta, \quad (3.24)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -A_y - F_{DC} \sin \theta = 2 - 375,2997\text{N}, \quad (3.25)$$

$$\sum_Q M_z = 0 \Rightarrow M = A_y x + F_{DC} \cos \theta (x - a), \quad (3.26)$$

con $a = 1,633975\text{m}$.

Ejercicios

1. Determine las expresiones para $V(x)$ y $M(x)$ para la viga de la Figura 3.34.

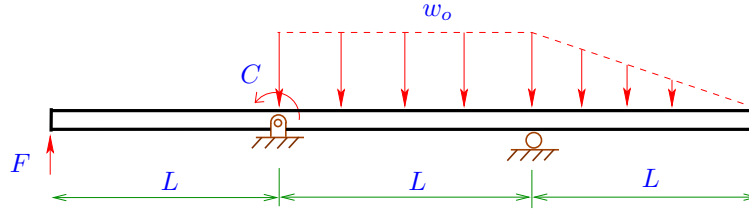


Figura 3.34: Viga.

2. Para la viga mostrada en la Figura 3.35 calcular las cargas internas y expresarlas en términos de s que es la distancia a lo largo de toda la viga.

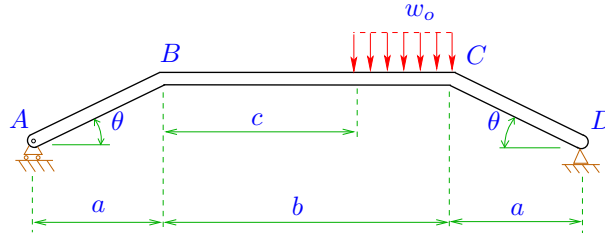


Figura 3.35: Viga bajo el efecto de fuerza uniforme.

Datos: $w_o = 1000\text{N/m}$, $a = 1\text{m}$, $b = 3\text{m}$, $c = 2\text{m}$, $\theta = 30^\circ$.

3. En la Figura 3.36 tenemos dos vigas AB y CD las cuales tienen un peso de 700kgf y 600kgf , respectivamente. Determine y dibuje los diagramas para las cargas internas en la viga CD . Se tiene que $W = 1000\text{kgf}$. La masa de las vigas está uniformemente distribuída. Las longitudes están en metros.

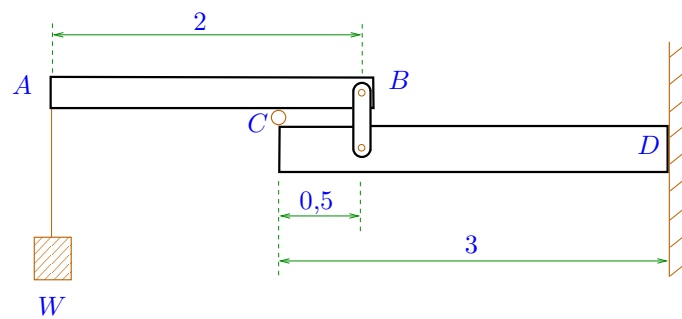


Figura 3.36: Vigas.

3.3. Esfuerzos

El concepto de fuerzas o cargas internas ahora lo generalizaremos al caso de cuerpos tridimensionales no solo para vigas como en la sección anterior. En este contexto aparece el concepto del ‘esfuerzos’, que han sido mencionados en ocasiones anteriores. Considérese el esquema mostrado en la Figura 3.37 en donde tenemos un cuerpo de alguna forma arbitraria sometido a ciertas fuerzas externas y atravesado por un plano que nos servirá para hacer un corte imaginario.

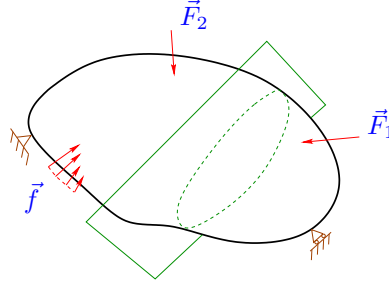


Figura 3.37: Cuerpo bajo cargas externas y con un plano de corte imaginario.

Cualquier parte que se obtenga del cuerpo a partir de ese corte imaginario debe estar también en equilibrio si el cuerpo original lo estaba, luego si consideramos la parte izquierda del cuerpo que queda después del corte, tendríamos algo como lo mostrado en la Figura 3.38. En la superficie de corte mostrada en

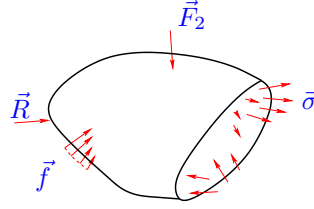


Figura 3.38: Cuerpo con un corte imaginario.

dicha figura se debe generar algún tipo de distribución de fuerzas internas, de modo tal que esta porción de cuerpo pueda estar en equilibrio. Esta distribución se puede asumir en un caso general como una densidad de fuerza por unidad de área $\vec{\sigma}$. A este vector lo llamaremos el vector de esfuerzos⁶, y en algunas ocasiones también se denota como \vec{f} o \vec{t} , en este texto usaremos esta última notación en algunas secciones. Las unidades de $\vec{\sigma}$ en el sistema internacional es el Pascal (Pa), o sea N/m².

⁶En algunos textos es llamado también el vector de tensiones.

En la Figura 3.38 podemos notar que $\vec{\sigma}$ en general es variable (su magnitud y dirección) a lo largo y ancho de la superficie de corte.

Ahora en las secciones siguientes vamos clasificar al vector esfuerzos en dos tipos, dependiendo de la forma que este actúe respecto a la superficie de corte imaginario.

3.3.1. Esfuerzos axial y de corte

Un tipo de vector esfuerzo muy importante es el que se produce, por ejemplo, en un cilindro o barra sometida a una fuerza axial, tal como se muestra en la Figura 3.39. En dicha figura tenemos en este caso un cilindro de área transversal

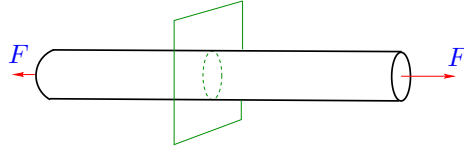


Figura 3.39: Barra bajo carga axial.

A sometido a una fuerza axial F . Un plano de corte imaginario se muestra en la misma figura, y en particular asumimos que dicho plano es perpendicular a la dirección axial que define el cilindro.

En la Figura 3.40 tenemos la porción izquierda del cilindro que queda después de hacer el corte imaginario. En este esquema vemos esta parte del cilindro bajo

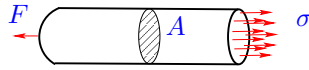


Figura 3.40: Barra bajo carga axial con corte imaginario.

el efecto de F (en el lado izquierdo) y de una distribución $\vec{\sigma}$ en la superficie de corte.

Asumamos ahora que $\vec{\sigma}$ es aproximadamente uniforme en la sección y que además su dirección en todas partes es axial, luego en vez de hablar de $\vec{\sigma}$ solo necesitamos hablar de su magnitud σ .

Como la porción de cilindro mostrada en la Figura 3.40 debe estar en equilibrio, la suma de fuerzas en el sentido axial debe ser cero, y como σ es una distribución uniforme de fuerzas por unidad de área se tiene que

$$F = A\sigma$$

de donde tenemos que

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (3.27)$$

A este tipo de vector esfuerzo, que tiene una dirección normal a la superficie de corte imaginario, se le denomina *esfuerzo axial*, y tenemos la siguiente clasificación

Si $\sigma > 0$ se dice que se está en tracción,
 Si $\sigma < 0$ se dice que se está en compresión.

Veamos ahora otro tipo de vector de esfuerzo, para ello consideremos la Figura 3.41 en donde tenemos un esquema de tres placas planas pegadas con áreas de contacto A . Cada placa tiene un numero, 1, 2 y 3. Imaginemos que

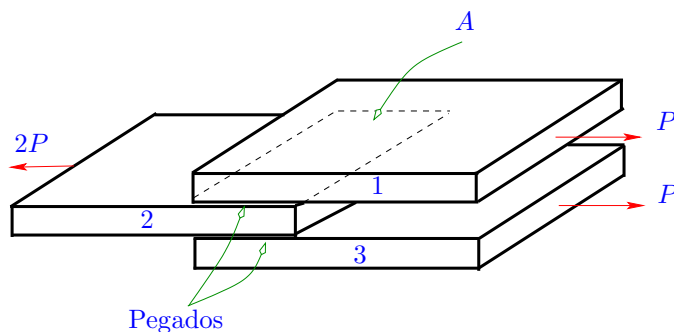


Figura 3.41: Tres placas pegadas bajo fuerzas externas.

separamos la placa 2 de las otras.

El sistema original estaba en equilibrio, como podemos apreciar del balance de fuerzas en el sentido horizontal, luego al extraer la placa 2, esta también debe estar en equilibrio, y para ello en las superficies de corte imaginario (las superficies de contacto con 1 y 3) asumimos se genera una distribución de vector esfuerzo, tal como se muestra en la Figura 3.42. De manera adicional vamos a

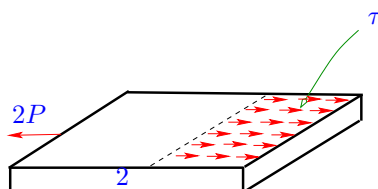


Figura 3.42: Una de las placas bajo cargas de corte.

asumir que dicha distribución de vector esfuerzo es horizontal y uniforme (en su magnitud y dirección) en la superficie de corte imaginario.

De la Figura 3.42 podemos ver que para que la placa 2 esté en equilibrio la distribución de esfuerzo debe ser tangencial a la superficie de corte. A este

tipo de vector de esfuerzo lo denotamos como τ y lo denominaremos *esfuerzo de corte*.

Del equilibrio de fuerzas en el sentido horizontal de la Figura 3.42 tenemos que

$$2P = 2A\tau,$$

de modo que

$$\tau = \frac{P}{A}. \quad (3.28)$$

Podemos ver de (3.27) y (3.28) que si bien las expresiones para σ y τ son muy similares, la naturaleza de estos esfuerzos es bastante distinta, por la forma como estos actúan tal como se muestra en las Figuras 3.40 y 3.42.

3.3.2. Principio de Saint Venant

Para la distribución de esfuerzos mostrada en la Figura 3.40 asumimos que σ era aproximadamente uniforme en la superficie de corte imaginario del cilindro. Vamos ahora a intentar estudiar ese supuesto particular en más detalle, y para ello consideremos una placa plana sometida a fuerzas puntuales en sus extremos de magnitud F como se muestra en la Figura 3.43.

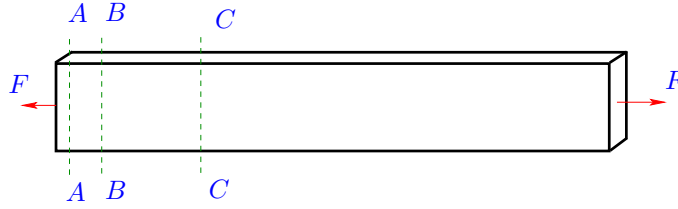


Figura 3.43: Placa bajo tracción y tres zonas de corte imaginario.

Imaginemos ahora que proponemos tres superficies de corte imaginario $A-A$, $B-B$ y $C-C$ como se muestran en la misma Figura 3.43, y que dichas superficies de corte se asumen a una distancia cada vez mayor del extremo izquierdo de la placa.

La placa original está en equilibrio, de modo que cualquier parte de ella que se extraiga con alguno de los cortes imaginarios mencionados anteriormente, debe también estar en equilibrio, y si consideramos la porción que queda en el lado izquierdo, tenemos tres posibilidades como se muestra en la Figura 3.44.

Si el corte $A-A$ se hace muy cerca del borde de la placa, es razonable asumir que en dicho caso la distribución de σ no va a ser uniforme, sino más bien probablemente se concentrará en la zona central, de modo de ser capaz de contrarrestar el efecto local de la fuerza puntual F .

Sin embargo para un corte más lejano de F , como es el corte $B-B$, probablemente la distribución para σ sea más menos uniforme. Finalmente, en una superficie ‘suficientemente’ alejada de F como es la superficie de corte $C-C$,

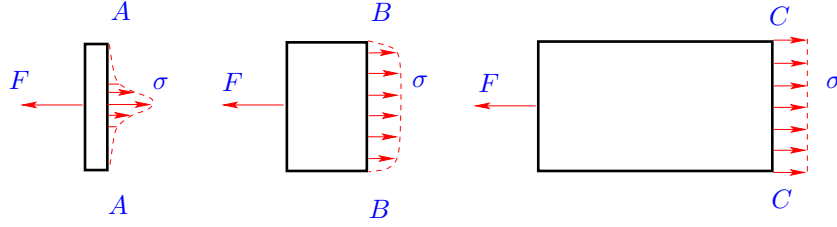


Figura 3.44: Placa bajo tracción y tres zonas de corte imaginario.

es razonable asumir que σ es prácticamente uniforme en la manera como actúa en dicha superficie.

El principio que permite realizar los supuestos anteriores es llamado ‘el principio de Saint-Venant’, y la base de este (que no estudiaremos en detalle aquí) es que en el interior de un cuerpo sometido, por ejemplo, a una fuerza puntual F , ‘lejos’ de la zona de aplicación de la fuerza, el cuerpo sentiría lo mismo si se aplicara una fuerza equivalente uniforme.

3.3.3. Esfuerzos caso general

En (3.27) y (3.28) hemos clasificado los esfuerzos en dos tipos, basandonos en problemas sencillos; ahora retomaremos el tema desde un punto de vista más general, y para ellos nuevamente consideramos un cuerpo en equilibrio sometido a un cierto número de fuerzas externas, tal como se muestra en la Figura 3.45.

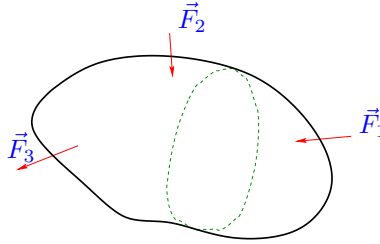


Figura 3.45: Cuerpo bajo cargas externas y con un plano ($y - z$) de corte imaginario.

Considerémos un corte imaginario en el plano $y - z$, tal como se muestra en la Figura 3.46. Aquí tenemos nuevamente una distribución de vector esfuerzo, que ahora denotamos como \vec{t} .

Tomemos un diferencial de área (en el plano $y - z$) y estudiemos la forma del vector esfuerzos para ese pequeño diferencial. Para ello observemos la Figura 3.47 en donde tenemos una vista ampliada de este diferencial. Como la superficie del diferencial es muy pequeña, solo basta estudiar \vec{t} en un punto del mismo.

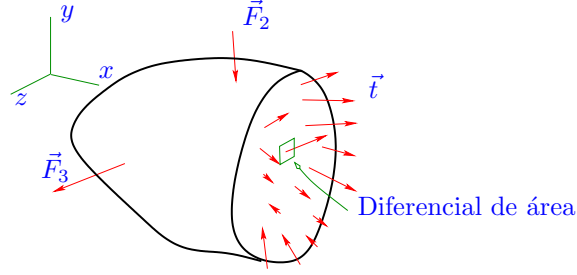


Figura 3.46: Cuerpo bajo cargas externas y con un plano $(y - z)$ de corte imaginario. Distribución de fuerzas internas en la superficie de corte.

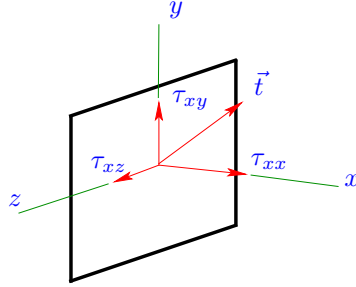


Figura 3.47: Fuerzas internas para un diferencial de área en un corte imaginario.

Para el sistema de coordenadas de la figura podemos ver que \vec{t} va a tener tres componentes (que aparecen dibujadas allí) que denotamos como:

- τ_{xx} : Componente de \vec{t} en la dirección x ,
- τ_{xy} : Componente de \vec{t} en la dirección y ,
- τ_{xz} : Componente de \vec{t} en la dirección z .

Podemos ver que en un caso general \vec{t} tendría una componente de esfuerzo normal y dos de esfuerzo de corte, luego

$$\vec{t} = \tau_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k}.$$

Para la Figura 3.45 podemos alternatively hacer cortes en los planos $x - z$ e $y - z$, los cuales pueden pasar por el mismo punto en donde hemos hecho el análisis anterior, luego en vez de una superficie diferencial a través de estos tres cortes podríamos extraer un cubo diferencial, tal como se muestra en la Figura 3.48.

En este cubo, debido a los cortes imaginarios, en cada una de sus caras tenemos un vector de esfuerzos \vec{t} , que nuevamente para cada cara va a tener

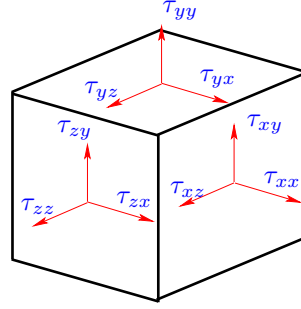


Figura 3.48: Cubo diferencial con las componentes del tensor de esfuerzos.

tres componentes, una normal y dos en corte, tal como se muestra en la misma Figura 3.48.

El cubo diferencial mostrado en la Figura 3.48 es una representación de algo que conoceremos como el *estado de esfuerzos* en un punto. Este cubo es una representación aproximada de lo que sucede en una porción de material muy pequeña alrededor de un punto cualquiera en el interior del cuerpo.

Vamos a definir el ‘tensor de esfuerzos’ \underline{T} como la matriz⁷

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

El significado de la notación τ_{ij} es el siguiente: el primer índice i indica el plano (la normal que lo atraviesa) en que la componente del vector esfuerzo actúa, en tanto que el segundo índice j indica la dirección de dicha componente, así, por ejemplo, τ_{xz} indica la componente que actúa en el plano con normal con eje x en la dirección del eje z .

Las componentes τ_{ii} son llamadas las componentes normales del esfuerzo, y en algunas ocasiones τ_{xx} , τ_{yy} y τ_{zz} son denotadas como σ_x , σ_y y σ_z , respectivamente.

Las componentes τ_{ij} con $i \neq j$ son llamadas las componentes en corte del tensor de esfuerzos.

⁷Una vez establecido un sistema de coordenadas, es posible apreciar que las componentes de \underline{T} no cambian para superficies de corte imaginario distintas, es decir las componentes de \underline{T} serían *invariantes* frente a los cortes imaginarios.

Esto puede parecer un poco extraño si se considera que las componentes del tensor esfuerzos fueron obtenidas a través de un proceso con varios cortes imaginarios; pero debemos recordar que dichos cortes eran en planos bastante precisos, es decir en el plano $x-y$, $x-z$, $y-z$. Hay una relación entre \underline{T} y el vector de esfuerzos para planos con otras orientaciones que veremos en la sección siguiente.

Finalmente, el concepto del tensor de esfuerzos es muy importante no solo en mecánica de sólidos sino también en mecánica de fluidos. Si bien lo hemos mostrado aquí como una simple matriz, en realidad desde el punto de vista matemático es un objeto más complejo, cuyas propiedades no estudiaremos en detalle en estos primeros capítulos. En el Capítulo 12 estudiaremos algunos conceptos desde un punto de vista un poco más general.

3.3.4. Esfuerzos caso bidimensional. Ecuaciones de equilibrio

La Figura 3.48 nos mostraba el tensor de esfuerzos en el caso tridimensional. En la mayor parte de este texto trabajaremos con el caso plano.

Ahora bien, hemos usado el supuesto que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier parte que se saque de él debe también estar en equilibrio, y eso debe ser válido para el cubo diferencial también.

En general las distribuciones de esfuerzos τ_{ij} van a ser inhomogeneas, es decir van a depender de la posición, o sea $\tau_{ij} = \tau_{ij}(x, y, z)$, luego para un cuadrado diferencial (caso plano) como el mostrado en la Figura 3.49 vamos a tener esfuerzos distintos para caras opuestas y separadas del cuadrado diferencial.

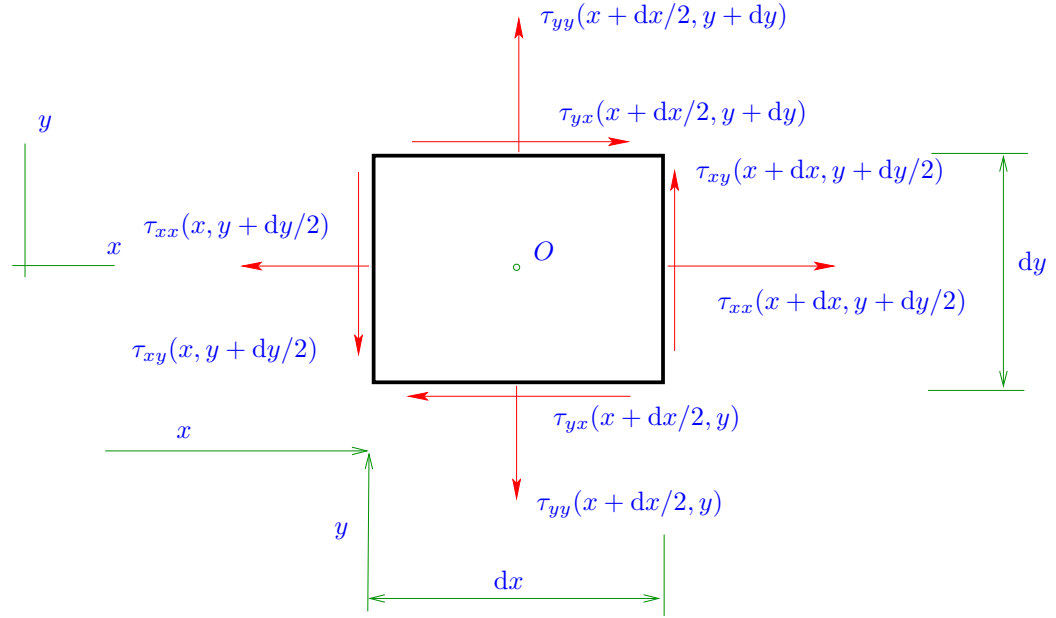


Figura 3.49: Cuadrado diferencial con las componentes del tensor de esfuerzos en el caso plano.

Considerémos las siguientes aproximaciones en base a series de Taylor (en

torno al punto (x, y)):

$$\tau_{xx}(x, y + dy/2) \approx \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \frac{dy}{2}, \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy}(x, y + dy/2) \approx \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2}, \quad (3.31)$$

$$\tau_{yy}(x + dx/2, y) \approx \tau_{yy} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} \frac{dx}{2}, \quad (3.32)$$

$$\tau_{yx}(x + dx/2, y) \approx \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2}, \quad (3.33)$$

$$\tau_{xx}(x + dx, y + dy/2) \approx \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \frac{dy}{2}, \quad (3.34)$$

$$\tau_{xy}(x + dx, y + dy/2) \approx \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2}, \quad (3.35)$$

$$\tau_{yy}(x + dx/2, y + dy) \approx \tau_{yy} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} dy, \quad (3.36)$$

$$\tau_{yx}(x + dx/2, y + dy) \approx \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy. \quad (3.37)$$

El elemento diferencial mostrado en la Figura 3.49 debe estar en equilibrio, de modo que se debe cumplir que la suma de fuerzas en el sentido del eje x y del eje y , y la suma de momentos respecto al eje z debe ser cero.

Realizemos la suma de fuerzas en el sentido del eje⁸ x

$$-\tau_{xx}(x, y + dy/2)dy - \tau_{yx}(x + dx/2, y)dx + \tau_{xx}(x + dx, y + dy/2)dy + \tau_{yx}(x + dx/2, y + dy)dx = 0,$$

que mediante el uso de (3.30)-(3.37) queda como

$$\begin{aligned} -\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right)dy - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)dx + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right)dy \\ + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right)dx = 0, \end{aligned}$$

que despues de algunas manipulaciones nos da $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx = 0$, lo cual eliminando el factor común $dx dy$ queda como

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0. \quad (3.38)$$

Si realizamos la suma de fuerzas en el sentido del eje y , siguiendo un procedimiento similar se puede obtener

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (3.39)$$

⁸Para hacer la suma de fuerzas se debe multiplicar cada componente del esfuerzo en la Figura 3.49 por el área en la cual actúa. Por ejemplo en el caso del esfuerzo $\tau_{xx}(x + dx, y + dy/2)$ que se aplica en la cara vertical del lado izquierdo, el área sería dy multiplicada por la profundidad, que asumimos unitaria, o sea simplemente es el esfuerzo multiplicado por la longitud del lado en el que está siendo aplicado. Por ejemplo en el caso de $\tau_{yy}(x + dx/2, y)$ aplicada en la cara inferior del diferencial mostrado en la Figura 3.49 el área sería dx por 1.

En relación al equilibrio de momento respecto al eje z , de la Figura 3.49, haciendo el momento respecto al punto O se tiene

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y + dy/2)dy \frac{dx}{2} - \tau_{yx}(x + dx/2, y)dx \frac{dy}{2} + \tau_{xy}(x + dx, y + dy/2)dy \frac{dx}{2} \\ - \tau_{yx}(x + dx/2, y + dy)dx \frac{dy}{2} = 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

y usando (3.30)-(3.37) tenemos

$$\begin{aligned} \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dy \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dy \frac{dx}{2} \\ - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} = 0, \end{aligned}$$

y despreciando los términos que estan siendo multiplicados por $dx^2 dy$ y $dx dy^2$ en relacion a los que estan siendo multiplicados por $dx dy$, después de algunas manipulaciones se tiene

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (3.41)$$

o sea el tensor de esfuerzos es simétrico. Usando este resultado en (3.38), (3.39) se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (3.43)$$

Las ecuaciones (3.42), (3.43) son llamadas las ecuaciones de equilibrio. Siguiendo un procedimiento similar para el caso tridimensional se tiene⁹

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (3.46)$$

Ahora deduciremos una relación entre el vector de esfuerzos \vec{t} y el tensor de esfuerzos \underline{T} para el caso bidimensional. Para ellos veamos la Figura 3.50 en donde tenemos, por ejemplo, una placa sometida a algunas fuerzas externas y con algunas restricciones el desplazamiento. La placa está en equilibrio y en consecuencia un diferencial, como el que se muestra en dicha figura, también debe estar en equilibrio. Imaginemos ahora que el cuadrado diferencial sufre un corte adicional en este caso en el sentido diagonal, con un ángulo θ , tal como se muestra también en la Figura 3.51.

⁹No trabajaremos en general de forma directa con las ecuaciones de equilibrio, salvo en el Capítulo 6, sin embargo es necesario hacer notar que estas ecuaciones son unos de los resultados más importantes de la mecánica de sólidos clásica. Estas son las ecuaciones que se resuelven, por ejemplo, por medio de métodos computacionales.

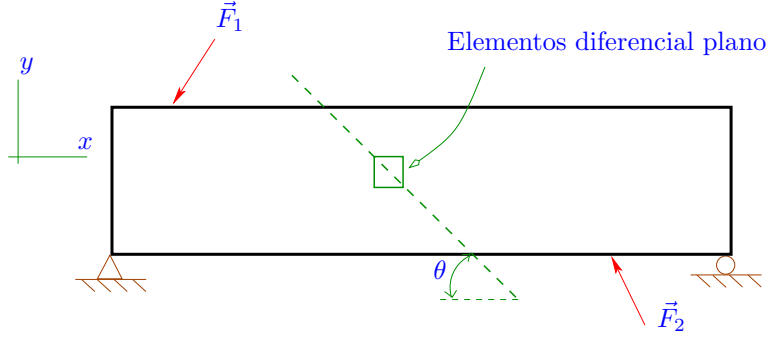


Figura 3.50: Cuadrado diferencial en una placa con corte imaginario oblicuo.

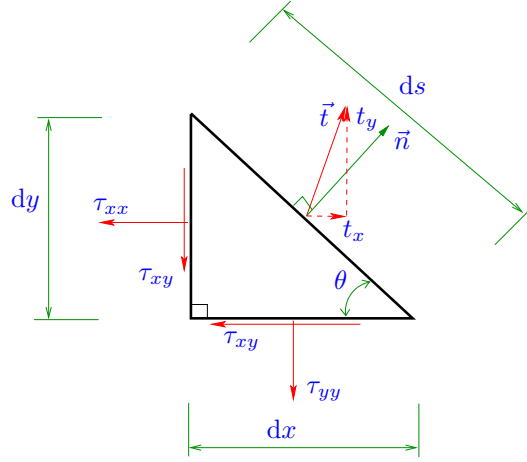


Figura 3.51: Cuadrado diferencial con corte imaginario oblicuo.

En las caras horizontal y vertical dibujamos las componentes del tensor de esfuerzos que aparecen allí (caso plano), recordando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. En la cara diagonal que tiene ángulo θ dibujamos un vector de esfuerzos con una orientación y magnitud arbitraria que debemos calcular ahora. En la misma cara como referencia tenemos el vector normal a dicha superficie que denotamos como \vec{n} .

La longitud de las caras horizontal y vertical son dx y dy , respectivamente, en tanto que la longitud de la cara diagonal es ds . Se tiene que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \cos \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds}. \quad (3.47)$$

Descomponemos el vector \vec{t} como $\vec{t} = t_x \hat{i} + t_y \hat{j}$, y ahora hacemos el balance de fuerzas en los sentidos x e y , es decir $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, de donde nos

queda, respectivamente

$$\begin{aligned} t_x ds - \tau_{xx} dy - \tau_{xy} dx &= 0, \\ t_y ds - \tau_{yy} dx - \tau_{xy} dy &= 0, \end{aligned}$$

y como de (3.47)₂ tenemos $dx = ds \cos \theta$, $dy = ds \sin \theta$, nos queda como

$$\begin{aligned} t_x ds - \tau_{xx} ds \sin \theta - \tau_{xy} ds \cos \theta &= 0, \\ t_y ds - \tau_{yy} ds \cos \theta - \tau_{xy} ds \sin \theta &= 0, \end{aligned}$$

que después de algunas manipulaciones (eliminando el factor común ds) nos da

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}}_{\vec{t}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix}}_{\underline{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}}_{\vec{n}}. \quad (3.48)$$

Es fácil apreciar de la Figura 3.51 que $\vec{n} = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$, luego la relación anterior se puede escribir como

$$\vec{t} = \underline{T} \vec{n}, \quad (3.49)$$

que es la relación general entre el vector de esfuerzos y el tensor de esfuerzos no solo para problemas planos, sino también se puede probar para problemas tridimensionales.

3.4. Deformación

Se ha indicado en las secciones anteriores que las fuerzas serían las causas de las ‘deformaciones’ o cambios en la forma de un cuerpo, sin especificar de manera más precisa que entendemos por deformación. En esta sección estudiaremos el concepto de deformación, y al igual que para el caso del esfuerzo, partiremos con dos definiciones sencillas antes de explorar una definición general.

3.4.1. Deformación axial y de corte

Considerémos la Figura 3.52 en donde tenemos un esquema de una barra sometida a una carga de tracción σ . En un problema de esta naturaleza podemos

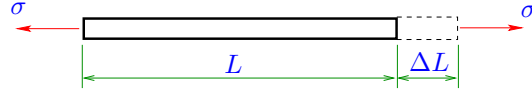


Figura 3.52: Deformación axial en una barra.

esperar que el tipo de deformación más importante estaría relacionado con el alargamiento que la barra sufriría. El largo inicial era L y el alargamiento¹⁰ producto de la aplicación de σ es ΔL .

Se define la deformación longitudinal como

$$deformacion = \frac{variacion\ largo}{largo\ total}.$$

La pregunta importante en la definición anterior es si el ‘largo total’ es el largo inicial, el final o algún largo intermedio. En el caso especial en que $\Delta L \ll L$ no importaría que largo total usar, por lo que por simplicidad usamos L , de modo que si la deformación longitudinal la denotamos como ε , tenemos

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}. \quad (3.50)$$

¿Que podemos hacer en el caso en que ΔL no sea pequeño en comparación a L ? Para estudiar este caso veamos el esquema mostrado en la Figura 3.53 en donde tenemos la barra bajo la acción de la carga de tracción σ , la que ahora sufre un alargamiento apreciable ΔL . Debido a esto podemos definir un largo inicial L_i , en general distinto a un largo final L_f , y además podemos definir algún largo en un ‘instante’ intermedio l .

Usemos nuevamente la definición $deformacion = \frac{variacion\ largo}{largo\ total}$ para el caso de un largo intermedio l en este proceso de alargamiento, en donde la barra se

¹⁰En la Figura 3.52 en realidad el alargamiento debería dibujarse de forma simétrica a ambos extremos de la barra, pero para simplificar la figura y las definiciones lo colocamos solo en el lado derecho.

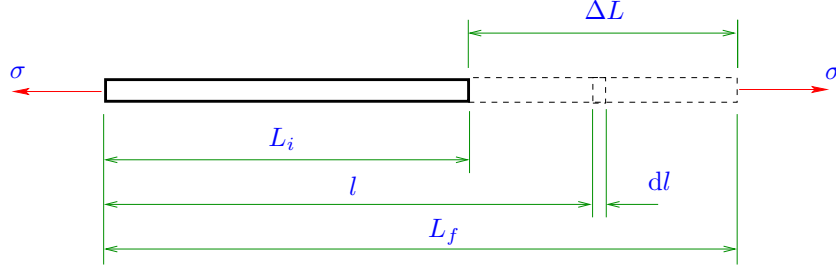


Figura 3.53: Deformación axial en una barra caso ΔL no es pequeño.

alargaría en un diferencial dl , luego el ‘incremento’ en la deformación $d\varepsilon$ se podría calcular como

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l},$$

luego integrando entre el ‘instante’ inicial y final se llega a

$$\varepsilon_{final} - \varepsilon_{inicial} = \ln(L_f) - \ln(L_i).$$

Si inicialmente la barra no presentaba ninguna deformación se tiene que $\varepsilon_{inicial} = 0$, y si definimos $\varepsilon = \varepsilon_{final}$, se llega a

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L_f}{L_i}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta L}{L_i}\right), \quad (3.51)$$

que es la definición correcta para la deformación longitudinal en un problema de grandes deformaciones.

De manera similar a lo que se hizo para los esfuerzos¹¹, ahora estudiamos el caso de deformaciones de ‘corte’. Para esto veamos el esquema mostrado en la Figura 3.54, en donde tenemos un bloque pegado al piso, bajo el efecto en su cara superior de un esfuerzo de corte τ . La forma inicial del bloque está dibujada con líneas llenas, en tanto que dada la carga externa τ , podríamos asumir que su forma final aproximada es la que se muestra con líneas segmentadas, es decir se produciría un cambio de ángulo γ . Si γ es pequeño las caras laterales no sufrirán una curvatura apreciable, y podemos asumir que quedan aproximadamente rectas como aparece en la figura.

El ángulo γ (en radianes) es definido como la ‘deformación en corte’ y de la Figura 3.54 tenemos

$$\tan \gamma = \frac{\Delta L}{B},$$

luego si γ es pequeño entonces $\gamma \approx \tan \gamma$ de modo que

$$\gamma \approx \frac{\Delta L}{B}. \quad (3.52)$$

¹¹De manera intuitiva podemos ver la relación directa que habría entre los esfuerzos normales y las deformaciones longitudinales. Un segundo tipo de deformación se puede asociar a los esfuerzos de corte.

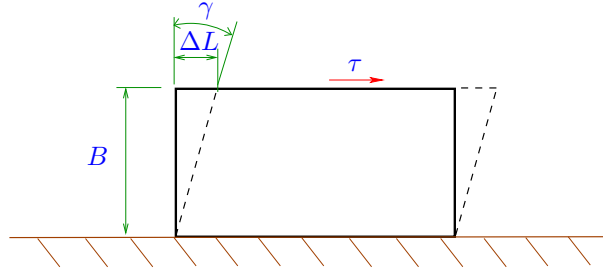


Figura 3.54: Deformación por corte en un bloque pegado al piso.

3.4.2. Deformación problema bidimensional

Para un caso general bidimensional incorporaremos las dos definiciones de deformación dadas anteriormente, para ello veamos el esquema mostrado en la Figura 3.55, en donde tenemos en el lado izquierdo un cuerpo bajo la acción de algunas fuerzas externas y también con algunas restricciones al desplazamiento. En esa figura tenemos un pequeño elemento diferencial de forma rectangular.

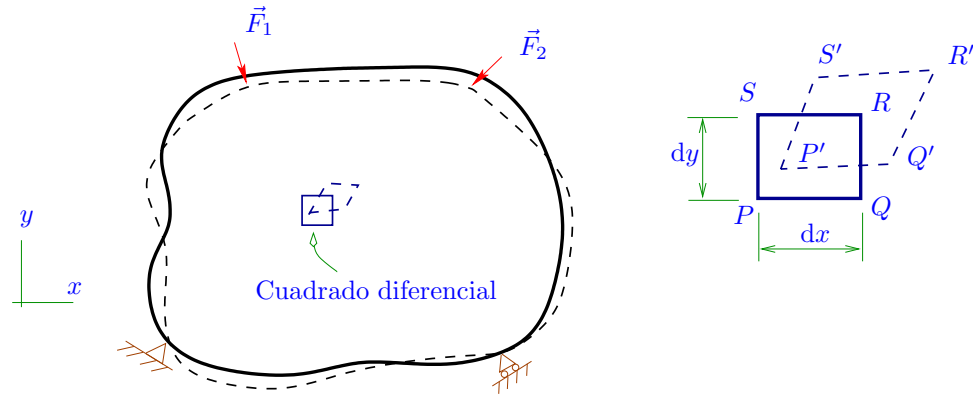


Figura 3.55: Deformación y campo de desplazamientos problema bidimensional.

La forma inicial del cuerpo se dibuja con líneas llenas, en tanto una vez que el cuerpo se deforma se dibuja con líneas segmentadas, y lo mismo ocurre con el cuadrado diferencial.

En el lado derecho de la Figura 3.55 tenemos un esquema ampliado del mismo elemento diferencial. Debido a que el elemento se asume muy pequeño y que se asume además que las deformaciones son pequeñas, las caras del cuadrado pueden sufrir acortamiento, alargamiento, cambio de ángulo, pero permanecen más menos rectas tal como se muestra en la figura.

Se define el campo de desplazamiento como el campo vectorial que para cada punto (x, y) nos indica cuanto se mueve dicho punto al deformarse y moverse el cuerpo producto de las fuerzas externas. Denotaremos al campo de desplazamientos como \vec{w} y en un problema bidimensional tenemos

$$\vec{w}(x, y) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}, \quad (3.53)$$

en donde vemos que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serían las componentes horizontales y verticales del desplazamiento.

En la Figura 3.56 mostramos ahora al cuadrado diferencial en su situación inicial $PQRS$ y final $P'Q'R'S'$ con deformaciones relativamente grandes para facilitar la comprensión de las siguientes expresiones. Usando la definición del campo de desplazamiento anterior y usando aproximaciones con series de Taylor al primer término para los desplazamientos para los puntos Q y S tenemos las aproximaciones mostradas en esta figura.

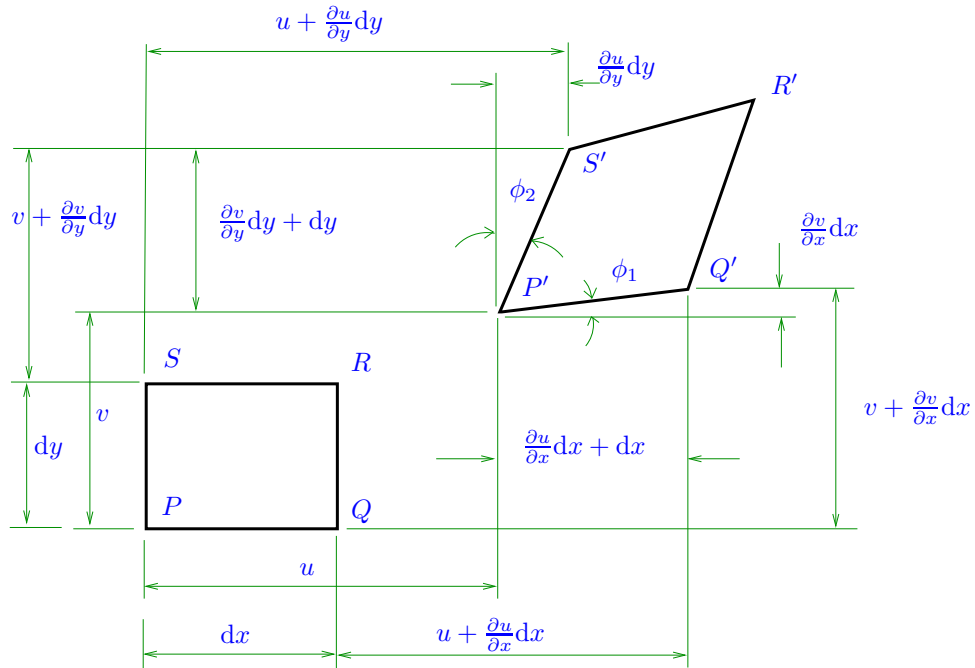


Figura 3.56: Significado del tensor de deformación en el caso infinitesimal plano.

Podemos apreciar que de $PQRS$ a $P'Q'R'S'$ el cubo podría sufrir cambios en sus longitudes y también en los ángulos interiores, que originalmente eran de 90° y que ahora podrían ser otros ángulos mayores o menores a 90° . Como el cuadrado diferencial es por definición muy pequeño, y como asumimos que los segmentos rectos, como por ejemplo, \overline{PQ} , \overline{PS} , etc. permanecen aproximadamente rectos al deformarse el cuadrado, con las aproximaciones y observaciones

anteriores ahora procedemos a definir algunos ‘tipos’ de deformaciones para este problema bidimensional. La ‘deformación longitudinal’ la vamos a definir de nuevo simplemente como el cambio del largo de cada lado del cuadrado partido por su largo inicial, así que tenemos

$$\text{deformación longitudinal dirección } x = \frac{\text{Cambio largo } \overline{PQ}}{\text{Largo inicial } \overline{PQ}}, \quad (3.54)$$

y como de la Figura 3.56 tenemos que

$$\text{Largo inicial } \overline{PQ} = dx, \quad (3.55)$$

$$\text{Largo final } \overline{PQ} = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2}, \quad (3.56)$$

luego

$$\begin{aligned} \text{deformación longitudinal dirección } x &= \frac{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2} - dx}{dx}, \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1, \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La condición $|\nabla \vec{w}| \ll 1$ implica que las deformaciones son pequeñas, luego si esto es cierto se tiene que $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|$ también son pequeños y los términos $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ se desprecian respecto a $1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}$ por lo que en (3.57) tenemos que

$$\text{deformación longitudinal dirección } x \approx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}} - 1. \quad (3.58)$$

Pero para $(1 + a)^m$ si a es pequeño respecto a 1, por medio de una serie de Taylor tenemos la aproximación $(1 + a)^m \approx 1 + ma$, luego usando este resultado en (3.58) se llega a $\sqrt{1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \approx 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, por lo que

$$\text{deformación longitudinal dirección } x = \varepsilon_{xx} \approx \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.59)$$

El mismo procedimiento se puede repetir para la cara \overline{PS} y se llegaría a

$$\text{deformación longitudinal dirección } y = \varepsilon_{yy} = \frac{\text{Cambio largo } \overline{PS}}{\text{Largo inicial } \overline{PS}} \approx \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3.60)$$

La deformación en corte se asocia a cambios en el ángulo que sufriría, por ejemplo, un bloque por efecto de la aplicación de un esfuerzo de corte en su cara superior. Vamos a usar esa misma definición aquí, respecto al ángulo que

usaremos la pregunta a partir de la Figura 3.56 es: ¿Cual ángulo deberíamos usar, ϕ_1 , ϕ_2 u otro diferente que se pueda definir? Trabajaremos con el promedio de modo que definimos

$$\text{deformación en corte} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2). \quad (3.61)$$

Como se ha asumido que las deformaciones son pequeñas, entonces ϕ_1 y ϕ_2 (medidos en radianes) también son pequeños y la siguiente aproximación es válida

$$\phi_1 \approx \tan(\phi_1), \quad \phi_2 \approx \tan(\phi_2),$$

luego

$$\text{deformación en corte} \approx \frac{1}{2}[\tan(\phi_1) + \tan(\phi_2)]. \quad (3.62)$$

Pero de la Figura 3.56 tenemos que

$$\tan \phi_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}},$$

pero como $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ se llega a

$$\tan(\phi_1) \approx \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.63)$$

y de manera similar se puede demostrar que

$$\tan(\phi_2) \approx \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.64)$$

por lo que usando (3.63) y (3.64) en (3.62) tenemos que

$$\text{deformación en corte} = \varepsilon_{xy} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.65)$$

En resumen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.66)$$

Se puede definir el tensor (simétrico) de deformación (2D) $\underline{\varepsilon}$ como

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

3.5. Relación esfuerzos-deformaciones. Comportamiento mecánico del material

Todos los conceptos vistos en las secciones anteriores son aplicables a cualquier tipo de material sólido siempre y cuando las deformaciones (y desplazamientos) sean pequeñas(os). No ha habido distinción entre el comportamiento

de, por ejemplo, un cuerpo hecho de acero o cobre. Sin embargo, se sabe de observaciones experimentales que dos cuerpos de la misma forma inicial, bajo las mismas cargas externas y restricciones a los desplazamientos, pero hechos de dos materiales distintos, se van a comportar de una forma diferente. Este hecho fundamental lo incorporaremos a nuestros modelos en esta sección.

3.5.1. Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson. Ensayo uniaxial

Partamos con un problema simple como el que se muestra en el esquema de la Figura 3.57, en donde tenemos un cilindro sometido a una fuerza axial F , que sufrirá, debido a esta fuerza, una deformación longitudinal. El largo inicial

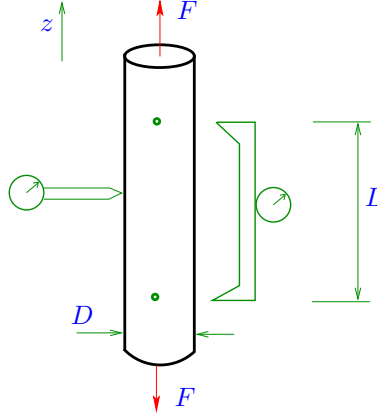


Figura 3.57: Esquema de ensayo uniaxial de tracción.

es L , y el cambio en dicho largo se mide con el esquema de instrumento en el lado derecho de la barra.

El diámetro inicial del cilindro se asume que es D , y se sabe que muchos materiales al ser deformados intentan mantener su volumen, de modo que si L crece D probablemente disminuya. Podemos tener por tanto también un instrumento (como se muestra esquemáticamente en el lado izquierdo del cilindro) que mida el cambio en el diámetro.

Sea A el área de la sección transversal, por el principio de Saint Venant lejos del punto de aplicación de F tenemos

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (3.68)$$

Si el cambio de largo del cilindro ΔL es pequeño

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}, \quad (3.69)$$

con L como largo inicial.

Respecto a (3.68) la pregunta es: ¿Cual diámetro deberíamos usar para calcular A , el inicial o el final? Si el volumen intenta preservarse entonces si $L \nearrow$ se tiene que $D \searrow$, luego el área inicial A_{ini} será en general mayor que el área final o ‘real’ A_{real} , de modo que tendríamos dos definiciones alternativas para el esfuerzo de (3.68).

Se define el esfuerzo ‘real’ σ_{real} y el esfuerzo de ingeniería σ_{ing} como

$$\sigma_{real} = \frac{F}{A_{real}}, \quad \sigma_{ing} = \frac{F}{A_{ing}}, \quad (3.70)$$

donde $A_{real} = \frac{\pi D_{final}^2}{4}$ y $A_{ing} = \frac{\pi D_{inicial}^2}{4}$. Si las deformaciones son pequeñas, no hay mucha diferencia entre estas dos definiciones, y como es más fácil trabajar con el área inicial; en geneal se usa el esfuerzo de ingeniería.

En la Figura 3.58 tenemos un esquema de un gráfico experimental típico que se obtendría a partir del experimento del esquema mostrado en la Figura 3.57, para, por ejemplo, un material dúctil tal como una cero con bajo contenido de carbono.

Las características de la curva las detallamos en la siguiente lista:

- El gráfico se hace con el esfuerzo de ingeniería σ_{ing} para σ .
- En general de distinguen dos zonas de comportamiento, elástico y plástico. En la zona de comportamiento elástico cualquier deformación ‘no es permanente’ en el sentido de que si se retiran las fuerzas externas, el cuerpo recupera su forma inicial¹².
- En la zona de comportamiento elástico la relación entre los esfuerzos y las deformaciones es aproximadamente lineal para muchos materiales. La pendiente de la recta en esta zona se llama ‘módulo de elasticidad’ y se denota como E . En esta zona tenemos la ley de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.71)$$

Este pendiente dependerá del tipo de material.

- El límite entre la zona de comportamiento elástico y la zona de comportamiento plástico ocurre a un nivel específico de esfuerzo llamado esfuerzos de fluencia (yielding), que es distinto para cada material. Lo denotaremos como σ_y y en ocasiones también como σ_o .
- Si se pasa el límite elástico, como lo muestra, por ejemplo, la punta de flecha azul, y se retira la carga externa, nos devolvemos por la línea punteada, en donde la pendiente es aproximadamente similar a E . En esta zona (la línea punteada) tenemos comportamiento elástico. El límite de

¹²Esta no es la definición más precisa de un material elástico. Una definición más general es la que indica que un material elástico es aquel que ‘no disipa energía de forma interna cuando se deforma’.

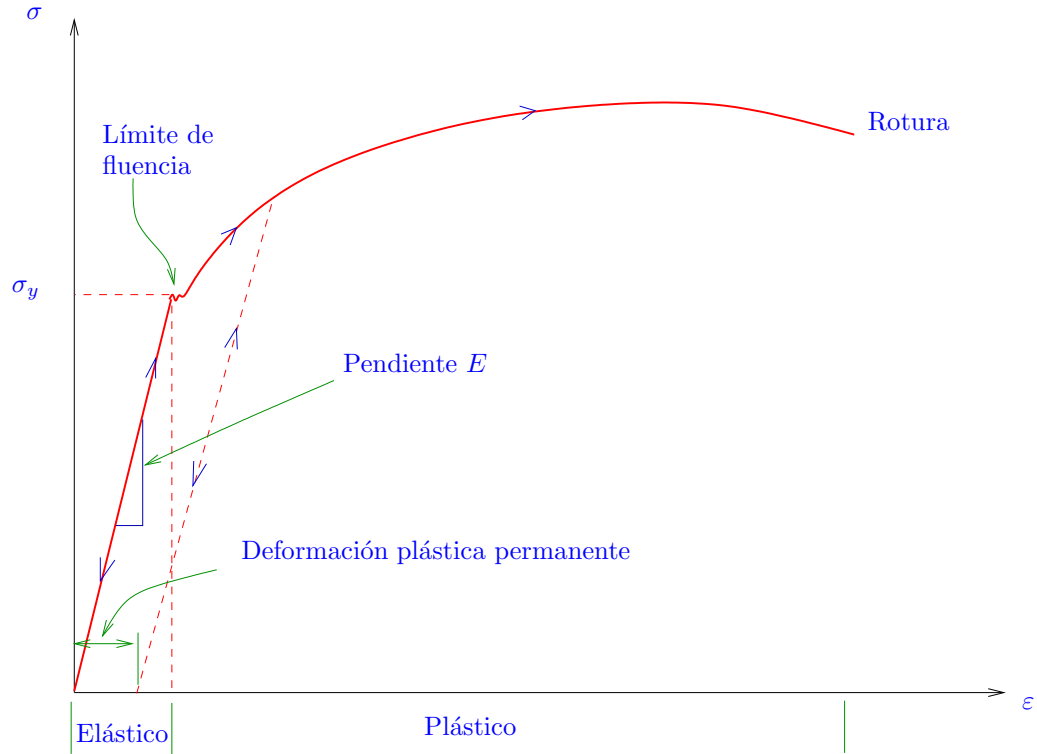


Figura 3.58: Esquema mostrando un resultado típico para un ensayo uniaxial de tracción.

fluencia aumenta (endurecimiento por deformación), y si $\sigma = 0$ tenemos $\epsilon \neq 0$, es decir hay deformación residual (deformación plástica residual o permanente).

- Si se aumenta mucho el nivel de esfuerzo el material eventualmente se rompe.

A continuación algunas observaciones adicionales respecto al gráfico mostrado en la Figura 3.58. Para la zona de comportamiento plástico, si solo hay fuerzas crecientes, es decir fuerzas cuya magnitud aumenta en el tiempo, hay varios modelos simplificados para el comportamiento. En la Figura 3.59 tenemos algunos ejemplos de modelos para el comportamiento en la zona plástica (que en general es no lineal):

- El modelo más simple es conocido como el ‘módulo tangente’, en donde en el punto σ_y , se toma una línea tangente a la curva de la zona plástica, y si la pendiente de dicha línea es E_p , se tiene entonces $\sigma = \sigma_y + E_p \epsilon_p$, donde ϵ_p sería la parte plástica de la deformación total.

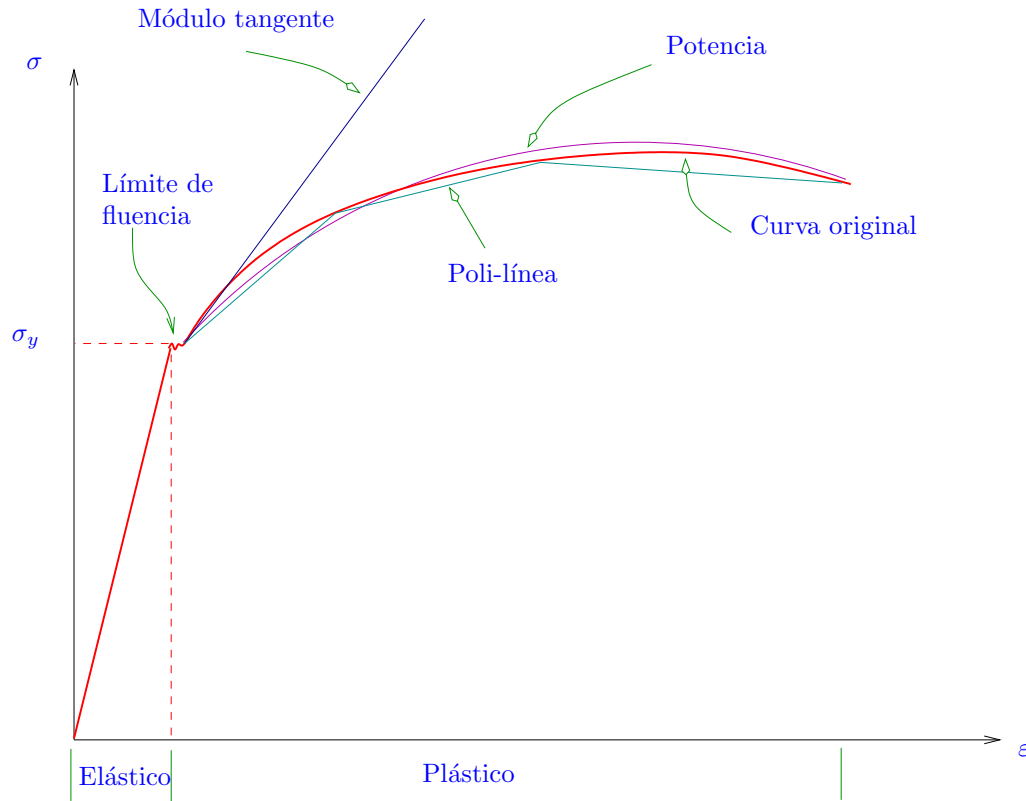


Figura 3.59: Esquema de ensayo uniaxial de tracción. Comportamiento plástico.

- Un modelo más preciso y usado con frecuencia en modelación numérica de deformación plástica es el de la ‘poli-línea’, en donde la curva esfuerzo-deformación se divide en un número finito de líneas, en donde en cada una de ellas tenemos una pendiente conocida. Así el comportamiento para cada tramo sería simplemente la pendiente multiplicada por la deformación plástica del tramo más el esfuerzo al inicio del tramo.
- El modelo más preciso es conocido como el de la ‘potencia’, en donde la curva se aproxima como $c\varepsilon_p^n$, en donde c , n son constantes. En este caso $\sigma = \sigma_y + c\varepsilon_p^n$.

No todos los materiales muestran un comportamiento lineal en la zona elástica, un ejemplo común corresponde al caucho. Para un cilindro de caucho sometido a un esfuerzo axial, la curva esfuerzo-deformación normalmente es de la forma como se muestra en la Figura 3.60. En un rango amplio el caucho se comporta de forma aproximadamente elástica, sin embargo no hay, en general, una zona en donde el esfuerzo se pueda obtener como una constante por la de-

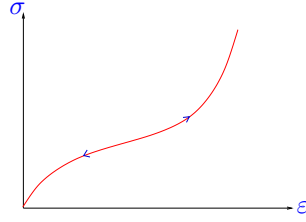


Figura 3.60: Esquema de ensayo uniaxial de tracción para material no-lineal elástico.

formación. Es necesario hacer notar eso si que el caucho puede presentar grandes deformaciones del orden del 200 % o mayor.

Hay muchos materiales que al ser deformados mantienen de forma aproximada el volumen cuando se deforman. A esta propiedad se le conoce como ‘incompresibilidad’. Ahora bien, si un cilindro es sometido a una deformación longitudinal, como se muestra en el esquema de la Figura 3.61, se producirá también una deformación lateral inducida por la longitudinal. Si $\varepsilon_{longitudinal}$ es la deformación longitudinal y $\varepsilon_{lateral}$ es la deformación lateral, uno de los modelos más simples que podríamos proponer sería

$$\varepsilon_{lateral} = -\nu \varepsilon_{longitudinal}, \quad (3.72)$$

donde $\nu > 0$ es una constante conocida como ‘módulo de Poisson’. Su valor usual fluctúa entre 0,2 a 0,3, y en algunos casos puede ser cercano (pero no igual) a 0,5.

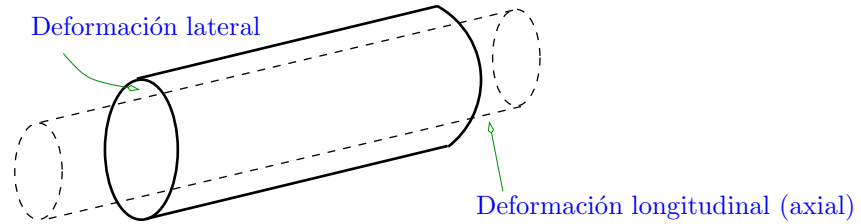


Figura 3.61: Relación entre las deformaciones longitudinales y las laterales para un cilindro.

Respecto al instante de rotura mostrado en la Figura 3.58, lo usual que ocurre con los cilindros cerca de ese momento es que se forme una alta deformación localizada normalmente en el centro del cilindro, tal como se muestra en la Figura 3.62.

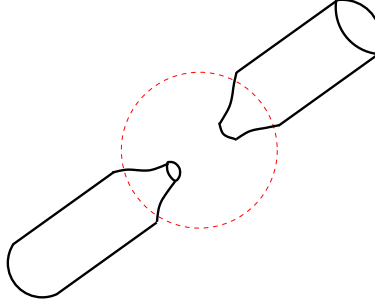


Figura 3.62: Esquema de una barra rota debido a una carga axial alta.

3.5.2. Ecuaciones constitutivas. Caso general lineal elástico

Es relativamente fácil realizar el experimento mostrado en la Figura 3.57. De la sección anterior tenemos en particular el modelo $\sigma = E\varepsilon$. Sin embargo la pregunta es que como podemos usar esa información para proponer relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones para casos generales en donde tenemos cuerpo bi y tridimensionales.

Si \underline{T} y $\underline{\varepsilon}$ son los tensores de esfuerzos y deformación (considerando por el momento grandes deformaciones), respectivamente, una de las relaciones constitutivas más generales que se podría proponer podría tener la forma

$$\underline{g}(\underline{T}, \underline{\varepsilon}) = \underline{0},$$

en donde \underline{g} sería alguna relación tensorial en general no lineal.

Un caso particular de la relación anterior sería una ecuación constitutiva de la forma

$$\underline{\varepsilon} = \underline{f}(\underline{T}),$$

es decir las deformaciones serían funciones en general no lineales de los esfuerzos.

Un caso particular del modelo anterior, que es el que estudiaremos en este curso, es asumir que la función en realidad es aproximadamente lineal (para el caso ahora de pequeñas deformaciones), es decir las componentes del tensor de deformaciones se obtendrían como¹³

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathcal{D}_{ijkl} \tau_{kl}, \quad (3.73)$$

de donde si existe la inversa tenemos

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathcal{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.74)$$

¹³En estas expresiones los índices van de 1 a 3, donde 1 sería x , 2 sería y , 3 sería finalmente z .

donde \mathcal{D}_{ijkl} y \mathcal{C}_{ijkl} son constantes del material.

Es el modelo (3.73) el que consideraremos aquí, pero partiremos usando lo que conocemos del caso del ensayo uniaxial en el cilindro; para ello necesitamos discutir algunos conceptos en la siguiente lista:

- Un material para el cual la ecuación constitutiva es de la forma (3.73) es conocido como un material lineal.
- Un material homogéneo es aquel en el que las propiedades mecánicas no dependen de la posición en el cuerpo, o sea en el caso de un material inhomogéneo¹⁴ tendríamos, por ejemplo, $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{ijkl}(x, y, z)$.
- Un material es anisotrópico, si para un cuerpo dado, al cambiar la orientación de las fuerzas externas, el comportamiento mecánico del material es diferente. Un caso especial de material anisotrópico es el conocido como material ‘transverso-isotrópico’. Consideremos el esquema mostrado en la Figura 3.63 en donde tenemos una placa de madera sometida a dos tipos de fuerzas, en la dirección de las fibras de la madera y en una dirección normal a las fibras.

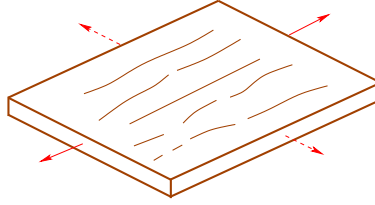


Figura 3.63: Esquema de una plancha de madera mostrando la característica de un material transverso-isotrópico.

Es bien sabido que el comportamiento mecánico de una plancha de madera no es el mismo si se aplica una fuerza en la dirección de la fibra, pues en ese caso el material es capaz de ‘resistir’ mayores cargas antes de ‘fallar’. Aquí tenemos pues un ejemplo clásico en donde el comportamiento es distinto en relación a la orientación de las fuerzas externas aplicadas.

- Un material es llamado isotrópico si su comportamiento mecánico es el mismo independiente de la dirección de las fuerzas externas, un caso típico es el acero normalizado.

En este texto consideraremos solo materiales homogéneos, lineales e isotrópicos. De (3.71) y (3.72) se tenía

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon_{lateral} = -\nu\varepsilon_{longitudinal}.$$

¹⁴Todos los materiales reales son inhomogéneos, pero como es difícil hacer experimentos con cilindros extraídos en distintas partes de un cuerpo, en general, como manera de simplificar los estudios, se asume que los materiales son homogéneos, y es este el supuesto que usaremos de ahora en adelante en este texto.

Tomemos, por ejemplo, la deformación longitudinal en la dirección x ; en esta dirección tendríamos deformación debido directamente a τ_{xx} usando (3.71), y de manera indirecta causada por τ_{yy} y τ_{zz} a través de (3.72). Luego, si calculamos cada una de estas deformaciones longitudinales en x por separado tendríamos

$$\varepsilon'_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E}, \quad \varepsilon''_{xx} = -\nu\varepsilon_{yy} = -\nu\frac{\tau_{yy}}{E}, \quad \varepsilon'''_{xx} = -\nu\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\tau_{zz}}{E}. \quad (3.75)$$

Si asumimos que los esfuerzos de corte no afectan o causan deformaciones longitudinales, y si asumimos que la deformación ‘total’ longitudinal en la dirección x es la suma¹⁵ de las deformaciones (3.75), tenemos

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xx} + \varepsilon'''_{xx} = \frac{1}{E}[\tau_{xx} - \nu(\tau_{zz} + \tau_{yy})], \quad (3.76)$$

e igualmente en las direcciones y, z

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\tau_{yy} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{zz})], \quad (3.77)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})]. \quad (3.78)$$

¿Que tipo de relación se puede proponer entre los esfuerzos de corte y las deformaciones? En el caso lineal considerando pequeñas deformaciones el siguiente experimento puede servir para responder a esta pregunta. En la Figura 3.64 tenemos un esquema de experimento usado para explorar las relaciones para los esfuerzos de corte. En la Figura tenemos un tubo cilíndrico sometido a torsión,

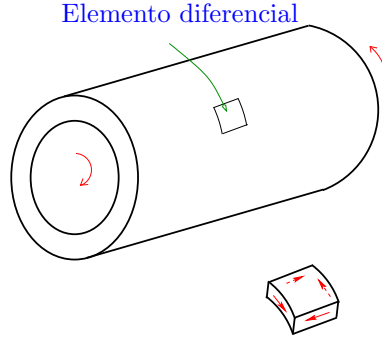


Figura 3.64: Tubo bajo la acción de un momento angular.

se demostrará en el Capítulo 4 que en un problema de esta naturaleza, para un elemento diferencial como el mostrado en la figura, los tipos de esfuerzos más importantes que se generan son los de corte, tal como se muestra en la misma figura en la vista ampliada del elemento en la parte inferior.

¹⁵Si las deformaciones son pequeñas, es posible aplicar el principio (en realidad aproximación) llamada de *superposición*, en donde la deformación total en una dirección sería simplemente la suma de las deformaciones debido a distintas causas en esa dirección.

El ‘ángulo total’ de torsión ϑ se define (ver Figura 3.54) en el caso tridimensional como

$$\vartheta_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \quad \vartheta_{xz} = 2\varepsilon_{xz}, \quad \vartheta_{yz} = 2\varepsilon_{yz}. \quad (3.79)$$

Para el experimento mostrado en la Figura 3.64 se ha obtenido la siguiente relación lineal entre el esfuerzo de corte τ y la deformación de corte ϑ

$$\vartheta = \frac{1}{G}\tau, \quad (3.80)$$

donde G es una constante que depende de cada material y es llamada módulo de cizalladura o de corte.

Si no hay interacción entre los distintos esfuerzos de corte y los esfuerzos axiales, se asume entonces

$$\vartheta_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \vartheta_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \vartheta_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (3.81)$$

y de (3.79) tenemos

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}. \quad (3.82)$$

Hasta el momento tenemos tres constantes E , ν y G , sin embargo estas constantes no son independientes, en la Sección 3.5.3 se obtiene la relación

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.83)$$

De (3.76)-(3.78) y (3.82) como resumen tenemos

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\tau_{xx} - \nu(\tau_{zz} + \tau_{yy})], \quad (3.84)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\tau_{yy} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{zz})], \quad (3.85)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})], \quad (3.86)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \quad (3.87)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \quad (3.88)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}. \quad (3.89)$$

Si se usa (3.83) y se obtiene la inversa de (3.84)-(3.89) se llega a

$$\tau_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})], \quad (3.90)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})], \quad (3.91)$$

$$\tau_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})], \quad (3.92)$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \quad \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}. \quad (3.93)$$

De las relaciones anteriores podemos ver porqué ν debe ser tal que $\nu \neq 0,5$.

3.5.3. Relación entre el módulo de corte, el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson

En esta sección demostraremos la relación (3.83). Para ello considérese la Figura 3.65 en donde originalmente tenemos una placa plana sometida en sus caras derecha e izquierda a un esfuerzo uniforme de compresión $\sigma_y = -\sigma$, y en sus caras superior e inferior a un esfuerzo de tracción uniforme $\sigma_z = \sigma$. Asíumase que hay un cuadrado diferencial en el centro de la placa, que está

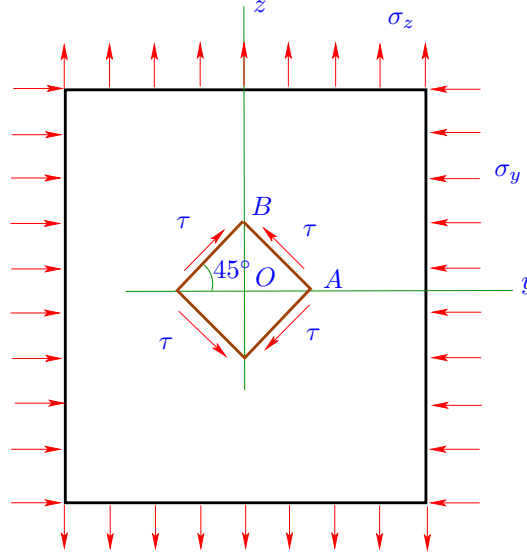


Figura 3.65: Placa con carga biaxial.

rotado en 45° respecto al eje y . En un problema de esta naturaleza, para este cuadrado diferencial con esa orientación, en la Sección 9.2 se puede demostrar que el único tipo de esfuerzo que el cuadrado siente en sus caras son esfuerzos de corte τ , tal como se puede ver en la misma Figura 3.65.

Debido a estos esfuerzos de corte τ , es posible apreciar que el tipo de deformación que el elemento sufriría es como se muestra en la Figura 3.66. En esta figura tenemos el cuadrado en su forma inicial con líneas llenas y en su forma final con líneas segmentadas. Como solo hay esfuerzos de corte solo se produce deformación de corte $\vartheta = 2\varepsilon_{yz}$ en el cuadrado, y se puede demostrar que

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}. \quad (3.94)$$

Pero

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right). \quad (3.95)$$

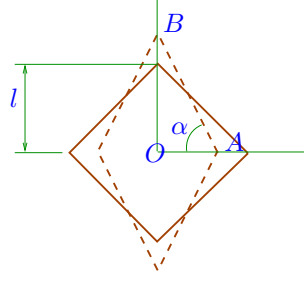


Figura 3.66: Elemento diferencial en una placa con carga biaxial.

Si se analiza la figura original, en las direcciones y, z habría deformación longitudinal por contracción y alargamiento respectivamente. Si l es la longitud diagonal en las direcciones y, z , por la definición de deformación longitudinal (3.50) se tiene

$$\overline{OB} = l + l\varepsilon_{zz}, \quad \overline{OA} = l + l\varepsilon_{yy}, \quad (3.96)$$

luego usando (3.96) en (3.95), usando también la formula para la tangente de la suma de dos ángulos, asumiendo que ϑ es pequeño, de modo que $\tan \vartheta \approx \vartheta$, se llega a

$$\frac{1 + \varepsilon_{zz}}{1 + \varepsilon_{yy}} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \approx \frac{1 + \frac{\vartheta}{2}}{1 - \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.97)$$

De (3.85), (3.86) teníamos que

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{(1+\nu)\sigma}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} = -\frac{(1+\nu)\sigma}{E}. \quad (3.98)$$

De la Sección 9.2 se puede demostrar para este problema que

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma. \quad (3.99)$$

Usando (3.99) y (3.98) en (3.97) se tiene

$$\frac{1 + \frac{(1+\nu)}{E}\tau}{1 - \frac{(1-\nu)}{E}\tau} = \frac{1 + \frac{\vartheta}{2}}{1 - \frac{\vartheta}{2}},$$

de donde después de algunas manipulaciones se llega a $\frac{2(1+\nu)}{E}\tau = \vartheta$, o sea

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\vartheta. \quad (3.100)$$

Comparando con (3.80) se llega a la relación (3.83)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

3.6. Deformaciones térmicas

Un último tipo de deformaciones que estudiaremos en esta sección están asociadas a cambios de temperatura. Consideremos la Figura 3.67, en donde tenemos una barra que en un momento dado es sometida a un aumento de temperatura. Una observación válida para casi todos los materiales nos dice que

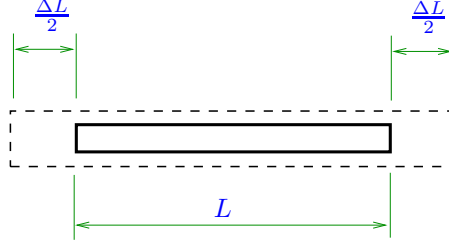


Figura 3.67: Barra bajo el efecto de un aumento de temperatura.

ante un aumento de temperatura el volumen del cuerpo aumenta, es decir la forma final de la barra se mostraría con líneas segmentadas en la misma figura. Una disminución de la temperatura produciría una contracción del cuerpo.

Vamos asumir que si D es el diámetro del cilindro y L es su longitud, entonces $D \ll L$. Uno de los modelos más simples que se podrían proponer para este problema sería un modelo lineal de la forma

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T, \quad (3.101)$$

donde ΔT es el aumento o disminución de la temperatura y α es una constante llamado el coeficiente de expansión térmica, en tanto que ε_T es la deformación térmica (es una deformación longitudinal).

Usando el principio de superposición para las deformaciones, asumiendo que el cambio de temperatura solo produciría cambio de volumen, o sea solo afectaría a las deformaciones longitudinales y no a las de corte, de (3.101) en (3.84)-(3.89) tenemos

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\tau_{xx} - \nu(\tau_{zz} + \tau_{yy})] + \alpha \Delta T, \quad (3.102)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\tau_{yy} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{zz})] + \alpha \Delta T, \quad (3.103)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy})] + \alpha \Delta T, \quad (3.104)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}. \quad (3.105)$$

donde se ha asumido que el material se deforma térmicamente de la misma manera en todas las direcciones (material isotrópico). Podemos ver que τ_{ij} , $i \neq j$ no cambian con el efecto de la temperatura.

En el caso particular de esfuerzo plano $\tau_{zz} = 0$ y $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, y de (3.102)-(3.105) tenemos

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - \frac{E\alpha}{1-\nu}\Delta T, \quad (3.106)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) - \frac{E\alpha}{1-\nu}\Delta T, \quad (3.107)$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}. \quad (3.108)$$

3.7. Ejemplos y ejercicios para problemas con deformaciones y fuerzas axiales

3.7.1. Ejemplos

1. La barra circular de la Figura 3.68 (lado izquierdo) cuelga bajo la acción de su propio peso. El peso específico es constante para el cuerpo. Si la

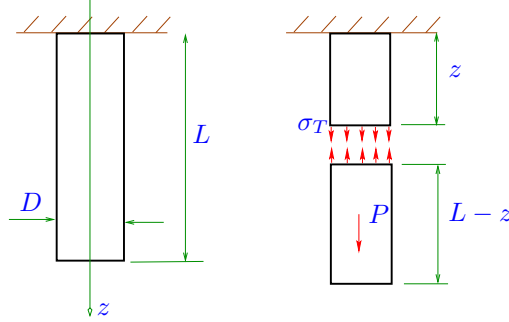


Figura 3.68: Barra bajo el efecto de su propio peso.

deformación normal en cualquier sección es $1/E$ veces el esfuerzo normal en la misma dirección. ¿Que desplazamiento experimenta la barra (punto A) como consecuencia de la acción del peso? ¿Qué deflexión experimenta una sección arbitraria z ?

Solución: En el lado derecho de la Figura 3.68 tenemos la barra con un corte imaginario a una distancia arbitraria z desde el origen en la parte superior.

Ahora calculamos la fuerza interna que se produciría en esa zona de corte. Si g es la constante de gravedad y ρ es la densidad específica, el peso específico $g\rho$ es constante y el peso de la sección inferior es

$$P = g\rho(L - z)A,$$

donde A es el área de la sección del cilindro.

Si se asume que el esfuerzo interno (axial de tracción) σ es uniforme, tenemos

$$\sigma = g\rho(L - z). \quad (3.109)$$

De la expresión anterior podemos ver que σ es máximo para $z = 0$, o sea el máximo se produce en la conexión con el techo, que es razonable pues es en donde soporta el mayor peso. El mínimo se produciría en $z \rightarrow L$.

Si se extrae una sección muy delgada (de largo inicial diferencial dz) a una distancia z del origen, la sección estaría bajo el efecto de un esfuerzo

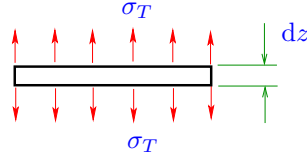


Figura 3.69: Elemento diferencial de la barra bajo el efecto de su propio peso.

uniforme σ dado por (3.109), como resultado un diagrama de cuerpo libre para la sección sería como el esquema mostrado en la Figura 3.69.

Para la sección delgada la deformación longitudinal sería $d\varepsilon$ y tenemos

$$d\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}. \quad (3.110)$$

Por otro lado de la ley de Hooke (3.71) tenemos

$$d\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.111)$$

luego de (3.110) y (3.111) tenemos

$$\frac{\sigma}{E}dz = \Delta(dz).$$

Integrando se tiene $\int_0^L \frac{\sigma}{E}dz = \int_0^L \Delta(dz) = \Delta \left(\int_0^L dz \right) = \Delta L$, y de (3.109) se tiene

$$\int_0^L \frac{g\rho}{E}(L-z)dz = \Delta L,$$

y como resultado se obtiene

$$\Delta L = \frac{g\rho L^2}{2E}. \quad (3.112)$$

2. En la Figura 3.70 tenemos dos barras de sección transversal de lado d , que están sostenidas entre dos paredes rígidas. El cuerpo \mathcal{A} tiene un módulo

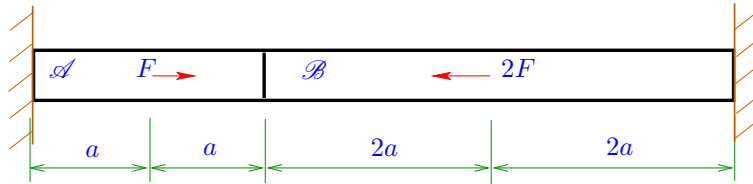


Figura 3.70: Barra bajo la acción de dos fuerzas.

de elasticidad de E , mientras que el cuerpo \mathcal{B} es de $2E$. Fuerzas F y $2F$ se aplican en la forma indicada en la figura. ¿Que fuerzas ejercen las paredes sobre las barras? ¿Qué desplazamiento experimenta la superficie de separación entre los cuerpos?

Solución: Sean A , B e I las fuerzas de reacción que se generan sobre \mathcal{A} , \mathcal{B} y la interface entre las barras¹⁶, en la Figura 3.71 tenemos diagramas de cuerpo libre de las dos barras por separado. El sentido de estas fuerzas

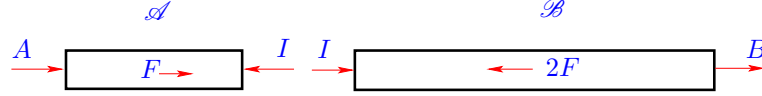


Figura 3.71: Barra bajo la acción de dos fuerzas. Diagramas de cuerpo libre.

todavía no se conoce, pero los resultados del problema nos indicará si están o no correctos.

El cuerpo \mathcal{A} debe estar en equilibrio de modo que

$$A + F = I, \quad (3.113)$$

y lo mismo sucede con el cuerpo \mathcal{B} de donde se tiene que

$$I = 2F - B. \quad (3.114)$$

Vamos ahora a realizar algunos cortes imaginarios sobre las barras. En el caso de \mathcal{A} se hace un corte (por la izquierda) un poco antes del punto de aplicación de F , y un corte un poco después del punto de aplicación de F , como resultado el cuerpo \mathcal{A} se divide en dos cuerpos que llamamos 1 y 2, tal como aparecen en el lado izquierdo de la Figura 3.72. Como la parte 1

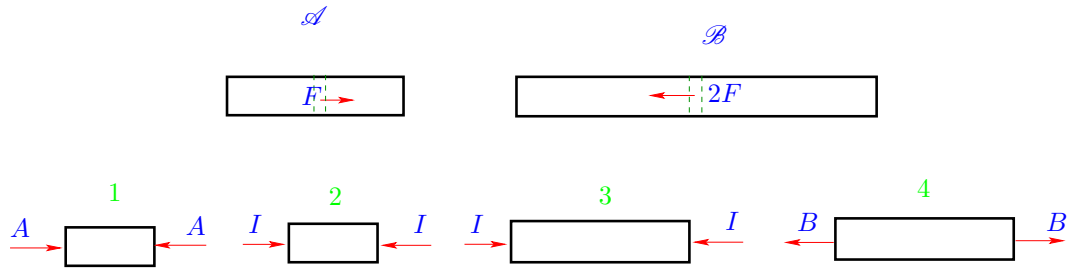


Figura 3.72: Diagramas de cuerpo libre.

tiene el corte antes de F , de la Figura 3.71 tenemos que este cuerpo solo

¹⁶Para simplificar el problema estas fuerzas de interacción se asumen puntuales.

está sometido a la fuerza A de compresión. Respecto al cuerpo 2 como el corte se hizo un poco después de F , de la Figura 3.71 este cuerpo estaría sometido solo a una fuerza de compresión I .

También hacemos cortes imaginarios en el cuerpo \mathcal{B} , en particular consideramos un corte un poco antes (por el lado izquierdo) del punto de aplicación de $2F$ y otro corte un poco después del punto de aplicación de $2F$, como consecuencia el cuerpo \mathcal{B} es dividido en dos cuerpos llamados 3 y 4 como se puede apreciar en el lado derecho de la Figura 3.72. El cuerpo 3 estaría solo sometido a una fuerza de compresión I (ver la Figura 3.71) y el cuerpo 4 a una fuerza de tracción B .

De (3.113) y (3.114) tenemos

$$A = I - F, \quad B = 2F - I. \quad (3.115)$$

De (3.115) vemos que no tenemos suficientes ecuaciones para encontrar las reacciones A , B , I , hace falta una ecuación adicional, la que se puede obtener de la siguiente observación:

El largo o distancia total entre las paredes se mantiene constante pues las paredes son rígidas.

La consecuencia de esta observación es que la suma de todos los alargamientos debe ser igual a la suma de todos los acortamientos, en este problema las longitudes de 1 y 2 son a y de 3 y 4 son $2a$ (ver Figura 3.70) y si Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 y Δl_4 son los cambios en las longitudes de 1, 2, 3 y 4, como 1, 2 y 3 están en compresión y 4 en tracción, tendríamos

$$\Delta l_4 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3. \quad (3.116)$$

Calculemos ahora los cambios en las longitudes Δl_i , $i = 1, 2, 3, 4$, para ello para cada sección i de la Figura 3.72 vamos a asumir que se aplica de forma aproximada el principio de Saint Venant, luego de la ley de Hooke (3.71) para 1 tenemos

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{a} \approx \frac{\sigma_1}{E} = \frac{A}{d^2} \frac{1}{E},$$

donde se ha usado el hecho que el área de la sección transversal es d^2 . De la ecuación anterior tenemos

$$\Delta l_1 = \frac{Aa}{d^2 E}, \quad (3.117)$$

y siguiendo un procedimiento similar para 2, 3 y 4 tenemos también

$$\Delta l_2 = \frac{Ia}{d^2 E}, \quad \Delta l_3 = \frac{I2a}{d^2 2E}, \quad \Delta l_4 = \frac{B2a}{d^2 2E}. \quad (3.118)$$

Reemplazando (3.117), (3.118) en (3.116) después de algunas simplificaciones se llega a

$$A + 2I = B, \quad (3.119)$$

que es la ecuación extra (que se obtuvo con el uso de la relación esfuerzo-deformación) que necesitábamos para solucionar de forma completa el problema. Reemplazando (3.119) en (3.115) se llega a una ecuación para I de donde tenemos

$$I = \frac{3}{4}F, \quad (3.120)$$

por lo que se tiene

$$A = -\frac{F}{4}, \quad B = \frac{5}{4}F. \quad (3.121)$$

Vemos que A sería negativo lo que contradice el sentido que se le había dado a esa fuerza en los diagramas de cuerpo libre de la Figura 3.71, de modo que debemos solucionar todo de nuevo pero ahora vamos a asumir que A tiene el sentido contrario al que aparece en la Figura 3.71. La única implicancia de esto si se observa bien es que 1 se alargaría en vez de acortarse y todos los cálculos para Δl_i se mantiene, también la ecuación (3.115)₁ se debe cambiar, en ese caso tendríamos

$$A = F - I, \quad (3.122)$$

en tanto que la ecuación (3.115)₂ se mantendría.

Como ahora 1 y 4 se alargan y 2, 3 se acortan, tenemos la condición

$$\Delta l_4 + \Delta l_1 = \Delta l_2 + \Delta l_3, \quad (3.123)$$

que usando (3.117) y (3.118) nos da la condición

$$B + A = 2I, \quad (3.124)$$

y con el uso de esta ecuación y (3.122) y (3.115)₂ se llega a

$$I = \frac{3}{4}F, \quad A = \frac{F}{4}, \quad B = \frac{5}{4}F, \quad (3.125)$$

y como ahora son positivos hemos solucionado la primera parte del problema.

Para ver el movimiento de la interface podemos analizar el alargamiento o acortamiento del cuerpo \mathcal{A} . De los resultados anteriores, en particular con Δl_1 (alargamiento) y Δl_2 (acortamiento) tenemos que su movimiento sería

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{Fa}{4d^2E} - \frac{3Fa}{4d^2E} = -\frac{1aF}{2d^2E}, \quad (3.126)$$

de donde tenemos que la interface se movería hacia la izquierda en $\frac{3aF}{8d^2E}$.

3. La viga rígida AB de la Figura 3.73 está soportada por una barra de acero y otra de aluminio. Una carga P se aplica en A haciendo que AB se deflece hacia abajo. A continuación el tornillo en B se ajusta de tal forma que la viga quede de nuevo horizontal. ¿Qué tanto debe descender el tornillo desde su posición inicial para lograrlo?

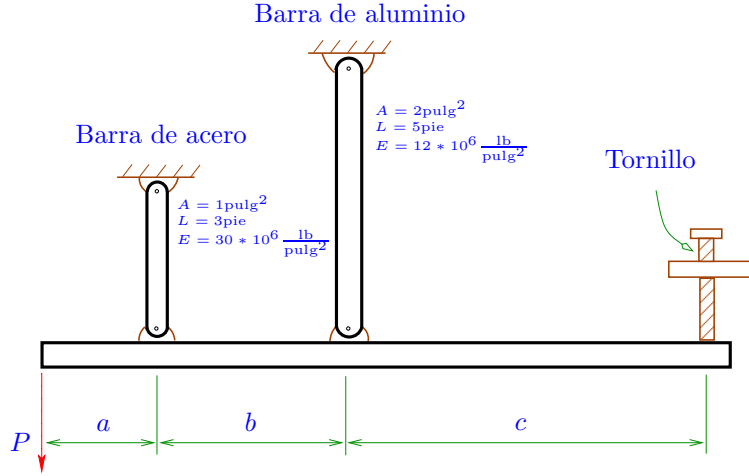


Figura 3.73: Tres barras unidas a viga rígida.

Datos: $P = 15000\text{ lbf}$, $a = 5\text{ pie}$, $b = 5\text{ pie}$, $c = 8\text{ pie}$ (1 pie=12 pulgadas)

Solución: Vamos a asumir que hay pequeñas deformaciones, que el tornillo es rígido y por tanto al aplicar la fuerza P la viga AB rotaría rigidamente respecto al punto B .

En la Figura 3.74 tenemos un diagrama de cuerpo libre de la viga AB en donde podemos ver la fuerza P , la fuerza de interacción con la barra de acero F_{ac} y la fuerza de interacción con la barra de aluminio F_{al} . No se ha incluido la fuerza de reacción en B (que en general tendría dos

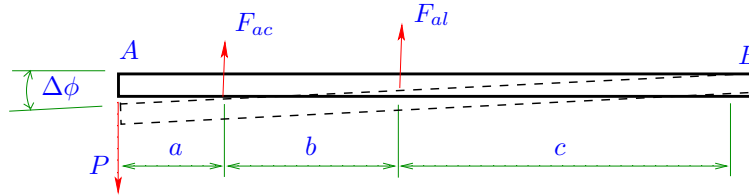


Figura 3.74: Tres barras unidas a viga rígida. Diagrama de cuerpo libre.

componentes) pues no es necesaria para el siguiente balance.

Si se hace balance de momentos respecto al punto B , es decir $\sum_B M_z = 0$ y si $\Delta\phi$ es pequeño tendríamos

$$(a + b + c)P - (b + c)F_{ac} - cF_{al} = 0. \quad (3.127)$$

Si la barra AB rota rigidamente respecto al punto B , de la Figura 3.74

podemos ver que podemos definir un ángulo de ‘rotación’ que denominaremos $\Delta\phi$. De la conocida relación para un arco $arco = \text{angulo} * \text{radio}$ podemos calcular los alargamientos de las barras de acero Δl_{ac} y aluminio Δl_{al} como

$$\Delta l_{ac} = (b + c)\Delta\phi, \quad \Delta l_{al} = c\Delta\phi. \quad (3.128)$$

Si l_{ac} , ε_{ac} , A_{ac} y E_{ac} son la longitud, la deformación longitudinal, el área de la sección transversal y el módulo de elasticidad de la barra de acero, y si l_{al} , ε_{al} , A_{al} y E_{al} las respectivas cantidades para la barra de aluminio, de la ley de Hooke (3.71) tenemos $\varepsilon_{ac} = \frac{F_{ac}}{A_{ac}} \frac{1}{E_{ac}}$ y $\varepsilon_{al} = \frac{F_{al}}{A_{al}} \frac{1}{E_{al}}$. Como $\varepsilon_{ac} = \frac{\Delta l_{ac}}{l_{ac}}$ y $\varepsilon_{al} = \frac{\Delta l_{al}}{l_{al}}$, finalmente esto nos da las relaciones

$$\frac{\Delta l_{ac}}{l_{ac}} = \frac{F_{ac}}{A_{ac}} \frac{1}{E_{ac}}, \quad \frac{\Delta l_{al}}{l_{al}} = \frac{F_{al}}{A_{al}} \frac{1}{E_{al}},$$

y con el uso de (3.128) se llega a

$$F_{ac} = \frac{(b + c)\Delta\phi A_{ac} E_{ac}}{l_{ac}}, \quad F_{al} = \frac{c\Delta\phi A_{al} E_{al}}{l_{al}}. \quad (3.129)$$

Reemplazando (3.129) en (3.127) se obtiene la ecuación

$$(a + b + c)P = \frac{(b + c)^2 \Delta\phi A_{ac} E_{ac}}{l_{ac}} + \frac{c^2 \Delta\phi A_{al} E_{al}}{l_{al}}, \quad (3.130)$$

que es la ecuación que nos permitiría encontrar, por ejemplo, $\Delta\phi$. Para los datos de este problema de la ecuación anterior se llega a

$$\Delta\phi = 1,352 * 10^{-4} \text{rad}. \quad (3.131)$$

Respecto a cuanto debería descender el tornillo en B , por la forma simplificada en que hemos resuelto el problema es fácil ver que dicha distancia sería el desplazamiento vertical en A , que es simplemente $(a + b + c)\Delta\phi$, que en este problema nos da 0,0292 pulgadas.

3.7.2. Ejercicios

1. Una placa de espesor constante e está empotrada en sus dos extremos a paredes rígidas y está sometida a una fuerza puntual P como la muestra la Figura 3.75. Determine las reacciones causadas en las paredes. El modulo de elasticidad del material de la barra es E .

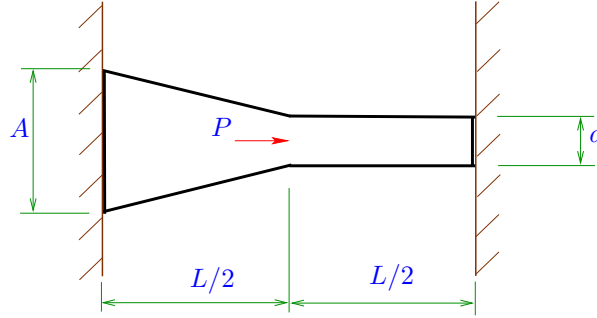


Figura 3.75: Placa en tracción.

2. La barra rígida $ABCD$ de peso W de la Figura 3.76 está suspendida por tres alambres de acero de módulo de elasticidad E . Cada alambre tiene un diámetro d . Determine los esfuerzos producidos en cada uno de los alambres.

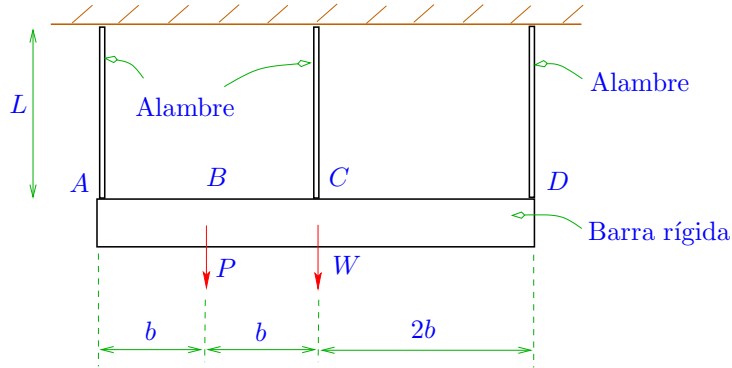


Figura 3.76: Barra sostenida por tres alambres.

Datos: $W = 10000\text{N}$, $P = 5000\text{N}$, $d = 0,5\text{cm}$, $L = 1\text{m}$, $b = 50\text{cm}$, $E = 190\text{GPa}$

3. Las barras BC , BD , BG y BH de la Figura 3.77 están unidas por un pasador en B y sometidas a una fuerza $F = 20\text{kN}$. Determine el despla-

zamiento en B . Determine la máxima fuerza F que se puede aplicar para que ninguna de las barras alcance el esfuerzo de fluencia trabajando con un factor de seguridad $FS = 1,5$. Asuma que la barra BH no muestra pandeo.

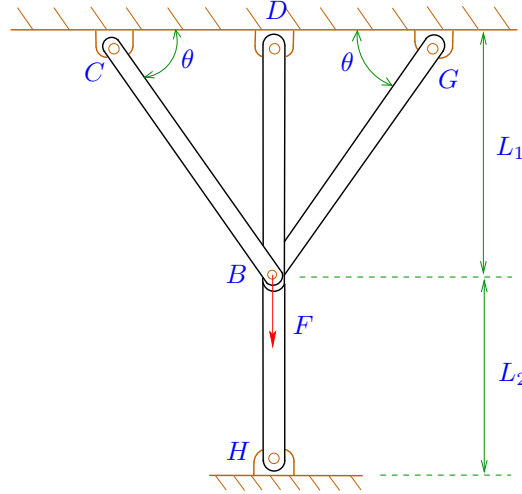


Figura 3.77: Barras y pasador.

Datos:

Módulo de elasticidad para todas las barras $E = 210\text{GPa}$,

Esfuerzo de fluencia para todas las barras $\sigma_o = 200\text{MPa}$,

$L_1 = 2\text{m}$, $L_2 = 1\text{m}$, $\theta = 60^\circ$,

Área de la sección transversal para todas las barras $A = 8\text{cm}^2$.

4. Las dos barras pegadas de la Figura 3.78, cuya sección transversal es de área A , están pegadas a dos muros rígidos. A la temperatura ambiente inicial las barras están libres de esfuerzos. La barra (1) tiene un coeficiente de expansión térmica α_1 y un módulo de elasticidad E_1 , en tanto que la barra (2) tiene un coeficiente de expansión térmica α_2 con módulo E_2 ; tanto α como E se asumen aproximadamente constantes en función de la temperatura para las dos barras. Asuma ahora que ambas barras sufren un aumento uniforme de temperatura ΔT . Determine la fuerza que las paredes ejercen sobre las barras en este caso, así como el desplazamiento de la interface entre las barras.
5. La barra de acero AD mostrada en la Figura 3.79 tiene un área transversal de $0.4[\text{in}^2]$ y está cargada por fuerzas $P_1 = 2700[\text{lbf}]$, $P_2 = 1800[\text{lbf}]$ y $P_3 = 1300[\text{lbf}]$. Las longitudes de los segmentos de la barra son $a = 60[\text{in}]$, $b = 24[\text{in}]$ y $c = 36[\text{in}]$.

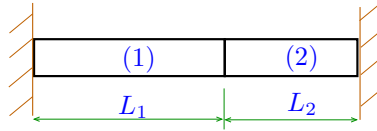


Figura 3.78: Barras bajo el efecto de un aumento de la temperatura.

- a) Suponga que el módulo de elasticidad es $E = 30 \cdot 10^6 [\text{lbf/in}^2]$ y calcule el cambio de longitud δ de la barra. ¿Se alarga o se acorta la barra?
- b) ¿Qué cantidad P debe aumentarse la carga P_3 para que el extremo D de la barra no se mueva cuando se aplican las cargas?

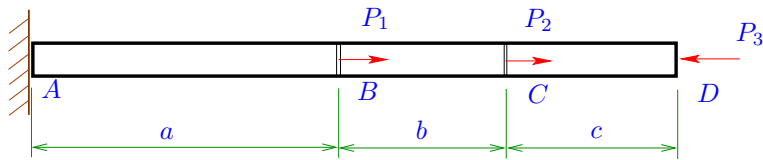


Figura 3.79: Barra AD .

Capítulo 4

Torsión

En este capítulo estudiaremos el primer tipo de deformación particular que corresponde a la torsión pura.

4.1. Torsión en eje de sección circular

El primer caso y el más simple a considerar corresponde a un eje de sección circular, en donde en un extremo se aplica un momento puro y en el otro se asume al eje empotrado en un muro rígido como el que se muestra en la Figura 4.1. En un problema de esta naturaleza al momento puro lo llamaremos torque

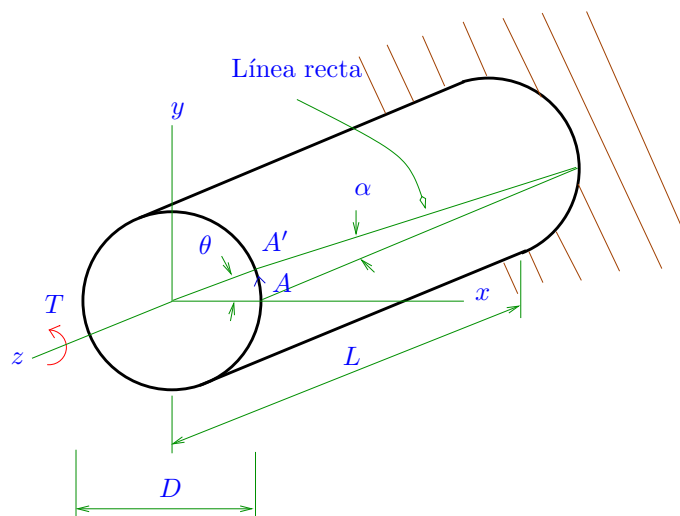


Figura 4.1: Torsión en eje de sección circular.

y en general se denotará como T .

En la Figura 4.1 tenemos un sistema de coordenadas Cartesiano, imaginemos que antes de ser deformado por T , se marca un punto A en el contorno. No es difícil ver que cuando se aplica T y el cilindro se deforma, el punto A se moverá hacia arriba ‘girando’ pegado a la superficie del cilindro hasta el punto A' , como se puede ver en la misma figura.

Imaginemos que se dibujan dos líneas rectas en el cilindro antes de ser deformado. La primera línea va desde el centro del cilindro al punto A y la segunda línea es horizontal, va desde el muro al punto A . Ahora vamos a discutir en detalle las simplificaciones que haremos para modelar la deformación de este eje.

Primero que todo vamos a asumir que las líneas rectas mencionadas anteriormente permanecen rectas cuando el cilindro se deforma. Esta es una aproximación razonable si la deformación se asume ‘pequeña’.

Como las líneas se asumen rectas cuando se deforma el eje, se pueden definir dos ángulos, θ y α como aparecen en la Figura 4.1. Asumir que la deformación es pequeña significará en particular que α es pequeño como lo demostraremos después.

Imaginemos que se dibujan dos cortes imaginarios en el eje, tal como se muestra en la Figura 4.2. Antes de ser deformado se dibujan dos puntos A y B

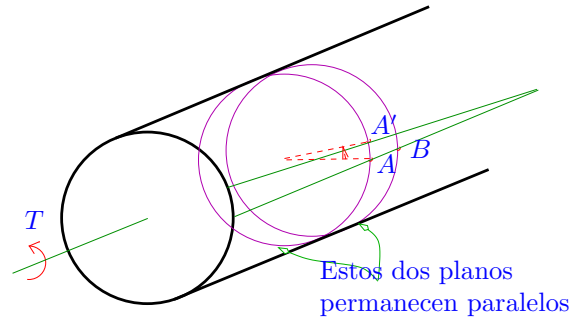


Figura 4.2: Torsión en eje de sección circular. Dos secciones permanecen paralelas.

en una línea horizontal. Vamos a asumir que al ser deformado el eje, estas dos secciones circulares (y cualquier otra sección) mantienen la forma circular y no solo eso, vamos a asumir que el diámetro no cambia de forma significativa, y que por tanto la deformación se puede ver como dos discos rígidos (muy delgados en la dirección z) rotando uno respecto al otro; luego la deformación total del eje se podría considerar como pequeños ‘giros’ relativos de una cantidad infinita de discos rígidos de espesor muy pequeño.

De manera adicional se asumirá además que los planos en donde se ubican A y B , que originalmente son paralelos, seguirán siendo paralelos al momento de producirse la deformación.

Teniendo presente los supuesto anteriores considerémos ahora la Figura 4.3. En esta figura dibujamos nuevamente las dos líneas que definen los ángulos θ

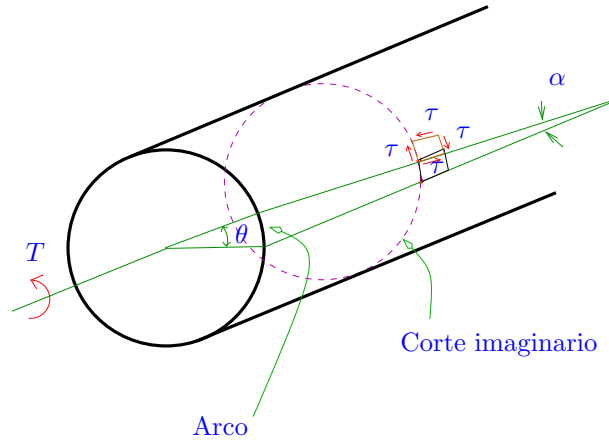


Figura 4.3: Torsión en eje de sección circular. Esfuerzos de corte por torsión.

y α , y procedemos ahora a dibujar en el manto del eje un cuadrado diferencial muy pequeño (con líneas negras antes de ser deformado) como se muestra en la misma figura.

Teniendo presente los supuestos respecto a la forma como se deforman dos planos paralelos, no es difícil apreciar que la forma final del cuadrado diferencial sería como se muestran en la Figura 4.3 con líneas café.

En la Figura 4.4 tenemos una vista frontal ampliada del cuadrado diferencial antes de deformarse $ABCD$ y cuando se ha deformado $A'B'C'D'$. Lo que vemos

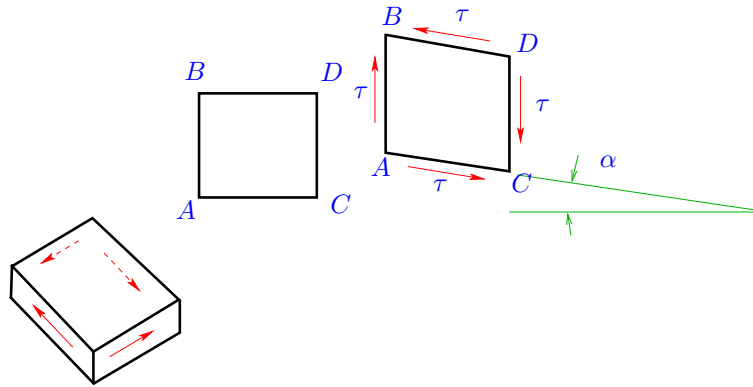


Figura 4.4: Torsión en eje de sección circular. Esfuerzos de corte por torsión en un elemento diferencial en el manto del cilindro.

en esta figura y en la figura anterior es que los ángulos interiores del cuadrado cambian su magnitud, y por tanto lo que estamos presenciando es en particular

una deformación en corte para el cuadrado diferencial. Vamos a asumir que no hay cambios de longitudes apreciables y por tanto no habrán deformaciones longitudinales en el cuadrado diferencial. De las Figuras 4.4 y de la ecuación (3.79) podemos identificar $\vartheta = \alpha$, luego de (3.80) teníamos

$$\tau = G\alpha. \quad (4.1)$$

De la Figura 4.1 vemos que el arco determinado con θ sería $r\theta$, con r un radio arbitrario $0 \leq r \leq D/2$. Si α es pequeño el mismo arco se puede calcular aproximadamente como $L\alpha$, de modo que

$$r\theta = L\alpha,$$

y podemos ver que si $r \rightarrow 0$ entonces $\alpha \rightarrow 0$ y que si $r \nearrow$ entonces $\alpha \nearrow$, de modo que la mayor deformación en corte se produciría en el manto o la parte exterior del eje para $r = D/2$. De la expresión anterior se tiene

$$\alpha = \frac{r\theta}{L}, \quad (4.2)$$

de modo que en (4.1) se llega a

$$\tau = \frac{G\theta}{L}r. \quad (4.3)$$

Se puede ver entonces que τ varía linealmente con r , que tiene su valor máximo en $r = D/2$ y si $\theta \nearrow$ esto implica que $\tau \nearrow$, lo que sería correcto pues significa que a mayor ángulo de torsión mayores esfuerzos son requeridos para lograrlos. Finalmente si $L \nearrow$ luego $\tau \searrow$, o sea un eje de mayor largo requeriría menores esfuerzos para ‘torsearse’.

Del análisis que aparece en las Figuras 4.3 y 4.4 se tiene que sobre una superficie de corte en el eje, la distribución de esfuerzo de corte sería como se muestra en la Figura 4.5. En toda la superficie de corte τ estaría a 90° respecto

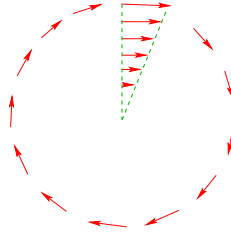


Figura 4.5: Torsión en eje de sección circular. Distribución para los esfuerzos de corte en una sección obtenida por corte imaginario.

a una línea radial, y en todas partes su valor está dado por (4.3).

Cuando se hace un corte imaginario, en un lado se tendría el torque total T (ver Figura 4.3) y en el otro lado tendríamos una distribución de esfuerzo de

corte como se ve en la Figura 4.5. En la Figura 4.6 tenemos una nueva vista de la superficie con distribución de esfuerzo de corte, en particular hemos dibujado uno de esos esfuerzos sobre un elemento diferencial de área. Para la parte del

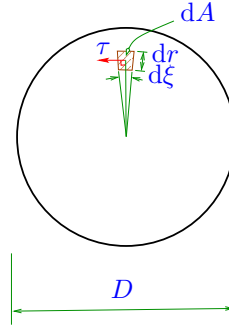


Figura 4.6: Torsión en eje de sección circular. Esfuerzos de corte por torsión en un elemento diferencial.

cilindro extraída con el corte debe haber equilibrio de modo que si la fuerza por τ es τdA y el torque respecto al centro por tanto es $r\tau dA$, entonces¹

$$\begin{aligned} T &= \int_{\text{Area seccion}} r\tau dA, \\ &= \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \frac{G\theta}{L} r^3 d\xi dr, \end{aligned} \quad (4.4)$$

de donde finalmente se obtiene

$$T = \frac{G\theta}{L} \frac{\pi D^4}{32}. \quad (4.5)$$

Se define el momento polar de inercia J como

$$J = \frac{\pi D^4}{32}, \quad (4.6)$$

luego (4.5) queda como

$$T = \frac{G\theta}{L} J. \quad (4.7)$$

De (4.7) tenemos $\frac{G\theta}{L} = \frac{T}{J}$, luego en (4.3) se tiene²

$$\tau = \frac{Tr}{J}, \quad (4.8)$$

¹En estas expresiones hay que tener mucho cuidado de no confundir el ángulo de torsión θ con el ángulo del sistema polar ξ . Este último se usa simplemente para realizar la integral de superficie.

²En la solución para el esfuerzo de corte (4.8) podemos ver que τ al final no depende de la deformación ni del tipo de material, solo de T , D y la posición radial r . Esto puede resultar curioso, pues en los pasos anteriores se había usado la deformación en corte α para obtener algunas relaciones entre las distintas variables del problema. En este problema el uso de la

y el esfuerzo de corte máximo en $r = D/2$ sería igual a

$$\tau_{max} = \frac{TD}{2J}. \quad (4.9)$$

Hay dos subcasos especiales para el caso del eje de sección circular que tratamos ahora. En el primero consideramos el caso adicional en que se está trabajando con un tubo de diámetros D_1 (interior) y D_2 (exterior), tal como se muestra en la Figura 4.7.

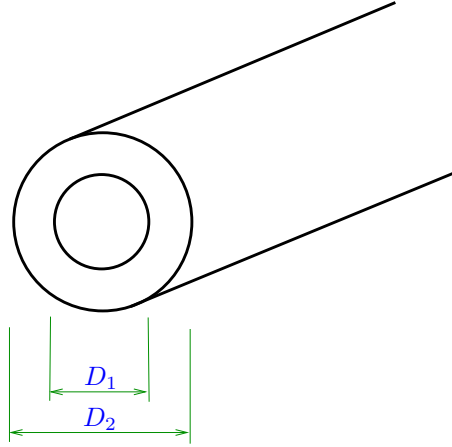


Figura 4.7: Torsión en eje tubular de sección circular.

Es fácil ver que en este caso el análisis anterior es casi el mismo, lo único que cambiaría serían los límites de la integral en la dirección radial en (4.4), donde se tendría $T = \int_{D_1/2}^{D_2/2} \int_0^{2\pi} \frac{G\theta}{L} r^3 d\xi dr$, de donde se llegaría a $T = \frac{G\theta}{L} J$, donde en este caso

$$J = \frac{\pi}{32}(D_2^4 - D_1^4). \quad (4.10)$$

Otro caso distinto corresponde a dos ejes concéntricos hechos de materiales distintos, como se ilustra en la Figura 4.8. En esta figura se tiene un eje 1 de sección circular de material con constante G_1 y de diámetro D_1 . Perfectamente pegado a él tenemos un eje tubular de diámetro interior D_1 y diámetro exterior D_2 con constante G_2 .

No es tan sencillo extender las expresiones anteriores para este problema, pues al estar trabajando con dos materiales, se podría dar el caso de alguna discontinuidad en los esfuerzos.

deformación fue simplemente un paso intermedio para obtener finalmente (4.8).

En mecánica de sólidos hay algunos problemas especiales en donde las deformaciones no aparecen de manera directa en las expresiones para los esfuerzos, siendo el problema de torsión en un eje de sección circular uno de dichos casos, sin embargo en general los esfuerzos (su distribución) si van depender fuertemente de las propiedades del material y la deformaciones.

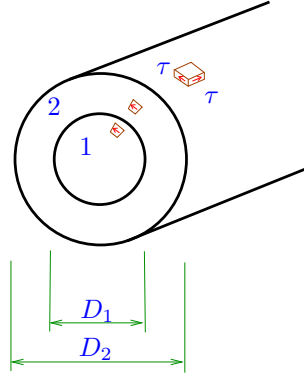


Figura 4.8: Torsión en eje tubo de sección circular. Esfuerzos de corte.

Sin embargo de la Figura 4.8 y de la Figura 4.3 vemos que el tipo de esfuerzos τ que se generan, si se dibujan sobre cubos diferenciales, al acercarnos a la interface entre 1 y 2, pueden perfectamente mostrar discontinuidades, pues aparecerían en los costados de los cubos, no en la posible cara en la interface. La consecuencia de las observaciones anteriores es que en analogía con (4.4) tendríamos $T = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \frac{G(r)\theta}{L} r^3 d\xi dr$ donde ahora G dependería del radio, en particular $G = G_1$ si $r \leq D_1/2$ y $G = G_2$ si $D_1/2 \leq r \leq D_2/2$, luego

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi\theta}{L} \left(\int_0^{D_1/2} G_1 r^3 dr + \int_{D_1/2}^{D_2/2} G_2 r^3 dr \right), \\ &= \frac{2\pi\theta}{L} \left[G_1 \frac{D_1^4}{64} + \frac{G_2}{64} (D_2^4 - D_1^4) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2. Torsión en eje de sección rectangular

En el caso de un eje de sección rectangular de lados a , b con $b \leq a$, las siguientes expresiones son válidas³

$$T = \frac{\theta G}{L} J, \quad \tau_{max} = \frac{T}{\kappa_1 a b^2}, \quad J = \kappa_2 a b^3, \quad (4.12)$$

donde κ_1 y κ_2 son constantes que se pueden obtener de la Tabla 4.1

³Originalmente con secciones no circulares se intentó seguir el mismo procedimiento que para el caso de ejes circulares vistos en la Sección 4.1. Sin embargo la evidencia experimental, en particular respecto a los lugares o puntos en donde ocurría el máximo esfuerzo, refutaban las expresiones teóricas encontradas de esta manera.

Fue Saint Venant quién propuso el método correcto de análisis para el caso de torsión en secciones no circulares. No daremos detalles del método aquí, pues para ello es necesario usar herramientas de la teoría de la elasticidad lineal, que escapan de los objetivos de este curso. Las formulas (4.12) son aproximaciones numéricas de soluciones con series de Fourier de ese problema.

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
κ_1	0,208	0,231	0,246	0,282	0,312	$1/3$
κ_2	0,141	0,296	0,229	0,281	0,312	$1/3$

Cuadro 4.1: Valores para las constantes κ_1 y κ_2 en (4.12).

En $(4.12)_2$ tenemos el valor máximo para el esfuerzo de corte, el que se produciría en la mitad de la superficie con menor espesor, tal como se muestra en la Figura 4.8.

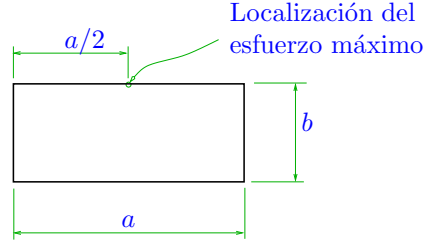


Figura 4.9: Torsión en eje de sección rectangular. Localización del máximo esfuerzo de corte.

4.3. Torsión en eje de sección delgada abierta

Aquí veremos un problema en donde aplicaremos (4.12). Nos interesa estudiar el caso de vigas o ejes con secciones de pared delgada y ‘abierta’, en donde en la Figura 4.10 tenemos algunos ejemplos de dichas secciones o perfiles.

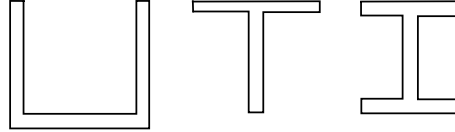


Figura 4.10: Ejemplos de secciones delgadas abiertas.

Vamos a plantear la teoría para este tipo de problemas basados en un ejemplo específico que se muestra en la Figura 4.11. En dicha figura tenemos un perfil cuya sección la hemos dividido en tres partes. Cada una de estas partes es un rectángulo, donde vamos a asumir que $b_i \ll a_i$ y por tanto de la Tabla 4.1 tenemos $\kappa_1 = 1/3$ y $\kappa_2 = 1/3$.

El siguiente supuesto es importante: *vamos a asumir que el ángulo θ de torsión es el mismo para 1, 2 y 3*. La justificación sería que al rotar por la

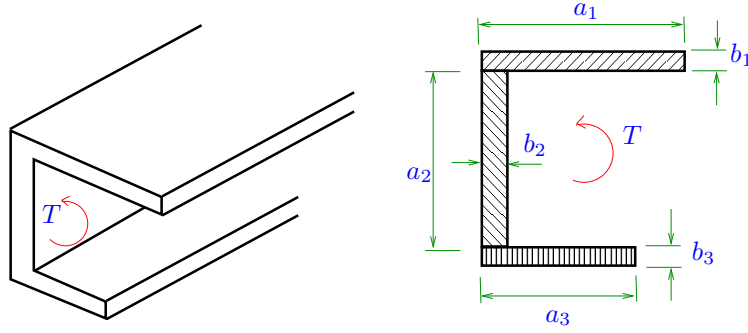


Figura 4.11: Torsión en eje de sección delgada abierta.

deformación la sección completa, el ángulo de torsión debería ser el mismo, pues de otra forma la sección se separaría.

Otra observación importante:

El torque total T deberá ser igual a la suma de los torques causado en cada uno de los rectángulos en los que hemos dividido la sección⁴.

Para cada uno de los rectángulos tenemos

$$T_i = G\theta \frac{J_i}{L}, \quad J_i = \frac{a_i b_i^3}{3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.13)$$

Luego de las observaciones anteriores

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{G\theta}{L}(J_1 + J_2 + J_3). \quad (4.14)$$

De este ejemplo podemos inferir que en un caso general con n secciones rectangulares tendríamos

$$T = \frac{G\theta}{L} \sum_{i=1}^n J_i, \quad (4.15)$$

y se puede definir un momento polar total J_T como $J_T = \sum_{i=1}^n J_i$.

⁴La justificación de este supuesto u observación se puede buscar en (4.4), en donde en términos más generales se tendría que T debería calcularse como algún tipo de integral de superficie sobre la sección. Pero la integral sobre las tres superficies sería simplemente la suma de las integrales sobre cada una de esas superficies y cada una de esas integrales se podría interpretar como un torque actuando solo en esa parte.

Puede parecer un poco extraño separar T en T_1 , T_2 y T_3 , pero del Capítulo 2 se vio (al menos para cuerpos rígidos) que el vector momento puro (el torque) es un vector libre, luego podemos tener perfectamente T_i , $i = 1, 2, 3$, y luego ‘mover’ estos T_i a un punto común para determinar un T total.

Respecto a los esfuerzos de corte máximo, vamos a tener distintos valores para cada una de las partes rectangulares como

$$\tau_{max_i} = \frac{T_i}{\kappa_1 a_i b_i^2} = \frac{G \theta J_i}{L} = \frac{G \theta a_i b_i^3}{3L} = \frac{G \theta b_i}{L}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.16)$$

Pero

$$T = \frac{G \theta J_T}{L} \Rightarrow \theta = \frac{TL}{G J_T}, \quad (4.17)$$

luego en (4.16) tendríamos

$$\tau_{max_i} = \frac{G}{L} \frac{TL}{G J_T} b_i = \frac{T b_i}{J_T}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.18)$$

Luego el máximo entre entre estos τ_{max_i} será aquel con b mayor, es decir

$$\tau_{max} = \frac{T b_{max}}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i^3}{3}}, \quad (4.19)$$

y aparece en el centro de la periferia de esa parte de la sección.

4.4. Torsión en eje de sección delgada cerrada

Ahora trataremos el último caso especial que corresponde a un eje de pared delgada cerrada. Antes de iniciar el análisis de este caso, es necesario hacer una observación respecto a los esfuerzos de corte en una viga o eje de pared delgada. En un caso como este asumiremos que la dirección de los esfuerzos de corte sigue el perfil de la pared delgada, tal como se muestra como en la Figura 4.12.

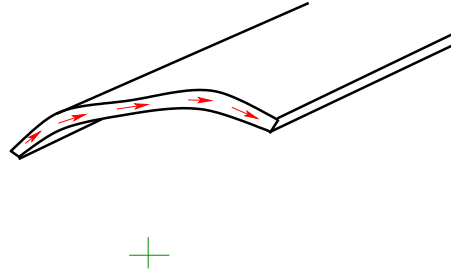


Figura 4.12: Distribución aproximada de esfuerzos para una sección delgada.

Considerémos el eje mostrado en la Figura 4.13 en donde tenemos una vista tridimensional de un eje cerrado de pared delgada. Por simplicidad la parte exterior del eje se asume totalmente plana, es decir tiene la forma de un rectángulo, sin embargo la parte interior es irregular, es decir el espesor si bien pequeño, es variable en el contorno.

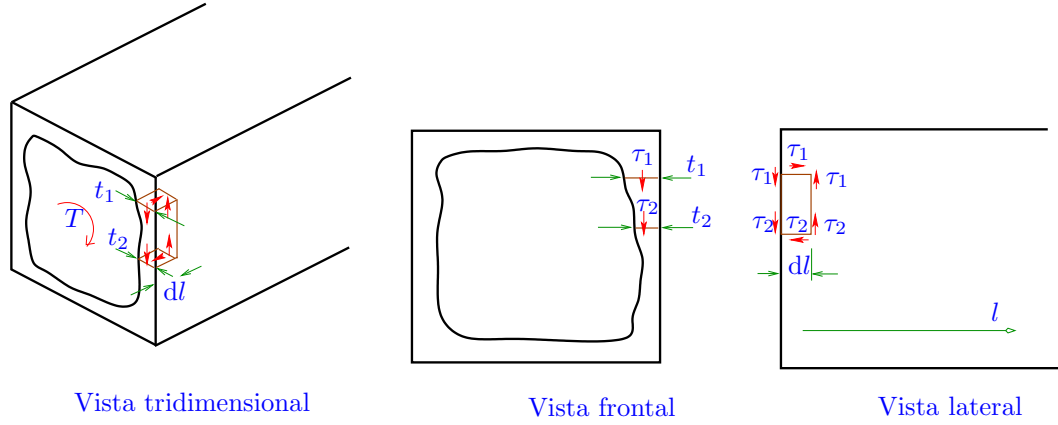


Figura 4.13: Torsión en eje de sección delgada cerrada.

Extraigamos una parte de la pared del eje, que se dibuja en la figura tridimensional con líneas de color café. Tenemos una vista frontal del eje y otra vista lateral en la misma Figura 4.13. En estas vistas es posible apreciar la forma de esta parte o elemento que se ha extraído de la pared del eje.

El elemento puede tener una longitud finita en la dirección del contorno de la pared, pero en la dirección axial (que hemos denominado l) este elemento tiene una longitud infinitesimal dl .

De la observación concerniente a la Figura 4.12, tenemos que la distribución de esfuerzos de corte sigue la forma del contorno de la pared, como se ve en la vista frontal en la Figura 4.13. En el punto 1 tenemos un esfuerzo de corte τ_1 y un espesor de pared t_1 , en el punto 2 tenemos τ_2 y t_2 . Como en la dirección l la longitud del elemento es diferencial, por equilibrio a la rotación en las caras en la dirección del eje l se deben generar componentes del esfuerzo de corte, como se aprecia en la vista lateral.

El elemento debe estar en equilibrio, de modo que en particular esto implica que $\sum F_l = 0$, luego de la Figura 4.13 tenemos que

$$\tau_1 t_1 dl - \tau_2 t_2 dl = 0,$$

de donde se tiene que

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2. \quad (4.20)$$

Como la igualdad anterior es válida para cualquier par de puntos en el contorno de la pared del eje, se cumple que

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_3 t_3 = \dots = \tau_i t_i = Q = \text{constante}. \quad (4.21)$$

El resultado anterior es válido para cualquier forma de la pared de la viga, luego considérese la Figura 4.14 en donde tenemos una vista frontal de un eje de una pared de forma mucho más arbitraria. En esta figura vemos el centro

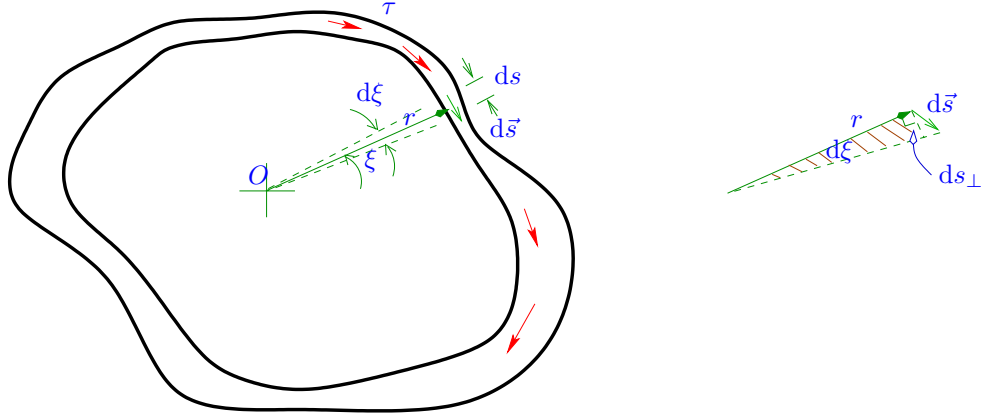


Figura 4.14: Torsión en eje de sección delgada cerrada. Caso general.

respecto al cual el eje sufre la torsión y a partir de él tenemos el vector \vec{r} que nos da la posición de cualquier punto en el contorno de la pared, tenemos también el vector tangente $d\vec{s}$ y su longitud que llamamos simplemente ds .

Si se escoge un elemento de longitud infinitesimal en la dirección del contorno, la fuerza $d\vec{f}$ que aparece sobre el elemento diferencial sería igual a

$$d\vec{f} = \tau t d\vec{s} = Q d\vec{s}, \quad (4.22)$$

donde ahora $t = t(s)$ es el espesor de la pared, que en general va a depender de la posición en el contorno. El diferencial de torque causado por $d\vec{f}$ respecto al centro del eje, si se usa (2.3), sería

$$d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{f} = \vec{r} \times Q d\vec{s}, \quad (4.23)$$

de modo que el torque total (como vector) sería simplemente (hay que recordar que Q es constante) la integral de contorno

$$\vec{T} = Q \oint \vec{r} \times d\vec{s}. \quad (4.24)$$

Pero en el esquema auxiliar del lado derecho de la Figura 4.14 podemos ver que el módulo del vector $\vec{r} \times d\vec{s}$ estaría dado por

$$\|\vec{r} \times d\vec{s}\| = r ds_{\perp} = 2dA, \quad (4.25)$$

donde dA sería el área diferencial achurada en esa figura. Como resultado de los cálculos anteriores se tiene que

$$T = \|\vec{T}\| = Q \oint \|\vec{r} \times d\vec{s}\| = 2Q \oint dA. \quad (4.26)$$

Se define

$$\bar{A} = \oint dA, \quad (4.27)$$

que es llamada el área promedio, pues es el área de la sección calculada hasta la mitad de la pared en todo su contorno.

Usando (4.27) en (4.26) se llega a

$$T = 2Q\bar{A}, \quad (4.28)$$

y de (4.21), (4.28) se obtiene una expresión para el esfuerzo de corte en cualquier punto del contorno como

$$\tau = \frac{T}{2\bar{A}t}, \quad (4.29)$$

de modo que el máximo esfuerzo de corte se obtendría como

$$\tau_{max} = \frac{T}{2\bar{A}t_{min}}. \quad (4.30)$$

4.5. Ejemplos y ejercicios de torsión

4.5.1. Ejemplos

1. En la Figura 4.15 se muestra un eje macizo compuesto de dos barras que se sueldan en A . Las barras son de materiales diferentes y por tanto sus

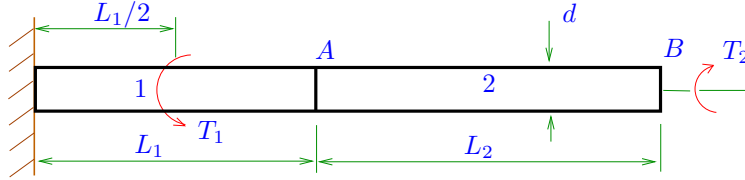


Figura 4.15: Ejemplo torsión.

módulos de corte son distintos. ¿Qué valor tiene el ángulo de torsión del extremo B ?

Datos: $L_1 = 10\text{pie}$, $L_2 = 12\text{pie}$, $T_1 = 500\text{lbfpie}$, $T_2 = 1000\text{lbfpie}$, $G_1 = 10 * 10^6\text{lb/pulg}^2$, $G_2 = 15 * 10^6\text{lb/pulg}^2$, $d = 3\text{pulg}$

Solución: El primer paso para solucionar el problema es hacer un diagrama de cuerpo libre de toda la barra compuesta, como se muestra en la Figura 4.16. En esa figura T_R sería el torque de reacción causado por la

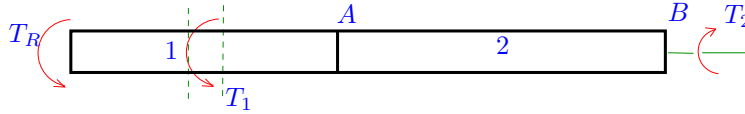


Figura 4.16: Ejemplo torsión. Diagrama de cuerpo libre.

pared sobre el eje, como el cuerpo está en equilibrio tenemos

$$T_R = T_2 - T_1 = 500\text{lbfpie}. \quad (4.31)$$

La formula (4.7) no se puede aplicar directamente en el problema mostrado en la Figura 4.16, pues esa expresión fue formulada originalmente para un eje con los torques aplicados en sus extremos y para un eje hecho de un solo material. Para aplicar (4.7) necesitamos separar el eje en varias partes, con cortes imaginarios convenientemente dispuestos. El primer corte se hará en 1, poco antes del punto de aplicación de T_1 , tal como se muestra en la Figura 4.16.

En la Figura 4.17 tenemos la primera sección del eje extraída con el corte mencionado anteriormente, como el corte se hace antes de T_1 , esta porción de eje solo estaría sometida a T_R en sus extremos. Ahora podemos aplicar

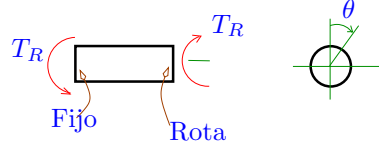


Figura 4.17: Ejemplo torsión. Diagrama de cuerpo libre de la primera sección.

(4.7) y para θ (el ángulo de torsión en este tramo) tendríamos

$$\theta = \frac{32T_R L_1/2}{\pi G_1 d^4} = 4,527 * 10^{-3} \text{rad.} \quad (4.32)$$

En la Figura 4.18 tenemos un diagrama de cuerpo libre del tramo restante de eje después de hacer un corte un poco después del punto de aplicación de T_1 (ver Figura 4.16). En este caso es posible ver que para este tramo

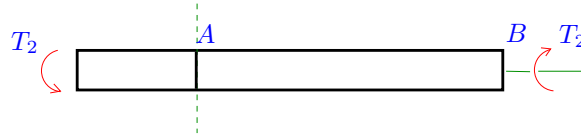


Figura 4.18: Ejemplo torsión. Diagrama de cuerpo libre de la segunda sección completa.

de eje solo tendríamos T_2 aplicado en sus extremos.

Como en la Figura 4.18 tendríamos un tramo de eje hecho con dos materiales, para aplicar (4.7) debemos separarlo en dos partes. El primer tramo de esta división adicional se puede ver en la Figura 4.19. Usando (4.7) para

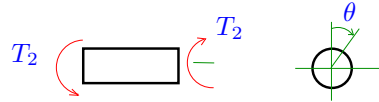


Figura 4.19: Ejemplo torsión. Diagrama de cuerpo libre de la segunda sección, primera parte.

calcular el cambio de ángulo relativo θ sería

$$\theta = \frac{32T_2 L_1/2}{\pi G_1 d^4} = 9,05 * 10^{-3} \text{rad.} \quad (4.33)$$

En la Figura 4.20 tenemos una representación del último tramo con el material 2. Usando (4.7) tenemos el cambio de ángulo relativo como

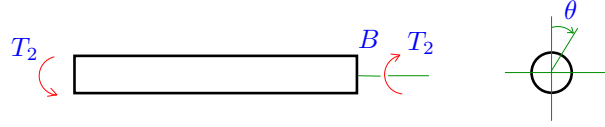


Figura 4.20: Ejemplo torsión. Diagrama de cuerpo libre de la segunda sección, segunda parte.

$$\theta = \frac{32T_2L_2}{\pi G_2d^4} = 0,0145\text{rad.} \quad (4.34)$$

Luego el ángulo de torsión total en B sería simplemente la suma de (4.32), (4.33) y (4.34) con lo que

$$\theta_B = 4,527 * 10^{-3} + 9,05 * 10^{-3} + 0,0145 = 0,028\text{rad,} \quad (4.35)$$

y su sentido es el de T_2 .

2. El eje A de la Figura 4.21 transmite un torque T de 1000lbfpie con una velocidad angular w_A de 50rpm. El diámetro del eje A es $D_A = 6$ pulgadas.

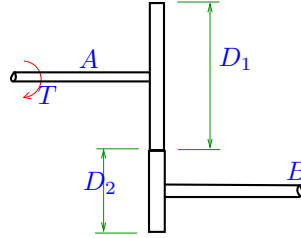


Figura 4.21: Ejemplo torsión. Ejes conectados por engranajes.

Si el valor del esfuerzo cortante máximo del eje A es igual para el eje B , ¿qué diámetro debe tener este eje?

Datos: $D_1 = 2$ pies, $D_2 = 1$ pie.

Solución: Este un problema un poco distinto a los típicos problemas de estática que se han visto hasta ahora, pues aquí tenemos velocidades angulares. Sin embargo, vamos a asumir que no hay ningún tipo de aceleración, y por tanto se puede tratar como un problema ‘cuasi-estático’.

Vamos a asumir que la ‘potencia’ se transmite sin pérdidas desde A a B , luego si Pot_A y Pot_B son las potencias en dichos ejes, tenemos

$$Pot_A = Pot_B \Rightarrow T_A w_A = T_B w_B. \quad (4.36)$$

Pero para los engranajes tenemos la igualdad de velocidad tangencial en el punto de contacto de modo que

$$D_1 w_A = D_2 w_B, \quad (4.37)$$

por lo que en (4.36) se llega a

$$T_B = \frac{D_2}{D_1} T_A. \quad (4.38)$$

Por otro lado, si T_A es el torque que siente el eje A , de (4.9) su esfuerzo de corte máximo sería

$$\tau_{max_A} = \frac{T_A}{J_A} \frac{D_A}{2} = \frac{T_A}{\frac{\pi D_A^4}{32}} \frac{D_A}{2} = \frac{16T_A}{\pi D_A^3}, \quad (4.39)$$

en tanto que para el eje B tendríamos

$$\tau_{max_B} = \frac{16T_B}{\pi D_B^3}. \quad (4.40)$$

Como en el enunciado del problema se dice que el diámetro de B debe ser tal que el esfuerzo de corte máximo sea el mismo que en A , de (4.39) se obtiene

$$T_B = \frac{D_B^3}{D_A^3} T_A, \quad (4.41)$$

luego junto con (4.38) esta ecuación es satisfecha si

$$D_B = D_A \sqrt[3]{\frac{D_2}{D_1}} = 7,56 \text{ pulg.} \quad (4.42)$$

3. En la Figura 4.22 tenemos una vista en corte de un eje de acero de diámetro $D_1 = 6$ pulgadas y un eje tubular de aluminio con un diámetro interior $D_2 = 12$ pulgadas y espesor de pared $t = 2$ pulgadas. Estos ejes están fijos a placas rígidas y mediante ellas se aplica al sistema un torque T de 5000lbfpie. ¿Qué valor tienen los esfuerzos máximos producidos por la torsión en cada material?

Datos: $L = 10$ pies, Módulo de corte del acero $G_{ac} = 15 * 10^6$ lbf/pulg², Módulo de corte del aluminio $G_{al} = 10 * 10^6$ lbf/pulg².

Solución: En la Figura 4.22 podemos apreciar que si tanto el eje de acero como el de aluminio están ambos pegados a las placas rígidas, entonces el ángulo de torsión para ambos ejes debería ser el mismo.

El torque T se aplicaría en un lado de la placa rígida, en tanto en el otro lado tendríamos los torques producto de la interacción con el eje de acero T_{ac} y con el eje de aluminio T_{al} . Luego para que la placa rígida esté en equilibrio se necesitaría que

$$T = T_{ac} + T_{al}. \quad (4.43)$$

Sea θ el ángulo de torsión común a ambos ejes, de (??) y (4.10) se tiene que

$$T_{ac} = \frac{G_{ac}}{L} \theta J_{ac}, \quad T_{al} = \frac{G_{al}}{L} \theta J_{al}, \quad (4.44)$$

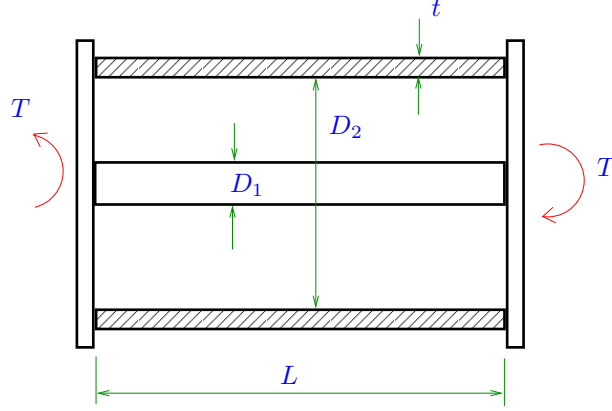


Figura 4.22: Ejemplo torsión. Ejes cilíndrico y eje tubular conectados a placas rígidas.

donde $J_{ac} = \frac{\pi D_1^4}{32}$ y $J_{al} = \frac{\pi}{32}[(D_2 + t)^4 - D_2^4]$. Luego como en (4.44) el ángulo θ es el mismo podemos despejar y tenemos, por ejemplo

$$T_{ac} = \frac{G_{ac}}{G_{al}} \frac{D_1^4}{[(D_2 + t)^4 - D_2^4]} T_{al}. \quad (4.45)$$

Reemplazando esta expresión en (4.43) se llega a una ecuación que nos permitiría encontrar, por ejemplo, T_{al} de

$$T = T_{al} \left\{ 1 + \frac{G_{ac}}{G_{al}} \frac{D_1^4}{[(D_2 + t)^4 - D_2^4]} \right\}, \quad (4.46)$$

que usando los datos para este problema implica que

$$T_{al} = 4504,7 \text{ lbfpie} \Rightarrow T_{ac} = 495,3 \text{ lbfpie}. \quad (4.47)$$

Con los resultados anteriores de (4.9) y (4.10) podemos obtener los máximos esfuerzos de corte como

$$\tau_{max_{ac}} = \frac{16T_{ac}}{\pi D_1^3} = 140,1 \text{ lbf/pulg}^2, \quad (4.48)$$

$$\tau_{max_{al}} = \frac{T_{al}}{\frac{\pi}{32}[(D_2 + t)^4 - D_2^4]} \frac{D_2 + t}{2} = 218 \text{ lbf/pulg}^2. \quad (4.49)$$

4.5.2. Ejercicios

1. Un tubo circular hueco A se ajusta sobre el extremo de una barra circular sólida B como se muestra en la Figura 4.23 en la parte superior. En un inicio, un agujero a través de la barra B forma un ángulo β con una línea que pasa por dos agujeros en la barra A tal como se muestra en la Figura 1 en la parte inferior en donde tenemos una vista *ampliada* de la sección del tubo y el cilindro en el punto de conexión.

Se hace girar la barra B hasta alinear los agujeros y se pasa un pasador por ellos. Cuando la barra B se libera y el sistema retoma el equilibrio: ¿Cual es el máximo esfuerzo de corte en A y B ?

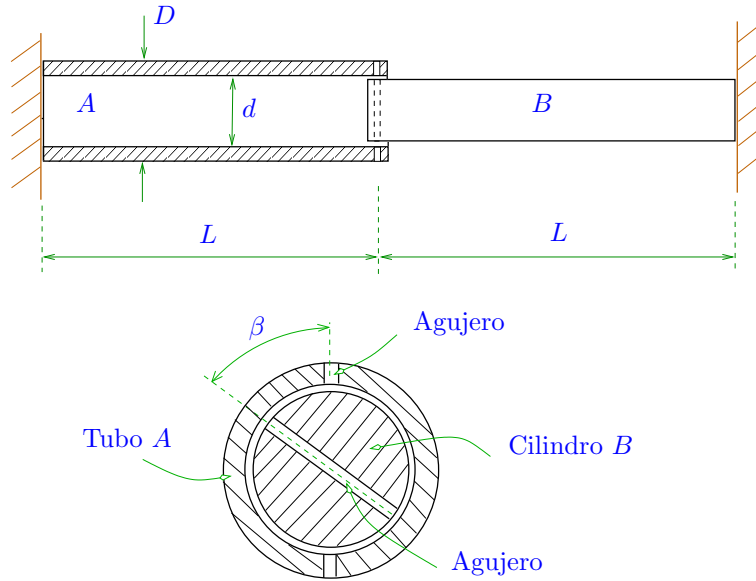


Figura 4.23: Tubo y cilindro.

2. En la Figura 4.24 tenemos un cilindro de acero que está parcialmente inserto en un tubo de aluminio. En esa zona de longitud l el cilindro y el tubo están perfectamente pegados. En los extremos del conjunto se aplican torques iguales pero opuestos de magnitud T .
 - a) Determine T para que el ángulo de torsión entre los extremos sea igual a 7° .
 - b) Determine el máximo valor para T para que el esfuerzo de corte en el tubo no sea mayor a $\tau = 30\text{MPa}$.
 - c) Determine el máximo valor para T para que el esfuerzo de corte en el cilindro no sea mayor a $\tau = 60\text{MPa}$.

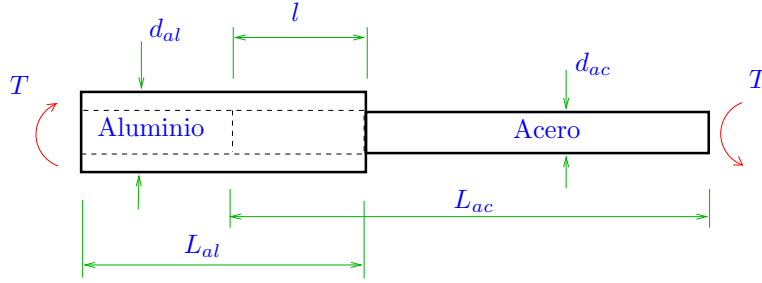


Figura 4.24: Tubo y cilindro.

Datos $l = 20\text{cm}$

Acero: $G_{ac} = 75\text{GPa}$, $L_{ac} = 90\text{cm}$, $d_{ac} = 7\text{cm}$

Aluminio: $G_{al} = 27\text{GPa}$, $L_{al} = 70\text{cm}$, $d_{al} = 10\text{cm}$.

- En la Figura 4.25 se tiene un cilindro cónico de diámetros D , d que está pegado a un cilindro recto de diámetro d . Ambos están empotrados a paredes rígidas. Los cilindros están hechos de materiales distintos con módulos de corte G_1 , G_2 , respectivamente. Determine las reacciones en las paredes y el máximo esfuerzo de corte por torsión.

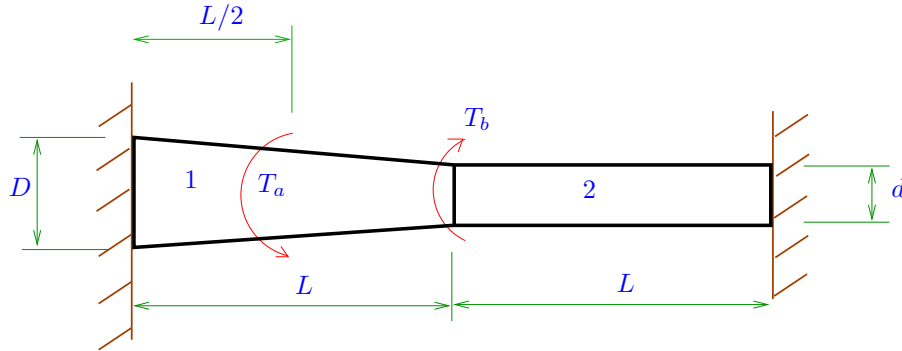


Figura 4.25: Cilindros pegados a paredes rígidas.

Datos:

$D = 10[\text{cm}]$, $d = 6[\text{cm}]$, $L = 40[\text{cm}]$, $T_a = 500[\text{Nm}]$, $T_b = 300[\text{Nm}]$,
 $G_1 = 50[\text{GPa}]$, $G_2 = 60[\text{GPa}]$.

- En la Figura 4.26 tenemos dos ejes de diámetros d_1 y d_2 , respectivamente, los cuales están conectados por medio de engranajes de diámetros D_1 , D_2 .

El eje de aluminio está bajo el efecto de un torque T . El eje de acero está empotrado en la pared del lado izquierdo y el eje de aluminio está apoyado en dos soportes sin roce.

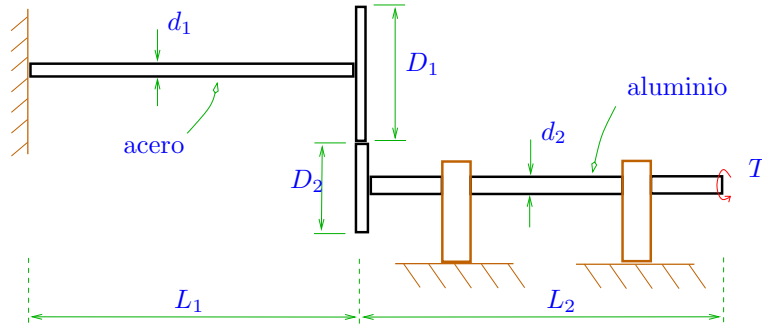


Figura 4.26: Dos ejes unidos por engranajes.

Determine d_1 y d_2 para que ninguno de los dos ejes falle. Use el criterio de Tresca con $FS = 2$.

Calcule el ángulo de torsión en el punto de aplicación de T .

Datos: $T = 10\text{kNm}$, $D_1 = 30\text{cm}$, $D_2 = 20\text{cm}$, $L_1 = 1\text{m}$, $L_2 = 1.2\text{m}$

Acero: $E = 190\text{GP1}$, $G = 75\text{GP1}$, $\sigma_o = 300\text{MPa}$

Aluminio: $E = 70\text{GP1}$, $G = 30\text{GP1}$, $\sigma_o = 100\text{MPa}$.

5. El eje circular AB mostrado en la Figura 4.27 está pegado en sus dos extremos a paredes rígidas. El eje tiene una parte con un orificio en su centro. El diámetro del eje es D en tanto que el diámetro del agujero es d y su módulo de corte es G . ¿A que distancia x se debe aplicar T_o de forma tal que las reacciones en las paredes en A y B sean iguales?
6. En la Figura 4.28 se tiene un eje de acero de diámetro $d = 100\text{mm}$. El eje tiene un soporte rígido en B unido a dos barras de acero DE y FG , cuya área de sección transversal es igual a 20mm^2 . En el extremo C se aplica un torque $T = 100\text{Nm}$.

Determine:

Esfuerzo en las barras FG y ED . Diagrama de momento torsor para AB .
Ángulo de torsión de C respecto a A en grados.

En la figura las dimensiones están en metros. El eje ABC tiene $E = 200\text{GPa}$, $G = 70\text{GPa}$ y las barras FG y DE tienen $E = 200\text{GPa}$.

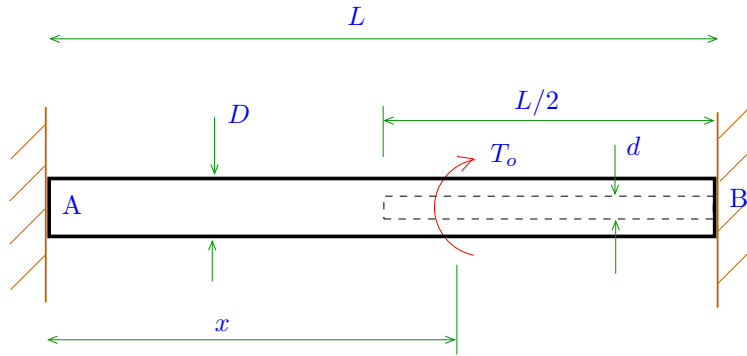


Figura 4.27: Cilindro parcialmente hueco bajo la acción de un torque.

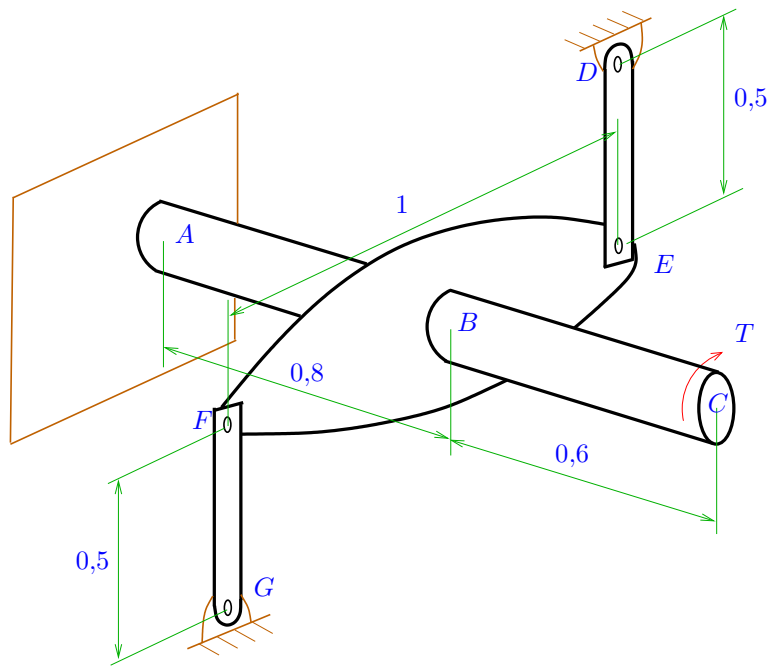


Figura 4.28: Barra en torsión.

Capítulo 5

Flexión y deflexión en vigas

Este es un segundo tipo especial de problema que estudiaremos en donde consideraremos en particular el problema de una viga sometida a algún tipo de fuerza o densidad de fuerza que genere momento interno M . El tipo de deformación y en particular el tipo de esfuerzos que se generan aquí son esfuerzos normales cuyas magnitudes pueden ser muy altas. Considerémos el problema mostrado en la Figura 5.1. Aquí tenemos una viga en el plano $x - y$ en cuyos

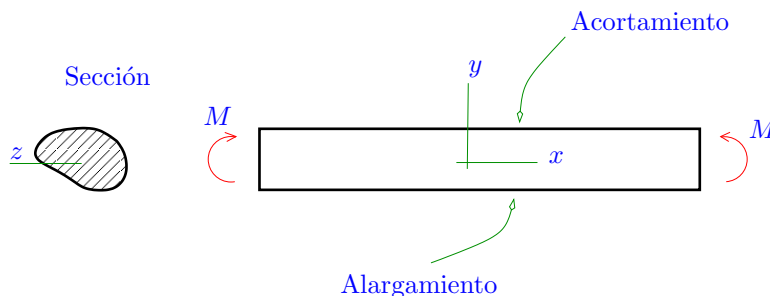


Figura 5.1: Viga bajo flexión.

extremos se están aplicando momentos puros M que tienen orientación en la dirección del eje z . Es fácil apreciar que para una viga bajo estas cargas en la parte superior se va a producir un acortamiento en tanto que en la parte inferior se produciría un alargamiento de la misma, dando lugar a la clásica forma curva de una viga bajo este tipo de cargas.

En la siguiente sección estudiaremos en particular como determinar de forma aproximada los esfuerzos en un problema de este tipo, en tanto que en la Sección 5.2 veremos métodos para determinar las deformaciones (deflexiones).

5.1. Flexión en vigas

5.1.1. Eje neutro, segundo momento de inercia y esfuerzos

Vamos a obtener una aproximación para los esfuerzos en un problema como el mostrado en la Figura 5.1, para ellos primero vamos a asumir que

$$\sigma_y \approx 0, \quad \sigma_z \approx 0, \quad \tau_{yz} \approx 0. \quad (5.1)$$

El esfuerzo más importante será σ_x , para comprender esto, es necesario ver la Figura 5.1, en donde tenemos alargamiento y acortamiento en x .

Respecto a la forma que debería tener esta función $\sigma_x = \sigma_x(y)$, hay varias posibilidades que cumplen con $\sigma_x \begin{cases} > 0 & \text{si } y < 0 \\ < 0 & \text{si } y > 0 \end{cases}$, la más simple de todas sería una aproximación lineal¹

$$\sigma_x = c_o y, \quad (5.2)$$

tal como se muestra en la Figura 5.2. En esta figura tenemos un vista lateral

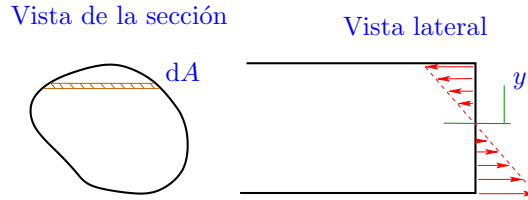


Figura 5.2: Viga bajo flexión. Modelo para la distribución de los esfuerzos.

de la viga con un corte imaginario en donde vemos la distribución lineal de esfuerzo (cargas internas) y otra vista frontal de la sección donde se muestra un diferencial de área dA .

Para esa parte de la viga que queda después del corte imaginario, se debe cumplir el equilibrio estático, en particular $\sum F_x = 0$, luego como solo hay momento puro M y fuerzas debido a σ_x como se muestra en la Figura 5.2, tenemos que $\sum F_x = 0$ es equivalente a²

$$\int_A \sigma_x dA = 0, \quad (5.3)$$

y de (5.2) con c_o constante esto implica que $c_o \int_A y dA = 0$, que se cumple si y solo si

$$\int_A y dA = 0. \quad (5.4)$$

¹Otras posibilidades podrían ser por ejemplo $\sigma_x = c_o y^n$ con n impar.

²Como $\sigma_x = \sigma_x(y)$, este esfuerzo es constante en z , luego para obtener fuerzas a partir de él, es solo necesario integrar en el área A de la sección usando dA como se muestra en la Figura 5.2.

Ni en la ecuación (5.2) ni en la Figura 5.2 habíamos indicado el origen del eje para y . La ecuación (5.4) nos da dicha posición de modo tal que se cumple de forma automática $\sum F_x = 0$. Esta posición especial para el origen del eje y es llamada ‘eje neutro’ (o centro de área), y un correcto cálculo del mismo es fundamental para los pasos posteriores. Mostraremos ahora un método más práctico basado en (5.4) para determinar la posición de este eje³.

Sea \bar{y} la posición del eje neutro medida desde la base de la sección, tal como se muestra en la Figura 5.3. Considerémos el sistema de coordenadas auxiliar

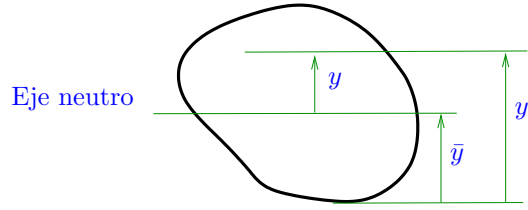


Figura 5.3: Viga bajo flexión. Método de calculo de eje neutro.

$y' = \bar{y} + y$ desde la base de la sección también y calculemos la integral $\int_A y' dA$ de donde tenemos

$$\int_A y' dA = \int_A (\bar{y} + y) dA = \bar{y} \int_A dA + \int_A y dA = \bar{y}A,$$

en donde hemos usado la propiedad (5.4). De la ecuación anterior obtenemos

$$\bar{y} = \frac{\int_A y' dA}{A}, \quad (5.5)$$

que es una expresión práctica para calcular la posición del eje neutro desde la base de la sección que es conocida.

No solo necesitamos $\sum F_x = 0$ para el equilibrio, además se necesita sea satisfecha $\sum M_z = 0$. Respecto a los momentos, tenemos el momento puro M (en un extremo de la sección de viga) y el momento causado por la distribución σ_x . Vamos a hacer el equilibrio de momento respecto al eje neutro, luego de la

³Si bien en la Figura 5.2 el eje es en realidad un punto, en la vista frontal vemos que es una línea en la dirección z .

El significado del eje neutro no solo corresponde a la posición del origen para que $\sum F_x = 0$, sino también es el punto en donde $\sigma_x = 0$, y de la relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, ese punto también es en donde no hay ni alargamiento ni acortamiento. Vamos a hablar en más detalle de estas propiedades después.

Figura 5.2 tenemos que $\sum_{eje\ neutro} M_z = 0$ es equivalente a⁴

$$-M = \int_A y \sigma_x dA = c_o \int_A y^2 dA. \quad (5.6)$$

Definamos el segundo momento de inercia⁵ (no confundir con el segundo momento polar de inercia) como

$$I_z = \int_A y^2 dA. \quad (5.7)$$

De la definición (5.7) y (5.6) tenemos que

$$c_o = -\frac{M}{I_z}, \quad (5.8)$$

luego en (5.2) se llega⁶

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y. \quad (5.9)$$

La fórmula (5.9) es en realidad útil y general⁷ no solo para el problema mostrado en la Figura 5.1, sino para cualquier distribución de momento interno $M = M(x)$, el cual se obtiene con los métodos vistos en la Sección 3.2.

5.1.2. Deformación y deflexión

Hemos determinado una distribución aproximada para los esfuerzos y ahora determinaremos expresiones para las deformaciones. Para esto veamos la Figura 5.4 en donde tenemos nuevamente la viga con momentos puntuales aplicados en los extremos. La viga sufrirá la deformación descrita en la Figura 5.1. Asumamos ahora que realizamos varios cortes imaginarios y que dibujamos cada uno de estos trozos cuando se ha deformado la viga. Como solo se está aplicando M en la figura original, cada uno de los trozos imaginarios solo estaría sometido a M en sus extremos como cargas internas.

Teniendo en mente las consideraciones anteriores, veamos ahora la Figura 5.5 en donde tenemos dos trozos adyacentes deformados. Ambos trozos pueden tener la misma longitud inicial y debemos recordar que están sometidos a los mismos momentos M en los extremos. La pregunta es: ¿Como deberían deformarse las superficies de corte imaginario? Tenemos varias posibles alternativas. En la

⁴El signo (-) que aparece en esta ecuación tiene como motivación que en (5.2) necesitamos una constante negativa.

⁵Es necesario hacer notar que en esta definición la integral se calcula teniendo como origen ahora el eje neutro, determinado anteriormente en (5.5).

⁶Aquí al igual que en el problema de torsión (4.8) tenemos nuevamente un tipo de solución que no dependería del tipo particular de material a considerar, pues en el cálculo de M en general (salvo en problemas hiperestáticos) no interviene el tipo de material, en tanto que I_z es solo una propiedad de área.

⁷Esto no es difícil de demostrar a partir de un elemento diferencial, pero por brevedad no lo haremos aquí.

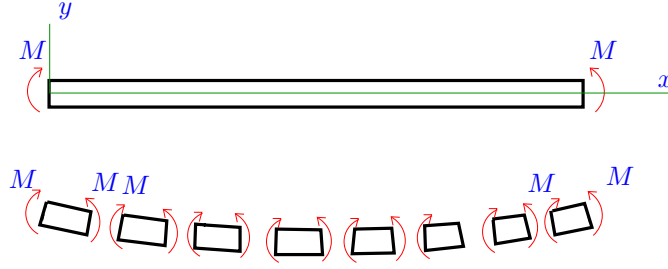


Figura 5.4: Viga bajo flexión. Deformaciones admisibles.

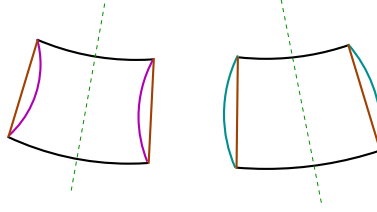


Figura 5.5: Viga bajo flexión. Deformaciones admisibles.

figura del lado derecho podríamos asumir que las superficies son convexas (línea de color celeste). Sin embargo para que después de deformarse los trozos sean compatibles, es necesario que el otro trozo tenga una superficie concava. Pero esto no es posible, puesto que la deformación de ambos trozos debería ser similar, debido a que el material es el mismo, la longitud es la misma (línea morada en la figura del lado izquierdo), la sección es la misma y las cargas externas son iguales. Como conclusión, ni superficies convexas ni concavas permiten compatibilidad de la forma final de la viga, y la única posibilidad es tener superficies rectas, como se aprecia con las líneas de color café en la Figura 5.5.

Como conclusión de las observaciones anteriores, si se trazan líneas extendiendo las superficies rectas, estas líneas pueden intersectarse en un punto O , llamado el centro de curvatura, como se aprecia en la Figura 5.6. En dicha figura podemos ver que a partir de dicho punto O es posible trazar los arcos que describen la forma deformada del trozo, en cuya parte superior hay acortamiento, en el eje neutro no hay cambio de longitud, en tanto que en la parte inferior habría alargamiento.

Con los resultados anteriores es posible ahora proceder a determinar la ‘deformación’. Para ello veamos la Figura 5.7 en donde nuevamente tenemos el trozo de longitud diferencial deformado. La longitud del trozo diferencial (medido en la línea del eje neutro) es dx , luego el ángulo que se produce entre las extensiones de las dos líneas que define el centro de curvatura será muy pequeño y lo denotaremos como $d\theta$. Si se trazan dos líneas verticales es fácil ver que los

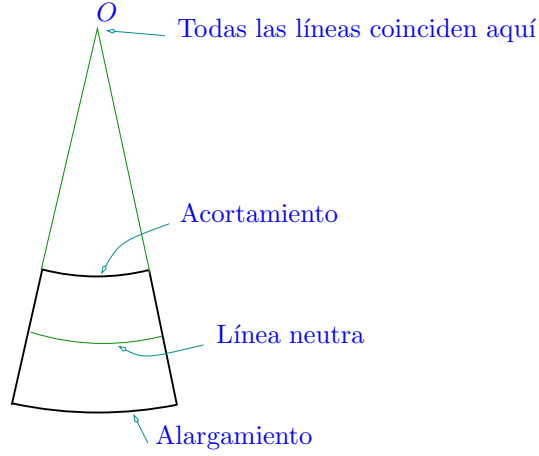


Figura 5.6: Centro de curvatura.

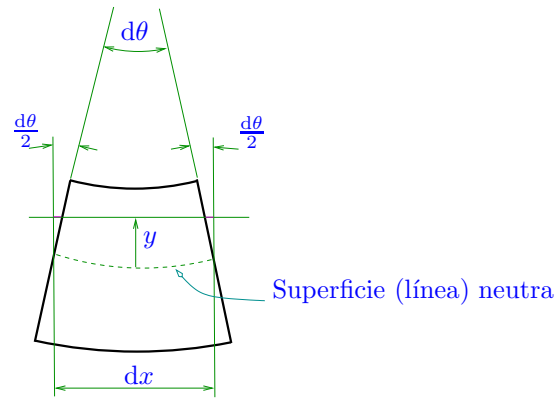


Figura 5.7: Cálculo de deformación.

ángulos que se forma a cada lado son $d\theta/2$ como se ve en la misma figura. Desde el eje neutro hacia arriba y hacia abajo se define la distancia y .

De (5.9) se tenía $\sigma_x = -\frac{My}{I_z}$, y si no se consideran σ_y ni σ_z de (3.84) se tiene

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{M}{EI_z} y. \quad (5.10)$$

Pero por definición la deformación longitudinal se calcula como $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ y en nuestro caso en la dirección x sería $\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta(dx)}{dx}$, pues el largo inicial del trozo diferencial es dx . Respecto a $\Delta(dx)$, de la Figura 5.7 se tiene que hacia arriba, a

una distancia y , hay una disminución⁸ de largo aproximado⁹ igual a $y \frac{d\theta}{2}$ a cada lado del diferencial y como resultado

$$\varepsilon_{xx} \approx \frac{-2y \frac{d\theta}{2}}{dx}, \quad (5.11)$$

luego de (5.10) y (5.11) se llega a

$$y \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z} y \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z}. \quad (5.12)$$

Se define la deflexión $\hat{y} = \hat{y}(x)$ como el desplazamiento vertical que sufre la viga cuando se deforma¹⁰.

En la Figura 5.8 tenemos una visión muy esquemática de una viga al inicio sin deformar (línea horizontal negra) y una vez que se ha deformado (línea roja), en donde es posible apreciar el significado de $\hat{y}(x)$.

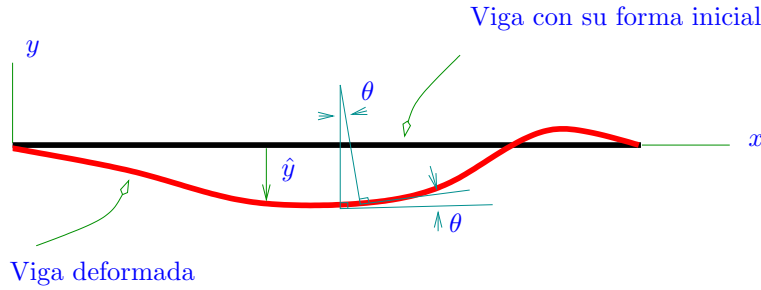


Figura 5.8: Cálculo de deformación. Relación con la deflexión.

En la misma figura podemos ver que el ángulo θ , originalmente medido desde el centro de curvatura, se repite también como el ángulo tangente a cada punto de la viga, de modo que

$$\tan \theta = \frac{d\hat{y}}{dx}. \quad (5.13)$$

Si el ángulo es muy pequeño (en radianes) tenemos la aproximación

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{d\hat{y}}{dx}, \quad (5.14)$$

luego $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$, de modo que de (5.12) se obtiene finalmente

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}, \quad (5.15)$$

⁸Para $y < 0$ habría un aumento de longitud.

⁹Usando la relación $\text{arco} = \text{radio} * \text{ángulo}$.

¹⁰No se debe confundir \hat{y} con y que es la posición vertical de un punto; lamentablemente en muchos textos conocidos no se hace esta distinción.

que es la ecuación diferencial a resolver para obtener $\hat{y}(x)$.

Como se había indicado para (5.9), esta fórmula es general y se puede usar para cualquier tipo de problema en donde $M = M(x)$ es conocido (después de realizar los cortes como se vió en la Sección 3.2). Si el material de la viga es homogéneo entonces E es constante, de otro modo podría depender de x . Si la sección de la viga es la misma en todas partes a lo largo del eje x , entonces I_z también es constante, en caso contrario podría ser una función de x .

5.1.3. Observaciones adicionales

Curvatura anticlástica y radio de curvatura

La curvatura en el plano $x-y$ que sufre la viga producto de la flexión produce una curvatura adicional en el plano $y-z$ como veremos ahora. Para ver esto consideremos primero la Figura 5.9 en donde nuevamente tenemos un trozo de viga mostrando la forma típica que adquiriría producto de la flexión, con una superficie que se acorta y otra que se alarga.

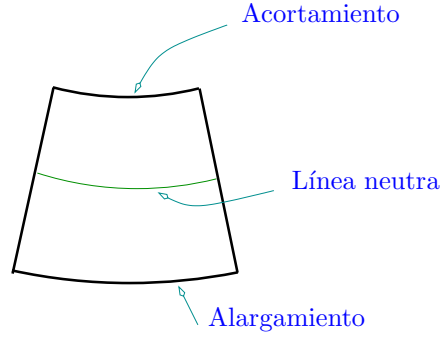


Figura 5.9: Centro de curvatura.

Veamos ahora el mismo trozo diferencial pero en tres dimensiones, tal como se muestra en la Figura 5.10. Si denotamos ε_{long} como la deformación longitudinal y ε_{lat} como la deformación lateral, de (3.72) teníamos $\varepsilon_{lat} = -\nu\varepsilon_{long}$, luego si en la parte superior (en la dirección x) tenemos un ‘acortamiento’, como resultado de (3.72) en la dirección z tendríamos un alargamiento, en tanto que en la parte inferior, como en x hay alargamiento en z habría acortamiento.

En la Figura 5.11 podemos ver de forma aproximada el trozo diferencial con todas las posibles deformaciones en una vista tridimensional.

El radio de curvatura R se define como la distancia desde el centro de curvatura O al eje (superficie) neutro(a) en el plano $x-y$.

En la misma Figura 5.11 podemos ver que el eje neutro en tres dimensiones es en realidad una superficie neutra.

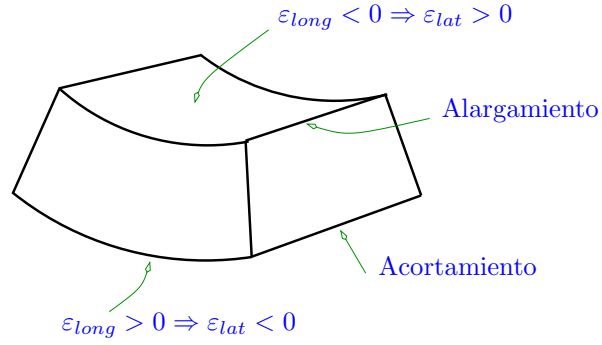


Figura 5.10: Curvatura anticlástica.

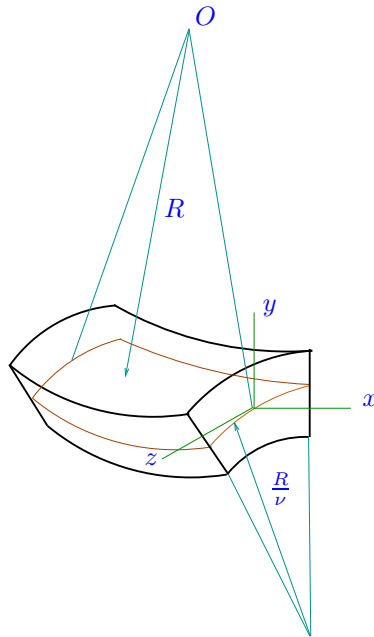


Figura 5.11: Curvatura anticlástica.

De las consideraciones anteriores podemos ver también que en el plano $y - z$ hay un radio de curvatura adicional y se puede demostrar que este es igual a R/ν .

Relación entre el radio de curvatura y la deformación

En la Figura 5.12 tenemos un trozo de viga de largo inicial pequeño Δx (no necesariamente infinitesimal) en el plano $x - y$. Podemos apreciar el radio de

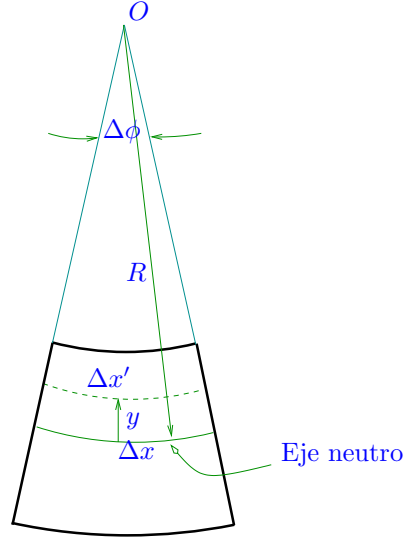


Figura 5.12: Radio de curvatura.

curvatura R , el ángulo $\Delta\phi$ que define dicho radio y una distancia y desde el eje neutro. Por la definición del eje neutro cuando $y = 0$ tenemos que el largo Δx no cambia cuando se deforma el trozo de viga, en tanto que, por ejemplo, cuando $y > 0$, como se muestra en la figura, tenemos el largo $\Delta x' < \Delta x$.

De la misma Figura 5.12 tenemos que

$$\Delta\phi = \frac{\Delta x}{R} = \frac{\Delta x'}{R - y} \Rightarrow \Delta x' - \Delta x = -\frac{y}{R}\Delta x. \quad (5.16)$$

Por la definición de la deformación longitudinal en x (ver (3.50)) de (5.16) tenemos

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = -\frac{y}{R}, \quad (5.17)$$

por otra parte de (5.10) teníamos $\varepsilon_{xx} = -\frac{M}{EI_z}y$, luego de (5.17) se llega a

$$R = \frac{EI_z}{M}. \quad (5.18)$$

Como en general $M = M(x)$, de la expresión anterior vemos que $R = R(x)$, o sea el radio de curvatura cambia con la posición.

Se define la curvatura¹¹ κ como

$$\kappa = \frac{1}{R}. \quad (5.19)$$

¹¹De la definición de R podemos ver que si en un punto de la viga deformada la deformación es ‘grande’ entonces R debería ser pequeño, luego esto implica que $|\kappa|$ sería grande. Es la curvatura la que se usa como indicador de cuanto se ha deformado localmente una viga, y en este texto asumiremos que $|\kappa|$ es pequeño siempre.

Luego con esta definición de (5.17) y (3.71) tenemos

$$\varepsilon_{xx} = -\kappa y, \quad \sigma_x = -E\kappa y. \quad (5.20)$$

Flexión de viga de dos materiales

Obtendremos ahora algunas expresiones para los esfuerzos para el caso que consideremos una viga hecha de dos materiales. Vamos a asumir que las deformaciones son pequeñas y que trabajamos en el rango de comportamiento elástico para estos dos materiales. De manera adicional vamos asumir que la superficie de la interface entre los dos materiales es perfectamente plana (pertenece al plano $x - z$) como se puede ver en la Figura 5.13, finalmente se estudiará el caso en que las superficies estén perfectamente pegadas. En esta figura tenemos una

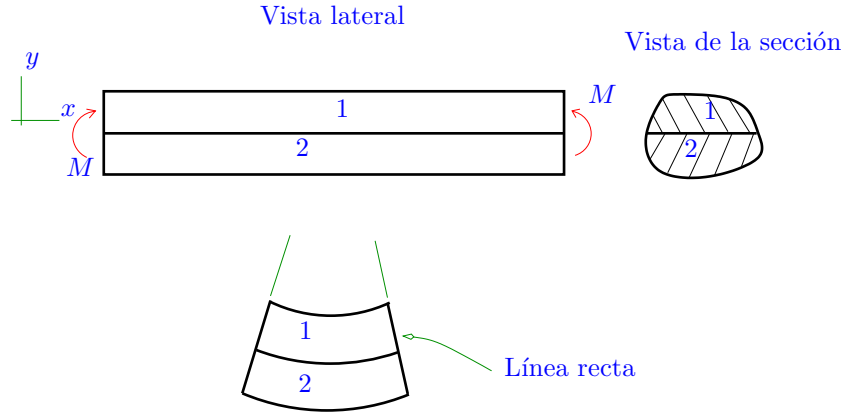


Figura 5.13: Flexión en viga de dos materiales.

vista lateral de la viga compuesta y también una vista frontal de la sección.

En la parte inferior de la figura tenemos un trozo diferencial para esta viga compuesta. De la discusión concerniente a la Figura 5.5 sabemos que la superficie de corte imaginario deben ser planas, la pregunta para la viga compuesta es: ¿La superficie plana del corte imaginario para 1 y 2 deben ser iguales o distintas? Si son distintas, es decir si tienen un ángulo de inclinación diferente, y por tanto distinto radio de curvatura para 1 y 2, es fácil ver que los distintos trozos diferenciales no serían compatibles una vez deformados, luego es necesario que el ángulo sea el mismo, en otras palabras R debe ser el mismo, luego κ es la misma curvatura para 1 y 2.

De (5.20)₁ tenemos que $\varepsilon_{xx} = -\kappa y$ sería una expresión válida para la deformación tanto para 1 como 2, pero debemos hacer notar eso si que todavía no sabemos en donde estaría el eje neutro. De (5.20)₂ para 1 y 2 tenemos entonces

$$\sigma_{x_1} = -E_1\kappa y, \quad \sigma_{x_2} = -E_2\kappa y. \quad (5.21)$$

Una pregunta interesante respecto a las expresiones anteriores es: ¿Es continuo σ_x en la interface? si no lo es ¿como es posible que sea discontinuo?

Para un corte imaginario respecto a las cargas internas en un extremo tendríamos M y en el otro tendríamos σ_x dado por (5.21). Si la viga completa estaba en equilibrio el trozo también debería estarlo, de modo que $\sum F_x = 0$ debe cumplirse y como resultado

$$\begin{aligned} & \int_{A_1} \sigma_{x_1} dA + \int_{A_2} \sigma_{x_2} dA = 0, \\ \Leftrightarrow & \int_{A_1} E_1 y dA + \int_{A_2} E_2 y dA = 0, \\ \Leftrightarrow & E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

La ecuación (5.22) nos permite encontrar la posición del eje neutro para la sección compuesta (ver (5.4) para la viga hecha de un material). Siguiendo un método similar al mostrado para llegar a (5.5) de (5.22) se puede obtener la forma alternativa para obtener la posición del eje neutro \bar{y} desde la parte inferior de 2

$$\bar{y} = \frac{E_1 \int_{A_1} y' dA + E_2 \int_{A_2} y' dA}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \quad (5.23)$$

Respecto al equilibrio al momentum angular de $\sum M_z = 0$ y de (5.21) tenemos

$$\begin{aligned} M &= - \int_{A_1} \sigma_{x_1} y dA - \int_{A_2} \sigma_{x_2} y dA, \\ &= \kappa \left(E_1 \int_{A_1} y^2 dA + E_2 \int_{A_2} y^2 dA \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Si se define¹² $I_1 = \int_{A_1} y^2 dA$ y $I_2 = \int_{A_2} y^2 dA$, de (5.24) se llega a

$$M = \kappa(E_1 I_1 + E_2 I_2), \quad (5.25)$$

por lo que

$$\kappa = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \quad (5.26)$$

luego en (5.21) finalmente se obtiene

$$\sigma_{x_1} = -\frac{E_1 M y}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)}, \quad \sigma_{x_2} = -\frac{E_2 M y}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)}. \quad (5.27)$$

¹²Es necesario hacer notar aquí que los segundos momentos de área I_1 y I_2 están siendo definidos o calculados respecto al eje neutro de la sección completa calculado en (5.23).

5.1.4. Ejemplo de problema con esfuerzos por flexión

Aquí aplicaremos algunas de las expresiones obtenidas en las secciones anteriores a un problema particular. Para la viga mostrada en el lado izquierdo de la Figura 5.14 determine la ubicación y el valor máximo (en tracción o compresión) del esfuerzo normal debido a flexión. En el lado derecho de la misma figura tenemos una vista ampliada de la sección de la viga.

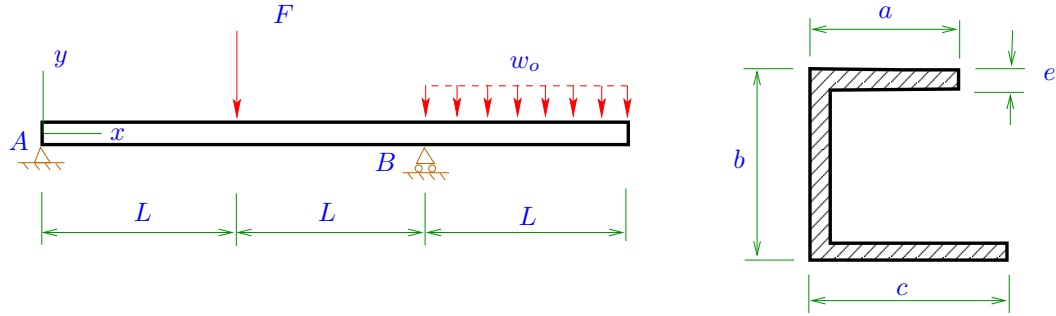


Figura 5.14: Ejemplo de problema con flexión.

Solución: Ahora a continuación resolveremos el problema en detalle en varios pasos

1. **Cálculo de reacciones:** Primero es necesario determinar las reacciones en los puntos de apoyo de la viga, para ello observemos el digrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 5.15. El efecto de la carga uniforme

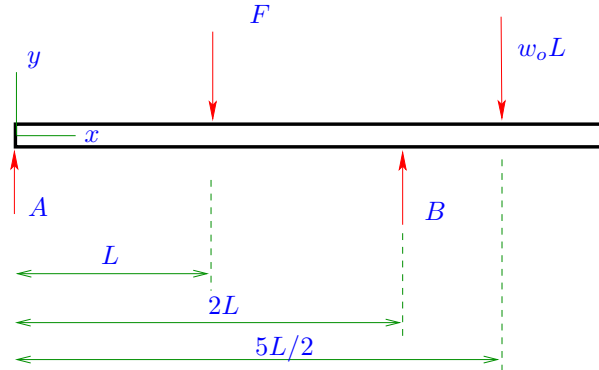


Figura 5.15: Ejemplo de problema con flexión. Diagrama de cuerpo libre.

w_o se reemplaza por una puntual igual a w_oL en el centro de su zona de acción.

De la misma figura vemos que para efecto del cálculo de las reacciones el problema es estáticamente determinado.

De $\sum_A M_z = 0$ tenemos que $2LB - LF - w_o L \frac{5L}{2} = 0$ de donde tenemos

$$B = \frac{1}{2} \left(F + \frac{5}{2} w_o L \right). \quad (5.28)$$

La ecuación $\sum F_x = 0$ se satisface simplemente si $A_x = 0$. Respecto a $\sum F_y = 0$ es igual a $A_y + B = F + w_o L$, y usando (5.28) se tiene

$$A_y = \frac{1}{2} \left(F - \frac{w_o L}{2} \right). \quad (5.29)$$

2. **Determinación de M :** Para determinar σ_x por flexión es necesario determinar la distribución $M = M(x)$, de la Figura 5.14 vemos que es necesario considerar tres zonas de corte.

Para un corte hecho entre $0 < x < L$ tenemos la Figura 5.16.

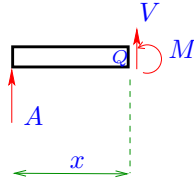


Figura 5.16: Cargas internas. Primer corte.

De $\sum_Q M_z = 0$ se llega a

$$M = A_y x. \quad (5.30)$$

El segundo corte se debe hacer en $L < x < 2L$ tenemos la Figura 5.17.

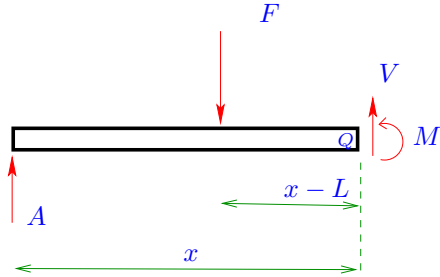


Figura 5.17: Cargas internas. Segundo corte.

De $\sum_Q M_z = 0$ después de algunas manipulaciones se obtiene

$$M = (A_y - F)x + FL. \quad (5.31)$$

Para el último tramo se considera $2L < x < 3L$ y se tiene un diagrama de cuerpo libre como el mostrado en la Figura 5.18.

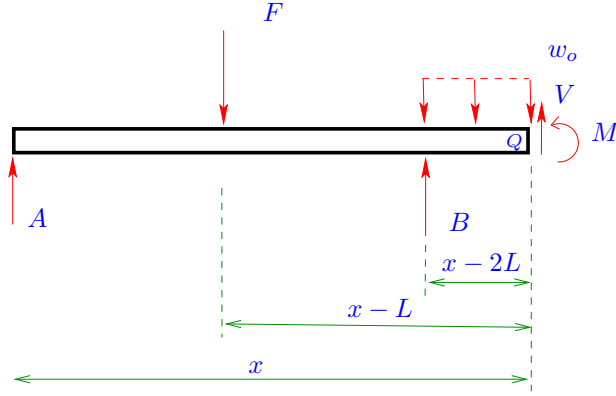


Figura 5.18: Cargas internas. Tercer corte.

La densidad de fuerza uniforme w_o actuando en la zona de largo $x - 2L$ se puede reemplazar por una fuerza puntual igual a $w_o(x - 2L)$ tal como se muestra en la Figura 5.19.

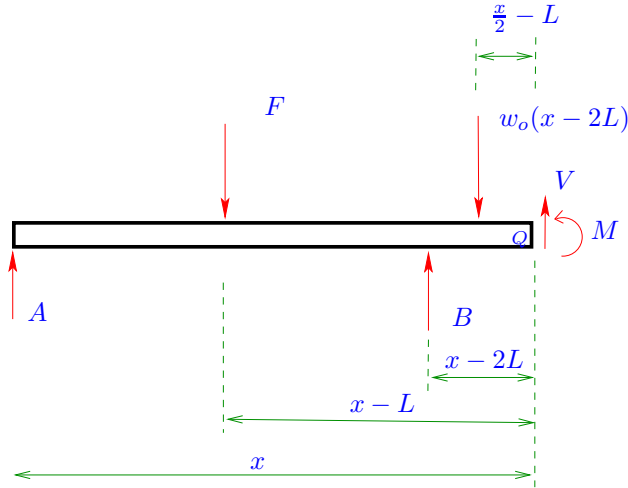


Figura 5.19: Cargas internas. Tercer corte, fuerzas equivalentes.

Haciendo $\sum_Q M_z = 0$ se tiene que

$$M = A_y x - F(x - L) + B(x - 2L) - w_o(x - 2L) \left(\frac{x}{2} - L \right). \quad (5.32)$$

De (5.28), (5.29) y (5.32) es fácil ver que $M(3L) = 0$.

De (5.30), (5.31) y (5.32) se puede obtener la forma aproximada para la función $M(x)$ en $0 < x < 3L$ como se muestra en la Figura 5.20.

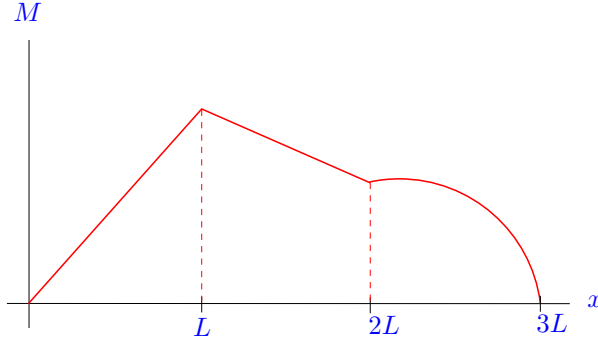


Figura 5.20: Gráfico para el momento interno en la viga.

3. **Cálculo de las propiedades de área. Cálculo de eje neutro:** Para la sección mostrada en el lado derecho de la Figura 5.14 vamos a calcular las propiedades de área de la siguiente forma.

Vamos a descomponer la sección en formas simples, en este caso en tres rectángulos como se muestra en la Figura 5.22. Primero calculemos el eje neutro de una sección rectangular como se muestra en la Figura 5.21. Para

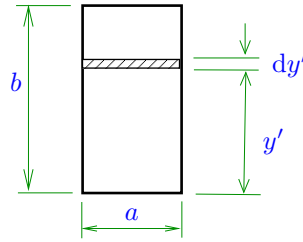


Figura 5.21: Propiedades de área para sección rectangular. Eje neutro.

esta figura tenemos $dA = a \, dy'$, luego usando (5.5) tenemos

$$\bar{y} = \frac{\int_0^b y' a \, dy'}{ab} = \frac{\frac{ab^2}{2}}{ab} = \frac{b}{2}, \quad (5.33)$$

o sea como esperabamos el eje neutro se ubica en la mitad de la sección medido desde la base.

Ahora respecto a la sección de nuestro problema mostrada en la Figura 5.22, la hemos separado en tres secciones o partes. Es posible mostrar que

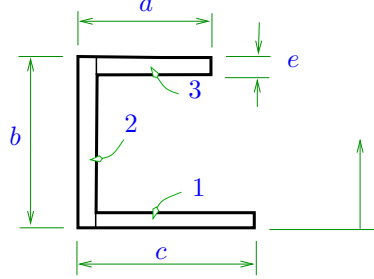


Figura 5.22: Propiedades de área para sección completa. Eje neutro

en este caso el eje neutro de la sección completa \bar{y}_{tot} se puede calcular como¹³

$$\bar{y}_{tot} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}, \quad (5.35)$$

donde \bar{y}_i , $i = 1, 2, 3$ son los ejes neutros de cada una de las secciones desde la base común de la sección completa y A_i son las áreas de cada una de estas secciones.

De la Figura 5.14 es posible ver que

$$\bar{y}_{tot} = \frac{\frac{e^2}{2}(c-e) + \frac{b^2}{2}e + \left(b - \frac{e}{2}\right)e(a-e)}{e(c-e) + eb + e(a-e)}. \quad (5.36)$$

¹³La demostración no es difícil si primero se parte con una sección dividida en dos partes. Para ello se puede considerar (5.23) con $E_1 = E_2$ de donde se llega a

$$\bar{y} = \frac{\int_{A_1} y' dA + \int_{A_2} y' dA}{A_1 + A_2}.$$

Pero

$$\bar{y}_1 A_1 = \int_{A_1} y' dA, \quad \bar{y}_2 A_2 = \int_{A_2} y' dA,$$

donde \bar{y}_1 y \bar{y}_2 son los ejes neutros calculados desde la base común de la sección completa. Como resultado

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2}.$$

En un caso general donde el área de una sección se dividiere en n partes tendríamos

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (5.34)$$

4. **Cálculo de propiedades de área. Segundo momento de área:** En nuestro caso de la Figura 5.22 tenemos tres áreas A_i con $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$ donde A sería el área total y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, luego usando la propiedad

$$\int_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A} f(y) dA = \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} f(y) dA,$$

para el segundo momento de área de la sección completa tendríamos

$$I_{z_{tot}} = \int_A y^2 dA = \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} y^2 dA = \bar{I}_{z_1} + \bar{I}_{z_2} + \bar{I}_{z_3}, \quad (5.37)$$

en donde y ahora se define con un origen en el punto \bar{y}_{tot} de (5.35), en tanto que

$$\bar{I}_{z_i} = \int_{A_i} y^2 dA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.38)$$

serían los segundos momentos de área de cada una de las secciones por separado respecto al eje neutro.

Calculemos I_z para una sección rectangular respecto a su propio eje neutro. De (5.7) y (5.33) tenemos, usando como apoyo la Figura 5.23, que

$$I_z = \int_A y^2 dA = 2 \int_0^{b/2} y^2 a dy = \frac{ab^3}{12}. \quad (5.39)$$

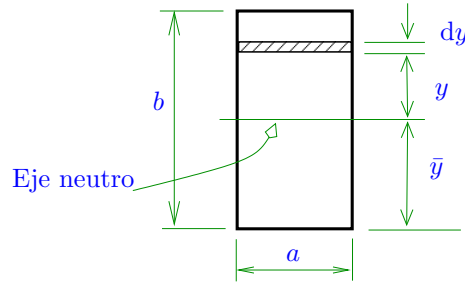


Figura 5.23: Propiedades de área para sección rectangular. Segundo momento de área.

Calculemos la misma integral respecto a un eje paralelo separado una distancia δ respecto al eje neutro, a esta integral lo denominaremos \bar{I}_z , luego tenemos

$$\bar{I}_z = \int_A (y + \delta)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2\delta \underbrace{\int_A y dA}_{=0} + \delta^2 \underbrace{\int_A dA}_{=A},$$

en donde se ha usado la propiedad (5.4), luego como resultado final

$$\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A. \quad (5.40)$$

O sea el segundo momento de inercia respecto a un punto distinto al eje neutro es el momento de inercia calculado respecto a su propio eje más la distancia al cuadrado por el área de la sección.

Para nuestro problema de las Figuras 5.22 y 5.14 y de (5.39) tenemos que

$$I_{z_1} = (c - e) \frac{e^3}{12}, \quad I_{z_2} = \frac{eb^3}{12}, \quad I_{z_3} = (a - e) \frac{e^3}{12}, \quad (5.41)$$

pero de (5.40) y (5.35) tenemos que

$$\bar{I}_{z_1} = I_{z_1} + e(c - e) \left(\bar{y}_{tot} - \frac{e}{2} \right)^2, \quad (5.42)$$

$$\bar{I}_{z_2} = I_{z_2} + eb \left(\frac{b}{2} - \bar{y}_{tot} \right)^2, \quad (5.43)$$

$$\bar{I}_{z_3} = I_{z_3} + e(a - e) \left(b - \frac{e}{2} - \bar{y}_{tot} \right)^2, \quad (5.44)$$

y de (5.37) tenemos que¹⁴

$$I_{z_{tot}} = \bar{I}_{z_1} + \bar{I}_{z_2} + \bar{I}_{z_3}. \quad (5.46)$$

5. Cálculo del máximo para el esfuerzo normal por flexión: Con todos los resultados anteriores ahora finalmente vamos a responder la pregunta inicial.

Primero de la Figura (5.20) vamos a obtener el máximo (absoluto) para $M(x)$, a este máximo lo llamaremos M_{max} y se ubicaría en algún punto x_{max} . Este valor puede ser positivo o negativo, luego de (5.9) y (5.46) tenemos

$$\sigma_{x_{max}} = - \frac{M_{max}}{I_{z_{tot}}} y_{max}, \quad (5.47)$$

en donde de la Figura 5.14 tenemos también que determinar la máxima distancia desde el eje neutro a los extremos de la sección. Es posible ver que si $a < c$ tenemos que $\bar{y}_{tot} < b/2$ de modo que $y_{max} = b - \bar{y}_{tot}$, o sea el máximo se produciría en la parte superior de la aleta 3.

¹⁴Es posible ver que en un caso general en donde la sección se ha descompuesto en n partes tendríamos

$$I_{z_{tot}} = \sum_{i=1}^n \bar{I}_{z_i}. \quad (5.45)$$

5.1.5. Ejercicios

1. En la Figura (lado derecho) tenemos la vista lateral de una viga hecha de dos materiales bajo el efecto de una fuerza uniforme w_o y una puntual F . En el lado izquierdo tenemos una vista de la sección de la viga (ampliada para ver mejor los detalles) en donde se puede apreciar los dos materiales, los cuales están perfectamente pegados.

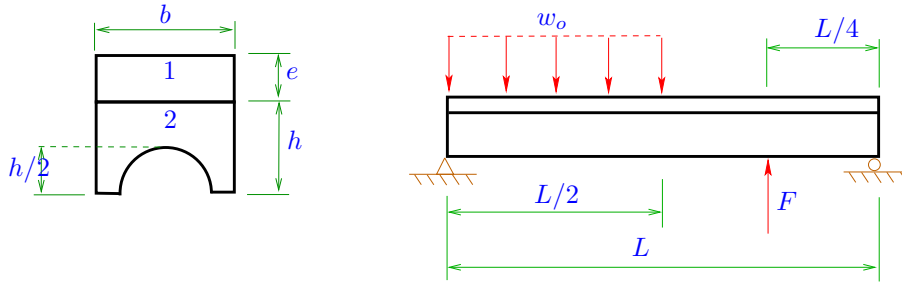


Figura 5.24: Viga doble en flexión.

Determine el máximo valor para el esfuerzo σ_x y su ubicación.

Datos: $E_1 = 170\text{GPa}$, $E_2 = 100\text{GPa}$, $L = 2\text{m}$, $h = 10\text{cm}$, $e = 3\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $w_o = 10\text{kN/m}$, $F = 25\text{kN}$.

5.2. Deflexion en vigas

5.2.1. Resumen de ecuaciones

Para una viga bajo la acción de una carga distribuida $w(x)$ de (3.15) y (3.16) teníamos las relaciones

$$\frac{dV}{dx} = w(x), \quad \frac{dM}{dx} = -V(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -w(x), \quad (5.48)$$

en tanto de (5.14) y (5.12) teníamos

$$\theta \approx \frac{d\hat{y}}{dx}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI_z}, \quad (5.49)$$

luego de (5.48) y (5.49) esto implica que

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V}{EI_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}, \quad (5.50)$$

donde

- $w(x)$: es la carga aplicada (apuntando hacia abajo se considera positiva),
- $V(x)$: es la fuerza interna de corte,
- $M(x)$: es el momento interno de corte,
- $\theta(x)$: es el ángulo de deflexión,
- $\hat{y}(x)$: es la deflexión de la viga.

Es la ecuación (5.50)₃ la que resolveremos para obtener $\hat{y}(x)$ conociendo $w(x)$, E e I_z .

5.2.2. Primer ejemplo

En esta sección vamos a intentar resolver un primer ejemplo de forma directa usando (5.50)₃, para ello considerémos la viga mostrada en la Figura 5.25, la cual está sometida a una carga uniforme w_o en solo una parte de su longitud. Se asume que E e I_z son constantes y conocidos. Determine la deflexión \hat{y} .

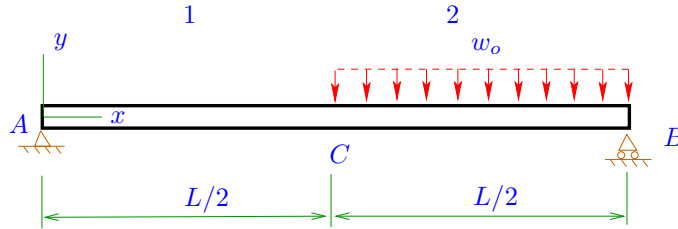


Figura 5.25: Ejemplo de cálculo de deflexiones sin el uso de distribuciones.

Vamos a usar (5.50)₃ para obtener la deflexión, luego debido a la forma de la carga externa tendríamos que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z} \begin{cases} 0, & 0 < x < L/2 \\ w_0, & L/2 < x < L \end{cases}.$$

Si definimos $\hat{y}^-(x) = \hat{y}(x)$ si $0 < x < L/2$ y $\hat{y}^+(x) = \hat{y}(x)$ si $L/2 < x < L$, el problema anterior consiste en resolver dos ecuaciones

$$\frac{d^4 \hat{y}^-}{dx^4} = 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < L/2, \quad \frac{d^4 \hat{y}^+}{dx^4} = -\frac{w_0}{EI_z} \quad \text{si} \quad L/2 < x < L, \quad (5.51)$$

con condiciones de borde y compatibilidad que discutiremos después.

Las soluciones de estas ecuaciones son

$$\hat{y}^-(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \quad (5.52)$$

$$\hat{y}^+(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 - \frac{1}{24} \frac{w_0}{EI_z} x^4, \quad (5.53)$$

donde $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1, 2, 3$ son constantes.

Ahora discutiremos en más detalle las condiciones de borde y compatibilidad. Debido a la presencia de los apoyos en A y B de la Figura 5.25 podemos ver que

$$\hat{y}^-(0) = 0, \quad \hat{y}^+(L) = 0. \quad (5.54)$$

Además estos apoyos no generan oposición a la rotación, luego el momento interno en esos puntos es cero, de modo que

$$\left. \frac{d^2 \hat{y}^-}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 \hat{y}^+}{dx^2} \right|_{x=L} = 0. \quad (5.55)$$

Para el punto C de la Figura 5.25 vamos a asumir que las siguientes condiciones de compatibilidad deben ser cumplidas

$$\hat{y}^-(L/2) = \hat{y}^+(L/2), \quad \left. \frac{d\hat{y}^-}{dx} \right|_{x=L/2} = \left. \frac{d\hat{y}^+}{dx} \right|_{x=L/2}, \quad (5.56)$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{y}^-}{dx^2} \right|_{x=L/2} = \left. \frac{d^2 \hat{y}^+}{dx^2} \right|_{x=L/2}, \quad \left. \frac{d^3 \hat{y}^-}{dx^3} \right|_{x=L/2} = \left. \frac{d^3 \hat{y}^+}{dx^3} \right|_{x=L/2}. \quad (5.57)$$

Ahora explicaremos el significado de estas condiciones de compatibilidad:

- La condición (5.56)₁ significaría simplemente que la viga al deformarse seguiría siendo continua, es decir no se rompe.
- La condición (5.56)₂ implicaría que el ángulo θ sería continuo, lo que es correcto, puesto que si no lo es, estaríamos en presencia de una viga continua pero mostrando una ‘esquina’ aguda, lo que es contrario a los supuestos usados aquí, en el sentido de que las deformaciones se asumieron pequeñas.

- De un análisis directo por medio de cortes imaginarios es posible ver que en este problema $M(x)$ es una función continua, en particular en el punto $x = L/2$, de modo que de $(5.50)_1$ eso implicaría la condición $(5.57)_1$.
- Finalmente, del mismo análisis con los cortes imaginarios es también posible probar que $V(x)$ es continua¹⁵, luego de $(5.50)_2$ eso implicaría la condición $(5.57)_2$.

Las 8 condiciones de borde y compatibilidad (5.54)-(5.57) servirían para encontrar las 8 constantes $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1, 2, 3$, lo que requeriría resolver un sistema de 8 ecuaciones algebraicas lineales, que en general no es muy práctico. El problema principal de esta forma de solucionar $(5.50)_2$ es que debimos dividir la ecuación original en dos partes, surgiendo las 4 condiciones de compatibilidad (5.56), (5.57). En la siguiente sección estudiaremos de manera breve un tipo más general de función, llamadas distribuciones o funciones generalizadas, que nos permitira solucionar este tipo de problemas de una forma más práctica.

5.2.3. Distribuciones o funciones especiales

Considerémos la Figura 5.26 en donde tenemos la representación gráfica de una función que llamaremos $g(x)$ y que tiene una valor constante igual a $1/e$ en una zona de largo e alrededor de un punto $x = a$. La integral de esta función

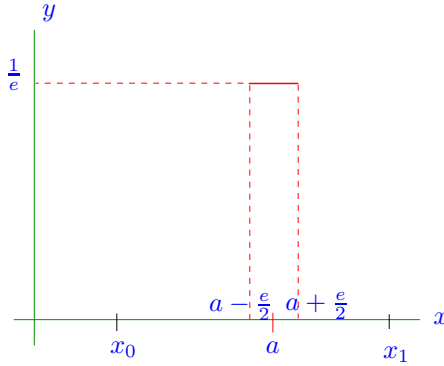


Figura 5.26: Aproximación para la distribución de Dirac.

en un intervalo que contiene a este punto es igual a

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \int_{a-e/2}^{a+e/2} \frac{1}{e} dx = \frac{1}{e} e = 1 \quad \text{si} \quad x_0 \leq a - \frac{e}{2}, \quad x_1 \geq a + \frac{e}{2}. \quad (5.58)$$

Si F es una constante, es fácil demostrar que

$$\int_{x_0}^{x_1} F g(x) dx = F. \quad (5.59)$$

¹⁵Veremos más adelante que $V(x)$ no es continua cuando aparecen fuerzas externas puntuales.

Tenemos que (5.58) y (5.59) se cumplen para cualquier e , en particular para $e \rightarrow 0$. Para ese caso particular la función $g(x)$ la denotamos como $\delta(x - a)$ donde¹⁶ δ es llamada la ‘función’ delta de Dirac¹⁷.

Es posible ver de la Figura 5.26 que $F\delta(x - a)$ vendría a representar una densidad de fuerza F actuando en una zona muy pequeña alrededor de a , y de (5.59), (2.17) tenemos que $\int_{x_0}^{x_1} F\delta(x - a) dx = F$, o sea la fuerza puntual equivalente sería igual a F , o estaría actuando en el punto a en el límite $e \rightarrow 0$.

Calculemos ahora la integral indefinida de $\delta(x - a)$, de su definición tenemos

$$\int \delta(x - a) dx = \int_0^x \delta(\xi - a) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a - \frac{e}{2}, \\ 1, & \text{si } x \geq a + \frac{e}{2} \end{cases},$$

para $e \rightarrow 0$. Si definimos la función escalón unitario $r(x - a)$ como

$$r(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ 1, & \text{si } x \geq a \end{cases} \quad (5.60)$$

tenemos que

$$\int \delta(x - a) dx = r(x - a). \quad (5.61)$$

En la Figura 5.27 tenemos una representación gráfica de esta función.

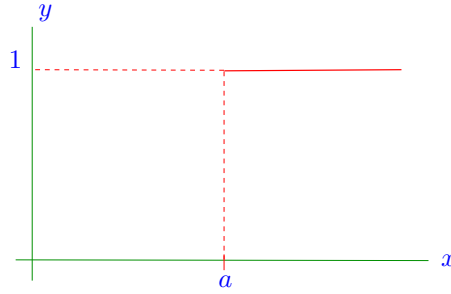


Figura 5.27: Distribución escalón unitario.

Vamos ahora a mostrar otros resultados útiles

$$\begin{aligned} \int r(x - a) dx &= \int_0^x r(\xi - a) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ \int_a^x 1 d\xi, & \text{si } x \geq a \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ (x - a), & \text{si } x \geq a \end{cases} = (x - a)r(x - a). \end{aligned} \quad (5.62)$$

¹⁶Hay varias otras formas alternativas para definir esta función delta de Dirac, por ejemplo, a través del uso de una función Gaussiana, pero no veremos esto en detalle en este texto.

¹⁷En realidad $\delta(x - a)$ no es una función en el sentido usual de la palabra, pues en particular no se puede evaluar de forma directa en $x = a$, pero la propiedad (5.58) es siempre válida, y por tanto se define en realidad como distribución o función generalizada.

Los siguientes resultados se pueden obtener de la misma forma

$$\int (x-a)r(x-a) dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad (5.63)$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a) dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a). \quad (5.64)$$

5.2.4. Ejemplos con el uso de distribuciones

En esta sección resolveremos (5.50)₃ usando las distribuciones y resultados definidos y mostrados en la sección anterior.

1. Resolveremos primero el problema mostrado en la Sección 5.2.2. De la Figura 5.25 y de las definiciones anteriores de (5.50)₃ usando la función escalón unitario tenemos que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w_o}{EI_z} r(x-L/2), \quad (5.65)$$

luego integrando dos veces usando (5.62), (5.63) tenemos

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{w_o}{2EI_z} (x-L/2)^2 r(x-L/2) + \alpha_3 x + \alpha_2, \quad (5.66)$$

e integrando dos veces más se obtiene finalmente

$$\hat{y}(x) = -\frac{w_o}{24EI_z} (x-L/2)^4 r(x-L/2) + \frac{\alpha_3}{6} x^3 + \frac{\alpha_2}{2} x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (5.67)$$

Ahora tenemos una sola solución y 4 constantes, que se pueden encontrar de las 4 condiciones de borde (5.54), (5.55)

$$\hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_L = 0. \quad (5.68)$$

Usando (5.68)₃ se tiene que $\alpha_2 = 0$ y usando (5.68)₁ se tiene que $\alpha_0 = 0$. Por otra parte de (5.68)₄ tenemos que $\alpha_3 = \frac{w_o L}{8EI_z}$, y finalmente con (5.68)₂ y los resultados anteriores se tiene $\alpha_1 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{384}\right) \frac{w_o L^3}{EI_z}$, de modo que tenemos la solución completa del problema.

2. Para la viga mostrada en la Figura 5.28, la cual está sometida a una fuerza puntual y está empotrada en su extremo izquierdo, determine la deflexión $\hat{y}(x)$.

Solución: La fuerza puntual F se puede representar como distribución de la forma $F\delta(x-a)$, luego de (5.50)₃ tenemos que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{F}{EI_z} \delta(x-a),$$

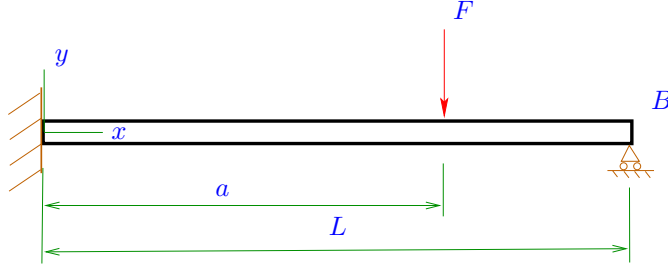


Figura 5.28: Ejemplo de cálculo de deflexiones.

y con el uso de (5.61), (5.62) integrando dos veces tenemos

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{F}{EI_z} (x-a)r(x-a) + \alpha_3 x + \alpha_2. \quad (5.69)$$

Luego

$$\frac{d \hat{y}}{dx} = -\frac{F}{2EI_z} (x-a)^2 r(x-a) + \frac{\alpha_3}{2} x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1, \quad (5.70)$$

de modo que finalmente se llega a

$$\hat{y}(x) = -\frac{F}{6EI_z} (x-a)^3 r(x-a) + \frac{\alpha_3}{6} x^3 + \frac{\alpha_2}{2} x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (5.71)$$

Respecto a las condiciones de borde en este problema, en el apoyo del lado derecho tenemos

$$\hat{y}(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_L = 0, \quad (5.72)$$

en donde esta última condición significa simplemente que el tipo de apoyo de rodillo deja a la viga libre de rotar en ese punto, o sea que el momento interno ahí sería cero y de (5.50)₁ se obtendría dicha condición.

Respecto al extremo izquierdo, como este está empotrado tenemos las condiciones

$$\hat{y}(0) = 0, \quad \left. \frac{d \hat{y}}{dx} \right|_0 = 0, \quad (5.73)$$

donde esta última condición viene de (5.49)₁, en donde para un punto empotrado la viga se asume no podría sufrir rotación, de modo que $\theta = 0$. Nótese que en este extremo izquierdo el momento interno en $x = 0$ no es necesariamente cero y que en realidad tendría el valor (es necesario estudiar en detalle el signo) del momento puro de reacción de la pared sobre la viga en ese punto.

El uso de (5.70) en (5.73)₂ implicaría que $\alpha_1 = 0$ y de (5.71) en (5.73)₁ implicaría que $\alpha_0 = 0$. Por otra parte de (5.70) y (5.71) en (5.72) tenemos que

$$-\frac{F}{EI_z}(L-a) + \alpha_3 L + \alpha_2 = 0, \quad -\frac{F}{6EI_z}(L-a)^3 + \frac{\alpha_3}{6}L^3 + \frac{\alpha_2}{2}L^2 = 0,$$

de donde se puede facilmente despejar α_2 y α_3 .

3. Para la viga mostrada en la Figura 5.29 use la deflexión para determinar las reacciones de los soportes A , B y C sobre la viga.

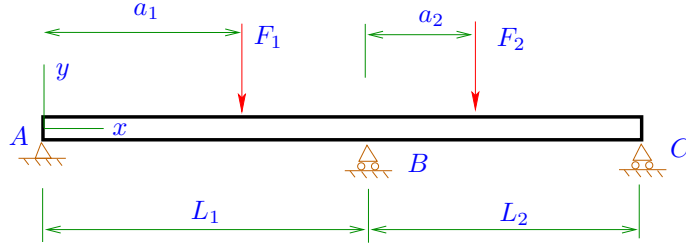


Figura 5.29: Ejemplo de cálculo de deflexiones.

Solución: Para entender la pregunta primero es necesario hacer un diagrama de cuerpo libre de toda la viga, tal como se muestra en la Figura 5.30.

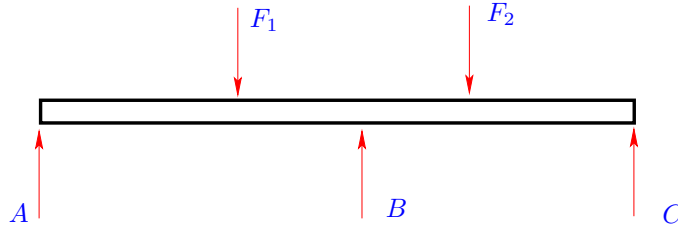


Figura 5.30: Ejemplo de cálculo de deflexiones. Diagrama de cuerpo libre.

Este es un problema plano en donde solo tenemos fuerzas en el sentido vertical y , luego solo tenemos dos ecuaciones para encontrar las incógnitas A , B y C

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B + C = F_1 + F_2, \quad (5.74)$$

$$\sum_A M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad BL_1 + C(L_1 + L_2) = F_1 a_1 + F_2(L_1 + a_2). \quad (5.75)$$

Podemos ver entonces que este es un problema hiperestático, en donde no podemos encontrar de manera única las reacciones en los soportes solo con el uso de las ecuaciones de equilibrio.

Es aquí en donde podemos hacer uso de la deflexión $\hat{y}(x)$, hay varias maneras equivalentes de resolver el problema con esta función, mostraremos aquí uno de esos métodos. Primero, en lugar de resolver (5.50)₃ usando la Figura 5.30, vamos a resolver el problema con la Figura 5.31, en donde tenemos una representación ‘alternativa’ del problema. Aquí los soportes

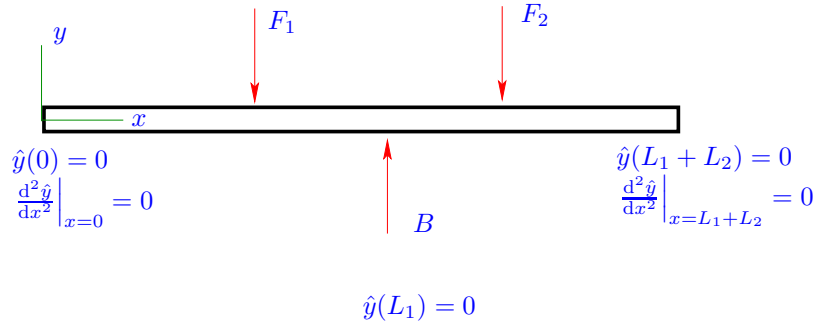


Figura 5.31: Ejemplo de cálculo de deflexiones. Diagrama de cuerpo libre con condiciones de borde para el desplazamiento en los soportes.

A y C han sido reemplazados por las condiciones de borde (en \hat{y} y sus derivadas) que estos soportes generan. Por otra parte, la fuerza de reacción (no conocida) en B se coloca como fuerza externa, y se pide como condición adicional que el desplazamiento o deflexión en ese punto sea cero. Es esta condición adicional sobre el desplazamiento la que nos da la ecuación faltante para encontrar en este caso la fuerza B . Una vez que se conoce B , usando (5.74), (5.75) se pueden obtener A y C .

Con F_1 , F_2 y B como fuerzas externas, de (5.50)₃ tenemos ahora que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z} [F_1 \delta(x - a_1) - B \delta(x - L_1) + F_2 \delta(x - L_1 - a_2)].$$

Integrando dos veces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = & -\frac{1}{EI_z} [F_1(x - a_1)r(x - a_1) - B(x - L_1)r(x - L_1) \\ & + F_2(x - L_1 - a_2)r(x - L_1 - a_2)] + \alpha_3 x + \alpha_2, \end{aligned} \quad (5.76)$$

e integrando dos veces más se llega finalmente a

$$\hat{y}(x) = -\frac{1}{6EI_z}[F_1(x-a_1)^3r(x-a_1) - B(x-L_1)^3r(x-L_1) + F_2(x-L_1-a_2)^3r(x-L_1-a_2)] + \frac{\alpha_3}{6}x^3 + \frac{\alpha_2}{2}x^2 + \alpha_1x + \alpha_0, \quad (5.77)$$

Usando las condiciones de borde mostradas en A y C en la Figura 5.31 con (5.76) y (5.77) tenemos que de $\hat{y}(0) = 0$, $\left.\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right|_0 = 0$ y $\left.\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right|_{L_1+L_2} = 0$ se obtiene que

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{EI_z(L_1 + L_2)}[F_1(L_1+L_2-a_1)-BL_2+F_2(L_2-a_2)],$$

en tanto que de $\hat{y}(L_1 + L_2) = 0$ obtendríamos otra ecuación, en este caso para α_1 , que al igual que α_3 , también dependería entre otras variables de B .

Con estos valores de α_i , $i = 0, 1, 2, 3$ reemplazando en (5.77) y usando $\hat{y}(L_1) = 0$ tendríamos finalmente una ecuación algebraica lineal para obtener B .

4. Para la viga empotrada en sus dos extremos mostrada en la Figura 5.32 use la deflexión para determinar las reacciones en A y B .

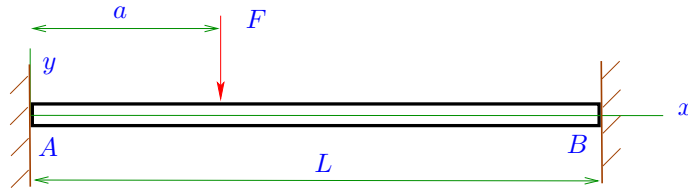


Figura 5.32: Ejemplo de cálculo de deflexiones.

Solución: Este problema es muy similar al anterior, en el sentido que es un problema hiperestático que requiere el uso de la deflexión $\hat{y}(x)$ para determinar de manera única todas las reacciones. Para ver esto consideremos el diagrama de cuerpo libre de toda la viga mostrado en la Figura 5.33.

En A y B debido al empotramiento y a que las cargas externas solo tienen componente en el sentido vertical, tenemos dos reacciones: una fuerza y un momento de reacción. La viga debe estar en equilibrio luego

$$\sum F_y = 0 \quad A + B = F, \quad (5.78)$$

$$\sum_A M_z = 0 \quad BL + M_B = Fa + M_A. \quad (5.79)$$

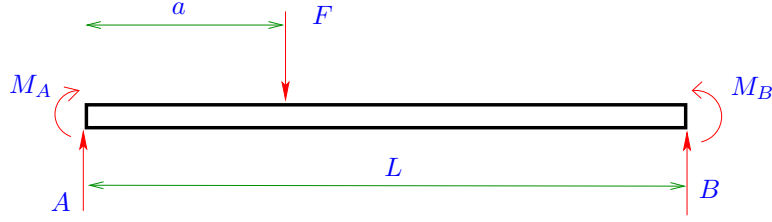


Figura 5.33: Ejemplo de cálculo de deflexiones. Diagrama de cuerpo libre

Tenemos entonces 2 ecuaciones y 4 incógnitas A , M_A , B y M_B .

La forma de solucionar este problema es mucho más simple que el caso anterior. Para ello vamos a obtener $\hat{y}(x)$ resolviendo (5.50)₃ con condiciones de borde adecuadas, para luego con la solución y (5.50)₁ obtener, por ejemplo, M evaluado en $x = 0$ y $x = L$, con lo que M_A y M_B serían conocidos y por tanto de (5.78), (5.79) obtendríamos A y B .

En este problema, de la Figura 5.32 y de (5.50)₃ tenemos que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{F}{EI_z} \delta(x - a).$$

Integrando tres veces tenemos

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{F}{2EI_z} (x - a)^2 r(x - a) + \frac{\alpha_3}{2} x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1, \quad (5.80)$$

de donde se obtiene

$$\hat{y}(x) = -\frac{F}{6EI_z} (x - a)^3 r(x - a) + \frac{\alpha_3}{6} x^3 + \frac{\alpha_2}{2} x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0. \quad (5.81)$$

Respecto a las condiciones de borde, como en A y B la viga está empotrada de (5.49)₁ esto implica que

$$\hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(L) = 0, \quad \left. \frac{d\hat{y}}{dx} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d\hat{y}}{dx} \right|_L = 0, \quad (5.82)$$

luego de (5.80) y (5.81) tenemos

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{F}{2EI_z} \frac{(L - a)^2}{L} - \alpha_3 \frac{L}{2}, \quad (5.83)$$

y

$$\alpha_3 = -\frac{2F}{EI_z} (L - a)^3 + \frac{3F}{EI_z} L(L - a)^2. \quad (5.84)$$

De (5.50)₁ tenemos que $M(x) = EI_z \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}$. Para encontrar la relación entre el momento interno y los momentos de reacción M_A y M_B veamos la Figura 5.34.

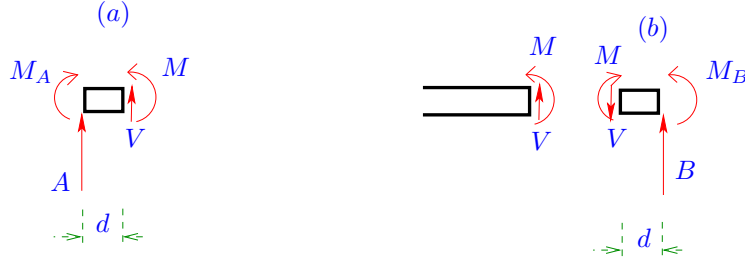


Figura 5.34: Ejemplo de cálculo de deflexiones. Condiciones de borde en los extremos.

En esta figura tenemos en el lado izquierdo un corte imaginario hecho muy cerca del punto $x = 0$. En dicho corte imaginario vemos en un lado el momento interno M y en el otro el momento de reacción M_A . Podemos ver que cuando la distancia d es tal que $d \rightarrow 0$ tenemos que $M_A = EI_z \left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_0$.

Por otro lado en la parte derecha de la figura tenemos otro corte imaginario cerca del punto $x = L$. En un lado tenemos el resto de la viga y en el otro tenemos el extremo cercano a $x = L$. Por acción y reacción en el lado que está cercano a $x = L$ el momento interno apunta en el sentido opuesto a su definición usual, de modo que por la orientación que le habíamos dado a M_B tenemos $M_B = EI_z \left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_L$.

De (5.81), (5.50)₁ y de las observaciones anteriores tenemos que

$$M_A = \alpha_2 EI_z, \quad M_B = -F(L - a) + EI_z \alpha_3 L + EI_z \alpha_2, \quad (5.85)$$

donde α_2 y α_3 ya se habían calculado en (5.83), (5.84), de modo que ahora conocemos completamente M_A y M_B y de (5.78), (5.79) podemos despejar

$$B = \frac{1}{L}(Fa - M_B - M_A), \quad A = F - B. \quad (5.86)$$

5. La viga mostrada en la Figura 5.35 está sometida a un momento puro C en un punto a una distancia a del extremo izquierdo de la misma. Determine la deflexión $\hat{y}(x)$ para este problema.

Solución: En este problema no podemos resolver (5.50)₃ para toda la viga como habíamos hecho para los problemas anteriores. Del diagrama para el momento interno $M(x)$ es posible ver que esta función en realidad es discontinua, y por lo tanto la segunda y las derivadas de orden mayor son también funciones discontinuas en $x = a$, por lo que si queremos obtener la deflexión usando (5.50)₃, tenemos que resolver esta ecuación por tramos, tal como lo habíamos hecho en la Sección 5.2.2.

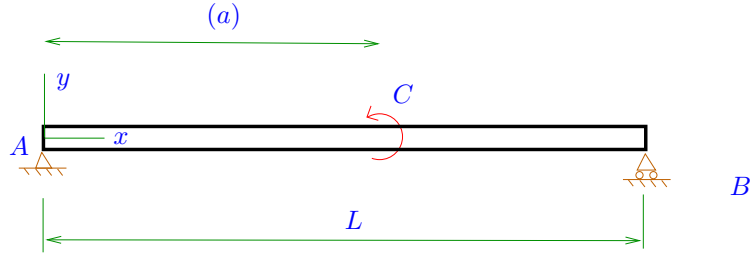


Figura 5.35: Ejemplo de cálculo de deflexiones.

Vamos a demostrar primero que $M(x)$ es discontinuo, para ello calcularemos las reacciones en A y B . De $\sum_A M_z = 0$ y $\sum F_y = 0$ tenemos

$$A = \frac{C}{L}, \quad B = -\frac{C}{L}. \quad (5.87)$$

Si hacemos un primer corte en el tramo $0 < x < a$, como el mostrado en la Figura 5.36, de $\sum M_z = 0$ obtenemos

$$M = Ax = \frac{Cx}{L}. \quad (5.88)$$

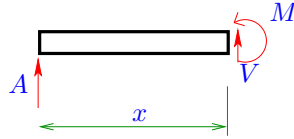


Figura 5.36: Ejemplo de cálculo de deflexiones. Primer corte.

Si hacemos un segundo corte imaginario para el tramo $a < x < L$ tenemos un diagrama de cuerpo libre como el mostrado en la Figura 5.37 y de $\sum M_z = 0$ obtenemos

$$M = Ax - C = C \left(\frac{x}{L} - 1 \right). \quad (5.89)$$

Con (5.88) y (5.89) es posible ver que el comportamiento de $M(x)$ es discontinuo en $x = a$ tal como se muestra en la Figura 5.38.

En vez de usar (5.50)₃ para obtener $\hat{y}(x)$, como ya conocemos $M(x)$ podemos en su lugar usar (5.50)₁ para obtener la deflexión. La ventaja es

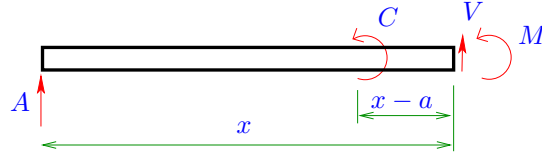


Figura 5.37: Ejemplo de cálculo de deflexiones. Segundo corte.

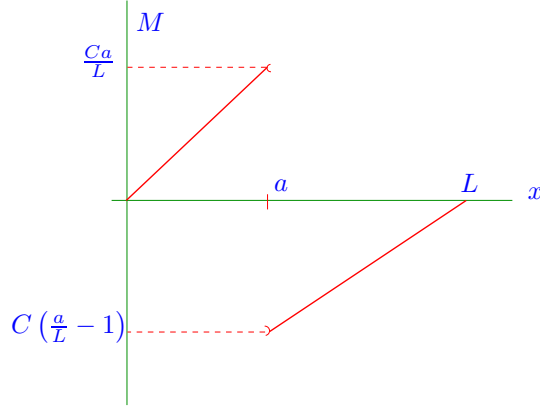


Figura 5.38: Diagrama para $M(x)$.

que son menos las constantes que se deben obtener con las condiciones de borde y compatibilidad. De (5.50)₁, (5.88) y (5.89) debemos solucionar

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \begin{cases} \frac{Cx}{L}, & \text{si } 0 < x < a \\ C\left(\frac{x}{L} - 1\right), & \text{si } a < x < L \end{cases}.$$

Al igual que en la Sección 5.2.2 podemos definir $\hat{y}^-(x)$ como $\hat{y}(x)$ para $0 < x < a$ y $\hat{y}^+(x)$ como $\hat{y}(x)$ para $a < x < L$, luego debemos resolver

$$\frac{d^2 \hat{y}^-}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \frac{Cx}{L}, \quad \frac{d^2 \hat{y}^+}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} C\left(\frac{x}{L} - 1\right).$$

Integrando una vez tenemos

$$\frac{d\hat{y}^-}{dx} = \frac{1}{2EI_z} \frac{Cx^2}{L} + \alpha_1, \quad \frac{d\hat{y}^+}{dx} = \frac{L}{2EI_z} C\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 + \beta_1 \quad (5.90)$$

de donde obtenemos finalmente

$$\hat{y}^-(x) = \frac{1}{6EI_z} \frac{Cx^3}{L} + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \hat{y}^+(x) = \frac{L}{6EI_z} C\left(\frac{x}{L} - 1\right)^3 + \beta_1 x + \beta_0. \quad (5.91)$$

Tenemos 4 constantes que buscar α_0 , α_1 , β_0 y β_1 . De la Figura 5.35 tenemos las condiciones de borde para los apoyos¹⁸ A y B

$$\hat{y}^-(0) = 0, \quad \hat{y}^+(L) = 0, \quad (5.92)$$

y como condición de compatibilidad en $x = a$ tenemos

$$\hat{y}^-(a) = \hat{y}^+(a), \quad \left. \frac{d\hat{y}^-}{dx} \right|_a = \left. \frac{d\hat{y}^+}{dx} \right|_a, \quad (5.93)$$

luego de (5.90) y (5.91) con (5.92) y (5.93) podemos obtener las 4 constantes, lo que se deja como ejercicio para el lector.

¹⁸Nótense que no consideramos la condición momento igual a cero en dichos puntos (relacionados con la segunda derivada), puesto que esta condición ya se cumple con $M(x)$ de (5.88) y (5.89). Esto ocurre porque en este problema como paso previo debimos calcular el momento interno, no como en los problemas anteriores en donde $M(x)$ es una cantidad que aparecía de manera implícita en los cálculos.

5.2.5. Ejercicios

- La viga ACB de la Figura 5.39 (lado izquierdo) cuelga de dos resortes. Los resortes tienen rigideces k_1, k_2 . La sección de la viga se muestra en el lado derecho de la figura en forma *ampliada*.
 - Determine las propiedades de área de la viga.
 - ¿Cual es el desplazamiento hacia abajo del punto C cuando se aplica P ?
 - ¿Cual es el máximo esfuerzo normal por flexión en la viga y donde se ubica este esfuerzo?

(Se debe despreciar el peso de la viga)

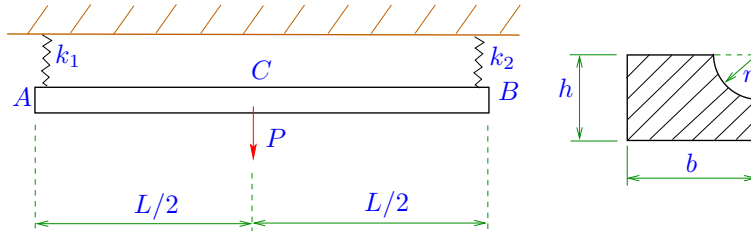


Figura 5.39: Viga sujeta a resortes.

Datos:

$$L = 6\text{m}, \quad k_1 = 300\text{kN/m}, \quad k_2 = 170\text{kN/m}, \quad E = 190\text{GPa}, \\ h = 10\text{cm}, \quad b = 15\text{cm}, \quad r = 5\text{cm}, \quad P = 5000\text{N}.$$

- La viga de la Figura 5.40 se encuentra apoyada en tres soportes flexibles, donde estos tres soportes se pueden modelar como resortes de constante $k = 1000[\text{N/mm}]$. La viga está bajo la acción de una fuerza uniforme $w_0 = 1000\text{N/m}$ y su sección se muestra en el lado derecho de la figura (de forma ampliada). Determine las reacciones en los soportes.

Datos:

$$L = 1[\text{m}], \quad a = 5[\text{cm}], \quad d = 3[\text{cm}], \quad b = 8[\text{cm}], \quad h = 9[\text{cm}], \quad E = 190[\text{GPa}].$$

- La Figura 5.41 muestra dos vigas de sección circular y largo L las cuales están empotradas en sus extremos izquierdos. La viga inferior está sometida a una fuerza puntual P y está conectada a través de un cable de diámetro d_c a una polea rígida, la que está pegada a la viga superior. Determine la fuerza que se transmitiría a través del cable a la polea. Las vigas y el cable tiene un módulo de Young de E , en tanto que las dos vigas tiene además un módulo de corte G .

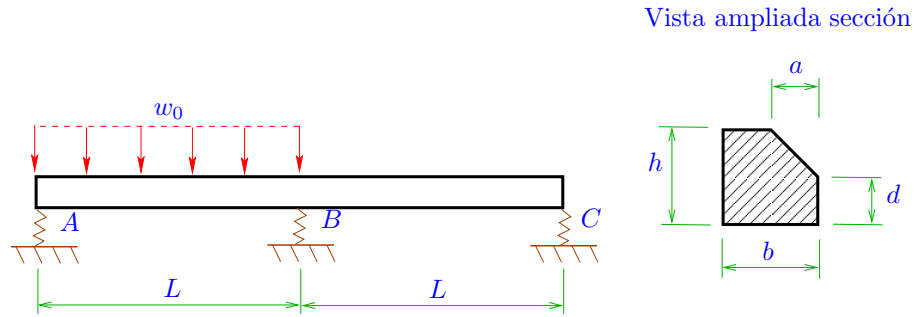


Figura 5.40: Viga con tres soportes.

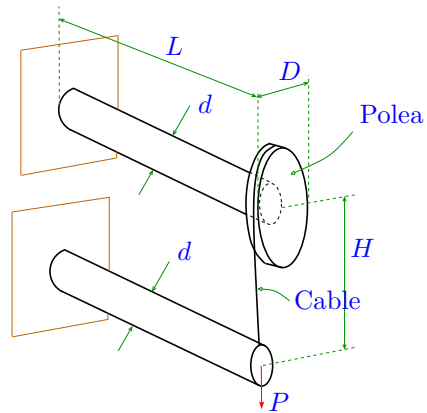


Figura 5.41: Dos vigas cilíndricas unidas por un cable.

Datos: $L = 3\text{m}$, $H = 1.6\text{m}$, $D = 30\text{cm}$, $d = 10\text{cm}$, $E = 210\text{GPa}$, $G = 70\text{GPa}$, $d_c = 0.8\text{cm}$.

Capítulo 6

Corte en vigas

En el capítulo anterior hemos estudiado en detalle el fenómeno de flexión y deflexión en vigas, en donde en particular desarrollamos métodos aproximados para obtener distribuciones de esfuerzos normales debido a la presencia de momentos internos $M(x)$ en una viga unidimensional. En ese capítulo despreciamos otras componentes del tensor de esfuerzos.

En este capítulo volveremos al problema de la viga bajo la acción de fuerzas externas, tal como se muestra en el lado izquierdo de la Figura 6.1, pero ahora nos interesaremos en un fenómeno adicional que ocurre en este tipo de problemas, que es la presencia de esfuerzos de corte.

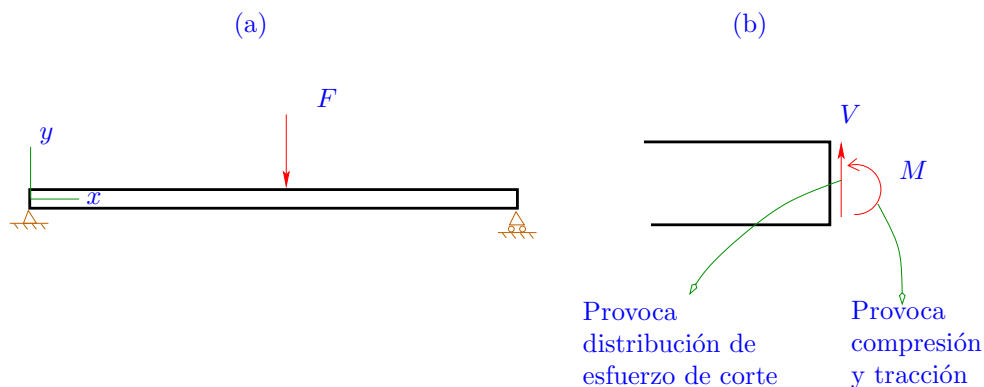


Figura 6.1: (a) Viga bajo el efecto de una fuerza externa. (b) Detalle que muestra un corte imaginario con las cargas internas V y M y los ‘efectos’ que estas cargas generarían.

En la Figura 6.1 en el lado derecho tenemos un esquema que nos muestra un corte imaginario con los dos tipos de cargas más importantes a considerar¹.

¹En la Figura 6.1 en la vista del corte imaginario deberíamos agregar también la fuerza horizontal H , sin embargo por simplicidad no la incluimos. Esta fuerza es importante al

El momento interno M ya lo hemos asociado a los esfuerzos normales σ_x por flexión (ver Ecuación (5.9) y Figura 6.2), lo que exploraremos ahora en este capítulo son los esfuerzos que la fuerza interna de corte V podría generar.

σ_x Causado por M

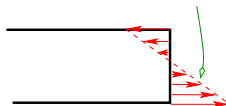


Figura 6.2: Distribucion de esfuerzo normal causado por M .

6.1. Corte en vigas de sección rectangular

Por simplicidad comenzaremos estudiando uno de los casos más simples que corresponde a una viga de sección rectangular, tal como se muestra en las Figuras 6.3 y 6.4. En la Figura 6.3 tenemos una vista lateral de la viga completa

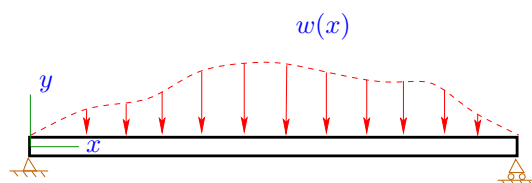


Figura 6.3: Viga bajo la acción de una fuerza externa.

bajo la acción de algún tipo de carga arbitraria $w(x)$. Debemos poner especial atención a la disposición de los ejes coordenados x, y . En la Figura 6.4 tenemos

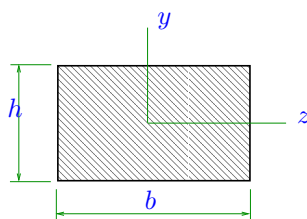


Figura 6.4: Seccion rectangular.

momento de determinar esfuerzos normales uniformes por tracción/compresión pura. En el Capítulo 9 veremos esquemas con vigas considerando todas las cargas internas.

una vista ampliada de la sección de la viga, la cual tiene lados b , h , en el plano $y - z$.

Considerémos ahora las ecuaciones de equilibrio para el caso plano (3.42), (3.43)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

las cuales si se usa la notación $\sigma_x = \tau_{xx}$, $\sigma_y = \tau_{yy}$ quedan como

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (6.2)$$

Vamos a solucionar de forma aproximada (6.1) y (6.2). Lo primero que haremos es asumir que $\sigma_y \approx 0$. Por otra parte de la teoría de flexión (ver (5.9)) teníamos que

$$\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z}y,$$

por lo que

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{dM}{dx} \frac{y}{I_z}. \quad (6.3)$$

Reemplazando (6.3) en (6.1) tenemos que

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{dM}{dx} \frac{y}{I_z}. \quad (6.4)$$

Pero de (3.16) teníamos $\frac{dM}{dx} = -V(x)$, como resultado de la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -V(x) \frac{y}{I_z}, \quad (6.5)$$

por lo que si integramos en y se llega a²

$$\tau_{xy} = -\frac{V(x)}{2I_z}y^2 + c_o. \quad (6.6)$$

Podemos ver que (6.6) solo sería solución de (6.1), y que (6.2) en general no es satisfecha, por ese motivo se indicó previamente que aquí buscaríamos solo una solución aproximada de (6.1) y (6.2).

Para encontrar c_o haremos uso de la Figura 6.5. En dicha figura (lado izquierdo

²La Ecuación (6.1) es en realidad una ecuación en derivadas parciales, de modo que c_o en general no sería una constante, sino más bien una función de x , es decir $c_o = c_o(x)$.

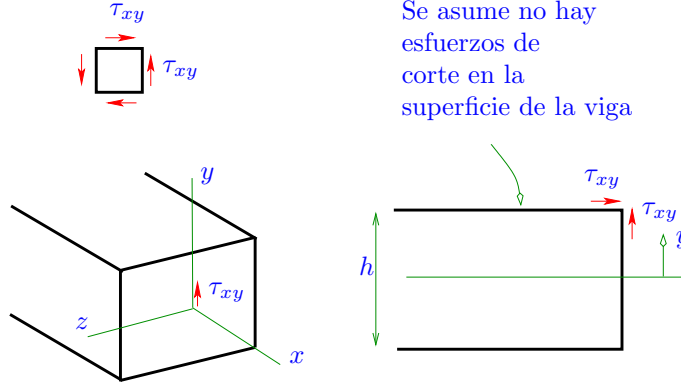


Figura 6.5: Distribución de esfuerzos de corte para la viga de sección rectangular y condiciones de borde para el esfuerzo.

inferior) podemos ver la viga con un corte imaginario y en su centro la componente τ_{xy} tal como debería ser dibujada en dicha superficie de corte. El tensor de esfuerzos es simétrico, de modo que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ y por lo tanto para una vista lateral (en el plano $x - y$) de un cubo diferencial tendríamos algo como los mostrado en la misma figura en la parte superior izquierda. Si dibujamos ahora el esfuerzo de corte justo en $y = h/2$ tendríamos algo como lo mostrado en la figura de la derecha, en donde tenemos una representación o vista lateral de la viga en el plano $x - y$. Debemos recordar ahora que originalmente sobre la viga solo se aplicaba $w(x)$, que era una distribución de fuerza normal en la dirección y , o sea en la viga en la superficie $y = h/2$ no había ningún tipo de carga externa de corte, de modo para ese punto $\tau_{xy} = 0$, o sea

$$\tau_{xy}(h/2) = 0, \quad (6.7)$$

lo que de (6.6) implica que³

$$c_o = \frac{V(x)}{8I_z} h^2, \quad (6.8)$$

por lo que de (6.6) tenemos finalmente que⁴

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.9)$$

³En este resultado podemos apreciar que efectivamente c_o depende de x puesto que $V = V(x)$.

⁴En algunos textos esta formula puede aparecer con un signo menos, lo que proviene de la convención para el sentido de la carga interna $V(x)$.

En el Capítulo 9 veremos que en general en problemas con vigas bajo la acción de fuerzas externas $w(x)$ la magnitud de los esfuerzos de corte τ_{xy} debido a las fuerzas internas de corte $V(x)$ puede ser de uno o más ordenes de magnitud inferior a los esfuerzos normales por flexión σ_x . Esto es en particular cierto para vigas 'largas' en comparación a h y b .

Podemos verificar que $\tau_{xy}(-h/2) = 0$, lo que es correcto puesto que en la superficie inferior $y = -h/2$ tampoco hay carga externa de corte.

Finalmente debemos recordar de (5.39) que para este tipo de sección $I_z = \frac{bh^3}{12}$, por lo que ahora conocemos de manera completa la distribución de esfuerzo de corte debido a la carga interna de corte para la viga de sección rectangular.

6.2. Corte en vigas de sección arbitraria

De la sección anterior tenemos ahora más menos una idea del tipo de esfuerzos que $V(x)$ puede generar. En esta sección estudiaremos el caso de una viga bajo la acción de una fuerza $w(x)$ y de sección totalmente arbitraria, para ello consideremos el esquema mostrado en la Figura 6.6 y las siguientes observaciones.

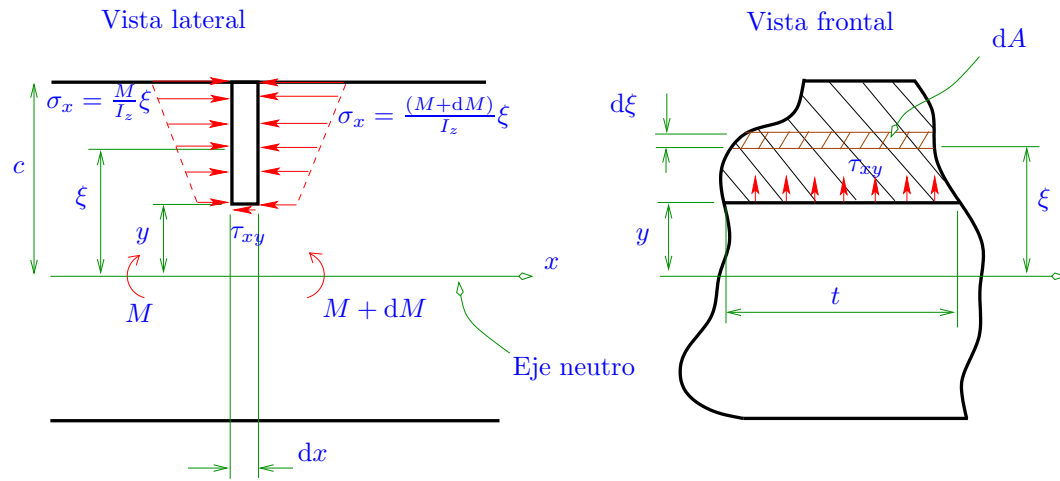


Figura 6.6: Modelo para determinar de forma aproximada la distribución de esfuerzos de corte en una viga de sección arbitraria.

- En el lado izquierdo de esta figura tenemos una vista lateral de la viga (solo una parte de ella) en el plano $x - y$. En el lado derecho tenemos una vista frontal de la viga, en donde vemos la sección de la misma en el plano $y - z$.
- En esta figura observemos el elemento diferencial de largo dx (en el eje x) que se aprecia en la vista del lado izquierdo. Este elemento diferencial está limitado en su parte inferior (en el plano $y - z$) por la posición y , en tanto en su parte superior por la altura c .
- Es importante hacer notar que de cálculos previos ya se ha determinado

la posición del eje neutro y que por tanto la distancia y ya está siendo medido desde dicho eje neutro.

- La variable ξ es una coordenada auxiliar vertical que se mueve entre $y \leq \xi \leq c$.
- En la vista frontal (lado derecho) tenemos que para la posición $\xi = y$ el ancho de la sección es t . Es fácil ver que t en general va a ser una función de la posición vertical.
- En la vista del lado izquierdo tenemos en un lado un momento interno M y en el otro, debido a que nos hemos trasladado una distancia dx , tenemos un momento de magnitud aproximada $M + dM$. Luego de (5.9) tenemos que en el lado izquierdo del diferencial se produce una distribución de esfuerzo normal por flexión $\sigma_x = \frac{M}{I_z}\xi$ y en el lado derecho tenemos $\sigma_x = \frac{(M+dM)}{I_z}\xi$.
- Si en el elemento diferencial solo actuaran los esfuerzos normales mencionados en el punto anterior, no podría haber equilibrio para el elemento en el sentido del eje x , luego es necesario que se agregue algún tipo de esfuerzo adicional en dicha dirección. Como el elemento diferencial se obtiene también de un corte imaginario en la parte inferior (ver vista de lado izquierdo), luego en dicha superficie es necesario agregar algún tipo de esfuerzo o carga interna, y para lograr el equilibrio es fácil ver que deberíamos tener una distribución de esfuerzo de corte τ_{xy} tal como se puede apreciar en la misma figura.
- En la vista del lado derecho vemos que por simetría la componente en corte del tensor de esfuerzos τ_{xy} también aparece en la cara frontal del elemento diferencial.

Con las observaciones anteriores ahora podemos pedir que el elemento diferencial esté en equilibrio en el sentido del eje x , luego

$$-\tau_{xy}t dx + \int_y^c \underbrace{\sigma_x(x)}_{\frac{M}{I_z}\xi} dA - \int_y^c \underbrace{\sigma_x(x+dx)}_{\frac{(M+dM)}{I_z}\xi} dA = 0,$$

de donde se obtiene

$$\tau_{xy}dx = -\frac{1}{I_z t} dM \int_y^c \xi dA \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{I_z t} \frac{dM}{dx} \int_y^c \xi dA,$$

y como de (3.16) tenemos que $\frac{dM}{dx} = -V$ de la ecuación anterior se llega finalmente a

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t} \int_y^c \xi dA. \quad (6.10)$$

En la expresión anterior en general la parte difícil de los cálculos es determinar dA como función de ξ para una sección dada.

6.3. Corte en vigas de sección delgada abierta

En esta sección nos interesa aplicar (6.10) a un caso especial de viga en donde tenemos una sección ‘delgada abierta’. Para ilustrar esto considerémos un ejemplo específico tal como se muestra en la Figura 6.7. En dicha figura

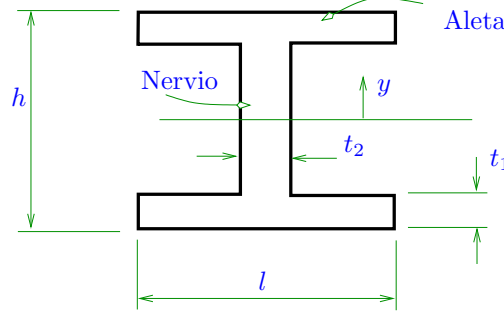


Figura 6.7: Ejemplo de sección delgada abierta.

tenemos la vista de la sección de una viga doble T, también llamada perfil H.

Nos interesa ahora determinar τ_{xy} para esta sección, lo que haremos en dos partes:

- Asumamos V es conocido, por otra parte I_z es fácil de determinar de (5.7). La parte clave es calcular $\int_y^c \xi dA$, luego como el eje neutro en este caso pasa por la mitad, en un primer paso, para la ‘ala superior’ asumamos que

$$\frac{h}{2} - t_1 \leq y \leq \frac{h}{2}.$$

Como $c = h/2$, para ese rango para y , de la figura podemos apreciar que

$$dA = l d\xi,$$

por lo que

$$\int_y^c \xi dA = \int_y^{h/2} \xi l d\xi = \frac{l}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Para $\frac{h}{2} - t_1 \leq y \leq \frac{h}{2}$ se tiene que

$$t = l,$$

y como resultado de (6.10) se llega a

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.11)$$

- En esta segunda parte para el ‘nervio’ vamos a asumir que

$$0 \leq y \leq \frac{h}{2} - t_1.$$

En este punto debemos recordar que en (6.10) c siempre es el mismo, es decir en este caso $c = h/2$. Si $0 \leq y \leq \frac{h}{2} - t_1$ vamos a tener que dA va a ser igual a

$$dA = \begin{cases} t_2 d\xi & \text{si } 0 \leq \xi < \frac{h}{2} - t_1 \\ l d\xi & \text{si } \frac{h}{2} - t_1 \leq \xi \leq \frac{h}{2} \end{cases},$$

luego

$$\int_y^c \xi dA = \int_y^{h/2} \xi dA = \int_y^{h/2-t_1} \xi \underbrace{dA}_{t_2 d\xi} + \int_{h/2-t_1}^{h/2} \xi \underbrace{dA}_{l d\xi},$$

que después de algunas manipulaciones nos da

$$\int_y^c \xi dA = \frac{t_2}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 - y^2 \right] + \frac{l}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 \right].$$

Para $0 \leq y \leq \frac{h}{2} - t_1$ de la figura se puede ver que $t = t_2$, luego del resultado anterior y de (6.10) tenemos finalmente que

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t_2} \left\{ \frac{t_2}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 - y^2 \right] + \frac{l}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 \right] \right\}. \quad (6.12)$$

- Es fácil ver que para la ‘aleta inferior’ las expresiones para τ_{xy} son similares a (6.11).

De (6.11) y (6.12) tenemos entonces

$$\tau_{xy} = \begin{cases} \frac{V(x)}{I_z t_2} \left\{ \frac{t_2}{2} \left[\left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 - y^2 \right] + \frac{l}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 \right] \right\} & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{h}{2} - t_1 \\ \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) & \text{si } \frac{h}{2} - t_1 \leq y \leq \frac{h}{2} \end{cases}. \quad (6.13)$$

En el caso de un eje de sección delgada tenemos que $t_1, t_2 \ll l, h$ y un gráfico aproximado para $\tau_{xy}(y)$ se muestra en la Figura 6.8. En dicha figura podemos apreciar que la magnitud de los esfuerzos de corte en las aletas sería despreciable respecto a lo que sucede en el nervio.

Si bien es cierto de los resultados anteriores podemos concluir que no es importante calcular τ_{xy} en las aletas de la viga, mostraremos ahora que en dichas aletas otro tipo de esfuerzo de corte asociado a V puede aparecer.

En la Figura 6.9 (lado izquierdo) tenemos una vista tridimensional de la viga doble T. Imaginemos que se extrae un trozo diferencial de la aleta superior, cuya figura ampliada se muestra en el lado derecho. El trozo tiene una longitud infinitesimal dx en la dirección x , pero en el sentido del eje z su longitud puede ser variable y finita.

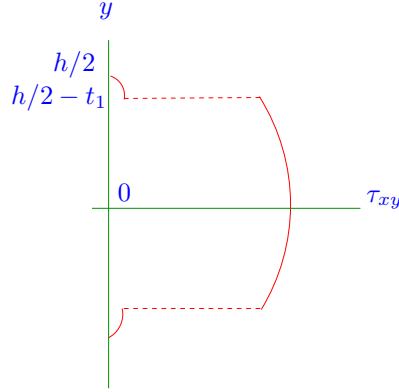


Figura 6.8: Gráfico aproximado para la distribución del esfuerzo de corte en la sección de la viga doble T.

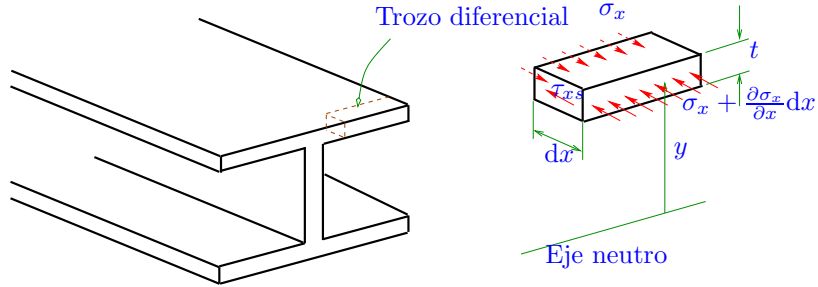


Figura 6.9: Esfuerzo de corte para viga doble T.

Para las caras del trozo diferencial en el plano $y - z$ tendríamos el efecto de los esfuerzos normales por flexión. En un lado tendríamos $\sigma_x(x)$ asociado a $M(x)$ y en el otro tendríamos $\sigma_x(x + dx) \approx \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ asociado a $M + dM$. Si se hace suma de fuerzas en el sentido del eje x se puede ver que el trozo diferencial no estaría en equilibrio, de modo que se hace necesario considerar algún otro tipo de fuerza interna. En este punto es necesario notar que hay otra superficie de corte imaginario para extraer el trozo diferencial. Esta superficie se ubica en el plano $x - y$, en donde procedemos a dibujar un esfuerzo de corte que denominamos⁵ τ_{xs} .

⁵En principio podríamos denominar a este esfuerzo τ_{xz} por el plano y el sentido en el que actúa, pero considerando que estos resultados serán generalizados en los párrafos siguientes, vamos a usar una notación más general τ_{xs} , en donde s va a ser considerado algún tipo de coordenada auxiliar.

Haciendo ahora el equilibrio en x , si t es el espesor de la aleta, tenemos

$$\sum F_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\tau_{xs}t \, dx + \int_A \sigma_x \, dA - \int_A \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \, dA = 0.$$

Pero de (5.9) tenemos que $\sigma_x = \frac{M}{I_z}y$ y $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = \frac{1}{I_z}(M + dM)y$, de modo que reemplazando en el balance de fuerzas anterior, despues de algunas manipulaciones, considerando (3.16) obtenemos

$$\tau_{xs} = -\frac{1}{I_z t} \frac{dM}{dx} \int_A y \, dA = \frac{V(x)}{I_z t} \int_A y \, dA. \quad (6.14)$$

Los significados de A e y los veremos con más precisión a continuación.

En la Figura 6.10 tenemos una vista frontal de la viga doble T, en donde podemos apreciar la aleta superior. La coordenada auxiliar s también se puede

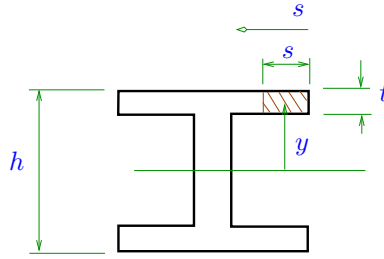


Figura 6.10: Calculo de esfuerzo de corte para viga doble T.

usar como largo variable para el trozo diferencial. Si la aleta es muy delgada, la distancia y se mediría desde el eje neutro a la mitad de la sección de la aleta. El área A que aparece en (6.14) sería el área achurada en este figura.

En este problema y es constante y en el caso que $t \ll h$ está dado por

$$y = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \approx \frac{h}{2}.$$

Como $dA = t \, ds$ tenemos que

$$\int_A y \, dA \approx ts \frac{h}{2},$$

por lo que de (6.14) se llega a

$$\tau_{xs} \approx \frac{V(x)}{I_z} s \frac{h}{2}. \quad (6.15)$$

Este es un tipo de esfuerzo de corte es distinto a (6.11), pero también es causado por $V(x)$. Podemos ver que si $s = 0$ tenemos que $\tau_{xs} = 0$, lo que es

correcto, pues en ese borde no hay esfuerzo de corte, debido a que no hay cargas externas de corte aplicadas en ninguna de las superficies de la viga.

Podemos ver que (6.10) y (6.14) son muy similares en su forma, si es necesario hacer notar que la naturaleza de los esfuerzos es distinta. En (6.14) se había usado la notación τ_{xs} , y en el siguiente ejemplo se justificará esa notación.

En la Figura 6.11 (vista superior izquierda) tenemos una vista tridimensional de una viga de sección arbitraria abierta de pared delgada. En dicha figura con

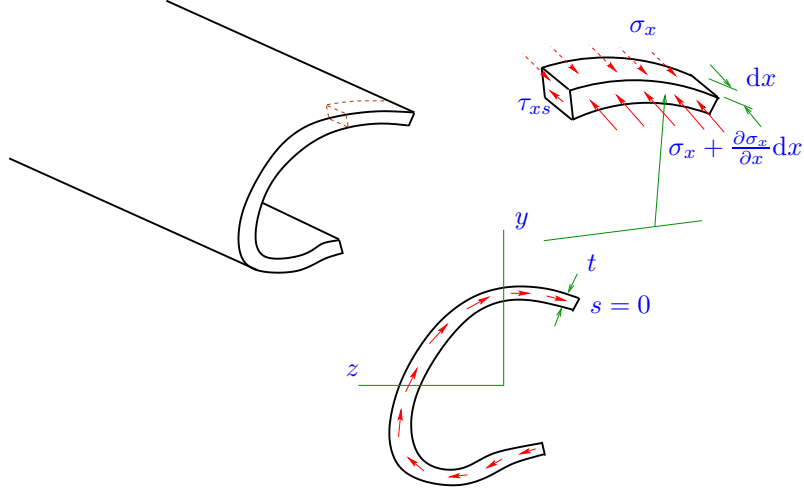


Figura 6.11: Distribución general de esfuerzos de corte para una viga de sección delgada abierta arbitraria.

líneas punteadas dibujamos un elemento diferencial de longitud dx en el eje x y de longitud arbitraria en el contorno del perfil.

En la misma figura en la vista superior derecha tenemos una representación ampliada de dicho elemento diferencial, en donde podemos apreciar en ambos lados los esfuerzos normales por flexión σ_x y $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Debido a que solo con estos esfuerzos actuando en el diferencial no habría equilibrio en el sentido del eje x , en la otra superficie del corte imaginario se debe incluir un esfuerzo de corte que llamamos τ_{xs} . Por la orientación arbitraria del contorno de la pared de la sección, utilizamos la coordenada s para movernos a lo largo de este. Debido a la simetría del tensor de esfuerzos en la cara frontal, también tenemos una distribución de esfuerzos de corte τ_{xs} , los que son mostrados de manera esquemática en la figura inferior central.

De $\sum F_x = 0$, siguiendo un procedimiento similar a los casos anteriores, se puede llegar a

$$\tau_{xs} = \frac{V(x)}{I_z t} \int_A y dA, \quad (6.16)$$

que es una expresión idéntica a (6.14). Sin embargo, en este caso más general hay algunas observaciones importantes:

- Se establece una coordenada s que se mueve a lo largo de sección de la viga, en donde en el extremo $s = 0$, tal como se muestra en la Figura 6.12.

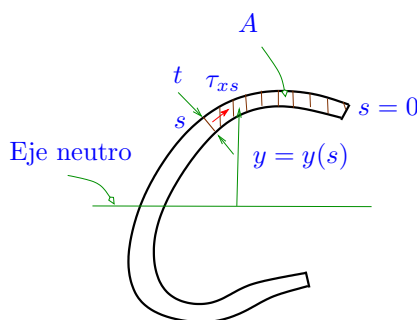


Figura 6.12: Cálculo de esfuerzos de corte para una viga de sección delgada abierta arbitraria.

- En (6.16) y no es en general constante, y va a depender de s , es decir $y = y(s)$ como se puede apreciar en la misma Figura 6.12.
- El espesor t se refiere al espesor de la pared en el punto exacto en donde interesa calcular τ_{xs} , es decir en el punto s como se ve en la figura.
- Se asume que previamente se ha calculado ya el eje neutro y que desde allí se mide $y(s)$.
- El área A corresponde a toda la región achurada.
- Finalmente podemos ver que τ_{xs} para paredes delgadas seguirá de forma aproximada la forma de la pared.

6.4. Centro de cortadura

Con los resultados mostrados en las Secciones 6.2, 6.3 ahora podemos explorar un problema adicional que ocurre en vigas sometidas a flexión. Imaginemos que tenemos una viga empotrada en un extremo y con una fuerza puntual en el extremo libre, tal como se muestra en la Figura 6.13, en donde tenemos una vista lateral (por ejemplo en el plano $x - y$) y una vista frontal de la sección de la viga (en el plano $y - z$), que podría ser un perfil C.

Este es el esquema típico de problema que hemos visto y estudiado hasta este momento. Hay una pregunta importante que no se ha hecho la cual es: ¿En qué posición a lo largo del eje z debería colocarse esta fuerza puntual? La pregunta no es trivial, pues en la Figura 6.14 tenemos vistas tridimensionales del problema en donde la fuerza F se aplica en distintas posiciones en z . Si la fuerza se aplicase muy hacia la derecha, intuitivamente vemos que no solo se produciría una flexión, sino también una torsión como la mostrada en la figura

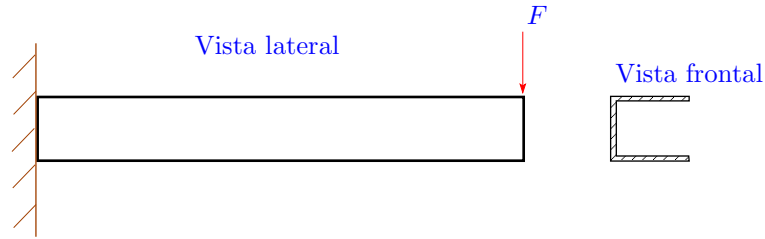


Figura 6.13: Viga empotrada bajo el efecto de una fuerza puntual. Cálculo de centro de cortadura.

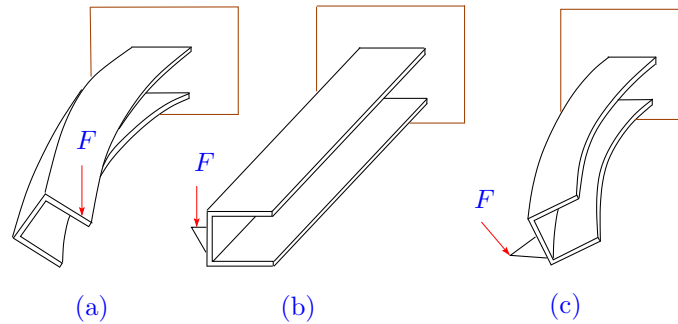


Figura 6.14: Viga empotrada bajo el efecto de una fuerza puntual. Efecto de colocar esta fuerza en distintas posiciones en la sección.

(a). Si la fuerza, por otro lado, se aplicase muy hacia la izquierda (quizás por medio de una placa adicional pegada a la viga), la torsión se podría producir hacia el otro lado, como se muestra en la figura (c). O sea, de manera intuitiva podemos pensar que existe una posición intermedia, para la cual se produciría flexión sin torsión, como se muestra de manera esquemática en la figura (b). El siguiente principio nos ayudará a encontrar dicho punto:

Para evitar flexión con torsión, la fuerza cortante aplicada debe tener una línea de acción tal que produce un momento de torsión, con respecto a cualquier eje paralelo al eje geométrico de la viga, igual pero opuesto al resultante, con respecto al mismo eje, de la distribución del esfuerzo cortante calculado bajo el supuesto de estar la viga sometida a flexión únicamente.

En los ejemplos mostrados en la siguiente sección haremos uso de este principio y veremos en mayor detalle su significado desde el punto de vista físico.

6.5. Ejemplos para cálculo de centros de cortadura

1. Para el perfil C mostrado en la Figura 6.15 determine el valor de la distancia e requerida para que se induzca flexión sin torsión en todas las secciones de la viga. En la Figura 6.18 tenemos las dimensiones de la sección de la viga.

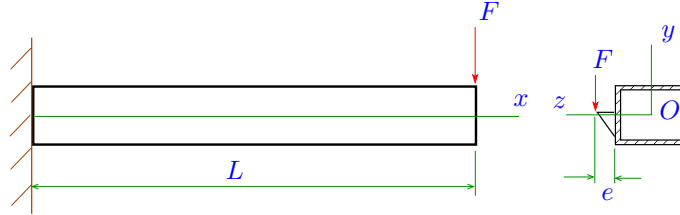


Figura 6.15: Viga empotrada bajo el efecto de una fuerza puntual y determinación del centro de cortadura.

Solución: Como paso previo a la determinación de e debemos calcular $V(x)$, para ello debemos notar que en el punto de empotramiento tendremos una fuerza de reacción de F y un momento de reacción igual a FL . Si se hace un corte imaginario a una distancia x del extremo izquierdo con $0 < x < L$, tendremos un diagrama de cuerpo libre como el mostrado en la Figura 6.16.

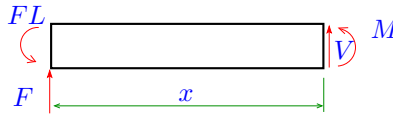


Figura 6.16: Viga empotrada bajo el efecto de una fuerza puntual y determinación del centro de cortadura. Corte imaginario para determinación de momento interno y de fuerza interna de corte.

Es fácil apreciar entonces que

$$V(x) = -F. \quad (6.17)$$

De las secciones anteriores sabemos que los esfuerzos de corte asociados a V en una viga de pared delgada siguen la dirección de la pared. Consideremos la Figura 6.17, en donde tenemos una vista tridimensional de la viga cerca de la zona de aplicación de la fuerza F .

Asumamos que hacemos un corte imaginario muy cerca del punto de aplicación de la fuerza. Es fácil apreciar que el sentido de los esfuerzos de corte

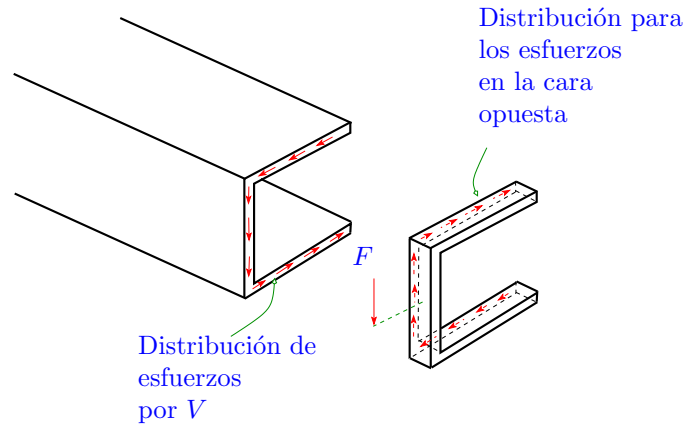


Figura 6.17: Sección de la viga y calculo para la distribución de esfuerzos de corte. Distribucion de esfuerzos de corte y principio de acción y reacción para un corte imaginario cerca del punto de aplicación de la fuerza externa.

τ_{xs} sería como el mostrado en la superficie de corte superior, en tanto que por acción y reacción en la cara opuesta el esfuerzos de corte tendría el sentido mostrado en 'lonja' restante en donde se ubica F .

Observemos ahora esa 'lonja' o porción de viga. Por un lado F generaría un torque en el sentido positivo del eje z , en tanto que τ_{xs} generaría un torque en el sentido opuesto. Luego lo que buscamos ahora es la distancia e para que dichos torques se anulen y la viga solo sufra flexión sin torsión, que es lo que nos decía el principio en la Sección 6.4.

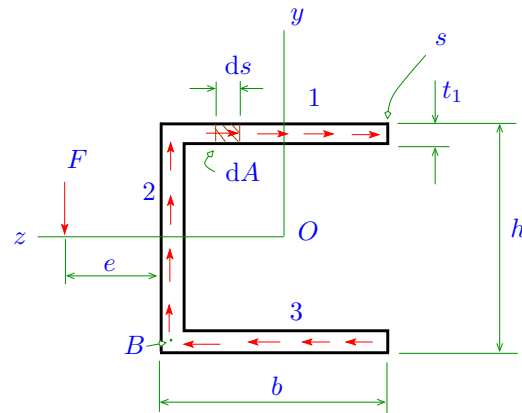


Figura 6.18: Sección de la viga y cálculo para la distribución de esfuerzos de corte.

Considerémos la Figura 6.18 en donde tenemos una vista frontal de la

sección en donde haremos el equilibrio de momentos. En un lado vemos la acción de la fuerza F y también podemos apreciar la distribución de esfuerzo τ_{xs} que genera un momento en el sentido contrario.

La sección la hemos dividido en tres partes, numeradas de 1 a 3. El eje z ya se ha ubicado en la posición del eje neutro, que en este caso pasa simplemente por $h/2$.

Para hacer el equilibrio de momento se puede escoger cualquier punto en el espacio, pero si escogemos el punto B en la figura, podemos darnos cuenta que ni la distribución en 2 ni 3 generan momento en dicho punto, y como consecuencia solo nos interesaría el momento generado por τ_{xs} .

Para un diferencial de área dA en 1, la fuerza causada por τ_{xs} sería igual a $\tau_{xs} dA$, y si el espesor de la pared de la sección es t_1 (muy pequeño) tenemos que el momento causado por $\tau_{xs} dA$ respecto a B sería igual a

$$(h - t_1)\tau_{xs} dA,$$

en donde $dA = t_1 ds$.

De las expresiones anteriores tenemos que $\sum M_B = 0$ quedaría como⁶

$$Fe \approx - \int_0^b (h - t_1)\tau_{xs} t_1 ds. \quad (6.18)$$

Ahora procedemos a calcular τ_{xs} , para ello de (6.16) recordamos que $\tau_{xs} = \frac{V}{I_z t} \int y dA$. De la Figura 6.18 recordando el significado de y vemos que en este caso si t_1 es pequeño entonces

$$y = \frac{h - t_1}{2},$$

en tanto que $t = t_1$. De la Figura 6.19 tenemos que $dA \approx t_1 ds$. De las consideraciones anteriores y (6.16) tenemos

$$\tau_{xs}(s) = \frac{V}{I_z t_1} \int_0^s \left(\frac{h - t_1}{2} \right) t_1 d\xi,$$

de donde obtenemos

$$\tau_{xs}(s) = \frac{V}{2I_z} (h - t_1)s. \quad (6.19)$$

⁶Es necesario explicar la presencia del signo (-) en (6.18). La ecuación (6.16) nos entrega τ_{xs} para la cara superior mostrada en la Figura 6.17, sin embargo en la Figura 6.18 y en las expresiones mostradas aquí para el balance de momento necesitamos τ_{xs} para la cara opuesta según el corte, es decir necesitaríamos el ‘negativo’ de la expresión (6.16). El signo menos puede incluirse antes o después de hacer los cálculos para τ_{xs} .

Respecto al símbolo de aproximación \approx en (6.18), este símbolo aparece debido a que en estricto rigor la integral debería hacerse sobre la superficie 1 como integral de superficie, pero debido a que $t_1 \ll h$, se reemplaza (de forma aproximada) la integral de superficie por una integral de línea.

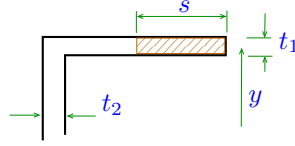


Figura 6.19: Sección de la viga y calculo para la distribución de esfuerzos de corte. Zona de interés para el cálculo de los esfuerzos de corte.

Es posible apreciar que para $s = 0$ tenemos que $\tau_{xs} = 0$, lo que es correcto para el borde de la aleta.

En este problema de (6.17) tenemos que $V = -F$ por lo que

$$\tau_{xs}(s) = \frac{-F}{2I_z}(h - t_1)s. \quad (6.20)$$

Reemplazando en (6.18) se tiene

$$Fe = \int_0^b \frac{F}{2I_z}(h - t_1)^2 s t_1 ds,$$

de donde obtenemos finalmente

$$e = \frac{(h - t_1)^2 t_1}{2I_z} \frac{b^2}{2}, \quad (6.21)$$

en donde en particular podemos ver que e no depende de manera directa de la fuerza externa F .

Un paso adicional es determinar I_z para esta sección. Del método mostrado en (5.37) se puede mostrar que

$$I_z = \frac{(b - t_2)}{6} t_1^3 + \frac{t_1}{2} (b - t_2)(h - t_1)^2 + \frac{t_2 h^3}{12}. \quad (6.22)$$

2. Determine el punto de aplicación de la fuerza para que solo se produzca flexión sin torsión en la viga mostrada en la Figura 6.20. Se debe asumir que $t \ll h, b, r$.

Solución: En el lado izquierdo de la Figura 6.20 tenemos una vista de costado de la viga, en tanto que en el lado derecho tenemos una vista (ampliada) de la sección de la misma.

El primer paso para solucionar este problema es obtener $V(x)$, para ello primero observamos que para la viga completa el diagrama de cuerpo libre debería ser como se muestra en la Figura 6.21.

Si se hace el cálculo de $V(x)$ siguiendo el método usual tenemos

$$V(x) = \begin{cases} -F/2 & x < L/2 \\ F/2 & x > L/2 \end{cases}.$$

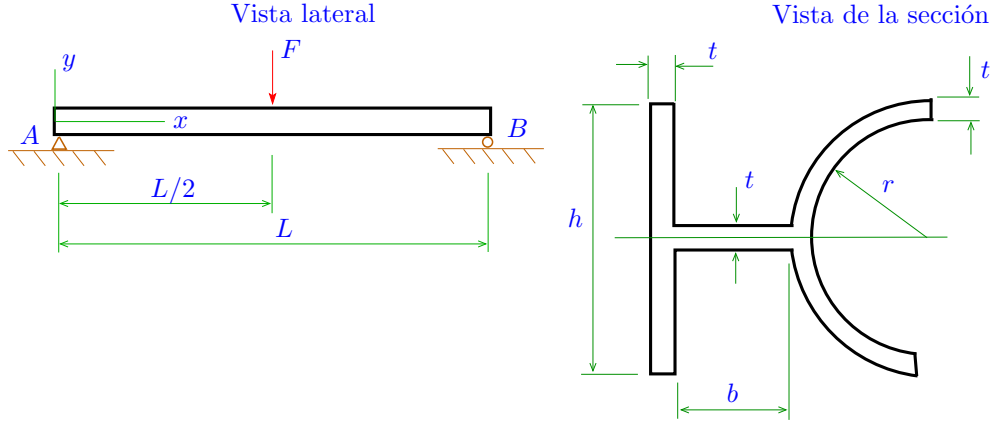


Figura 6.20: Ejemplo para el cálculo del centro de cortadura.

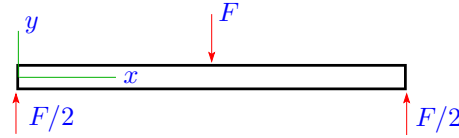


Figura 6.21: Ejemplo para el cálculo del centro de cortadura. Diagrama de cuerpo libre.

Para determinar el punto de aplicación de la fuerza necesitamos primero calcular τ_{xs} usando (6.16). Ahora bien, en (6.16) necesitamos conocer que V debemos usar en nuestros cálculos, para responder a dicha pregunta veamos el esquema mostrado en la Figura 6.22. En dicha figura tenemos una vista tridimensional de la viga en donde se ha hecho dos cortes imaginarios. El primer corte se hizo un poco antes del punto de aplicación de la fuerza puntual F , en tanto que el segundo corte se hace un poco después del punto de aplicación. Por medio de estos tres cortes vemos que la viga se puede separar en tres partes, tal como se muestra en la Figura 6.22.

De $\tau_{xs} = \frac{V(x)}{I_x t} \int_A y dA$ vemos que para $x < L/2$ tenemos que $V = -F$, por tanto en la superficie de la parte de la viga que queda con el corte en $x < L/2$ tenemos una distribución⁷ para τ_{xs} más menos como se muestra en la Figura 6.22. Por acción y reacción en la cara opuesta tenemos entonces una distribución de esfuerzo de corte que va hacia ‘arriba’, como se muestra en la cara oculta de la porción delgada de viga alrededor del punto $x = L/2$.

Para $x > L/2$ tenemos que $V = F$ de modo que en la cara visible de la

⁷No mostramos toda la distribución, pues como veremos después no es necesario calcular τ_{xs} en todas las partes de la sección.

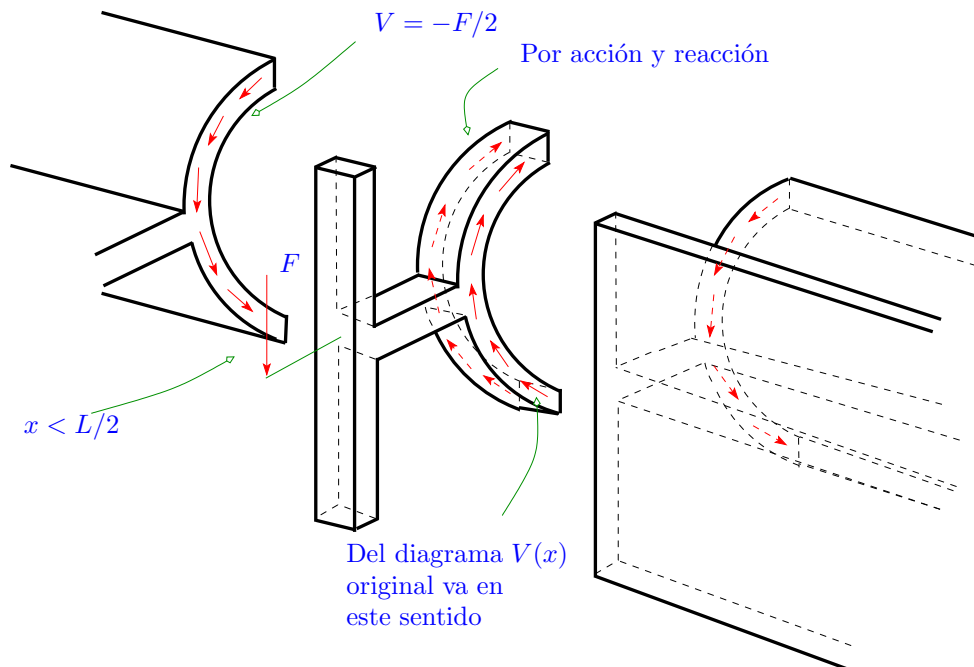


Figura 6.22: Ejemplo para el cálculo del centro de cortadura. Distribución de esfuerzos de corte para un corte imaginario en una sección muy delgada en torno al punto de aplicación de la fuerza puntual F .

porción delgada tendríamos una distribución de esfuerzos de corte τ_{xs} en el sentido positivo como se muestra en la Figura.

De la porción delgada alrededor del punto $x = L/2$ podemos ver ahora el tipo de equilibrio al momento que debemos hacer. Por una parte tendríamos un torque causado por F , que en el caso que no hubiese torsión, debería ser contrarrestado por el torque causado por las fuerzas internas asociadas a las distribuciones de esfuerzos τ_{xs} a ambos lados de la porción delgada.

Con estas observaciones en mente veamos ahora la Figura 6.23, en donde tenemos una vista frontal de la sección (de la parte delgada en donde se aplica la fuerza F), en donde podemos apreciar la fuerza F y una posible distribución para los esfuerzos de corte en ambos lados de la sección. La fuerza F se aplicaría a una distancia e hacia la izquierda de la sección⁸. Como la sección de la viga es delgada los esfuerzos de corte τ_{xs} siguen la forma de la pared.

⁸Se asume que hay algún tipo de placa pegada a la viga en la cual se puede aplicar la fuerza puntual.

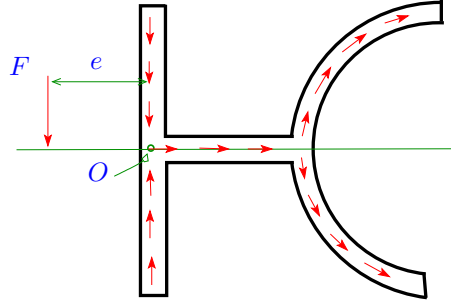


Figura 6.23: Ejemplo para el cálculo del centro de cortadura. Distribución de esfuerzos de corte en la sección.

Ahora haremos equilibrio al momento por F y por la fuerza asociada a τ_{xs} , para ello debemos escoger un punto respecto al cual hacer este equilibrio. Este punto es arbitrario y por simplicidad escogemos el punto O mostrado en la Figura 6.23. En dicho punto ni la distribución vertical ni la distribución horizontal hacen momento, luego solo es necesario calcular τ_{xs} en la parte curva de la sección.

En la Figura 6.24 tenemos una visa en detalle de la parte curva de la sección en donde sería importante determinar τ_{xs} . Para obtener τ_{xs} de

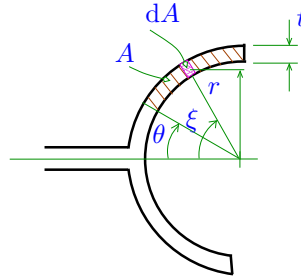


Figura 6.24: Ejemplo para el cálculo del centro de cortadura. Cálculo del esfuerzo de corte.

(6.16) necesitamos determinar en particular $\int_A y \, dA$. Por simetría el eje neutro pasa justo por la mitad de la viga, desde donde tenemos que medir y . Si $r \gg t$ se tiene las aproximaciones

$$y \approx r \sin \xi, \quad dA = tr \, d\xi,$$

luego⁹

$$\begin{aligned}\int_A y \, dA &= \int_{\theta}^{\pi/2} tr^2 \sin \xi \, d\xi, \\ &= tr^2 \cos \theta,\end{aligned}$$

por lo que de (6.16) tenemos

$$\tau_{xs} \approx \frac{V}{I_z} r^2 \cos \theta. \quad (6.23)$$

Esta es la distribución aproximada para el esfuerzo de corte en uno de los lados de la sección.

Si denotamos T_{corte} como el torque causado por τ_{xs} en el lado en que $V = F/2$ si buscamos e de manera tal que haya flexión sin torsión, de $\sum_O M_x = 0$ tenemos que

$$Fe = 2T_{corte}, \quad (6.24)$$

donde el factor 2 proviene del hecho que la distribución τ_{xs} aparece a ambos lados de la cara de la sección.

Necesitamos ahora calcular T_{corte} , para ello consideremos la Figura 6.25, en donde tenemos un esquema de la forma como actúa τ_{xs} en la parte curva de la sección más algunos diagramas que nos ayudarán en el cálculo del torque.

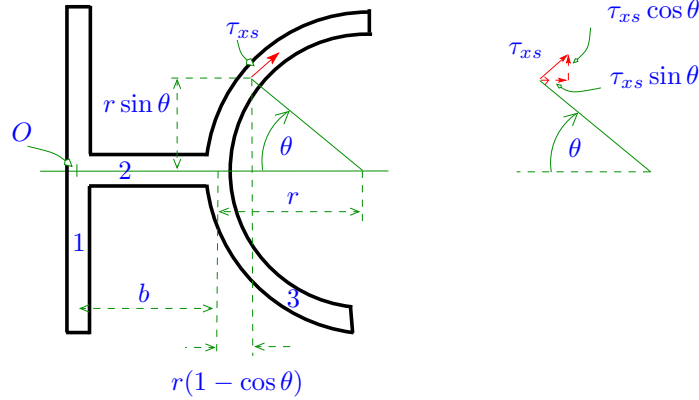


Figura 6.25: Ejemplo para el cálculo del centro de cortadura. Cálculo del momento causado por distribución de esfuerzo de corte.

La fuerza causada por τ_{xs} sería (magnitud) $\tau_{xs} \, dA = \tau_{xs} tr \, d\theta$, en tanto que sus componentes en x e y serían

$$\tau_{xs} \sin \theta tr \, d\theta, \quad \tau_{xs} \cos \theta tr \, d\theta,$$

⁹En esta expresión el parámetro para τ_{xs} no lo denotamos como s sino como θ .

respectivamente, tal como se muestra en el esquema del lado derecho de la figura.

De las observaciones anteriores, apoyandonos en el esquema mostrado en la Figura 6.25, se puede probar que

$$\begin{aligned}
T_{corte} &\approx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \sin \theta \tau_{xs} \sin \theta tr \, d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau_{xs} \cos \theta [b + r(1 - \cos \theta)] tr \, d\theta, \\
&= tr^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\tau_{xs}}_{\frac{V}{I_z} r^2 \cos \theta} \sin^2 \theta \, d\theta + tr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\tau_{xs}}_{\frac{V}{I_z} r^2 \cos \theta} \cos \theta [b + r(1 - \cos \theta)] d\theta, \\
&= \frac{Vtr^4}{I_z} \frac{2}{3} + \frac{Vtr^3}{I_z} \left[(b+r) \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} r \right]. \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Usando (6.25) en (6.24) después de algunas manipulaciones se llega a

$$e = \frac{2}{3} \frac{tr^4}{I_z} + \frac{tr^3}{I_z} \left[(b+r) \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} r \right]. \tag{6.26}$$

Falta calcular I_z , de la Figura 6.25 tenemos que

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3},$$

donde I_{z_i} , $i = 1, 2, 3$ son los segundos momentos de inercia de las partes i en las que se ha dividido la sección. Es fácil ver de (5.39) que

$$I_{z_1} = \frac{th^3}{12}, \quad I_{z_2} = \frac{bt^3}{12},$$

en tanto que $I_{z_3} = \int_A y^2 \, dA$, luego de forma aproximada se puede tomar $y = r \sin \theta$, $dA = rt \, d\theta$ por lo que

$$I_{z_3} \approx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 t \sin^2 \theta \, d\theta = r^3 t \frac{\pi}{2},$$

por lo que

$$I_z \approx \frac{th^3}{12} + \frac{bt^3}{12} + r^3 t \frac{\pi}{2}. \tag{6.27}$$

6.6. Ejercicios

1. Determine la distribución de esfuerzo de corte causado por la fuerza interna de corte en la viga de la Figura 6.26. La sección de la viga es mostrada en el lado derecho.

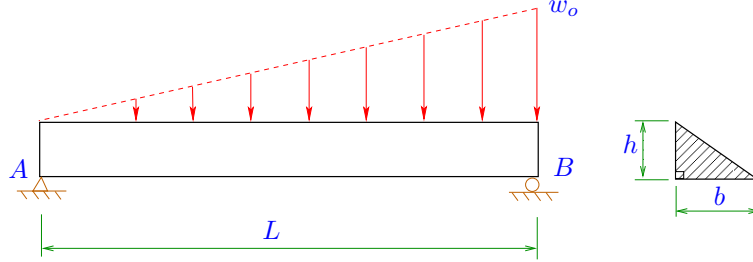


Figura 6.26: Viga en corte.

2. En la Figura 6.27 (lado derecho) tenemos una vista lateral de una viga bajo el efecto de una fuerza $w(x)$, la cual genera una distribución de fuerza interna de corte $V(x)$ que se puede asumir conocida. En la figura del lado izquierdo tenemos una vista (ampliada) de la sección de la viga.

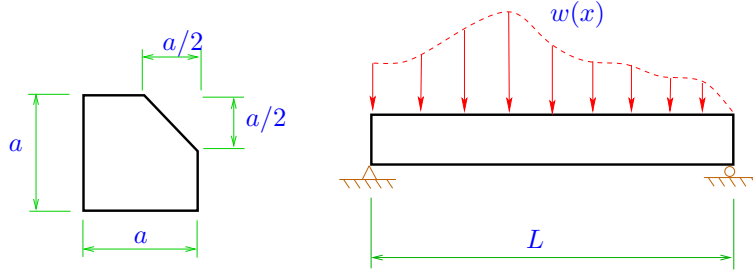


Figura 6.27: Viga en corte.

Determine la distribución de esfuerzo de corte τ_{xy} .

3. La Figura 6.28 muestra una viga que está sometida a una fuerza por unidad de línea uniforme $w_0 = 500\text{N/m}$. La sección se muestra en el lado derecho. Determine la distribución de esfuerzo τ_{xy} para este problema así como su valor máximo.

Datos:

$$L = 2[\text{m}], \quad l = 50[\text{cm}], \quad h = 7[\text{cm}], \quad a = 3[\text{cm}], \quad b = 8[\text{cm}], \\ t_1 = 1[\text{cm}], \quad t_2 = 2[\text{cm}], \quad E = 200[\text{GPa}], \quad G = 90[\text{GPa}].$$

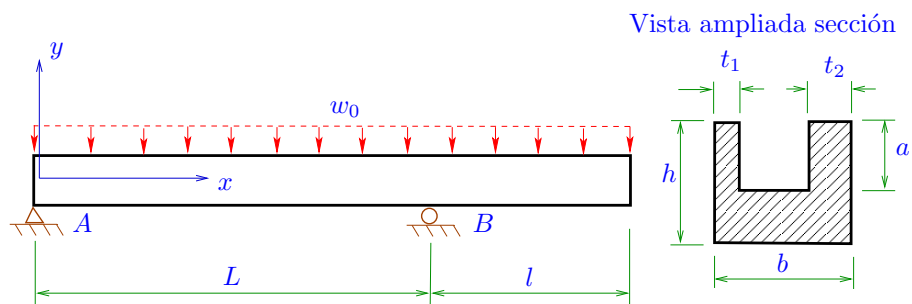


Figura 6.28: Viga bajo fuerza uniforme.

Capítulo 7

Energía de deformación

7.1. Motivación. Energía específica

Es un hecho conocido que cuando un resorte de constante k se somete a una fuerza F de compresión o tracción, tal como se muestra en la Figura 7.1, en donde $\Delta L = kF$, el resorte acumulará energía elástica. Si el resorte se asume

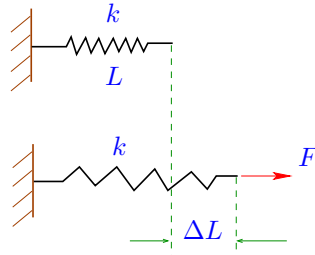


Figura 7.1: Resorte que se deforma y la energía elástica.

como perfectamente elástico, dicha energía se puede recuperar de manera completa, como por ejemplo, por medio de trabajo mecánico hecho por el resorte hacia el medio ‘ambiente’.

La misma idea se puede extrapolar al caso de un cuerpo elástico continuo, que es la base de nuestro análisis en este texto. El cuerpo al deformarse también acumulará energía elástica, y si se asume que no hay disipación (que es la base de la definición de un cuerpo elástico), la energía se puede recuperar de forma completa como trabajo mecánico.

En el caso de un cuerpo continuo basta determinar la energía de deformación en un cubo diferencial como el mostrado en la Figura 7.2, bajo la acción de las distintas componentes del tensor de esfuerzos. Una vez determinada la energía acumulada en el cubo, se puede obtener la energía total para el cuerpo por medio de una integral de volumen.

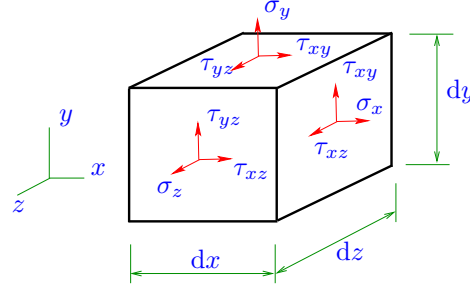


Figura 7.2: Cubo diferencial bajo el efecto de las componentes del tensor de esfuerzos.

En este capítulo nos interesaremos en determinar la energía elástica acumulada por un cuerpo bajo la acción de fuerzas externas, con dos propósitos en mente. Primero, en el capítulo siguiente usaremos estas expresiones para la energía, para desarrollar un método alternativo para determinar las deformaciones o desplazamiento en un cuerpo bajo la acción de fuerzas externas, dicho método se basa en el teorema de Castigliano. Una segunda aplicación del concepto de energía de deformación proviene de la teoría del límite de comportamiento elástico, en particular de la teoría de Von Mises, la cual está basada en una descomposición de la energía, y el uso de una parte de la energía elástica para establecer un límite de transición entre el comportamiento elástico y el plástico para problemas tridimensionales.

El cuerpo es elástico, de modo que la energía acumulada se asume igual al trabajo hecho por las cargas externas en el cubo. Calcularemos pues el trabajo mecánico debido a las distintas componentes del tensor de esfuerzos mostradas en la Figura 7.2. Usaremos el principio de superposición, en donde el trabajo total se asumirá como la suma del trabajo hecho por cada componente del tensor de esfuerzos por separado. Partiremos pues con el trabajo hecho por la componente σ_x .

En la Figura 7.3 tenemos una representación del cubo diferencial solo bajo el efecto de σ_x , con su forma inicial y su forma deformada. De la figura podemos ver que la ‘fuerza’ y el ‘desplazamiento’ que sufre la cara en donde se aplica se pueden calcular como

$$\text{Fuerza} = \sigma_x \underbrace{dydz}_{dA}, \quad \text{Desplazamiento} = \varepsilon_{xx} dx. \quad (7.1)$$

Estamos trabajando en el rango de comportamiento elástico, y además asumimos que el comportamiento es lineal, de modo que la relación entre σ_x y ε_{xx} es una línea recta con origen en cero. Como consecuencia el gráfico para $\sigma_x dydz$ en función de $\varepsilon_{xx} dx$ sería como se muestra en la Figura 7.4.

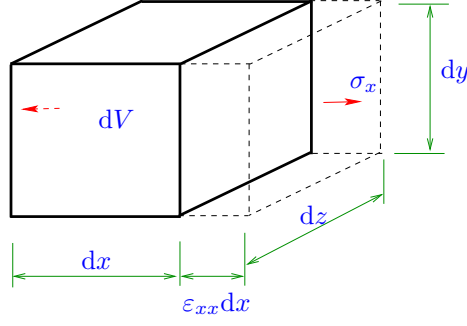


Figura 7.3: Cubo diferencial bajo el efecto de la componente σ_x y la deformación que es causada por este esfuerzo.

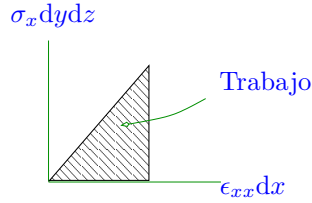


Figura 7.4: Trabajo mecánico debido a la componente σ_x del tensor de esfuerzos.

El trabajo mecánico causado por una fuerza puntual \vec{F} se define como

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

a lo largo de una curva \mathcal{C} , en donde $d\vec{r}$ sería el vector tangente a esa curva. En nuestro caso para el cubo mostrado en la Figura 7.3, la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección, de modo que la integral se transforma simplemente en la integral de $\sigma_x dydz$ entre 0 y $\varepsilon_{xx} dx$, que es simplemente el área bajo la recta mostrada en la Figura 7.4, por lo que

$$\text{Trabajo realizado por } \sigma_x = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} dx \sigma_x dy dz.$$

Si denotamos como dU la energía acumulada por el cubo, se tiene entonces que

$$dU = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} \sigma_x \underbrace{dx dy dz}_{dV}, \quad (7.2)$$

donde dV es el volumen del diferencial.

Definimos la energía específica (por unidad de volumen) como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} \sigma_x. \quad (7.3)$$

De las expresiones anteriores es fácil ver que si en lugar de determinar la energía elástica debido a σ_x , se hace respecto a σ_y o σ_z , las expresiones tendrían la misma forma que (7.3), intercambiando los índices por y o z , respectivamente.

Determinaremos ahora la energía acumulada por el mismo cubo, pero ahora sometido solo a una componente de esfuerzo de corte, por ejemplo τ_{xy} , tal como se muestra en la Figura 7.5.

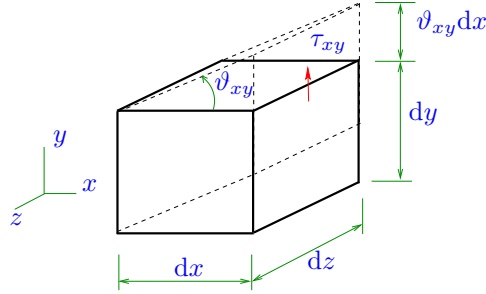


Figura 7.5: Cubo diferencial bajo el efecto de la componente τ_{xy} del tensor esfuerzos y efecto sobre la deformación.

De (3.80) hay una relación directa y lineal entre τ_{xy} y ϑ_{xy} , de modo que ante la aplicación de solo τ_{xy} , el cubo diferencial solo sufriría una deformación en corte, como se muestra con líneas segmentadas en la Figura 7.5. Como se asume pequeñas deformaciones, el desplazamiento vertical sería aproximadamente el arco descrito por el ángulo ϑ_{xy} , tal como se muestra en la misma figura. Tenemos pues

$$\text{Fuerza} = \tau_{xy} dy dz, \quad \text{Desplazamiento} = \vartheta_{xy} dx. \quad (7.4)$$

Estamos trabajando en el rango elástico con un modelo lineal, se sabe que τ_{xy} y ϑ_{xy} se relacionan a través de la constante G , luego siguiendo un argumento similar al usado con la Figura 7.4, tenemos que

$$\text{Trabajo realizado por } \tau_{xy} = \frac{1}{2} \vartheta_{xy} dx \tau_{xy} dy dz,$$

de forma tal que

$$dU = \frac{1}{2} \vartheta_{xy} \tau_{xy} dx dy dz, \quad (7.5)$$

y la energía específica es

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \vartheta_{xy} \tau_{xy}. \quad (7.6)$$

Las expresiones para la energía específica en el caso que se aplicase τ_{xz} o τ_{yz} en lugar de τ_{xy} , tiene una forma similar cambiando los subíndices respectivos.

Vamos ahora a usar el principio de superposición mencionado en un párrafo anterior, asumiendo además que en todo este proceso de deformación y acumulación de energía no hay ‘efectos cruzados’ o ‘acoplados’, es decir la deformación

longitudinal no tendría efectos sobre la deformación en corte y viceversa. Luego, con estos supuestos la energía específica total sería simplemente la suma de las energías específicas debido a las distintas componentes del tensor de esfuerzos, de forma tal que

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}\sigma_x + \varepsilon_{yy}\sigma_y + \varepsilon_{zz}\sigma_z + \vartheta_{xy}\tau_{xy} + \vartheta_{xz}\tau_{xz} + \vartheta_{yz}\tau_{yz}). \quad (7.7)$$

La energía total acumulada por el cuerpo, si el volumen del mismo es \mathcal{V} , sería

$$U_T = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{U} dV. \quad (7.8)$$

7.2. Forma alternativa

La expresión para la energía específica (7.7) se puede reescribir de manera alternativa solo en términos de las deformaciones o de los esfuerzos usando (3.84)-(3.89) o (3.90)-(3.93). En el caso de que estuviésemos interesados en reescribirla solo en términos de las componentes del tensor de esfuerzos, de (3.84)-(3.89) tenemos que usar

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (7.7) después de algunas manipulaciones tendríamos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \quad (7.9)$$

7.3. Ejemplos

En esta sección mostraremos varios ejemplos simples en donde calcularemos la energía elástica total acumulada por un cuerpo:

1. **Extensión uniforme de una barra bajo tracción.** En la Figura 7.6 tenemos una barra de sección arbitraria de área A sometida a una fuerza de tracción P .

En un problema de esta naturaleza se asume que la única componente del esfuerzo que es importante es σ_x , y por el principio de Saint Venant

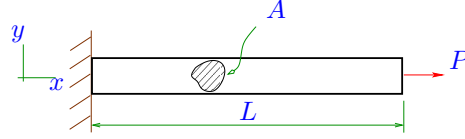


Figura 7.6: Energía acumulada por barra bajo el efecto de una fuerza de tracción.

tenemos que es igual a

$$\sigma_x = \frac{P}{A}.$$

De (7.9) tenemos entonces que

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2E} \frac{P^2}{A^2},$$

por lo que de (7.8) se llega a

$$U_T = \int_V \mathcal{U} dV = \int_V \frac{1}{2E} \frac{P^2}{A^2} dx dy dz = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{P^2}{A} dx. \quad (7.10)$$

Si E y A no dependen de x se obtiene

$$U_T = \frac{P^2 L}{2EA}. \quad (7.11)$$

2. **Viga bajo flexión.** En este caso consideremos una viga como la mostrada en la Figura 7.7 sometida a un par de momentos M en los extremos. En

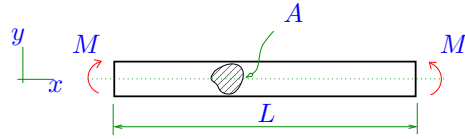


Figura 7.7: Energía acumulada por barra bajo el efecto de un momento.

un caso más general M se puede también pensar en el momento interno causado por otras cargas sobre la viga. En las siguientes expresiones no consideraremos el efecto de la deformación por corte.

En un problema de este tipo entonces la única componente importante del esfuerzo es (5.9)

$$\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z} y,$$

de modo que de (7.9) tenemos que

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2 y^2}{I_z^2},$$

y como resultado de (7.8)

$$U_T = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I_z^2} y^2 dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I_z^2} y^2 dx dy dz,$$

pero M e I_z solo podrían depender de x , en tanto que también se asume que E no depende de y o z , luego la última integral anterior queda como

$$U_T = \int_0^L \left[\frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I_z^2} \left(\int_A y^2 \underbrace{dy dz}_{dA} \right) \right] dx,$$

pero de (5.7) tenemos que por definición $I_z = \int_A y^2 dA$, de modo que

$$U_T = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I_z} dx. \quad (7.12)$$

3. **Eje de sección circular bajo torsión:** En este problema consideremos la Figura 7.8, en donde tenemos un eje de sección circular de área A bajo el efecto de torques opuesto aplicados en sus extremos.

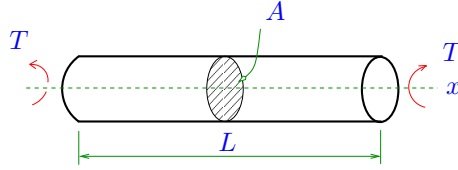


Figura 7.8: Energía acumulada por un eje bajo torsión.

Podemos usar un sistema de coordenadas cilíndrico con x como eje axial, r como distancia radial y ξ coordenada angular.

En un problema de esta naturaleza el esfuerzo de corte está dado por (4.8)

$$\tau = \frac{Tr}{J}.$$

En un sistema cilíndrico este esfuerzo de corte sería la componente $\tau_{x\xi}$, y si asumimos que es la única componente importante para el problema, de (7.9) tenemos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2G} \frac{T^2 r^2}{J^2},$$

luego en (7.8) se llega a

$$U_T = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2G} \frac{T^2 r^2}{J^2} dV = \int_0^L \int_A \frac{1}{2G} \frac{T^2 r^2}{J^2} dA dx.$$

Como T no depende de la posición en la sección, y se asume que G y J tampoco dependen de dicha posición, se llega a

$$U_T = \int_0^L \left[\frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A r^2 dA \right) \right] dx,$$

y como por definición (4.4) tenemos que $J = \int_A r^2 dA$, se llega finalmente a

$$U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx. \quad (7.13)$$

4. **Viga de sección rectangular en cortadura:** Aquí calcularemos la energía acumulada por una viga considerando solo el fenómeno de esfuerzo de corte por fuerza interna de corte, aplicado solo a una viga de sección rectangular tal como se muestra en la Figura 7.9.

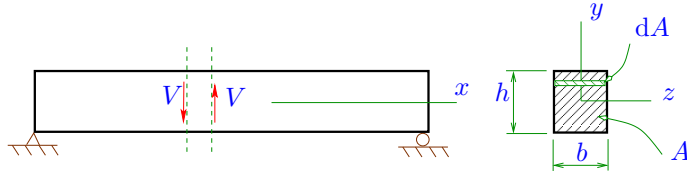


Figura 7.9: Energía acumulada por una viga de sección rectangular bajo corte.

En una viga de sección rectangular solo considerando el esfuerzo de corte por fuerza interna de corte, de (6.9) la única componente importante del tensor de esfuerzos es

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

por lo que de (7.9) tenemos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 = \frac{1}{2G} \frac{V(x)^2}{4I_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2,$$

y de (7.8) obtenemos

$$U_T = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2G} \frac{V(x)^2}{4I_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dV = \int_0^L \int_A \frac{1}{2G} \frac{V(x)^2}{4I_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dA dx.$$

De la figura podemos ver que $dA = b \, dy$. Como ni $V(x)$, I_z ni G dependerían de y tenemos

$$U_T = \int_0^L \left[\frac{1}{2G} \frac{V(x)^2 b}{4I_z^2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \right) \right] dx,$$

y como $\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \frac{h^5}{30}$, usando $I_z = \frac{bh^3}{12}$, finalmente se obtiene

$$U_T = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx, \quad (7.14)$$

donde $A = bh$.

Capítulo 8

Teorema de Castigliano

En este capítulo usaremos las expresiones para la energía elástica acumulada por un cuerpo para desarrollar un método alternativo para determinar deformaciones (desplazamientos) en un cuerpo debido a la aplicación de fuerzas externas.

Considérese la Figura 8.1, en donde tenemos una representación esquemática de un cuerpo en equilibrio estático sometido a un conjunto de fuerzas puntuales.

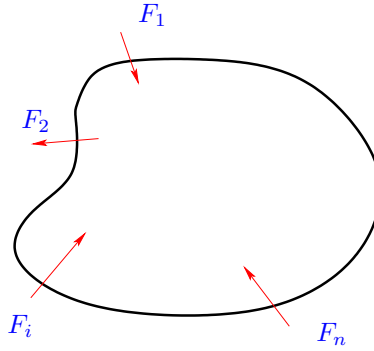


Figura 8.1: Cuerpo sometido a un conjunto de fuerzas puntuales.

Sea U_T la energía total acumulada por el cuerpo debido a todas las cargas externas, del capítulo anterior podemos ver que

$$U_T = U_T(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n), \quad (8.1)$$

es decir U_T es función de todas estas fuerzas externas.

Asumamos ahora que la fuerza F_i sufre un incremento muy pequeño en su magnitud dF_i , luego usando una aproximación con series de Taylor tenemos

$$U_T(F_1, F_2, \dots, F_i + dF_i, \dots, F_n) \approx U_T(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n) + \frac{\partial U_T}{\partial F_i} dF_i, \quad (8.2)$$

donde $\frac{\partial U_T}{\partial F_i}$ está siendo evaluado con $(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$.

En un cuerpo elástico la energía acumulada por el cuerpo es igual al trabajo externo hecho sobre él, de modo que el trabajo inicial (antes de incrementar F_i) es igual a $U_T(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$. Por otra parte, si F_i se incrementa en dF_i , podemos calcular el incremento en el trabajo de la siguiente forma. En la Figura 8.2 tenemos el mismo cuerpo mostrado anteriormente, en donde en particular podemos apreciar la fuerza F_i , la que en ese punto de aplicación genera un desplazamiento δ_i . Si la fuerza se incrementa en dF_i el incremento en trabajo

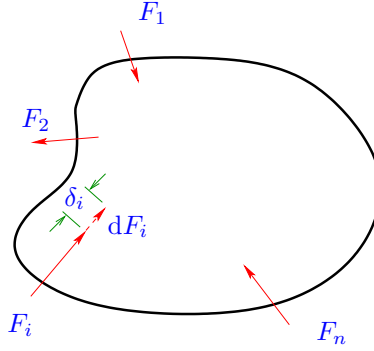


Figura 8.2: Cuerpo sometido a un conjunto de fuerzas puntuales. Deformación en el punto de aplicación de F_i .

mecánico¹ es aproximadamente igual a²

$$\delta_i dF_i.$$

El trabajo final total al incrementar la fuerza es entonces igual a

$$\underbrace{U_T(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)}_{\text{Trabajo inicial}} + \delta_i dF_i. \quad (8.3)$$

Como el trabajo final es igual a la energía $U_T(F_1, F_2, \dots, F_i + dF_i, \dots, F_n)$ (debido a que el cuerpo es elástico) de (8.2) y (8.3) tenemos

$$\frac{\partial U_T}{\partial F_i} dF_i = \delta_i dF_i,$$

de donde finalmente obtenemos

$$\delta_i = \frac{\partial U_T}{\partial F_i}. \quad (8.4)$$

¹Hay que recordar que por definición el trabajo es igual a fuerza por distancia.

²En realidad al aplicar $F_i + dF_i$ el desplazamiento δ_i también debería aumentar, en este caso en $d\delta_i$, pero ahora si se calcula el incremento en el trabajo tendremos $\delta_i dF_i$ más $d\delta_i dF_i$ que es de segundo orden en el diferencial y por tanto se desprecia.

Esta es la forma básica del teorema de Castigliano.

En el caso en que además se apliquen m momentos puros C_j tenemos que la energía total U_T debería escribirse como

$$U_T = U_T(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n, C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_m). \quad (8.5)$$

Si θ_j es el ángulo de rotación que se produce en j (en donde se aplica C_j) siguiendo un método similar al mostrado anteriormente se puede deducir que

$$\theta_j = \frac{\partial U_T}{\partial C_j}. \quad (8.6)$$

8.1. Ejemplos

1. En la Figura 8.3 tenemos una viga con una fuerza puntual F aplicada en su centro. Determinaremos los desplazamientos que se producen en dicho punto causados por flexión y corte (de forma separada).

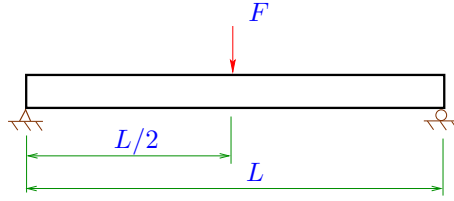


Figura 8.3: Ejemplo del uso del teorema de Castigliano. Viga bajo la acción de una carga puntual.

- a) **Flexión:** En este primer caso solo consideramos la flexión en la acumulación de energía elástica U_T . De (7.12) teníamos que

$$U_{T_f} = \int_0^L \frac{1}{2EI_z} M(x)^2 dx, \quad (8.7)$$

en donde el subíndice f significa energía por flexión.

De la Figura 8.3 es fácil comprobar que

$$M(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}x & x < \frac{L}{2}, \\ \frac{F}{2}(L-x) & x > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (8.8)$$

El desplazamiento en F debido solo a flexión lo denotaremos como $\delta_{flexion}$ y de (8.4) se tiene que

$$\delta_{flexion} = \frac{\partial U_{T_f}}{\partial F}. \quad (8.9)$$

Usando (8.7) en (8.9) se llega a

$$\delta_{flexion} = \int_0^L \frac{1}{2EI_z} 2M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx, \quad (8.10)$$

en donde se ha asumido que E , I_z no dependen de x .

De (8.8) tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial F} = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < \frac{L}{2}, \\ \frac{L-x}{2} & x > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (8.11)$$

Usando (8.8) y (8.11) en (8.10) se llega finalmente a

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx = \int_0^{L/2} \frac{F}{4} x^2 dx + \int_{L/2}^L \frac{F}{4} (L-x)^2 dx = \frac{FL^3}{48},$$

por lo que tenemos

$$\delta_{flexion} = \frac{1}{EI_z} \frac{FL^3}{48}. \quad (8.12)$$

b) **Corte:** En el caso que solo consideremos energía de deformación causada por fuerzas internas de corte (para una viga de sección rectangular) de (7.14) tenemos

$$U_{T_c} = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx, \quad (8.13)$$

donde el subíndice c significa energía por fuerza de corte interna.

De (8.4) tenemos que

$$\delta_{corte} = \frac{\partial U_{T_c}}{\partial F}, \quad (8.14)$$

donde δ_{corte} sería el desplazamiento en el punto de aplicación de la fuerza puntual F solo considerando corte.

Tenemos que

$$\frac{\partial U_{T_c}}{\partial F} = \frac{6}{5} \frac{1}{GA} \int_0^L V(x) \frac{\partial V}{\partial F} dx, \quad (8.15)$$

donde se ha asumido que A , G no dependen de la posición x a lo largo de la viga.

En el problema mostrado en la Figura 8.3 es fácil ver que

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{F}{2} & x < \frac{L}{2}, \\ \frac{F}{2} & x > \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (8.16)$$

de modo que

$$\frac{\partial V}{\partial F} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < \frac{L}{2}, \\ \frac{1}{2} & x > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (8.17)$$

Usando (8.16) y (8.17) tenemos que

$$\int_0^L V(x) \frac{\partial V}{\partial F} dx = \int_0^{L/2} \frac{F}{4} dx + \int_{L/2}^L \frac{F}{4} dx = \frac{FL}{4},$$

de modo que en (8.14) tenemos

$$\delta_{corte} = \frac{3FL}{10GA}. \quad (8.18)$$

c) **Desplazamiento total:** Calcularemos ahora el desplazamiento total δ_{total} en el punto de aplicación de F , para ello usaremos el principio de superposición. Para una viga de sección rectangular se tiene $I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{Ah^2}{12}$, de (8.12) y (8.18) obtenemos

$$\delta_{total} = \delta_{flexion} + \delta_{corte} = \frac{1}{E \frac{Ah^2}{12}} \frac{FL^3}{48} + \frac{3}{10} \frac{FL}{GA}. \quad (8.19)$$

Para la mayoría de los aceros tenemos que $\nu \approx 0,25$ luego como $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, se tiene que $G \approx \frac{1}{2,5} E$, por lo que en (8.19) se obtiene

$$\delta_{total} = \frac{1}{EAh^2} \frac{FL^3}{4} + \frac{7,5}{10} \frac{FL}{EA} = \frac{FL}{EA} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{L}{h} \right)^2 + \frac{7,5}{10} \right]. \quad (8.20)$$

En el caso en que $L \gg h$, del resultado anterior podemos apreciar que $\delta_{flexion} \gg \delta_{corte}$, por lo que en vigas ‘largas’ el efecto del corte en el desplazamiento se puede despreciar frente al desplazamiento por la flexión.

2. La viga de la Figura 8.4, que tiene sección rectangular, está empotrada en su extremo izquierdo y bajo la acción de una fuerza uniforme por unidad de largo w_o . Usando el teorema de Castigliano estamos interesados en determinar el desplazamiento vertical en el punto P .

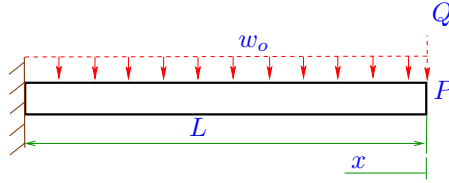


Figura 8.4: Ejemplo del uso del teorema de Castigliano. Viga bajo la acción de una distribución uniforme de fuerza.

El teorema de Castigliano (8.4) solo es aplicable para determinar desplazamientos en puntos en donde se estén aplicando fuerzas puntuales. Si bien

es cierto que la viga de la figura acumula energía elástica, no podemos usar el teorema de manera directa en ella para determinar el desplazamiento en P . Para usar (8.4) primero vamos a asumir que en P se está aplicando una fuerza puntual Q . Determinaremos la energía elástica total debido a w_o y Q , y con esta energía calcularemos el desplazamiento en P , para finalmente hacer $Q = 0$, con lo que se recuperará el problema original.

Considerémos un sistema de coordenadas x que parte desde el extremo derecho y se mueve hacia la izquierda. Asumase que a una distancia x se hace un corte imaginario, en este caso es fácil demostrar que la fuerza de corte y el momento interno son iguales a

$$V(x) = w_o x + Q, \quad M(x) = -\frac{w_o x^2}{2} - Qx, \quad (8.21)$$

por lo que

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = -x. \quad (8.22)$$

Usando (8.21) y (8.22) por el principio de superposición y (8.10), (8.15) tenemos que el desplazamiento total en P considerando Q y w_o es igual a

$$\begin{aligned} \delta_{total} &= \int_0^L \frac{1}{EI_z} \left(\frac{w_o x^3}{2} + Qx^2 \right) dx + \frac{6}{5GA} \int_0^L w_o x + Q dx, \\ &= \frac{1}{EI_z} \left(\frac{w_o L^4}{8} + \frac{QL^3}{3} \right) + \frac{6}{5GA} \left(\frac{w_o L^2}{2} + QL \right). \end{aligned} \quad (8.23)$$

En el problema original solo teníamos w_o aplicado sobre la viga de modo que ahora hacemos $Q = 0$ y del resultado anterior llegamos a que

$$\delta_{total} = \frac{w_o L^4}{8EI_z} + \frac{3w_o L^2}{5GA}. \quad (8.24)$$

8.2. Ejercicios

1. En la Figura 8.5 se tiene una viga para la cual $I = 4 * 10^{-6} \text{m}^4$ y $E = 190 \text{GPa}$. La viga está empotrada en A , en tanto que en B está sobre un soporte simple. En el extremo derecho de la viga se aplica un momento $M_0 = 500 \text{Nm}$. La viga también está sometida a una fuerza uniforme $w_0 = 1000 \text{N/m}$. Usando el teorema de Castigliano determine las reacciones en A y B . Se tiene $L = 2 \text{m}$.

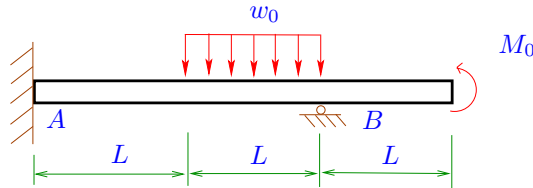


Figura 8.5: Problema calculo de reacciones en viga.

2. La viga de sección rectangular ABC de la Figura 8.6 está bajo el efecto de una carga vertical P en C y está empotrada en A . La sección se muestra en la parte inferior de la figura.

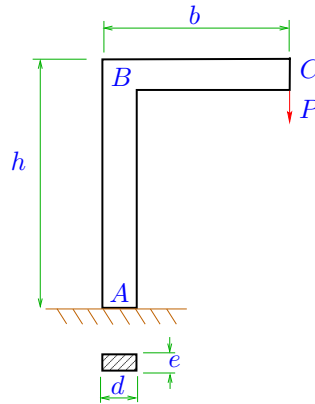


Figura 8.6: Viga doblada.

Usando Castigliano:

- Determine la deflexión vertical δ_y en C
- Determine la deflexión horizontal δ_x en C .
- Determine el ángulo de rotación en C

3. En la Figura 8.7 tenemos dos vigas 1 y 2. La viga 1 está sostenida por apoyos simples en tanto que la viga 2 está empotrada en un extremo y bajo la acción de una fuerza uniforme w_o . Ambas vigas están unidas por un cable. Usando Castigliano determine la deflexión en el punto A.

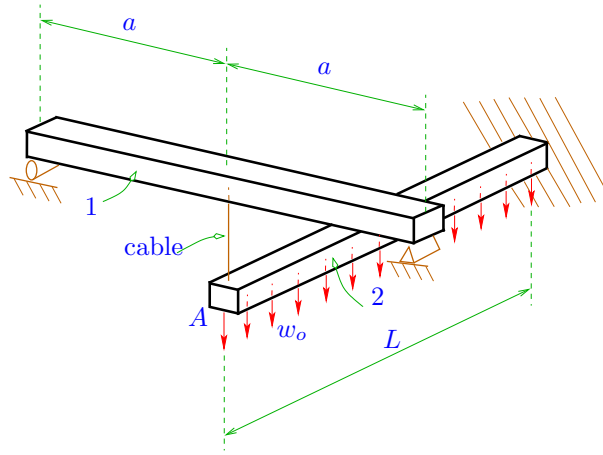


Figura 8.7: Dos vigas unidas por un cable.

Datos:

Viga 1 $a = 1\text{m}$, $E = 200\text{GPa}$, $I_1 = 10^{-6}\text{m}^4$

Viga 2 $L = 3\text{m}$, $E = 200\text{GPa}$, $I_2 = 2 * 10^{-6}\text{m}^4$, $w_o = 10\text{kN/m}$

Cable diámetro 1cm, largo 50cm, $E = 180\text{GPa}$.

4. En la Figura 8.8 se tiene una viga para la cual $I =$ y $E =$. La viga está empotrada en A, en tanto que en B está sobre un soporte simple. En el extremo derecho de la viga se aplica un momento $M_0 =$. La viga también está sometida a una fuerza uniforme $w_0 =$. Usando el teorema de Castigliano determine las reacciones en A y B. Se tiene $L = 2\text{m}$.

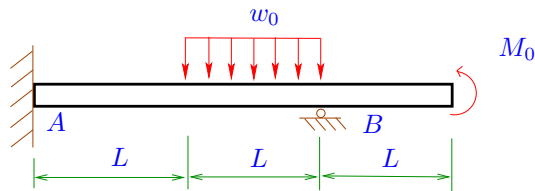


Figura 8.8: Viga bajo varias cargas.

5. En la Figura 8.9 se tiene una viga de longitud L sometida a una fuerza uniforme w_o y una fuerza puntual P . Si se conoce el producto EI , usando el teorema de Castigliano determine el valor de la fuerza P de modo que en el punto B el desplazamiento vertical de la viga sea cero.

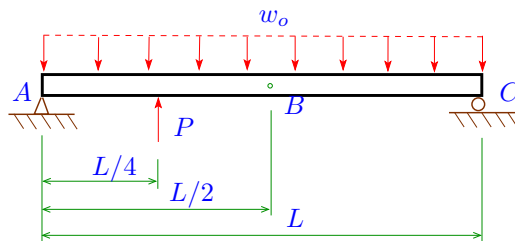


Figura 8.9: Viga sometida a fuerzas uniforme y puntual.

6. Una viga ABC como la mostrada en la Figura 8.10 está empotrada en A y en B está sobre un resorte³ de constante k . Una carga concentrada P se aplica en C . Determine el desplazamiento hacia abajo δ_c del punto C . Resuelva el problema usando el teorema de Castigliano.

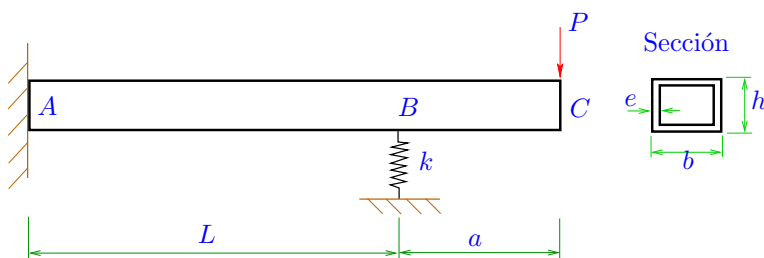


Figura 8.10: Viga apoyada en resorte.

Datos: $P = 1\text{kN}$, $L = 2\text{m}$, $a = 60\text{cm}$, $E = 200\text{GPa}$, $b = 8\text{cm}$, $h = 7\text{cm}$, $e = 5\text{mm}$, $k = 5\text{kN/m}$.

³El resorte inicialmente no está ni estirado ni comprimido.

Capítulo 9

Esfuerzos combinados: Esfuerzos normales y de corte máximos

En todos los capítulos anteriores hemos estudiado métodos ‘simples’ para el cálculo de los esfuerzos y las deformaciones en situaciones sencillas, tales como barras sometidas a tracción o compresión, ejes sometidos a torsión, vigas sometidas a flexión y también considerando esfuerzos de corte. En cada uno de estos capítulos hemos estudiado distintos tipos de esfuerzos por separado, indicando en particular que las soluciones obtenidas aquí pueden considerarse como soluciones de problemas *unidimensionales*.

En este capítulo veremos un método en el cual, con los resultados anteriores, ahora estudiaremos problemas en donde tenemos varios tipos de esfuerzos y deformaciones actuando en un cuerpo. La base de este método será el principio de superposición, mediante el cual un cuerpo sometido al mismo tiempo a torsión, flexión y fuerzas axiales en distintos planos, puede ser tratado de forma separada para cada fenómeno, para después calcular un tensor de esfuerzos total simplemente sumando cada uno de los esfuerzos calculados previamente de forma separada. Esta es una forma aproximada de resolver problemas en 2 y 3 dimensiones.

Primero haremos un repaso de algunos puntos importantes de la teoría de la elasticidad que hemos visto en secciones anteriores.

En la Figura 9.1 tenemos una representación de un cuadrado diferencial (problema plano) con las tres componentes independientes del tensor de esfuerzos. Dichas componentes tiene que satisfacer las ecuaciones de equilibrio (sin fuerzas de cuerpo en el caso estático)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (9.2)$$

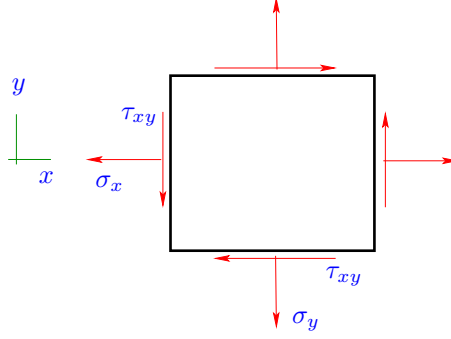


Figura 9.1: Cuadrado diferencial caso plano.

En problemas bidimensionales el campo de desplazamientos tiene dos componentes

$$\vec{w}(x, y) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}. \quad (9.3)$$

El tensor de deformaciones tiene tres componentes independientes, cuyas relaciones con los desplazamientos son

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (9.4)$$

Finalmente, para la relación entre los esfuerzos y las deformaciones, en el caso de esfuerzo plano, teníamos

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \quad \sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), \quad \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}. \quad (9.5)$$

9.1. Esfuerzos normales y de corte máximo

Antes de explorar a través de un ejemplo particular el método de superposición mencionado al inicio de este capítulo, tenemos que considerar la siguiente pregunta: ¿Si en el interior de un cuerpo para un punto tenemos un cuadrado o cubo diferencial con varias componentes del esfuerzo actuando sobre él, como podríamos desarrollar una teoría de falla?

La motivación de la pregunta anterior es la siguiente. En la Sección 3.5.1 habíamos estudiado el concepto del esfuerzo de fluencia σ_o . Uno de los mecanismos de falla más fáciles de estudiar corresponde a la deformación plástica. El concepto del esfuerzo de fluencia lo habíamos visto solo en el contexto de un problema unidimensional, más precisamente en el caso de una barra sometida a tracción. Sin embargo, la pregunta es: ¿Como podríamos extender dicho concepto al caso bi- y tri-dimensional? No es tan simple establecer falla por deformación plástica cuando tenemos, por ejemplo, un cuerpo sometido tanto a esfuerzos normales como de corte en distintas direcciones.

Con esa motivación en mente, y considerando que en este capítulo estudiaremos casos en donde tenemos varios tipos de esfuerzos actuando en un punto, es que desarrollaremos una teoría que nos servirá para dar respuesta a las preguntas anteriores.

Consideremos el esquema mostrado en el lado izquierdo en la Figura 9.2, en donde tenemos un cuerpo sometido a distintas cargas externas. En el interior

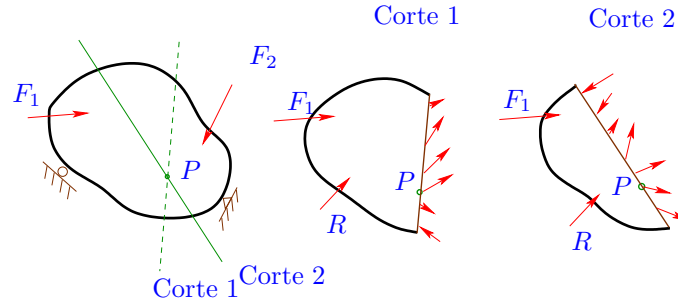


Figura 9.2: Fuerzas internas en un cuerpo y su distribución para distintos cortes imaginarios.

del cuerpo elijamos un punto arbitrario P , y realicemos dos cortes imaginarios que pasan por dicho punto, pero con distinta orientación.

En los esquemas mostrados en el centro y en el lado derecho de la figura tenemos la porción que queda al hacer el corte imaginario. Es fácil apreciar que para los dos cortes la distribución de fuerzas internas en general van a ser distintas, en particular en el punto de interés P .

Imaginemos que el punto P se encuentra en realidad en el interior de un cuadrado diferencial, y que dicho cuadrado (en realidad rectángulo) también es afectado por el corte imaginario, tal como se muestra en la Figura 9.3. En las caras vertical y horizontal tenemos actuando sobre el cuadrado diferencial las componentes σ_x , σ_y , τ_{xy} del tensor de esfuerzos (caso plano), en tanto que en la superficie oblicua (la superficie de corte imaginario) tenemos actuando el vector de esfuerzos \vec{t} . Como el cuadrado diferencial cortado y todas sus superficies se asumen muy pequeñas, solo se dibuja un vector esfuerzos en cada cara. En la figura el vector \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie. Nótese que en general \vec{t} y \vec{n} no necesariamente están alineados.

El vector \vec{t} se puede descomponer de varias formas (ver Sección 3.3.4), aquí en particular nos interesa determinar sus componentes normal a la superficie de corte imaginario σ_n (componente normal), y su componente tangencial τ (componente en corte).

Mostraremos ahora que para valores fijos de σ_x , σ_y y τ_{xy} las componentes σ_n y τ van a variar, o si se quiere, van a depender de θ . Una pregunta interesante es: ¿Cuales son los valores de θ para los cuales σ_n y τ son máximos? El motivo de esta pregunta tiene que ver justamente con una ‘teoría de falla’ como la enunciamos al inicio de esta sección. En el caso bidimensional, un posible criterio

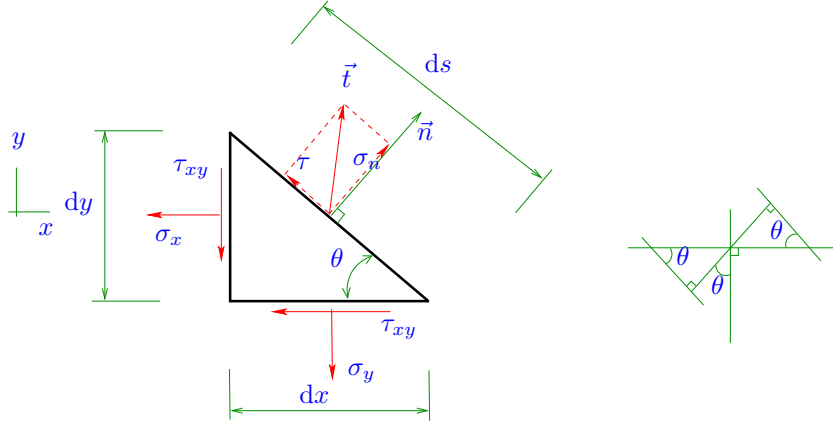


Figura 9.3: Cuadrado diferencial con corte oblicuo.

de falla podría estar asociado a valores para σ_n y/o τ superiores a cierto límite. Veremos en detalle esto en la Sección 10.2.

Con la motivación anterior observemos nuevamente la Figura 9.3 y realicemos el balance de fuerzas para el elemento diferencial en las direcciones normal y tangencial, el esquema del lado derecho nos ayudará en el balance. Si hacemos suma de fuerzas en el sentido normal n tendremos¹

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow \sigma_n ds - \sigma_y \cos \theta dx - \tau_{xy} \sin \theta dx - \sigma_x \sin \theta dy - \tau_{xy} \cos \theta dy = 0,$$

luego dividiendo por ds tenemos

$$\sigma_n - \sigma_y \cos \theta \frac{dx}{ds} - \tau_{xy} \sin \theta \frac{dx}{ds} - \sigma_x \sin \theta \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \cos \theta \frac{dy}{ds} = 0.$$

Pero por definición de la figura vemos que

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad (9.6)$$

por lo que reemplazando en el balance de fuerzas, después de algunas manipulaciones, obtenemos

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta). \quad (9.7)$$

Podemos apreciar ahora que efectivamente $\sigma_n = \sigma_n(\theta)$. Lo que nos interesa ahora es determinar para cuales θ esta componente del vector de esfuerzos es

¹Para obtener fuerzas a partir de las componentes del tensor y del vector de esfuerzos debemos multiplicar por el área en las que estas componentes actúan (pues en las caras del elemento diferencial se asumen constantes), que en este caso corresponde a las longitudes de los lados multiplicados por la ‘profundidad’ del elemento, que por simplicidad se puede asumir unitaria.

máxima (mínima), para ello buscamos las soluciones de $\frac{d\sigma_n}{d\theta} = 0$. De la expresión anterior tenemos que resolver la ecuación

$$-(\sigma_y - \sigma_x) \sin(2\theta) + 2\tau_{xy} \cos(2\theta) = 0, \quad (9.8)$$

cuya solución, que llamaremos θ_n , se puede obtener de

$$\tan(2\theta_n) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (9.9)$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones, y se puede probar que una de ellas nos dará un máximo para σ_n y la otra nos dará un mínimo para esa componente.

Para el balance de fuerzas en el sentido tangencial, nuevamente de la Figura 9.3 podemos ver que

$$\sum F_{tan} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau ds - \sigma_y \sin \theta dx + \tau_{xy} \cos \theta dx - \tau_{xy} \sin \theta dy + \sigma_x \cos \theta dy = 0,$$

y dividiendo por ds y usando (9.6), después de algunas manipulaciones se llega a

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta). \quad (9.10)$$

También nos interesa buscar θ para que $\tau = \tau(\theta)$ sea máximo (mínimo). De $\frac{d\tau}{d\theta} = 0$, usando el resultado anterior, vemos que dichos valores se obtienen al resolver

$$(\sigma_y - \sigma_x) \cos(2\theta) + 2\tau_{xy} \sin(2\theta) = 0, \quad (9.11)$$

cuya solución, que llamaremos θ_τ , es

$$\tan(2\theta_\tau) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (9.12)$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones, para una de ellas obtendríamos un valor máximo, y para la otra un valor igual en magnitud pero con signo negativo, es decir un mínimo.

De (9.9) y (9.12) podemos apreciar que

$$\tan\left(2\theta_n + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(2\theta_\tau), \quad (9.13)$$

o sea θ_n y θ_τ están separados por $\pi/4$.

Usando (9.9) en (9.7) y (9.12) en (9.10) se puede demostrar que los valores máximos (mínimos) para σ_n y τ , que llamaremos σ_{n_m} y τ_m , están dados por

$$\sigma_{n_m} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (9.14)$$

$$\tau_m = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (9.15)$$

Imaginemos que σ_n y τ son en realidad coordenadas en un ‘espacio de esfuerzos’, en donde σ_n sería la coordenada horizontal y τ la vertical. En otras palabras cualquier vector de esfuerzos \vec{t} se podría representar en este espacio (caso bidimensional) como un punto. Es fácil comprobar que las soluciones (9.14)-(9.15) vienen a ser cierto puntos específicos en la circunferencia dada por la siguiente ecuación paramétrica en dicho espacio

$$\left[\sigma_n - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (9.16)$$

Se puede verificar que esta ecuación se cumple para cualquier θ para σ_n y τ dados por (9.7) y (9.10).

9.2. Círculo de Mohr

La ecuación para la circunferencia descrita en (9.16) nos permitiría encontrar los esfuerzos normales y de corte máximos o mínimos de manera gráfica. Para hacer esto considérese el cuadrado diferencial con los esfuerzos mostrados en la Figura 9.4.

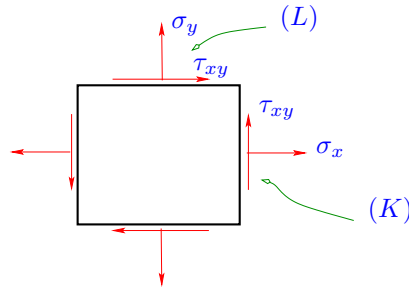


Figura 9.4: Círculo de Mohr. Cuadrado diferencial con esfuerzos caso plano.

Ahora considerémos el espacio con ejes σ_n y τ , es decir el espacio en donde cada cara del cuadrado diferencial con sus dos componentes del esfuerzo se puede representar en un punto en dicho espacio. Se pueden escoger dos caras arbitrarias de dicho cuadrado que estén a noventa grados, llamaremos a la cara superior el punto (L) con coordenadas σ_y, τ_{xy} y la cara lateral derecha (K) con coordenadas σ_x, τ_{xy} . Vamos a asumir que los esfuerzos de corte que tienen orientación en el sentido de las manecillas del reloj son positivos.

En la Figura 9.5 tenemos el espacio $\sigma_n - \tau$, construiremos algo que llamaremos el ‘círculo de Mohr’ de la siguiente forma:

- Asumamos que para este ejemplo $\sigma_x > \sigma_y > 0$. Ubiquemos el punto (K) en la figura, en donde como en este caso $\tau_{xy} < 0$ tenemos que colocar dicho punto en el sector negativo para τ .

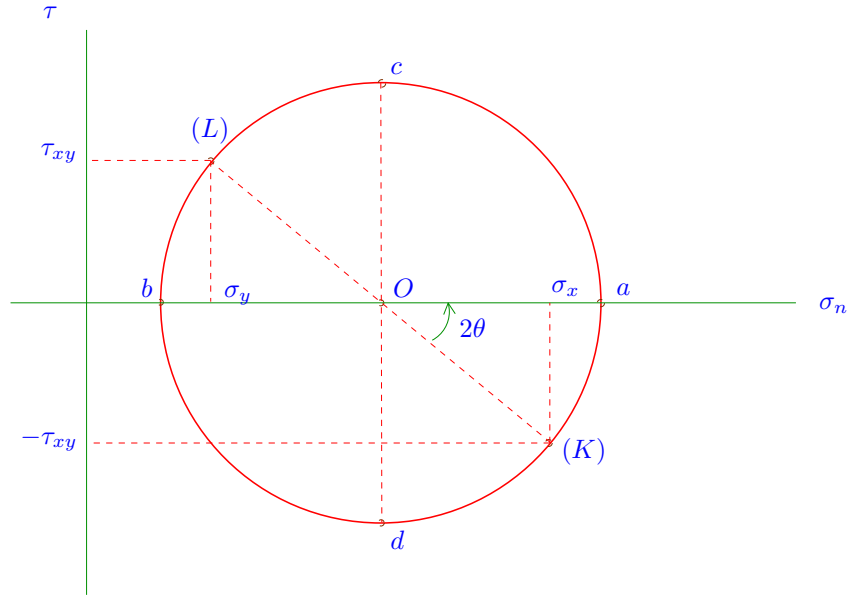


Figura 9.5: Círculo de Mohr.

- Ubiquemos el punto (L) el cual podemos apreciar se ubica en el eje positivo para τ .
- Trazemos una línea recta desde (L) a (K) . Dicha línea corta al eje σ_n en el punto O , además se puede ver que el punto O corta a la línea justo en la mitad.
- En el punto O ubicaremos la punta de un compás, y la punta del lápiz se ubica en el punto (L) o en el punto (K) .
- Se traza ahora un círculo con centro en O . Se pueden distinguir cuatro puntos importantes: a , b , c y d .
- Notemos que este círculo no es mas que la representación gráfica de (9.16). Cualquier par de punto σ_n , τ a lo largo de la circunferencia viene a representar el mismo estado de esfuerzos en el punto, pero visto en un sistema de coordenadas rotada respecto al sistema original. La rotación del sistema de coordenadas es equivalente a realizar un corte imaginario oblicuo con ángulo θ como se había mostrado en la sección anterior.
- El punto a viene a representar el valor máximo del esfuerzo normal σ_{n_m} , que se puede obtener de forma gráfica y cuyo valor es aproximadamente el entregado por (9.14). El punto b sería el valor mínimo (con signo) del esfuerzo normal. Los puntos d y e vendrían a entregar los valores máximos y mínimos para el esfuerzo de corte τ_m (ver Ecuación 9.15).

- El ángulo real entre el punto (K) y el punto (L) es de 90° , luego en el plano $\sigma_n - \tau$ podemos apreciar que el ángulo entre dicho planos es 180° , o sea todo ángulo real en el plano de los esfuerzos es multiplicado por dos.
- De la observación anterior tenemos que el ángulo que debe ‘rotar’ el sistema de coordenadas desde $K - L$, para obtener el máximo esfuerzo normal, es de 2θ como aparece en la figura. Se aprecia también que el ángulo entre el punto de esfuerzo normal máximo y de corte máximo es 45° , tal como se había discutido en la sección anterior.

Hay varios casos interesantes que se pueden estudiar con el uso del círculo de Mohr, por ejemplo, los casos: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ y $\tau_{xy} = 0$, y $\sigma_y = -\sigma_x = \sigma$ y $\tau_{xy} = 0$.

9.3. Problema con esfuerzos combinados

En esta sección usaremos los resultados mostrados en todos los capítulos anteriores, en donde estudiamos el fenómeno de esfuerzo axial, esfuerzo de corte en torsión, esfuerzo normal y de corte en flexión, para estudiar problemas bidimensionales y tridimensionales para los esfuerzos en un cuerpo. Tal como se indicó en la introducción, la base del método es el principio de superposición, en donde cada fenómeno se estudia por separado, para después al final obtener un ‘estado de esfuerzos total’ mediante una simple suma.

Para determinar los esfuerzos, como paso previo será necesario calcular las cargas internas, en general tendremos que:

- Fuerza interna H generará σ_i de tracción o compresión.
- El momento interno M generará σ_i de tracción o compresión.
- El torque T generará τ_{ij} de corte.
- La fuerza de corte V generará un esfuerzo τ_{ij} de corte.

En un problema general, las cargas internas H , M , T y V deben ser calculadas con el método de los cortes, en donde, por ejemplo, para una viga, se hace un corte imaginario a una cierta distancia, para luego hacer el equilibrio de fuerzas y momentos en las distintas direcciones que pueden ser de interés para un problema completamente tridimensional.

En la siguiente sección veremos un caso muy particular simplificado.

9.3.1. Fuerzas internas para el caso de una viga o barra empotrada en un extremo y libre en el otro

El método a presentar en esta sección solo es válido para barras o vigas empotradas en un extremo, y no se puede usar en otro tipo de problemas.

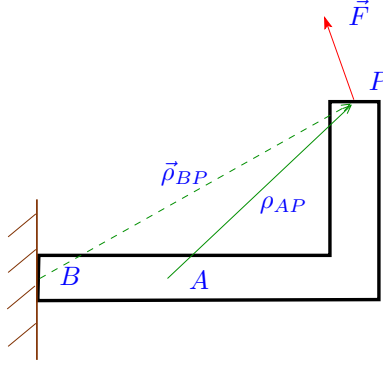


Figura 9.6: Cargas internas para una viga empotrada con un extremo libre.

Considerémos el esquema mostrado en la Figura 9.6, en donde tenemos una viga sometida a una fuerza puntual \vec{F} en el punto P . La fuerza \vec{F} puede ser completamente tridimensional, es decir ahora no estamos trabajando solamente con fuerzas en el plano.

Imaginemos que estamos interesados en determinar las cargas internas en los puntos A y B debido a la aplicación de \vec{F} . Es fácil notar que para que la viga o barra esté en equilibrio es necesario que en B exista una fuerza $-\vec{F}$ y un momento de reacción debido a la pared

$$\vec{M} = -\vec{\rho}_{BP} \times \vec{F}.$$

Esto se puede demostrar por medio de las ecuaciones de equilibrio $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ y $\sum \vec{M}_j = \vec{0}$.

Si se hace un corte imaginario muy cerca de B , tendremos entonces como cargas internas a \vec{F} y a $\vec{M} = \vec{\rho}_{BP} \times \vec{F}$, si es que se estudia la porción pequeña de viga que queda en el lado izquierdo².

Si estamos interesados en estudiar las cargas internas en el punto A , podemos considerar un corte imaginario en este punto, y luego hacer equilibrio de fuerzas y momentos para la parte de la viga que queda en el lado derecho. Si se hace eso, en A deberíamos tener una fuerza de ‘reacción’ igual a $-\vec{F}$ y un momento de reacción $\vec{M} = -\vec{\rho}_{AP} \times \vec{F}$. Luego, las cargas internas en A , si se mira la superficie de corte que queda en el lado izquierdo, por acción y reacción serían simplemente igual a \vec{F} y $\vec{M} = \vec{\rho}_{AP} \times \vec{F}$.

Como conclusión de las observaciones anteriores, para la barra mostrada en la Figura 9.6, para un punto A cualquiera a lo largo de esta, las cargas internas en A consistirán en una fuerza puntual \vec{F} , la que puede tener componentes en corte y normales, más un momento $\vec{M} = \vec{\rho}_{AP} \times \vec{F}$ que puede consistir en momentos que causen flexión y momentos (torques) que causen torsión.

²Si se estudia la cara opuesta del corte en el lado derecho, por acción y reacción tendríamos que considerar una fuerza interna $-\vec{F}$ y un momento interno $\vec{M} = -\vec{\rho}_{BP} \times \vec{F}$, que son las mismas reacciones que se calculaban con el equilibrio del cuerpo completo.

En el caso general mostrado en el lado izquierdo de la Figura 9.7 para un punto A cualquiera, para un corte imaginario en dicho punto tendremos una fuerza total puntual \vec{F}_T y un momento interno total \vec{M}_T , que se pueden calcular como

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots, \quad \vec{M}_T = \vec{\rho}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_{A2} \times \vec{F}_2 + \vec{\rho}_{A3} \times \vec{F}_3 + \dots \quad (9.17)$$

Para el momento interno también podemos agregar momento puros si es necesario.

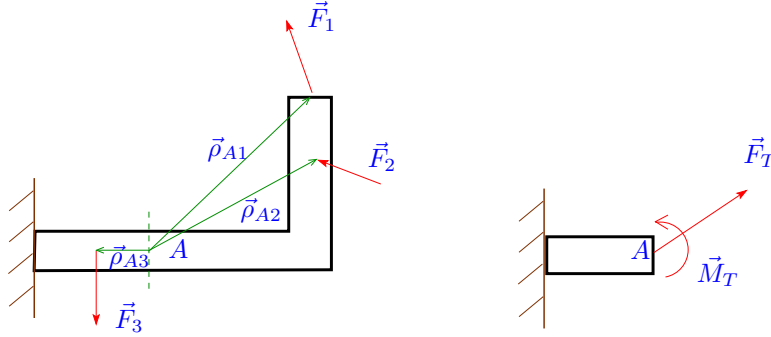


Figura 9.7: Cargas internas para una viga empotrada con un extremo libre sometida a varias fuerzas externas.

Es necesario volver a recalcar que (9.17) solo puede ser usado en problemas en donde tenemos una viga empotrada en un extremo y libre en el otro. Este método no puede ser usado en otros problemas más generales, en donde podríamos tener una viga sostenida por varios apoyos.

9.3.2. Ejemplo para un problema en donde se tiene flexión, torsión, corte y cargas axiales combinadas

En esta sección nos interesa el problema mostrado en la Figura 9.8. En dicha figura tenemos una barra maciza de sección circular empotrada en la base y con un extremo libre. En dicho extremo se está aplicando una fuerza de 13kN con una dirección que se puede obtener de la geometría. El diámetro de la barra es de 60mm.

Nos interesa determinar el ‘estado de esfuerzos’ para el punto H . Resolveremos este problema en varios pasos a continuación:

1. No usaremos directamente (9.17) en este caso, sino un método más largo pero más pedagógico. De la Figura 9.8 podemos encontrar las componentes de la fuerza 13kN, en particular vemos que $\vec{F} = F_y \hat{i} + F_z \hat{k} = -12\hat{j} - 5\hat{k}$ kN, tal como se muestra en la Figura 9.9
2. Comenzaremos con la componente de 12kN en la dirección del eje y . ‘Moveremos’ esta componente de su punto inicial de aplicación al centro de la

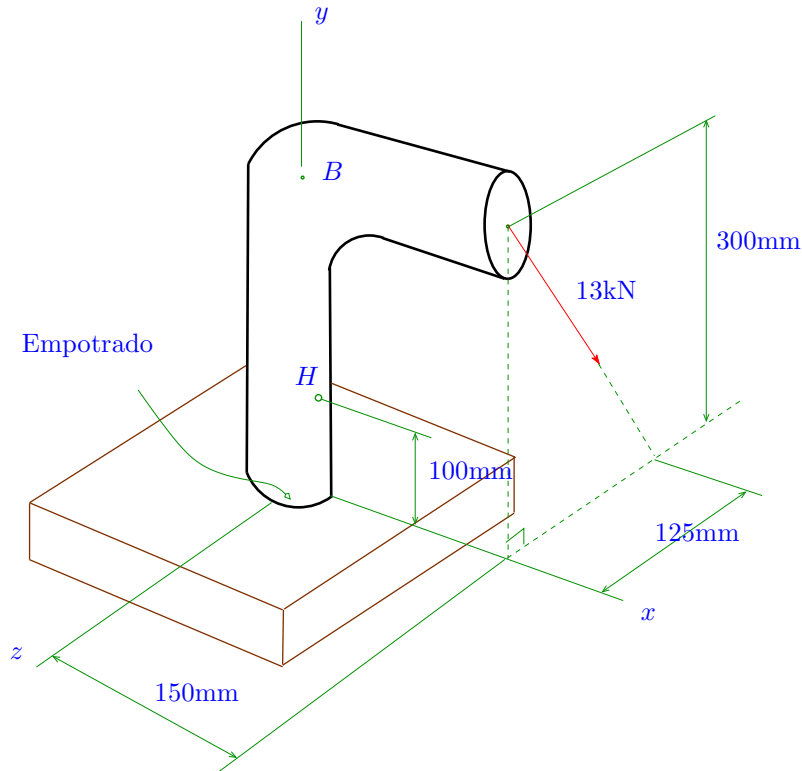


Figura 9.8: Esfuerzos combinados. Ejemplo.

sección en donde está H . Para ello primero movemos esa componente al punto B . Al moverla se generará un momento puro de 1.8kNm tal como se muestra en la Figura 9.10.

3. A continuación trasladaremos la fuerza de 12kN de B a la sección en donde está H . Como en este caso se traslada en su propia línea de acción no se genera ningún momento puro en esta traslación. El momento puro de 1.8kNm se puede trasladar a H sin necesidad de hacer nada adicional. En la sección en donde está H tenemos algo como lo mostrado en la Figura 9.11.
4. En la Figura 9.12 tenemos un corte imaginario que pasa por H , y de los cálculos anteriores podemos ver como actúan las fuerzas internas en dicha sección, que consiste de una fuerza de -12kN en la dirección del eje y , más un momento puro de -1.8kNm en la dirección del eje z .

Ahora haremos una lista de los tipos de esfuerzos que pueden aparecer en el punto H debido a la presencia de estas cargas internas:

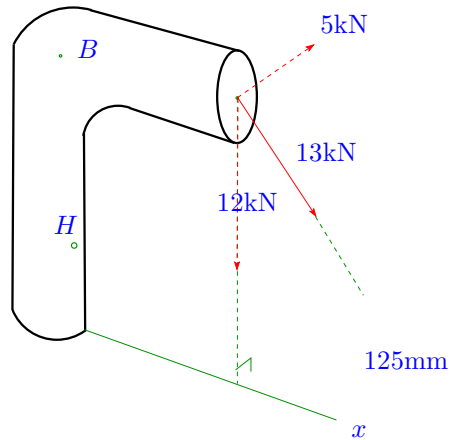


Figura 9.9: Esfuerzos combinados. Descomposición de la fuerza externa.

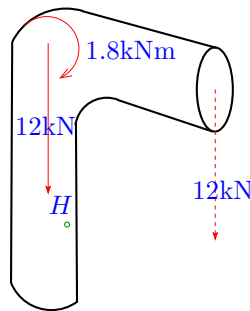


Figura 9.10: Esfuerzos combinados. Traslación de la componente F_y .

- En el punto H tenemos un esfuerzo normal aproximadamente uniforme de compresión en el sentido del eje y debido a la fuerza interna de -12kN .
 - En este punto tendríamos también un esfuerzo normal de compresión causado por flexión asociada al momento puro en x de magnitud 1.8kNm .
 - En el punto H no habría esfuerzo de corte ‘asociado’ a flexión, esto no solo porque no hay fuerza interna de corte, pero además para dicho punto el eje z sería el eje neutro, tal como se muestra en la Figura 9.13 en donde tenemos una vista superior del corte imaginario.
5. Ahora procedemos a determinar los distintos esfuerzos mencionados anteriormente.
- El esfuerzo de compresión uniforme debido a 12kN en la dirección del

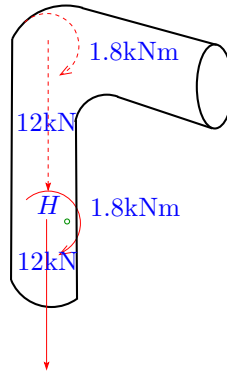


Figura 9.11: Esfuerzos combinados. Traslación de la componente F_y .

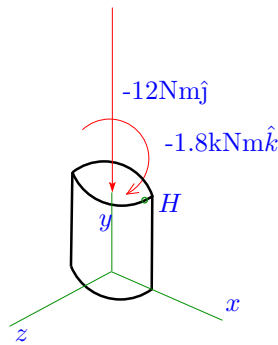


Figura 9.12: Esfuerzos combinados. Cargas internas para un corte imaginario en la zona de interés.

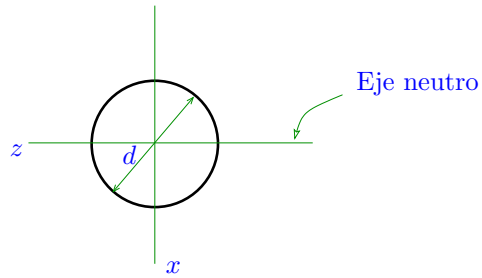


Figura 9.13: Esfuerzos combinados. Sección de la barra y propiedades de área.

eje y simplemente se calcula como

$$\sigma_y = -\frac{12 \text{ kN}}{A \text{ m}^2},$$

donde A es el área de la sección y es igual a $A = 2,827 * 10^{-3} \text{m}^2$, por lo que

$$\sigma_y = -4,2448 \text{MPa}. \quad (9.18)$$

- Para el caso del esfuerzo de compresión por flexión usaríamos la expresión (5.9), o sea $\sigma_y = -\frac{M_x x}{I_z}$, en donde el signo negativo (compresión) ya se ha incorporado.

Para una sección circular, como la mostrada en la Figura 9.13, tenemos que

$$I_z = 2 \int x^2 dA,$$

en donde el factor 2 proviene de la simetría que posee esta sección y $dA = 2z dx$ con $z = \sqrt{\frac{d^2}{4} - x^2}$, donde d es el diámetro de la sección. Por lo tanto

$$I_z = 4 \int_0^{d/2} \left(\sqrt{\frac{d^2}{4} - x^2} \right) x^2 dx = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{2} \right)^4. \quad (9.19)$$

En nuestro caso con $d = 60 \text{mm}$ tenemos

$$I_z = 6,3617 * 10^{-7} \text{m}^4, \quad (9.20)$$

por lo que si $x = d/2$

$$\sigma_y = -1,8 * 10^3 * 0,03 / (6,3617 * 10^{-7}) = -84,88 \text{MPa}. \quad (9.21)$$

- Ahora procederemos a desplazar la componente de fuerza de -5kN que actúa en la dirección del eje z . Para ello observemos la Figura 9.14, en donde vemos esta componente que se traslada de su punto original al punto B . En la traslación se genera un torque puro igual a 0.75kNm en la dirección del eje y .
- A continuación llevamos la fuerza de -5kN de B a la sección en donde se encuentra el punto H . En la Figura 9.15 podemos ver la traslación y como esta genera un nuevo momento puro igual a -1kNm en la dirección del eje x .

- En la Figura 9.16 tenemos un corte imaginario que contiene al punto H mostrando las distintas cargas internas actuando en esa sección.

Ahora discutimos los tipos de esfuerzos que estas cargas internas pueden generar:

- En el punto H tendremos esfuerzo de corte debido a la torsión por 0.75kNm.
- En este mismo punto habría esfuerzo de corte debido a la fuerza de corte de 5kN. Debido a la posición de H este esfuerzo de corte en efecto sería máximo para este fenómeno.

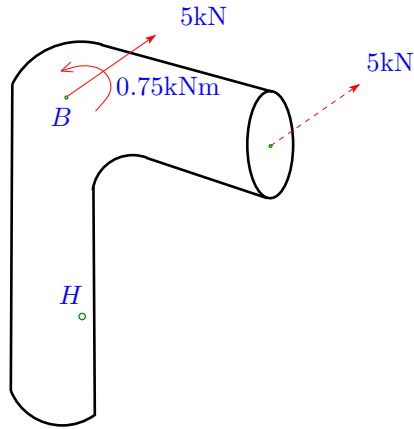


Figura 9.14: Esfuerzos combinados. Traslación de la componente F_z .

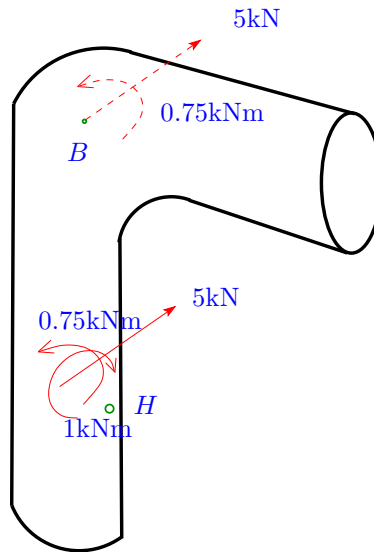


Figura 9.15: Esfuerzos combinados. Traslación de la componente F_z .

- En H no habría esfuerzo de compresión o tracción por flexión debido a el momento de 1kNm en la dirección del eje x , pues el punto H se encuentra en el eje x , que en este caso sería el eje neutro para la flexión causada por 1kNm .

9. Ahora calcularemos los esfuerzos mencionados en el punto anterior:

- El esfuerzo de corte por torsión se debe calcular usando (4.8), pero

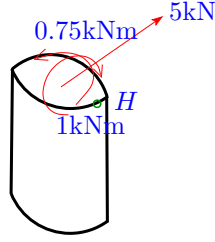


Figura 9.16: Esfuerzos combinados. Cargas internas para un corte imaginario en la zona de interés.

primero debemos identificar este esfuerzo de corte para el sistema de coordenadas de la figura. Por el tipo de deformación que causaría el torque en la sección (plano atravesado por y , esfuerzo de corte en la dirección z) tenemos que este esfuerzo sería τ_{yz} y sería además negativo, luego en magnitud tenemos (el signo lo incorporamos después)

$$\tau_{yz} = \frac{Tr}{J}.$$

En este caso usamos $r = d/2 = 0,03\text{m}$ y de (4.6) tenemos $J = \frac{\pi}{32}d^4 = 1,2723 * 10^{-6}\text{m}^4$. Luego

$$\tau_{yz} = -\frac{0,75 * 10^3 * 0,03}{1,2723 * 10^{-6}} = -17,6839\text{MPa}. \quad (9.22)$$

- Respecto al esfuerzo de corte debido al corte puro, debemos usar la expresión (6.10) para vigas de secciones arbitrarias. Primero, por el sentido que tiene la fuerza de corte es fácil ver que el esfuerzo de corte que se genera aquí es τ_{yz} igual que en el caso anterior (además con signo negativo). Luego de (6.10) tenemos que calcular (el signo lo agregamos después)

$$\tau_{yz} = \frac{V}{I_x t} \int_z^{d/2} \xi \, dA. \quad (9.23)$$

Nótese que en (9.23) hemos usado I_x por la orientación que tienen los ejes en este problema.

De la Figura 9.17 podemos ver el significado de las distintas variables y expresiones que aparecen en (9.23) para este problema. En particular podemos ver que $dA = 2x \, d\xi$, que $x = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2}$, y que para el punto H tenemos $t = d$, $z = 0$. La fuerza de corte sería $V = -5kN$. Considerémos la integral

$$\int_0^{d/2} \xi \, dA = \int_0^{d/2} 2 \left(\sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2} \right) \xi \, d\xi = \frac{2}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3, \quad (9.24)$$

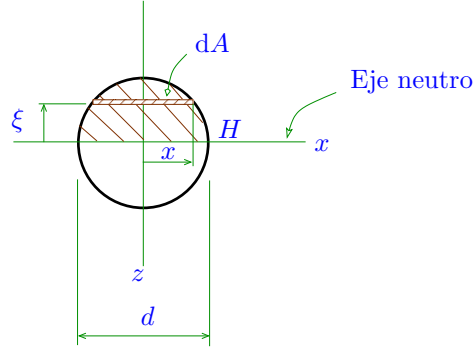


Figura 9.17: Esfuerzos combinados. Sección de la barra y propiedades de área para el cálculo de los esfuerzos de corte por fuerza de corte interna.

y en nuestro caso tenemos $\frac{2}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 = 0,000018\text{m}^3$.

Usando los resultados y observaciones anteriores en (9.23) se llega a (incluyendo ahora el signo)

$$\tau_{yz} = -\frac{5 * 10^3 * 0,000018}{6,3617 * 10^{-7} * 0,06} = -2,3579\text{MPa}. \quad (9.25)$$

10. De (9.18), (9.21), (9.22) y (9.25) vemos que todos los esfuerzos están (o si se quiere actúan) en el plano $y - z$. Podemos apreciar también como los esfuerzos normales debido a flexión son mucho mayores en magnitud a los esfuerzos normales debido a cargas normales, y que lo mismo sucede con los esfuerzos de corte debido a torsión si se comparan con los esfuerzos de corte debido a corte puro. En general en problemas de esfuerzos combinados tendremos este tipo de resultados.

Ahora usaremos el principio de superposición, en donde básicamente para un cuadrado diferencial como el mostrado en la Figura 9.18, tenemos que sumar los esfuerzos normales en las distintas direcciones, y lo mismo hacemos con los de corte. En el caso de los esfuerzos normales solo tenemos σ_y y de (9.18), (9.21) tenemos

$$\sigma_{y_{total}} = -4,2448 - 84,88 = -89,1248\text{MPa}. \quad (9.26)$$

En el caso de los esfuerzos de corte solo tenemos τ_{yz} y de (9.22), (9.25) se llega a

$$\tau_{yz_{total}} = -17,6839 - 2,3579\text{MPa}. \quad (9.27)$$

Luego el ‘estado de esfuerzos’ total para el cuadrado diferencial sería algo como lo mostrado en la Figura 9.18. En la figura no aparece el signo negativo para los esfuerzos debido a que este ya ha sido incorporado con el sentido dado a las flechas.

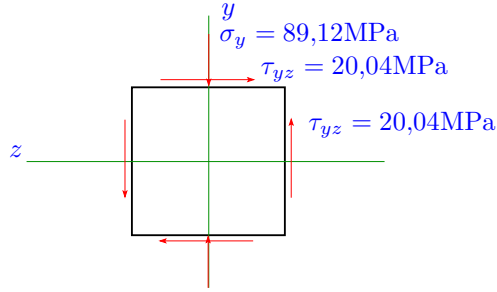


Figura 9.18: Esfuerzos combinados. Representación para los esfuerzos en el punto de interés en un cuadrado diferencial.

11. Un último paso que podemos hacer es calcular los esfuerzos normales y de corte máximo. Se puede usar para ello (9.14), (9.15) o el círculo de Mohr. Aquí usaremos³ (9.14) y (9.15), de donde tenemos que

$$\sigma_{n_m} = \begin{cases} 4,2995 \text{ MPa}, \\ -93,4243 \text{ MPa}, \end{cases} \quad (9.28)$$

y

$$\tau_m = \pm 48,8619 \text{ MPa}. \quad (9.29)$$

³El uso de (9.14) y (9.15) está restringido solo a problema planos como es el caso del ejemplo mostrado aquí. En nuestro ejemplo debemos cambiar algunos subíndices, en este caso x por z .

Capítulo 10

Teoría de falla: Criterios para la deformación plástica

10.1. Introducción

¿Cuándo se dirá que una componente o pieza de un mecanismo falla? Son muchos los posibles fenómenos que un sólido puede sufrir que podrían considerarse como causal de falla, como por ejemplo:

- Formación de deformación plástica: Esto debido a que cuando un cuerpo se deforma plásticamente su forma cambia de manera permanente, y ese cambio permanente podría, en algunos casos, causar problemas en el funcionamiento de un mecanismo.
- Exceso de deformación elástica: En algunas ocasiones un cuerpo (en particular cuerpos de gran tamaño) pueden sufrir grandes ‘desplazamientos’ elásticos debido a las cargas externas. No necesariamente se producirían deformaciones plásticas, pero este exceso de ‘deformación’ elástica puede en algunas ocasiones también provocar problemas en el funcionamiento de un mecanismo.
- Rotura: Es el caso clásico de falla que viene a la mente cuando se piensa en falla de una componente. La rotura de una pieza está ligada al comportamiento de las grietas que esta pueda tener. Las grietas tienen dos fases de comportamiento
 - Fase estable: en donde la grieta puede crecer con una velocidad ‘baja’ medible.
 - Fase inestable: que ocurre cuando las grietas superan un cierto tamaño mínimo y que se caracteriza por un crecimiento de la grieta a una velocidad muy alta, que casi no se puede medir. La falla aquí ocurre de forma catastrófica.

- Cambio en las propiedades del material: En algunas ocasiones, producto de la temperatura, del ataque de agentes químicos u otras causas, las propiedades del material pueden cambiar (y pueden en realidad ‘debilitarse’). Fenómenos típicos que se pueden mencionar son
 - Corrosión.
 - Endurecimiento (por deformación o cambios bruscos en la temperatura).
 - Cambios debido a radiación nuclear.
 - Difusión de hidrogeno: que ocurre en estanques que almacenan este elemento, el cual puede atravesar las paredes por pequeños intersticios, para combinarse en algunas ocasiones con los átomos del material de las paredes, en general causando un material de peores propiedades mecánicas.

De la lista anterior podemos apreciar que el concepto de ‘falla’ es bastante amplio.

Respecto a las ‘causas’ de los fenómenos de falla mencionados anteriormente, podemos considerar la siguiente lista:

- Cargas (fuerza externas) altas: Es quizás la causa más fácil de estudiar y la que se puede incorporar de forma más simple en el diseño para evitarla.
- Cargas cíclicas: Las cargas cíclicas, cuya magnitud y signo pueden cambiar en función del tiempo, si se aplican por periodos largos de tiempo, aún cuando las magnitudes sean pequeñas, pueden causar falla, en particular asociadas a grietas y rotura. Esto se estudiará en el Capítulo 13.
- Cargas que se mantienen por periodos muy largos de tiempo: En algunas estructuras metálicas, que pueden estar sometidas a temperaturas moderadamente altas, bajo la aplicación de fuerzas externas que no necesariamente son altas, pero aplicadas en periodos muy largos de tiempo, se puede observar un fenómeno llamada ‘creep’ en donde se puede apreciar un lento ‘fluir’ del sólido (deformación inelástica), que en esas escalas de tiempo se comporta como un fluido.
- Cambio brusco de temperatura: Un cambio brusco de la temperatura, en particular si no es uniforme en el cuerpo, puede causar altos ‘esfuerzos térmicos’, los que en ciertas ocasiones provocan rotura por grietas o deformación plástica. Los cambios bruscos de temperatura también pueden causar cambios en la microestructura del material.
- Aplicación de una temperatura muy baja: Una temperatura muy baja puede causar problemas en algunos materiales. El acero, por ejemplo, a temperatura normal puede ‘absorber’ una cierta cantidad de energía por impacto antes de romperse, la cual en el caso de la aplicación de una temperatura muy baja, puede disminuir de manera apreciable. Es decir

bajo una cierta temperatura el acero puede comportarse de una forma frágil, lo que daría lugar a fallas por rotura si el material recibe un impacto.

O sea no solo hay muchos tipos de ‘fallas’ distintos a la rotura, sino también puede haber un sinúmero de causas para dichas fallas. Debe quedar claro ahora que este es un tema muy profundo que por brevedad no se estudiará de forma completa en este texto.

En este capítulo nos concentraremos en la falla por deformación plástica, y en particular causada por cargas altas.

10.2. Criterios de falla para deformación plástica

En la Sección 3.5.1 vimos en detalle la curva que relaciona los esfuerzos y las deformaciones para el caso de un cilindro sometido a una tensión uniaxial. Para una acero de bajo o mediano carbono la curva tiene una forma como la presentada en la Figura 10.1. El cambio o la transición del comportamiento elástico al

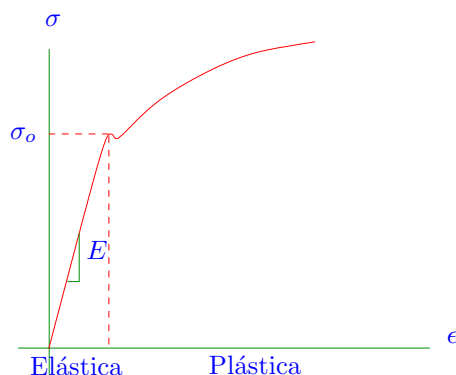


Figura 10.1: Curva esfuerzo-deformación para un acero bajo carbono.

plástico ocurriría cuando el esfuerzo σ supera el valor límite σ_o llamado esfuerzo de fluencia.

La gran pregunta ahora es: ¿Qué debemos hacer en el caso en el que un cuerpo esté sometido a un estado general de esfuerzos, es decir cuando en un punto en un cuerpo tengamos distintos tipos de esfuerzos axiales y de corte actuando al mismo tiempo?

La respuesta a esta pregunta no es sencilla, pues trasladar un resultado que se obtuvo en un problema esencialmente unidimensional a aplicaciones en 2 o 3 dimensiones no es directo o sencillo. Por ese motivo se han propuesto varias teorías diferentes, tres de las cuales mostramos aquí.

10.2.1. Criterio del esfuerzo normal máximo

El material fallará cuando el máximo esfuerzo principal normal¹ (en 2D o 3D) sea igual al máximo esfuerzo normal en el instante de falla de un ensayo de tensión uniaxial.

Ahora traduciremos el estamento anterior. Para una barra bajo una carga uniaxial como la que se muestra en la Figura 10.2 tenemos que el esfuerzo en el instante de falla es $\sigma = \sigma_o$. Por otra parte si σ_{n_1} , σ_{n_2} y σ_{n_3} son los esfuerzos

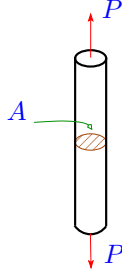


Figura 10.2: Barra bajo tensión uniaxial.

principales para un cuerpo hecho del mismo material, del enunciado de la teoría

¹En la Sección 9.1 vimos en detalle el significado y el método de cálculo de los esfuerzos normales máximos y mínimos. En este texto no se estudiará en detalle el caso 3D. Para el caso 3D, en donde el tensor de esfuerzos tendría la forma

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

se puede desarrollar un método de cálculo de los esfuerzos normales máximos y mínimos para este caso, basados en la solución de

$$\det(\underline{T} - \sigma_n \underline{I}) = 0,$$

en donde \underline{I} es la matriz de identidad en 3D. La solución del problema del valor propio anterior nos da tres valores σ_{n_1} , σ_{n_2} y σ_{n_3} , uno de los cuales es el máximo esfuerzo normal (considerando signo), uno es un valor intermedio y uno es el mínimo esfuerzo normal.

Cada uno de estos valores tiene asociado un vector propio, y se puede demostrar que si el sistema de coordenadas original se rota para quedar alineado con estos tres vectores unitarios ortogonales, entonces el tensor \underline{T} (sus componentes) se transforman para quedar como

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{n_3} \end{pmatrix}.$$

En el caso 2D por medio de las expresiones (9.14) o del círculo de Mohr estábamos haciendo básicamente lo mismo, es decir estábamos ‘rotando’ el sistema de coordenadas para que de $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$ se pueda obtener $\begin{pmatrix} \sigma_{n_1} & 0 \\ 0 & \sigma_{n_2} \end{pmatrix}$, en donde vemos los dos valores (máximo y mínimo) para σ_n que se obtienen de (9.14).

tenemos que el material no falla cuando²

$$\sigma_1 < \sigma_o, \quad \sigma_2 < \sigma_o, \quad \sigma_3 < \sigma_o. \quad (10.1)$$

En un espacio en donde las coordenadas fuesen los esfuerzos principales, la región delimitada por (10.1) sería o tendría la forma de un cubo, tal como se puede apreciar en la Figura 10.3. Es decir si para un punto en un cuerpo \mathcal{T} es

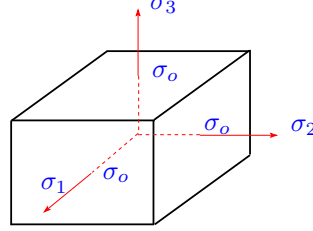


Figura 10.3: Límite de la zona de comportamiento elástico en la teoría del esfuerzo normal máximo.

tal que sus esfuerzos principales (como punto) se encuentran dentro del cubo, entonces el material no fallará (zona de no falla) en ese punto por deformación plástica.

En los resultados anteriores hemos asumido que el material puede fallar de la misma forma en tracción y compresión, pero hay muchos ejemplos de materiales que fallan con distintos límites para esos dos fenómenos. En dicho caso para $\sigma_i < 0$ tendríamos que delimitar la zona de no falla con valores para el esfuerzo σ_o diferentes cuando son en compresión.

En el caso bidimensional, como solo tenemos σ_1 y σ_2 , la región anterior se transforma simplemente en un cuadrado, tal como el que se muestra en la Figura 10.4.

En general queremos evitar trabajar muy cerca del límite de falla, y por ese motivo la zona segura se define por medio de un esfuerzo admisible σ_{adm} que se define como

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_o}{FS}, \quad (10.2)$$

en donde FS es conocido como el factor de seguridad y es tal que $FS \geq 1$. Este factor en problemas normales de diseño puede tomar los valores 1.5, 2 o mayores, dependiendo de cuan crítico sea evitar la falla en una aplicación.

El criterio del esfuerzo normal máximo se aplica y funciona bien para materiales ‘frágiles’ tales como: roca, vidrio, hierro fundido, cerámica, ladrillos refractarios, etc. En estos materiales cuando fallan se puede apreciar superficies de falla con normales orientadas en la dirección del máximo esfuerzo normal.

²Eliminaremos el subíndice n de la notación para los esfuerzos principales por simplicidad.

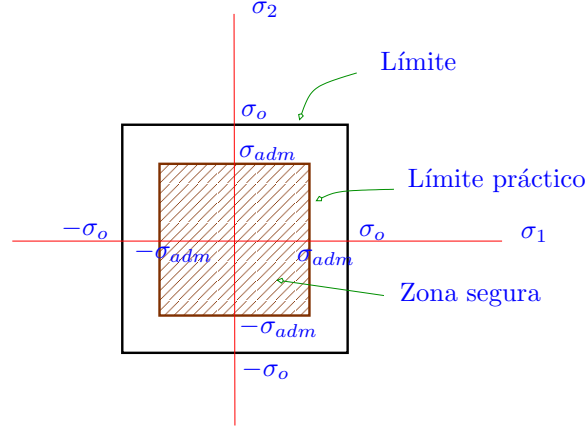


Figura 10.4: Límite de la zona de comportamiento elástico en la teoría del esfuerzo normal máximo caso bidimensional.

10.2.2. Criterio del esfuerzo de corte máximo

El material fallará cuando el máximo esfuerzo de corte³ en 2D o 3D sea igual al máximo esfuerzo de corte en el instante de falla para un ensayo uniaxial sobre una probeta del mismo material.

Para una probeta como la mostrada en la Figura 10.2, en un elemento diferencial en su interior tendríamos un estado de esfuerzos como el mostrado en la Figura 10.5 en el lado izquierdo. Es decir tendríamos solamente un esfuerzo normal y de (9.15) se llega a que para ese ensayo uniaxial en el instante de falla $\tau_o = \frac{\sigma_o}{2}$. La misma conclusión se obtiene de la aplicación del círculo de Mohr a este problema, como se muestra en el lado derecho de la Figura 10.5.

De las observaciones anteriores tenemos que no hay falla si

$$\tau_m < \tau_o \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} < \frac{\sigma_o}{2}. \quad (10.3)$$

³En (9.15) hemos visto como determinar este esfuerzo de corte máximo en 2D, se tenía $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Si se trabaja con los esfuerzos principales σ_1, σ_2 , como en dicho sistema de coordenadas no hay corte, tenemos

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n2}}{2}\right)^2} = \pm \left(\frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n2}}{2}\right).$$

En el caso 3D, cuyos detalles no mostraremos aquí, se tienen tres valores para los esfuerzos máximos de corte, que se calculan como $\tau = \frac{\sigma_{n_i} - \sigma_{n_j}}{2}$ con $i \neq j$. Entre estos tres valores se escoge el máximo, de donde tendríamos

$$\tau_m = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}.$$

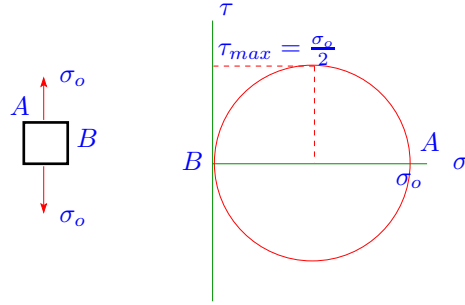


Figura 10.5: Esfuerzo de corte máximo en un ensayo uniaxial. Círculo de Mohr.

Veamos ahora la forma que tendría la zona en la que el material no falla para el caso bidimensional. En dicho problema tenemos solo dos esfuerzos principales σ_1 , σ_2 . Considerémos el plano con ejes dados por los esfuerzos principales mostrado en la Figura 10.6. Dividamos el espacio de acuerdo a los posibles signos

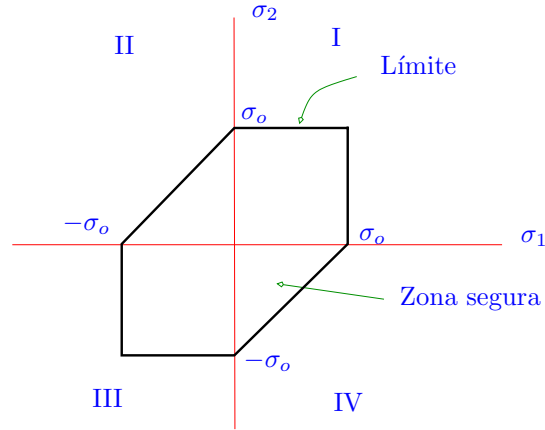


Figura 10.6: Límite de la zona de comportamiento elástico en la teoría del esfuerzo de corte máximo.

de σ_1 y σ_2 en cuatro partes, que denominamos I, II, III y IV.

En la zona II tenemos que $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 > 0$ por lo que (10.3) implica que justo en el límite de falla tenemos que se debe cumplir que

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_o}{2} \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_o + \sigma_1. \quad (10.4)$$

Es decir, si expresamos, por ejemplo, σ_2 como función de σ_1 , la relación entre estos esfuerzos en el límite de falla es una línea recta, tal como se ve para II en

la Figura 10.6. Lo mismo se puede obtener para la zona IV. Respecto a las zonas I y III el criterio anterior nos da una zona sin límites, lo que no es razonable, y una manera de complementar esto es asumiendo de forma adicional que para las zonas I y III el criterio del esfuerzo normal máximo debería ser válido, con lo que tenemos límites como los mostrados en la misma Figura 10.6.

Podemos apreciar de las Figuras 10.4 y 10.6 que la zona de no falla para el caso del criterio del esfuerzo normal máximo, es más grande que la que se obtendría con el criterio del esfuerzo de corte máximo. Debemos recordar eso si que el rango de aplicación o el tipo de materiales en las que estas dos teorías se aplica es distinto.

Aquí también se puede usar el concepto del esfuerzo admisible $\sigma_{adm} = \sigma_o/FS$, con el cual se puede establecer la zona ‘segura’ en la que no se produciría falla, tal como se muestra en la Figura 10.7.

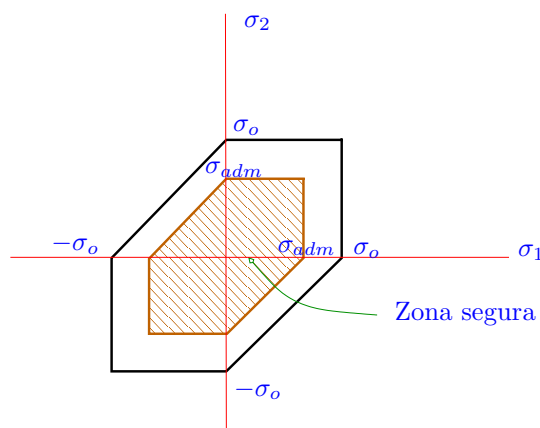


Figura 10.7: Límite de la zona de comportamiento elástico en la teoría del esfuerzo de corte máximo con zona admisible.

Los materiales para los cuales este criterio da buenas predicciones son materiales ‘dúctiles’, tales como el acero de bajo carbono y el cobre.

Debido a que el ángulo para el cual tenemos el máximo esfuerzo de corte tiene una diferencia de 45° con la dirección del máximo esfuerzo normal, para un cilindro o placa sometida a tracción que sean hechos de materiales dúctiles, las superficies de falla presentan una inclinación angular respecto a la dirección de la carga axial externa.

10.2.3. Criterio de Von Mises

El material fallará en 2D o 3D si su ‘energía de distorsión’ por unidad de volumen en el instante de falla es igual a la energía en ese instante en un ensayo uniaxial usando una probeta del mismo material.

La aplicación de este criterio (que es muy popular en diseño mecánico) es sobre todo para materiales dúctiles.

La energía de distorsión la definiremos a partir de la expresión para la energía específica (7.9) en donde teníamos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2).$$

En lugar de trabajar con el tensor de esfuerzos en el sistema de coordenadas original, trabajaremos con el tensor de esfuerzos rotado, de forma tal de tener los esfuerzos principales σ_i , $i = 1, 2, 3$. En este caso para \mathcal{U} tendríamos

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3). \quad (10.5)$$

Esta energía específica (su valor) es exactamente la misma que (7.9), pues debemos recordar que al calcular los esfuerzos principales (normales máximos y mínimos) tenemos el mismo estado de esfuerzos visto en un sistema de coordenadas rotado respecto al original. La energía debería ser invariante respecto a cambios en las coordenadas (por ser una función escalar).

Considerémos el cuadrado o cubo diferencial mostrado en la Figura 10.8, en donde tenemos que se aplica solo un esfuerzo uniforme (de tracción o compresión) igual en todas las caras. Distintas observaciones experimentales indicarían

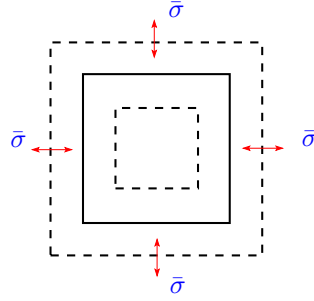


Figura 10.8: Cubo bajo el efecto de esfuerzos ‘hidrostáticos’.

que cambios volumétricos, como los que se observan de forma esquemática en esta figura, no producirían deformaciones plásticas, independiente de la magnitud de $\bar{\sigma}$.

Vamos a descomponer la energía de deformación en dos partes, una de ellas asociada a la parte ‘uniforme’ de los esfuerzos y la otra asociada a la parte restante de los esfuerzos. Para ello considerémos la siguiente descomposición de los esfuerzos principales

$$\sigma_1 = \bar{\sigma} + S_1, \quad (10.6)$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma} + S_2, \quad (10.7)$$

$$\sigma_3 = \bar{\sigma} + S_3, \quad (10.8)$$

donde definimos el ‘esfuerzo hidrostático’ $\bar{\sigma}$ como

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (10.9)$$

que como podemos ver es una especie de promedio de los esfuerzos principales.

Respecto a S_i , $i = 1, 2, 3$, estos son llamados las componentes del ‘esfuerzo deviatorico’ y de (10.6)-(10.9) se tiene que

$$S_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}, \quad (10.10)$$

$$S_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}, \quad (10.11)$$

$$S_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}. \quad (10.12)$$

La energía total se descompondrá como

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_H + \mathcal{U}_D, \quad (10.13)$$

donde \mathcal{U}_H sería la parte de la energía acumulada debido a $\bar{\sigma}$ y \mathcal{U}_D sería la energía de distorsión.

Calcularemos \mathcal{U}_H evaluando \mathcal{U} con $\bar{\sigma}$ en (10.5), que después de algunas manipulaciones nos da

$$\mathcal{U}_H = \frac{(1-2\nu)}{6E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3). \quad (10.14)$$

De (10.13) tenemos $\mathcal{U}_D = \mathcal{U} - \mathcal{U}_H$ y de (10.5) y (10.14) después de varias manipulaciones se obtiene

$$\mathcal{U}_D = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3). \quad (10.15)$$

Se define el ‘esfuerzo de Von Mises’⁴ σ_{VM} como

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}, \quad (10.16)$$

de modo que de (10.15) tenemos

$$\mathcal{U}_D = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right)\sigma_{VM}^2. \quad (10.17)$$

Volviendo al párrafo inicial de esta sección para un ensayo uniaxial la falla se produce cuando $\sigma = \sigma_o$, en cuyo caso de (10.16) y (10.17) tenemos que la energía de distorsión en el instante de falla será igual a

$$\mathcal{U}_{D_{falla_{1D}}} = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right)\sigma_o^2. \quad (10.18)$$

⁴Podemos ver en esta sección que el ‘esfuerzo de Von Mises’ en realidad es una simple definición, que se obtuvo de expresiones asociadas a la energía de deformación. Si bien es cierto este ‘esfuerzo’ tiene unidades de fuerza por unidad de área, no es un esfuerzo real, en el sentido visto en la Sección 3.3.3, y por tanto no se puede asociar a él, por ejemplo, una dirección como vector.

Luego el criterio nos dice que $\mathcal{U}_{D_{falla_{2D,3D}}} = \mathcal{U}_{D_{falla_{1D}}}$, por lo que de (10.18), (10.16) y (10.17) tenemos que

$$\left(\frac{1+\nu}{3E}\right) \sigma_o^2 = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3),$$

de donde se obtiene el criterio para el límite de falla

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 = \sigma_o^2. \quad (10.19)$$

O sea el material falla si

$$\sigma_{VM}^2 = \sigma_o^2. \quad (10.20)$$

Veamos la forma que tiene el límite de la zona segura para el caso 2D, de (10.19) tenemos

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_o^2, \quad (10.21)$$

que desde el punto de vista geométrico es o representa una elipse rotada, como la mostrada en la Figura 10.9, en donde tenemos además la representación gráfica del criterio del esfuerzo de corte máximo.

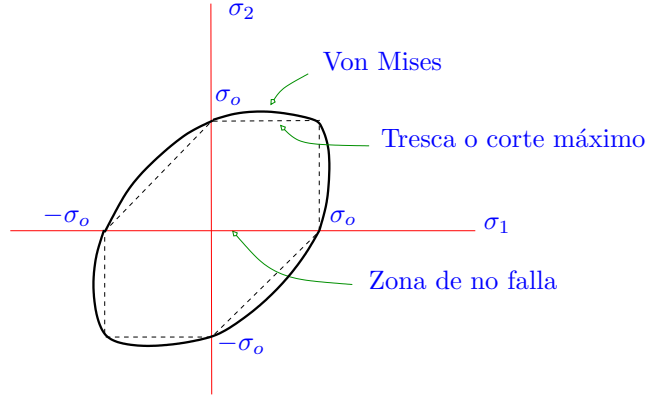


Figura 10.9: Límite de zonas de comportamiento elástico con los criterios de corte máximo y de Von Mises.

En la Figura 10.10 tenemos una representación gráfica de los tres criterios vistos en este capítulo.

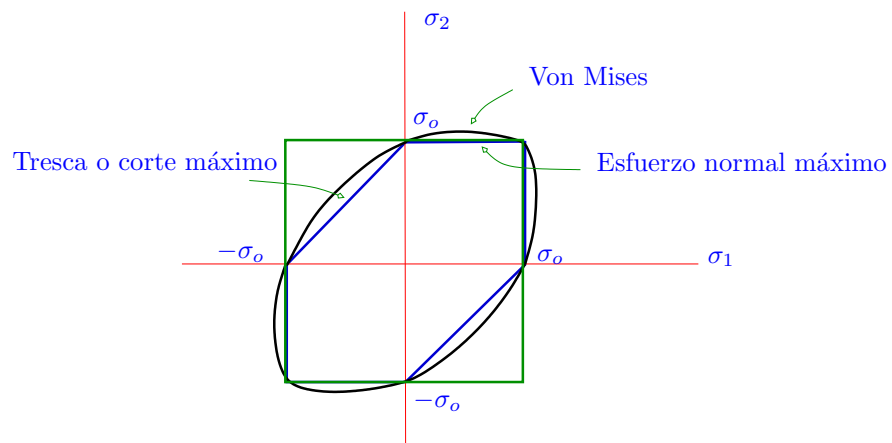


Figura 10.10: Límite de zonas de comportamiento elástico con los criterios del esfuerzo normal máximo (línea verde), corte máximo (Tresca) (línea azul) y de Von Mises (línea negra).

10.3. Ejercicios de esfuerzos combinados y teoría de falla

1. En la Figura 10.11 se tiene un poste hecho de un tubo de acero, el cual tiene un diámetro exterior de D_{ext} y un espesor de pared e . El tubo está pegado

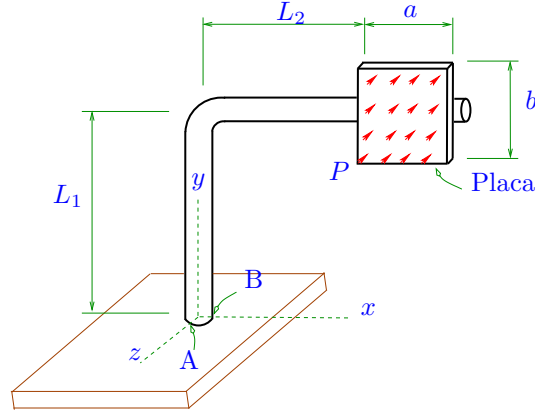


Figura 10.11: Poste bajo el efecto del viento.

a una placa rígida, la cual recibe el impacto del viento, el que genera una presión uniforme P sobre esa superficie de la placa (en la dirección z). El tubo está empotrado al piso.

- a) ¿Por que el ‘estado de esfuerzos’ sería mayor en la zona de empotramiento?
- b) Para esa zona, para los puntos A y B, determine dicho estado de esfuerzos (dibuje los cuadrados diferenciales).
- c) Para A y B calcule los esfuerzos normales máximos/mínimo, y el esfuerzo de corte máximo.
- d) Usando el criterio del esfuerzo de corte máximo, con $FS = 2$, determine si falla o no el tubo en A y/o B.

Datos:

$$L_1 = 4\text{m}, \quad L_2 = 2\text{m}, \quad a = 40\text{cm}, \quad b = 60\text{cm}, \quad D_{ext} = 12\text{cm}, \quad e = 1\text{cm},$$

$$P = 7 * 10^3 \text{Pa}, \quad E = 200 \text{GPa}, \quad \sigma_o = 200 \text{MPa}.$$

Obs: El efecto de P se puede reemplazar por una fuerza puntual equivalente como primera aproximación.

2. La viga de sección T mostrada en la Figura 10.12 está empotrada en un extremo y en el otro bajo el efecto de una fuerza puntual F . La sección se muestra en el lado derecho.

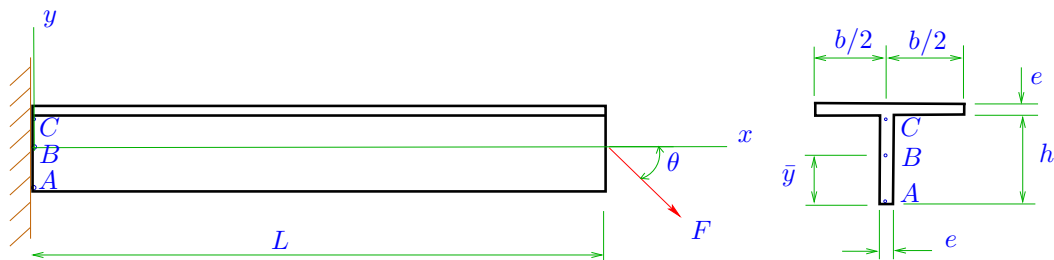


Figura 10.12: Viga T empotrada.

Para esta viga determine los estados de esfuerzos en los puntos A , B y C y también los esfuerzos principales. ¿Cual es la carga máxima F que se puede aplicar para que no falle en cualquiera de estos tres puntos si la viga está hecha de un acero de bajo carbono con $\sigma_o = 340\text{MPa}$ usando el criterio de Von Mises y un factor de seguridad $FS = 2,5$?

Datos: $L = 2\text{m}$, $h = 20\text{cm}$, $b = 15\text{cm}$, $e = 1\text{cm}$, $\theta = 50^\circ$.

3. El tubo de la Figura 10.13 está empotrado a la pared y bajo el efecto de una fuerza puntual F en el otro extremo.

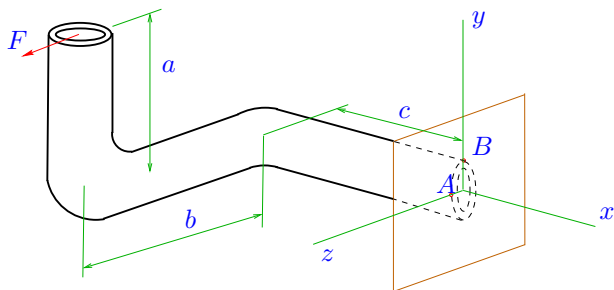


Figura 10.13: Tubo empotrado.

El tubo tiene un diámetro exterior d y un espesor $e = d/10$. Para los puntos A y B determine los estados de esfuerzos. Determine d de forma tal que el tubo no falle en dichos puntos considerando la teoría de Von Mises y con un factor de seguridad $FS = 2,5$.

Datos: $F = 15\text{kN}$, $a = 50\text{cm}$, $b = 70\text{cm}$, $c = 1\text{m}$, $E = 190\text{GPa}$, $G = 70\text{GPa}$, $\sigma_o = 250\text{MPa}$.

4. En la Figura 10.14 se tiene un eje que impulsa dos poleas. El eje recibe un torque T de un motor que no se muestra en esta figura. El eje está sobre dos soportes con rodamientos en los que podemos asumir no hay

roce apreciable. En la posición mostrada en la figura para simplificar los cálculos se puede asumir que todo el sistema está en equilibrio.

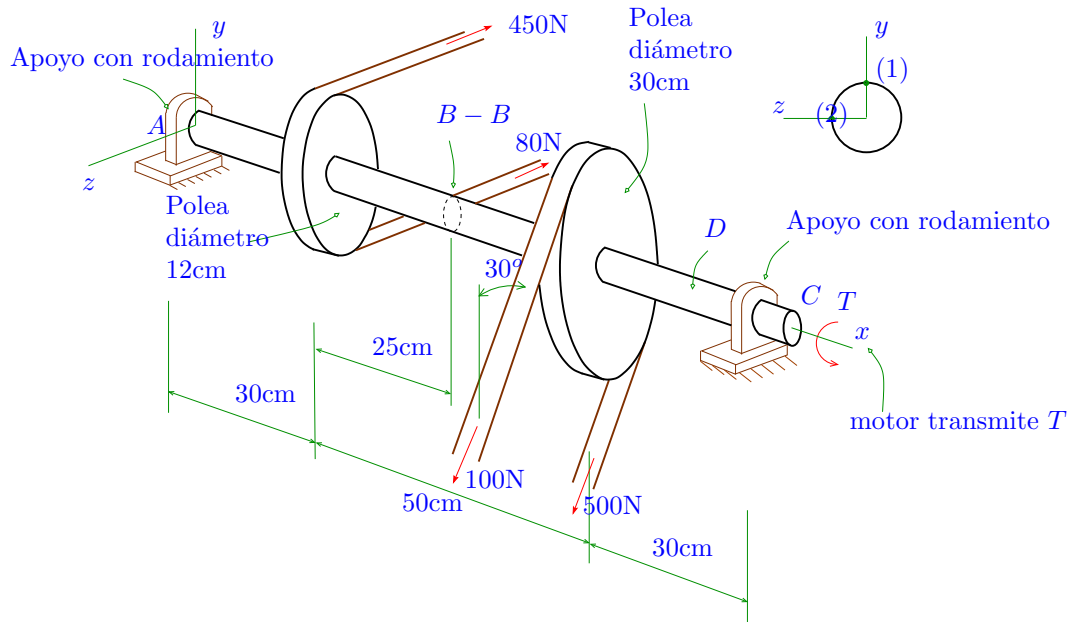


Figura 10.14: Eje con poleas.

- Indique los tipos de esfuerzos que generan cada una de las fuerzas o momentos internos en (1), (2) que se muestran en vista frontal en la figura superior derecha para la sección $B - B$ del eje. Si el diámetro del eje es $D = 3\text{cm}$, determine y grafique en cuadrados diferenciales los estados de esfuerzos para los puntos (1), (2).
 - Si se trabaja con un acero de bajo carbono para el eje con $\sigma_o = 100\text{MPa}$, usando el criterio de Von Mises, determine los factores de seguridad para los puntos (1) y (2), respectivamente.
5. La viga de la Figura 10.15 tiene una sección rectangular de lados a , b . En el plano $x - y$ la viga está sometida a una fuerza distribuida lineal (con valor máximo de 2000N/m), en tanto en el plano $x - z$ está sometida a una fuerza distribuida uniforme de 2500N/m más una puntual de 3000N . La figura superior izquierda muestra la viga en una vista en el plano $x - y$ en tanto en la figura inferior izquierda tenemos una vista de la viga en el plano $x - z$.

Para un corte imaginario hecho a una distancia de 1.5m desde el extremo izquierdo determine los estados de esfuerzos para los puntos (1) y (2). Los puntos (1) y (2) se muestran en la vista tridimensional del lado derecho de

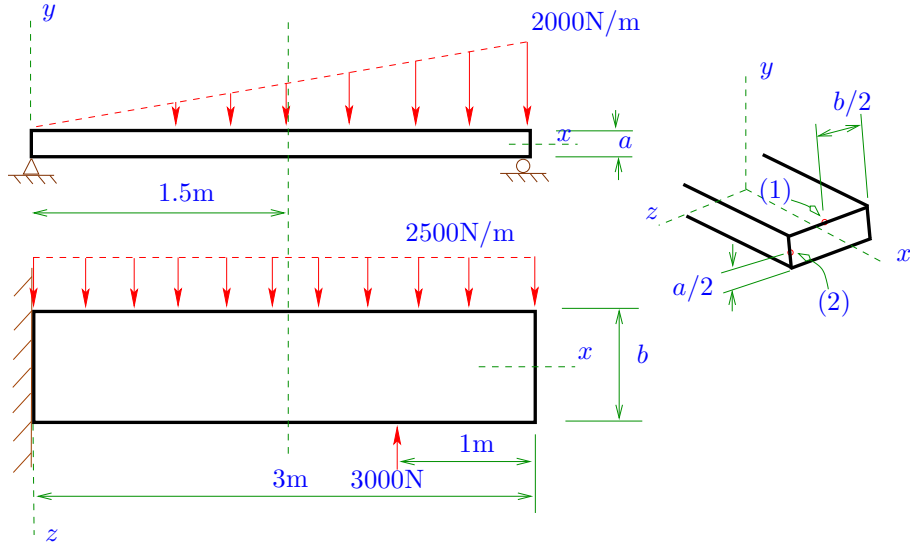


Figura 10.15: Viga.

la figura para la zona de corte imaginario. Dibuje en un cubo diferencial las componentes de los esfuerzos determinadas en dichos puntos.

Datos:

$$a = 5\text{cm}, \quad b = 12\text{cm}, \quad E = 100\text{GPa}, \quad G = 40\text{GPa}.$$

6. La barra de sección cuadrada de lado $d = 20\text{cm}$ de la Figura 10.16 se levanta por medio de una fuerza F . La barra tiene un peso específico $w_0 = 7,83 \cdot 10^3 [\text{Kgf/m}^3]$.

- Calcule las fuerzas internas y momento interno $H(x)$, $V(x)$ y $M(x)$ para la barra.
- Determine los esfuerzos en B (en el centro de la barra y en la superficie inferior, respectivamente)

El punto A está fijo. Datos: $L = 5[\text{m}]$, $\theta = 40\text{grados}$

7. La prensa C mostrada en la Figura 10.17 está hecha de acero. Determine la fuerza de sujeción permisible P que la prensa puede ejercer si se desea un factor de seguridad de 4.

Considere dimensiones en cm y $\sigma_o = 300\text{MPa}$

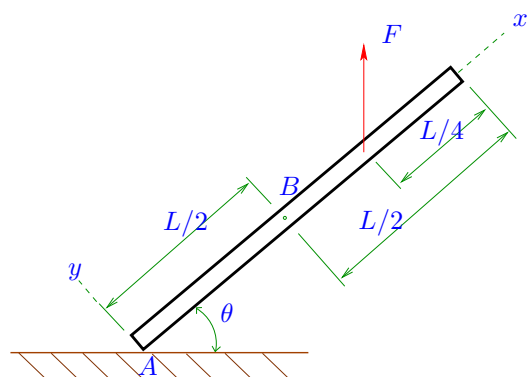


Figura 10.16: Barra bajo su peso.

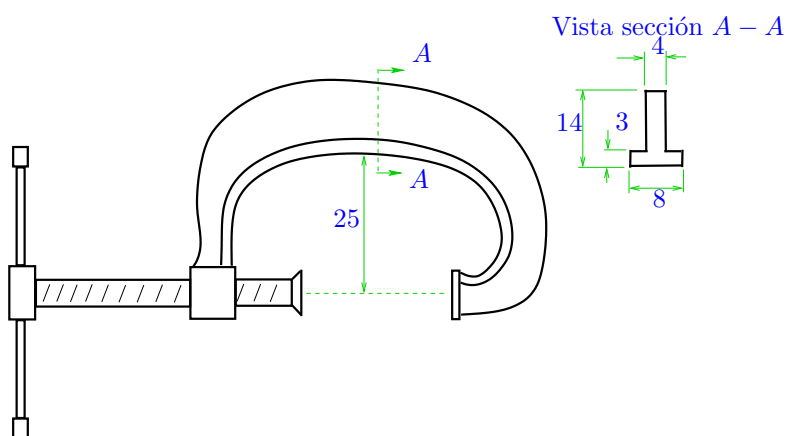


Figura 10.17: Prensa C.

Capítulo 11

Inestabilidad elástica: Pandeo en vigas y columnas

11.1. Introducción a la inestabilidad elástica

El concepto de estabilidad o inestabilidad aparece en tantos contextos distintos que es necesario dar una introducción a como sería aquí en mecánica, para ello considérese la Figura 11.1 (lado izquierdo). Ahí tenemos la representa-

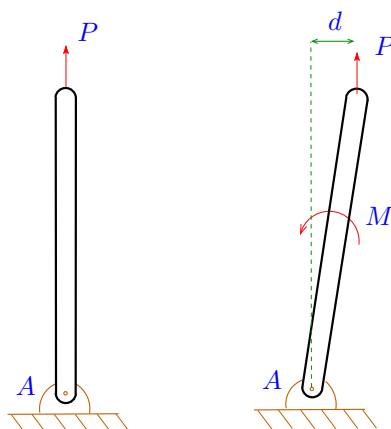


Figura 11.1: Estabilidad en barra rígida bajo la acción de una fuerza de tracción.

ción esquemática de una barra (que por el momento podemos asumir es rígida) sometida a una fuerza P vertical y con el otro extremo sujeto por medio de un pasador al piso.

Imaginemos ahora que la barra no está perfectamente vertical sino que su

posición superior está desplazada en una distancia d de la línea vertical, tal como se muestra en el lado derecho de la figura. Debido a la nueva posición se puede apreciar que se produciría un momento puro $M = dP$ respecto al punto A actuando sobre la barra. Este momento haría que la barra volviese a su posición inicial totalmente vertical.

En el caso anterior, la posición de ‘equilibrio’ original de la viga (el esquema del lado izquierdo) se puede considerar como ‘estable’, debido a que un desplazamiento a partir de esa posición lo que hace es generar un momento que restituiría a la viga a su posición inicial.

Veamos un caso opuesto como el mostrado en la Figura 11.2. En el lado

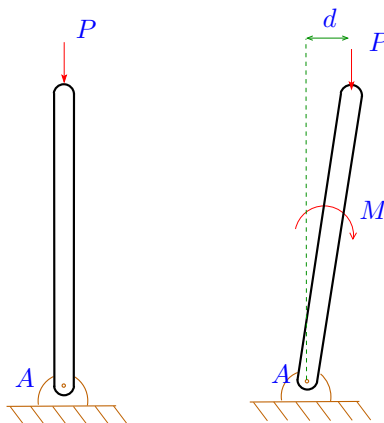


Figura 11.2: Inestabilidad en barra rígida bajo la acción de una fuerza de compresión.

izquierdo tenemos la misma barra pero ahora con una fuerza de compresión P actuando sobre ella.

Si se desplaza el punto de aplicación de la fuerza en una distancia d , tenemos que nuevamente se generará un momento $M = dP$, como se muestra en el lado derecho de la figura, pero en este caso el momento haría que la barra se desplazase más desde la posición inicial, es decir aumentaría d con lo que aumentaría M , con lo que finalmente se tendría un ‘colapso’ de la barra.

En la situación anterior tendríamos que la posición original vertical sería un equilibrio ‘inestable’.

En la Figura 11.3 tenemos tres esquemas que nos permiten ver los conceptos de estabilidad e inestabilidad en otro contexto. En la figura del lado izquierdo tenemos un cilindro puesto en una superficie cóncava. La posición de equilibrio estaría justo en el centro de dicha superficie, y es fácil apreciar que si el cilindro es sacado de dicha posición, debido a la fuerza de gravedad y a la forma de la superficie, el cilindro volverá a su posición original¹. Un equilibrio que tiene estas características se denomina equilibrio estable.

¹En realidad empezara a oscilar alrededor de dicha posición.

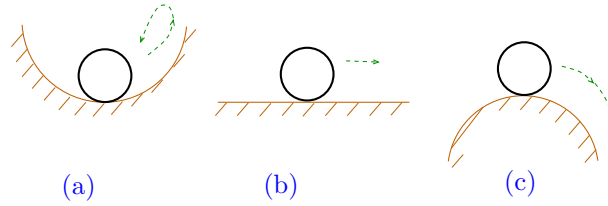


Figura 11.3: Cilindro rígido en tres superficies distintas: (a) En equilibrio estable. (b) En equilibrio neutro. (c) En equilibrio inestable.

En la figura del lado derecho tenemos el mismo cilindro pero en este caso sobre una superficie convexa. Si el cilindro es sacado de su posición de equilibrio (que se encuentra nuevamente en la mitad), la fuerza de gravedad y la forma de la superficie harán que en cada instante el cilindro se aleje más de la posición de equilibrio original. Un equilibrio de esta naturaleza es llamado equilibrio inestable.

En la figura del centro tenemos una situación diferente, aquí si el cilindro es sacado de su posición de equilibrio, quedará en la nueva posición sin moverse más, luego un problema de este tipo es llamado de equilibrio neutro.

Ya hemos visto dos situaciones diferentes en las que el concepto de equilibrio se asociaría con la posibilidad que tiene un cuerpo de volver a su posición inicial o no. En principio las propiedades de estos estados de equilibrio dependerían de la geometría y/o del entorno en donde se ubica el cuerpo. Ahora veremos que el concepto de equilibrio para la barra mostrada en la Figura 11.2 puede ser más complejo y depender entre otras cosas de la magnitud de la ‘fuerza’ externa.

En la Figura 11.4 tenemos la misma barra mostrada en la Figura 11.2 pero ahora en el extremo superior se colocan dos resortes horizontales de constante k .

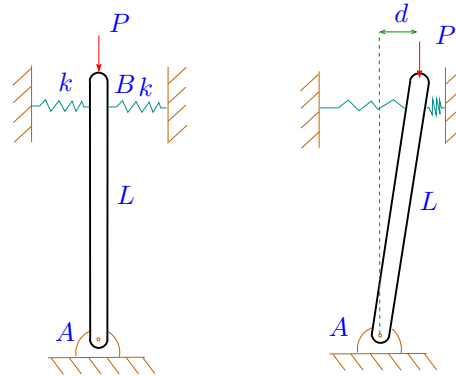


Figura 11.4: Inestabilidad y estabilidad en barra rígida bajo la acción de una fuerza de compresión y conectada a resortes laterales.

Si el extremo superior se desvía de la posición de equilibrio en una distancia d , se creará una fuerza debido al resorte F_{res} . Si aumenta d eso implicaría que aumentaría F_{res} también. La condición de equilibrio basada en el balance de momentos respecto al punto A equivaldría a decir que el momento por P debería ser igual al momento causado por F_{res} en ambos lados de la barra. El momento causado por P es igual a dP , en tanto que el momento causado por F_{res} sería aproximadamente igual a $2F_{res}L = 2kdL$, la aproximación viene del hecho de que al desplazarse d en la parte superior tenemos primero una rotación de F_{res} y segundo un cambio de la distancia vertical al punto A , pero si d se asume pequeño ambos efectos se pueden despreciar. Luego para el equilibrio tenemos

$$dP \approx 2kdL,$$

de donde se tiene

$$P_{cr} = 2kL. \quad (11.1)$$

A la fuerza P resultante del equilibrio la hemos llamado P_{cr} por las siguientes razones. Si $P < P_{cr}$ el momento causado por el resorte sería mayor que el momento causado por P , por lo que la barra volvería a su posición de equilibrio original vertical. Por otra parte si $P > P_{cr}$ el momento causado por P vencería la resistencia causada por el resorte, con lo que la barra se alejaría cada vez más del equilibrio. O sea P_{cr} es un valor ‘crítico’ para la fuerza externa, en el sentido que si se supera ese valor, estaríamos en una situación de equilibrio inestable, de modo que P_{cr} sería el límite que separaría el rango de comportamiento estable del inestable.

El concepto de la carga crítica P_{cr} puede surgir en otro contexto, para ello observemos la Figura 11.5 en donde tenemos nuevamente la barra con los resortes mostrada en la Figura 11.4, pero ahora se agrega una fuerza horizontal F en el extremo superior en B . Debido a F la posición vertical ya no es la posición de equilibrio (a partir de la cual deberíamos agregar alguna perturbación), esta posición debemos determinarla como paso previo por medio de un balance de momentos respecto, por ejemplo, al punto A . El momento causado por F sería aproximadamente FL , el momento causado por P sería x_oP , donde x_o sería la nueva posición de equilibrio, y el momento causado por los resortes sería aproximadamente igual a $2kx_oL$, luego para el balance tenemos

$$FL + x_oP \approx 2kx_oL,$$

de donde obtenemos

$$x_o = \frac{FL}{2kL - P} = \frac{F}{2k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{2kL}\right)}. \quad (11.2)$$

Aquí vemos que si $P = 2kL$ entonces $x_o \rightarrow \infty$, en tanto que si $P < 2kL$ se estaría con un x_o estable. ¿Qué se puede decir respecto a la situación $P > 2kL$.

En el problema anterior el concepto de carga crítica $P_{cr} = 2kL$ surgió en un contexto totalmente distinto al estudiado para la Figura 11.4.

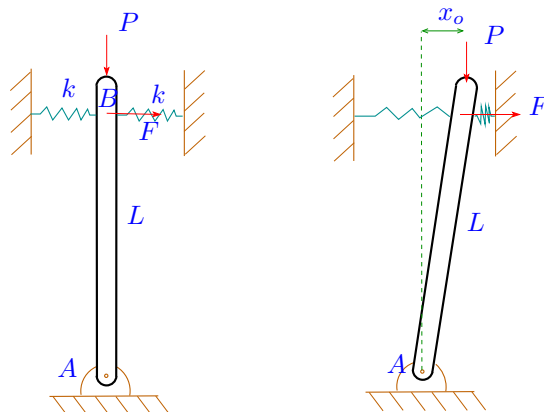


Figura 11.5: Inestabilidad y estabilidad en barra rígida bajo la acción de una fuerza de compresión conectada a resortes laterales y bajo una fuerza horizontal.

Tipos de inestabilidades en cuerpos elásticos

En el análisis de los problemas anteriores vimos los conceptos de estabilidad y de inestabilidad en varios casos relacionados con cuerpos rígidos. Para cuerpos elásticos se pueden generar también varios tipos de inestabilidades, las que dependerán, entre otros factores, de la geometría del cuerpo, de las cargas externas, de las propiedades mecánicas del material y de las restricciones al desplazamiento que se puedan imponer. Debería ser claro que en cuerpos elásticos puede ser mucho más difícil establecer estos límites entre comportamiento estable e inestable.

A continuación se muestra una lista breve y simple de los tipos de inestabilidades elásticas que se pueden producir en un cuerpo:

1. Pandeo por compresión de una columna. En la Figura 11.6 tenemos una columna elástica bajo el efecto de una fuerza de compresión. Si dejamos de lado la posible rotación rígida que podría sufrir la columna en este problema, podemos apreciar un posible comportamiento inestable en el lado derecho, que es denominado pandeo.
2. Vuelco lateral de una viga alta y delgada. Como se muestra en la Figura 11.7, aquí tenemos una viga de sección rectangular muy alta en relación a su espesor, la cual está empotrada en un extremo y libre en el otro, en donde se aplica una fuerza vertical P . Un problema de esta naturaleza se podría estudiar considerando solo flexión (si la fuerza se aplica en la mitad de la sección), sin embargo debido a la geometría de la viga, una desviación pequeña del punto de aplicación de la fuerza causaría un momento (asociado a los esfuerzos de corte) que haría a la viga rotar en ese punto y producir una inestabilidad como se muestra en la figura.

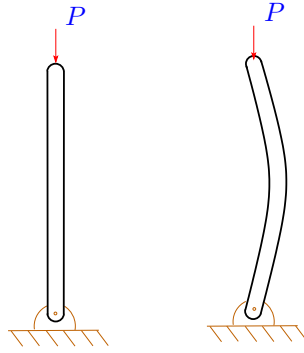


Figura 11.6: Pandeo por compresión de columna.

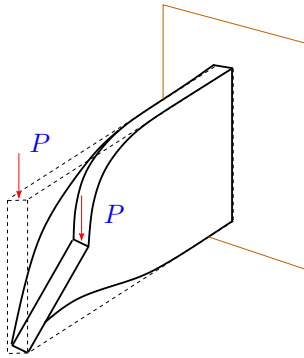


Figura 11.7: Vuelco lateral de viga alta y delgada.

3. Pandeo de un tubo cilíndrico sometido a torsión. En la Figura 11.8 te-

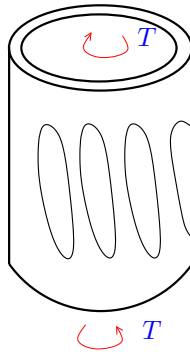


Figura 11.8: Pandeo de tubo cilíndrico de pared delgada sometido a torsión.

nemos un tubo cilíndrico de pared delgada sometido a un torque externo (mostrado con flechas rojas). Es bien sabido que en una geometría de esta naturaleza bajo torques superiores a un cierto valor crítico se puede producir la formación de irregularidades (o depresiones) en la pared, las cuales pueden causar eventualmente un colapso o inestabilidad en el tubo.

4. Inestabilidad por compresión en un tubo. En la Figura 11.9 tenemos un

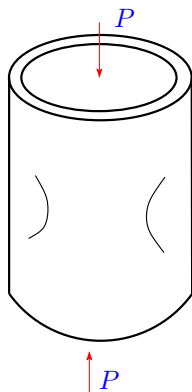


Figura 11.9: Pandeo por compresión de tubo de pared delgada.

tubo de pared delgada. Puede ser cilíndrico o tener otra sección. Es bien sabido que tubos de esta naturaleza pueden soportar altas cargas de compresión, pero que sobre ciertos límites para estas cargas se producen, de forma repentina, deformaciones irregulares en la pared, que generan un colapso inmediato de la estructura.

De todos los casos anteriores en este texto estudiaremos solo el pandeo de columnas.

11.2. Pandeo en columnas

Estudiaremos en esta sección en detalle el caso de una columna que en un momento dado puede desarrollar o mostrar una inestabilidad por pandeo.

En la Figura 11.10 tenemos una columna o viga sometida a una fuerza de compresión P en B , a una fuerza uniforme actuando a lo largo $w(x)$ y finalmente con un apoyo tipo pasador en el punto A . Podemos apreciar que a diferencia del problema de flexión, aquí se asume que $w(x)$ es positivo si apunta en la dirección de $y > 0$.

Extraigamos un elemento diferencial de la viga de longitud dx . En la Figura 11.11 tenemos una vista ampliada del diferencial. En el soporte tipo pasador del lado izquierdo se producirá una reacción en x de magnitud P , luego para cualquier corte imaginario, como las superficies laterales del diferencial de la

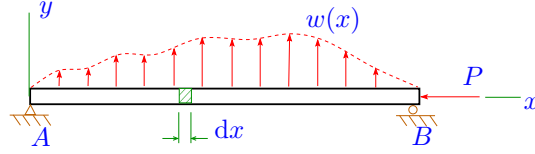


Figura 11.10: Esquema para deducir las ecuaciones viga-columna.

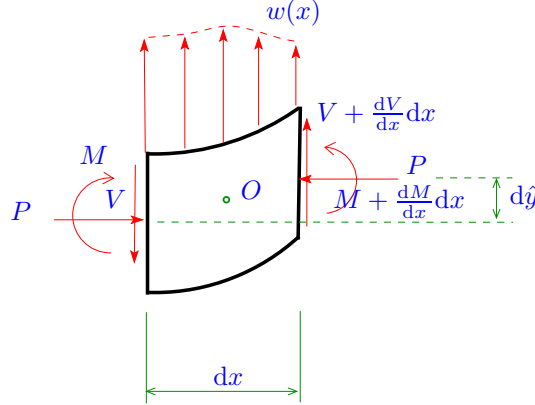


Figura 11.11: Elemento diferencial de viga.

figura, tenemos como carga interna horizontal $H = P$. En el lado izquierdo del diferencial tenemos las cargas internas M y V , en tanto que en el lado derecho usando una aproximación con series de Taylor hasta el primer término tenemos $M + \frac{dM}{dx}dx$ y $V + \frac{dV}{dx}dx$. Observamos también la aplicación de $w(x)$ en esa pequeña zona.

El elemento diferencial mostrado en la Figura 11.11 está deformado, en particular se muestra su desplazamiento vertical (la diferencia de desplazamiento entre las caras laterales) $d\hat{y}$. También podríamos tener un desplazamiento horizontal pero no lo consideraremos aquí.

Haremos equilibrio para el diferencial, partiendo con las fuerzas tenemos

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -w(x). \quad (11.3)$$

Si hacemos equilibrio de momentos respecto al punto O tenemos²

$$\sum_O M_z = 0 \Rightarrow M + \frac{dM}{dx}dx - M + V\frac{dx}{2} + \left(V + \frac{dV}{dx}dx\right)\frac{dx}{2} + Pd\hat{y} + wdx(kdx) = 0,$$

y simplificando algunas expresiones se obtiene

$$\frac{dM}{dx}dx + Vdx + \frac{dV}{dx}dx\frac{dx}{2} + Pd\hat{y} + wdx(kdx) = 0.$$

Despreciando los términos de orden $(dx)^2$ en relación a los de orden dx y posteriormente dividiendo toda la ecuación por dx se llega a

$$\frac{dM}{dx} + V + P\frac{d\hat{y}}{dx} = 0. \quad (11.4)$$

De (5.15) teníamos que $M = EI_z \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$, que en el presente problema también se considerará válida³, luego en (11.4) tenemos

$$EI_z \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} + V + P\frac{d\hat{y}}{dx} = 0. \quad (11.5)$$

Vamos a derivar la ecuación anterior (para por medio del uso de (11.3) reemplazar V por w) luego tenemos

$$EI_z \frac{d^4\hat{y}}{dx^4} + \frac{dV}{dx} + P\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = 0.$$

Usando (11.3) y dividiendo toda la ecuación por EI_z se llega a

$$\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI_z} \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI_z}. \quad (11.6)$$

²El punto O se encuentra a media distancia (en la dirección x) en el diferencial, y de allí proviene las expresiones para los momentos causados por las fuerzas de corte en el diferencial. En relación al momento causado por $w(x)$, como es una distribución de forma arbitraria y general, podemos asumir que la fuerza puntual equivalente sería aproximadamente igual a $w dx$, en tanto que su punto de aplicación podría estar a una distancia $k dx$ (con $0 < k < 1/2$) del punto O , y de allí proviene la expresión para el momento causado por esta densidad de fuerza por unidad de largo.

³La expresión $M = EI_z \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$ se obtuvo en la Sección 5.1.2 en el contexto del cálculo de deformación en una viga en flexión. De las figuras anteriores, así como de las figuras mostradas en la Sección 5.1.2, podemos apreciar que el tipo de deformación en los elementos diferenciales son casi exactamente iguales. La única diferencia en nuestro caso es que además debido a la fuerza P podríamos tener una compresión del diferencial, sin embargo, ya se ha mencionado que no se tomará en cuenta esa deformación en esta sección.

Hay otra consideración adicional, la expresión $M = EI_z \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$ se obtuvo también por medio del uso de (5.9) y (3.71), es decir, asumiendo una distribución de esfuerzo normal por flexión y de la ecuación constitutiva. En nuestro caso actual, para el diferencial mostrado en la Figura 11.11, tendríamos también una componente uniforme en y de compresión para el esfuerzo normal en la dirección x , que debería agregarse en (3.71), pero tampoco se considerará esta componente adicional para el esfuerzo. Hay dos motivos para esto, primero el fenómeno que nos interesa estudiar aquí no es tanto la deformación, sino más bien la posible existencia de un tipo de inestabilidad, y segundo, ya en la Sección 9.3 se ha visto que en general los esfuerzos normales por flexión son muy superiores en magnitud a los esfuerzos normales por carga axial, de manera tal que estas cargas axiales (sus esfuerzos) se puede despreciar.

Esta es la ecuación cuya solución usaremos para establecer algún tipo de criterio para predecir el pandeo. Se puede comparar esta ecuación con (5.50)₃.

11.2.1. Solución para un caso particular

Aquí nos interesa estudiar el caso en que $w(x) = 0$, es decir cuando la viga solo está sometida a una fuerza de compresión. En este caso de (11.6) tenemos que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI_z} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = 0. \quad (11.7)$$

Un esquema del problema que nos interesaría estudiar se muestra en la Figura 11.12.



Figura 11.12: Viga (columna) bajo la acción solo de una fuerza de compresión axial.

La solución general de (11.7) es

$$\hat{y}(x) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x \right) + c_3 x + c_4, \quad (11.8)$$

donde c_i , $i = 1, 2, 3, 4$ son constantes.

En este problema usaremos también la expresión para la segunda derivada de la solución y de (11.8) tenemos

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -c_1 \frac{P}{EI_z} \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x \right) - c_2 \frac{P}{EI_z} \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x \right). \quad (11.9)$$

Una solución completa del problema requiere de 4 condiciones de borde para \hat{y} . De la Figura 11.12 podemos ver que

$$\hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(L) = 0. \quad (11.10)$$

Dos condiciones adicionales se pueden obtener recordando que tenemos que $M = EI_z \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}$ y que por los tipos de soportes que tenemos en A y B se tiene que $M(0) = 0$ y $M(L) = 0$, por lo que

$$\left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_{x=L} = 0. \quad (11.11)$$

Usemos primero (11.11)₁, de (11.9) tenemos que

$$\left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{P}{EI_z} c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0. \quad (11.12)$$

De (11.10)₁ y (11.8) con (11.12) se llega a

$$\hat{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 + c_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0. \quad (11.13)$$

Por otra parte de (11.10)₂ y (11.8) usando los resultados anteriores tenemos que

$$\hat{y}(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L \right) + c_3 L = 0. \quad (11.14)$$

En tanto que de (11.11)₂ se tiene que

$$\left. \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad -c_1 \frac{P}{EI_z} \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L \right) = 0, \quad (11.15)$$

lo que implica que de (11.14) se debe cumplir

$$c_3 = 0. \quad (11.16)$$

Tenemos pues que $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$ en tanto que se debe cumplir (11.15). La ecuación (11.15) se puede satisfacer de varias formas diferentes, podría ser satisfecha si $P = 0$ o $c_1 = 0$, pero ambos casos nos daría la solución trivial $\hat{y}(x) = 0$. Una solución no trivial es buscar aquellos $\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L$ para los cuales

$$\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L \right) = 0. \quad (11.17)$$

Una solución no trivial de la ecuación anterior es

$$\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L = n\pi \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11.18)$$

Nos interesa en particular situaciones en las que la carga externa es tal que la relación anterior es válida, luego de (11.18) podemos definir una carga ‘crítica’ (para cada n) que denotaremos como P_{cr_n} como

$$P_{cr_n} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{L^2}. \quad (11.19)$$

¿Por qué si $P = P_{cr_n}$ se podría tener una situación de inestabilidad? La respuesta se puede ver de la siguiente forma. Si $P = P_{cr_n}$ tenemos que (11.15) es satisfecha, luego una solución no trivial para (11.7) sería

$$\hat{y}(x) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P_{cr_n}}{EI_z}} x \right), \quad (11.20)$$

la cual sería válida independiente de c_1 , es decir c_1 podría ser abitrariamente alto, luego puede ser tan grande como se quiera, por lo que se podría tener un gran desplazamiento, independiente ahora ya de P_{cr_n} , es decir en cierta forma estaríamos frente a un fenómeno de inestabilidad.

¿Qué sucedería si $P < P_{cr_1}$ la primera carga crítica? En dicho caso la elasticidad de la barra o viga sería suficiente para restituir la viga a su forma recta horizontal inicial, o sea tendríamos la solución trivial $\hat{y}(x) = 0$.

En la Figura 11.13 tenemos las formas particulares que tendría la viga al deformarse de manera inestable si P fuese igual sucesivamente a las tres primeras cargas críticas.

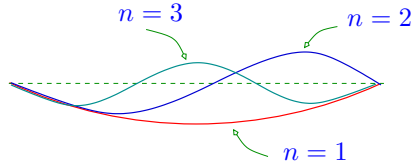


Figura 11.13: Modos de falla en pandeo para la viga (columna).

La primera carga crítica $P_{cr_1} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$ la denotaremos simplemente como P_{cr} y es conocida como la carga de pandeo o de Euler. Esta será la carga que consideraremos en la mayor parte de los problemas de pandeo, y no los ‘modos’ superiores para los cuales $n \geq 2$. Esto es debido a que para alcanzar dichos modos superiores con una carga creciente P , es necesario pasar primero por la carga P_{cr_1} , es decir se produciría falla por el modo 1 antes de alcanzar el modo 2 o superiores. Un modo superior se podría alcanzar si a la viga se le agregase un apoyo adicional convenientemente ubicado, tal como se muestra en la Figura 11.14.

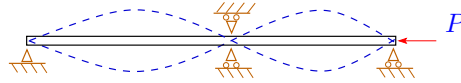


Figura 11.14: Forma práctica de producir el segundo modo de falla.

11.2.2. Columna con deflexión inicial

Aquí trataremos un problema diferente, en donde tenemos una viga como la mostrada en la Figura 11.15 con una deflexión inicial. Lo que se muestra ahí es una viga cuya forma inicial no es recta, sino más bien con una forma curva dada por la función $\hat{y}_o(x)$.

Si se aplica P , se tendría una deflexión adicional \hat{y} , por lo que la deflexión total $\hat{y}_T(x)$ sería

$$\hat{y}_T(x) = \hat{y}(x) + \hat{y}_o(x). \quad (11.21)$$

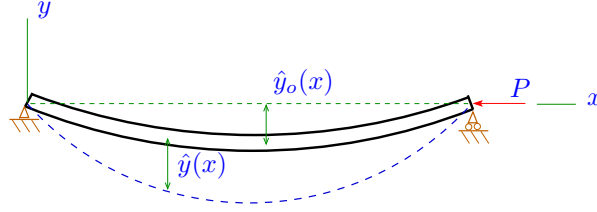


Figura 11.15: Columna con deflexión inicial $\hat{y}_o(x)$.

No podemos usar directamente (11.6) aquí. Debemos deducir o encontrar otra ecuación. Si se extrae un diferencial de la viga mostrada en la Figura 11.15 y se siguen los mismo pasos con los que se obtuvo (11.6) se llegaría a⁴

$$\frac{dM}{dx} + V + P \frac{d\hat{y}_T}{dx} = 0. \quad (11.22)$$

Reemplazando (11.21) en (11.22) y reordenando se llega a

$$\frac{dM}{dx} + V + P \frac{d\hat{y}}{dx} = -P \frac{d\hat{y}_o}{dx},$$

y derivando una vez se tiene

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{dV}{dx} + P \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -P \frac{d^2 \hat{y}_o}{dx^2}. \quad (11.23)$$

Pero de (11.3) (que también se puede probar es válida en el presente caso) como en nuestro problema $w(x) = 0$ tenemos que $\frac{dV}{dx} = 0$. Por otra parte de (5.15) tenemos que⁵ $M = EI_z \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}$, luego de (11.23) después de algunas manipulaciones finalmente se obtiene

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI_z} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{P}{EI_z} \frac{d^2 \hat{y}_o}{dx^2}. \quad (11.24)$$

Un ejemplo para la deflexión inicial

Considerémos una deflexión inicial de la forma

$$\hat{y}_o(x) = \delta_o \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (11.25)$$

⁴En el caso de (11.22) la diferencia está en $P \frac{d\hat{y}_T}{dx}$, en donde aparece la derivada de la deflexión total. Si se observa bien, este término provenía del momento respecto a O (en la Figura 11.11), en donde el momento causado por P ahora sería $P d\hat{y}_T$.

⁵Para (11.23) tenemos que $M = EI_z \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}$, lo que proviene del mismo tipo de análisis para la deformación que se había visto en la Sección 5.1.2 en flexión, y que se había mencionado en (11.4) para el problema de pandeo en la viga recta. En nuestro caso en (11.23), hemos asumido que M solo dependería de la segunda derivada de $\hat{y}(x)$ y no en la segunda derivada de \hat{y}_T , debido a que es solo $\hat{y}(x)$ la parte de la deflexión que estaría relacionada directamente con la deformación por flexión, es decir solo $\hat{y}(x)$ está relacionado con los esfuerzos normales por flexión, mediante los cuales se encontró (5.15).

reemplazando en (11.24) tenemos que resolver

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI_z} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{P\delta_o}{EI_z} \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (11.26)$$

La solución de esta ecuación tiene dos partes, una solución homogénea $\hat{y}_h(x)$ y una particular $\hat{y}_p(x)$. Para la solución particular podemos asumir que es de la forma

$$\hat{y}_p(x) = C \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (11.27)$$

la que si se reemplaza en (11.26) nos da que

$$C = \frac{P\delta_o}{\frac{EI_z \pi^2}{L^2} - P}. \quad (11.28)$$

Respecto a la solución homogénea, esta está dada por (11.8), o sea

$$\hat{y}_h(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right) + c_3 x + c_4,$$

por lo que la solución total de (11.26) $\hat{y}(x) = \hat{y}_h(x) + \hat{y}_p(x)$ es igual a

$$\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right) + c_3 x + c_4 + \frac{P\delta_o}{\frac{EI_z \pi^2}{L^2} - P} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (11.29)$$

De (11.29) podemos ver que si $P = P_{cr} = \frac{EI_z \pi^2}{L^2}$ tendríamos que $C \rightarrow \infty$ lo que se puede considerar como pandeo, pero que en este problema aparece de una condición diferente.

Queda como ejercicio determinar las constantes c_i , $i = 1, 2, 3, 4$ usando las condiciones de borde adecuadas para una viga como la mostrada en la Figura 11.15. Es de interés en particular ver si hay alguna ‘otra fuente’ de inestabilidad que se puede estudiar con la solución completa al conocer c_i .

11.2.3. Columna cargada de forma excéntrica

En este último caso especial nos interesa estudiar el problema de una columna o barra en la cual la fuerza de compresión P está colocada de forma excéntrica respecto a la línea que define la columna, tal como se puede apreciar en la Figura 11.16.

No usaremos aquí (11.7) o la metodología usada en las secciones anteriores para encontrar la ecuación del problema. El método a presentar a continuación es diferente, y para ello consideremos un corte imaginario hecho sobre un punto x en la columna mostrada en la Figura 11.16, de modo que en la Figura 11.17 tenemos la porción que queda en el lado izquierdo, que se muestra rotada en 90° . En esta parte de la columna, que se ha mostrado deformada, podemos ver en el lado izquierdo la carga externa P , y en la superficie de corte el momento

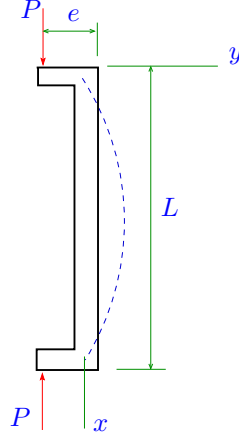


Figura 11.16: Columna cargada de forma excéntrica.

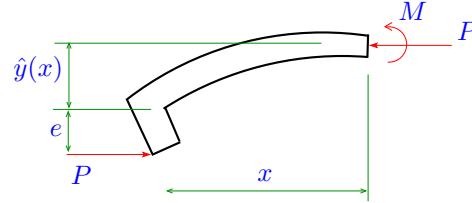


Figura 11.17: Columna cargada de forma excéntrica. Corte imaginario.

interno M y la fuerza interna horizontal $H = P$ (no se muestra la fuerza de corte que en este problema no interesa).

A partir de la línea horizontal que define a la viga en la situación inicial al punto de aplicación de la fuerza externa P en el extremo izquierdo, tenemos que P está separado por una distancia $\hat{y}(x) + e$ de la línea horizontal. Si hacemos equilibrio de momentos para esta porción de viga tenemos que

$$M(x) = -P(e + \hat{y}(x)). \quad (11.30)$$

Aquí nuevamente (5.15) es válida, por lo que $M(x) = EI_z \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}$, luego para (11.30) después de algunas manipulaciones tenemos

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{P}{EI_z}(e + \hat{y}(x)),$$

de donde se obtiene

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \frac{P}{EI_z} \hat{y} = -\frac{P}{EI_z} e. \quad (11.31)$$

La solución de (11.31) consta de dos partes, una homogénea y una particular, y la solución total tiene la forma

$$\hat{y}(x) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x \right) - e, \quad (11.32)$$

donde c_1, c_2 son constantes.

Solo se necesitan dos condiciones de borde aquí y que son

$$\hat{y}(0) = 0, \quad \hat{y}(L) = 0. \quad (11.33)$$

Usando (11.32), (11.33) obtenemos finalmente

$$c_1 = \frac{e \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L \right) \right]}{\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L \right)}, \quad c_2 = e. \quad (11.34)$$

En (11.34)₁ vemos que si $\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ estaríamos en una situación en la cual $c_1 \rightarrow \infty$, lo que se puede clasificar como un tipo de inestabilidad.

11.3. Ejercicios

1. Encuentra las cargas críticas para los dos problemas mostrados en la Figura 11.18.

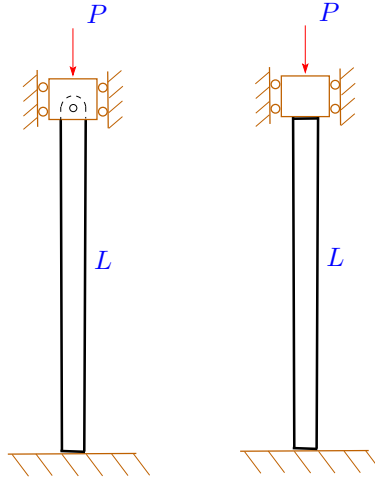


Figura 11.18: Columnas bajo compresión.

2. En la Figura 11.19 se tiene una columna bajo la acción de una fuerza P y un momento M_B . La sección de la viga es mostrada en el lado derecho de

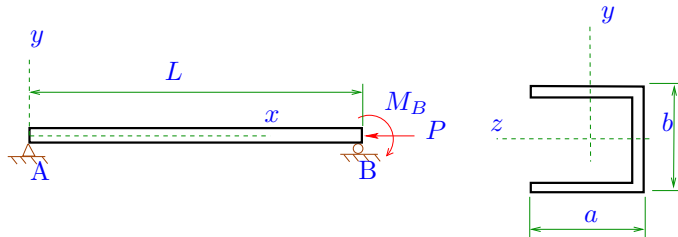


Figura 11.19: Columna.

- la Figura 11.19 (en forma ampliada). La sección tiene un espesor uniforme e . Si la viga tiene un módulo de elasticidad E , determine la carga crítica P_{cr} .
3. Una barra maciza de acero como la que se muestra en la Figura 11.20 tiene un diámetro de 30mm y actúa como separador en el sistema mostrado en dicha figura. Asuma que los cables son inextensibles. Considerando un

factor de seguridad 1.7 determine la fuerza máxima que puede soportar el sistema. Se tiene $E = 190\text{GPa}$.

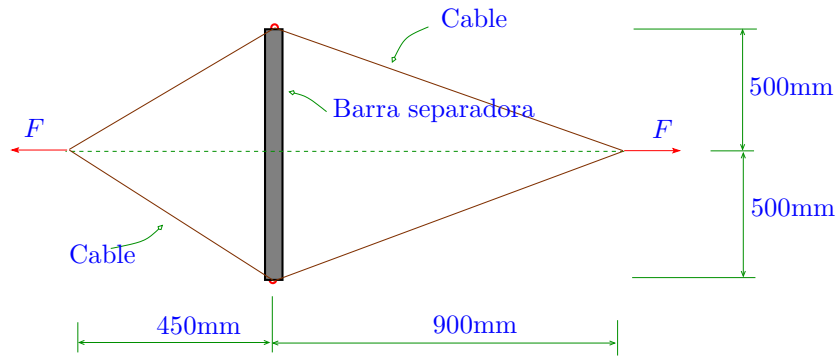


Figura 11.20: Separador con cables.

4. La columna rectangular de la Figura 11.21 con dimensiones transversales b y h está soportada por pasadores en los extremos A y C . A mitad de la altura, la columna está restringida en el plano de la figura pero puede deflectarse perpendicularmente en el plano de la figura. Determine la razón h/b tal que la carga crítica sea la misma para pandeo en los dos planos principales de la columna.

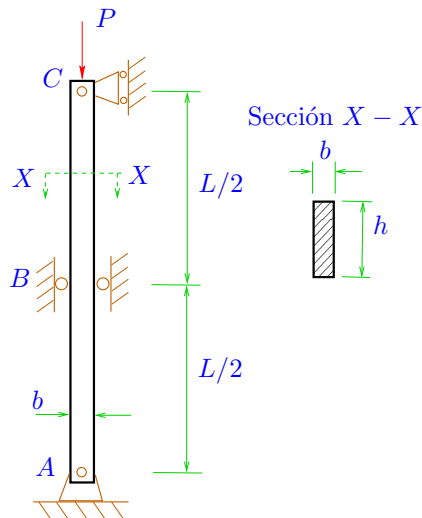


Figura 11.21: Viga bajo pandeo.

5. Una armadura articulada en sus puntos A , B y C está compuesta por dos barras del mismo material y con idénticas secciones transversales. El ángulo de la carga P puede variar entre 0 y 90° . La barra AB mide L , las barras tiene el mismo valor para I_z .

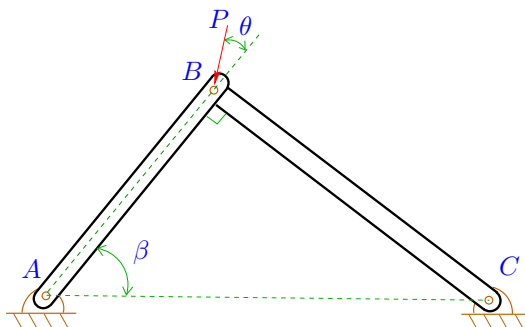


Figura 11.22: Dos barras bajo el efecto de pandeo.

Determine P para evitar pandeo con un $FS = 2$. ¿Cual es θ para que P sea máximo?

6. La Figura 3(a) es la vista isométrica de una estructura de un molino eólico de gran tamaño. Al diseñar surge la duda de cómo disponer la veleta (que sirve para que la estructura ‘siga’ al viento). Se desea tener la máxima área de la veleta, siempre y cuando no ocurra pandeo. Si la estructura se modela como lo muestra la Figura 3(b), con d la distancia horizontal constante entre el eje de la estructura y la veleta, y a la altura de la veleta por determinar, encuentre el máximo valor de a para que no ocurra pandeo.

Considere que solo la veleta compuesta de acero con $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$ y espesor de 2 mm contribuye peso. La sección transversal del eje vertical es un tubo con diámetro exterior ϕ_e e interior ϕ_i .

Datos: $h=30 \text{ m}$, $d=50 \text{ cm}$, $L=1\text{m}$, $\phi_i=34\text{mm}$, $\phi_e=38\text{mm}$, $E = 210\text{GPa}$.

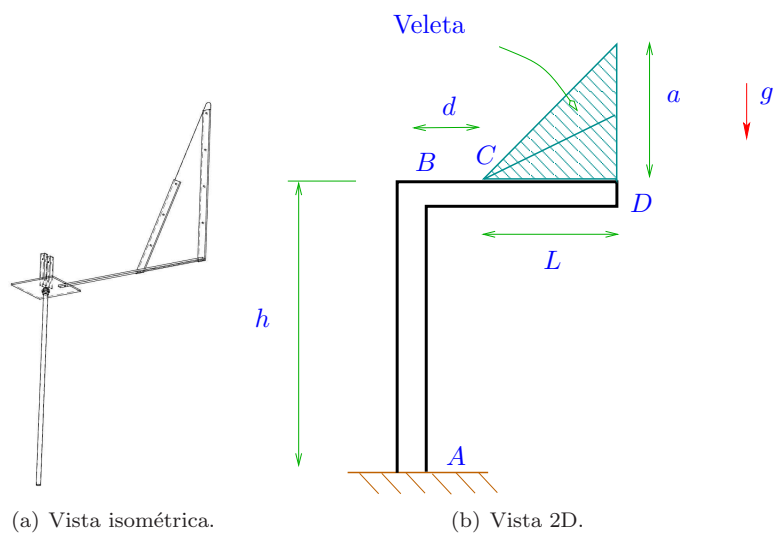


Figura 11.23: Veleta.

Capítulo 12

Introducción a la teoría de la elasticidad lineal elástica

Tal como se indicó en la introducción de este texto, hoy en día hay una serie de métodos numéricos y programas comerciales que permiten estudiar el estado de esfuerzos y las deformaciones tanto en problemas bidimensionales como en casos en que consideremos cuerpos tridimensionales de geometría compleja. Dichos programas lo que hacen es determinar soluciones aproximadas del problema de valor de frontera en mecánica de sólidos, y han sido en particular útiles y exitosos en el caso de cuerpos que presentan pequeñas deformaciones y comportamiento lineal. Es importante pues conocer cual es el problema de valor de frontera que se debe solucionar en elasticidad lineal, como una forma de ser capaces de entender mejor que se puede obtener con dichos métodos computacionales, así como ser capaces de ver las limitantes de estos métodos.

En este capítulo repasaremos varios conceptos vistos anteriormente, tales como el concepto del esfuerzo, de las deformaciones, las ecuaciones constitutivas, las ecuaciones de equilibrio para el caso general 3D y estudiaremos algunos métodos de solución exacta de problemas de valor de frontera. La diferencia es que aquí estudiaremos estos temas en el caso general tridimensional y haciendo uso más intensivo de las herramientas del cálculo vectorial.

12.1. Notación. Notación indicial. Vectores y tensores

La notación usada en este capítulo difiere de la usada en los capítulos anteriores y es como sigue:

- Escalares: Los escalares los denotaremos de forma preferente con letras Griegas.
- Vectores: Los vectores los denotaremos en general con letras Latinas minúscu-

las en negritas, como por ejemplo \mathbf{u} , \mathbf{v} , etc. Sus componente las denotaremos con un índice, es decir, por ejemplo, u_i , $i = 1, 2, 3$ representaría una de las tres componentes del vector \mathbf{u} .

- Los tensores de segundo orden los denotaremos en general con letras Latinas mayúsculas en negritas, como por ejemplo \mathbf{T} , \mathbf{M} , etc. Sus componentes las denotaremos con dos subíndices, por ejemplo T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ sería una de las 9 componentes del tensor \mathbf{T} .
- Los tensores de cuarto orden los denotaremos con letras cursivas en negritas, como por ejemplo¹ \mathcal{C} sería el tensor de cuarto orden con componentes \mathcal{C}_{ijkl} .
- Los volúmenes de los cuerpos en donde se estudiarán deformaciones, fuerzas, etc. se denotarán con letras cursivas de un formato diferente al anterior, como por ejemplo \mathcal{B} , \mathcal{A} .
- Las superficies (bordes) de los volúmenes de los cuerpos se denotarán como $\partial\mathcal{B}$, $\partial\mathcal{A}$.
- Los vectores unitarios (base Cartesiana) serán denotada como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

12.1.1. Notación indicial

Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n &= b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

que se puede escribir en la forma equivalente

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

En este capítulo la suma anterior u otras similares las representaremos como

$$A_{ij}x_j = b_i. \quad (12.1)$$

Cuando en una expresión hay una repetición (de dos veces) de un índice, se asumirá que dicha repetición indica que hay suma en ese índice, y para nuestro caso la suma irá de 1 a 3. El índice que se repite se llamará índice mudo, en

¹La notacion usada en el pizarrón y en los cuadernos es diferente, cambiando el formato en negritas con el uso de una tilde, como por ejemplo \underline{u} por \mathbf{u} , \underline{T} por \mathbf{T} y $\underline{\mathcal{C}}$ por \mathcal{C} .

tanto que el otro índice se llamará índice libre.

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \\ &= \sum_{i=1}^3 u_i\mathbf{e}_i, \\ &= u_i\mathbf{e}_i\end{aligned}$$

En (12.1) tenemos repetición del índice j , que nos indica suma en j de 1 a 3, en tanto i sería un índice libre, que también puede tomar alternativamente los valores 1, 2 o 3.

Veamos más ejemplos:

- Sea $u_i = B_{ij}v_j$, como se repite el índice j entonces $u_i = \sum_{j=1}^3 B_{ij}v_j$, luego para $i = 1, 2, 3$ tendríamos, respectivamente:

$$\begin{aligned}u_1 &= B_{11}v_1 + B_{12}v_2 + B_{13}v_3, \\ u_2 &= B_{21}v_1 + B_{22}v_2 + B_{23}v_3, \\ u_3 &= B_{31}v_1 + B_{32}v_2 + B_{33}v_3,\end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v}.$$

- Considerémos

$$A_{ij} = B_{jk}C_{kj}. \quad (12.2)$$

La interpretación de la expresión anterior sería

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 B_{ik}C_{kj}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

que si desarrollamos componente a componente nos quedaría como

$$\begin{aligned}A_{11} &= B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} + B_{13}C_{31}, \\ A_{12} &= B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} + B_{13}C_{32}, \\ A_{13} &= B_{11}C_{13} + B_{12}C_{23} + B_{13}C_{33}, \\ A_{21} &= B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} + B_{23}C_{31}, \\ A_{22} &= B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} + B_{23}C_{32}, \\ A_{23} &= B_{21}C_{13} + B_{22}C_{23} + B_{23}C_{33}, \\ A_{31} &= B_{31}C_{11} + B_{32}C_{21} + B_{33}C_{31}, \\ A_{32} &= B_{31}C_{12} + B_{32}C_{22} + B_{33}C_{32}, \\ A_{33} &= B_{31}C_{13} + B_{32}C_{23} + B_{33}C_{33}.\end{aligned}$$

Estas son 9 ecuaciones, y se puede observar que se pueden escribir de la forma alternativa

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

es decir (12.2) vendría a representar en notación indicial la ecuación matricial $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

■ Sea

$$a_i(b_i + c_i), \quad (12.3)$$

vemos que la ecuación anterior es equivalente a

$$a_i b_i + a_i c_i,$$

que es igual a

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3,$$

o sea sería igual a $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, donde \cdot sería el producto punto entre dos vectores.

■ Sea $y_i = A_{ij}x_j$ y $z_i = B_{ij}d_j$ tenemos que determinar $y_i z_i$.

Aquí es necesario hacer la observación que si un índice se repite más de dos veces entonces la expresión no tendría sentido desde el punto de vista de suma. Por otra parte, si un índice es mudo, el índice se puede cambiar por otra letra y el resultado sería el mismo.

Luego al hacer la multiplicación $y_i z_i$ debemos notar que en ambas definiciones tenemos el índice j repetido, por lo que se tendría $A_{ij}x_j B_{ij}d_j$, lo que no tendría sentido desde el punto de vista de una suma. Pero como en la expresión para z_i el índice j es mudo, lo cambiamos por k y nos queda $z_i = B_{ik}d_k$ dando el mismo resultado inicial, luego $y_i z_i$ nos quedaría

$$A_{ij}x_j B_{ik}d_k,$$

en donde podemos apreciar que habría suma en j y también en k de 1 a 3.

La expresión anterior representa el producto $(\mathbf{Ax}) \cdot (\mathbf{Bd})$.

- Veamos el caso $A_{ij}x_i c_i$. Aquí vemos que el índice i se repite tres veces de modo que en esta expresión no se puede decir que hay suma en i .
- La expresión A_{ii} , en donde para un solo tensor tenemos una repetición de índice, es equivalente a

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

- Transformar

$$E_{kk} = A_{im}A_{jm}A_{ij} \quad (12.4)$$

en *notación directa* es decir en notación en negritas.

La traza de un tensor se define como

$$\text{tr } \mathbf{A} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{k=1}^3 A_{kk} = A_{kk}.$$

La transpuesta de un tensor se denota como \mathbf{A}^T , es decir si A_{ij} son las componentes de \mathbf{A} , entonces A_{ji} serían las componentes de \mathbf{A}^T .

Luego para (12.4) se tiene $E_{kk} \Leftrightarrow \text{tr } \mathbf{E}$, por otra parte $A_{im}A_{jm} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ (esto se deja como ejercicio). Para un tensor \mathbf{C} y \mathbf{D} tenemos $C_{ij}D_{kj}$ es equivalente a $\mathbf{C}\mathbf{D}^T$, por tanto $C_{ij}D_{ij}$ sería equivalente a $\text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{D}^T)$. Luego $E_{kk} = A_{im}A_{jm}A_{ij}$ sería equivalente a

$$\text{tr } \mathbf{E} = \text{tr}[(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{A}^T].$$

- Sustituir $A_{ij} = B_{ik}C_{kj}$ en $\phi = A_{mk}C_{mk}$.

Al reemplazar tenemos que tener cuidado de que los índices se deben repetir solo una vez, luego en lugar de usar $B_{ik}C_{kj}$ usamos $A_{ij} = B_{in}C_{nj}$ considerando que k y n son índices mudos, luego para ϕ tenemos

$$\phi = B_{mn}C_{nk}C_{mk},$$

que en notación directa queda como

$$\phi = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{C}^T) \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^T).$$

- Cuando un índice se repite y no queremos que se interprete como suma se coloca una línea bajo los índices, por ejemplo:

$$u_{\underline{i}}v_{\underline{i}} = \begin{cases} u_1v_1 & \text{si } i = 1 \\ u_2v_2 & \text{si } i = 2 \\ u_3v_3 & \text{si } i = 3 \end{cases},$$

es decir aquí no hay suma.

12.1.2. Símbolos especiales

Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (12.5)$$

Tensor de Identidad: El tensor de identidad de segundo orden se denotará como \mathbf{I} y se tiene que

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y en notación indicial el tensor de identidad es simplemente el Delta de Kronecker es decir

$$\mathbf{I} \Leftrightarrow \delta_{ij}.$$

Considérese el siguiente producto $A_{ri}\delta_{ij}$, que sería igual a

$$A_{r1}\delta_{1j} + A_{r2}\delta_{2j} + A_{r3}\delta_{3j} = \begin{cases} A_{r1} & \text{si } j = 1 \\ A_{r2} & \text{si } j = 2 \\ A_{r3} & \text{si } j = 3 \end{cases},$$

que sería equivalente a A_{rj} .

Otro ejemplo es $\delta_{ij}v_iv_j = v_iv_i$.

La regla es entonces: Si el índice de un vector o tensor se repite con el índice del Delta de Kronecker, entonces se reemplaza dicho índice por el índice libre del Delta de Kronecker.

Símbolo de la permutación: Se define

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ Orden cíclico} \\ 0 & i, j, k \text{ Se repite un índice} \\ -1 & i, j, k \text{ Orden anticíclico} \end{cases}. \quad (12.6)$$

Notación para derivadas parciales:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i}. \quad (12.7)$$

Coordenadas: Reemplazaremos los símbolos para las coordenadas x, y, z por x_1, x_2, x_3 y los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ por \underline{e}_i , $i = 1, 2, 3$.

Producto punto: En notación indicial se tiene

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \Leftrightarrow u_iv_i.$$

Producto cruz o vectorial: En notación indicial se tiene

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk}u_iv_j\mathbf{e}_k. \quad (12.8)$$

Norma de in vector: La norma de un vector se denotará de manera alternativa como $\|\mathbf{u}\|$ o como $|\mathbf{u}|$, y en notación indicial quedaría como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_iu_i}.$$

12.1.3. Tensor de segundo orden: Definición, Producto tensorial y la doble contracción

Un tensor de segundo orden se puede definir como una transformación lineal que toma un vector y lo transforma en otro vector. Sea \mathbb{E} el espacio de los vectores, si $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ y si \mathbf{A} es un tensor de segundo orden, entonces $\mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathbb{E}$.

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$, se define el producto \otimes como

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}. \quad (12.9)$$

De la definición anterior es posible ver entonces que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix},$$

o sea

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \Leftrightarrow u_i v_j.$$

Finalmente tenemos que si $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$ entonces

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

De las expresiones anteriores podemos ver que tal como $\{\mathbf{e}_i\}$ es la base de vectores unitarios para el espacio vectorial tenemos que $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ sería la base para el espacio de tensores de segundo orden.

Sean los vectores de la base $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ y el vector unitario arbitrario \mathbf{n} , usando (12.9) tenemos que

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_i,$$

pero

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_j \cdot (n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3) = n_j,$$

puesto que $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base ortogonal, luego

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} &= n_j \mathbf{e}_i, \\ \Rightarrow T_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} &= T_{ij} n_j \mathbf{e}_i, \\ \Leftrightarrow (T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} &= T_{ij} n_j \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

pero $T_{ij} n_j$ sería la componente i del vector $\mathbf{T}\mathbf{n}$ y por tanto $T_{ij} n_j \mathbf{e}_i$ sería simplemente la representación de dicho vector en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, luego de la expresión anterior tenemos

$$(T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{n} = \mathbf{T}\mathbf{n},$$

que tiene que ser válido para cualquier \mathbf{n} unitario por lo que se obtiene finalmente la representación para un tensor de segundo orden

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (12.10)$$

luego $\mathbf{T} \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

La doble contracción, que se denota como $:$ se define para dos tensores como:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = A_{ij} B_{ij}. \quad (12.11)$$

12.1.4. Cambio de base para vectores

Un mismo vector \mathbf{v} (caso plano) se puede escribir en dos sistemas de coordenadas $x - y$ e $x' - y'$, tal como se muestra en la Figura 12.1, es decir

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2.$$

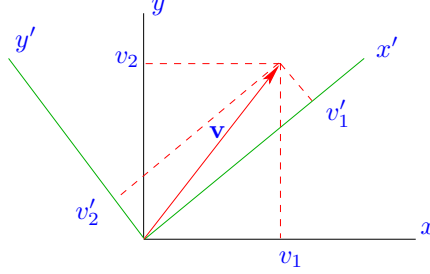


Figura 12.1: Vector y la influencia de un cambio del sistema de coordenadas en sus componentes.

Teniendo la idea del caso 2D veamos ahora el caso 3D, donde sean $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$ dos bases de vectores unitarios para el mismo espacio vectorial \mathbb{E} . Escribamos los vectores \mathbf{e}'_i en el sistema $\{\mathbf{e}_i\}$, tenemos

$$\mathbf{e}'_1 = Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{12}\mathbf{e}_2 + Q_{13}\mathbf{e}_3, \quad (12.12)$$

$$\mathbf{e}'_2 = Q_{21}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{23}\mathbf{e}_3, \quad (12.13)$$

$$\mathbf{e}'_3 = Q_{31}\mathbf{e}_1 + Q_{32}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3, \quad (12.14)$$

donde $Q_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ es decir como el coseno del ángulo entre los ejes² x'_i y x_j .

La base $\{\mathbf{e}'_i\}$ es ortonormal, luego

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k = \delta_{ik}. \quad (12.15)$$

De (12.12)-(12.14) tenemos $\mathbf{e}'_i = Q_{ij}\mathbf{e}_j$, luego de (12.15) se tiene que

$$(Q_{ij}\mathbf{e}_j) \cdot (Q_{kl}\mathbf{e}_l) = \delta_{ik} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{ij}Q_{kl}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) = \delta_{ik},$$

pero $\{\mathbf{e}_i\}$ también es una base ortonormal, luego $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{jl}$, por lo que la ecuación anterior nos queda como $Q_{ij}Q_{kl}\delta_{jl} = \delta_{ik}$, lo que nos da finalmente

$$Q_{ij}Q_{kj} = \delta_{ik} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad (12.16)$$

o sea la matriz con componentes Q_{ij} es ortogonal.

²En algunos textos se define como $\cos(x_i, x'_j)$.

De manera similar se puede probar que

$$Q_{ij}Q_{ik} = \delta_{jk} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (12.17)$$

Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$, se tiene $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{v} = v'_i \mathbf{e}'_i$, luego

$$\begin{aligned} v_i \mathbf{e}_i = v'_j \mathbf{e}'_j &\Leftrightarrow v_i \mathbf{e}_i = v'_j Q_{jk} \mathbf{e}_k, \\ \Leftrightarrow v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l = v'_j Q_{jk} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l &\Leftrightarrow v_i \delta_{il} = v'_j Q_{jk} \delta_{kl}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$v_l = v'_j Q_{jl} \quad (12.18)$$

usando $Q_{jk} \delta_{kl} = Q_{jl}$.

De (12.18) se puede obtener una relación adicional, para ello multipliquemos los dos lados de (12.18) por Q_{kl} , nos queda

$$v_l Q_{kl} = v'_j Q_{jl} Q_{kl},$$

pero de (12.16) $Q_{jl} Q_{kl} = \delta_{jk}$, luego la ecuación anterior queda como $v_l Q_{kl} = v'_j \delta_{jk}$ que es equivalente a

$$v'_k = v_l Q_{kl}. \quad (12.19)$$

12.1.5. Transformación de las componentes de un tensor de segundo orden

Sean nuevamente $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}'_i\}$ dos bases de vectores unitarios, y sea \mathbf{T} un tensor de segundo orden. Sean $\mathbf{n} \in \mathbb{E}$ y $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \in \mathbb{E}$, sean t_i, T_{ij} y n_j las componentes de estos vectores y del tensor en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, y sean t'_i, T'_{ij} y n'_j las componentes de los mismos vectores y del mismo tensor en la base $\{\mathbf{e}'_i\}$. De la relación

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (12.20)$$

tenemos en notación indicial

$$t_i = T_{ij} n_j \quad t'_i = T'_{ij} n'_j. \quad (12.21)$$

Pero de (12.19) tenemos que $t'_i = Q_{ip} t_p$ y $n'_j = Q_{jk} n_k$, luego en (12.21)₂ se obtiene

$$Q_{ip} t_p = T'_{ij} Q_{jk} n_k, \quad (12.22)$$

pero de (12.21)₁ tenemos que $t_p = T_{pm} n_m$, por lo que (12.22) queda como

$$Q_{ip} T_{pm} n_m = T'_{ij} Q_{jk} n_k$$

y multiplicando la ecuación anterior por ambos lados por Q_{ir} se llega a

$$Q_{ir} Q_{ip} T_{pm} n_m = Q_{ir} T'_{ij} Q_{jk} n_k$$

y de (12.17) considerando que $Q_{ir} Q_{ip} = \delta_{rp}$ tenemos entonces

$$\delta_{rp} T_{pm} n_m = Q_{ir} Q_{jk} T'_{ij} n_k \Leftrightarrow T_{rm} n_m = Q_{ir} Q_{jk} T'_{ij} n_k.$$

Pero en la última ecuación los índices m, k son mudos, luego cambiando el índice k por m en el lado derecho de la segunda ecuación se tiene

$$T_{rm}n_m = Q_{ir}Q_{jm}T'_{ij}n_m$$

que sería válida para cualquier n_m , por lo que se obtiene finalmente

$$T_{rm} = Q_{ir}Q_{jm}T'_{ij}, \quad (12.23)$$

y de una manera similar se puede probar que

$$T'_{ij} = Q_{ip}Q_{jn}T_{pn}. \quad (12.24)$$

12.1.6. Operadores diferenciales en coordenadas Cartesianas

El operador gradiente

El operador gradiente se denotará como ∇ , sean

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3) && \text{Campo escalar,} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) && \text{Campo vectorial,} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(x_1, x_2, x_3) && \text{Campo tensorial,} \end{aligned}$$

luego el operador gradiente nos queda como

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} \Leftrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3, \\ \nabla\mathbf{v} &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}} \Leftrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \end{aligned} \quad (12.25)$$

$$\nabla\mathbf{T} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{x}} \Leftrightarrow \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k. \quad (12.26)$$

Operador divergencia

El operador divergencia se denotará como $\nabla \cdot$ o como div , luego para un campo vectorial \mathbf{v} y para un campo tensorial \mathbf{T} el operador divergencia se definiría como:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad (12.27)$$

$$\text{div } \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\mathbf{e}_j. \quad (12.28)$$

Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia en su forma usual (considerando su notación usual también) tiene la forma:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \vec{f} \cdot \vec{n} \, da = \int_{\mathcal{B}} \text{div } \vec{f} \, dV.$$

Considerando la nueva notación tenemos que

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, da \Leftrightarrow \int_{\partial \mathcal{B}} f_i n_i \, da$$

luego el teorema de la divergencia aplicado a un campo vectorial queda como

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV \Leftrightarrow \int_{\partial \mathcal{B}} f_i n_i \, da = \int_{\mathcal{B}} f_{i,i} \, dV. \quad (12.29)$$

En el caso de un campo tensorial de segundo orden tenemos

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{T} \mathbf{n} \, da \Leftrightarrow \int_{\partial \mathcal{B}} T_{ij} n_j \, da,$$

luego el teorema de la divergencia aplicado a un tensor de segundo orden quedaría como

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{T} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \mathbf{T}^T \, dV \Leftrightarrow \int_{\partial \mathcal{B}} T_{ij} n_j \, da = \int_{\mathcal{B}} T_{ij,j} \, dV, \quad (12.30)$$

en donde se define $\operatorname{div} \mathbf{T}$ como $T_{ij,i}$, motivo por el cual en la expresión anterior aparece la transpuesta del tensor \mathbf{T} .

12.2. Fuerzas y esfuerzos

En la Sección 2.2.2 hablamos en detalle de las fuerzas externas las cuales las clasificamos en fuerzas de superficie \mathbf{t} y fuerzas de cuerpo \mathbf{b} . En la Secciones 3.2 y 3.3 también hablamos de las fuerzas internas, y como estas se podían representar por medio de un campo vectorial que ahora denotamos como \mathbf{t} , que tiene unidades de fuerza por área. Como habíamos visto en la Sección 3.3 este vector debe depender no solo de la posición \mathbf{x} en el cuerpo, sino además de manera especial en el vector normal \mathbf{n} , que era el vector normal a la superficie o también se podría identificar como el vector normal a un punto de una superficie de corte imaginario; esta es la hipótesis de Cauchy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}). \quad (12.31)$$

Veamos nuevamente la justificación de esta hipótesis: En la Figura 12.2 tenemos dos cuerpos \mathcal{A} y \mathcal{B} en contacto debido a un agente externo que es mostrado por medio de la flecha azul en \mathcal{A} . El concepto de fuerza de superficie \mathbf{t} surge ante la necesidad de estudiar de manera separada (para simplificar el problema original) el comportamiento de, por ejemplo, el cuerpo \mathcal{B} , para lo cual el ‘efecto’ de \mathcal{A} sobre \mathcal{B} se manifestaría de manera simplificada por medio de una fuerza de contacto por unidad de superficie \mathbf{t} causada por \mathcal{A} sobre \mathcal{B} como se puede apreciar en la Figura 12.2 (derecha). La fuerza \mathbf{t} llamada también vector de esfuerzos, en principio podría depender del tiempo t , y en general también debería depender de la posición \mathbf{x} a lo largo y ancho de la superficie de contacto.

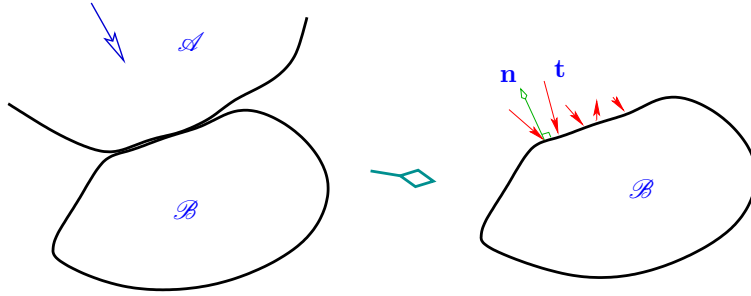


Figura 12.2: Dos cuerpos en contacto y el concepto de fuerza de superficie.

Nótese que en general el vector \mathbf{t} no va a tener la misma dirección que el vector unitario normal a la superficie \mathbf{n} como se puede apreciar en la misma figura.

El concepto de vector de esfuerzos se puede extender ahora para considerar las cargas internas en un cuerpo. La idea es que tal como la interacción de \mathcal{B} con otros cuerpos se puede modelar por medio de \mathbf{t} , la interacción de las partes ‘internas’ de \mathcal{B} . Considérese la Figura 12.3, en donde se tiene un cuerpo \mathcal{B} bajo la acción de fuerzas externas que por simplicidad no se muestran aquí. El cuerpo

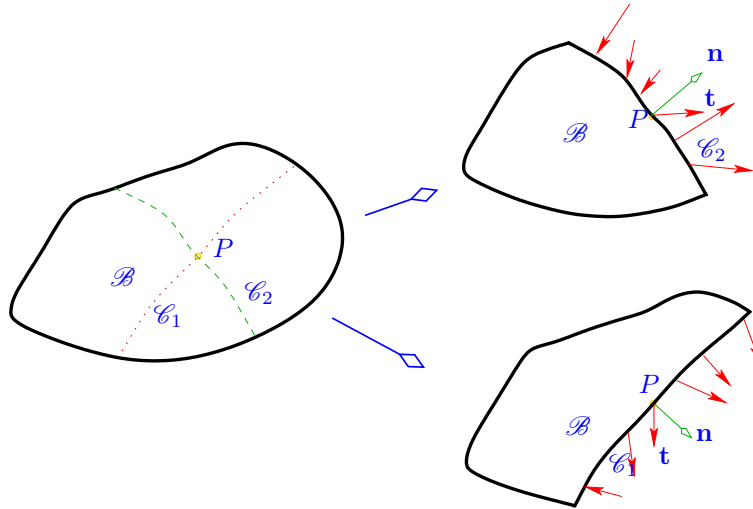


Figura 12.3: Cuerpo con cortes imaginarios. Vector de esfuerzos como modelo de carga interna.

\mathcal{B} estaría en equilibrio. Imaginemos ahora se hace dos cortes imaginarios \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 tal como se discutió en el Capítulo 3. La hipótesis de Cauchy es que si son cortes imaginarios, cada parte que se extrae debería también estar en equilibrio,

lo que se logra si y solo si en cada superficie de corte aparece una distribución de carga \mathbf{t} . Ahora, para un mismo punto P hay infinidad de cortes que pasan por dicho punto, y para cada uno de esos cortes la distribución para \mathbf{t} sería diferente, lo que implica que para ese punto \mathbf{t} no solo debería depender del tiempo t y de la posición \mathbf{x} , sino también de la forma del corte imaginario, y el parámetro más simple de usar para incorporar la ‘forma’ del corte sería, por ejemplo, incluir el vector normal \mathbf{n} como variable para determinar \mathbf{t} como aparece en (12.31).

La primera ley del movimiento de Euler (en el caso cuasi-estático) es:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}, \quad (12.32)$$

donde el término $\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \, da$ sería la suma de las fuerzas de superficie actuando en la superficie $\partial\mathcal{B}$ de un cuerpo \mathcal{B} y $\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dV$ sería la suma de las fuerzas de cuerpo considerando la densidad de fuerzas de cuerpo \mathbf{b} por unidad de masa, donde ρ es la densidad de masa. La primera ley del movimiento de Euler expresa en una forma general para cuerpos continuos que la suma de fuerzas sobre un cuerpo, considerando las fuerzas debido a reacciones por apoyos, debe ser cero.

La segunda ley del movimiento de Euler (en el caso cuasi-estático) es:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{t} \, da + \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \rho \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}, \quad (12.33)$$

donde $\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{t} \, da$ sería la suma de momentos (torques) debido a las fuerzas de superficie y $\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \rho \mathbf{b} \, dV$ sería la suma de momentos debido a las fuerzas de cuerpo. Esta segunda ley indica entonces que la suma de momentos debido tanto a las fuerzas externas como a las provenientes de los apoyos debe ser cero.

En física se enseña que la acción y reacción sería un principio, es decir se asumiría como cierto sin demostrarlo, sin embargo se puede obtener este ‘principio’ a partir de la primera ley del movimiento de Euler. No se hará esto aquí por brevedad. Acción y reacción usando nuestra notación básicamente quedaría como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}), \quad (12.34)$$

y la forma gráfica de esta ecuación se muestra en la Figura 12.4.

12.2.1. Tensor de esfuerzos

Considerémos un cuerpo \mathcal{B} sometido a fuerzas externas (que no se muestran para simplificar la figura), al cual se le extrae un elemento diferencial como el mostrado de forma ampliada en el lado derecho de la Figura 12.5. El elemento diferencial no es un cubo sino un tetrahedro con tres caras o superficies. El tetrahedro tiene un volumen \mathcal{V} , una superficie principal \mathcal{S} con normal \mathbf{n} , y tres superficies \mathcal{S}_i con normales \mathbf{e}_i $i = 1, 2, 3$.

En cada cara del tetrahedro tenemos un vector de esfuerzos, que se asume constante en dicha cara debido a que las caras se asumen como muy pequeñas.

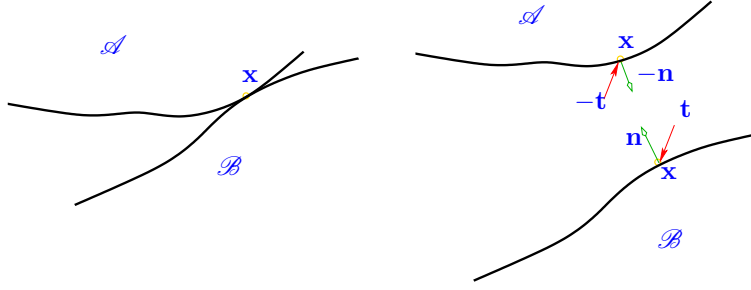


Figura 12.4: Acción y reacción.

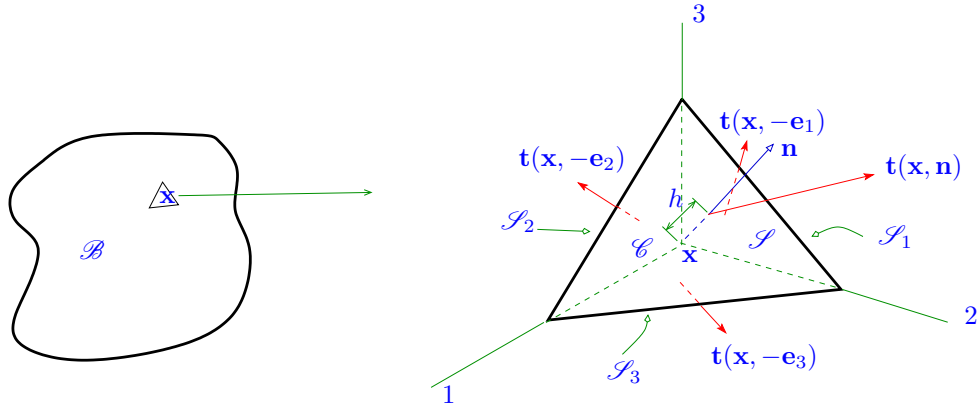


Figura 12.5: Fuerzas internas en un cuerpo y su relación con el ‘tensor’ de esfuerzos.

En la cara principal tenemos $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, en la cara con normal \mathbf{n}_i tenemos los vectores $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Aplicando la primera ley del movimiento de Euler (12.32) al tetrahedro \mathcal{C} tenemos

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \mathbf{t} \, da + \int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}. \quad (12.35)$$

Para $\int_{\partial\mathcal{C}} \mathbf{t} \, da$ tenemos

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \mathbf{t} \, da = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, da + \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1) \, da + \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_2) \, da + \int_{\mathcal{S}_3} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_3) \, da. \quad (12.36)$$

Pero para un tetrahedro pequeño tenemos que

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, da \approx \mathcal{S} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}), \quad \int_{\mathcal{S}_i} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i) \, da \approx \mathcal{S}_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (12.37)$$

donde de (12.34) se cumple que $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$.

Para $\int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{b} dV$ se tiene la aproximación

$$\int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{b} dV \approx \frac{1}{3} \rho \mathbf{b} h \mathcal{S}, \quad (12.38)$$

donde $\frac{1}{3} h \mathcal{S}$ sería el volumen del tetrahedro.

Usando todos estos resultados y aproximaciones en (12.35) se obtiene:

$$\mathcal{S} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^3 \mathcal{S}_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) + \frac{1}{3} \rho \mathbf{b} h \mathcal{S} = 0. \quad (12.39)$$

Pero el área \mathcal{S}_i se puede obtener como la ‘proyección’ de \mathcal{S} en la dirección i , o sea

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = \mathcal{S} n_i, \quad (12.40)$$

donde n_i , $i = 1, 2, 3$ es la componente de \mathbf{n} en la dirección i .

Como resultado en (12.39) tenemos

$$\mathcal{S} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \mathcal{S} \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) + \frac{1}{3} \rho \mathbf{b} h \mathcal{S} = 0,$$

luego eliminando el factor común \mathcal{S} se obtiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) + \frac{1}{3} \rho \mathbf{b} h = 0,$$

y tomando el límite $h \rightarrow 0$ el tetrahedro efectivamente se transformaría en el punto \mathbf{x} . Luego como en ese caso $\frac{1}{3} \rho \mathbf{b} h \rightarrow 0$ finalmente de la primera ley de movimiento de Euler se obtiene:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) n_i. \quad (12.41)$$

Cada vector $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ tiene 3 componentes en las direcciones 1, 2, 3. Sea³

$$T_{ji} = t_j(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \quad (12.42)$$

luego de (12.41) se tendría

$$t_i(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = T_{ji} n_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n}, \quad (12.43)$$

donde \mathbf{T} se conoce como el tensor de esfuerzos de Cauchy, definido como⁴

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (12.44)$$

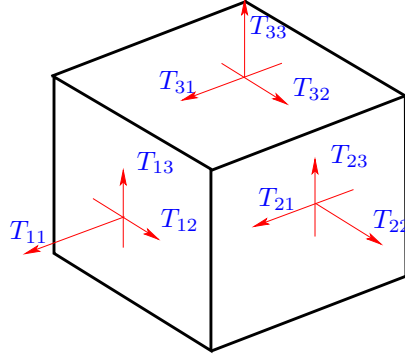


Figura 12.6: Representación del tensor de esfuerzos caso 3D.

donde T_{ii} son las componentes normales del tensor de esfuerzos y T_{ij} , $i \neq j$ serían las componentes en cortes de dicho tensor. En la Figura 12.6 tenemos una representación del tensor de esfuerzos (caso coordenadas Cartesianas) en 3D para un cubo diferencial. La notación a usar es la siguiente, para T_{ij} el índice i indicaría el eje que atraviesa el plano i , en tanto que j indicaría la dirección de la componente.

Finalmente se muestra algunas de las diversas notaciones con las que aparece el tensor de esfuerzos:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

12.3. Ecuaciones de equilibrio de Cauchy

En el caso estático la suma de todas las fuerzas actuando en un cuerpo \mathcal{B} deben ser igual a cero, si \mathbf{t} simboliza ahora las fuerzas de superficie y \mathbf{b} las fuerzas de cuerpo, transformando las sumas en integrales de superficie y volumen para el equilibrio del cuerpo completo tenemos:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}. \quad (12.45)$$

Pero $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$, luego de la ecuación anterior tenemos

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}\mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \, dV = \mathbf{0}. \quad (12.46)$$

³En alguna literatura se define alternativamente como $T_{ij} = t_j(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$.

⁴Se probará después que este tensor es simétrico.

Pero por el uso del teorema de la divergencia se tiene que $\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T} \mathbf{n} da = \int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{T}^T dV$, luego (12.35) quedaría como

$$\int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} dV = \mathbf{0},$$

que tiene que ser satisfecha para cualquier volumen \mathcal{B} , que da como resultado:

$$\text{div } \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (12.47)$$

que es conocida como la ecuación de equilibrio o primera ley del movimiento de Cauchy.

Se estudiará ahora la segunda ley del movimiento de Euler (12.33) mediante el uso de (12.43). La segunda ley tenía la forma

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{t} da + \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \rho \mathbf{b} dV = \mathbf{0},$$

y mediante el uso de (12.8) quedaría como

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \epsilon_{ijk}(x_i - x_{o_i})t_j \mathbf{e}_k da + \int_{\mathcal{B}} \epsilon_{ijk}(x_i - x_{o_i})\rho b_j \mathbf{e}_k dV = \mathbf{0}, \quad (12.48)$$

pero de (12.43) se tiene que $t_j = T_{jm}n_m$, luego $\int_{\partial\mathcal{B}} \epsilon_{ijk}(x_i - x_{o_i})t_j \mathbf{e}_k da$ mediante el uso del teorema de la divergencia (12.30) queda como⁵:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{B}} \epsilon_{ijk}(x_i - x_{o_i})t_j n_m da \mathbf{e}_k &= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial x_m} [\epsilon_{ijk}(x_i - x_{o_i})t_j] dV \mathbf{e}_k, \\ &= \int_{\mathcal{B}} \epsilon_{ijk} [\delta_{im} T_{jm} + (x_i - x_{o_i}) T_{jm,m}] dV \mathbf{e}_k, \end{aligned} \quad (12.49)$$

luego usando (12.49) en (12.48) considerando que $\delta_{im} T_{jm} = T_{ji}$ se obtiene:

$$\int_{\mathcal{B}} \epsilon_{ijk} T_{ji} + \epsilon_{ijk} [(x_i - x_{o_i})(T_{jm,m} + \rho b_j)] dV \mathbf{e}_k = \mathbf{0},$$

que considerando (12.47) (que en notación indicial quedaría como $T_{jm,m} + \rho b_j = 0$) queda finalmente como

$$\int_{\mathcal{B}} \epsilon_{ijk} T_{ji} dV \mathbf{e}_k = \mathbf{0}.$$

Esta ecuación debe ser satisfecha para cualquier cuerpo \mathcal{B} por lo que se debe cumplir que

$$\epsilon_{ijk} T_{ji} \mathbf{e}_k = \mathbf{0}. \quad (12.50)$$

⁵Nótese que en (12.49) dado que los vectores unitarios \mathbf{e}_k son constantes, se pueden extraer de las integrales.

Para $k = 1, 2, 3$ tenemos:

$$\begin{aligned} k = 1 &\Rightarrow \epsilon_{321}T_{23} + \epsilon_{231}T_{32} = 0 \Rightarrow T_{23} = T_{32}, \\ k = 2 &\Rightarrow \epsilon_{132}T_{31} + \epsilon_{312}T_{13} = 0 \Rightarrow T_{31} = T_{13}, \\ k = 3 &\Rightarrow \epsilon_{123}T_{21} + \epsilon_{213}T_{12} = 0 \Rightarrow T_{21} = T_{12}, \end{aligned}$$

es decir

$$T_{ij} = T_{ji} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad (12.51)$$

o sea el tensor de esfuerzos es simétrico.

12.4. Esfuerzos principales

12.4.1. Esfuerzo normal máximo

En la Sección 10.2 se habló de los esfuerzos normales máximos y mínimos y de los esfuerzos de corte máximo para problemas tridimensionales, pero sin indicar como estos se podían obtener. En esta sección veremos con algún detalle este tema.

De la Figura 12.5 teníamos en la superficie \mathcal{S} el vector de esfuerzos $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ y el vector normal \mathbf{n} . En general estos vectores no estarán alineados. El vector $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ lo vamos a descomponer en dos partes, una normal a la superficie, es decir en la dirección de \mathbf{n} , que denotaremos como σ_n , y otra parte tangencial a la superficie que denotaremos como τ , tal como se puede apreciar en la Figura 12.7.

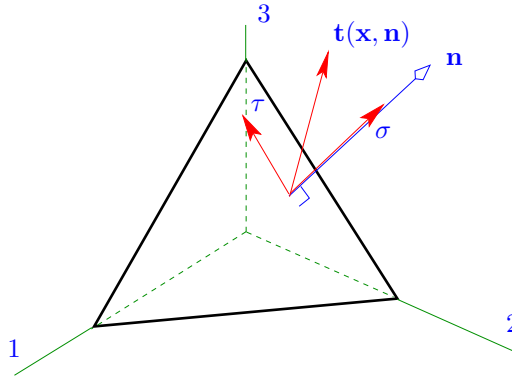


Figura 12.7: Descomposición del vector de esfuerzos en una parte normal y otra tangencial.

La componente σ_n la podemos obtener simplemente como

$$\sigma_n = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (12.52)$$

La pregunta ahora es: ¿Cual debería ser \mathbf{n} de forma tal de que σ_n sea máximo, y cuales serían los valores de σ_n en dicho caso? Esta pregunta es similar a la que se hizo en la Sección 9.1 cuando en el problema plano preguntábamos lo mismo para el ángulo θ del corte imaginario oblicuo.

De (12.43) tenemos que $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$, de modo que en (12.52) tenemos que

$$\sigma_n = (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (12.53)$$

que en notación indicial es igual a

$$\sigma_n = T_{ij}n_jn_i. \quad (12.54)$$

Es esta función la que debemos maximizar (minimizar) en términos de n_k , recordando que \mathbf{n} debe ser unitario, que implica decir que $\|\mathbf{n}\| = 1$, que es equivalente a agregar la restricción

$$n_jn_j = 1. \quad (12.55)$$

Para maximizar (minimizar) (12.54) con (12.55) tenemos que usar multiplicadores de Lagrange, de modo que ahora buscamos maximizar la función H definida como

$$H(n_1, n_2, n_3) = T_{ij}n_jn_i + \lambda(n_jn_j - 1), \quad (12.56)$$

donde λ es el multiplicador.

Los máximos, mínimos o punto de inflexión se buscan de $\frac{\partial H}{\partial n_k} = 0$, $k = 1, 2, 3$, y de (12.56) tenemos que esto es equivalente a solucionar

$$T_{ij}(\delta_{jk}n_i + n_j\delta_{ik}) + 2\lambda n_j\delta_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (12.57)$$

en donde se ha usado el resultado $\frac{\partial n_m}{\partial n_p} = \delta_{mp}$. Se puede demostrar (y se deja como ejercicio) que $T_{ij}\delta_{jk}n_i = T_{ik}n_i$, $T_{ij}n_j\delta_{ik} = T_{kj}n_j$ y $n_j\delta_{jk} = n_k$, de modo que de (12.57) tenemos

$$T_{ik}n_i + T_{kj}n_j + 2\lambda n_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Pero en la expresión anterior i, j son índices mudos, de modo que en particular reemplazamos en el segundo término j por i y tenemos por tanto

$$T_{ik}n_i + T_{ki}n_i + 2\lambda n_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Como el tensor de esfuerzos es simétrico entonces $T_{ik} = T_{ki}$ y reemplazando y simplificando se llega a

$$T_{ki}n_i + \lambda n_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (12.58)$$

que es equivalente a decir que

$$\mathbf{T}\mathbf{n} + \lambda\mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Si definimos $\sigma = -\lambda$ la ecuación anterior queda como

$$(\mathbf{T} - \sigma\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (12.59)$$

en donde \mathbf{I} es la matriz de identidad. Este problema es uno de valor propio, esta ecuación tiene soluciones no triviales si

$$\det(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) = 0, \quad (12.60)$$

de donde se obtiene la ecuación cúbica para σ

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (12.61)$$

donde

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33}, \quad (12.62)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr} \mathbf{T}^2] = T_{11}T_{22} + T_{11}T_{33} + T_{22}T_{33} - T_{12}^2 - T_{13}^2 - T_{23}^2, \quad (12.63)$$

$$I_3 = \det \mathbf{T} = T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{13}T_{23} - T_{13}^2T_{22} - T_{11}T_{23}^2 - T_{12}^2T_{33}, \quad (12.64)$$

en donde I_i $i = 1, 2, 3$ son llamados los invariantes de \mathbf{T} y $\text{tr} \mathbf{T}$ es la traza del tensor \mathbf{T} .

La ecuación (12.60) tiene tres posibles soluciones y dado que \mathbf{T} es simétrico estas tres soluciones son reales. Estos tres valores, que denotamos como σ_i , $i = 1, 2, 3$, son precisamente los valores principales del tensor de esfuerzos \mathbf{T} . Uno de estos valores, que podemos llamar σ_1 , será el máximo (considerando el signo), otro σ_2 será un valor intermedio y σ_3 el valor mínimo para los esfuerzos principales, es decir $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Para cada σ_i de (12.59) tendremos un vector propio \mathbf{n} , que lo podemos denotar como \mathbf{n}^i y que se calcularía de

$$(\mathbf{T} - \sigma_i \mathbf{I}) \mathbf{n}^i = \mathbf{0}, \quad \text{no hay suma en } i. \quad (12.65)$$

Los tres vectores \mathbf{n}^i , $i = 1, 2, 3$ formarían una base ortonormal, luego si alineamos los ejes coordenados respecto a estos vectores \mathbf{n}^i , las componentes de \mathbf{T} se transformarían como

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

es decir la matriz con diagonal σ_i , $i = 1, 2, 3$ no es más que el mismo tensor \mathbf{T} , pero escrito en un sistema de coordenadas alternativo, en donde los ejes se han alineado con los vectores \mathbf{n}^i . Nótese en particular que en este sistema de coordenadas el tensor de esfuerzos solo tiene componente normal y no hay componentes en corte. Compárese estos resultados y conceptos con los vistos en la Sección 9.1.

Ejemplo de cálculo de esfuerzos principales y direcciones principales

Sea $\begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$, de (12.62)-(12.64) se tiene que $I_1 = 17$, $I_2 = -1$ e $I_3 = -502$, luego resolviendo (12.61) se llega a

$$\sigma_1 = 14,765 \quad \sigma_2 = 7,05448 \quad \sigma_3 = -4,81952.$$

Para encontrar $\overset{1}{\mathbf{n}}$, $\overset{2}{\mathbf{n}}$ y $\overset{3}{\mathbf{n}}$ asociados a σ_1 , σ_2 y σ_3 se resuelve $(\mathbf{T} - \sigma_i \mathbf{I}) \overset{i}{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ como sigue:

Caso $\sigma_1 = 14,765$: Reemplazando en (12.65) se tiene

$$\begin{pmatrix} -4,765 & 4 & 0 \\ 4 & -4,765 & -5 \\ 0 & -5 & -17,765 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{1}{n}_1 \\ \overset{1}{n}_2 \\ \overset{1}{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estas tres ecuaciones lineales para $\overset{1}{n}_j$, $j = 1, 2, 3$ son linealmente dependientes, de manera tal que se escogen dos de estas ecuaciones (dos pares cualquiera), como por ejemplo:

$$\begin{aligned} -4,765 \overset{1}{n}_1 + 4 \overset{1}{n}_2 &= 0, \\ -5 \overset{1}{n}_2 - 17,765 \overset{1}{n}_3 &= 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $\overset{1}{n}_1 = 0,83945 \overset{1}{n}_2$ y $\overset{1}{n}_3 = -0,28145 \overset{1}{n}_2$. Por otra parte $\overset{1}{\mathbf{n}}$ debe ser unitario de manera tal que $\left(\overset{1}{n}_1\right)^2 + \left(\overset{1}{n}_2\right)^2 + \left(\overset{1}{n}_3\right)^2 = 1$, que usando los resultados anteriores queda como

$$\left(\overset{1}{n}_2\right)^2 (0,83945^2 + 1 + 0,28145^2) = 1,$$

de donde se tiene que $\overset{1}{n}_2 = 0,7487$ y $\overset{1}{n}_1 = 0,628508$; $\overset{1}{n}_3 = -0,21073$ o sea

$$\overset{1}{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0,628508 \\ 0,7487 \\ -0,21073 \end{pmatrix}.$$

Caso $\sigma_2 = 7,05448$: Reemplazando en (12.65) se tiene

$$\begin{pmatrix} 2,94552 & 4 & 0 \\ 4 & 2,94552 & -5 \\ 0 & -5 & -10,05448 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{2}{n}_1 \\ \overset{2}{n}_2 \\ \overset{2}{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se escogen dos de estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2,94552 \stackrel{2}{n}_1 + 4 \stackrel{2}{n}_2 &= 0, \\ -5 \stackrel{2}{n}_2 - 10,95448 \stackrel{2}{n}_3 &= 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $\stackrel{2}{n}_1 = -1,35799 \stackrel{2}{n}_2$ y $\stackrel{2}{n}_3 = -0,49729 \stackrel{2}{n}_2$. Por otra parte se tiene que $\left(\stackrel{2}{n}_1\right)^2 + \left(\stackrel{2}{n}_2\right)^2 + \left(\stackrel{2}{n}_3\right)^2 = 1$, que usando los resultados anteriores queda como

$$\left(\stackrel{2}{n}_2\right)^2 (1,35799^2 + 1 + 0,49729^2) = 1,$$

de donde se tiene que $\stackrel{2}{n}_2 = 0,568748$ y $\stackrel{2}{n}_1 = -0,77235$; $\stackrel{2}{n}_3 = -0,28283$ o sea

$$\stackrel{2}{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0,568748 \\ -0,77235 \\ -0,218283 \end{pmatrix}.$$

Caso $\sigma_3 = -4,81952$: Reemplazando en (12.65) se tiene

$$\begin{pmatrix} 14,81952 & 4 & 0 \\ 4 & 14,81952 & -5 \\ 0 & -5 & 1,81952 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \stackrel{3}{n}_1 \\ \stackrel{3}{n}_2 \\ \stackrel{3}{n}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se escogen dos de estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 14,81952 \stackrel{3}{n}_1 + 4 \stackrel{3}{n}_2 &= 0, \\ -5 \stackrel{3}{n}_2 + 1,81952 \stackrel{3}{n}_3 &= 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $\stackrel{3}{n}_1 = -0,26991 \stackrel{3}{n}_2$ y $\stackrel{3}{n}_3 = 2,74797 \stackrel{3}{n}_2$. Por otra parte se tiene que $\left(\stackrel{3}{n}_1\right)^2 + \left(\stackrel{3}{n}_2\right)^2 + \left(\stackrel{3}{n}_3\right)^2 = 1$, que usando los resultados anteriores queda como

$$\left(\stackrel{3}{n}_2\right)^2 (0,26991^2 + 1 + 2,74797^2) = 1,$$

de donde se tiene que $\stackrel{3}{n}_2 = 0,34052$ y $\stackrel{3}{n}_1 = -9,19094 \times 10^{-2}$; $\stackrel{3}{n}_3 = 0,935735$ o sea

$$\stackrel{3}{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} -9,19094 \times 10^{-2} \\ 0,34052 \\ 0,935735 \end{pmatrix}.$$

Matriz ortogonal: Es facil verificar que $\stackrel{i}{\mathbf{n}} \cdot \stackrel{j}{\mathbf{n}} = 0$ si $i \neq j$, o sea $\{\stackrel{k}{\mathbf{n}}\}$ formaría una base ortonormal. Sea la matriz \mathbf{Q} definida como

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \stackrel{1}{n}_1 & \stackrel{1}{n}_2 & \stackrel{1}{n}_3 \\ \stackrel{2}{n}_1 & \stackrel{2}{n}_2 & \stackrel{2}{n}_3 \\ \stackrel{3}{n}_1 & \stackrel{3}{n}_2 & \stackrel{3}{n}_3 \end{pmatrix}. \quad (12.66)$$

Nuevamente es fácil verificar que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. En nuestro caso tenemos que

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0,628508 & 0,7487 & -0,21073 \\ -0,77235 & 0,568748 & -0,28283 \\ -9,19094 \times 10^{-2} & 0,34052 & 0,935735 \end{pmatrix},$$

y se puede probar que $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} \approx \mathbf{I}$.

Este \mathbf{Q} y sus componentes en realidad vienen a representar una transformación de coordenadas para \mathbf{T} , o sea por medio de \mathbf{Q} se estaría viendo el mismo tensor de esfuerzos en un sistema de coordenadas en el cual los ejes se alinean con los vectores $\{\hat{\mathbf{n}}^i\}$. Veamos si se cumple esto, de (12.24) se tenía que

$$T'_{ij} = Q_{ip}Q_{jm}T_{pm} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \approx \begin{pmatrix} 14,765 & 0 & 0 \\ 0 & 7,05442 & 0 \\ 0 & 0 & -4,81953 \end{pmatrix},$$

o sea con este cambio de coordenadas las componentes de \mathbf{T} son tales que solo tenemos componentes normales o axiales para los esfuerzos y no hay componentes en corte: *El tensor de esfuerzos es el mismo pero solo está siendo visto en un sistema de coordenadas diferente*. En general se tiene

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

como se puede apreciar en la Figura 12.8.

12.4.2. Esfuerzo de corte máximo

Lo que nos interesaría hacer ahora es maximizar τ de la descomposición de $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ vista al inicio de esta sección. Es fácil ver ahora que con esto obtendríamos el máximo esfuerzo de corte. La forma como es la descomposición es

$$\tau^2 = \|\mathbf{t}\|^2 - \sigma_n^2. \quad (12.67)$$

Ahora en vez de usar el \mathbf{T} original para calcular $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ usaremos el que se produce al alinear el sistema de ejes coordenados con los vectores $\hat{\mathbf{n}}^i$, en cuyo

caso $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$, y de (12.43) tenemos

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix}, \quad (12.68)$$

de modo que

$$\|\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \quad (12.69)$$

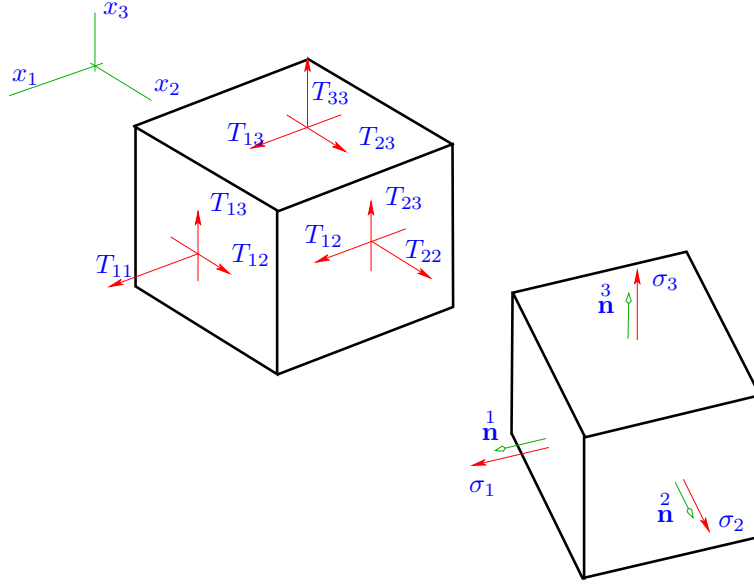


Figura 12.8: Significado de los esfuerzos principales como representación del tensor de esfuerzos en un sistema de coordenadas rotado.

Por otra parte de (12.53) teníamos que $\sigma_n = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ y usando \mathbf{T} en el sistema de coordenadas rotado se llega a

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (12.70)$$

Usando (12.69) y (12.70) en (12.67) tenemos

$$\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2, \quad (12.71)$$

que es la función que ahora queremos maximizar en n_k , $k = 1, 2, 3$.

Nuevamente hay que considerar la restricción que indica que \mathbf{n} es unitario, o sea $n_k n_k = 1$, luego usando el multiplicador de Lagrange γ tenemos que maximizar (minimizar) la función

$$R(n_1, n_2, n_3) = \tau^2 + \gamma(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1). \quad (12.72)$$

que es equivalente a

$$R = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 + \gamma(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1).$$

Para obtener el máximo se calcula $\frac{\partial R}{\partial n_i}$ y se hacen igual a cero, luego:

$$\frac{\partial R}{\partial n_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1[\sigma_1^2 - 2\sigma_1(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) + \gamma] = 0, \quad (12.73)$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_2[\sigma_2^2 - 2\sigma_2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) + \gamma] = 0, \quad (12.74)$$

$$\frac{\partial R}{\partial n_3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_3[\sigma_3^2 - 2\sigma_3(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) + \gamma] = 0. \quad (12.75)$$

Solución:

(a) Caso $n_1 \neq 0$

De (12.73) en este caso se tiene que

$$\gamma = 2\sigma_1(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \sigma_1^2, \quad (12.76)$$

y reemplazando (12.74), (12.75) están quedando como

$$n_2(\sigma_1 - \sigma_2)[(2n_1^2 - 1)\sigma_1 + (2n_2^2 - 1)\sigma_2 + 2n_3^2\sigma_3] = 0, \quad (12.77)$$

$$n_3(\sigma_1 - \sigma_3)[(2n_1^2 - 1)\sigma_1 + 2n_2^2\sigma_2 + (2n_3^2 - 1)\sigma_3] = 0. \quad (12.78)$$

Primera solución: La primera solución de (12.77), (12.78) sería

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (12.79)$$

y de (12.76), (12.71) se tiene que

$$\gamma = \sigma_1\sigma_3, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (12.80)$$

Segunda solución: La segunda solución de (12.77), (12.78) sería

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0, \quad (12.81)$$

y de (12.76), (12.71) se tiene que

$$\gamma = \sigma_1\sigma_2, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (12.82)$$

(b) Caso $n_2 \neq 0$

De (12.74) en este caso se tiene que

$$\gamma = 2\sigma_2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \sigma_2^2, \quad (12.83)$$

y (12.73), (12.75) quedan como

$$n_1(\sigma_2 - \sigma_1)[(2n_1^2 - 1)\sigma_1 + (2n_2^2 - 1)\sigma_2 + 2n_3^2\sigma_3] = 0, \quad (12.84)$$

$$n_3(\sigma_2 - \sigma_3)[2n_1^2\sigma_1 + (2n_2^2 - 1)\sigma_2 + (2n_3^2 - 1)\sigma_3] = 0. \quad (12.85)$$

Primera solución: De (12.84), (12.85) la primera solución sería

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = 0, \quad (12.86)$$

y de (12.83), (12.71) se tiene que

$$\gamma = \sigma_1 \sigma_2, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (12.87)$$

Segunda solución: La segunda solución de (12.84), (12.85) sería

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (12.88)$$

y de (12.83), (12.71) se tiene que

$$\gamma = \sigma_2 \sigma_3, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3). \quad (12.89)$$

(c) Caso $n_3 \neq 0$

De (12.75) en este caso se tiene que

$$\gamma = 2\sigma_3(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \sigma_3^2, \quad (12.90)$$

y (12.73), (12.74) quedan como

$$n_1(\sigma_3 - \sigma_1)[(2n_1^2 - 1)\sigma_1 + 2n_2^2\sigma_2 + (2n_3^2 - 1)\sigma_3] = 0, \quad (12.91)$$

$$n_2(\sigma_3 - \sigma_2)[2n_1^2\sigma_1 + (2n_2^2 - 1)\sigma_2 + (2n_3^2 - 1)\sigma_3] = 0. \quad (12.92)$$

Primera solución: La primera solución de (12.91), (12.92) sería

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (12.93)$$

y de (12.90), (12.71) se tiene que

$$\gamma = \sigma_1 \sigma_3, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (12.94)$$

Segunda solución: La segunda solución de (12.91), (12.92) sería

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (12.95)$$

y de (12.90), (12.71) se tiene que

$$\gamma = \sigma_2 \sigma_3, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3). \quad (12.96)$$

En resumen se obtiene:

$$\mathbf{n}^1 = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (12.97)$$

$$\mathbf{n}^2 = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (12.98)$$

$$\mathbf{n}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad (12.99)$$

luego

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}), \quad (12.100)$$

y el ángulo que formaría la dirección respecto a la cual aparece este esfuerzo de corte máximo sería de 45° respecto a la dirección del esfuerzo normal máximo.

12.5. Desplazamientos y deformaciones

Las fuerzas externas generan cartas internas, las que se relacionaran en la sección siguiente con las deformaciones. Lo que se observa directamente son los *desplazamientos*, en particular los desplazamientos en la superficie del cuerpo.

12.5.1. Desplazamientos

En coordenadas Cartesianas el campo de desplazamientos \mathbf{u} tiene la forma

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = u_i \mathbf{e}_i, \quad (12.101)$$

donde $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ o $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$.

El campo de desplazamientos indica cuanto se mueve cada punto de un cuerpo cuando se deforma y/o mueve por la acción de fuerzas externas.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \text{Movimiento de cuerpo rígido:} \begin{cases} \text{Desplazamiento rígido} \\ \text{Rotación rígida} \end{cases} \\ \text{Movimiento relativo entre las partículas del cuerpo} \end{cases}$$

Lo que se puede relacionar con el fenómeno de falla sería o estaría conectado con los desplazamientos relativos entre las partículas de un cuerpo.

Ejemplos para campos de desplazamientos

1. Consideremos el caso en que \mathbf{u} es tal que $u_1 = 3$, u_2 y $u_3 = 0$, en dicho caso el cuerpo sufriría un desplazamiento como el que se muestra en la Figura 12.9.

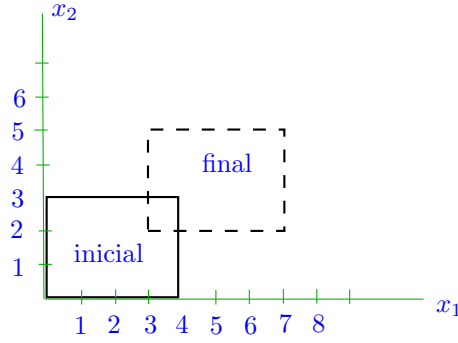


Figura 12.9: Ejemplo de campo de desplazamientos. Movimiento de cuerpo rígido.

2. En el segundo caso consideremos

$$\mathbf{u} = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{X},$$

donde \mathbf{Q} es un tensor constante ortogonal y \mathbf{X} es un campo vectorial que representa la posición inicial de las partículas del cuerpo. En este caso el

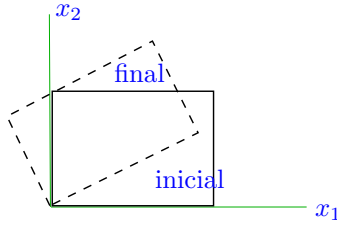


Figura 12.10: Ejemplo de campo de desplazamientos. Rotación de cuerpo rígido.

cuerpo se desplazaría tal como se muestra esquemáticamente en la Figura 12.10.

3. En el tercer caso considérese un campo de desplazamientos tal que

$$u_1 = \lambda X_1, \quad u_2 = \lambda^{-1} X_2, \quad u_3 = 0,$$

donde $\lambda > 1$ es una constante. En este caso si $\lambda > 1$ se tendría que en la dirección x_1 se produciría un alargamiento y en la dirección x_2 habría una contracción como se muestra en la Figura 12.11.

4. En el último caso tenemos

$$u_1 = \kappa X_2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0.$$

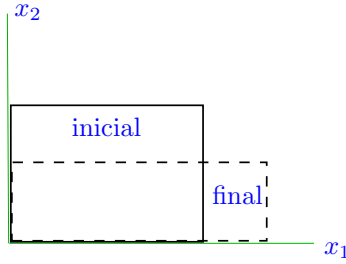


Figura 12.11: Ejemplo de campo de desplazamientos. Extensión en x_1 y contracción en x_2 .

En este caso se produciría una deformación tipo de corte como se muestra

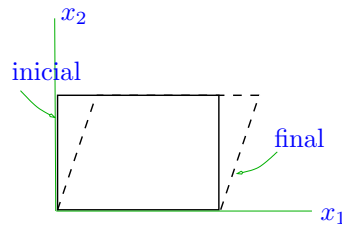


Figura 12.12: Ejemplo de campo de desplazamientos. Deformación en corte en la dirección x_1 .

en la Figura 12.12.

Los dos supuestos importantes para la teoría de la elasticidad lineal son:

- $\|\mathbf{u}\|$ es pequeño (en comparación con alguna longitud característica del cuerpo) o sea los desplazamientos son pequeños.
- $\|\nabla \mathbf{u}\|$ es pequeño, tal como se verá después implicaría que las deformaciones son pequeñas.

12.5.2. Deformación

De muchas observaciones experimentales se ha concluido que los movimientos de cuerpo rígido, como los mostrados en las Figuras 12.9, 12.10 no se asociarían con fenómenos de falla. El tipo de desplazamiento que importa es aquel que cambia la forma de un cuerpo. En la Figura 12.13 tenemos una representación esquemática de un cuerpo al inicio sin deformación. Al aplicarse las fuerzas (que no se muestran en la figura) un elemento diferencial (el rectángulo verde) se deformaría como se muestra en la figura de la derecha (final). El elemento

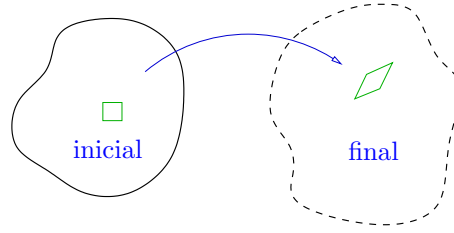


Figura 12.13: Elementos diferenciales en un cuerpo al inicio y al final deformado.

diferencial es muy pequeño, de manera tal que se asume que la deformación que sufre el cuerpo se compondría solamente de un cambio de longitud de los lados, más cambios en los ángulos de las caras internas.

En la Figura 12.14 se muestra una vista ampliada del elemento diferencial (caso 2D) al inicio $PQRS$ y al final deformado $P'Q'R'S'$.

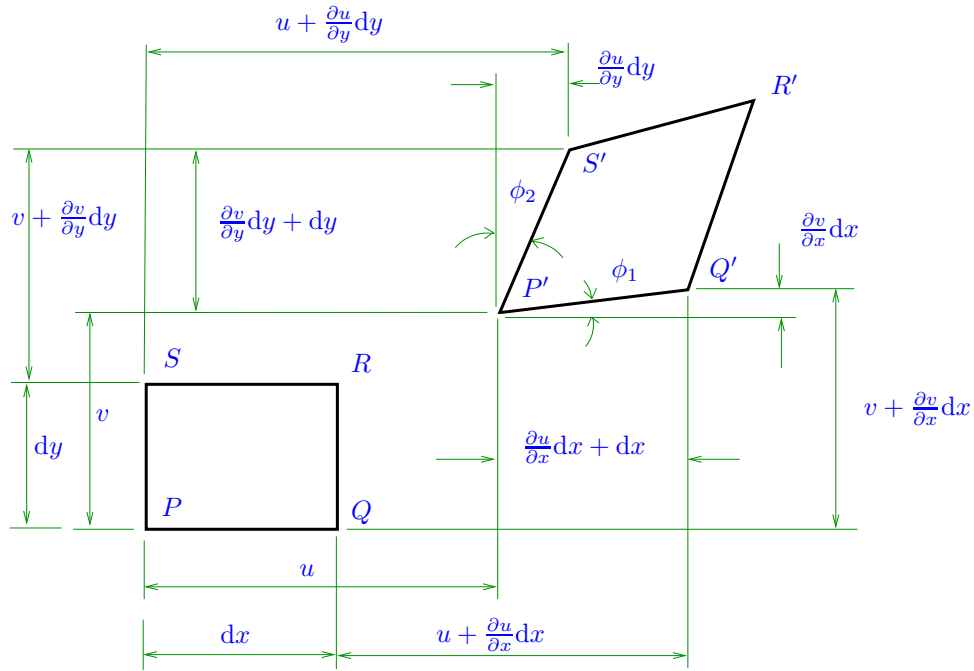


Figura 12.14: Significado del tensor de deformación en el caso infinitesimal plano.

Se define la deformación longitudinal ε_{11} en la dirección 1 como:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\text{Cambio longitud } PQ}{\text{Largo inicial } PQ} = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}}, \quad (12.102)$$

pero $\overline{PQ} = dx_1$ y

$$\begin{aligned} \overline{P'Q'} &= \sqrt{\left[u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + dx_1 - u_1\right]^2 + \left[u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 - u_2\right]^2}, \\ &= \sqrt{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + dx_1\right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1\right]^2}, \\ &= dx_1 \sqrt{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1\right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right]^2}, \end{aligned} \quad (12.103)$$

de modo que reemplazando en (12.102) se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{dx_1 \sqrt{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1\right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right]^2} - dx_1}{dx_1}, \\ &= \sqrt{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1\right]^2 + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right]^2} - 1, \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2} - 1, \end{aligned} \quad (12.104)$$

pero se pueden despreciar los términos $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2$ respecto a $1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ si $\|\nabla \mathbf{u}\|$ es pequeño.

Sea $a \ll 1$ y sea $(1+a)^m$, de una aproximación por series de Taylor se tiene

$$(1+a)^m \approx 1 + ma. \quad (12.105)$$

Identificando en (12.104) a a con $2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ y m con $1/2$ de (12.105) se obtiene:

$$\varepsilon_{11} \approx \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

o sea

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (12.106)$$

Igualmente se puede definir la deformación longitudinal en la dirección x_2 como

$$\varepsilon_{22} = \frac{\text{Cambio longitud } PS}{\text{Largo inicial } PS} = \frac{\overline{P'S'} - \overline{PS}}{\overline{PS}}, \quad (12.107)$$

y siguiendo un procedimiento similar al caso anterior se puede probar que

$$\varepsilon_{22} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (12.108)$$

La deformación en corte se define como un cambio de ángulo. En nuestro caso de la Figura 12.14 la definimos como:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \varepsilon_{21}. \quad (12.109)$$

Si ϕ_1 y ϕ_2 son muy pequeños (en radianes) se tiene que $\phi_1 \approx \tan(\phi_1)$ y $\phi_2 \approx \tan(\phi_2)$, y de la Figura 12.14 tenemos

$$\tan \phi_1 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1}, \quad (12.110)$$

pero de (12.105) se tiene que $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, luego

$$\tan \phi_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

o sea

$$\tan \phi_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (12.111)$$

Igualmente

$$\tan \phi_2 = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{\frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + dx_2} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 1} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad (12.112)$$

luego de (12.111), (12.112) en (12.109) se tiene

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (12.113)$$

Para un caso 3D se puede demostrar que

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (12.114)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad (12.115)$$

o sea en notación indicial tenemos

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (12.116)$$

que es equivalente a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad (12.117)$$

Se tiene que ε_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (12.118)$$

12.5.3. Ecuaciones de compatibilidad

Imaginemos que conocemos ε_{ij} y que a partir de $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}$ queremos ahora encontrar u_i , $i = 1, 2, 3$; en ese caso tendríamos 6 ecuaciones y 3 incógnitas u_1 , u_2 y u_3 . En general no se obtendrán soluciones únicas para u_i . Para un punto \mathbf{x} , si \mathbf{u} tiene más de un valor esto implicaría que al deformarse el cuerpo se dividiría. Para evitar el fenómeno anterior se buscan ecuaciones de ‘compatibilidad’ para que hayan soluciones únicas.

Las ecuaciones de compatibilidad se usan, por ejemplo, para el estudio del efecto de esfuerzos térmicos y también en el desarrollo de métodos de solución basados en ‘potenciales’ de esfuerzos.

Sea

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad (12.119)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (12.120)$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (12.121)$$

Estudiemos la ‘compatibilidad’ para u_1 . Sea u_1 evaluado en un punto \mathbf{x} y en otro punto muy cercano $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. Por medio de una serie de Taylor se tiene:

$$u_1(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx u_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (12.122)$$

donde $du_1 = u_1(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - u_1(\mathbf{x})$.

Sean dos puntos $\mathbf{x}^{(0)}$ y $\mathbf{x}^{(1)}$, luego de (12.122) se tiene

$$\int_{\mathbf{x}^{(0)}}^{\mathbf{x}^{(1)}} du_1 = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x},$$

donde \mathcal{C} es una curva que va desde $\mathbf{x}^{(0)}$ a $\mathbf{x}^{(1)}$. Integrando en el lado izquierdo tenemos

$$u_1(\mathbf{x}^{(1)}) = u_1(\mathbf{x}^{(0)}) + \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3. \quad (12.123)$$

Pero de (12.114), (12.115), (12.120) y (12.121) $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \varepsilon_{12} - r$ y $\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \varepsilon_{13} - q$, luego en (12.123) se obtiene

$$u_1(\mathbf{x}^{(1)}) = u_1(\mathbf{x}^{(0)}) + \int_{\mathcal{C}} (\varepsilon_{11} dx_1 + \varepsilon_{12} dx_2 + \varepsilon_{13} dx_3) + \int_{\mathcal{C}} (q dx_3 - r dx_2). \quad (12.124)$$

Considerémos la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} (q dx_3 - r dx_2)$, dado que $\mathbf{x}^{(1)} = x_i^{(1)} \mathbf{e}_i$ es constante, se cumple que

$$-dx_2 = d(x_2^{(1)} - x_2), \quad -dx_3 = d(x_3^{(1)} - x_3),$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} (q \, dx_3 - r \, dx_2) &= \int_{\mathcal{C}} [r \, d(x_2^{(1)} - x_2) - q \, d(x_3^{(1)} - x_3)], \\
&= \left[r(x_2^{(1)} - x_2) - q(x_3^{(1)} - x_3) \right]_{\mathbf{x}^{(0)}}^{\mathbf{x}^{(1)}} \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}} (x_2^{(1)} - x_2) \, dr - (x_3^{(1)} - x_3) \, dq, \\
&= q^{(0)}(x_3^{(1)} - x_3^{(0)}) - r^{(0)}(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}) \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}} (x_2^{(1)} - x_2) \, dr - (x_3^{(1)} - x_3) \, dq, \quad (12.125)
\end{aligned}$$

donde para $\int_{\mathcal{C}} [r \, d(x_2^{(1)} - x_2) - q \, d(x_3^{(1)} - x_3)]$ se reconoce primero que \mathcal{C} es una curva que va de $\mathbf{x}^{(0)}$ a $\mathbf{x}^{(1)}$, transformandose entonces en la integral $\int_{\mathbf{x}^{(0)}}^{\mathbf{x}^{(1)}} [r \, d(x_2^{(1)} - x_2) - q \, d(x_3^{(1)} - x_3)]$, la cual se transforma mediante el uso de integración por partes⁶. Adicionalmente se tiene que $q^{(0)}$ y $r^{(0)}$ serían las funciones q y r evaluadas en $\mathbf{x}^{(0)}$.

Pero

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3} dx_3, \quad (12.126)$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q}{\partial x_3} dx_3. \quad (12.127)$$

Usando (12.126), (12.127) en (12.125) y ese resultado en (12.124) se obtiene:

$$\begin{aligned}
u_1(\mathbf{x}^{(1)}) &= u_1(\mathbf{x}^{(0)}) + q^{(0)}(x_3^{(1)} - x_3^{(0)}) - r^{(0)}(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}) \\
&\quad + \int_{\mathcal{C}} (\varepsilon_{11} \, dx_1 + \varepsilon_{12} \, dx_2 + \varepsilon_{13} \, dx_3) \\
&\quad - \int_{\mathcal{C}} \left[(x_2^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3} dx_3 \right) \right. \\
&\quad \left. - (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q}{\partial x_3} dx_3 \right) \right], \\
&= u_1(\mathbf{x}^{(0)}) + q^{(0)}(x_3^{(1)} - x_3^{(0)}) - r^{(0)}(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}) \\
&\quad + \int_{\mathcal{C}} (U_1 \, dx_1 + U_2 \, dx_2 + U_3 \, dx_3), \quad (12.128)
\end{aligned}$$

donde se ha definido:

$$U_1 = \varepsilon_{11} - (x_2^{(1)} - x_2) \frac{\partial r}{\partial x_1} - (x_3^{(1)} - x_3) \frac{\partial q}{\partial x_1}, \quad (12.129)$$

$$U_2 = \varepsilon_{12} - (x_2^{(1)} - x_2) \frac{\partial r}{\partial x_2} - (x_3^{(1)} - x_3) \frac{\partial q}{\partial x_2}, \quad (12.130)$$

$$U_3 = \varepsilon_{13} - (x_2^{(1)} - x_2) \frac{\partial r}{\partial x_3} - (x_3^{(1)} - x_3) \frac{\partial q}{\partial x_3}. \quad (12.131)$$

⁶Se usa $\int_a^b f \, dg = fg|_a^b - \int_a^b g \, df$.

Pero de (12.120), (12.121) y (12.114), (12.115) se puede probar que

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}, \quad (12.132)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2}, \quad (12.133)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}, \quad (12.134)$$

y

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1}, \quad (12.135)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}, \quad (12.136)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1}. \quad (12.137)$$

En (12.128) para que $u_1(\mathbf{x}^{(1)})$ sea continuo para cualquier $\mathbf{x}^{(1)}$ la integral de línea sobre \mathcal{C} debe ser independiente de \mathcal{C} , o sea

$$\oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{x} = 0, \quad (12.138)$$

donde \mathcal{Q} es una curva cerrada, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$ y $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)^T$. Pero por el teorema de Stokes tenemos

$$\oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (12.139)$$

donde \mathcal{P} es una superficie abierta con borde \mathcal{Q} y $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$, donde \mathbf{n} es la normal unitaria a da .

Luego para que (12.138) sea satisfecha de (12.139) se tiene que cumplir que

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (12.140)$$

que es equivalente a pedir que

$$\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

de donde se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2}. \quad (12.141)$$

Pero de (12.129)-(12.131), (12.120), (12.121) tenemos que

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_3}}_{\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}} - (x_2^{(1)} - x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2^2}} + (x_3^{(1)} - x_3) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial q}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_3}} \quad (12.142)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - (x_2^{(1)} - x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3}} - \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_2}}_{\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}} + (x_3^{(1)} - x_3) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3}}. \quad (12.143)$$

Luego usando (12.142), (12.143) para (12.141)₁ tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - (x_2^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2^2} \right) + (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - (x_2^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \end{aligned}$$

que debería ser válida para cualquier x_2 , $x_2^{(1)}$, x_3 y $x_3^{(1)}$, por lo que se debe cumplir:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (12.144)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3}. \quad (12.145)$$

También de (12.129)-(12.131) y (12.120), (12.121) tenemos que

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} - (x_2^{(1)} - x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}} - \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x_1}}_{\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3}} + (x_3^{(1)} - x_3) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}} \quad (12.146)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - (x_2^{(1)} - x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial r}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2}} + (x_3^{(1)} - x_3) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}}, \quad (12.147)$$

luego usando (12.146), (12.147) en (12.141)₂ se llega a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} - (x_1^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} + (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - (x_2^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} \right), \end{aligned}$$

que debe ser satisfecha para cualquier x_2 , $x_2^{(1)}$, x_3 y $x_3^{(1)}$, lo que se cumple si y

solo si:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (12.148)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}. \quad (12.149)$$

Finalmente de (12.129)-(12.131) y (12.120), (12.121) se tiene

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - (x_2^{(1)} - x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}} + (x_3^{(1)} - x_3) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2}} \quad (12.150)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_1}}_{\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}} - (x_2^{(1)} - x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}} + (x_3^{(1)} - x_3) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \right)}_{\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1^2}}, \quad (12.151)$$

y reemplazando (12.150), (12.151) en (12.141)₃ se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - (x_2^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} \right) \\ &= \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} - (x_2^{(1)} - x_2) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} \right) + (x_3^{(1)} - x_3) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1^2} \right), \end{aligned}$$

que nuevamente debe ser satisfecha para cualquier $x_2^{(1)}$, x_2 , $x_3^{(1)}$ y x_3 , que se cumple si y solo si

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}, \quad (12.152)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1^2}. \quad (12.153)$$

Las ecuaciones (12.144), (12.145), (12.148), (12.149), (12.152) y (12.153) son llamadas las ecuaciones de compatibilidad para las componentes de ε_{ij} . Siguiendo un procedimiento similar con u_2 y u_3 se puede probar que se obtienen ecuaciones de compatibilidad iguales a las encontradas aquí (en realidad linealmente dependientes de las encontradas aquí). Si ε_{ij} satisface (12.144), (12.145), (12.148), (12.149), (12.152) y (12.153) entonces si se calcula u_l de (12.116), u_l sería continuo, $l = 1, 2, 3$.

12.6. Ecuaciones constitutivas

En este capítulo solo se considerará materiales que pueden ser modelados por medio de ecuaciones lineales del tipo:

$$T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (12.154)$$

donde el tensor de cuarto orden \mathcal{C} con componentes \mathcal{C}_{ijkl} es constante⁷.

Se cumplen las siguientes simetrías para \mathcal{C}_{ijkl} :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{ijlk}, \quad \mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}, \quad (12.155)$$

en donde las tres primeras condiciones de simetría vienen de la simetrías para T_{ij} y ε_{kl} , en tanto que $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$ proviene de consideraciones asociadas a la energía elástica acumulada por un cuerpo, que no se discutirán aquí.

Considérese la notación alternativa para los esfuerzos y el campo de deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad (12.156)$$

luego con esta notación la ecuación (12.154) se puede escribir como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (12.157)$$

donde la matriz \mathbf{C} se define como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{1113} & \mathcal{C}_{1123} \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{2213} & \mathcal{C}_{2223} \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} & \mathcal{C}_{3312} & \mathcal{C}_{3313} & \mathcal{C}_{3323} \\ \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{3312} & \mathcal{C}_{1212} & \mathcal{C}_{1213} & \mathcal{C}_{1223} \\ \mathcal{C}_{1113} & \mathcal{C}_{2213} & \mathcal{C}_{3313} & \mathcal{C}_{1213} & \mathcal{C}_{1313} & \mathcal{C}_{1323} \\ \mathcal{C}_{1123} & \mathcal{C}_{2223} & \mathcal{C}_{3323} & \mathcal{C}_{1223} & \mathcal{C}_{1323} & \mathcal{C}_{2323} \end{pmatrix}. \quad (12.158)$$

En (12.158) tenemos 21 constantes de material. Se pueden reducir si se usa el concepto de simetría de material. Si para ciertas direcciones el comportamiento de un material es el mismo, ese conjunto de direcciones se conoce como el conjunto de simetrías del material. El caso particular de un material isotrópico es aquel en donde el comportamiento es el mismo independiente de cualquier orientación de la fuerza. Considerémos la Figura 12.15, en donde se muestra esquemáticamente esto. En la Figura 12.16 tendríamos el resultado posible para el caso de un cuerpo isotrópico.

La rotación de una fuerza se puede modelar también al tener la fuerza quieta y al rotar el cuerpo, es decir por medio del uso de Q_{mn} . Como el comportamiento del material se caracteriza por medio de \mathcal{C}_{ijkl} , luego si para un Q_{mn} la distribución de esfuerzos es la misma, eso es equivalente a pedir que \mathcal{C}_{ijkl} es igual bajo el efecto de dicha transformación, o sea si

$$\mathcal{C}'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}\mathcal{C}_{mnpq}, \quad (12.159)$$

donde $Q_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$. Luego para un grupo de simetría Q_{mn} se tiene que \mathcal{C}'_{ijkl} es igual a \mathcal{C}_{mnpq} . Veamos varios casos en las siguientes secciones.

⁷El tensor \mathcal{C} sería constante en términos de la deformación, pero eventualmente podría depender cada una de sus componentes en la posición \mathbf{x} . Si las propiedades mecánicas dependen de la posición el material se dice no-homogéneo, en tanto si no dependen de la posición se dice que el material es homogéneo.

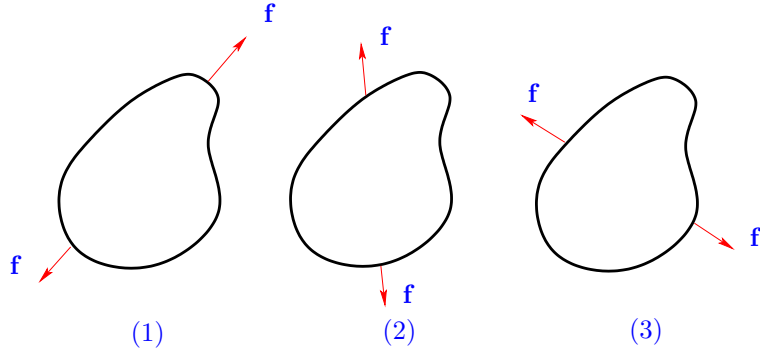


Figura 12.15: Cuerpo sometido a cargas con diferentes orientaciones.

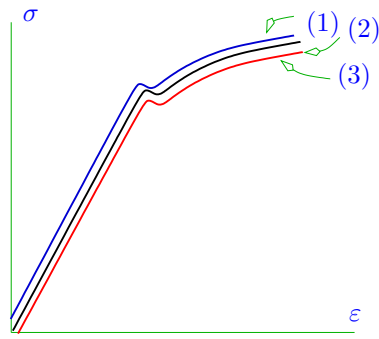


Figura 12.16: Cuerpo sometido a cargas con diferentes orientaciones. Resultados experimentales.

12.6.1. Material monocónico

Sea el caso en que un sistema de coordenadas $\{x_i\}$ se transforma en $\{x'_i\}$ según se muestra en la Figura 12.17. Asumamos que para dicha transformación las componentes de \mathcal{C} se mantienen iguales. Para esa transformación se tiene que

$$Q_{11} = 1, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = 1, \quad (12.160)$$

$$Q_{23} = 0, \quad Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \quad Q_{33} = -1. \quad (12.161)$$

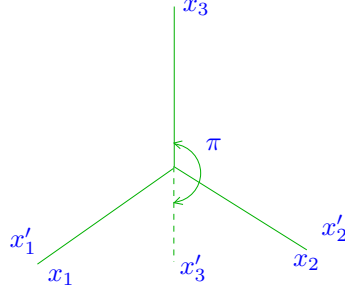


Figura 12.17: Simetría respecto al plano $x_1 - x_2$.

Luego se quiere

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{1111} &= \mathcal{C}'_{1111} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{1p}Q_{1q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1111}, \\
 \mathcal{C}_{1122} &= \mathcal{C}'_{1122} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{2p}Q_{2q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1122}, \\
 \mathcal{C}_{1133} &= \mathcal{C}'_{1133} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{3p}Q_{3q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1133}, \\
 \mathcal{C}_{1112} &= \mathcal{C}'_{1112} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{1p}Q_{2q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1112}, \\
 \mathcal{C}_{1113} &= \mathcal{C}'_{1113} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{1p}Q_{3q}\mathcal{C}_{mnpq} = -\mathcal{C}_{1113}, \\
 \mathcal{C}_{1123} &= \mathcal{C}'_{1123} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{2p}Q_{3q}\mathcal{C}_{mnpq} = -\mathcal{C}_{1123},
 \end{aligned}$$

lo que es cierto si y solo si $\mathcal{C}_{1113} = 0$ y $\mathcal{C}_{1123} = 0$.

Siguiendo este método se puede demostrar que

$$\mathcal{C}_{2213} = \mathcal{C}_{2223} = \mathcal{C}_{1213} = \mathcal{C}_{1223} = \mathcal{C}_{3313} = \mathcal{C}_{3323} = 0.$$

Luego la matriz \mathbf{C} tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{1112} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{2212} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} & \mathcal{C}_{3312} & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{3312} & \mathcal{C}_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{1313} & \mathcal{C}_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{1323} & \mathcal{C}_{2323} \end{pmatrix}, \quad (12.162)$$

donde ahora tenemos 13 constantes de material.

12.6.2. Material ortotrópico

Considérese la Figura 12.18 en donde se tiene una transformación en dos planos. Si un material es simétrico respecto a estos dos planos (por ejemplo 1 y 3) se dice que un material es ortotrópico⁸. Para este caso \mathbf{Q} tiene las siguientes

⁸Una definición un poco más general es indicar que el material es ortotrópico si tenemos dos 'familias' de fibras en donde el comportamiento es diferente al resto del material.

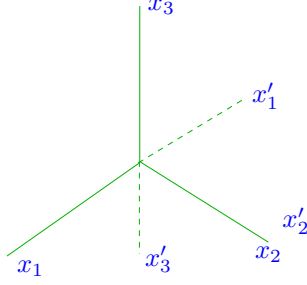


Figura 12.18: Simetrías respecto a los planos $x_1 - x_2$ y $x_2 - x_3$

componentes:

$$Q_{11} = -1, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = 1, \quad (12.163)$$

$$Q_{23} = 0, \quad Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \quad Q_{33} = -1. \quad (12.164)$$

Luego si para este \mathbf{Q} se tiene que $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}'_{ijkl}$, se tiene, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1111} &= \mathcal{C}'_{1111} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{1p}Q_{1q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1111}, \\ \mathcal{C}_{1122} &= \mathcal{C}'_{1122} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{2p}Q_{2q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1122}, \\ \mathcal{C}_{1133} &= \mathcal{C}'_{1133} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{3p}Q_{3q}\mathcal{C}_{mnpq} = \mathcal{C}_{1133}, \\ \mathcal{C}_{1112} &= \mathcal{C}'_{1112} = Q_{1m}Q_{1n}Q_{1p}Q_{2q}\mathcal{C}_{mnpq} = -\mathcal{C}_{1112}. \end{aligned}$$

Esta última relación se cumple si y solo si $\mathcal{C}_{1112} = 0$. De igual forma se puede probar que $\mathcal{C}_{3312} = 0$, $\mathcal{C}_{1323} = 0$ y $\mathcal{C}_{2212} = 0$, de modo que la matriz \mathbf{C} es de la forma:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{2323} \end{pmatrix}, \quad (12.165)$$

donde ahora tenemos solo 9 constantes.

12.6.3. Material transverso isotrópico

En la Figura 12.19 tenemos una transformación de coordenadas en un ángulo θ arbitrario alrededor del eje 3. Si un material tiene una dirección preferente (en este caso 3) en donde el comportamiento es diferente al resto de las direcciones, se dice que es un material transverso isotrópico.

Para este caso \mathbf{Q} tiene las siguientes componentes:

$$Q_{11} = \cos \theta, \quad Q_{12} = -\sin \theta, \quad Q_{13} = 0, \quad Q_{21} = \sin \theta, \quad (12.166)$$

$$Q_{22} = \cos \theta, \quad Q_{23} = 0, \quad Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \quad Q_{33} = 1. \quad (12.167)$$

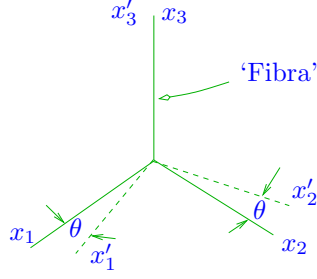


Figura 12.19: Simetrías respecto a una dirección preferente o ‘fibra’.

En lugar de usar directamente $\mathcal{C}'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}\mathcal{C}_{mnpq}$ y pedir que $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}'_{ijkl}$ para los Q_{mn} de (12.154), (12.24), es más fácil usar $T_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ de la siguiente forma:

En el sistema de coordenadas original se tiene T_{ij} , ε_{kl} , y en el nuevo sistema de coordenadas se tiene T'_{ij} , ε'_{kl} .

Queremos que las constantes sean las mismas en un sistema y en el otro, de modo que

$$T_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad T'_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon'_{kl}. \quad (12.168)$$

Pero

$$T'_{ij} = Q_{ip}Q_{jm}T_{pm}, \quad \varepsilon'_{kl} = Q_{kp}Q_{lm}\varepsilon_{pm}, \quad (12.169)$$

y con este tipo de transformaciones Q_{ij} queremos que T_{ij} no cambien de valor, es decir $T_{ij} = T'_{ij}$. Con el experimento no podemos distinguir las propiedades mecánicas diferentes en el plano normal en la dirección x_3 , luego

$$\mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon'_{kl} = \mathcal{C}_{ijkl}Q_{kp}Q_{lm}\varepsilon_{pm}, \quad (12.170)$$

que debe ser válido para θ .

Usando (12.166), (12.167) en (12.169)₂ se tiene (en notación matricial)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta, \quad (12.171)$$

$$\varepsilon'_{12} = (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \quad (12.172)$$

$$\varepsilon'_{13} = \varepsilon_{13} \cos \theta + \varepsilon_{23} \sin \theta, \quad (12.173)$$

$$\varepsilon'_{22} = \varepsilon_{11} \sin^2 \theta - 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta, \quad (12.174)$$

$$\varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{13} \sin \theta + \varepsilon_{23} \cos \theta, \quad (12.175)$$

$$\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33}. \quad (12.176)$$

Si, por ejemplo, $T_{33} = T'_{33}$ se tiene

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_{3311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} + \mathcal{C}_{3312}2\varepsilon_{12} + \mathcal{C}_{3313}2\varepsilon_{13} + \mathcal{C}_{3323}2\varepsilon_{23} \\ &= \mathcal{C}_{3311}\varepsilon'_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon'_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon'_{33} + \mathcal{C}_{3312}2\varepsilon'_{12} + \mathcal{C}_{3313}2\varepsilon'_{13} + \mathcal{C}_{3323}2\varepsilon'_{23}, \end{aligned}$$

que de (12.171), (12.176) queda como:

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_{3311}\varepsilon_{11} + \mathcal{C}_{3322}\varepsilon_{22} + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} + \mathcal{C}_{3312}2\varepsilon_{12} + \mathcal{C}_{3313}2\varepsilon_{13} + \mathcal{C}_{3323}2\varepsilon_{23} \\ &= \mathcal{C}_{3311}(\varepsilon_{11} \cos^2 \theta + 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta) + \mathcal{C}_{3322}(\varepsilon_{11} \cos^2 \theta \\ & - 2\varepsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{22} \cos^2 \theta) + \mathcal{C}_{3333}\varepsilon_{33} + \mathcal{C}_{3312}2[(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin \theta \cos \theta \\ & + \varepsilon_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] + \mathcal{C}_{3313}2(\varepsilon_{13} \cos \theta + \varepsilon_{23} \sin \theta) + \mathcal{C}_{3323}2(-\varepsilon_{12} \sin \theta \\ & + \varepsilon_{23} \cos \theta), \end{aligned} \quad (12.177)$$

que debe ser satisfecha para cualquier ε_{ij} , luego se requiere, por ejemplo, que los términos que están multiplicando a ε_{11} deben ser cero, luego

$$\mathcal{C}_{3311} = \mathcal{C}_{3311} \cos^2 \theta + \mathcal{C}_{3322} \sin^2 \theta - 2\mathcal{C}_{3312} \sin \theta \cos \theta,$$

que es satisfecha si y solo si

$$\mathcal{C}_{3312} = 0, \quad \mathcal{C}_{3311} = \mathcal{C}_{3322}. \quad (12.178)$$

En el caso de los términos que están multiplicando a ε_{22} se tiene

$$\mathcal{C}_{3322} = \mathcal{C}_{3311} \sin^2 \theta + \mathcal{C}_{3322} \cos^2 \theta + 2\mathcal{C}_{3312} \sin \theta \cos \theta,$$

que es satisfecha de manera automática. Lo mismo sucede con ε_{33} .

En el caso de los términos que están multiplicando ε_{12} se tiene

$$2\mathcal{C}_{3312} = (\mathcal{C}_{3311} - \mathcal{C}_{3322})2 \sin \theta \cos \theta + 2\mathcal{C}_{3312}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

que se cumple de manera automática también.

Para el caso de los términos que multiplican a ε_{13} se tiene

$$2\mathcal{C}_{3313} = 2\mathcal{C}_{3313} \cos \theta - 2\mathcal{C}_{3323} \sin \theta,$$

que es satisfecha si y solo si

$$\mathcal{C}_{3313} = 0, \quad \mathcal{C}_{3323} = 0. \quad (12.179)$$

Finalmente para el caso de los términos que multiplican a ε_{23} se tiene

$$2\mathcal{C}_{3323} = 2\mathcal{C}_{3313} \sin \theta + 2\mathcal{C}_{3323} \cos \theta,$$

es satisfecha de manera automática.

Siguiente el mismo procedimiento para T_{11} , T_{22} , T_{12} , T_{13} , T_{23} se debería llegar a

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{1111} - \mathcal{C}_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{1313} \end{pmatrix}, \quad (12.180)$$

donde ahora tenemos solo 5 constantes independientes.

12.6.4. Material isotrópico

Considerémos el efecto que tiene en las componentes de \mathcal{C} al aplicar dos transformaciones consecutivas como las mostradas en la Figura 12.20. Un ma-

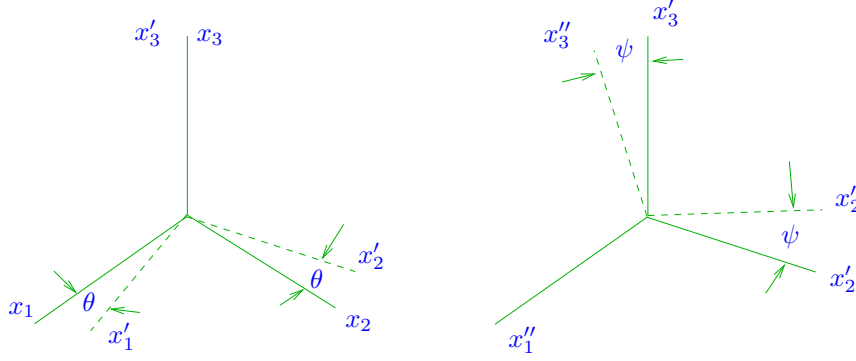


Figura 12.20: Simetrías respecto a dos direcciones.

terial para el cual las componentes \mathcal{C}_{ijkl} no cambian para esta transformación se llama material isotrópico. Las dos rotaciones θ, ψ tienen como efecto, desde el punto de vista práctico, que el material muestre el mismo comportamiento (iguales \mathcal{C}_{ijkl}) para cualquier dirección en el espacio 3D en la cual se cargue.

La nueva transformación de $\{x'_i\}$ a $\{x''_i\}$ da origen a las siguientes componentes para Q_{ij} :

$$Q_{11} = 1, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = \cos \psi, \quad (12.181)$$

$$Q_{23} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin \psi, \quad Q_{33} = \cos \psi, \quad Q_{31} = 0, \quad (12.182)$$

$$Q_{32} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin \psi. \quad (12.183)$$

Se sigue el mismo procedimiento mostrado en la sección anterior para reducir \mathcal{C}_{ijkl} , considerando que $T'_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon'_{kl}$ y que $T''_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon''_{kl}$, y que se quiere que $T'_{ij} = T''_{ij}$ para esta transformación, en donde se usa como base los \mathcal{C}_{ijkl} del caso transverso isotrópico.

Recordando que $\varepsilon''_{ij} = Q_{ik}\varepsilon'_{kl}Q_{jl}$ de (12.181)-(12.183) se tiene que

$$\begin{pmatrix} \varepsilon''_{11} & \varepsilon''_{12} & \varepsilon''_{13} \\ \varepsilon''_{12} & \varepsilon''_{22} & \varepsilon''_{23} \\ \varepsilon''_{13} & \varepsilon''_{23} & \varepsilon''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{13} & \varepsilon'_{23} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene:

$$\varepsilon''_{11} = \varepsilon'_{11}, \quad (12.184)$$

$$\varepsilon''_{12} = \varepsilon'_{12} \cos \psi + \varepsilon'_{13} \sin \psi, \quad (12.185)$$

$$\varepsilon''_{13} = -\varepsilon'_{12} \sin \psi + \varepsilon'_{13} \cos \psi, \quad (12.186)$$

$$\varepsilon''_{22} = \varepsilon'_{22} \cos^2 \psi + 2 \sin \psi \cos \psi \varepsilon'_{23} + \sin^2 \psi \varepsilon'_{33}, \quad (12.187)$$

$$\varepsilon''_{23} = (\varepsilon'_{33} - \varepsilon'_{22}) \sin \psi \cos \psi + \varepsilon'_{23} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi), \quad (12.188)$$

$$\varepsilon''_{33} = \varepsilon'_{22} \sin^2 \psi - 2 \varepsilon'_{23} \sin \psi \cos \psi + \varepsilon'_{33} \cos^2 \psi. \quad (12.189)$$

Considerémos el caso $i = 1, j = 1$ en T'_{ij} y T''_{ij} , luego $T'_{ij} = T_{ij}$ es equivalente a

$$C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon''_{kl}, \quad (12.190)$$

y se tiene

$$C_{1111} \varepsilon'_{11} + C_{1122} \varepsilon'_{22} + C_{1133} \varepsilon'_{33} = C_{1111} \varepsilon''_{11} + C_{1122} \varepsilon''_{22} + C_{1133} \varepsilon''_{33},$$

y de (12.184)-(12.189) queda como

$$\begin{aligned} C_{1111} \varepsilon'_{11} + C_{1122} \varepsilon'_{22} + C_{1133} \varepsilon'_{33} &= C_{1111} \varepsilon'_{11} + C_{1122} (\varepsilon'_{22} \cos^2 \psi \\ &+ 2 \sin \psi \cos \psi \varepsilon'_{23} + \sin^2 \psi \varepsilon'_{33}) + C_{1133} (\varepsilon'_{22} \sin^2 \psi - 2 \varepsilon'_{23} \sin \psi \cos \psi \\ &+ \varepsilon'_{33} \cos^2 \psi). \end{aligned} \quad (12.191)$$

Esto debe ser satisfecho para cualquier ε'_{ij} , luego para el caso de ε'_{22} se cumple si

$$C_{1122} = C_{1122} \cos^2 \psi + C_{1133} \sin^2 \psi,$$

que se cumple si y solo si

$$C_{1133} = C_{1122}. \quad (12.192)$$

En el caso de los términos multiplicando a ε'_{33} se tiene

$$C_{1133} = C_{1122} \sin^2 \psi + C_{1133} \cos^2 \psi,$$

que se cumple de manera automática.

Para el caso de los términos multiplicando a ε'_{23} se tiene

$$0 = C_{1122} 2 \sin \psi \cos \psi - C_{1133} 2 \sin \psi \cos \psi,$$

que se cumple de manera automática también.

Si se sigue con otros valores para i, j se llegaría finalmente a que \mathbf{C} tiene la siguiente forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{pmatrix}, \quad (12.193)$$

y esta es la matriz para el caso de materiales isotrópicos, en donde solo hay dos constantes de material.

12.6.5. Forma *práctica* de las ecuaciones constitutivas

En esta sección se mostrara algunas formás más usuales o conocidas para las ecuaciones constitutivas para diferentes simetrías de material.

Material isotrópico

En (12.193) defínase las constantes λ, μ (conocidas como módulos de Lamé) como

$$\lambda = \mathcal{C}_{1122}, \quad \mu = \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{1111} - \mathcal{C}_{1122}), \quad (12.194)$$

de donde se tiene que $\mathcal{C}_{1111} = \lambda + 2\mu$. Usando estas definiciones en (12.193) y en (12.157) tenemos

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad (12.195)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} T_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \\ T_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \\ T_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}, \\ T_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \\ T_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}, \\ T_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}, \end{aligned}$$

que se puede escribir de manera compacta en notación indicial como

$$T_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (12.196)$$

y que también se puede escribir como

$$\mathbf{T} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}. \quad (12.197)$$

Si se toma la traza de la ecuación (12.197) se tiene

$$\text{tr}\mathbf{T} = 2\mu\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + 3\lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon},$$

en donde se ha usado el hecho que $\text{tr}\mathbf{I} = 3$. Luego esto implica que

$$\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{(2\mu + 3\lambda)}\text{tr}\mathbf{T}, \quad (12.198)$$

y reemplazando esto en (12.197) se llega a que

$$\mathbf{T} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)}\text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I},$$

de donde se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}. \quad (12.199)$$

Considérese un estado de esfuerzos hidrostático el cual por definición tiene la forma

$$\mathbf{T} = \bar{\sigma} \mathbf{I}. \quad (12.200)$$

De (12.199) es fácil ver que $\boldsymbol{\varepsilon}$ sería de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \mathbf{I}, \quad \text{con} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{3\bar{\sigma}}{2\mu + 3\lambda}, \quad (12.201)$$

de donde se define

$$\kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad (12.202)$$

que se conoce en inglés como *Bulk modulus*.

En la Sección 3.5.2 se obtuvieron ecuaciones constitutivas para sólidos isotrópicos usando el principio de la superposición, y tomando como base las expresiones $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ y $\varepsilon_{lateral} = -\nu \varepsilon_{longitudinal}$, donde E era el módulo de elasticidad y ν el coeficiente o módulo de Poisson. En la Sección 3.5.2 se obtenía

$$\varepsilon_{11} = \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{22} + T_{33}), \quad (12.203)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{T_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{33}), \quad (12.204)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{T_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22}), \quad (12.205)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{T_{12}}{2G}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{T_{13}}{2G}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{T_{23}}{2G}, \quad (12.206)$$

donde G sería el módulo de corte. De (12.199) tenemos, por ejemplo, que:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} T_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} (T_{11} + T_{22} + T_{33}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{T_{12}}{2\mu},$$

y de (12.203)-(12.206) podemos obtener las relaciones

$$\mu = G, \quad (12.207)$$

y

$$\frac{1}{2\mu} \left[1 - \frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)} \right] = \frac{1}{E}, \quad \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} = \frac{\nu}{E},$$

de donde se tiene

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (12.208)$$

Dos ejemplos para materiales anisotrópicos

Antes de mostrar las formas más conocidas para las ecuaciones constitutivas para el caso de materiales ortotrópicos y transverso isotrópicos, considerémos la relación $T_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Esta ecuación constitutiva bajo ciertas condiciones que no se discutirán aquí se puede invertir y escribir como

$$\varepsilon_{ij} = \mathcal{K}_{ijkl}T_{kl}, \quad (12.209)$$

donde \mathcal{K}_{ijkl} es conocido como el tensor de complianza. Se cumplen las simetrías $\mathcal{K}_{ijkl} = \mathcal{K}_{jikl} = \mathcal{K}_{ijlk} = \mathcal{K}_{klij}$. La ecuación constitutiva (12.209) también se puede escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{1111} & \mathcal{K}_{1122} & \mathcal{K}_{1133} & \mathcal{K}_{1112} & \mathcal{K}_{1113} & \mathcal{K}_{1123} \\ \mathcal{K}_{1122} & \mathcal{K}_{2222} & \mathcal{K}_{2233} & \mathcal{K}_{2212} & \mathcal{K}_{2213} & \mathcal{K}_{2223} \\ \mathcal{K}_{1133} & \mathcal{K}_{2233} & \mathcal{K}_{3333} & \mathcal{K}_{3312} & \mathcal{K}_{3313} & \mathcal{K}_{3323} \\ \mathcal{K}_{1112} & \mathcal{K}_{2212} & \mathcal{K}_{3312} & \mathcal{K}_{1212} & \mathcal{K}_{1213} & \mathcal{K}_{1223} \\ \mathcal{K}_{1113} & \mathcal{K}_{2213} & \mathcal{K}_{3313} & \mathcal{K}_{1213} & \mathcal{K}_{1313} & \mathcal{K}_{1323} \\ \mathcal{K}_{1123} & \mathcal{K}_{2223} & \mathcal{K}_{3323} & \mathcal{K}_{1223} & \mathcal{K}_{1323} & \mathcal{K}_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix}, \quad (12.210)$$

donde se define

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{1111} & \mathcal{K}_{1122} & \mathcal{K}_{1133} & \mathcal{K}_{1112} & \mathcal{K}_{1113} & \mathcal{K}_{1123} \\ \mathcal{K}_{1122} & \mathcal{K}_{2222} & \mathcal{K}_{2233} & \mathcal{K}_{2212} & \mathcal{K}_{2213} & \mathcal{K}_{2223} \\ \mathcal{K}_{1133} & \mathcal{K}_{2233} & \mathcal{K}_{3333} & \mathcal{K}_{3312} & \mathcal{K}_{3313} & \mathcal{K}_{3323} \\ \mathcal{K}_{1112} & \mathcal{K}_{2212} & \mathcal{K}_{3312} & \mathcal{K}_{1212} & \mathcal{K}_{1213} & \mathcal{K}_{1223} \\ \mathcal{K}_{1113} & \mathcal{K}_{2213} & \mathcal{K}_{3313} & \mathcal{K}_{1213} & \mathcal{K}_{1313} & \mathcal{K}_{1323} \\ \mathcal{K}_{1123} & \mathcal{K}_{2223} & \mathcal{K}_{3323} & \mathcal{K}_{1223} & \mathcal{K}_{1323} & \mathcal{K}_{2323} \end{pmatrix}. \quad (12.211)$$

Para el caso de materiales ortotrópicos (ver (12.165)) la forma más conocida de \mathbf{K} es

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{pmatrix}. \quad (12.212)$$

En el caso de materiales transverso isotrópicos (ver (12.180)) se tiene que

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_p} & -\frac{\nu_p}{E_p} & -\frac{\nu_{tp}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_p}{E_p} & \frac{1}{E_p} & -\frac{\nu_{tp}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{tp}}{E_t} & -\frac{\nu_{tp}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_p} \end{pmatrix}. \quad (12.213)$$

12.7. Problema de valor de frontera

Esta sección es importante, pues aquí resumiremos las diversas cosas vistas en las secciones anteriores y se verá que tipo de problema es necesario resolver para obtener los campos de desplazamientos y esfuerzos dado un cuerpo de cierta geometría inicial bajo diversas cargas externas y restricciones a sus desplazamientos. Solo estudiaremos de ahora en adelante el caso de cuerpos isotrópicos.

12.7.1. Ecuaciones

De (12.47) teníamos la ecuación de equilibrio de Cauchy y de la segunda ley de movimiento de Euler (12.51):

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T,$$

de donde se tiene finalmente

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

La relación esfuerzo-deformación para el caso de materiales isotrópicos era (12.197):

$$\mathbf{T} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

En (12.117) se había encontrado la relación cinemática entre desplazamientos y deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

En resumen, en notación indicial tenemos⁹:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad 3 \text{ Ecuaciones, } T_{ij} \text{ 6 componentes, (12.214)}$$

$$T_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad 6 \text{ Ecuaciones, } \varepsilon_{ij} \text{ 6 componentes, (12.215)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 6 \text{ Ecuaciones, } u_i \text{ 3 componentes, (12.216)}$$

es decir en total tendríamos 15 ecuaciones para encontrar 15 incógnitas, de manera tal que el sistema se llama en Inglés ‘well posed’.

⁹En general se asume que $b_i = 0$, a menos que se trabaje con grandes estructuras en donde las cargas de cuerpo por peso (gravedad) sean importantes. Otro tipo de problema en donde \mathbf{b} puede ser importante es en el caso de materiales piezoelectrónicos o magneto-activos, en donde aparece un \mathbf{b} asociado a dichos campos magnéticos y/o eléctricos.

12.7.2. Condiciones de borde

Las ecuaciones (12.214)-(12.216) deben ser resueltas considerando ciertas condiciones de borde, las cuales usualmente se clasifican en fuerzas de superficie y restricciones al desplazamiento. Estas condiciones en realidad son modelos matemáticos que intentan aproximar el contacto de dos o más cuerpos.

En la Figura 12.21 se tiene un esquema básico en donde se muestra un cuerpo \mathcal{B} , el cual está bajo el efecto de cargas externas en una parte de su superficie $\partial\mathcal{B}_t$, en tanto en otra parte de su superficie $\partial\mathcal{B}_u$ se asume la existencia de algún tipo de restricción a los desplazamientos. Se tiene entonces:

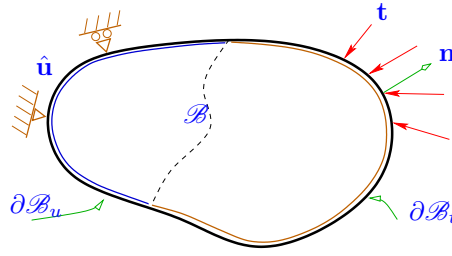


Figura 12.21: Cuerpo y condiciones de borde.

$$\text{En } \partial\mathcal{B}_t : \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{n}}_{\text{Fuerzas internas}} = \underbrace{\hat{\mathbf{t}}}_{\text{Fuerza externa}} \quad \text{Condición de Newman, (12.217)}$$

$$\text{En } \partial\mathcal{B}_u : \mathbf{u} = \underbrace{\hat{\mathbf{u}}}_{\text{Desplazamiento conocido}} \quad \text{Condición de Dirichlet. (12.218)}$$

Si $\partial\mathcal{B}$ es la superficie total del cuerpo \mathcal{B} se cumple que¹⁰

$$\partial\mathcal{B}_t \cup \partial\mathcal{B}_u = \partial\mathcal{B}, \quad \partial\mathcal{B}_t \cap \partial\mathcal{B}_u = \emptyset. \quad (12.219)$$

Ejemplos

Se mostrarán dos ejemplos de problemas planos en donde se verá el significado de las condiciones de borde mencionadas anteriormente.

En el primer ejemplo mostrado en la Figura 12.22 tenemos una viga empotrada en su extremo izquierdo y bajo el efecto de una carga uniforme σ_o aplicada en una parte de la superficie superior de la viga. En la Figura 12.23 se puede apreciar la misma viga anterior, en donde se puede ver el significado de las condiciones de borde para las cargas o fuerzas externas y para las restricciones a los desplazamientos. Se tiene:

$$\partial\mathcal{B}_u : \quad \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{empotrado,}$$

¹⁰Nótese que en problemas planos las superficies $\partial\mathcal{B}$, $\partial\mathcal{B}_u$ y $\partial\mathcal{B}_t$ son solo líneas.

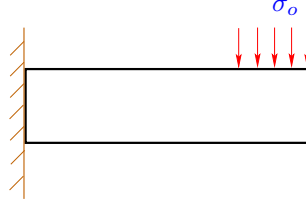


Figura 12.22: Viga empotrada.

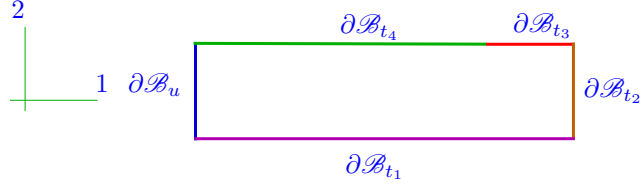


Figura 12.23: Viga empotrada. Descomposición de la superficie del cuerpo de acuerdo a las condiciones de borde.

por otra parte $\partial\mathcal{B}_t = \partial\mathcal{B}_{t_1} \cup \partial\mathcal{B}_{t_2} \cup \partial\mathcal{B}_{t_3} \cup \partial\mathcal{B}_{t_4}$, donde

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{B}_{t_1} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = -\hat{\mathbf{j}} = -\mathbf{e}_2, \\ \partial\mathcal{B}_{t_2} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \\ \partial\mathcal{B}_{t_3} &: \hat{\mathbf{t}} = -\sigma_o \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \\ \partial\mathcal{B}_{t_4} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

En la Figura 12.24 tenemos un segundo ejemplo, en donde se tiene una placa plana con un agujero circular en el centro, bajo el efecto de una tracción externa aplicada lejos del agujero y uniforme. En la Figura 12.25 se tiene la misma placa ahora mostrando los tipos de condiciones de borde de acuerdo a (12.217), (12.218). En este caso la superficie $\partial\mathcal{B}$ sería igual a $\partial\mathcal{B}_t$. Se tiene

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{B}_{t_1} &: \hat{\mathbf{t}} = \sigma_\infty \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \\ \partial\mathcal{B}_{t_2} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \\ \partial\mathcal{B}_{t_3} &: \hat{\mathbf{t}} = -\sigma_\infty \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}_2, \\ \partial\mathcal{B}_{t_4} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}_1, \\ \partial\mathcal{B}_{t_5} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \text{ es normal al agujero.} \end{aligned}$$

Si el agujero se ubica justo en el centro de la placa y las cargas externas son uniformes, cuando se estudia este problema en elementos finitos, es usual reducir el costo computacional considerando no la placa completa, sino un cuarto de ella, tal como se muestra en la Figura 12.26.

La justificación de esto viene del hecho de que tanto el campo de desplazamientos como el de esfuerzos tienen ciertas simetrías respecto a los ejes 1 y 2.

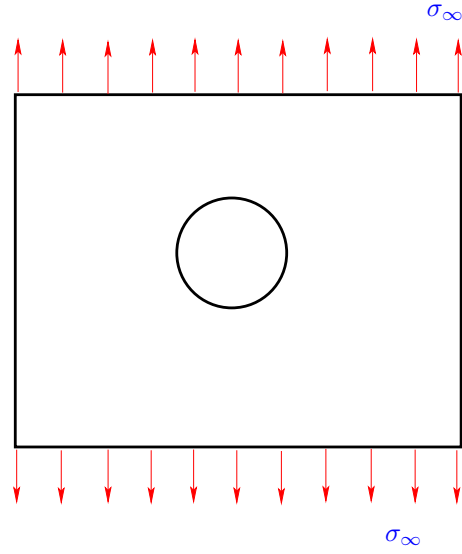


Figura 12.24: Placa plana con agujero bajo tracción uniforme lejos.

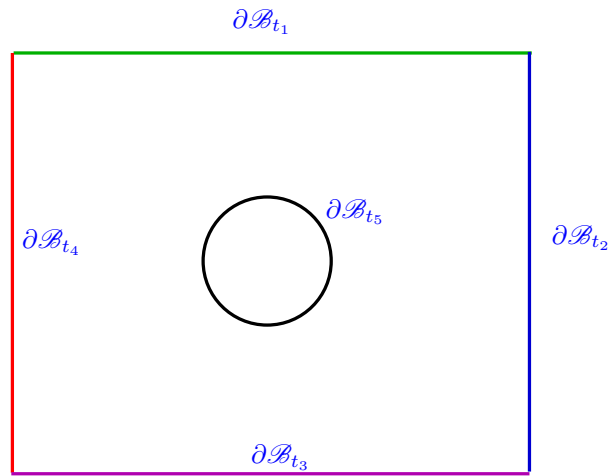


Figura 12.25: Placa plana con agujero bajo tracción uniforme lejos. Descomposición de la superficie del cuerpo de acuerdo a las condiciones de borde.

En este caso se tiene tanto superficies en donde se conocen las cargas externas

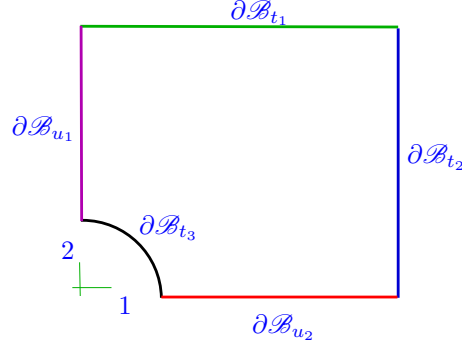


Figura 12.26: Placa plana con agujero bajo tracción uniforme lejos. Descomposición de la superficie del cuerpo de acuerdo a las condiciones de borde. Modelo cuarto de placa.

como superficies en donde se conocen los desplazamientos:

$$\begin{aligned}
 \partial B_{t_1} &: \hat{\mathbf{t}} = \sigma_\infty \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \\
 \partial B_{t_2} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \\
 \partial B_{t_3} &: \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \text{ Es normal al agujero,} \\
 \partial B_{u_1} &: \hat{\mathbf{u}} = u_2 \mathbf{e}_2, \quad \text{No se puede desplazar en dirección 1, libre en dirección 2,} \\
 \partial B_{u_2} &: \hat{\mathbf{u}} = u_1 \mathbf{e}_1, \quad \text{No se puede desplazar en dirección 2, libre en dirección 1.}
 \end{aligned}$$

12.7.3. Ecuación de Navier

Vamos ahora a reducir el problema (12.214)-(12.216), en este caso escribiendo todo en términos de las componentes del campo de desplazamiento. Si se reemplaza (12.216) en (12.215) se obtiene

$$T_{ij} = 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}} \delta_{ij},$$

luego

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \underbrace{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j}}_{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i}} \delta_{ij},$$

pero como j y k son índices mudos en la expresión anterior se tiene que

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j},$$

luego reemplazando esta expresión en (12.214) se obtiene finalmente:

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.220)$$

Este es un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden en general acopladas y de cuya solución se puede obtener las tres componentes del campo de desplazamientos $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$ y $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$. Estas son llamadas las ecuaciones de Navier.

Se puede probar que esta ecuación se puede escribir como:

$$(\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (12.221)$$

12.7.4. Ecuaciones en coordenadas Cartesianas

En el caso de usar coordenadas Cartesianas usualmente la notación (x_1, x_2, x_3) para indicar la posición se cambia por (x, y, z) . En la Figura 12.27 se tiene una representación del estado de esfuerzos para un elemento diferencial. Se ha cam-

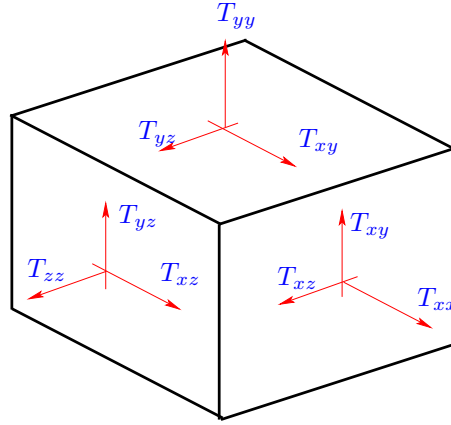


Figura 12.27: Elemento diferencial para representar el estado de esfuerzos en el caso del uso de coordenadas Cartesianas.

biado la notación T_{ij} por T_{xx} , T_{yy} , T_{zz} para las componentes normales del esfuerzo y por T_{xy} , T_{xz} y T_{yz} para las componentes en corte.

Las ecuaciones de equilibrio de Cauchy (12.214) quedarían como:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \rho b_x = 0, \quad (12.222)$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} + \rho b_y = 0, \quad (12.223)$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho b_z = 0, \quad (12.224)$$

donde b_x , b_y y b_z son las componentes del vector fuerza de cuerpo.

El tensor de deformación tiene la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (12.225)$$

La relación desplazamiento-deformación (12.216), usando la notación (u, v, w) para (u_1, u_2, u_3) quedaría como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (12.226)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (12.227)$$

12.7.5. Ecuaciones en coordenadas cilíndricas

Considerémos en esta sección el caso en que la posición de un punto se expresan por medio de coordenadas cilíndricas, en donde (x_1, x_2, x_3) se transforma en (r, θ, z) para la posición radial (respecto a un eje dado), angular y axial.

En este caso el tensor de esfuerzos \mathbf{T} tiene la representación dada en la Figura 12.28. Nótese en particular la orientación de los esfuerzos, que en realidad depende de como se definen los ejes y que caras del elemento se estan mirando. El uso de este tipo de coordenadas se encuentra en particular en el modelo de

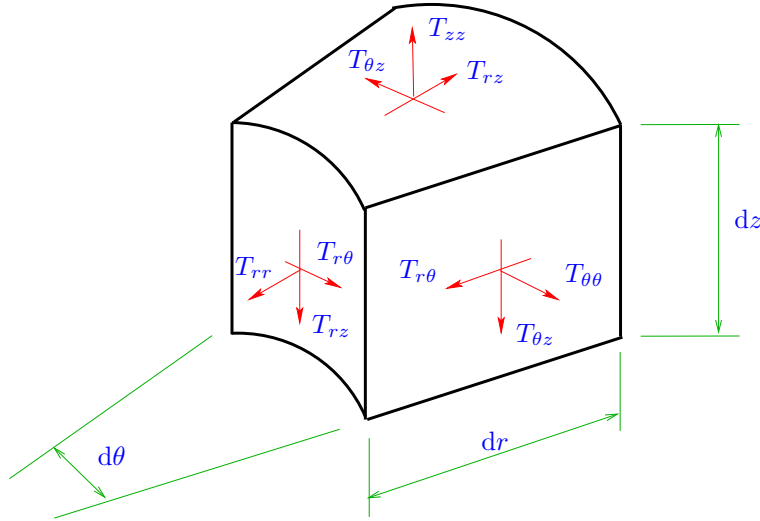


Figura 12.28: Elemento diferencial para representar el estado de esfuerzos en el caso del uso de coordenadas cilíndricas.

estanques, tuberías de sección circular y para problemas planos en el estudio

de los esfuerzos para placas con agujeros circulares y también en problemas de placas con grietas.

A continuación se deducirán las ecuaciones de equilibrio y las relaciones desplazamiento - deformación para este sistema de coordenadas, considerando o haciendo uso del elemento infinitesimal mostrado en las Figuras 12.30, 12.31. Es necesario hacer notar que no es obligatorio realizar la demostración de estas expresiones para cada sistema de coordenadas particular que se use, puesto que basta considerar, por ejemplo, (12.47) y (12.116) con los operadores diferenciales convenientemente definidos en el sistema de coordenadas particular. Mostraremos las ecuaciones a partir de los elementos diferenciales como modo de complementar las cosas vistas en la Sección 12.5.2 en donde se obtuvieron varias cosas para el caso plano con coordenadas Cartesianas.

Ecuaciones de equilibrio en coordenadas cilíndricas

En la Figura 12.29 tenemos diferentes vistas del elemento diferencial mostrado en la Figura 12.28, en los planos $r - z$, $\theta - z$ y $r - \theta$.

En cada cara de este elemento diferencial, para los distintos planos, podemos ver las diferentes componentes del tensor de esfuerzos, evaluados en r , θ , z , $r + dr$, $\theta + d\theta$ y $z + dz$, en donde se ha hecho uso de una expansión en Taylor para las expresiones evaluadas en $x_i + dx_i$ (ver, por ejemplo, la Sección 3.3.4).

Balance de fuerzas en la dirección radial: Considérese la suma de fuerzas en la dirección del eje r , teniendo cuidado de las áreas para determinar las fuerzas con los esfuerzos de las Figuras 12.28, 12.29, luego $\sum F_r = 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} & -T_{rr}rd\theta dz + \left(T_{rr} + \frac{\partial T_{rr}}{\partial r}dr\right)(r + dr)d\theta dz - T_{rz}rd\theta dz + \left(T_{rz} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}dz\right)rd\theta dr \\ & - \underbrace{T_{r\theta}drdz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)}_{\approx 1} + \left(T_{r\theta} + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta}d\theta\right)drdz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \underbrace{T_{\theta\theta}drdz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)}_{\approx \frac{d\theta}{2}} \\ & - \left(T_{\theta\theta} + \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}d\theta\right)drdz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \rho b_r dr rd\theta dz = 0, \end{aligned}$$

donde b_r es la componente radial de las fuerzas de cuerpo. La ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned} & -T_{rr}rd\theta dz + T_{rr}rd\theta dz + T_{rr}rd\theta dz + \frac{\partial T_{rr}}{\partial r}dr rd\theta dz + \frac{\partial T_{rr}}{\partial r}dr^2 rd\theta dz - T_{rz}rd\theta dz + T_{rz}rd\theta dz \\ & + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}dr rd\theta dz - T_{r\theta}drdz + T_{r\theta}drdz + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta}drd\theta dz - T_{\theta\theta}dr \frac{d\theta}{2}dz - T_{\theta\theta}dr \frac{d\theta}{2}dz \\ & - \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}dr \frac{d\theta^2}{2}dz + \rho b_r dr rd\theta dz = 0. \end{aligned}$$

Después de despreciar los términos multiplicados por $dr^2 d\theta dz$, $drd\theta^2 dz$, dividiendo por $dr rd\theta dz$, asumiendo que $r \neq 0$, simplificando algunas cosas, de la

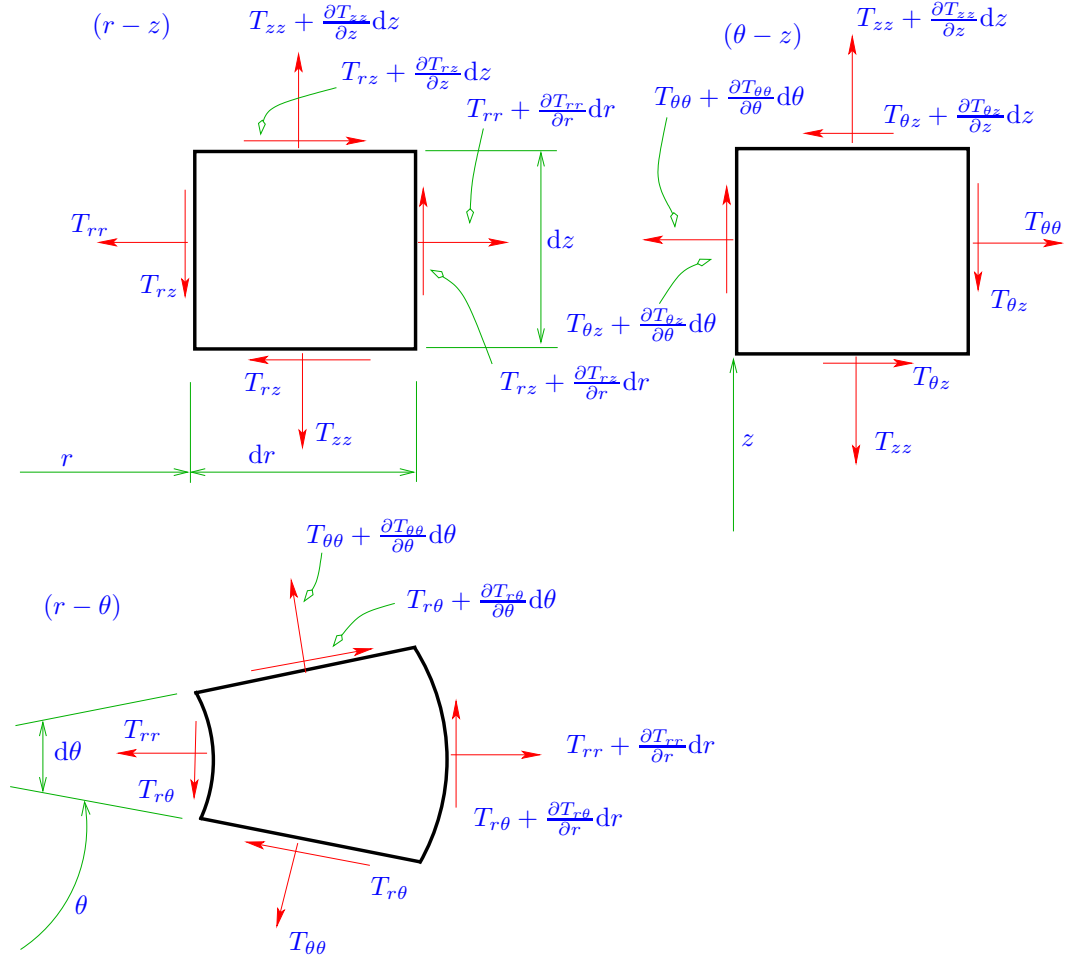


Figura 12.29: Elemento diferencial para representar el estado de esfuerzos en el caso del uso de coordenadas cilíndricas. Estado de esfuerzos en diferentes planos para el espacio (r, θ, z) .

ecuación anterior se llega a:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \rho b_r = 0. \quad (12.228)$$

Balance de fuerzas en la dirección angular: De la Figura 12.29 para el balance $\sum F_\theta = 0$ se tiene que es equivalente a:

$$\begin{aligned} & -T_{\theta\theta}drdz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \left(T_{\theta\theta} + \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)drdz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + T_{r\theta}drdz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \\ & + \left(T_{r\theta} + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}d\theta\right)drdz \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T_{r\theta}rd\theta dz + \left(T_{r\theta} + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta dz \\ & - T_{\theta z}rd\theta dr + \left(T_{\theta z} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}dz\right)rd\theta dr + \rho b_\theta dr rd\theta dz = 0, \end{aligned}$$

que queda como

$$\begin{aligned} & -T_{\theta\theta}drdz + T_{\theta\theta}drdz + \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}drd\theta dz + T_{r\theta}dr \frac{d\theta}{2}dz + T_{r\theta}dr \frac{d\theta}{2}dz + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}dr \frac{d\theta^2}{2}dz \\ & - T_{r\theta}rd\theta dz + T_{r\theta}rd\theta dz + T_{r\theta}drd\theta dz + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r}dr rd\theta dz + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r}dr^2d\theta dz - T_{\theta z}rd\theta dr \\ & + T_{\theta z}rd\theta dr + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}dr rd\theta dz + \rho b_\theta dr rd\theta dz = 0, \end{aligned}$$

dividiendo por $dr rd\theta dz$ y despreciando los términos multiplicados por $drd\theta^2dz$ y $dr^2d\theta dz$ se obtiene

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \rho b_\theta = 0. \quad (12.229)$$

Balance de fuerzas en el sentido del eje axial: Considerémos la Figura 12.29 y la suma $\sum F_z = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} & -T_{zz}rd\theta dr + \left(T_{zz} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}dz\right)rd\theta dr + \left(T_{rz} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta dz \\ & - T_{\theta z}drdz + \left(T_{\theta z} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta}d\theta\right)drdz + \rho b_z dr rd\theta dz = 0, \end{aligned}$$

que queda como

$$\begin{aligned} & -T_{zz}rd\theta dr + T_{zz}rd\theta dr + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}dr rd\theta dz - T_{rz}rd\theta dz + T_{rz}rd\theta dz + T_{rz}drd\theta dz \\ & + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}dr rd\theta dz + \frac{\partial T_{rz}}{\partial r}dr^2d\theta dz - T_{\theta z}drdz + T_{\theta z}drdz + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta}drd\theta dz \\ & + \rho b_z dr rd\theta dz = 0, \end{aligned}$$

que después de dividir por $dr rd\theta dz$ despreciando los términos multiplicados por diferenciales de tercer orden queda como

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} + \rho b_z = 0. \quad (12.230)$$

Resumen: De (12.228), (12.229) y (12.230) tenemos finalmente

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \rho b_r = 0, \quad (12.231)$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{T_{r\theta}}{r} + \rho b_\theta = 0, \quad (12.232)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} + \rho b_z = 0, \quad (12.233)$$

donde el tensor de esfuerzos tendrá la forma

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{r\theta} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{rz} & T_{\theta z} & T_{zz} \end{pmatrix}. \quad (12.234)$$

Relación desplazamiento-deformación en coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas el campo de desplazamientos es de la forma (u_r, u_θ, u_z) , donde a partir de un eje de simetría u_r sería el desplazamiento radial respecto a ese eje, u_θ el desplazamiento angular en torno a ese eje¹¹ y u_z el desplazamiento en la dirección axial o del eje.

Se definirá las diferentes componentes del tensor de deformación a partir de los campos de desplazamiento usando como base el elemento diferencial mostrado en la Figura 12.30.

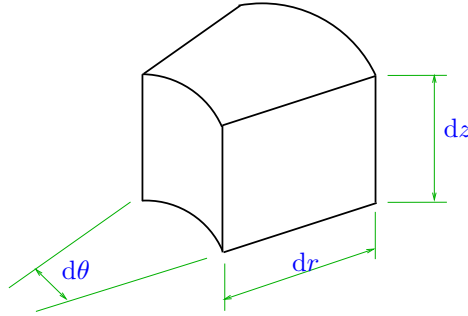


Figura 12.30: Elemento diferencial para determinar las deformaciones considerando coordenadas cilíndricas.

En la Figura 12.31 tenemos vistas del elemento mostrado en la Figura 12.30 en los tres planos principales $(r-z)$, (θ, z) y (r, θ) .

Definamos la deformación longitudinal radial ε_{rr} como:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\text{Cambio largo elemento dirección } r}{\text{Largo inicial dirección } r}, \quad (12.235)$$

¹¹El desplazamiento u_θ es la distancia que se desplaza (en metros en el sistema internacional) un punto en el sentido angular. El ángulo asociado a este desplazamiento sería $\frac{u_\theta}{r}$.

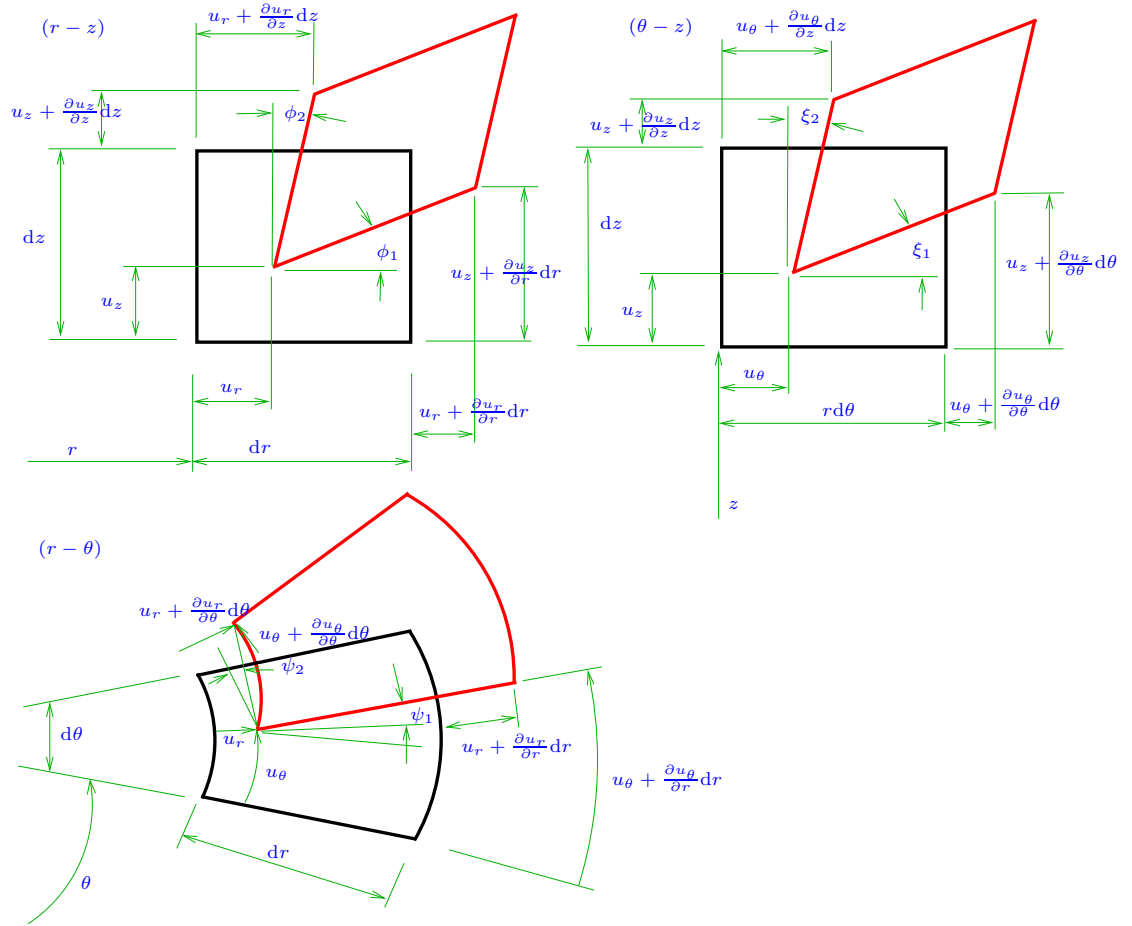


Figura 12.31: Elemento diferencial para determinar las deformaciones considerando coordenadas cilíndricas. Vistas en los diferentes planos del elemento al inicio y deformado (líneas rojas).

pero de la Figura 12.31 tenemos que

$$\text{Largo inicial} = dr, \quad (12.236)$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Largo final} &= \left[\left(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr + dr - u_r \right)^2 + \left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial r} dr - u_z \right)^2 \right]^{1/2}, \\
&= \left[dr^2 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} dr^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 dr^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 dr^2 \right]^{1/2}, \\
&= dr \left[1 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}, \\
&\approx dr \left(1 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^{1/2}, \\
&\approx dr \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \tag{12.237}
\end{aligned}$$

luego de (12.236) y (12.237) en (12.235) tenemos

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dr + dr \frac{\partial u_r}{\partial r} - dr}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \tag{12.238}$$

Definamos la deformación longitudinal en el sentido angular $\varepsilon_{\theta\theta}$ como:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\text{Cambio largo elemento dirección } \theta}{\text{Largo inicial dirección } \theta}, \tag{12.239}$$

pero de la Figura 12.31 tenemos

$$\text{Largo inicial} = r d\theta, \tag{12.240}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Largo final} &= (r + u_r) \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) + d\theta - \frac{u_\theta}{r} \right], \\
&= \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + r d\theta + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + u_r d\theta, \\
&\approx \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + u_r d\theta + r d\theta, \tag{12.241}
\end{aligned}$$

donde se ha despreciado el término $\frac{u_r}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta$ pues es de orden δ^2 . Luego de (12.240) y (12.241) en (12.239) se tiene

$$\varepsilon_{\theta\theta} \approx \frac{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + u_r d\theta + r d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}. \tag{12.242}$$

En el caso de la deformación longitudinal en el sentido axial, esta se define como

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\text{Cambio largo elemento dirección } z}{\text{Largo inicial dirección } z}, \tag{12.243}$$

que siguiendo una metodología similar a los dos casos anteriores, usando la Figura 12.31, se puede demostrar que

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (12.244)$$

En el caso de las componentes en corte de la deformación tenemos que

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \approx \frac{1}{2}(\tan \phi_1 + \tan \phi_2), \quad (12.245)$$

que es válido si los ángulos (en radianes) son pequeños. De la Figura 12.31 se cumple que

$$\tan \phi_1 \approx \frac{u_z + \frac{\partial u_z}{\partial r} dr - u_z}{dr} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \tan \phi_2 \approx \frac{u_r + \frac{\partial u_r}{\partial z} dz - u_r}{dz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (12.246)$$

por lo que (12.245) queda como

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \quad (12.247)$$

Se define la deformación en corte $\varepsilon_{r\theta}$ como (ver Figura 12.31)

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2), \quad (12.248)$$

pero

$$\psi_1 = \frac{u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr - u_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r}, \quad (12.249)$$

donde el término $-\frac{u_\theta}{r}$ viene de restarle al ángulo la rotación rígida del elemento (ver Figura 12.31 plano $(r - \theta)$), y la división por dr en el primer término viene del hecho de transformar las cantidades en ángulos, tomando el arco y dividiendo por el radio, en ese caso del movimiento angular solo del lado del elemento. Para el ángulo ψ_2 se tiene

$$\psi_2 \approx \tan \psi_2 \approx \frac{u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta - u_r}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (12.250)$$

Luego usando (12.249) y (12.250) en (12.248) se llega a

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (12.251)$$

Finalmente se define la deformación en corte $\varepsilon_{\theta z}$ como

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \quad (12.252)$$

pero de la Figura 12.31 se tiene que

$$\xi_1 \approx \tan \xi_1 = \frac{u_z + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} d\theta - u_z}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad (12.253)$$

$$\xi_2 \approx \tan \xi_2 = \frac{u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz - u_\theta}{dz} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad (12.254)$$

luego de (12.252) se obtiene

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \quad (12.255)$$

En resumen de los resultados anteriores se tiene:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (12.256)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (12.257)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad (12.258)$$

y el tensor de deformación ε tiene la forma:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (12.259)$$

El operador ∇ en coordenadas cilíndricas

Considérese la transformación de coordenadas de Cartesianas en cilíndricas

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (12.260)$$

De la regla de la cadena para la derivada se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} () = \frac{\partial}{\partial r} () \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \theta} () \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (12.261)$$

Usando esto en (12.260) se obtiene

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x_1} \cos \theta - r \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \sin \theta, \quad 0 = \frac{\partial r}{\partial x_1} \sin \theta + r \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cos \theta,$$

que se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se puede obtener $\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos \theta$ y $\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{\sin \theta}{r}$. Con un procedimiento similar se pueden obtener las derivadas en x_2 de r y θ . Luego para (12.261) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} () = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} () - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (), \quad (12.262)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} () = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} () + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (), \quad (12.263)$$

y es fácil demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\quad) = \frac{\partial}{\partial z}(\quad). \quad (12.264)$$

En coordenadas Cartesianas el operador ∇ tenía la forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3. \quad (12.265)$$

Pero

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \quad (12.266)$$

de donde se puede obtener

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_2 = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta, \quad (12.267)$$

también se tiene que

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z. \quad (12.268)$$

Luego con el uso de (12.262)-(12.264) y (12.267) en (12.265) se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla = & \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r}(\quad) - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\quad) \right) (\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \\ & \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(\quad) + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\quad) \right) (\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\quad)\mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

y después de algunas manipulaciones se llega a

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}(\quad)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\quad)\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(\quad)\mathbf{e}_z. \quad (12.269)$$

12.7.6. Ecuaciones en coordenadas esféricas

En un sistema de coordenadas esférico la posición de un punto está dada por (r, θ, ϕ) tal como se muestra en la Figura 12.32. En dicha figura se pueden ver las componentes del tensor de esfuerzos para ese sistema de coordenadas. Dicho tensor de esfuerzos tiene la forma

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\phi} \\ T_{r\theta} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\phi} \\ T_{r\phi} & T_{\theta\phi} & T_{\phi\phi} \end{pmatrix}. \quad (12.270)$$

El uso de este sistema de coordenadas en el modelamiento del comportamiento mecánico de estanques de forma esférica y en el caso de la biomecánica considerando un modelo no lineal elástico en el estudio de aneurismas.

Siguiendo un procedimiento similar al caso de las coordenadas cilíndricas se puede obtener las ecuaciones de equilibrio para (12.214) como:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} T_{r\phi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) + \rho b_r = 0, \quad (12.271)$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} T_{r\theta} + \frac{2 \cos \phi}{r \sin \phi} T_{\theta\phi} + \rho b_\theta = 0, \quad (12.272)$$

$$\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} T_{r\phi} + \frac{\cos \phi}{r \sin \phi} (T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) + \rho b_\phi = 0. \quad (12.273)$$

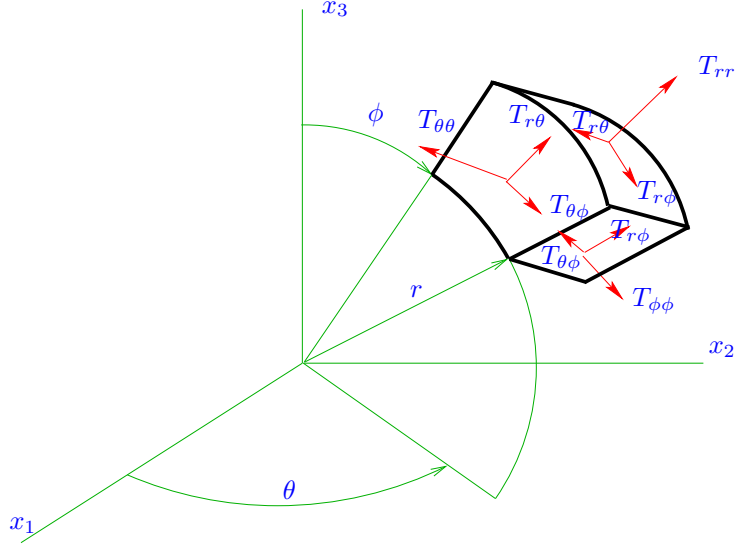


Figura 12.32: Elemento diferencial para representar el estado de esfuerzos en el caso del uso de coordenadas esféricas.

En cuanto a la relación desplazamiento-deformación, el campo de desplazamientos y el de deformación tienen la forma

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\phi} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\phi} \\ \varepsilon_{r\phi} & \varepsilon_{\theta\phi} & \varepsilon_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad (12.274)$$

y la relación entre las componentes de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y \mathbf{u} es:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (12.275)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \right), \quad (12.276)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad (12.277)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad (12.278)$$

$$\varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right), \quad (12.279)$$

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right). \quad (12.280)$$

12.7.7. Modelos simplificados en elasticidad

En muchos problemas puede resultar más práctico hacer algunas simplificaciones respecto a las deformaciones que sufren los cuerpos, de modo de poder trabajar con modelos bidimensionales en lugar del problema completo en tres dimensiones. En las siguientes secciones veremos tres casos importantes.

Esfuerzo plano

Asumamos que en un problema solo hay fuerzas y esfuerzos en el plano $x - y$ y no hay ninguna componente en z . De manera adicional se asume que el cuerpo donde se están aplicando las fuerzas es plano (está en el plano $x - y$) y muy delgado (en la dirección z), como consecuencia la deformación lateral (en z) sería despreciable. El elemento diferencial de la Figura 12.33 nos muestra el estado de esfuerzos bajo este supuesto.

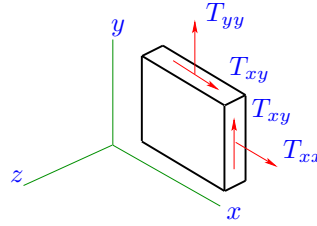


Figura 12.33: Elemento diferencial para análisis de esfuerzo plano.

Con la serie de supuestos anteriores se tiene que

$$T_{zz} = T_{xz} = T_{yz} = 0, \quad (12.281)$$

y de (12.203)-(12.206) tenemos que

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(T_{xx} - \nu T_{yy}), \quad (12.282)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(T_{yy} - \nu T_{xx}), \quad (12.283)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(T_{xx} + T_{yy}), \quad (12.284)$$

y calculando la inversa del sistema anterior tenemos

$$T_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}), \quad (12.285)$$

$$T_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}), \quad (12.286)$$

$$T_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}. \quad (12.287)$$

La deformación (alargamiento o acortamiento) en la dirección z es despreciable pero se puede calcular de (12.284). Por otra parte $\varepsilon_{xz} = 0$ y $\varepsilon_{yz} = 0$ se cumple siempre, o sea cuando el cuerpo se deforma se mantiene plano.

Deformación plana

Para introducir el siguiente modelo bidimensional es necesario considerar primero la Figura 12.34, en donde tenemos, por ejemplo, una representación esquemática de un muro de una presa. Se asume que la forma del estanque en el

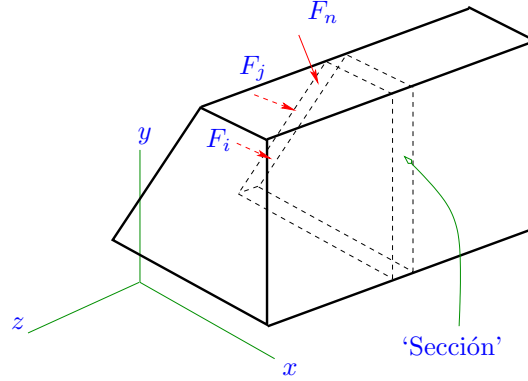


Figura 12.34: Ejemplo de cuerpo para análisis de deformación plana.

plano $x - y$ es la misma (o se repite) en la dirección del eje z . En la dirección del eje z se asume que este muro es *muy largo*. En cada plano $x - y$ en la dirección del eje z el muro está bajo el efecto del mismo sistema de fuerzas externas, o sea para cualquier sección (en la dirección del eje z) que se extraiga del muro el sistema de fuerzas es el mismo.

Imaginemos que se extrae del muro una sección o 'lonja' como se muestra con líneas punteadas en la Figura 12.34. Esta sección se muestra en la Figura 12.35.

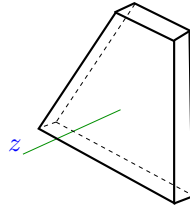


Figura 12.35: Elemento diferencial para análisis de deformación plana.

Como el muro es 'infinito' en la dirección del eje z , la sección no se puede desplazar (expandir o contraer) en la dirección dicho eje, pues el resto del muro a ambos lados (como es infinito) se lo impediría, luego se tiene como consecuencia

$$\varepsilon_{zz} = 0. \quad (12.288)$$

Por otra parte, debido a que la forma es la misma en z , y las fuerzas son las mismas en la dirección del eje z (las fuerzas solo tienen componente en el plano $x - y$), se tiene también

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (12.289)$$

Si se reemplaza (12.288), (12.289) en (12.195) se tiene

$$T_{xx} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}], \quad (12.290)$$

$$T_{yy} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}], \quad (12.291)$$

$$T_{zz} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad (12.292)$$

$$T_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{xy}, \quad T_{yz} = 0, \quad T_{xz} = 0. \quad (12.293)$$

De (12.292) podemos apreciar que T_{zz} no es cero, o sea si bien cada sección es plana $\varepsilon_{zz} = 0$, esto no implica necesariamente que el esfuerzo normal en esa dirección es cero. De hecho puede ocurrir que en algunos problemas este esfuerzo puede alcanzar valores muy altos.

Simetría axial

Este es uno de los tipos de simetrías más útiles en mecánica de sólidos. Para introducir este tipo de simetría es necesario partir con un ejemplo como el mostrado en la Figura 12.36, en donde tenemos un esquema de un estanque o tubería de sección circular, sometido a una presión interna P . En la figura vemos un sistema de coordenadas cilíndricas r, θ, z y un pequeño elemento diferencial de la pared.

En un problema de esta naturaleza, con este tipo de geometrías (u otras similares de sección circular), con este tipo de fuerzas actuando sobre, en este caso, el estanque o tubo, es posible ver que el estanque conservaría su forma circular una vez aplicada las fuerzas. Conservar la forma circular significaría conservar la ‘simetría axial’, y se habla de simetría axial porque la figura se obtiene por medio de una revolución de una sección respecto al eje axial z .

En la Figura 12.37 tenemos una vista ampliada del elemento diferencial mostrado con líneas punteadas en la Figura 12.36. El cubo diferencial se muestra en su forma inicial (línea llena) y en una posible situación final (deformada) en línea segmentada. Podemos ver en la Figura 12.38 una vista superior del cubo diferencial, y podemos apreciar el tipo de deformación que podría sufrir el cubo. Vemos que solo se produce expansión pero no corte en esta vista superior.

En el cubo diferencial de la Figura 12.37 tenemos las componentes del tensor de esfuerzos en el sistema cilíndrico. Debido a los tipos de deformación posible en un problema de este tipo solo las componentes $T_{\theta\theta}$, T_{rr} , T_{zz} y T_{rz} son distintos de cero.

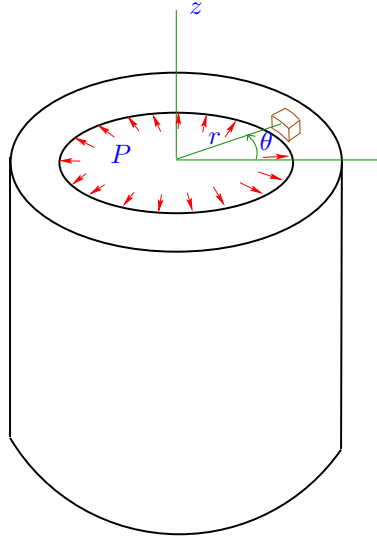


Figura 12.36: Estanque con presión interna.

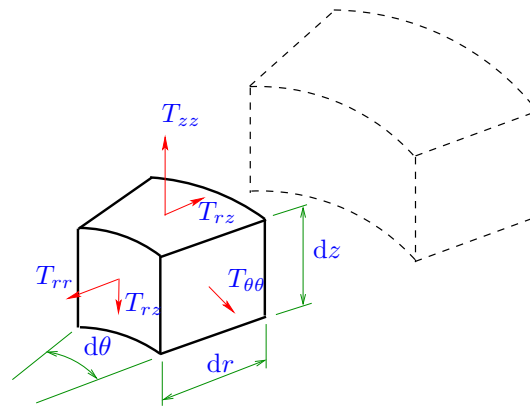


Figura 12.37: Elemento diferencial para problema con simetría axial.

12.8. Algunos métodos de solución exacta del problema de valor de frontera en elasticidad lineal

En Resistencia de Materiales se estudian problemas en donde se obtienen soluciones muy simplificadas para los esfuerzos en sólidos elásticos. En particular estas soluciones no son útiles en el caso de cuerpos con cambios bruscos en su

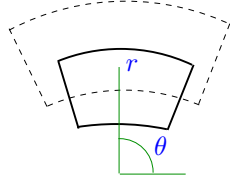


Figura 12.38: Elemento diferencial para problema con simetría axial. Vista superior mostrando las deformaciones admisibles.

geometría cuando se tienen distribuciones de esfuerzos *no uniformes*.

Los métodos numéricos de solución han reemplazado a las soluciones exactas, pero estos métodos numéricos son métodos aproximados (por ejemplo elementos finitos), la pregunta es: ¿Con qué comparamos estas soluciones numéricas?

Hay problemas prácticos que se repiten con frecuencia en diseño, como por ejemplo el estudio de estanques de pared gruesa de forma cilíndrica o esférica, placas planas con agujeros, etc. En lugar de solucionar con, por ejemplo, elementos finitos para cada nueva aplicación con las geometrías anteriores, basta tener la solución analítica para cada problema y usarla en cada nueva aplicación.

En esta sección no se verá en detalle todos los métodos de solución exacta del problema de valor de frontera (12.214)-(12.216), ni todas las demostraciones asociadas a ellos, en particular no se verán teoremas de existencia y unicidad.

12.8.1. Potencial para el campo de desplazamiento

En el caso bidimensional la ecuación de Navier (12.220) nos queda:

$$(\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad (12.294)$$

$$(\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) = 0. \quad (12.295)$$

Estas son dos ecuaciones parciales lineales para encontrar $u_1(x_1, x_2)$ y $u_2(x_1, x_2)$. El método de separación de variables no se puede aplicar de manera directa para este problema.

Consideremos las siguientes identidades donde ϕ es un campo escalar y ψ es

un campo vectorial:

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = 0, \quad (12.296)$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} \phi = \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}, \quad (12.297)$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}, \quad (12.298)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi, \quad (12.299)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{Lapl} \boldsymbol{\psi} = \nabla \cdot (\nabla^2 \boldsymbol{\psi}) = \nabla^2(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) = \operatorname{Lapl} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}, \quad (12.300)$$

$$\operatorname{Lapl} \operatorname{grad} \phi = \nabla^2(\nabla \phi) = \nabla(\nabla^2 \phi) = \operatorname{grad} \operatorname{Lapl} \phi, \quad (12.301)$$

$$\operatorname{Lapl}(\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{x}) = \nabla^2(\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{x}) = 2\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} + \nabla \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi}, \quad (12.302)$$

$$\operatorname{div}(\phi \boldsymbol{\psi}) = \phi \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} + (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (12.303)$$

$$\operatorname{Lapl}(\phi \mathbf{x}) = 2\nabla \phi + \mathbf{x} \nabla^2 \phi. \quad (12.304)$$

- Si $\boldsymbol{\psi}$ es tal que $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ se dice que $\boldsymbol{\psi}$ es un campo solenoidal.
- Si $\boldsymbol{\psi}$ es tal que $\nabla \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ se dice que $\boldsymbol{\psi}$ es un campo irrotacional.
- Si $\boldsymbol{\psi}$ es irrotacional implica que existe ϕ tal que

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla \phi. \quad (12.305)$$

Sea un campo vectorial \mathbf{E} conocido tal que $\nabla \cdot \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{E}$ existen y no son cero, son finitos y si $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ se hace cero. Entonces existen \mathbf{U} irrotacional y \mathbf{V} solenoidal tal que

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} + \mathbf{V}. \quad (12.306)$$

Pero si \mathbf{U} es tal que $\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0}$ entonces

$$\mathbf{U} = \nabla \phi. \quad (12.307)$$

Si \mathbf{V} es tal que $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ entonces

$$\nabla = \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (12.308)$$

luego en (12.306) se tiene

$$\mathbf{E} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (12.309)$$

luego

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^2 \phi, \quad (12.310)$$

y $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}$; luego si se asume que $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$ se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{\psi}. \quad (12.311)$$

Se puede demostrar que las ecuaciones (12.310), (12.311) siempre tienen solución.

Caso ecuación de Navier

La ecuación de Navier (12.221) tenía la forma

$$(\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (12.312)$$

Asumamos que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, asumamos además que \mathbf{u} se puede escribir como (ver (12.309)):

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (12.313)$$

luego se cumple que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2\phi. \quad (12.314)$$

Por otra parte usando (12.298) se tiene que

$$\nabla^2\mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (12.315)$$

por lo que de (12.313) se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{u} &= \nabla[\nabla \cdot (\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi})] - \nabla \times [\nabla \times (\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi})], \\ &= \nabla(\nabla^2\phi) - \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi})], \\ &= \nabla(\nabla^2\phi) - \nabla \times [\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi})}_{\text{Se asume } = 0} - \nabla^2\boldsymbol{\psi}]. \end{aligned} \quad (12.316)$$

Luego (12.312) quedaría como

$$(\mu + \lambda)\nabla(\nabla^2\phi) + \mu[\nabla(\nabla^2\phi) + \nabla \times (\nabla^2\boldsymbol{\psi})] = \mathbf{0},$$

que se puede simplificar a

$$(2\mu + \lambda)\nabla(\nabla^2\phi) + \mu\nabla \times (\nabla^2\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}. \quad (12.317)$$

Si ϕ y $\boldsymbol{\psi}$ satisfacen esta ecuación entonces \mathbf{u} expresado como (12.313) es solución de la ecuación de Navier sin fuerzas de cuerpo.

Veamos algunos ejemplos simples de solución para (12.317):

■ Sean

$$\nabla^2\phi = \text{Constante}, \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad (12.318)$$

esta es conocida como el potencial de Lamé y de (12.313) se tiene

$$\mathbf{u} = \nabla\phi. \quad (12.319)$$

■ Proponer ϕ tal que $\nabla^2\phi = \text{Constante}$ no es difícil, pero el problema es encontrar dicha función tal que satisfaga las condiciones de borde de un problema en particular. Una solución para el problema anterior sería expresar ϕ por medio de una serie de Fourier donde para obtener las condiciones de borde deseadas para \mathbf{u} se ajustarían las constantes de la serie.

- Un ejemplo de solución de $(12.318)_1$ en dos dimensiones sería

$$\phi = A(x_1^2 - x_2^2) + 2Bx_1x_2,$$

de donde se tiene que

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 2A - 2A = 0 = \text{constante}.$$

- Otro ejemplo de solución de $(12.318)_1$ sería

$$\phi = C \log \frac{r}{K},$$

donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Se tiene que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = -\frac{C}{Kr^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{C}{Kr} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2},$$

pero $\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}$ y $\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} = -\frac{x_1^2}{r^3} + \frac{1}{r}$, luego eso implica que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = -\frac{2Cx_1^2}{Kr^4} + \frac{C}{Kr^2},$$

y una expresión similar se puede encontrar para $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}$, y finalmente se puede probar que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = -\frac{2C}{Kr^4} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{=r^2} + \frac{2C}{Kr^2} = 0.$$

Vector de Galerkin para el campo de desplazamientos

Consideremos nuevamente la ecuación de Navier sin fuerzas de cuerpo

$$(\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (12.320)$$

que en notación indicial es equivalente a

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.321)$$

Se puede demostrar (se deja como ejercicio) que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0, \quad (12.322)$$

donde

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (12.323)$$

Considerémos la siguiente posible representación para el campo de desplazamiento (en notación indicial)

$$2\mu u_i = C \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (12.324)$$

donde C es una constante por determinar.

De (12.324) se tiene que

$$2\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = C \frac{\partial^4 V_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^4 V_j}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_k}, \quad (12.325)$$

$$2\mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = C \frac{\partial^4 V_k}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^4 V_j}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i \partial x_k}, \quad (12.326)$$

luego reemplazando en la ecuación de Navier (12.324) tenemos

$$C \frac{\partial^4 V_k}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^4 V_j}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i \partial x_k} + (1 + 2\nu)C \frac{\partial^4 V_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^4 V_j}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_k} = 0. \quad (12.327)$$

Pero en la expresión anterior los índices j, k son mudos y solo el índice i es independiente, de modo que si \mathbf{V} es suficientemente continuo se tiene que

$$\frac{\partial^4 V_k}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^4 V_j}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^4 V_j}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_k}.$$

Usando esto en (12.327) y juntando términos semejantes se llega a

$$[C - 1 - (1 - 2\nu)] \frac{\partial^4 V_k}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i \partial x_k} + (1 - 2\nu)C \frac{\partial^4 V_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} = 0. \quad (12.328)$$

Si queremos que $C - 1 - (1 - 2\nu) = 0$ eso se cumple si $C = 2(1 - \nu)$, luego la ecuación de Navier es satisfecha si \mathbf{V} satisface

$$\frac{\partial^4 V_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad V_{i,jjkk} = 0, \quad (12.329)$$

que es una especie de ecuación bi-armónica para cada componente V_i de \mathbf{V} .

Reemplazando $C = 2(1 - \nu)$ en (12.324) tenemos la representación:

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (12.330)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\mu \mathbf{u} = 2(1 - \nu) \nabla^2 \mathbf{V} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (12.331)$$

Vector de Galerkin para el campo de desplazamientos: Caso especial para problemas axil-simétricos

Como primer paso en este caso especial asumimos que $\mathbf{V} = V_3 \mathbf{e}_3$, donde la condición (12.329) es equivalente a:

$$\nabla^2 \nabla^2 V_3 = 0. \quad (12.332)$$

De (12.324) tenemos

$$2\mu u_1 = -\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad 2\mu u_2 = -\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (12.333)$$

$$2\mu u_3 = 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2}. \quad (12.334)$$

Estas expresiones en coordenadas cilíndricas quedarían como

$$2\mu u_r = -\frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z}, \quad 2\mu u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z}, \quad (12.335)$$

$$2\mu u_z = 2(1-\nu) \nabla^2 V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}, \quad (12.336)$$

y en relación al término $\nabla^2 V_z$ en (12.336) de (12.269) tenemos

$$\nabla^2 V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}. \quad (12.337)$$

Usando (12.337) en (12.336) y (12.335), (12.336) en (12.256)-(12.258) se obtiene para las componentes del tensor de deformación

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2 \partial z}, \quad (12.338)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \right), \\ &= -\frac{1}{2\mu r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \right), \end{aligned} \quad (12.339)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left[2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right], \\ &= \frac{(1-\nu)}{\mu} \left(\frac{\partial^3 V_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 V_z}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^3}, \end{aligned} \quad (12.340)$$

y para las componentes en corte

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z} \right) - \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \right) \right], \\ &= \frac{1}{2\mu r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^3 V_z}{\partial r \partial \theta \partial z} \right), \end{aligned} \quad (12.341)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2\mu} \left(2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} \right) \right\}, \\
&= \frac{1}{4\mu} \left[2(1-\nu) \left(\frac{\partial^3 V_z}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 V_z}{\partial r \partial \theta^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^3 V_z}{\partial r \partial z^2} \right) - \frac{\partial^3 V_z}{\partial r \partial z^2} \right], \tag{12.342}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{2\mu} \left(2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \right] \right\}, \\
&= \frac{1}{4\mu} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^3 V_z}{\partial \theta \partial z^2} + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\frac{\partial^3 V_z}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 V_z}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 V_z}{\partial \theta \partial z^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 V_z}{\partial \theta \partial z^2} \right]. \tag{12.343}
\end{aligned}$$

Usando (12.338)-(12.343) en (12.197) $\mathbf{T} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}$ se obtiene T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, T_{zz} , $T_{r\theta}$, T_{rz} y $T_{\theta z}$.

Un caso de interés para problemas axil-simétricos es

$$V_z = V_z(r, z), \tag{12.344}$$

que en este caso especial es conocida como la función de esfuerzos de Love.

De (12.335)-(12.343) para este caso simplificado tenemos:

$$2\mu u_r = -\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta \partial z}, \quad u_\theta = 0, \tag{12.345}$$

$$2\mu u_z = 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}, \tag{12.346}$$

y

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^3 V_z}{\partial r^2 \partial z}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^3 V_z}{\partial r^2 \partial z}, \tag{12.347}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{(1-\nu)}{\mu} \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 V_z}{\partial z^3} \right) - \frac{\partial^3 V_z}{\partial z^3}, \tag{12.348}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = 0, \tag{12.349}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu) \left(\frac{\partial^3 V_z}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 V_z}{\partial r \partial z^2} \right) - \frac{\partial^3 V_z}{\partial r \partial z^2} \right], \tag{12.350}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = 0, \tag{12.351}$$

y de (12.197) se obtienen las componentes del tensor de esfuerzos

$$T_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \quad (12.352)$$

$$T_{\theta\theta} = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \quad (12.353)$$

$$T_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \quad (12.354)$$

$$T_{r\theta} = 0, \quad T_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad T_{\theta z} = 0. \quad (12.355)$$

12.8.2. Potencial para el campo de esfuerzos

Potencial para el problema de esfuerzos caso plano en coordenadas Cartesianas

En el caso que no hay fuerzas de cuerpo las ecuaciones de equilibrio (12.215) son:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (12.356)$$

Sea la función escalar $\Phi = \Phi(x, y)$ tal que

$$T_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad T_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (12.357)$$

reemplazando en (12.356)₁ tenemos

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

o sea (12.356)₁ es satisfecha de manera automática si Φ es suficientemente suave. Se puede demostrar lo mismo con (12.356)₂. La función Φ es conocida como la función de esfuerzos de Airy.

Sea (12.357) válida, luego considerémos las ecuaciones constitutivas para el caso lineal elástico isotrópico (12.203)-(12.206):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(1-\nu)}{E}T_{xx} - \frac{\nu}{E}(T_{yy} + T_{zz}), \quad (12.358)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{(1-\nu)}{E}T_{yy} - \frac{\nu}{E}(T_{xx} + T_{zz}), \quad (12.359)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{(1-\nu)}{E}T_{zz} - \frac{\nu}{E}(T_{xx} + T_{yy}), \quad (12.360)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E}T_{xy}, \quad \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0, \quad (12.361)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(T_{xx} + T_{yy}), \quad (12.362)$$

luego usando (12.357) en (12.358), (12.359), (12.361)₁ (asumiendo que $T_{zz} = 0$,

$T_{xz} = T_{yz} = 0$) se obtiene

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \quad (12.363)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \quad (12.364)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (12.365)$$

Las tres componentes del tensor de deformación (12.363)-(12.365) se deben asociar con las dos componentes del campo de desplazamientos en 2D por medio de (12.216)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy}. \quad (12.366)$$

O sea tendríamos 3 ecuaciones para dos incógnitas u_1 , u_2 , que pueden encontrarse de (12.366) si y solo si las componentes del tensor de deformación satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (12.144), (12.145), (12.148), (12.149), (12.152) y (12.153). En este caso la ecuación de compatibilidad a considerar es (12.152):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (12.367)$$

pero reemplazando (12.363)-(12.365) en (12.367) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^4} \right) + \frac{(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^4} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -\frac{2}{E} (1+\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}, \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^4} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{2}{E} (1+\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}, \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) = 0, \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad (12.368) \end{aligned}$$

que es conocida como la ecuación bi-armónica, donde en el caso plano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Debido a que de (12.357) y (12.362) en general $\varepsilon_{zz} \neq 0$, es necesario también satisfacer la ecuación de compatibilidad (12.149) $\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0$, pero en general no se considera esta ecuación debido a que para el problema de esfuerzo plano el cuerpo es muy delgado y por tanto esta deformación no sería importante.

Potencial para el esfuerzo para el caso tridimensional en coordenadas Cartesianas

Para el caso 3D sin fuerzas de cuerpo, sea \mathbf{a} un tensor de segundo orden simétrico, tal que las componentes del tensor de esfuerzos \mathbf{T} se definen como:

$$T_{ij} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}a_{km,ln} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\frac{\partial^2 a_{km}}{\partial x_l \partial x_n}. \quad (12.369)$$

El tensor de esfuerzos dado por (12.369) es solución de la ecuación de equilibrio

$$T_{ij,j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

Veamos si (12.369) es realmente solución de las ecuaciones de equilibrio, para ello calculemos, por ejemplo, T_{11} . De (12.369) se tiene que¹²

$$\begin{aligned} T_{11} &= \epsilon_{1kl}\epsilon_{1mn}a_{km,ln} = \epsilon_{123}\epsilon_{1mn}a_{2m,3n} + \epsilon_{132}\epsilon_{1mn}a_{3m,2n}, \\ &= \epsilon_{123}\epsilon_{123}a_{22,33} + \epsilon_{123}\epsilon_{132}a_{23,32} + \epsilon_{132}\epsilon_{123}a_{32,23} \\ &\quad + \epsilon_{132}\epsilon_{132}a_{33,22}, \\ &= a_{22,33} + a_{33,22} - 2a_{23,23}, \end{aligned} \quad (12.370)$$

en donde se ha usado el hecho que $a_{ij} = a_{ji}$ y que para a_{ij} suficientemente suave $a_{ij,kl} = a_{ij,lk}$.

De manera similar se puede probar que

$$T_{22} = a_{33,11} + a_{11,33} - 2a_{13,13}, \quad (12.371)$$

$$T_{33} = a_{11,22} + a_{22,11} - 2a_{12,12}, \quad (12.372)$$

$$T_{12} = a_{23,13} + a_{13,23} - a_{33,12} - a_{12,33}, \quad (12.373)$$

$$T_{13} = a_{12,23} + a_{23,12} - a_{22,13} - a_{13,22}, \quad (12.374)$$

$$T_{23} = a_{13,12} + a_{12,13} - a_{11,23} - a_{23,11}. \quad (12.375)$$

Veamos ahora si la primera de las ecuaciones de equilibrio $\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} = 0$ es o no satisfecha. Usando (12.370), (12.373) y (12.374) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} &= a_{22,331} + a_{33,221} - 2a_{23,123} + a_{23,123} + a_{13,223} - a_{33,122} \\ &\quad - a_{12,233} + a_{12,233} + a_{23,123} - a_{22,133} - a_{13,223} = 0, \end{aligned}$$

en donde se ha asumido nuevamente a a_{ij} suficientemente suave para el intercambio de los índices asociados a las derivadas parciales.

De una manera similar se puede probar que $\frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} = 0$ y $\frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} = 0$ son también satisfechas.

Usando (12.369) en (12.199) $\epsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}T_{ij} - \frac{\nu}{E}T_{kk}\delta_{ij}$, y luego reemplazando en las 6 ecuaciones de compatibilidad (12.144), (12.145), (12.148), (12.149), (12.152) y (12.153) para ϵ_{ij} obtendríamos finalmente 6 ecuaciones en derivadas

¹²Es necesario recordar las propiedades de ϵ_{ijk} de la Sección 12.1.2.

parciales lineales acopladas de cuarto orden para las 6 componentes independientes de \mathbf{a} .

En comparación con las 3 ecuaciones de Navier (12.220) que son de segundo orden para las componentes del campo de desplazamientos, en el caso 3D no sería tan conveniente trabajar con el potencial para los esfuerzos, debido a que tenemos que resolver mas ecuaciones y que además son de orden mayor.

Potencial de esfuerzos para el caso de esfuerzo plano y usando coordenadas polares

En el caso plano considerando coordenadas cilíndricas de (12.231)-(12.233) si $T_{zz} = T_{rz} = T_{\theta z} = 0$ las ecuaciones de equilibrio serían:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad (12.376)$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} T_{r\theta} = 0. \quad (12.377)$$

Sea la función escalar $\Phi = \Phi(r, \theta)$ tal que las componentes del tensor de esfuerzos estan dadas como:

$$T_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad T_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad T_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (12.378)$$

Los esfuerzos expresados de esta forma son solución de (12.376), (12.377). Verifiquemos si (12.376) es efectivamente satisfecha. De (12.378) en (12.376) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} \\ &\quad - \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0, \end{aligned}$$

o sea (12.376) es satisfecha.

De manera similar a los casos mencionados anteriormente, de (12.199) se obtienen las componentes del tensor de deformación en coordenadas polares en términos de Φ , y para que se pueda asociar a dichas deformaciones un campo de desplazamientos continuo es necesario que las ecuaciones de compatibilidad sean satisfechas. En coordenadas cilíndricas las ecuaciones de compatibilidad

(12.144), (12.145), (12.148), (12.149), (12.152) y (12.153) tienen la forma:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right), \quad (12.379)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta z}}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} \right), \quad (12.380)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z}, \quad (12.381)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varepsilon_{\theta z}}{r} \right), \quad (12.382)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\varepsilon_{\theta z}}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}, \quad (12.383)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\varepsilon_{\theta z}}{r} \right). \quad (12.384)$$

En este caso particular se tiene que

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r, \theta), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta}(r, \theta), \quad (12.385)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(r, \theta). \quad (12.386)$$

Esta última componente del tensor de deformación no es cero, pero si es muy pequeña dado que se asume que el cuerpo es plano y muy delgado.

Considerando (12.378) (con $T_{rz} = T_{\theta z} = T_{zz} = 0$), (12.199) de las ecuaciones (12.379)-(12.384) quedaría (12.379), en tanto que (12.380), (12.381) y (12.382) se reducirían, respectivamente a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r \partial \theta} = 0, \quad -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta} = 0. \quad (12.387)$$

En general como aproximación no se considera solucionar estas ecuaciones dado que se asume que ε_{zz} y sus derivadas son muy pequeñas.

Usando las expresiones para T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, $T_{r\theta}$ en función de $\Phi(r, \theta)$ en $\varepsilon = \frac{(1+\nu)}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}$ y reemplazando estas componentes de la deformación en (12.379) se obtiene:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad (12.388)$$

donde en este caso (ver (12.269)) $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. La ecuación (12.388) es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} = 0. \end{aligned} \quad (12.389)$$

Ejercicio: Potencial de esfuerzos para el caso de problemas axil-simétricos

Como se vió en la Sección 12.7.7, para el problema axil-simétrico se considera las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y se asume que los esfuerzos y deformaciones

solo dependen de (r, z) , además para un cuerpo de sección circular las cargas externas son tales que conserva su sección circular al deformarse, luego

$$T_{rr} = T_{rr}(r, z), \quad T_{\theta\theta} = T_{\theta,\theta}(r, z), \quad T_{zz} = T_{zz}(r, z), \quad (12.390)$$

$$T_{rz} = T_{rz}(r, z), \quad T_{r\theta} = T_{\theta z} = 0. \quad (12.391)$$

Considerando (12.390), (12.391), de (12.231)-(12.233) las ecuaciones de equilibrio para el problema axil-simétrico son:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad (12.392)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} = 0. \quad (12.393)$$

Sea la función escalar $\Phi = \Phi(r, z)$ tal que

$$T_{rr} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \quad (12.394)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad (12.395)$$

$$T_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (12.396)$$

$$T_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (12.397)$$

donde el operador ∇^2 se define en este caso como $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

- Verifique si la función Φ definida en (12.394)-(12.397) es o no solución de las ecuaciones de equilibrio (sin fuerzas de cuerpo) (12.392), (12.393).
- Considerando el estado de esfuerzos (12.394)-(12.397) y la ecuación constitutiva para un material lineal elástico isotrópico estudie si las componentes de la deformación tienen o no la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r, z), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r, z), \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(r, z), \\ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rz}(r, z), \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0, \end{aligned}$$

- Considerando las expresiones para las componentes del tensor de deformación del punto anterior, de la forma general para las ecuaciones de compatibilidad en coordenadas cilíndricas (12.379)-(12.384), obtenga la forma simplificada para dichas ecuaciones de compatibilidad en el caso axil-simétrico.
- El propósito de las ecuaciones de compatibilidad es asegurar cierta *suavidad* en las componentes de \mathbf{u} si $\boldsymbol{\varepsilon}$ es dada como función de Φ . Desde el punto de vista práctico eso implica pedir, por ejemplo, que derivadas del tipo $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$ sean iguales a $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}$ si $j \neq k$. Considerando el comentario anterior, estudie en detalle cuales de las ecuaciones de compatibilidad para el caso axil-simétrico obtenidas por Ud. en el punto anterior son *equivalentes* y cuales son independientes.

- Usando (12.394)-(12.397) en la ecuación constitutiva $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(1+\nu)}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}$, y reemplazando esto en la ecuación(ones) de compatibilidad independiente(s) del punto anterior, verifique si se obtiene o no una ecuación tipo biarmónica para Φ de la forma $\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$ donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

12.9. Solución de algunos problemas de valor de frontera en elasticidad lineal

En esta sección de verán la solución de varios problemas de valor de frontera.

12.9.1. Tubo cilíndrico bajo el efecto de presión interna y tracción axial

En este problema consideremos un tubo de largo inicial L , radios interno y externo r_i , r_o , respectivamente, el cual está bajo la acción de una presión interna P y también bajo el efecto de una carga axial como se muestra en la Figura 12.39, en donde por simplicidad se ha omitido la carga axial. En un problema

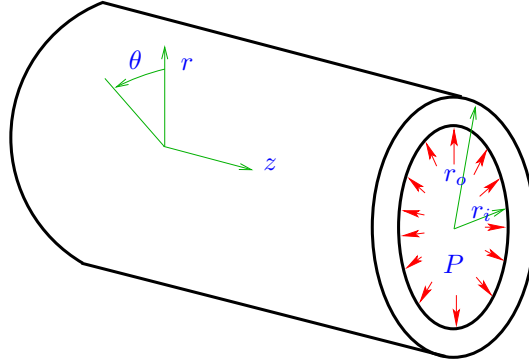


Figura 12.39: Tubo cilíndrico bajo el efecto de presión interna y carga axial.

de esta naturaleza es mejor describir la geometría del cuerpo, las ecuaciones y condiciones de borde en coordenadas cilíndricas, tal como se ilustra en la misma figura.

En este problema se trabajará con el campo de desplazamientos \mathbf{u} y con un método que podríamos clasificar como de la *semi-inversa*, en donde bajo las condiciones anteriores se asume que el campo de desplazamientos es de la forma:

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = (\lambda - 1)z, \quad (12.398)$$

donde $\lambda > 0$ es una constante relacionada con el alargamiento (acortamiento) del cilindro en la dirección axial z debido a la carga axial.

Usando (12.398) en (12.256)-(12.258) se tiene que las componentes del tensor de deformación son de la forma:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \lambda_z - 1, \quad (12.399)$$

donde $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$. Usando estas componentes en la ecuación constitutiva (12.215) se obtiene las componentes del tensor de esfuerzos:

$$T_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \quad (12.400)$$

$$T_{\theta\theta} = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \quad (12.401)$$

$$T_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \quad (12.402)$$

y $T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = 0$. Debido a que ε_{rr} y $\varepsilon_{\theta\theta}$ solo dependen de r y que ε_{zz} es constante, de las ecuaciones de equilibrio (12.231)-(12.233) la única que queda es

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0. \quad (12.403)$$

Usando (12.399) en (12.400)-(12.402) y esto en (12.403) se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[2\mu \frac{du_r}{dr} + \lambda \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \lambda_z - 1 \right) \right] + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) = 0, \\ \Leftrightarrow & (2\mu + \lambda) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \lambda \frac{d}{dr} \left(\frac{u_r}{r} \right) + \frac{2\mu}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2\mu}{r^2} u_r = 0, \\ \Leftrightarrow & (2\mu + \lambda) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (2\mu + \lambda) \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - (2\mu + \lambda) \frac{u_r}{r^2} = 0, \\ \Leftrightarrow & \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0, \\ \Leftrightarrow & \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{u_r}{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12.404)$$

Integrando la ecuación una vez en r tenemos

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = \tilde{C}_0, \quad (12.405)$$

donde \tilde{C}_0 es una constante por determinar con las condiciones de borde. La solución de esta ecuación tiene dos partes, una particular $u_r^P(r)$ y una homogénea $u_r^H(r)$, o sea

$$u_r(r) = u_r^H(r) + u_r^P(r). \quad (12.406)$$

Por simple inspección de se tiene que

$$u_r^P(r) = \frac{\tilde{C}_0}{2} r. \quad (12.407)$$

Por otra parte u_r^H tiene que satisfacer

$$\frac{du_r^H}{dr} + \frac{u_r^H}{r} = 0, \quad (12.408)$$

cuya solución es

$$u_r^H(r) = \frac{C_1}{r}, \quad (12.409)$$

donde C_1 es otra constante. Si se define $C_0 = \frac{\tilde{C}_0}{2}$, de (12.407) y (12.409) en (12.406) se obtiene la solución

$$u_r(r) = C_0 r + \frac{C_1}{r}. \quad (12.410)$$

Para encontrar las constantes C_0 y C_1 usaremos el hecho que $T_{rr}(r_i) = -P$ y $T_{rr}(r_o) = 0$, es decir el esfuerzo radial es igual a la presión interna aplicada en $r = r_i$ y en la superficie exterior del tubo no hay carga externa. Usando (12.410) en (12.399) se tiene que

$$\varepsilon_{rr} = C_0 - \frac{C_1}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = C_0 + \frac{C_1}{r^2},$$

y usando esto en (12.400) se obtiene

$$T_{rr}(r) = 2\mu \left(C_0 - \frac{C_1}{r^2} \right) + \lambda (2C_0 + \lambda_z - 1), \quad (12.411)$$

luego las condiciones de borde $T_{rr}(r_i) = -P$ y $T_{rr}(r_o) = 0$ quedan como:

$$\begin{aligned} 2\mu \left(C_0 - \frac{C_1}{r_i^2} \right) + \lambda (2C_0 + \lambda_z - 1) &= -P, \\ 2\mu \left(C_0 - \frac{C_1}{r_o^2} \right) + \lambda (2C_0 + \lambda_z - 1) &= 0, \end{aligned}$$

y resolviendo para C_0 , C_1 se obtiene

$$C_0 = \frac{(r_i^2 - r_o^2)\lambda(1 - \lambda_z) - Pr_i^2}{2(r_i^2 - r_o^2)(\lambda + \mu)}, \quad C_1 = \frac{Pr_i^2 r_o^2}{2\mu(r_o^2 - r_i^2)}. \quad (12.412)$$

Ejercicio: Usando (12.412) obtenga también $T_{\theta\theta}(r)$ y $T_{zz}(r)$ de (12.401), (12.402). Considere un tubo de acero de ciertas dimensiones y propiedades mecánicas dadas por Ud., y grafique en r las tres componentes del esfuerzo y estudie cual de ellas es en general la más importante o de mayor magnitud (en valor absoluto). Estudie también el caso en el que $r_o - r_i$ es muy pequeño, el cual viene a representar el problema del inflado de una membrana cilíndrica sometida a presión interna. En los casos anteriores considere tres situaciones para λ_z : 0,98; 1; 1,02.

12.9.2. Esfera inflada bajo el efecto de presión interna (problema propuesto)

Considere la esfera hueca¹³ mostrada en la Figura 12.40.

¹³Este es un problema propuesto, es decir es tarea del alumno completar los pasos indicados y obtener la solución del problema de valor de frontera.

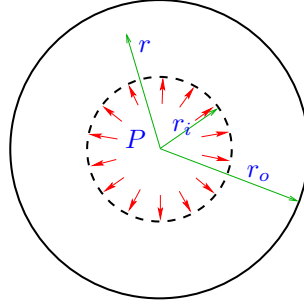


Figura 12.40: Esfera bajo el efecto de presión interna y carga axial.

- Obtenga la distribución de esfuerzos y los desplazamientos para este problema. Bajo el efecto de una presión uniforme P en el interior, asuma que al deformarse el cuerpo conserva su forma esférica, de modo que la siguiente aproximación sea válida (ver Sección 12.7.6):

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = 0, \quad u_\phi = 0. \quad (12.413)$$

- Usando esta aproximación obtenga las componentes del tensor de deformación de (12.275)-(12.280), y usando esas componentes obtenga las componentes del esfuerzo (usando (12.215)), y luego reemplaze estas en las ecuaciones de equilibrio (12.271)-(12.273). El problema se debería reducir a resolver solo una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 para u_r como se hizo en el caso anterior del tubo.
- Para las condiciones de borde considere dos casos
 - El primer caso mostrado en la figura en donde hay presión interna y en la superficie exterior no hay carga.
 - En un segundo caso considere que en la superficie interior no hay carga y que en la exterior hay una presión radial $-P$ uniforme.
 - En ambos casos anteriores estudie además cuando $r_o - r_i$ sea muy pequeño, cuando la esfera se transforma en una membrana esférica.

12.9.3. Una revisión del problema de torsión en ejes de sección circular

En esta sección estudiaremos de nuevo el problema de torsión en un eje de sección circular que ya ha sido analizado en la Sección 4.1, pero ahora usando de manera directa el campo de desplazamientos y la técnica de la semi-inversa usada en los problemas anteriores, esto como paso previo al estudio del problema de torsión en ejes de sección arbitraria de la Sección 12.10.

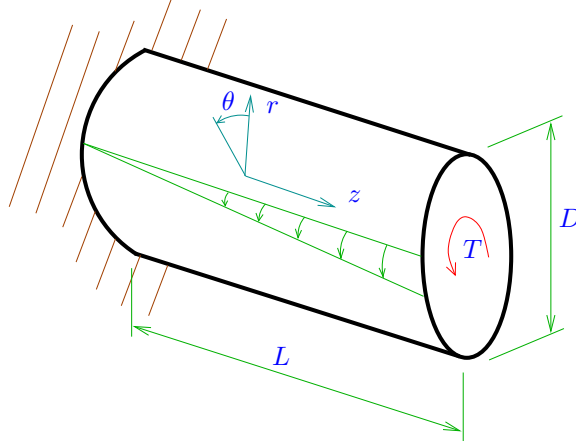


Figura 12.41: Eje de sección circular en torsión.

Considerémos el eje de sección circular empotrado en un extremo bajo el efecto de un torque T en el extremo libre de la Figura 12.41. En la figura es posible ver el sistema de ejes coordenados cilíndricos, y lo más importante, podemos ver en verde el posible tipo de desplazamiento que podríamos esperar en un problema de este tipo. Si u_r , u_θ y u_z son las componentes del campo de desplazamientos en el sentido radial, angular y axial, vamos a asumir que para un problema de este tipo se tiene que:

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = \kappa r z, \quad (12.414)$$

en donde κ es una constante por determinar. Si $u_r = 0$ estamos asumiendo que el diámetro del cilindro no cambia debido a la deformación, lo cual es aproximadamente cierto para el caso lineal elástico, y es concordante con los supuestos vistos en la Sección 4.1. Al asumir que $u_z = 0$ tenemos que la torsión no afecta al largo del cilindro lo que nuevamente es una aproximación del fenómeno real. Finalmente si $u_\theta = \kappa r z$, de la Figura (12.41) tenemos que el desplazamiento angular sería lineal en función de la coordenada axial z , tal como se hizo en la Sección 4.1, y también sería lineal en el sentido radial r , dado que el desplazamiento angular sería cero en el centro y alcanzaría el máximo en el manto del cilindro.

De (12.414) en (12.256)-(12.258) obtenemos para las componentes de la deformación

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\kappa r}{2}, \quad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\kappa}{2}(z - z) = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0, \quad (12.415)$$

luego en (12.215) se obtiene que la única componente del tensor de esfuerzos que no es cero es

$$T_{\theta z} = \mu \kappa r, \quad (12.416)$$

luego se tiene que las ecuaciones de equilibrio (12.231)-(12.233) son satisfechas pues $\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} = 0$.

Recordando la discusión hecha en la Sección 4.1, es posible demostrar que

$$T = \int_{A_{seccion}} T_{\theta z} dA = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} r T_{\theta z} r d\xi dr = \int_0^{D/2} 2\pi \mu \kappa r^3 dr = \mu \kappa \frac{D^4 \pi}{32}, \quad (12.417)$$

y si se define nuevamente $J = \frac{D^4 \pi}{32}$ de (12.417) se obtiene $\kappa = \frac{T}{\mu J}$ que es igual¹⁴ a (4.7), y reemplazando en (12.414)₃ se tiene

$$u_{\theta}(r) = \frac{T}{\mu J} r z. \quad (12.418)$$

En la Sección 12.10 se trabajará con la torsión para secciones arbitrarias, luego para ese tipo de problemas es mejor trabajar en coordenadas Cartesianas. En el plano $x - y$ (o $x_1 - x_2$), que dependiendo de la orientación se puede hacer igual al plano $r - \theta$, se tiene que el desplazamiento total de un punto debería ser el mismo al usar el campo de desplazamientos expresados en ambos sistemas de coordenadas, o sea

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{u_{\theta}^2 + u_r^2}. \quad (12.419)$$

Es posible probar que el campo de desplazamientos (12.414) se puede escribir en coordenadas Cartesianas como:

$$u_1 = -\kappa z y, \quad u_2 = \kappa z x, \quad u_3 = 0, \quad (12.420)$$

que cumple con (12.419) pues $u_r = 0$ y $r^2 = x^2 + y^2$. Usando (12.420) en (12.216) se tiene las componentes del tensor de deformación

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-\kappa z + \kappa z) = 0, \quad (12.421)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = -\frac{\kappa y}{2}, \quad (12.422)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = -\frac{\kappa x}{2}, \quad (12.423)$$

y $\varepsilon_{ii} = 0$ en donde no hay suma en i . Reemplazando (12.422), (12.423) en (12.215) se tiene las componentes del tensor de esfuerzos que no son cero

$$T_{13} = -\mu \kappa y, \quad T_{23} = \mu \kappa x. \quad (12.424)$$

Es posible probar, como se debe esperar, que si el problema se re-escribe en coordenadas Cartesianas, entonces (12.214) son satisfechas de forma automática (sin fuerzas de cuerpo).

En relación al calculo del torque total T en términos de los esfuerzos, en la Figura 12.42 tenemos una vista frontal del cilindro, en donde es posible ver en un elemento diferencial las dos componentes del tensor de esfuerzos (12.424). De

¹⁴Intercambiando el símbolo θ por κ y G por μ .

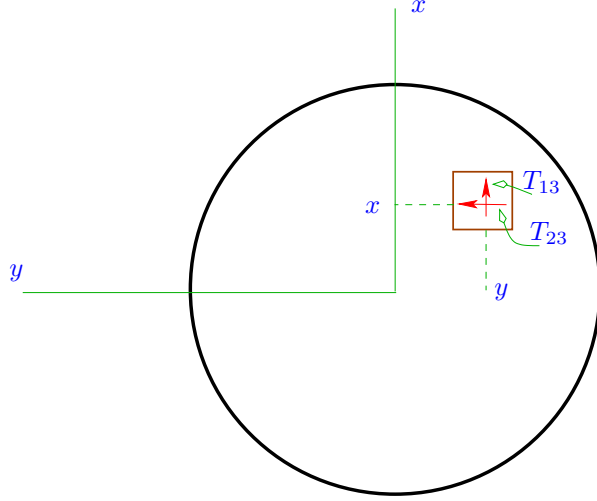


Figura 12.42: Eje de sección circular en torsión. Vista frontal de la sección y esfuerzos de corte en coordenadas Cartesianas.

esta figura es posible ver entonces que el torque T se calcularía como

$$T = \int_{A_{seccion}} (xT_{23} - yT_{13}) dA. \quad (12.425)$$

12.9.4. Problemas simples de placas y vigas con el uso del potencial de esfuerzos de Airy

En esta sección se resolverá dos problemas para una placa rectangular, usando para ello el potencial de esfuerzos en el caso plano en coordenadas Cartesianas (12.357), (12.368). La ecuación biarmónica (12.368) era:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (12.426)$$

Placa plana: Una solución de la ecuación biarmónica con polinomios

Para resolver (12.426) supongamos que Φ es de la forma:

$$\Phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} x^4 + \alpha_{11} y^4 + \alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x^3 y + \alpha_{14} x^2 y^2, \quad (12.427)$$

luego reemplazando en (12.426) se tiene

$$24\alpha_{10} + 8\alpha_{14} + 24\alpha_{11} = 0,$$

que si se quiere que se cumpla $\forall x, y$ se debe cumplir, por ejemplo, que

$$\alpha_{14} = -3\alpha_{10} - 3\alpha_{11}. \quad (12.428)$$

Luego si se define Φ como:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 y^3 \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} x^4 + \alpha_{11} y^4 + \alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x^3 y \\ & - 3(\alpha_{10} + \alpha_{11})x^2 y^2, \end{aligned} \quad (12.429)$$

es una solución de (12.426) para cualquier valor de α_i , $i = 0, 1, \dots, 13$.

De (12.357) se tiene las expresiones para los esfuerzos:

$$T_{11} = 2[6\alpha_{10}x^2 - 3(\alpha_{10} + \alpha_{11})y^2 + \alpha_3 + 3(\alpha_{13}y + \alpha_6)x + \alpha_8y], \quad (12.430)$$

$$T_{22} = 2[6\alpha_{11}y^2 - 3(\alpha_{10} + \alpha_{11})x^3 + \alpha_4 + 3\alpha_7y + (3\alpha_{12}y + \alpha_9)x], \quad (12.431)$$

$$T_{12} = 12(\alpha_{10} + \alpha_{11})xy - 3\alpha_{12}y^2 - 3\alpha_{13}x^2 - 2\alpha_8x - 2\alpha_9y. \quad (12.432)$$

En relacion a los valores para las constantes α_i , $i = 0, 1, \dots, 10$, algunas de estas constantes se pueden encontrar considerando las condiciones de borde, para lo cual considerémos la placa rectangular mostrada en la Figura 12.43. Se

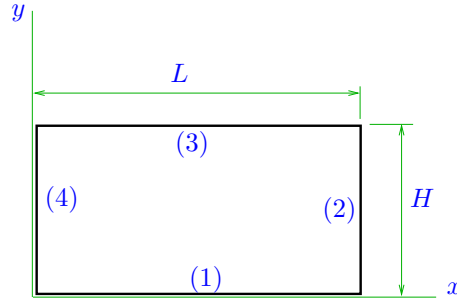


Figura 12.43: Placa plana a estudiar por medio de potencial de esfuerzos de Airy.

asume condición para la tracción (12.217) en todo el borde de la placa.

En la Figura 12.43 los bordes tienen una numeración, luego para el borde (1) se tiene que $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2$, de modo que $\mathbf{Tn} = -(T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2)$, luego si en (1) se tiene que $y = 0$, de $\hat{\mathbf{t}}^{(1)} = \mathbf{Tn}$ se tiene:

$$\hat{\mathbf{t}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3\alpha_{13}x^2 + 2\alpha_8x \\ 2[3(\alpha_{10} + \alpha_{11})x^2 - \alpha_4 - \alpha_9x] \end{pmatrix}.$$

En el borde (2) se tiene $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, luego $\mathbf{Tn} = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2$. En (2) se tiene $x = L$ luego de $\hat{\mathbf{t}}^{(2)} = \mathbf{Tn}$ se obtiene:

$$\hat{\mathbf{t}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2[6\alpha_{10}L^2 - 3(\alpha_{10} + \alpha_{11})y^2 + \alpha_3 + 3(\alpha_{13}y + \alpha_6)L + \alpha_8y] \\ 12(\alpha_{10} + \alpha_{11})Ly - 3\alpha_{12}y^2 - 2\alpha_{13}L^2 - 2\alpha_8L - 2\alpha_9y \end{pmatrix}.$$

Se puede repetir el mismo procedimiento para los bordes (3) y (4) en donde $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$. Se deja como ejercicio calcular $\hat{\mathbf{t}}^{(3)}$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(4)}$ en dichos bordes.

Las condiciones de borde anteriores son tales que se aplicarían cargas en todos los bordes de la placa. Se puede apreciar que en cada borde se podría tener distribuciones de tipo cuadrático para las cargas externas, en donde se puede ajustar las constantes α_i .

Placa plana: Una solución de la ecuación bi-armonica con el uso de series

Considerémos nuevamente la ecuación (12.426), y asumamos una posible solución de esta ecuación de la forma:

$$\Phi(x, y) = \varphi(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \psi_n(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (12.433)$$

donde $\varphi_n(y)$ y $\psi_n(y)$ son funciones por determinar. Definamos $\zeta_n = \frac{2n\pi}{L}$ luego

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^4 [\varphi_n(y) \cos(\zeta_n x) + \psi_n(y) \sin(\zeta_n x)], \quad (12.434)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \frac{d^4 \varphi}{dy^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 \varphi_n}{dy^4} \cos(\zeta_n x) + \frac{d^4 \psi_n}{dy^4} \sin(\zeta_n x) \right], \quad (12.435)$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^2 dy^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 \left[\frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} \cos(\zeta_n x) + \frac{d^2 \psi_n}{dy^2} \sin(\zeta_n x) \right], \quad (12.436)$$

luego reemplazando en (12.426) y pidiendo que el resultado sea satisfecho de forma independiente para cada $\cos(\zeta_n y)$ y $\sin(\zeta_n y)$ se obtiene las ecuaciones diferenciales ordinarias para φ , φ_n y ψ_n :

$$\frac{d^4 \varphi}{dy^4} = 0, \quad (12.437)$$

$$\frac{d^4 \varphi_n}{dy^4} - 2\zeta_n^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} + \zeta_n^4 \varphi_n = 0, \quad (12.438)$$

$$\frac{d^4 \psi_n}{dy^4} - 2\zeta_n^2 \frac{d^2 \psi_n}{dy^2} + \zeta_n^4 \psi_n = 0. \quad (12.439)$$

La solución de (12.437) es

$$\varphi(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 \frac{y^2}{2} + \alpha_3 \frac{y^3}{6}, \quad (12.440)$$

donde α_i , $i = 0, 1, 2, 3$ son constantes. Las soluciones de (12.438) y (12.439) son

$$\varphi_n(y) = \beta_{1_n} \cosh(\zeta_n y) + \beta_{2_n} \sinh(\zeta_n y) + \beta_{3_n} y \cosh(\zeta_n y) + \beta_{4_n} y \sinh(\zeta_n y), \quad (12.441)$$

$$\psi_n(y) = \gamma_{1_n} \cosh(\zeta_n y) + \gamma_{2_n} \sinh(\zeta_n y) + \gamma_{3_n} y \cosh(\zeta_n y) + \gamma_{4_n} y \sinh(\zeta_n y), \quad (12.442)$$

donde β_{i_n} , γ_{i_n} , $i = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, \dots$ son constantes.

Usando (12.440)-(12.442) en (12.357) se tiene

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \alpha_2 + \alpha_3 y + \sum_{n=1}^{\infty} \{[(\beta_{1_n} \zeta_n^2 + \beta_{3_n} y \zeta_n^2 + 2\beta_{4_n} \zeta_n) \cosh(\zeta_n y) + (\beta_{2_n} \zeta_n^2 + \beta_{3_n} \zeta_n^2 + \beta_{4_n} y \zeta_n^2) \sinh(\zeta_n y)] \cos(\zeta_n x) + [(\gamma_{1_n} \zeta_n^2 + \gamma_{3_n} y \zeta_n^2 + 2\gamma_{4_n} \zeta_n) \cosh(\zeta_n y) + (\gamma_{2_n} \zeta_n^2 + 2\gamma_{3_n} \zeta_n + \gamma_{4_n} y \zeta_n^2) \sinh(\zeta_n y)] \sin(\zeta_n x)\}, \quad (12.443)$$

$$T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 \{[(\beta_{1_n} + \beta_{3_n} y) \cosh(\zeta_n y) + (\beta_{2_n} + \beta_{4_n}) \sinh(\zeta_n y)] \cos(\zeta_n x) + [(\gamma_{1_n} + \gamma_{3_n} y) \cosh(\zeta_n y) + (\gamma_{2_n} + \gamma_{4_n} y) \sinh(\zeta_n y)] \sin(\zeta_n x)\}, \quad (12.444)$$

$$T_{12} = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \{ -[(\beta_{1_n} \zeta_n + \beta_{3_n} y \zeta_n + \beta_{4_n}) \sinh(\zeta_n y) + (\beta_{2_n} \zeta_n + \beta_{3_n} + \beta_{4_n} y \zeta_n) \cosh(\zeta_n y)] \sin(\zeta_n x) + [(\gamma_{1_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} y \zeta_n + \gamma_{4_n}) \sinh(\zeta_n y) + (\gamma_{2_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} + \gamma_{4_n} y \zeta_n) \cosh(\zeta_n y)] \cos(\zeta_n x) \}. \quad (12.445)$$

Tomando como base la misma placa mostrada en la Figura 12.43, para el borde (1) se tiene que $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2$, por lo que $\mathbf{Tn} = -(T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2)$. Por otra parte asumamos que la carga aplicada en (1) $\hat{\mathbf{t}}^{(1)}$ se escribe como serie de Fourier

$$\hat{\mathbf{t}}^{(1)} = \left\{ t_{1_0}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [t_{1_n}^{(1)c} \cos(\zeta_n x) + t_{1_n}^{(1)s} \sin(\zeta_n x)] \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ t_{2_0}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [t_{2_n}^{(1)c} \cos(\zeta_n x) + t_{2_n}^{(1)s} \sin(\zeta_n x)] \right\} \mathbf{e}_2. \quad (12.446)$$

La parte constante de $\hat{\mathbf{t}}^{(1)}$ que es $t_{1_0}^{(1)}\mathbf{e}_1 + t_{2_0}^{(1)}\mathbf{e}_2$ da origen a una distribución de esfuerzos uniforme (es decir igual $\forall x, y$) igual a $T_{12} = -t_{1_0}^{(1)}$, $T_{22} = -t_{2_0}^{(1)}$ que satisface de manera automática las ecuaciones de equilibrio (12.356) y que también genera un campo de desplazamientos uniforme por medio de (12.216), luego esta parte de la carga externa no se analiza en este problema. Tomando en consideración solo la parte no-uniforme en (12.446) de (12.444), (12.445) se tiene para este borde (1) (igualando componente a componente para n de 1 a infinito y evaluando (12.444), (12.445) en $y = 0$):

$$-\beta_{1_n} = t_{1_n}^{(1)c}, \quad -\gamma_{1_n} = t_{1_n}^{(1)s}, \quad -\gamma_{2_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} = t_{2_n}^{(1)c}, \quad -\beta_{2_n} \zeta_n - \beta_{3_n} = t_{2_n}^{(1)s}, \quad (12.447)$$

de donde se pueden obtener algunas de las constantes de la solución (12.441), (12.442) en términos de la carga externa $\hat{\mathbf{t}}^{(1)}$.

Estudiemos ahora el borde (3) de la placa de la Figura 12.43. Se tiene que $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$, luego $\mathbf{Tn} = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2$ donde T_{12} y T_{22} se obtienen de (12.444), (12.445) evaluando en $y = H$. Sea la carga externa aplicada en (3) $\hat{\mathbf{t}}^{(3)}$ expresada

como serie de Fourier:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}^{(3)} = & \left\{ t_{1_0}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[t_{3_n}^{(3)c} \cos(\zeta_n x) + t_{3_n}^{(3)s} \sin(\zeta_n x) \right] \right\} \mathbf{e}_1 \\ & + \left\{ t_{2_0}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[t_{2_n}^{(3)c} \cos(\zeta_n x) + t_{2_n}^{(3)s} \sin(\zeta_n x) \right] \right\} \mathbf{e}_2, \quad (12.448)\end{aligned}$$

luego dejando de lado la parte constante $t_{1_0}^{(3)} \mathbf{e}_1 + t_{2_0}^{(3)} \mathbf{e}_2$ que genera una distribución de esfuerzo interno uniforme, que se puede superponer a la mencionada para el borde (1), se tiene de (12.448) y de (12.444), (12.445) evaluados en $y = H$ que para cada n para el borde (3)

$$\zeta_n [(-\beta_{1_n} \zeta_n + \beta_{3_n} H \zeta_n + \beta_{4_n}) \sinh(\zeta_n H) + (\beta_{2_n} \zeta_n + \beta_{3_n} + \beta_{4_n} H \zeta_n) \cosh(\zeta_n H)] = t_{1_n}^{(3)s}, \quad (12.449)$$

$$\zeta_n [(\gamma_{1_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} H \zeta_n + \gamma_{4_n}) \sinh(\zeta_n H) + (\gamma_{2_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} + \gamma_{4_n} H \zeta_n) \cosh(\zeta_n H)] = t_{1_n}^{(3)c}, \quad (12.450)$$

$$-\zeta_n^2 [(\beta_{1_n} + \beta_{3_n} H) \cosh(\zeta_n H) + (\beta_{2_n} + \beta_{4_n} H) \sinh(\zeta_n H)] = t_{2_n}^{(3)c}, \quad (12.451)$$

$$-\zeta_n^2 [(\gamma_{1_n} + \gamma_{3_n} H) \cosh(\zeta_n H) + (\gamma_{2_n} + \gamma_{4_n} H) \sinh(\zeta_n H)] = t_{2_n}^{(3)s}, \quad (12.452)$$

de donde se pueden obtener mas de las constantes de la solución (12.441), (12.442) en términos de la carga externa $\hat{\mathbf{t}}^{(3)}$.

En relación a los bordes (2) y (4) se tiene que $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_1$ respectivamente, luego si $\hat{\mathbf{t}}^{(2)} = \hat{t}_1^{(2)} \mathbf{e}_1 + \hat{t}_2^{(2)} \mathbf{e}_2$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(4)} = \hat{t}_1^{(4)} \mathbf{e}_1 + \hat{t}_2^{(4)} \mathbf{e}_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{t}_1^{(2)} = T_{11}(L, y) = & \alpha_2 + \alpha_3 y + \sum_{n=1}^{\infty} [(\beta_{1_n} \zeta_n^2 + \beta_{3_n} y \zeta_n^2 + 2\beta_{4_n} \zeta_n) \cosh(\zeta_n y) \\ & + (\beta_{2_n} \zeta_n^2 + 2\beta_{3_n} \zeta_n + \beta_{4_n} y \zeta_n^2) \sinh(\zeta_n y)], \quad (12.453)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{t}_2^{(2)} = T_{12}(L, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [(\gamma_{1_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} y \zeta_n + \gamma_{4_n}) \sinh(\zeta_n y) \\ & + (\gamma_{2_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} + \gamma_{4_n} y \zeta_n) \cosh(\zeta_n y)], \quad (12.454)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{t}_1^{(4)} = -T_{11}(0, y) = & -\{\alpha_2 + \alpha_3 y + \sum_{n=1}^{\infty} [(\beta_{1_n} \zeta_n^2 + \beta_{3_n} y \zeta_n^2 + 2\beta_{4_n} \zeta_n) \cosh(\zeta_n y) \\ & + (\beta_{2_n} \zeta_n^2 + 2\beta_{3_n} \zeta_n + \beta_{4_n} y \zeta_n^2) \sinh(\zeta_n y)]\}, \quad (12.455)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{t}_2^{(4)} = -T_{12}(0, y) = & -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [(\gamma_{1_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} y \zeta_n + \gamma_{4_n}) \sinh(\zeta_n y) \\ & + (\gamma_{2_n} \zeta_n + \gamma_{3_n} + \gamma_{4_n} y \zeta_n) \cosh(\zeta_n y)]. \quad (12.456)\end{aligned}$$

En relación a estas condiciones en los bordes (2) y (4), podemos apreciar que hay series en términos de funciones coseno y seno hiperbólicas, las cuales si bien se puede demostrar forman una base linealmente independiente, no formarían

una base ortogonal, luego si se asume se aplica cargas externas conocidas en (2) y (4), para poder repetir el procedimiento usado en los bordes (1) y (3), necesitaríamos expresar dichas cargas en términos de series con esa base no-ortogonal, que hace los cálculos muy engorrosos. Otro procedimiento sería expresar las series en los lados derecho de (12.453), (12.456) a su vez como series de Fourier, eso se hará para el problema a mostrar en la Sección 12.9.7. Respecto a (12.453)-(12.456) otra alternativa que consideraremos aquí es la siguiente:

Supongamos que algunas de las constantes de la solución (12.441), (12.442) se encuentran al resolver (12.447), (12.449)-(12.452). El resto de las constantes se asumen conocidas y por tanto de (12.453)-(12.456) tendríamos las expresiones para $\hat{\mathbf{t}}^{(2)}$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(4)}$ tal que este estado de esfuerzos cumple con la ecuación de compatibilidad; en otras palabras, asumimos como dato externo $\hat{\mathbf{t}}^{(1)}$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(3)}$, y por medio de (12.453)-(12.456) ajustamos $\hat{\mathbf{t}}^{(2)}$ y $\hat{\mathbf{t}}^{(4)}$ para que la solución sea posible y satisfaga las diversas ecuaciones del problema.

12.9.5. Placa plana con agujero circular bajo el efecto de una tracción uniforme aplicada lejos

En esta sección estudiaremos el problema de determinar el campo de esfuerzos en una placa plana con un agujero de radio a sometida a una tracción uniforme externa σ_∞ aplicada ‘lejos’ del agujero como se muestra en la Figura 12.44. En la figura aparece un radio b que sirve para establecer de manera más precisa el hecho que la carga se aplica ‘lejos’.

La primera aproximación para resolver el problema: La presencia del agujero significa un cambio en el campo de esfuerzos cerca del agujero, pero asumiremos que lejos de dicho agujero el campo de esfuerzos es aproximadamente el de una placa en tracción sin ningún agujero, es decir a una distancia b en coordenadas Cartesianas se tiene (en 2D)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\infty \end{pmatrix}. \quad (12.457)$$

Ahora vamos a expresar dicho campo de esfuerzos ‘lejos’ en coordenadas polares que es un caso especial de las cilíndricas estudiadas en la Sección 12.7.5. Para ello consideremos la Figura 12.45, en donde se tiene el sistema Cartesiano original 1-2, y el sistema cilíndrico, que aquí denotamos como 1'-2'. El sistema 1'-2' está rotado en un ángulo θ respecto al sistema 1-2, donde θ es el ángulo del sistema polar. Luego de la Figura 12.45 podemos identificar a la coordenada 1' con la componente normal radial para el tensor de esfuerzos (en coordenadas polares), en tanto que la coordenada 2' estaría asociada con la componente angular del tensor de esfuerzos. Sea el tensor de esfuerzos en el sistema polar \mathbf{T}' , luego se tiene

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix}. \quad (12.458)$$

De la Figura 12.45 podemos obtener las componentes de Q_{ij} para la rotación de un sistema de coordenadas (ver Sección 12.1.5), de (12.12)-(12.14) se tiene

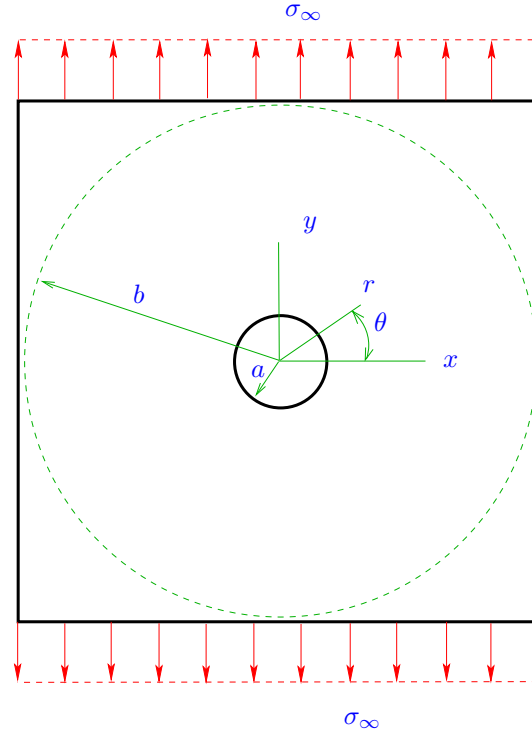


Figura 12.44: Placa plana con agujero bajo el efecto de una tracción uniforme aplicada lejos.

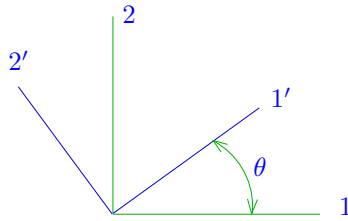


Figura 12.45: Transformación del tensor de esfuerzos del sistema Cartesiano al polar.

en este caso que

$$Q_{11} = \cos \theta, \quad Q_{12} = \sin \theta, \quad Q_{21} = -\sin \theta, \quad Q_{22} = \cos \theta. \quad (12.459)$$

La relación (12.24) se puede escribir como $\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$, donde \mathbf{Q} sería la matriz

con componentes Q_{ij} . Usando (12.459) y recordando (12.457) se tiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$\sigma_r = \sigma_\infty \sin^2 \theta = \frac{\sigma_\infty}{2} [1 - \cos(2\theta)], \quad (12.460)$$

$$\tau_{r\theta} = -\sigma_\infty \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_\infty}{2} \sin(2\theta), \quad (12.461)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\infty \cos^2 \theta = \frac{\sigma_\infty}{2} [\cos(2\theta) + 1], \quad (12.462)$$

que sería el campo de esfuerzos en coordenadas polares lejos del agujero.

Considerando los resultados mostrados para los esfuerzos lejos en (12.460)-(12.462), veamos ahora el método de solución del problema de valor de frontera usando el potencial de esfuerzos de Airy Φ en coordenadas polares. De (12.378) tenemos las componentes del esfuerzo (usando la nueva notación para las componentes del tensor de esfuerzos):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (12.463)$$

El potencial $\Phi = \Phi(r, \theta)$ es solución del problema de valor de frontera y produce o se puede asociar a un campo de desplazamientos continuos si satisface la ecuación bi-armónica (12.388):

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi = 0. \quad (12.464)$$

Antes de ver como solucionar (12.464) estudiemos las condiciones de borde para el problema. En la superficie del agujero no hay cargas ni restricciones al desplazamiento de modo que $\mathbf{Tn} = \mathbf{0}$, y como en coordenadas polares $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ (el vector unitario en coordenadas polares) luego eso significa que

$$\sigma_r(a, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0. \quad (12.465)$$

Lejos en b se cumpliría (12.460)-(12.462) para cualquier θ .

Considerando estas condiciones de borde, en particular (12.460)-(12.462), vamos a asumir que (12.464) se resuelve con el siguiente potencial de esfuerzos

$$\Phi(r, \theta) = \psi(r) + \varphi(r) \cos(2\theta), \quad (12.466)$$

donde $\psi(r)$ y $\varphi(r)$ son funciones por determinar. En relación a las condiciones de borde que ambas funciones tienen que satisfacer, de (12.460)-(12.462) se tiene que

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{4\varphi}{r^2} \right) \cos(2\theta), \quad (12.467)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \sin(2\theta), \quad (12.468)$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \cos(2\theta), \quad (12.469)$$

luego de (12.467), (12.460) y (12.465)₁ se supondrá para ψ que

$$\frac{d\psi}{dr}(a) = 0, \quad \frac{1}{b} \frac{d\psi}{dr}(b) = \frac{\sigma_\infty}{2}, \quad (12.470)$$

en tanto que de (12.467) y (12.465)₁ para φ en $r = a$ se pedirá que

$$\frac{d\varphi}{dr}(a) - \frac{4\varphi(a)}{a} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dr}(a) = 0,$$

que es equivalente a pedir que

$$\varphi(a) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dr}(a) = 0. \quad (12.471)$$

Por otra parte de (12.467), (12.468), (12.460) y (12.461) para φ en el borde $r = b$ se requerirá que

$$\frac{1}{b} \frac{d\varphi}{dr}(b) - \frac{4\varphi(b)}{b^2} = -\frac{\sigma_\infty}{2}, \quad \frac{2}{b} \frac{d\varphi}{dr}(b) = -\frac{\sigma_\infty}{2}. \quad (12.472)$$

Algunos comentarios adicionales en relación a las condiciones de borde se agregarán después de resolver el problema. En cuanto a hacer b muy ‘grande’, eso se tiene que considerar al tener la solución final para ψ , φ , y se hará considerando el límite $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$. Resolvamos (12.464) de manera separada para ψ y φ . En el caso de ψ dado que depende solo de r la equation (12.464) para esa función queda como

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi = 0, \\ \Leftrightarrow & \frac{d^4\psi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\psi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\psi}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (12.473)$$

Buscamos ahora una solución de (12.473) suponiendo que ψ se puede expresar como

$$\psi(r) = Cr^n, \quad (12.474)$$

donde C y n son constantes. Reemplazando esto en (12.473) se llega a la ecuación algebraica para n

$$n[(n-1)(n-2)(n-3) + 2(n-1)(n-2) - (n-1) + 1] = 0, \quad (12.475)$$

que tiene dos raíces de multiplicidad 2 cada una: $n = 0$ y $n = 2$, luego la solución para ψ es de la forma

$$\psi(r) = C_1 \ln r + \frac{C_2}{2} r^2 + \frac{C_3 r^2}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + C_4, \quad (12.476)$$

donde C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ son constantes. Reemplazando ψ en (12.467) tenemos que $\tau_{r\theta} = 0$ y que σ_r está dado por

$$\sigma_r(r) = \frac{C_1}{r^2} + C_2 + C_3 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \frac{C_3}{2}. \quad (12.477)$$

La constante C_4 en (12.476) no tiene influencia en la solución para los esfuerzos¹⁵, en cuando a C_3 supondremos es igual a 0, pues en caso contrario cuando r sea muy grande $C_3 \ln r$ sería muy grande también y no se alcanzaría un comportamiento constante (en coordenadas Cartesianas) para el esfuerzo. Luego, dado que ahora $\sigma_r(r) = \frac{C_1}{r^2} + C_2$, considerando las condiciones de borde (12.470) se tiene

$$\frac{C_1}{a^2} + C_2 = 0, \quad \frac{C_1}{b^2} + C_2 = \frac{\sigma_\infty}{2},$$

cuya solución es

$$C_1 = \frac{\sigma_\infty}{2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)} = \frac{\sigma_\infty}{2} \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)}, \quad C_2 = -\frac{C_1}{a^2}.$$

Considerando ahora el límite $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$, que básicamente indica que estamos asumiendo una placa muy grande en comparación con el tamaño del agujero, se obtiene

$$C_1 = -\frac{\sigma_\infty a^2}{2}, \quad C_2 = \frac{\sigma_\infty}{2}. \quad (12.478)$$

Obtengamos una solución para $\varphi(r)$ ahora, reemplazando $\varphi(r) \cos(2\theta)$ en (12.464). Si se hace eso, es posible probar (se deja como ejercicio) que (12.464) se transforma en la ecuación

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \varphi(r) = 0. \quad (12.479)$$

Nuevamente resolvamos (12.479) asumiendo que $\varphi(r)$ es de la forma

$$\varphi(r) = Dr^m, \quad (12.480)$$

donde D y m son constantes. Reemplazando en (12.479) y requiriendo que sea solución para cualquier $a \leq r$ se obtiene la siguiente ecuación algebraica para m

$$[(m-2)(m-3)m-6][m(m-1)m-4] = 0, \quad (12.481)$$

que tiene las soluciones $m = 0$, $m = 4$, $m = \pm 2$, de modo que tenemos

$$\varphi(r) = D_0 + D_1 r^2 + \frac{D_2}{r^2} + D_3 r^4. \quad (12.482)$$

Esta función debe satisfacer 4 condiciones de borde (12.471), (12.472), de modo que no haremos ninguna constante igual a cero, sino hasta después de despejarlas y finalmente hacer el límite $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$.

Ejercicio: Reemplace $\varphi(r)$ de (12.482) en (12.471) y (12.472), y obtenga las constantes D_i , $i = 0, 1, 2, 3$, luego haga el límite $\frac{b}{a} \rightarrow \infty$. Obtenga la solución

¹⁵Aunque si lo podría tener al momento de determinar los desplazamientos de (12.216), pero eso no lo estudiaremos aquí.

final para σ_r , σ_θ y $\tau_{r\theta}$ de (12.463), (12.465) usando ψ y φ . Compare con la solución mostrada en §35 del libro ‘Theory of Elasticity’, S.P.Timoshenko and J.N. Goodier (third edt.). Verifique que $\sigma_\theta(a, 0) = 3\sigma_\infty$, es decir que el agujero genera una concentración de esfuerzos igual a 3 veces el esfuerzo uniforme aplicado lejos, independiente del material (bajo la condición de que sea isotrópico elástico lineal). Finalmente, con σ_r , σ_θ y $\tau_{r\theta}$ de (12.203), (12.206), (12.256), (12.258) obtenga expresiones para $u_r(r, \theta)$ y $u_\theta(r, \theta)$, notando que estas expresiones no son únicas pues siempre se le puede superponer a estos desplazamientos un movimiento de cuerpo rígido sin afectar por tanto las distribuciones de esfuerzos.

12.9.6. Medio semi-infinito bajo el efecto de una carga puntual (problema propuesto)

La solución completa de este problema requiere varios pasos previos que están fuera de los alcances de este curso. Considérese la Figura 12.46, donde se tiene una representación de un plano semi-infinito, bajo el efecto de una carga puntual vertical P . La solución del problema (cuyos detalles no los veremos

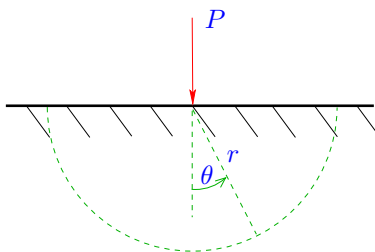


Figura 12.46: Plano semi-infinito bajo el efecto de una carga puntual.

aquí) en coordenadas polares es de la forma

$$\Phi(r, \theta) = Cr\theta \sin \theta, \quad (12.483)$$

con C constante.

- Verifique si (12.483) es solución de (12.464).
- De (12.463) determine los esfuerzos asociados a (12.483). ¿Son simétricos respecto a $\theta = 0$?
- Determine la constante C de la siguiente forma. Extraigase con un corte imaginario a una distancia r , como se muestra en la Figura 12.46, una porción del espacio semi-infinito incluyendo la carga P . En la superficie de corte imaginario se tiene la distribución de esfuerzos¹⁶ σ_r , $\tau_{r\theta}$. Integre las componentes vertical y horizontal (en un sistema Cartesiano) de \mathbf{Tn}

¹⁶No se incluye σ_θ , pues de \mathbf{Tn} se tiene que \mathbf{n} para ese corte solo tiene componente radial.

en $r d\theta$ a lo largo de la curva del corte imaginario. La resultante en el sentido vertical por equilibrio debe ser igual a P . Nótese también que por equilibrio global la resultante horizontal debe ser igual a cero.

- ¿Cuales deberían ser las condiciones de borde en $\theta = \pm\pi/2$ para $r > 0$?
¿Se cumplen dichas condiciones de borde para los esfuerzos calculados con (12.483)?
- Estudie el comportamiento de las componentes del esfuerzo cuando $r \rightarrow 0$. Lo que debería verse es que las componentes del esfuerzo van a infinito cuando $r \rightarrow 0$.
- De (12.203)-(12.206) determine las componentes del tensor de deformación y de (12.256)-(12.258) calcule las componentes del vector de desplazamientos. ¿Como se comportan cuando $r \rightarrow 0$? Se debería ver que estas componentes también van a infinito, lo que es una contradicción con la teoría de la elasticidad lineal, pues desde el inicio hemos asumido pequeñas deformaciones y desplazamientos, además de un comportamiento elástico. Luego los resultados asociados a (12.483) se dice solo son válidos para el sólido semi-infinito menos una pequeña medialuna de radio $r = r_\delta$ alrededor de $r = 0$. Asuma que el material falla, por ejemplo, de acuerdo al criterio de Von Mises. Sean E , ν y σ_o (esfuerzo de fluencia del material) conocidos, determine el tamaño de r_δ en función de P para este problema.

12.9.7. Viga empotrada bajo el efecto de una carga uniforme (deformación plana)

Todos los problemas tratados en las secciones anteriores, si se analizan con cuidado desde el punto de vista conceptual, son problemas en los que solo se consideró de manera directa condiciones de borde para el esfuerzo (12.217). La mayor parte de los problemas simples que se pueden ver en la literatura son de ese tipo, salvo las soluciones que se obtienen por medio de los potenciales de desplazamiento.

En la presente sección estudiaremos un problema de condición de frontera mixto, en donde tenemos condiciones de borde para los desplazamientos y las fuerzas externas. En la Figura 12.47 tenemos un problema típico estudiado en los capítulos anteriores, en donde hay una viga empotrada con una carga uniforme sobre ella y un extremo libre. Vamos a resolver el problema de valor de frontera para esta viga trabajando directamente con la ecuación de Navier caso bidimensional, es decir asumiendo que el campo de desplazamiento solo tiene dos componentes $\mathbf{u} = u_1(x, y)\mathbf{e}_1 + u_2(x, y)\mathbf{e}_2$, luego de (12.220) tenemos que resolver:

$$(\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (12.484)$$

$$(\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (12.485)$$

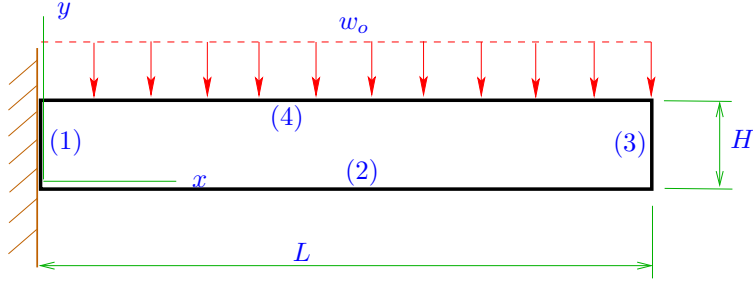


Figura 12.47: Viga empotrada bajo el efecto de carga uniforme.

Estas dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas no se pueden resolver por simple separación de variables, motivo por el cual se han desarrollado métodos especiales como los mostrados en la Sección 12.8.1. Resolveremos (12.484)-(12.485) por medio de series de Fourier. Sea

$$\zeta_n = \frac{2\pi n}{H}, \quad \xi_m = \frac{2\pi m}{L}, \quad (12.486)$$

supongamos soluciones para u_1 y u_2 de la forma:

$$u_1(x, y) = \Gamma_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Delta_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ + \Theta_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\Theta_m(y) \cos(\xi_m x) + \Lambda_m(y) \sin(\xi_m x)], \quad (12.487)$$

$$u_2(x, y) = \Pi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Pi_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Upsilon_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ + \Phi_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\Phi_m(y) \cos(\xi_m x) + \Psi_m(y) \sin(\xi_m x)], \quad (12.488)$$

donde las funciones $\Gamma_0(x)$, $\Gamma_n(x)$, $\Delta_n(x)$, $\Pi_0(x)$, $\Pi_n(x)$, $\Upsilon_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\Theta_0(y)$, $\Theta_m(y)$, $\Lambda_m(y)$, $\Phi_0(y)$, $\Phi_m(y)$, $\Psi_m(y)$, $m = 1, 2, 3, \dots$ son funciones a buscar.

Calcularemos las primeras y segundas derivadas de u_1 y u_2 para reemplazar en (12.484), (12.485) y para determinar las componentes de la deformación,

tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} = & \Gamma'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma'_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Delta'_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-\Theta_m(y) \sin(\xi_m x) + \Lambda_m(y) \cos(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.489)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} = & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [-\Gamma_n(x) \sin(\zeta_n y) + \Delta_n(x) \cos(\zeta_n y)] \\ & + \dot{\Theta}_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\dot{\Theta}_m(y) \cos(\xi_m x) + \dot{\Lambda}_m(y) \sin(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.490)$$

donde se ha definido $(\cdot)' = \frac{d}{dx}$ y $(\cdot)^{\cdot} = \frac{d}{dy}$. Igualmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} = & \Pi'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Pi'_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Upsilon'_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-\Phi_m(y) \sin(\xi_m x) + \Psi_m(y) \cos(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.491)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial y} = & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [-\Pi_n(x) \sin(\zeta_n y) + \Upsilon_n(x) \cos(\zeta_n y)] \\ & + \dot{\Phi}_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\dot{\Phi}_m(y) \cos(\xi_m x) + \dot{\Psi}_m(y) \sin(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.492)$$

y para las segundas derivadas se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = & \Gamma''_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma''_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Delta''_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 [\Theta_m(y) \cos(\xi_m x) + \Lambda_m(y) \sin(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.493)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 [\Gamma_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Delta_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ & + \ddot{\Theta}_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\ddot{\Theta}_m(y) \cos(\xi_m x) + \ddot{\Lambda}_m(y) \sin(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.494)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = & \Pi_o''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Pi_n''(x) \cos(\zeta_n y) + \Upsilon_n''(x) \sin(\zeta_n y)] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 [\Phi_m(y) \cos(\xi_m x) + \Psi_m(y) \sin(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.495)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 [\Pi_n(x) \cos(\zeta_n y) + \Upsilon_n(x) \sin(\zeta_n y)] \\ & + \ddot{\Phi}_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [\ddot{\Phi}_m(y) \cos(\xi_m x) + \ddot{\Psi}_m(y) \sin(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.496)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [-\Gamma_n'(x) \sin(\zeta_n y) + \Delta_n'(x) \cos(\zeta_n y)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-\dot{\Theta}_m(y) \sin(\xi_m x) + \dot{\Lambda}_m(y) \cos(\xi_m x)], \end{aligned} \quad (12.497)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [-\Pi_n'(x) \sin(\zeta_n y) + \Upsilon_n'(x) \cos(\zeta_n y)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-\dot{\Phi}_m(y) \sin(\xi_m x) + \dot{\Psi}_m(y) \cos(\xi_m x)]. \end{aligned} \quad (12.498)$$

Usando (12.493)-(12.498) en (12.484), (12.485) y requiriendo que el resultado sea válido para cualquier¹⁷ m, n se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas:

$$\Gamma_0''(x) = 0, \quad (12.499)$$

$$(2\mu + \lambda)\Gamma_n''(x) + (\mu + \lambda)\zeta_n \Upsilon_n'(x) - \mu\zeta_n^2 \Gamma_n(x) = 0, \quad (12.500)$$

$$(2\mu + \lambda)\Delta_n''(x) - (\mu + \lambda)\zeta_n \Pi_n'(x) - \mu\zeta_n^2 \Delta_n(x) = 0, \quad (12.501)$$

$$-(2\mu + \lambda)\xi_m^2 \Theta(y) + (\mu + \lambda)\xi_m \dot{\Psi}_m(y) + \mu\ddot{\Theta}_m(y) = 0, \quad (12.502)$$

$$\ddot{\Phi}_0(y) = 0, \quad (12.503)$$

$$-(2\mu + \lambda)\xi_m^2 \Lambda(y) - (\mu + \lambda)\xi_m \dot{\Phi}_m(y) + \mu\ddot{\Lambda}_m(y) = 0, \quad (12.504)$$

$$(\mu + \lambda)\zeta_n \Delta_n'(x) - (2\mu + \lambda)\zeta_n^2 \Pi_n(x) + \mu\Pi_n''(x) = 0, \quad (12.505)$$

$$\Pi_0''(x) = 0, \quad (12.506)$$

$$-(\mu + \lambda)\zeta_n \Gamma_n'(x) - (2\mu + \lambda)\zeta_n^2 \Upsilon_n + \mu\Upsilon_n''(x) = 0, \quad (12.507)$$

$$(\mu + \lambda)\xi_m \dot{\Lambda}_m(y) + (2\mu + \lambda)\ddot{\Phi}_m(y) - \mu\xi_m^2 \Phi_m(y) = 0, \quad (12.508)$$

$$\ddot{\Phi}_0(y) = 0, \quad (12.509)$$

$$-(\mu + \lambda)\xi_m \dot{\Theta}_m(y) + (2\mu + \lambda)\ddot{\Psi}_m(y) - \mu\xi_m^2 \Psi_m(y) = 0. \quad (12.510)$$

La solución de (12.499), (12.506) se tiene

$$\Gamma_0(x) = \gamma_{01} + \gamma_{02}x, \quad \Pi_0(x) = \eta_{01} + \eta_{02}x, \quad (12.511)$$

¹⁷Considerando que $\cos(\xi_m x)$, $\sin(\xi_m x)$, $\cos(\zeta_n y)$ y $\sin(\zeta_n y)$ forman una base ortogonal para la funciones definidas en $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, respectivamente.

donde γ_{01} , γ_{02} , η_{01} y η_{02} son constantes.

Solucionaremos ahora (12.500), (12.507) para lo cual asumamos que

$$\Gamma_n(x) = \gamma_n e^{c_n x}, \quad \Upsilon_n(x) = \nu_n e^{c_n x}, \quad (12.512)$$

donde γ_n , ν_n y c_n , ν_n son constantes. Reemplazando en (12.500), (12.507) se puede obtener

$$\begin{pmatrix} (2\mu + \lambda)c_n^2 - \mu\zeta_n & (\mu + \lambda)\zeta_n c_n \\ -(\mu + \lambda)\zeta_n c_n & -(2\mu + \lambda)c_n^2 + \mu\zeta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \nu_n \end{pmatrix} e^{c_n x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.513)$$

que solo tiene una solución no trivial si el determinante de la matrix de 2×2 es igual a cero, o sea si

$$[(2\mu + \lambda)c_n^2 - \mu\zeta_n][\mu c_n^2 - (2\mu + \lambda)\zeta_n^2] + (\mu + \lambda)^2 \zeta_n^2 c_n^2 = 0, \quad (12.514)$$

que tiene dos raíces de multiplicidad 2 para c_n

$$c_n = \pm \zeta_n. \quad (12.515)$$

Reemplazando $c_n = \zeta_n$ en (12.513) se puede obtener ν_n en función de γ_n como

$$\nu_n = -\gamma_n, \quad (12.516)$$

y usando $c_n = -\zeta_n$ en (12.513) se tiene

$$\nu_n = \gamma_n. \quad (12.517)$$

Considerando el hecho que la raíces para c_n son de multiplicidad 2, que las ecuaciones son lineales y usando (12.516), (12.517) tenemos las soluciones:

$$\Gamma_n(x) = \gamma_{1_n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4_n} x e^{-\zeta_n x}, \quad (12.518)$$

$$\Upsilon_n(x) = -\gamma_{1_n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4_n} x e^{-\zeta_n x}, \quad (12.519)$$

donde γ_{i_n} , $i = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, \dots$ son constantes por determinar.

Resolvamos ahora (12.501) y (12.505), asumiendo nuevamente que $\Delta_n(x) = \delta_n e^{c_n x}$ y $\Pi_n(x) = \vartheta_n e^{c_n x}$. Si se reemplaza en (12.501), (12.505) se obtienen una ecuación igual a (12.513), en este caso para δ_n , ϑ_n y c_n , obteniéndose para c_n las mismas dos soluciones cada una de multiplicidad 2: $c_n = \pm \zeta_n$; luego es posible probar nuevamente que para $c_n = \zeta_n$ tenemos $\vartheta_n = -\delta_n$ y para $c_n = -\zeta_n$ tenemos $\vartheta_n = \delta_n$, por lo que se obtiene las soluciones:

$$\Delta_n(x) = \delta_{1_n} e^{\zeta_n x} + \delta_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \delta_{4_n} x e^{-\zeta_n x}, \quad (12.520)$$

$$\Pi_n(x) = -\delta_{1_n} e^{\zeta_n x} - \delta_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \delta_{4_n} x e^{-\zeta_n x}, \quad (12.521)$$

donde δ_{i_n} , $i = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, \dots$ son constantes por determinar.

Resolvamos (12.502), (12.510), asumiendo que $\Theta_m(y) = \theta_m e^{c_m y}$ y $\Psi_m(y) = \psi_m e^{c_m y}$. Reemplazando en (12.502), (12.510) se obtiene

$$\begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda)\xi_m^2 + \mu c_m^2 & (\mu + \lambda)\xi_m c_m \\ -(\mu + \lambda)\xi_m c_m & (2\mu + \lambda)c_m^2 - \mu\xi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_m \\ \psi_m \end{pmatrix} e^{c_m y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.522)$$

luego para que este sistema tenga soluciones no triviales se necesita que el determinante de la matrix sea igual a cero que es igual a la ecuación

$$[(2\mu + \lambda)c_m^2 - \mu\xi_m][\mu c_m^2 - (2\mu + \lambda)\xi_m^2] + (\mu + \lambda)^2 \xi_m^2 c_m^2 = 0, \quad (12.523)$$

que tiene las dos soluciones de multiplicidad 2

$$c_m = \pm \xi_m. \quad (12.524)$$

Reemplazando $c_m = \xi_m$ en (12.522) resolviendo para ψ_m en función de θ_m obteniéndose que para $c_m = \xi_m$ se tiene que $\psi_m = -\theta_m$ y para $c_m = -\xi_m$ se tiene que $\psi_m = \theta_m$, por lo que la solución de (12.502) y (12.510) es

$$\Theta_m(y) = \theta_{1_m} e^{\xi_m y} + \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4_m} y e^{-\xi_m y}, \quad (12.525)$$

$$\Psi_m(y) = -\theta_{1_m} e^{\xi_m y} - \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4_m} y e^{-\xi_m y}. \quad (12.526)$$

donde θ_{i_m} , $i = 1, 2, 3, 4$, $m = 1, 2, 3, \dots$ son constantes por determinar.

Siguiendo un procedimiento similar para (12.504), (12.508) que por brevedad no se mostrará aquí, se puede demostrar que

$$\Lambda_m(y) = \chi_{1_m} e^{\xi_m y} + \chi_{2_m} y e^{\xi_m y} + \chi_{3_m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4_m} y e^{-\xi_m y}, \quad (12.527)$$

$$\Phi_m(y) = -\chi_{1_m} e^{\xi_m y} - \chi_{2_m} y e^{\xi_m y} + \chi_{3_m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4_m} y e^{-\xi_m y}, \quad (12.528)$$

donde χ_{i_m} , $i = 1, 2, 3, 4$, $m = 1, 2, 3, \dots$ son constantes por determinar.

Finalmente para (12.503), (12.509) tenemos las soluciones:

$$\Theta_0(y) = \theta_{0_1} + \theta_{0_2} y, \quad \Phi_0(y) = \phi_{0_1} + \phi_{0_2} y. \quad (12.529)$$

Para encontrar las constantes de las soluciones (12.511), (12.518)-(12.521), (12.525)-(12.529) es necesario tener el campo de desplazamientos, el de deformaciones y con las deformaciones calcular los esfuerzos usando (12.215), y usar todas estas componentes en las condiciones de borde para el problema. De (12.487), (12.488) y los resultados anteriores para las dos componentes del campo de desplazamientos tenemos:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \gamma_{0_1} + \gamma_{0_2} x + \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma_{1_n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \\ & + \gamma_{4_n} x e^{-\zeta_n x}) \cos(\zeta_n y) + (\delta_{1_n} e^{\zeta_n x} + \delta_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \\ & + \delta_{4_n} x e^{-\zeta_n x}) \sin(\zeta_n y)] + \theta_{0_1} + \theta_{0_2} y + \sum_{m=1}^{\infty} [(\theta_{1_m} e^{\xi_m y} \\ & + \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4_m} y e^{-\xi_m y}) \cos(\xi_m x) \\ & + (\chi_{1_m} e^{\xi_m y} + \chi_{2_m} y e^{\xi_m y} + \chi_{3_m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4_m} y e^{-\xi_m y}) \sin(\xi_m x)], \quad (12.530) \\ u_2(x, y) = & \eta_{0_1} + \eta_{0_2} x + \sum_{n=1}^{\infty} [(-\delta_{1_n} e^{\zeta_n x} - \delta_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3_n} e^{-\zeta_n x} \\ & + \delta_{4_n} x e^{-\zeta_n x}) \cos(\zeta_n y) + (-\gamma_{1_n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n x} \\ & + \gamma_{4_n} x e^{-\zeta_n x}) \sin(\zeta_n y)] + \phi_{0_1} + \phi_{0_2} y + \sum_{m=1}^{\infty} [(-\chi_{1_m} e^{\xi_m y} - \chi_{2_m} y e^{\xi_m y} \\ & + \chi_{3_m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4_m} y e^{\xi_m y}) \cos(\xi_m x) + (-\theta_{1_m} e^{\xi_m y} - \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} \\ & + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4_m} y e^{\xi_m y}) \sin(\xi_m x)], \quad (12.531) \end{aligned}$$

en tanto que de (12.216) las componentes del tensor de deformación quedan como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = & \gamma_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma_{1n} \zeta_n e^{\zeta_n x} + \gamma_{2n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \gamma_{3n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} \\ & + \gamma_{4n} e^{-\zeta_n x} - \gamma_{4n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) \cos(\zeta_n y) + (\delta_{1n} \zeta_n e^{\zeta_n x} + \delta_{2n} e^{\zeta_n x} \\ & + \delta_{2n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \delta_{3n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \delta_{4n} e^{-\zeta_n x} - \delta_{4n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) \sin(\zeta_n y) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-(\theta_{1m} e^{\xi_m y} + \theta_{2m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4m} y e^{-\xi_m y}) \sin(\xi_m x) \\ & + (\chi_{1m} e^{\xi_m y} + \chi_{2m} y e^{\xi_m y} + \chi_{3m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4m} y e^{-\xi_m y}) \cos(\xi_m x)], \quad (12.532)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [-(\delta_{1n} e^{\zeta_n x} - \delta_{2n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3n} e^{-\zeta_n x} + \delta_{4n} x e^{-\zeta_n x}) \sin(\zeta_n y) \\ & + (-\gamma_{1n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3n} e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4n} x e^{-\zeta_n x}) \cos(\zeta_n y)] + \phi_{02} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [(-\chi_{1m} \xi_m e^{\xi_m y} - \chi_{2m} e^{\xi_m y} - \chi_{2m} \xi_m y e^{\xi_m y} - \chi_{3m} \xi_m e^{-\xi_m y} \\ & + \chi_{4m} e^{-\xi_m y} - \chi_{4m} \xi_m y e^{\xi_m y}) \cos(\chi_m x) + (-\theta_{1m} \xi_m e^{\xi_m y} - \theta_{2m} e^{\xi_m y} \\ & - \theta_{2m} \xi_m y e^{\xi_m y} - \theta_{3m} \xi_m e^{-\xi_m y} + \theta_{4m} e^{-\xi_m y} - \theta_{4m} \xi_m y e^{\xi_m y}) \sin(\chi_m x)], \quad (12.533)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [-(\gamma_{1n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3n} e^{-\zeta_n x} \right. \\ & + \gamma_{4n} x e^{-\zeta_n x}) \sin(\zeta_n y) + \zeta_n (\delta_{1n} e^{\zeta_n x} + \delta_{2n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3n} e^{-\zeta_n x} \\ & + \delta_{4n} x e^{-\zeta_n x}) \cos(\zeta_n y)] + \theta_{02} + \sum_{m=1}^{\infty} [(\theta_{1m} \xi_m e^{\xi_m y} + \theta_{2m} e^{\xi_m y} \\ & + \theta_{2m} \xi_m y e^{\xi_m y} - \theta_{3m} \xi_m e^{-\xi_m y} + \theta_{4m} e^{-\xi_m y} - \theta_{4m} \xi_m y e^{-\xi_m y}) \cos(\xi_m x) \\ & + (\chi_{1m} \xi_m e^{\xi_m y} + \chi_{2m} e^{\xi_m y} + \chi_{2m} \xi_m y e^{\xi_m y} - \chi_{3m} \xi_m e^{-\xi_m y} + \chi_{4m} e^{-\xi_m y} \\ & - \chi_{4m} \xi_m y e^{-\xi_m y}) \sin(\xi_m x)] + \eta_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} [(-\delta_{1n} \zeta_n e^{\zeta_n x} - \delta_{2n} e^{\zeta_n x} \\ & - \delta_{2n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \delta_{3n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \delta_{4n} e^{-\zeta_n x} - \delta_{4n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) \cos(\zeta_n y) \\ & + (-\gamma_{1n} \zeta_n e^{\zeta_n x} - \gamma_{2n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \gamma_{3n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4n} e^{-\zeta_n x} \\ & - \gamma_{4n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) \sin(\zeta_n y)] + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-(\chi_{1m} e^{\xi_m y} - \chi_{1m} y e^{\xi_m y} \\ & + \chi_{3m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4m} y e^{-\xi_m y}) \sin(\xi_m x) + (-\theta_{1m} e^{\xi_m y} - \theta_{2m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3m} e^{-\xi_m y} \\ & + \theta_{4m} y e^{-\xi_m y}) \cos(\xi_m x)] \left. \right\}, \quad (12.534)\end{aligned}$$

luego usando estas componentes de la deformación en (12.215) podemos obtener las componentes del tensor de esfuerzos. Antes de hacer eso es conveniente

discutir respecto a las condiciones de borde que se usarán para encontrar las diversas constantes que aparecen en las solución (12.530), (12.531).

Veamos la Figura 12.47 considerando el sistema de coordenadas y dimensiones que aparecen allí tenemos:

Borde (1): En este borde donde $x = 0$, $0 \leq y \leq H$ la viga está empotrada lo que significa que las dos componentes del campo de desplazamientos deben ser igual a cero, es decir

$$u_1(0, y) = 0, \quad u_2(0, y) = 0. \quad (12.535)$$

Borde (2): En este borde donde $y = 0$, $0 \leq x \leq L$ tenemos una condición libre de cargas y de restricciones a los desplazamientos, es decir $\mathbf{Tn} = \mathbf{0}$ para ese borde, luego si $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2$ para ese borde, se tiene que $\mathbf{Tn} = -T_{12}\mathbf{e}_1 - T_{22}\mathbf{e}_2$ por lo que

$$T_{12}(x, 0) = 0, \quad T_{22}(x, 0) = 0. \quad (12.536)$$

Borde (3): En este borde donde $x = L$, $0 \leq y \leq L$ también hay una condición libre de cargas y de restricciones en los desplazamientos, luego como para este caso $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, se tiene que $\mathbf{Tn} = \mathbf{0}$ sería equivalente a

$$T_{11}(L, y) = 0, \quad T_{12}(L, y) = 0. \quad (12.537)$$

Borde (4): En este borde donde $y = H$, $0 \leq x \leq L$ tenemos una condición de carga externa, es decir $\mathbf{Tn} = \hat{\mathbf{t}}$ para ese borde, luego si $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_2$ para ese borde y¹⁸ $\hat{\mathbf{t}} = -w(x)\mathbf{e}_2$, se tiene que $\mathbf{Tn} = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2$ por lo que

$$T_{12}(x, 0) = 0, \quad T_{22}(x, 0) = -w(x). \quad (12.538)$$

Veamos el borde (1) y la condición (12.535)₁ para u_1 de (12.530) tenemos que es equivalente a

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) = & \gamma_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma_{1n} + \gamma_{3n}) \cos(\zeta_n y) + (\delta_{1n} + \delta_{3n}) \sin(\zeta_n y)] \\ & + \theta_{01} + \theta_{02} y + \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} e^{\xi_m y} + \theta_{2m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3m} e^{-\xi_m y} \\ & + \theta_{4m} y e^{-\xi_m y}) = 0, \end{aligned} \quad (12.539)$$

y para u_2 de (12.535)₂ y (12.531) se tiene

$$\begin{aligned} u_2(0, y) = & \eta_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\delta_{4n} - \delta_{1n}) \cos(\zeta_n y) + (\gamma_{3n} - \gamma_{1n}) \sin(\zeta_n y)] \\ & + \phi_{01} + \phi_{02} y + \sum_{m=1}^{\infty} (-\chi_{1m} e^{\xi_m y} - \chi_{2m} y e^{\xi_m y} \\ & + \chi_{3m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4m} y e^{-\xi_m y}) = 0. \end{aligned} \quad (12.540)$$

¹⁸Veremos primero el caso general en donde $w = w(x)$, y al final de discutirá el caso $w(x) = -w_o$ constante.

En relacion al borde (2), de (12.534), (12.536)₁ y (12.287) para T_{12} tenemos

$$\begin{aligned}
& T_{12}(x, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{12}(x, 0) = 0, \\
\Rightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n (\delta_{1_n} e^{\zeta_n x} + \delta_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \delta_{4_n} x e^{-\zeta_n x}) + \theta_{0_2} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} [(\theta_{1_m} \xi_m + \theta_{2_m} - \theta_{3_m} \xi_m + \theta_{4_m}) \cos(\xi_m x) + [(\chi_{1_m} \xi_m \\
& + \chi_{2_m} - \chi_{3_m} \xi_m + \chi_{4_m}) \sin(\xi_m x)] + \eta_{0_2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\delta_{1_n} \zeta_n e^{\zeta_n x} \\
& - \delta_{2_n} e^{\zeta_n x} - \delta_{2_n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \delta_{3_n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n x} - \delta_{4_n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-(\chi_{3_m} - \chi_{1_m}) \sin(\xi_m x) + (\theta_{3_m} - \theta_{1_m}) \cos(\xi_m x)] = 0, \quad (12.541)
\end{aligned}$$

en tanto de (12.536)₂, (12.532), (12.533) y (12.215) (ver también (12.286)) para T_{22} la condición queda como

$$\begin{aligned}
& T_{22}(x, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\mu + \lambda) \varepsilon_{22}(x, 0) + \lambda \varepsilon_{11}(x, 0) = 0, \\
\Rightarrow & (2\mu + \lambda) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_{1_n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4_n} x e^{-\zeta_n x}) \right. \\
& + \phi_{0_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(-\chi_{1_m} \xi_m - \chi_{2_m} - \chi_{3_m} \xi_m + \chi_{4_m}) \cos(\xi_m x) \\
& + (-\theta_{1_m} \xi_m - \theta_{2_m} - \theta_{3_m} \xi_m + \theta_{4_m}) \sin(\xi_m x)] \left. \right\} + \lambda \left\{ \gamma_{0_2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1_n} \zeta_n e^{\zeta_n x} \right. \\
& \left. \gamma_{2_n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2_n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \gamma_{3_n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4_n} e^{-\zeta_n x} - \gamma_{4_n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) \right\} = 0. \quad (12.542)
\end{aligned}$$

Para el borde (3) de (12.534), (12.537)₂ y (12.252) para T_{12} tenemos que $T_{12}(L, y) = 0$ sería equivalente a $\varepsilon_{12}(L, y) = 0$ que queda como

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} [-\zeta_n (\gamma_{1_n} e^{\zeta_n L} + \gamma_{2_n} L e^{\zeta_n L} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n L} + \gamma_{4_n} L e^{-\zeta_n L}) \sin(\zeta_n y) \\
& + \zeta_n (\delta_{1_n} e^{\zeta_n L} + \delta_{2_n} L e^{\zeta_n L} + \delta_{3_n} e^{-\zeta_n L} + \delta_{4_n} L e^{-\zeta_n L}) \cos(\zeta_n y)] \\
& + \theta_{0_2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1_m} \xi_m e^{\xi_m y} + \theta_{2_m} e^{\xi_m y} + \theta_{2_m} \xi_m y e^{\xi_m y} - \theta_{3_m} \xi_m e^{-\xi_m y} \\
& + \theta_{4_m} e^{-\xi_m y} - \theta_{4_m} \xi_m y e^{-\xi_m y}) + \eta_{0_2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(-\delta_{1_n} \zeta_n e^{\zeta_n L} - \delta_{2_n} e^{\zeta_n L} \\
& - \delta_{2_n} \zeta_n L e^{\zeta_n L} - \delta_{3_n} \zeta_n e^{-\zeta_n L} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n L} - \delta_{4_n} \zeta_n L e^{-\zeta_n L}) \cos(\zeta_n y) \\
& + (-\gamma_{1_n} \zeta_n e^{\zeta_n L} - \gamma_{2_n} e^{\zeta_n L} - \gamma_{2_n} \zeta_n L e^{\zeta_n L} - \gamma_{3_n} \zeta_n e^{-\zeta_n L} + \gamma_{4_n} e^{-\zeta_n L} \\
& - \gamma_{4_n} \zeta_n L e^{-\zeta_n L}) \sin(\zeta_n y)] + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m (-\theta_{1_m} e^{\xi_m y} - \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} \\
& + \theta_{4_m} y e^{-\xi_m y}) = 0, \quad (12.543)
\end{aligned}$$

por otra parte para el borde (3) en el caso de la condición para T_{11} de (12.537)₁ y (12.215) (ver (12.285)) tenemos que es equivalente a $(2\mu + \lambda)\varepsilon_{11}(L, y) + \lambda\varepsilon_{22}(L, y) = 0$, que de (12.532), (12.533) es igual a

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \left\{ \gamma_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} [(\gamma_{1n}\zeta_n e^{\zeta_n L} + \gamma_{2n} e^{\zeta_n L} + \gamma_{2n}\zeta_n L e^{\zeta_n L} - \gamma_{3n}\zeta_n e^{-\zeta_n L} \right. \\ \left. + \gamma_{4n} e^{-\zeta_n L} - \gamma_{4n}\zeta_n L e^{-\zeta_n L}) \cos(\zeta_n y) + (\delta_{1n}\zeta_n e^{\zeta_n L} + \delta_{2n} e^{\zeta_n L} + \delta_{2n}\zeta_n L e^{\zeta_n L} \right. \\ \left. - \delta_{3n}\zeta_n e^{-\zeta_n L} + \delta_{4n} e^{-\zeta_n L} - \delta_{4n}\zeta_n L e^{-\zeta_n L}) \sin(\zeta_n y)] + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m (\chi_{1m} e^{\xi_m y} \right. \\ \left. + \chi_{2m} y e^{\xi_m y} + \chi_{3m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4m} y e^{-\xi_m y}) \right\} + \lambda \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n [(-\delta_{1n} e^{\zeta_n L} \right. \\ \left. - \delta_{2n} L e^{\zeta_n L} + \delta_{3n} e^{-\zeta_n L} + \delta_{4n} L e^{-\zeta_n L}) \sin(\zeta_n y) + (-\gamma_{1n} e^{\zeta_n L} - \gamma_{2n} L e^{\zeta_n L} \right. \\ \left. + \gamma_{3n} e^{-\zeta_n L} + \gamma_{4n} L e^{-\zeta_n L}) \cos(\zeta_n y)] + \phi_{02} + \sum_{m=1}^{\infty} (-\chi_{1m} \xi_m e^{\xi_m y} - \chi_{2m} e^{\xi_m y} \right. \\ \left. - \chi_{2m} \xi_m y e^{\xi_m y} - \chi_{3m} \xi_m e^{-\xi_m y} + \chi_{4m} e^{-\xi_m y} - \chi_{4m} \xi_m y e^{-\xi_m y}) \right\} = 0, \quad (12.544) \end{aligned}$$

Finalmente para el borde (4), para T_{12} de (12.534) tenemos que la condición (12.538)₁ es equivalente a $\varepsilon_{12}(x, H) = 0$, y de (12.287) eso implica que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n (\delta_{1n} e^{\zeta_n x} + \delta_{2n} x e^{\zeta_n x} + \delta_{3n} e^{-\zeta_n x} + \delta_{4n} x e^{-\zeta_n x}) + \theta_{02} + \sum_{m=1}^{\infty} [(\theta_{1m} \xi_m e^{\xi_m H} \\ + \theta_{2m} e^{\xi_m H} + \theta_{2m} \xi_m H e^{\xi_m H} - \theta_{3m} \xi_m e^{-\xi_m H} + \theta_{4m} e^{-\xi_m H} - \theta_{4m} \xi_m H e^{-\xi_m H}) \cos(\xi_m x) \\ + (\chi_{1m} \xi_m e^{\xi_m H} + \chi_{2m} e^{\xi_m H} + \chi_{2m} \xi_m H e^{\xi_m H} - \chi_{3m} \xi_m e^{-\xi_m H} + \chi_{4m} e^{-\xi_m H} \\ - \chi_{4m} \xi_m H e^{-\xi_m H}) \sin(\xi_m x)] + \eta_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\delta_{1n} \zeta_n e^{\zeta_n x} - \delta_{2n} e^{\zeta_n x} - \delta_{2n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} \\ - \delta_{3n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \delta_{4n} e^{-\zeta_n x} - \delta_{4n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [(-\chi_{1m} e^{\xi_m H} - \chi_{2m} H e^{\xi_m H} \\ + \chi_{3m} e^{-\xi_m H} + \chi_{4m} H e^{-\xi_m H}) \sin(\xi_m x) + (-\theta_{1m} e^{\xi_m H} - \theta_{2m} H e^{\xi_m H} + \theta_{3m} e^{-\xi_m H} \\ + \theta_{4m} H e^{-\xi_m H}) \cos(\xi_m x)] = 0, \quad (12.545) \end{aligned}$$

y para T_{22} en el borde (4) de (12.538)₂ y (12.215) tenemos que es equivalente a $(2\mu + \lambda)\varepsilon_{22}(x, H) + \lambda\varepsilon_{11}(x, H) = -w(x)$, luego de (12.532), (12.533) se llega

finalmente a la ecuación

$$\begin{aligned}
& (2\mu + \lambda) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n (-\gamma_{1n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3n} e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4n} x e^{-\zeta_n x}) + \phi_{02} \right. \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} [(-\chi_{1m} \xi_m e^{\xi_m H} - \chi_{2m} e^{\xi_m H} - \chi_{2m} \xi_m H e^{\xi_m H} - \chi_{3m} \xi_m e^{-\xi_m H} \\
& + \chi_{1m} e^{-\xi_m H} - \chi_{4m} \xi_m H e^{-\xi_m H}) \cos(\xi_m x) + (-\theta_{1m} \xi_m e^{\xi_m H} - \theta_{2m} e^{\xi_m H} \\
& - \theta_{2m} \xi_m H e^{\xi_m H} - \theta_{3m} \xi_m e^{-\xi_m H} + \theta_{1m} e^{-\xi_m H} - \theta_{4m} \xi_m H e^{-\xi_m H}) \sin(\xi_m x)] \Big\} \\
& + \lambda \left\{ \gamma_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1n} \zeta_n e^{\zeta_n x} + \gamma_{2n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \gamma_{3n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4n} e^{-\zeta_n x} \right. \\
& - \gamma_{4n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m [-(\theta_{1m} e^{\xi_m H} + \theta_{2m} H e^{\xi_m H} + \theta_{3m} e^{-\xi_m H} \\
& + \theta_{4m} H e^{-\xi_m H}) \sin(\xi_m x) + (\chi_{1m} e^{\xi_m H} + \chi_{2m} H e^{\xi_m H} + \chi_{3m} e^{-\xi_m H} \\
& + \chi_{4m} H e^{-\xi_m H}) \cos(\xi_m x)] \Big\} = -w(x). \tag{12.546}
\end{aligned}$$

En una serie de Fourier en términos de una base de funciones ortogonal $\{f_i(x)\}$, cuando se produce una suma del tipo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x) = 0$, esto se cumple si y solo si $a_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Ahora bien, si se observa, por ejemplo, (12.539), vemos una serie de Fourier pero además vemos una serie en términos de las funciones $e^{\xi_m y}$, $y e^{\xi_m y}$, etc., las cuales si bien son linealmente independientes, no son ortogonales, por lo que no podemos usar el argumento anterior para encontrar las constantes que aparecen en, por ejemplo, (12.539). Para poder hacer esto vamos a expresar primero en (12.539) la suma $\sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} e^{\xi_m y} + \theta_{2m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4m} y e^{-\xi_m y})$ como series de Fourier. Para una función $f(y)$ en el intervalo $0 \leq y \leq H$ la representación en series de Fourier coseno y seno es:

$$f(y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n y}{H}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n y}{H}\right), \tag{12.547}$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{H} \int_0^H f(y) dy, \tag{12.548}$$

$$a_n = \frac{2}{H} \int_0^H f(y) \cos\left(\frac{2\pi n y}{H}\right) dy, \tag{12.549}$$

$$b_n = \frac{2}{H} \int_0^H f(y) \sin\left(\frac{2\pi n y}{H}\right) dy, \tag{12.550}$$

luego para la función $\sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} e^{\xi_m y} + \theta_{2m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4m} y e^{-\xi_m y})$ en el tramo $0 \leq y \leq H$ se tiene que los coeficientes de la serie de Fourier están

dados por¹⁹:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{H} \int_0^H \left[\sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1_m} e^{\xi_m y} + \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4_m} y e^{-\xi_m y}) \right] dy, \\
&= \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^H (\theta_{1_m} e^{\xi_m y} + \theta_{2_m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3_m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4_m} y e^{-\xi_m y}) dy, \\
&= \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta_{1_m} (e^{\xi_m H} - 1) + \frac{\theta_{2_m}}{\xi_m^2} [1 + e^{\xi_m H} (1 - H \xi_m)] \right. \\
&\quad \left. + \theta_{3_m} (1 - e^{-\xi_m H}) + \frac{\theta_{4_m}}{\xi_m^2} [1 - e^{-\xi_m H} (1 + H \xi_m)] \right\}, \tag{12.551}
\end{aligned}$$

y para a_n, b_n de (12.549), (12.550) se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta_{1_m} \left[\frac{-\xi_m + e^{H \xi_m} (\xi_m \cos(H \zeta_n) + \zeta_n \sin(H \zeta_n))}{\zeta_n^2 + \xi_m^2} \right] \right. \\
&\quad + \theta_{2_m} [\xi_m^2 - \zeta_n^2 + e^{H \xi_m} ((\xi_m^2 (H \xi_m - 1) + \zeta_n^2 (1 + H \xi_m)) \cos(H \zeta_n) \\
&\quad + \zeta_n (H (\zeta_n^2 + \xi_m^2) - 2 \xi_m) \sin(H \zeta_n))] (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2} \\
&\quad + \theta_{3_m} \left[\frac{\xi_m - e^{-H \xi_m} (\zeta_n \sin(H \zeta_n) - \xi_m \cos(H \zeta_n))}{\zeta_n^2 + \xi_m^2} \right] \\
&\quad + \theta_{4_m} [(\xi_m^2 - \zeta_n^2 + e^{-H \xi_m} ((\zeta_n^2 (1 - H \xi_m) - \xi_m^2 (H \xi_m + 1)) \cos(H \zeta_n) \\
&\quad + \zeta_n (H (\zeta_n^2 + \xi_m^2) + 2 \xi_m))] (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2} \Big\}, \tag{12.552}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \theta_{1_m} \left[\frac{\zeta_n + e^{H \xi_m} (\xi_m \sin(H \zeta_n) - \zeta_n \cos(H \zeta_n))}{\zeta_n^2 + \xi_m^2} \right] \right. \\
&\quad + \theta_{2_m} [-2 \zeta_n \xi_m + e^{H \xi_m} (-\zeta_n (H (\zeta_n^2 + \xi_m^2) - 2 \xi_m) \cos(H \zeta_n) \\
&\quad + (\xi_m^2 (H \xi_m - 1) + \zeta_n^2 (1 + H \xi_m)) \sin(H \zeta_n))] (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2} \\
&\quad + \theta_{3_m} \left[\frac{\zeta_n - e^{-H \xi_m} (\xi_m \sin(H \zeta_n) + \zeta_n \cos(H \zeta_n))}{\zeta_n^2 + \xi_m^2} \right] \\
&\quad + \theta_{4_m} [2 \zeta_n \xi_m + e^{-H \xi_m} (-\zeta_n (H (\zeta_n^2 + \xi_m^2) + 2 \xi_m) \cos(H \zeta_n) \\
&\quad + (-\xi_m^2 (H \xi_m + 1) + \zeta_n^2 (1 - H \xi_m)) \sin(H \zeta_n))] (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2} \Big\}. \tag{12.553}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (12.551)-(12.553) se pueden escribir de una manera más resumida definiendo las siguientes constantes

$$\iota_{1_m}^0 = \frac{2(e^{\xi_m H} - 1)}{H}, \quad \iota_{2_m}^0 = \frac{2[1 + e^{\xi_m H}(1 - H \xi_m)]}{\xi_m^2 H}, \tag{12.554}$$

$$\iota_{3_m}^0 = \frac{2(1 - e^{-\xi_m H})}{H}, \quad \iota_{4_m}^0 = \frac{2[1 - e^{-\xi_m H}(1 + H \xi_m)]}{\xi_m^2 H}, \tag{12.555}$$

¹⁹En las expresiones (12.551)-(12.553) estamos asumiendo que la suma a infinito se puede intercambiar con las integrales, lo que es posible si las sumas son convergentes, lo que se asume aquí sin demostrarlo.

$$l_{1m}^{a_n} = \frac{2 [-\xi_m + e^{H\xi_m} (\xi_m \cos(H\zeta_n) + \zeta_n \sin(H\zeta_n))]}{H (\zeta_n^2 + \xi_m^2)}, \quad (12.556)$$

$$l_{2m}^{a_n} = 2 [\xi_m^2 - \zeta_n^2 + e^{H\xi_m} ((\xi_m^2 (H\xi_m - 1) + \zeta_n^2 (1 + H\xi_m)) \cos(H\zeta_n) + \zeta_n (H(\zeta_n^2 + \xi_m^2) - 2\xi_m) \sin(H\zeta_n))] [H(\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2}], \quad (12.557)$$

$$l_{3m}^{a_n} = \frac{2 [\xi_m - e^{-H\xi_m} (\zeta_n \sin(H\zeta_n) - \xi_m \cos(H\zeta_n))]}{H^{-1} (\zeta_n^2 + \xi_m^2)}, \quad (12.558)$$

$$l_{4m}^{a_n} = 2 [2\zeta_n \xi_m + e^{-H\xi_m} (-\zeta_n (H(\zeta_n^2 + \xi_m^2) + 2\xi_m) \cos(H\zeta_n) - \xi_m^2 (H\xi_m + 1) + \zeta_n^2 (1 - H\xi_m)) \sin(H\zeta_n)] [H^{-1} (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2}], \quad (12.559)$$

y

$$l_{1m}^{b_n} = \frac{2 [\zeta_n + e^{H\xi_m} (\xi_m \sin(H\zeta_n) - \zeta_n \cos(H\zeta_n))]}{H (\zeta_n^2 + \xi_m^2)}, \quad (12.560)$$

$$l_{2m}^{b_n} = 2 [-2\zeta_n \xi_m + e^{H\xi_m} (-\zeta_n (H(\zeta_n^2 + \xi_m^2) - 2\xi_m) \cos(H\zeta_n) + (\xi_m^2 (H\xi_m - 1) + \zeta_n^2 (1 + H\xi_m)) \sin(H\zeta_n))] [H^{-1} (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2}], \quad (12.561)$$

$$l_{3m}^{b_n} = \frac{2 [\zeta_n - e^{-H\xi_m} (\xi_m \sin(H\zeta_n) + \zeta_n \cos(H\zeta_n))]}{H (\zeta_n^2 + \xi_m^2)}, \quad (12.562)$$

$$l_{4m}^{b_n} = 2 [2\zeta_n \xi_m + e^{-H\xi_m} (-\zeta_n (H(\zeta_n^2 + \xi_m^2) + 2\xi_m) \cos(H\zeta_n) - \xi_m^2 (H\xi_m + 1) + \zeta_n^2 (1 - H\xi_m)) \sin(H\zeta_n)] [H^{-1} (\zeta_n^2 + \xi_m^2)^{-2}], \quad (12.563)$$

luego usando estas definiciones en (12.551)-(12.553) se tiene que

$$a_0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} l_{1m}^0 + \theta_{2m} l_{2m}^0 + \theta_{3m} l_{3m}^0 + \theta_{4m} l_{4m}^0), \quad (12.564)$$

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} l_{1m}^{a_n} + \theta_{2m} l_{2m}^{a_n} + \theta_{3m} l_{3m}^{a_n} + \theta_{4m} l_{4m}^{a_n}), \quad (12.565)$$

$$b_n = \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} l_{1m}^{b_n} + \theta_{2m} l_{2m}^{b_n} + \theta_{3m} l_{3m}^{b_n} + \theta_{4m} l_{4m}^{b_n}), \quad (12.566)$$

de modo que

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} e^{\xi_m y} + \theta_{2m} y e^{\xi_m y} + \theta_{3m} e^{-\xi_m y} + \theta_{4m} y e^{-\xi_m y}) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\zeta_n y) + b_n \sin(\zeta_n y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} l_{1m}^0 + \theta_{2m} l_{2m}^0 + \theta_{3m} l_{3m}^0 + \theta_{4m} l_{4m}^0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} l_{1m}^{a_n} + \theta_{2m} l_{2m}^{a_n} + \theta_{3m} l_{3m}^{a_n} + \theta_{4m} l_{4m}^{a_n}) \right] \cos(\zeta_n y) \right. \\ &\left. + \left[\sum_{m=1}^{\infty} (\theta_{1m} l_{1m}^{b_n} + \theta_{2m} l_{2m}^{b_n} + \theta_{3m} l_{3m}^{b_n} + \theta_{4m} l_{4m}^{b_n}) \right] \sin(\zeta_n y) \right\}. \quad (12.567) \end{aligned}$$

Para el caso de reescribir las condiciones de borde (12.539), (12.540) se necesitan series de Fourier en el intervalo $0 \leq y \leq H$ para las funciones $\theta_{0_2}y$ y $\phi_{0_2}y$, y se puede demostrar que

$$\theta_{0_2}y = \theta_{0_2}H - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta_{0_2}}{\zeta_n} \sin(\zeta_n y), \quad \phi_{0_2}y = \phi_{0_2}H - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\phi_{0_2}}{\zeta_n} \sin(\zeta_n y). \quad (12.568)$$

Finalmente dos aproximaciones: para efectos de encontrar las distintas constantes que aparecen en (12.487)-(12.488) y también para, por ejemplo, graficar la soluciones, las series a infinito se deben aproximar por series finitas (asumiendo que estas tienen buenas propiedades de convergencia), luego se asumirá que $\sum_{m=1}^{\infty} \approx \sum_{m=1}^M$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \approx \sum_{n=1}^N$.

Reemplazando (12.567), (12.568)₁, pidiendo que la ecuación resultante sea satisfecha para cualquier $0 \leq y \leq H$, considerando que 1 , $\cos(\zeta_n y)$ y $\sin(\zeta_n y)$ forman una base ortogonal de funciones, esto se cumple si y solo si²⁰

$$\gamma_{0_1} + \theta_{0_1} + \theta_{0_2}H + \sum_{m=1}^M (\theta_{1_m} \iota_{1_m}^0 + \theta_{2_m} \iota_{2_m}^0 + \theta_{3_m} \iota_{3_m}^0 + \theta_{4_m} \iota_{4_m}^0) = 0, \quad (12.569)$$

$$\gamma_{1_n} + \gamma_{3_n} + \sum_{m=1}^M (\theta_{1_m} \iota_{1_m}^{a_n} + \theta_{2_m} \iota_{2_m}^{a_n} + \theta_{3_m} \iota_{3_m}^{a_n} + \theta_{4_m} \iota_{4_m}^{a_n}) = 0, \quad (12.570)$$

$$-2 \frac{\theta_{0_2}}{\zeta_n} + \delta_{1_n} + \delta_{2_n} + \sum_{m=1}^M (\theta_{1_m} \iota_{1_m}^{b_n} + \theta_{2_m} \iota_{2_m}^{b_n} + \theta_{3_m} \iota_{3_m}^{b_n} + \theta_{4_m} \iota_{4_m}^{b_n}) = 0, \quad (12.571)$$

en donde estas dos últimas ecuaciones se tienen que cumplir para $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Si se reemplaza (12.567), (12.568)₂ en (12.540) siguiendo los mismos argumentos anteriores, esa ecuación se va a satisfacer para cualquier $0 \leq y \leq H$ si y solo si²¹

$$\eta_{0_1} + \phi_{0_1} + \phi_{0_2}H + \sum_{m=1}^M (-\chi_{1_m} \iota_{1_m}^0 - \chi_{2_m} \iota_{2_m}^0 + \chi_{3_m} \iota_{3_m}^0 + \chi_{4_m} \iota_{4_m}^0) = 0, \quad (12.572)$$

$$\delta_{1_n} - \delta_{4_n} + \sum_{m=1}^M (-\chi_{1_m} \iota_{1_m}^{a_n} - \chi_{2_m} \iota_{2_m}^{a_n} + \chi_{3_m} \iota_{3_m}^{a_n} + \chi_{4_m} \iota_{4_m}^{a_n}) = 0, \quad (12.573)$$

$$-2 \frac{\phi_{0_2}}{\zeta_n} + \gamma_{1_n} - \gamma_{3_n} + \sum_{m=1}^M (-\chi_{1_m} \iota_{1_m}^{b_n} - \chi_{2_m} \iota_{2_m}^{b_n} + \chi_{3_m} \iota_{3_m}^{b_n} + \chi_{4_m} \iota_{4_m}^{b_n}) = 0. \quad (12.574)$$

Veamos la condición de borde $T_{12}(L, y) = 0$ en el borde (3), de (12.541)

²⁰Se deja como ejercicio reemplazar (12.567) y (12.568) en (12.539) para obtener (12.569)-(12.571), y lo mismo para (12.540) de donde se obtiene (12.572)-(12.574).

²¹En el caso de (12.540) es necesario primero expresar la función $\sum_{m=1}^{\infty} (-\chi_{1_m} e^{\xi_m y} - \chi_{2_m} y e^{\xi_m y} + \chi_{3_m} e^{-\xi_m y} + \chi_{4_m} y e^{-\xi_m y})$ como una serie de Fourier, tal como se hizo para (12.567) en (12.539). Es posible probar que la serie tiene una forma muy similar a la mostrada en (12.567), con los mismos coeficientes $\iota_{m_j}^0$, $\iota_{m_j}^{a_n}$ e $\iota_{m_j}^{b_n}$, y solo es necesario intercambiar θ_{1_m} , θ_{2_m} , θ_{3_m} y θ_{4_m} por $-\chi_{1_m}$, $-\chi_{2_m}$, χ_{3_m} y χ_{4_m} , respectivamente.

simplificando un poco tenemos que es equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-(2\zeta_n \gamma_{1_n} + \gamma_{2_n} + 2\gamma_{2_n} \zeta_n L) e^{\zeta_n L} - (2\zeta_n \gamma_{3_n} - \gamma_{4_n} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\gamma_{4_n} \zeta_n L) e^{-\zeta_n L} \right] \sin(\zeta_n y) + \left[-\delta_{2_n} e^{\zeta_n L} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n L} \right] \cos(\zeta_n y) \right\} \\ & + \theta_{0_2} + \eta_{0_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [\theta_{2_m} e^{\xi_m y} + \theta_{4_m} e^{-\xi_m y}] = 0, \end{aligned} \quad (12.575)$$

y si se escribe $\sum_{m=1}^{\infty} [\theta_{2_m} e^{\xi_m y} + \theta_{4_m} e^{-\xi_m y}]$ como una serie de Fourier como se hizo en el caso anterior en (12.539), (12.540) queda como

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left\{ \left[-(2\zeta_n \gamma_{1_n} + \gamma_{2_n} + 2\gamma_{2_n} \zeta_n L) e^{\zeta_n L} - (2\zeta_n \gamma_{3_n} - \gamma_{4_n} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\gamma_{4_n} \zeta_n L) e^{-\zeta_n L} \right] \sin(\zeta_n y) + \left[-\delta_{2_n} e^{\zeta_n L} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n L} \right] \cos(\zeta_n y) \right\} + \theta_{0_2} \\ & + \eta_{0_2} + \sum_{m=1}^M \left\{ \theta_{2_m} \iota_{1_m}^0 + \theta_{4_m} \iota_{m_3}^0 + \sum_{n=1}^N [(\theta_{2_m} \iota_{1_m}^{a_n} + \theta_{4_m} \iota_{3_m}^{a_n}) \cos(\zeta_n y) \right. \\ & \left. + (\theta_{2_m} \iota_{1_m}^{b_n} + \theta_{4_m} \iota_{3_m}^{b_n}) \sin(\zeta_n y)] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (12.576)$$

que es satisfecha para cualquier $0 \leq y \leq H$ si y solo si

$$\theta_{0_2} + \eta_{0_2} + \sum_{m=1}^M (\theta_{2_m} \iota_{1_m}^0 + \theta_{4_m} \iota_{m_3}^0) = 0, \quad (12.577)$$

$$-\delta_{2_n} e^{\zeta_n L} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n L} + \sum_{m=1}^M (\theta_{2_m} \iota_{1_m}^{a_n} + \theta_{4_m} \iota_{m_3}^{a_n}) = 0, \quad (12.578)$$

$$\begin{aligned} & -(2\zeta_n \gamma_{1_n} + \gamma_{2_n} + 2\gamma_{2_n} \zeta_n L) e^{\zeta_n L} - (2\zeta_n \gamma_{3_n} - \gamma_{4_n} + 2\gamma_{4_n} \zeta_n L) e^{-\zeta_n L} \\ & + \sum_{m=1}^M (\theta_{2_m} \iota_{1_m}^{b_n} + \theta_{4_m} \iota_{m_3}^{b_n}) = 0. \end{aligned} \quad (12.579)$$

En relación a (12.544) para $T_{11}(L, y) = 0$ después de algunas simplificaciones

y reordenando términos se tiene

$$\begin{aligned}
& (2\mu + \lambda)\gamma_{0_2} + \lambda\phi_{0_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (2\mu + \lambda) [(\gamma_{1_n}\zeta_n + \gamma_{2_n}(1 + \zeta_n L))e^{\zeta_n L} \\
& + (\gamma_{4_n}(1 - \zeta_n L) - \gamma_{3_n})e^{-\zeta_n L}] + \lambda [(-\gamma_{1_n}\zeta_n - \gamma_{2_n}L\zeta_n)e^{\zeta_n L} + (\gamma_{3_n}\zeta_n \\
& + \gamma_{4_n}L\zeta_n)e^{-\zeta_n L}] \} \cos(\zeta_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (2\mu + \lambda) [(\delta_{1_n}\zeta_n + \delta_{2_n}(1 + \zeta_n L))e^{\zeta_n L} \\
& + (-\delta_{3_n}\zeta_n + \delta_{4_n}(1 - \zeta_n L))e^{-\zeta_n L}] + \lambda [(\delta_{1_n}\zeta_n + \delta_{2_n}L\zeta_n)e^{\zeta_n L} - (\delta_{3_n}\zeta_n \\
& + \delta_{4_n}L\zeta_n)e^{-\zeta_n L}] \} \sin(\zeta_n y) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{1_m} - \lambda(\chi_{1_m}\xi_m + \chi_{2_m})] e^{\xi_m y} \\
& + [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{1_m} - \lambda\chi_{2_m}\xi_m] ye^{\xi_m y} + [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{3_m} + \lambda(\chi_{4_m} - \chi_{3_m}\xi_m)] e^{-\xi_m y} \\
& + [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{4_m} - \lambda\chi_{4_m}\xi_m] ye^{-\xi_m y} \} = 0, \tag{12.580}
\end{aligned}$$

y expandiendo en una serie de Fourier $\sum_{m=1}^{\infty} \{ [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{1_m} - \lambda(\chi_{1_m}\xi_m + \chi_{2_m})] e^{\xi_m y} + [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{1_m} - \lambda\chi_{2_m}\xi_m] ye^{\xi_m y} + [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{3_m} + \lambda(\chi_{4_m} - \chi_{3_m}\xi_m)] e^{-\xi_m y} + [(2\mu + \lambda)\xi_m\chi_{4_m} - \lambda\chi_{4_m}\xi_m] ye^{-\xi_m y} \}$ como se hizo en (12.567) y en el caso anterior (12.576), reemplazando en (12.580) y pidiendo que sea satisfecha para todo $0 \leq y \leq H$ se tiene

$$\begin{aligned}
& (2\mu + \lambda)\gamma_{0_2} + \lambda\phi_{0_2} + \sum_{m=1}^M [(2\mu\xi_m\chi_{1_m} - \lambda\chi_{2_m})\iota_{1_m}^0 + (2\mu\xi_m\chi_{1_m} + \lambda\xi_m\chi_{1_m} \\
& - \lambda\chi_{2_m}\xi_m)\iota_{2_m}^0 + (2\mu\xi_m\chi_{3_m} + \lambda\chi_{4_m})\iota_{3_m}^0 + 2\mu\xi_m\chi_{4_m}\iota_{4_m}^0] = 0, \tag{12.581}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2\mu + \lambda) \{ [\gamma_{1_n}\zeta_n + \gamma_{2_n}(1 + \zeta_n L)]e^{\zeta_n L} + [\gamma_{4_n}(1 - \zeta_n L) - \gamma_{3_n}\zeta_n]e^{-\zeta_n L} \} \\
& + \lambda [(-\gamma_{1_n}\zeta_n + \gamma_{2_n}L\zeta_n)e^{\zeta_n L} + (\gamma_{3_n}\zeta_n + \gamma_{4_n}L\zeta_n)e^{-\zeta_n L}] + \sum_{m=1}^M [(2\mu\xi_m\chi_{1_m} \\
& - \lambda\chi_{2_m})\iota_{1_m}^{a_n} + (2\mu\xi_m\chi_{1_m} + \lambda\xi_m\chi_{1_m} - \lambda\chi_{2_m}\xi_m)\iota_{2_m}^{a_n} + (2\mu\xi_m\chi_{3_m} \\
& + \lambda\chi_{4_m})\iota_{3_m}^{a_n} + 2\mu\xi_m\chi_{4_m}\iota_{4_m}^{a_n}] = 0, \tag{12.582}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2\mu + \lambda) \{ [\delta_{1_n}\zeta_n + \delta_{2_n}(1 + \zeta_n L)]e^{\zeta_n L} + [-\delta_{3_n}\zeta_n + \delta_{4_n}(1 - \zeta_n L)]e^{-\zeta_n L} \} \\
& + \lambda [(\delta_{1_n}\zeta_n + \delta_{2_n}L\zeta_n)e^{\zeta_n L} - (\delta_{3_n}\zeta_n + \delta_{4_n}L\zeta_n)e^{-\zeta_n L}] + \sum_{m=1}^M [(2\mu\xi_m\chi_{1_m} \\
& - \lambda\chi_{2_m})\iota_{1_m}^{b_n} + (2\mu\xi_m\chi_{1_m} + \lambda\xi_m\chi_{1_m} - \lambda\chi_{2_m}\xi_m)\iota_{2_m}^{b_n} + (2\mu\xi_m\chi_{3_m} \\
& + \lambda\chi_{4_m})\iota_{3_m}^{b_n} + 2\mu\xi_m\chi_{4_m}\iota_{4_m}^{b_n}] = 0. \tag{12.583}
\end{aligned}$$

Veamos ahora el borde (2), para $T_{12}(x, 0) = 0$ de (12.541) después de algunas simplificaciones se tiene que es equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (-\delta_{1_n}\zeta_n e^{\zeta_n x} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n x}) + \theta_{0_2} + \eta_{0_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(\theta_{2_m} + \theta_{4_m}) \cos(\xi_m x) \\
& + (2\chi_{1_m}\xi_m + \chi_{2_m} - 2\chi_{3_m}\xi_m + \chi_{4_m}) \sin(\xi_m x)] = 0. \tag{12.584}
\end{aligned}$$

Se representará la función $\sum_{n=1}^{\infty} (-\delta_{1_n} \zeta_n e^{\zeta_n x} + \delta_{4_n} e^{-\zeta_n x})$ como una series de Fourier en x para $0 \leq x \leq L$. Si se hace esto, se llegan a expresiones muy similares a las que se encontraron en (12.554)-(12.563), (12.567) apareciendo coeficientes $\iota_{i_n}^0, \iota_{i_n}^{a_m}$ e $\iota_{i_n}^{b_m}$, $i = 1, 2, 3, 4$, que son identicos a (12.554)-(12.563) intercambiando n por m y H por L . Usanso esa expansión en series de Fourier, cuyos detalles no se muestran aquí, reemplazando en (12.584), pidiendo que esa ecuación sea satisfecha para cualquier $0 \leq x \leq L$ se obtiene:

$$\theta_{0_2} + \eta_{0_2} + \sum_{n=1}^N (-\delta_{2_n} \iota_{1_n}^0 + \delta_{4_n} \iota_{3_n}^0) = 0, \quad (12.585)$$

$$\theta_{2_m} + \theta_{4_m} + \sum_{n=1}^N (-\delta_{2_n} \iota_{1_n}^{a_m} + \delta_{4_n} \iota_{3_n}^{a_m}) = 0, \quad (12.586)$$

$$2\chi_{1_m} \xi_m + \chi_{2_m} - 2\chi_{3_m} \xi_m + \chi_{4_m} + \sum_{n=1}^N (-\delta_{2_n} \iota_{1_n}^{b_m} + \delta_{4_n} \iota_{3_n}^{b_m}) = 0. \quad (12.587)$$

En el caso de $(12.536)_2$ de (12.542) usando una expansión en series de Fourier para $\sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_{1_n} e^{\zeta_n x} - \gamma_{2_n} x e^{\zeta_n x} + \gamma_{3_n} e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4_n} x e^{-\zeta_n x})$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1_n} \zeta_n e^{\zeta_n x} + \gamma_{2_n} e^{\zeta_n x} + \gamma_{2_n} \zeta_n x e^{\zeta_n x} - \gamma_{3_n} \zeta_n e^{-\zeta_n x} + \gamma_{4_n} e^{-\zeta_n x} - \gamma_{4_n} \zeta_n x e^{-\zeta_n x})$, después de algunas manipulaciones que no se muestran aquí, (12.542) es satisfecha si y solo si

$$\begin{aligned} & (2\mu + \lambda)\phi_{0_2} + \lambda\gamma_{0_2} + \sum_{n=1}^N \left\{ \left[-(2\mu + \lambda)\gamma_{1_n} + \lambda(\gamma_{1_n} \zeta_n + \gamma_{2_n}) \right] \iota_{1_n}^0 \right. \\ & + \left[-(2\mu + \lambda)\gamma_{2_n} + \lambda\gamma_{2_n} \zeta_n \right] \iota_{2_n}^0 + \left[(2\mu + \lambda)\gamma_{3_n} + \lambda(\gamma_{4_n} - \gamma_{3_n} \zeta_n) \right] \iota_{3_n}^0 \\ & \left. + \left[(2\mu + \lambda)\gamma_{4_n} - \lambda\gamma_{4_n} \zeta_n \right] \iota_{4_n}^0 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (12.588)$$

$$\begin{aligned} & (2\mu + \lambda)(-\chi_{1_m} \xi_m - \chi_{2_m} - \chi_{3_m} \xi_m + \chi_{4_m}) + \sum_{n=1}^N \left\{ \left[-(2\mu + \lambda)\gamma_{1_n} + \lambda(\gamma_{1_n} \zeta_n \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma_{4_n}) \right] \iota_{1_n}^{a_m} + \left[-(2\mu + \lambda)\gamma_{2_n} + \lambda\gamma_{2_n} \zeta_n \right] \iota_{1_n}^{a_m} + \left[(2\mu + \lambda)\gamma_{3_n} + \lambda(\gamma_{4_n} \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_{3_n} \zeta_n) \right] \iota_{3_n}^{a_m} + \left[(2\mu + \lambda)\gamma_{4_n} - \lambda\gamma_{4_n} \zeta_n \right] \iota_{4_n}^{a_m} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (12.589)$$

$$\begin{aligned} & (2\mu + \lambda)(-\theta_{1_m} \xi_m - \theta_{2_m} - \theta_{3_m} \xi_m + \theta_{4_m}) - \lambda \xi_m (\theta_{1_m} - \theta_{3_m}) + \sum_{n=1}^N \left\{ \left[-(2\mu + \lambda)\gamma_{1_n} \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda(\gamma_{1_n} \zeta_n + \gamma_{2_n}) \right] \iota_{1_n}^{b_m} + \left[-(2\mu + \lambda)\gamma_{2_n} + \lambda\gamma_{2_n} \zeta_n \right] \iota_{2_n}^{b_m} + \left[(2\mu + \lambda)\gamma_{3_n} \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda(\gamma_{4_n} - \gamma_{3_n} \zeta_n) \right] \iota_{3_n}^{b_m} + \left[(2\mu + \lambda)\gamma_{4_n} - \lambda\gamma_{4_n} \zeta_n \right] \iota_{4_n}^{b_m} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12.590)$$

En el caso de $T_{12}(x, H) = 0$, considerando una representación en series de Fourier de las series sobre $e^{\zeta_n x}$, $x e^{\zeta_n x}$, $e^{-\zeta_n x}$ y $x e^{-\zeta_n x}$ como en el caso anterior,

reemplazando en (12.545) después de algunas manipulaciones, pidiendo que se cumpla para cada término de la serie de Fourier, se obtiene las ecuaciones

$$\theta_{0_2} + \eta_{0_2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\delta_{2_n} \iota_{1_n}^0 + \delta_{4_n} \iota_{3_n}^0) = 0, \quad (12.591)$$

$$\sum_{n=1}^N (-\delta_{2_n} \iota_{1_n}^{a_m} + \delta_{4_n} \iota_{3_n}^{a_m}) + \theta_{2_m} e^{\xi_m H} + \theta_{4_m} e^{-\xi_m H} = 0, \quad (12.592)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N (-\delta_{2_n} \iota_{1_n}^{b_m} + \delta_{4_n} \iota_{3_n}^{b_m}) + (2\chi_{1_m} \xi_m + \chi_{2_m} + 2\chi_{2_m} H \xi_m) e^{\xi_m H} \\ & + (-2\chi_{3_m} \xi_m + \chi_{4_m} - 2\chi_{4_m} \xi_m H) e^{-\xi_m H} = 0. \end{aligned} \quad (12.593)$$

Finalmente de (12.546) tenemos $T_{22}(x, H) = -w(x)$, reordenando términos se tiene

$$\begin{aligned} & (2\mu + \lambda)\phi_{0_2} + \lambda\gamma_{0_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{[-(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{1_n} + \lambda\gamma_{1_n} \zeta_n + \lambda\gamma_{2_n}]e^{\zeta_n x} \\ & + [-(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{2_n} + \lambda\gamma_{2_n} \zeta_n]x e^{\zeta_n x} + [(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{3_n} - \lambda\gamma_{3_n} \zeta_n + \lambda\gamma_{4_n}]e^{-\zeta_n x} \\ & + [(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{4_n} - \lambda\gamma_{4_n} \zeta_n]x e^{-\zeta_n x}\} + \sum_{m=1}^{\infty} \{[-(2\mu + \lambda)\chi_{1_m} \xi_m - (2\mu + \lambda)\chi_{2_m} \\ & - (2\mu + \lambda)\chi_{2_m} \xi_m H + \lambda\xi_m \chi_{1_m} + \lambda\xi_m \chi_{2_m} H]e^{\xi_m H} + [-(2\mu + \lambda)\chi_{3_m} \xi_m \\ & + (2\mu + \lambda)\chi_{4_m} - (2\mu + \lambda)\chi_{4_m} \xi_m H + \lambda\xi_m \chi_{3_m} + \lambda\xi_m \chi_{4_m} H]e^{-\xi_m H}\} \cos(\xi_m x) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \{[-(2\mu + \lambda)\theta_{1_m} \xi_m - (2\mu + \lambda)\theta_{2_m} - (2\mu + \lambda)\theta_{2_m} \xi_m H - \xi_m \theta_{1_m} \lambda \\ & - \xi_m \theta_{2_m} H \lambda]e^{\xi_m H} + [-(2\mu + \lambda)\theta_{3_m} \xi_m + (2\mu + \lambda)\theta_{4_m} - (2\mu + \lambda)\theta_{4_m} \xi_m H \\ & - \xi_m \theta_{3_m} \lambda - \xi_m \theta_{4_m} H \lambda]e^{-\xi_m H}\} \sin(\xi_m H) = w(x). \end{aligned} \quad (12.594)$$

Luego expresando la función $\sum_{n=1}^{\infty} \{[-(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{1_n} + \lambda\gamma_{1_n} \zeta_n + \lambda\gamma_{2_n}]e^{\zeta_n x} + [-(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{2_n} + \lambda\gamma_{2_n} \zeta_n]x e^{\zeta_n x} + [(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{3_n} - \lambda\gamma_{3_n} \zeta_n + \lambda\gamma_{4_n}]e^{-\zeta_n x} + [(2\mu + \lambda)\zeta_n \gamma_{4_n} - \lambda\gamma_{4_n} \zeta_n]x e^{-\zeta_n x}\}$ como una serie de Fourier en $0 \leq x \leq L$ de igual forma que (12.584), y expresando $w(x)$ también como una serie de Fourier, en donde $w(x) \approx w_0 + \sum_{m=1}^M w_m^c \cos(\xi_m x) + w_m^s \sin(\xi_m x)$, reemplazando esto en (12.594) y requiriendo que la ecuación resultante sea válida para cualquier $0 \leq x \leq L$, después de algunas simplificaciones se obtiene una que ecuación que

es satisfecha si y solo si:

$$(2\mu + \lambda)\phi_{0_2} + \lambda\gamma_{0_2} + \sum_{n=1}^N [(-2\mu\zeta_n\gamma_{1_n} + \lambda\gamma_{2_n})\iota_{1_n}^0 - 2\mu\zeta_n\gamma_{2_n}\iota_{2_n}^0 + (2\mu\zeta_n\gamma_{3_n} + \lambda\gamma_{4_n})\iota_{3_n}^0 + 2\mu\zeta_n\gamma_{4_n}\iota_{4_n}^0] = -w_0, \quad (12.595)$$

$$\sum_{n=1}^N [(-2\mu\zeta_n\gamma_{1_n} + \lambda\gamma_{2_n})\iota_{1_n}^{a_m} - 2\mu\zeta_n\gamma_{2_n}\iota_{2_n}^{a_m} + (2\mu\zeta_n\gamma_{3_n} + \lambda\gamma_{4_n})\iota_{3_n}^{a_m} + 2\mu\zeta_n\gamma_{4_n}\iota_{4_n}^{a_m}] - [2\mu\chi_{1_m}\xi_m + (2\mu + \lambda)\chi_{2_m} + 2\mu\chi_{2_m}\xi_m H]e^{\xi_m H} + [-2\mu\chi_{3_m}\xi_m + (2\mu + \lambda)\chi_{4_m} - 2\mu\chi_{4_m}\xi_m H]e^{-\xi_m H} = -w_m^c, \quad (12.596)$$

$$\sum_{n=1}^N [(-2\mu\zeta_n\gamma_{1_n} + \lambda\gamma_{2_n})\iota_{1_n}^{b_m} - 2\mu\zeta_n\gamma_{2_n}\iota_{2_n}^{b_m} + (2\mu\zeta_n\gamma_{3_n} + \lambda\gamma_{4_n})\iota_{3_n}^{b_m} + 2\mu\zeta_n\gamma_{4_n}\iota_{4_n}^{b_m}] - [2(\mu + \lambda)\theta_{1_m}\xi_m + (2\mu + \lambda)\theta_{2_m} + 2(\mu + \lambda)\theta_{2_m}\xi_m H]e^{\xi_m H} + [-2(\mu + \lambda)\theta_{3_m}\xi_m + (2\mu + \lambda)\theta_{4_m} - 2(\mu + \lambda)\theta_{4_m}\xi_m H]e^{-\xi_m H} = w_m^s. \quad (12.597)$$

Se debe usar (12.569)-(12.574), (12.577)-(12.579), (12.581)-(12.583), (12.585)-(12.587), (12.588)-(12.590), (12.591)-(12.593) y (12.595)-(12.597) para obtener las constantes γ_{0_1} , γ_{0_2} , θ_{0_1} , θ_{0_2} , η_{0_1} , η_{0_2} , ϕ_{0_1} , ϕ_{0_2} , γ_{i_n} , δ_{i_n} , θ_{i_m} y χ_{i_m} con $i = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$ y $m = 1, 2, 3, \dots, M$.

El caso particular $w(x) = w_o$ se puede estudiar facilmente de la solución general anterior.

- Verifique si el sistema mencionado anteriormente está bien determinado para encontrar las incógnitas γ_{0_1} , γ_{0_2} , θ_{0_1} , θ_{0_2} , η_{0_1} , η_{0_2} , ϕ_{0_1} , ϕ_{0_2} , γ_{i_n} , δ_{i_n} , θ_{i_m} y χ_{i_m} con $i = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$ y $m = 1, 2, 3, \dots, M$; en otras palabras verifique que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas.
- Considere dos casos $L = 20H$ y $L = 4H$ para H , σ_o , E y ν dados como datos, y obtenga la solución para las constantes de (12.569)-(12.574), (12.577)-(12.579), (12.581)-(12.583), (12.585)-(12.587), (12.588)-(12.590), (12.591)-(12.593) y (12.595)-(12.597). Determine en particular el esfuerzos $T_{11}(x, y)$ y compare con la solución que se obtiene de la teoría de flexión en vigas del Capítulo 5.1. Compare también $u_2(x, H/2)$ con $\hat{y}(x)$ de la teoría de deflexión de la Sección 5.2.
- Estudie el efecto que tiene en las soluciones trabajar con distintos valores para M y N .

12.9.8. Viga empotrada bajo el efecto de una carga uniforme (caso 3D, problema propuesto)

Repita el procedimiento mostrado en la Sección 12.9.7 para el caso de una viga modelada como cuerpo tridimensional como se muestra en la Figura 12.48. Obtenga soluciones en series de las tres ecuaciones de Navier (12.220), asumiendo

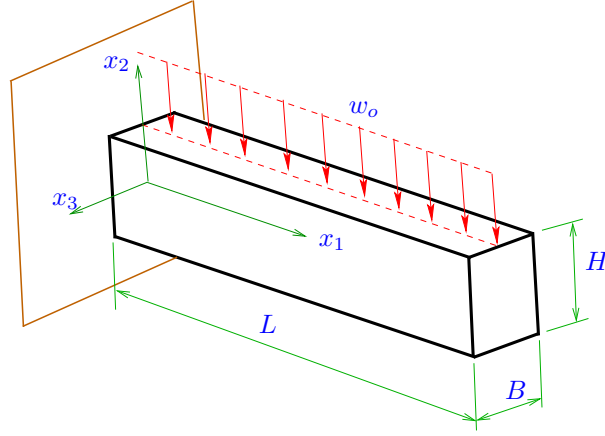


Figura 12.48: Viga empotrada bajo el efecto de carga uniforme, caso 3D.

do que

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3) = & \Gamma_0^i(x_1, x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n^i(x_1, x_2) \cos\left(\frac{2\pi n}{B}x_3\right) \right. \\
 & + \Delta_n^i(x_1, x_2) \sin\left(\frac{2\pi n}{B}x_3\right) \left. \right] + \Theta_0^i(x_1, x_3) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\Theta_m^i(x_1, x_3) \cos\left(\frac{2\pi m}{H}x_2\right) \right. \\
 & + \Lambda_m^i(x_2, x_3) \sin\left(\frac{2\pi m}{H}x_2\right) \left. \right] + \Pi_0^i(x_2, x_3) \\
 & + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\Pi_p^i(x_2, x_3) \cos\left(\frac{2\pi p}{L}x_1\right) \right. \\
 & + \Upsilon_m^i(x_2, x_3) \sin\left(\frac{2\pi p}{L}x_1\right) \left. \right], \quad (12.598)
 \end{aligned}$$

reemplaze en (12.220). Se debería obtener un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas para las funciones $\Gamma_n^i(x_1, x_2)$, $\Delta_n^i(x_1, x_2)$, $\Theta_m^i(x_1, x_3)$, $\Lambda_m^i(x_2, x_3)$, $\Pi_p^i(x_2, x_3)$ y $\Upsilon_m^i(x_2, x_3)$. Ese sistema a su vez se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas como en la Sección 12.9.7, asumiendo nuevamente expansiones en series de Fourier pero ahora para las funciones $\Gamma_n^i(x_1, x_2)$, $\Delta_n^i(x_1, x_2)$, $\Theta_m^i(x_1, x_3)$, $\Lambda_m^i(x_2, x_3)$, $\Pi_p^i(x_2, x_3)$ y $\Upsilon_m^i(x_2, x_3)$.

En relación a la carga distribución de carga de línea w_0 que aparece en la Figura 12.48, para un caso general de carga lineal w se puede escribir como

$$w(x_1, x_3) = w(x_1)\delta(x_3) \quad \text{o} \quad w(x_1, x_3) = w(x_1)\delta(x_3 - B/2), \quad (12.599)$$

respectivamente, dependiendo de donde se coloca el origen del sistema de coordenadas para x_3 y donde $\delta(x)$ sería la distribución o función generalizada de Dirac. Es esta función $w(x_1, x_3)$ la que se puede expandir en series de Fourier como se hizo en (12.594) para efectos de encontrar algunas de las constantes de las expansiones para el campo de desplazamientos.

12.10. El problema de torsión en ejes de sección arbitraria

En la Sección 12.9.3 se re-estudió el problema de torsión para un eje de sección circular del Capítulo 4. En particular se obtuvo que el campo de desplazamientos en coordenadas Cartesianas para ese problema era de la forma (12.420)

$$u_1 = -\kappa zy, \quad u_2 = \kappa zx, \quad u_3 = 0. \quad (12.600)$$

En particular es interesante notar que la solución del problema de torsión está basada en suponer que no hay desplazamiento axial en el eje z o eje 3. En el caso de las secciones no circulares se puede comprobar de forma experimental que u_3 en general no es igual a cero, y que aún en el régimen de pequeñas deformaciones no es posible suponer $u_3 = 0$. Considerando (12.600) y los comentarios anteriores, Saint-Venant propuso un método de solución basado en el siguiente supuesto:

$$u_1 = -\kappa zy, \quad u_2 = \kappa zx, \quad u_3 = \kappa f(x, y), \quad (12.601)$$

en donde $f(x, y)$ es conocida como función ‘warping’ y como se demostrará ahora tiene un rol muy importante en la búsqueda de soluciones en el caso de torsión de secciones arbitrarias.

Si se usa (12.601) en (12.216) se tiene $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(-\kappa z + \kappa z) = 0$ y

$$\varepsilon_{13} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right), \quad (12.602)$$

luego para un material elástico lineal isotrópico (12.215) las únicas componentes del tensor de esfuerzos que no son nulas son

$$T_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad T_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}, \quad (12.603)$$

o sea $T_{13} = T_{13}(x, y)$ y $T_{23} = T_{23}(x, y)$, luego las ecuaciones de equilibrio (12.214) (sin fuerzas de cuerpo) se reducen a

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} = 0. \quad (12.604)$$

Reemplazando (12.602) en (12.603) y esos resultados en (12.604) se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right) \right] = 0,$$

y como κ, μ son constantes se transforma en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f = 0. \quad (12.605)$$

En la Figura 12.49 se tiene una representación esquemática de un eje \mathcal{C} con sección en el extremo libre \mathcal{A} y manto $\partial\mathcal{C}$.

En relación a las condiciones de borde para f , de la Figura 12.49 podemos ver que en el manto del eje no hay cargas externas, luego se debe cumplir para $\partial\mathcal{C}$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad T_{13}n_1 + T_{23}n_2 = 0. \quad (12.606)$$

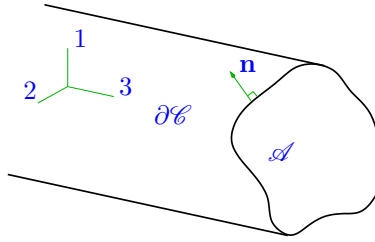


Figura 12.49: Eje sección arbitraria.

En cuanto a la relación de f con el torque total T de (12.425) se tenía que $T = \int_{\mathcal{A}} (xT_{23} - yT_{13}) dA$ que en nuestro caso de (12.602), (12.603) queda como

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{A}} \left[x\mu\kappa \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right) - y\mu\kappa \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \right] dA, \\ &= \mu\kappa \int_{\mathcal{A}} \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dA. \end{aligned} \quad (12.607)$$

No resolveremos directamente (12.605), en su lugar el método usado comúnmente es trabajar con (12.604). La ecuación (12.604) tiene la solución en función de potencial de esfuerzos ψ

$$T_{13} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad T_{23} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (12.608)$$

Es fácil demostrar que (12.608) es solución de (12.604) para ψ suficientemente suave.

Veamos ahora una condición de compatibilidad para ψ . De (12.608), (12.602) y (12.603) se tiene que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \mu\kappa \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right), \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu\kappa \left(\frac{\partial f}{\partial y} - x \right), \quad (12.609)$$

de donde se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu \kappa \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 1 \right), \quad -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \mu \kappa \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 1 \right),$$

por lo que si f es suficientemente suave se cumple

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\mu \kappa \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \psi = -2\mu \kappa. \quad (12.610)$$

Respecto a la condición de borde (12.606), veamos la Figura 12.50 en donde se tiene una vista frontal del eje mostrado en la Figura 12.49. El borde $\partial \mathcal{C}$ de la

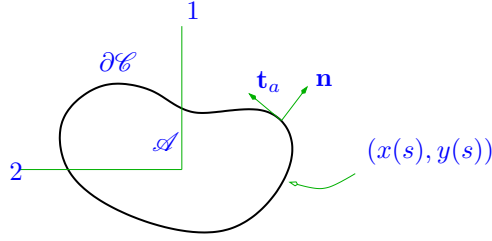


Figura 12.50: Sección y borde.

sección \mathcal{A} se puede describir por medio de las ecuaciones paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$. El vector tangente a ese borde \mathbf{t}_a se puede calcular como

$$\mathbf{t}_a = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right),$$

y como el vector normal es tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_a = 0$ se tiene que

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}} \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right), \quad (12.611)$$

por lo que (12.606) queda como

$$T_{13} \frac{dy}{ds} - T_{23} \frac{dx}{ds} = 0,$$

y de (12.608) esto es equivalente a

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\psi}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(s) = \psi_o$$

donde ψ_o es una constante. Supongamos que $\psi_o = 0$, luego para el borde $\partial \mathcal{C}$ la condición de borde para ψ es

$$\psi(s) = 0. \quad (12.612)$$

Respecto a la relación con el torque total T usando (12.608) en (12.425) se tiene

$$T = - \int_{\mathcal{A}} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA = - \int \int_{\mathcal{A}} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy, \quad (12.613)$$

luego usando el teorema de Green²²

$$\begin{aligned} T &= - \int \int_{\mathcal{A}} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_{\mathcal{A}} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - \frac{\partial}{\partial y}(y\psi) + 2\psi \right] dx dy, \\ &= \underbrace{\int_{\partial \mathcal{C}} (-x\psi dx + y\psi dy)}_{=0} + 2 \int_{\mathcal{A}} \psi dA, \\ &= 2 \int_{\mathcal{A}} \psi dA, \end{aligned} \quad (12.614)$$

donde se ha usado el hecho que $\psi(s) = 0$ en $\partial \mathcal{C}$.

En resumen de (12.610), (12.612) y (12.614) tenemos que resolver

$$\nabla^2 \psi = -2\mu\kappa \quad \text{en } \mathcal{A}, \quad (12.615)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } \partial \mathcal{C}, \quad (12.616)$$

$$T = 2 \int_{\mathcal{A}} \psi dA. \quad (12.617)$$

12.10.1. Revisión del problema de torsión en un eje de sección circular

Resolvamos como ejemplo inicial nuevamente el problema de torsión en un eje de sección circular, ahora trabajando con la función de esfuerzos ψ . El operador ∇^2 en coordenadas polares (intercambiando θ por ξ) está dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (12.618)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. El elemento de área en (12.617) está dado por $dA = r d\xi dr$. El área \mathcal{A} está definida por

$$\mathcal{A} : \quad 0 \leq r \leq \frac{D}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi.$$

Hay varias formas de resolver (12.615): con series de Fourier, transformadas o por medio del método de la inversa, en donde se asume una solución de cierta forma de modo de simplificar (12.615). Usaremos el segundo método suponiendo

²²El teorema de Green dice que $\oint_{\partial \mathcal{K}} (L dx + M dy) = \int \int_{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy$, para una superficie plana \mathcal{K} con borde $\partial \mathcal{K}$.

que $\psi(r, \xi) = \psi(r)$, reemplazando en (12.615) considerando (12.618) se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} = -2\mu\kappa, \\
\Leftrightarrow & \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = -2\mu\kappa r, \\
& \Rightarrow r \frac{d\psi}{dr} = -\mu\kappa r^2 + c_1, \\
& \Rightarrow \psi(r) = -\frac{\mu\kappa}{2} r^2 + c_1 \ln r + c_0, \quad (12.619) \\
\Leftrightarrow & \psi(x, y) = -\frac{\mu\kappa}{2} (x^2 + y^2) + \frac{c_1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c_0, \quad (12.620)
\end{aligned}$$

donde c_0, c_1 son constantes, luego de (12.608) se tiene

$$T_{13}(x, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\mu\kappa y + \frac{c_1 y}{x^2 + y^2}, \quad (12.621)$$

$$T_{23}(x, y) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \mu\kappa x + \frac{c_1 x}{x^2 + y^2}. \quad (12.622)$$

Pero si $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ esto implica, por ejemplo, que $T_{13} \rightarrow \infty$ y lo mismo pasa con T_{23} , lo que no ocurriría en la realidad, luego se supone $c_1 = 0$. Se tiene que $\psi = 0$ en $\partial\mathcal{C}$ que es equivalente a $\psi(D/2) = 0$, luego de (12.619) se tiene

$$c_0 = \frac{\mu\kappa D^2}{8}, \quad (12.623)$$

de modo que

$$\psi(r) = \frac{\mu\kappa}{2} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right). \quad (12.624)$$

Reemplazando en (12.617) se tiene

$$T = 2 \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \frac{\mu\kappa}{2} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) r \, d\xi \, dr = \frac{\pi\mu\kappa}{2} \left(\frac{D^2}{4} \right)^2 = \mu\kappa \frac{D^4\pi}{32}, \quad (12.625)$$

que es idéntico a la solución (4.7) si se define $J = \frac{D^4\pi}{32}$, luego $T = \mu\kappa J$ y por tanto $\kappa = \frac{T}{\mu J}$ y de (12.608) se tiene

$$T_{13} = -\frac{Ty}{J}, \quad T_{23} = \frac{Tx}{J}. \quad (12.626)$$

Si se observa la Figura 12.51 se puede probar (se deja como ejercicio) que

$$\tau_{\xi z} = \sqrt{T_{13}^2 + T_{23}^2} = \frac{T}{J} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Tr}{J}, \quad (12.627)$$

que es igual a (4.8).

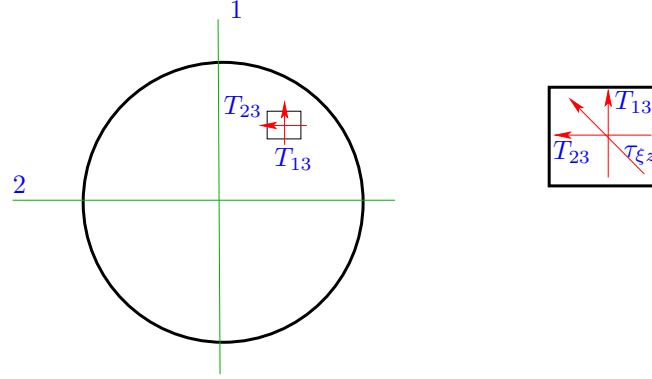


Figura 12.51: Eje de sección circular. Esfuerzos en el sistema cartesiano y polar.

Ejercicios

- Reemplaze (12.624) en (12.609) y de (12.601) obtenga las componentes del desplazamiento u_1 , u_2 y u_3 .
- Obtenga el valor máximo para u_3 y de T_{13} , T_{23} y su ubicación.

12.10.2. Torsión en eje de sección elíptica

Vamos a resolver (12.615)-(12.617) para el caso de una sección elíptica considerando nuevamente el método de la inversa²³ en donde se supone que la solución para ψ es de la forma

$$\psi(x, y) = B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (12.628)$$

La sección se muestra en la Figura 12.52. Es fácil probar que $\psi(\partial\mathcal{C}) = 0$.

²³Si se desea resolver (12.615)-(12.617) de una forma más racional, considerando las condiciones de borde $\psi(s) = 0$ para en este caso el borde elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en ese caso podría ser útil considerar el operador ∇^2 en coordenadas elípticas como

$$\nabla^2 F = \frac{2}{d^2 [\cosh(2\phi) - \cos(2\zeta)]} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \right),$$

donde

$$x = d \cosh \phi \cos \zeta, \quad y = d \sinh \phi \sin \zeta,$$

de donde se tiene que

$$a = d \cosh \phi_o, \quad b = d \sinh \phi_o,$$

que son relaciones que sirven para encontrar d , ϕ_o en función de a , b .

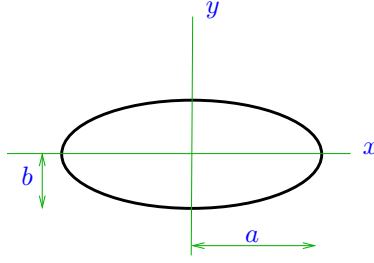


Figura 12.52: Eje de sección elíptica.

Calculemos $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2B}{a^2}$ y $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2B}{b^2}$, luego reemplazando en (12.615) se tiene

$$2B \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2\mu\kappa,$$

de donde se obtiene

$$B = -\mu\kappa \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad (12.629)$$

luego de (12.628) se tiene

$$\psi = -\mu\kappa \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (12.630)$$

y reemplazando esto en (12.617) se tiene

$$\begin{aligned} T &= -2\mu\kappa \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dA, \\ &= -2\mu\kappa \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dy dx, \\ &= 2\mu\kappa \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{ab\pi}{2}, \\ &= \mu\kappa\pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \end{aligned} \quad (12.631)$$

de donde se puede despejar κ como

$$\kappa = \frac{T(a^3 + b^3)}{\mu a^3 b^3 \pi}. \quad (12.632)$$

Ejercicios

- Reemplace (12.630) en (12.609) y de (12.601) obtenga las componentes del desplazamiento u_1 , u_2 y u_3 .
- Obtenga el valor máximo para u_3 , T_{13} y T_{23} y su ubicación en la sección elíptica.

12.10.3. Torsión en eje de sección rectangular

El último caso a estudiar es el más interesante y corresponde al problema de torsión en un eje de sección rectangular como el mostrado en la Figura 12.53. Este problema fue tratado de forma aproximada en la Sección 4.2.

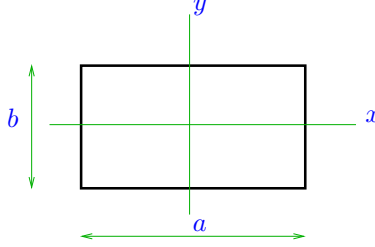


Figura 12.53: Eje de sección rectangular.

Considérese la ecuación (12.615) que reescribimos aquí

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\mu\kappa. \quad (12.633)$$

Buscaremos la solución ψ de (12.633) descomponiéndola en una particular más una homogénea

$$\psi(x, y) = \psi_P(x, y) + \psi_H(x, y). \quad (12.634)$$

Por inspección la solución particular de (12.633) puede ser de la forma $\psi_P(x, y) = B(x^2 + y^2)$, luego reemplazando en (12.633) se tiene $B = -\mu\kappa$ de modo que

$$\psi_P(x, y) = -\mu\kappa(x^2 + y^2). \quad (12.635)$$

En relación a ψ_H esta función debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_H}{\partial y^2} = 0. \quad (12.636)$$

Respecto a las condiciones de borde se debe cumplir que

$$\psi(\partial\mathcal{C}) = \psi_H(\partial\mathcal{C}) + \psi_P(\partial\mathcal{C}) = 0,$$

que de la Figura 12.53 es equivalente a

$$\psi_H\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = \mu\kappa\left(\frac{a^2}{4} + y^2\right), \quad \psi_H\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = \mu\kappa\left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right). \quad (12.637)$$

Se busca una solución para ψ que sea cero en todo el borde de la sección rectangular, además se puede probar que dicha solución, dada la simetría de la

geometría, de la ecuación y de las condiciones de borde, debe ser simétrica respecto al eje x y al eje y (ver Figura 12.53), y es posible ver que efectivamente ψ_P es simétrica respecto a esos ejes, de modo que ψ_H también lo debe ser.

Como es usual en problemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales con condiciones de borde no-homogéneas (ver (12.637)), vamos a suponer que ψ_H se puede descomponer como $\psi_H(x, y) = \psi_H^{(1)}(x, y) + \psi_H^{(2)}(x, y)$ en donde se cumple que

$$\psi_H^{(1)}\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \psi_H^{(1)}\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = \mu\kappa\left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right), \quad (12.638)$$

$$\psi_H^{(2)}\left(\pm\frac{a}{2}, y\right) = \mu\kappa\left(\frac{a^2}{4} + y^2\right), \quad \psi_H^{(2)}\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = 0. \quad (12.639)$$

Vamos a suponer que la solución para $\psi_H^{(1)}(x, y)$ es de la forma $\psi_H^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{H_n}^{(1)}(x, y)$ donde²⁴

$$\psi_{H_n}^{(1)}(x, y) = g_n(y) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right). \quad (12.640)$$

Reemplazando en (12.636) se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 g_n}{dy^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 g_n = 0, \quad (12.641)$$

cuya solución es

$$g_n(y) = G_1 e^{\frac{\pi n}{a} y} + G_2 e^{-\frac{\pi n}{a} y}, \quad (12.642)$$

donde G_1 y G_2 son constantes (que pueden depender de n) por lo que

$$\psi_H^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(G_1 e^{\frac{\pi n}{a} y} + G_2 e^{-\frac{\pi n}{a} y}) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \right], \quad (12.643)$$

luego de (12.638)₂ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(G_1 e^{\pm \frac{\pi n}{a} b} + G_2 e^{\mp \frac{\pi n}{a} b}) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \right] = \mu\kappa\left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right). \quad (12.644)$$

Vamos ahora a expandir la función $x^2 + \frac{b^2}{4}$ en una serie cosenoidal de Fourier como $x^2 + \frac{b^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$ en donde a_n estaría dada por²⁵

$$a_n = \frac{2 \left\{ 4a^3 n \pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + a \left[-8a^2 + (a^2 - b^2)n^2 \pi^2 \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}}{2n^3 \pi^3}. \quad (12.645)$$

²⁴Si se intenta resolver por medio del método de separación de variables (12.636) considerando (12.638)₁ se llegaría a un tipo de solución de la forma $\psi_{H_n}^{(1)}(x, y) = g_n(y) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$, que cumple con las condiciones de borde (12.638)₁, pero que por otra parte no es simétrica y por tanto no puede usarse para obtener (12.638)₂ que se puede apreciar es una función simétrica en x . Por ese motivo se supone la forma (12.640), en donde se tiene que para $x = \pm \frac{a}{2}$ se tiene que $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0 \forall n$.

²⁵Ejercicio: Verificar si (12.645) es o no correcta.

Como $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ es diferente de 0 solo para n impar, reemplazando n por $2n-1$ en (12.644) y (12.645) teniendo en cuenta la expansión en series cosenoidal de Fourier de $x^2 + \frac{b^2}{4}$ de (12.644) se tiene²⁶

$$\left[G_1 e^{\frac{\pi(2n-1)}{a}b} + G_2 e^{-\frac{\pi(2n-1)}{a}b}\right] = \mu\kappa \frac{[-8a^2 + (a^2 - b^2)(2n-1)^2\pi^2]}{(2n-1)^3\pi^3}, \quad (12.646)$$

$$\left[G_1 e^{-\frac{\pi(2n-1)}{a}b} + G_2 e^{\frac{\pi(2n-1)}{a}b}\right] = \mu\kappa \frac{[-8a^2 + (a^2 - b^2)(2n-1)^2\pi^2]}{(2n-1)^3\pi^3}, \quad (12.647)$$

de donde se obtiene

$$G_1 = G_2 = \kappa\mu G_n, \quad G_n = e^{\frac{b}{a}(2n-1)\pi} \frac{[-8a^2 + (a^2 - b^2)(1-2n)^2\pi^2]}{\left[1 + e^{\frac{2b}{a}(2n-1)\pi}\right] n^3\pi^3}, \quad (12.648)$$

En el caso de la función $\psi_H^{(2)}(x, y)$ se puede suponer el mismo tipo de representación en series $\psi_H^{(2)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{H_m}^{(2)}(x, y)$, donde

$$\psi_{H_m}^{(2)}(x, y) = f_m(x) \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right).$$

Reemplazando en (12.636) se obtiene una ecuación para $f_m(x)$ similar a (12.642) pero en términos de x y m . Resolviendo y reemplazando en $\psi_H^{(2)}$ después de algunas manipulaciones que por brevedad no se muestran aquí se obtiene

$$\psi_H^{(2)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[(M_1 e^{\frac{\pi m}{b}x} + M_2 e^{-\frac{\pi m}{b}x}) \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \right], \quad (12.649)$$

donde M_1 y M_2 son constantes. Considerando las condiciones de borde (12.639)₂, siguiendo el mismo procedimiento de expandir en este caso la función $\frac{a^2}{4} + y^2$ en una serie cosenoidal, reemplazando m por $2m-1$ de (12.639)₂ se obtienen dos ecuaciones para M_1 y M_2 cuya formas son similares a (12.646), (12.647) intercambiando a por b y m por n , de modo que realizando dichos intercambios de (12.648) se obtiene

$$M_1 = M_2 = \kappa\mu M_m, \quad M_m = e^{\frac{a}{b}(2m-1)\pi} \frac{[-8b^2 + (b^2 - a^2)(1-2m)^2\pi^2]}{\left[1 + e^{\frac{2a}{b}(2m-1)\pi}\right] m^3\pi^3}. \quad (12.650)$$

Usando todos estos resultados tenemos finalmente para ψ de (12.634), (12.635), (12.643) y (12.649) que

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & -\mu\kappa \left\{ (x^2 + y^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n \left(e^{\frac{\pi(2n-1)y}{a}} + e^{-\frac{\pi(2n-1)y}{a}} \right) (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{x}\right) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left[M_m \left(e^{\frac{\pi(2m-1)x}{b}} + e^{-\frac{\pi(2m-1)x}{b}} \right) (-1)^{m+1} \cos\left(\frac{\pi(2m-1)y}{b}\right) \right] \right\}. \quad (12.651) \end{aligned}$$

²⁶Se ha usado el hecho que $\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) = (-1)^{n+1}$ y que $\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) = 0$.

Ejercicios:

- Reemplace (12.651) en (12.617) y obtenga κ en función de T , μ , a y b .
- Reemplace (12.651) en (12.608) y obtenga las expresiones para $T_{13}(x, y)$ y $T_{23}(x, y)$. Busque la ubicación y la expresión para los esfuerzos de corte máximo.
- Usando (12.651) en (12.609) obtenga una expresión para $u_3(x, y)$ de (12.601)₃.
- Estudie el comportamiento de ψ , T_{13} , T_{23} y u_3 para un número Q limitado de términos en la series, para valores dados de a , a/b , μ y T . Grafique esas funciones y determine de manera aproximada el número mínimo de términos Q en las distintas series para el cual el comportamiento de ψ , T_{13} , T_{23} y u_3 no varían mucho²⁷.
- Verifique si la Tabla 4.1 y las expresiones (4.12) son o no aproximadamente correctas.

²⁷Se puede considerar dicho número Q como los términos en la serie para la cual el error relativo al considerar $Q + 1$ términos es muy pequeño en comparación con usar Q .

Capítulo 13

Fatiga

Es bien sabido de distintas observaciones experimentales que si un cuerpo como la barra mostrada en la Figura 13.1, es sometido a una fuerza variable en el tiempo $F(t)$, aun si la magnitud de esta fuerza es pequeña, si se aplica por un periodo largo de tiempo se puede observar falla por fractura o rotura en el cuerpo.

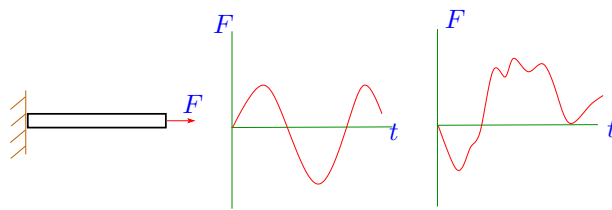


Figura 13.1: Barra bajo el efecto de una fuerza variable en el tiempo. Figura central muestra una fuerza armónica. Figura derecha muestra una fuerza de comportamiento estocástico.

Este fenómeno se llama fatiga y en este capítulo estudiaremos de manera breve algunos conceptos y expresiones simples que nos permitan determinar cuando un cuerpo puede fallar o no por fatiga.

Primero es necesario clasificar los tipos de fuerzas variables en el tiempo que pueden actuar en un cuerpo. De la Figura 13.1 se pueden definir dos tipos de fuerzas variables en el tiempo: las fuerzas armónicas y las fuerzas estocásticas.

Para las fuerzas armónicas $F(t)$ siempre se puede descomponer en una suma finita de funciones senoidales y/o cosenoidales, en donde podemos identificar frecuencias para $F(t)$. En este capítulo asumiremos fuerzas que se puede representar como una sola función senoidal o cosenoidal, de modo que se puede trabajar con una sola frecuencia.

Las fuerzas estocásticas son tales que su representación por series de Fourier tiene infinitos términos.

En la Figura 13.2 tenemos un esquema que nos muestra una vista lateral de una máquina para hacer ensayos de fatiga. La probeta del material que se desea

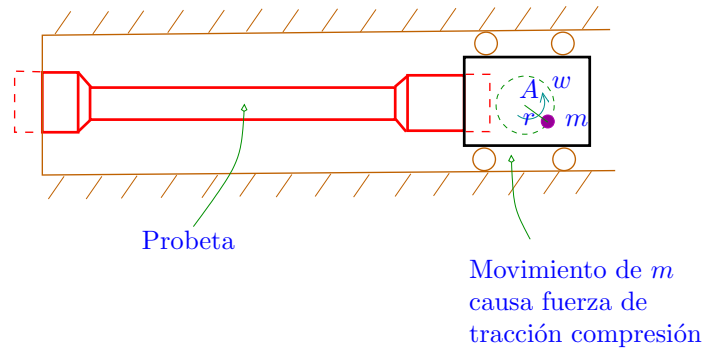


Figura 13.2: Esquema de máquina para ensayo de fatiga.

ensayar se muestra con líneas rojas y está conectada en el extremo izquierdo a una base fija, en tanto en el extremo derecho está conectada a un carro móvil. El carro oscila debido a una masa m que se hace girar con una velocidad angular w a una distancia r del punto A . El giro de la masa genera una fuerza centrífuga, la cual, debido a las restricciones que tiene el carrito al movimiento, se transmite a la probeta como una fuerza horizontal de magnitud variable que se puede representar, por ejemplo, como una función senoidal. La magnitud de la fuerza se puede ajustar con r y/o m , en tanto que la frecuencia se puede ajustar con w .

Ensayos hechos en esta máquina pueden tomar de varias horas a varios días para producir falla por fatiga en la probeta. Se tendrá como información la magnitud de la fuerza (asociada al esfuerzo de tracción/compresión) y el número de ciclos.

Ahora daremos algunas ideas muy generales del porqué para un cuerpo sometido a una fuerza variable $F(t)$, se podría generar falla por rotura, aún en problemas en los que la magnitud de los esfuerzos es muy baja en relación, por ejemplo, al esfuerzo de fluencia.

Primero que todo, en todos los materiales de uso normal en ingeniería siempre hay defectos, como por ejemplo

- Rayas superficiales.
- Distorsión de la estructura cristalina.
- Inhomogeneidad de las propiedades mecánicas.
- Defectos de diseño o fabricación.

Ahora bien, el comportamiento de estos defectos frente a las cargas variables en el tiempo es lo que puede causar falla por fatiga. Como ejemplo tomemos la placa con un grieta mostrada en la Figura 13.3. En la realidad la grieta puede

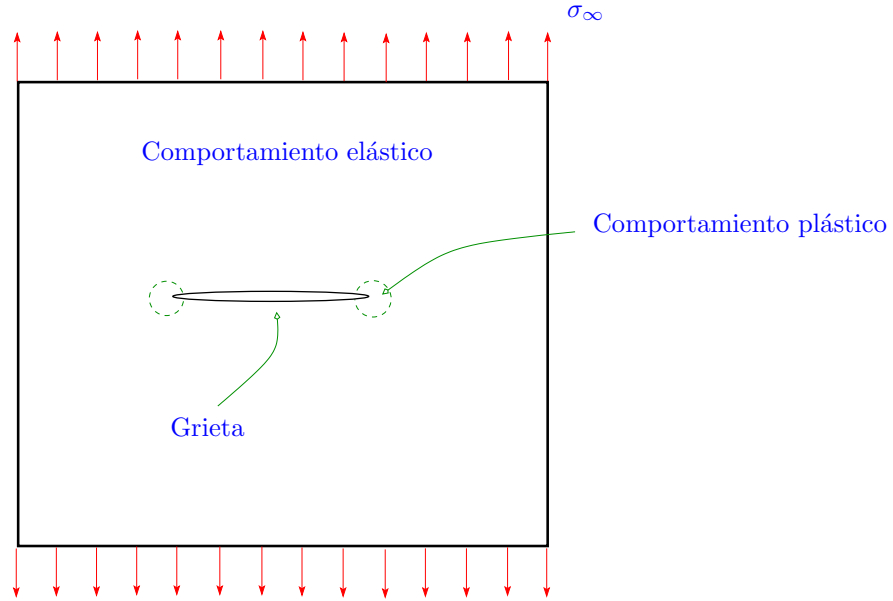


Figura 13.3: Placa con grieta sometida a carga externa mostrando la zona de comportamiento plástico cerca de las puntas de la misma.

ser muy pequeña, tan pequeña en relación al tamaño de la placa que podría no ser detectable por medio de instrumentos normales.

Imaginemos que la placa es sometida a un esfuerzo normal uniforme σ_∞ lejos, y que σ_∞ está muy por debajo del límite de fluencia.

Para una placa con una grieta con la orientación que se muestra en la figura, cerca de la punta de la grieta, y debido al cambio brusco de geometría cerca de esa zona, siempre se producirá una ‘concentración’ de esfuerzos independiente de la magnitud de σ_∞ .

La zona de concentración de esfuerzos puede ser muy pequeña pero siempre estará ahí. Como los esfuerzos son muy altos, se producirá una zona de comportamiento plástico cerca de la punta de la grieta. Imaginemos que el esfuerzo lejos es variable en el tiempo, tal como se ilustra en la Figura 13.4.

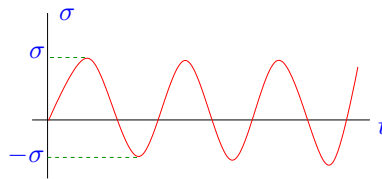


Figura 13.4: Carga externa armónica.

Cuando un esfuerzo es variable en el tiempo y es tal que supera el límite de fluencia, para el gráfico de comportamiento unidimensional tendríamos curvas¹ como las mostradas en la Figura 13.5. Aquí podemos ver que si se supera el

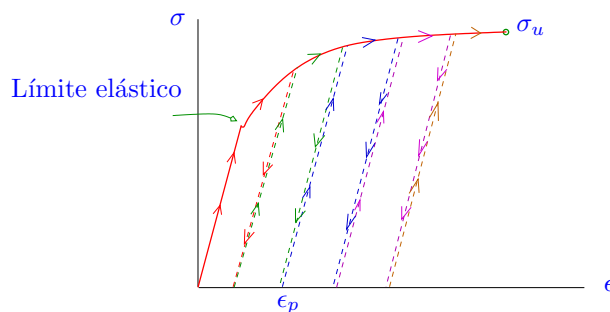


Figura 13.5: Efecto de una carga cíclica sobre el comportamiento en la zona plástica para el frente de una grieta.

esfuerzo de fluencia en el primer ciclo, una vez que σ disminuye de valor, queda una deformación residual a partir de la cual se parte en el siguiente ciclo. Así en cada ciclo vemos se acumula cada vez más deformación residual hasta llegar al límite de ruptura, en donde la punta de la grieta sufre un crecimiento a partir del cual se repite el proceso anterior.

De las consideraciones anteriores podemos ver que la fatiga puede producir un crecimiento de las grietas u otros defectos similares, que crezcan hasta alcanzar un tamaño detectable. Si las grietas alcanzan un cierto tamaño crítico el crecimiento es inestable y entonces ocurre la rotura catastrófica. Las grietas solo pueden crecer bajo el efecto de cargas de tracción y en algunas ocasiones también por cargas de corte².

Si hacemos varios ensayos, por ejemplo usando la máquina mostrada en la Figura 13.2, y realizamos un gráfico en donde se muestre la magnitud del esfuerzo variable σ en función del número de ciclos que este esfuerzo produce la rotura por fatiga n , para muchos materiales obtendríamos un gráfico como el mostrado en la Figura 13.6.

En dicho gráfico podemos apreciar, por ejemplo, que si se aplica $\sigma_1 > \sigma_2$ entonces, como es natural, uno esperaría que el número de ciclos para producir falla por fatiga fuese menor, es decir $n_1 < n_2$.

En el caso que para $\sigma = \sigma_u$ (el esfuerzo de rotura) es fácil notar que la rotura se producirá con un solo ciclo, es decir en el lado izquierdo el gráfico tiene un

¹En realidad como la magnitud de σ en el rango negativo es igual al positivo, tendríamos que extender la líneas en la Figura 13.5 hacia abajo, es decir al rango $\sigma < 0$, pero por simplicidad no lo hacemos.

²Las grietas tienen tres modos de propagación, el modo I es el más indentificable y se relaciona con el crecimiento (o la acción sobre la grieta) por tracción, como se muestra en la Figura 13.3. El modo II se asocia a cargas de cortes que pueden causar crecimiento por deslizamiento. El modo III es corte antiplano.

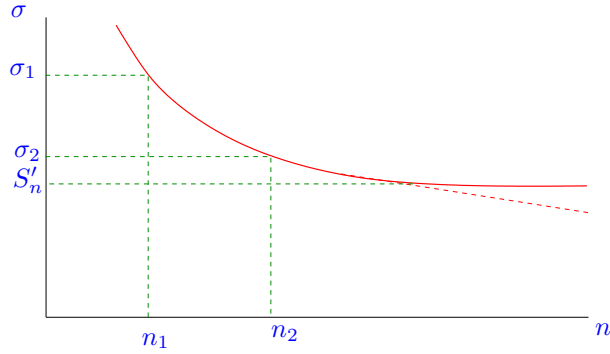


Figura 13.6: Diagrama experimental para obtener la resistencia a la fatiga.

límite.

Para varios materiales se puede observar que hay un límite para el esfuerzo $\sigma = S'_n$, para el cual el número de ciclos para producir rotura tiende a infinito. A este esfuerzo se le llama resistencia a la fatiga experimental. La línea roja llena muestra la aproximación, en tanto que la línea roja punteada muestra la tendencia real. Para el gráfico normalmente se usa el logaritmo de n en lugar de n para ese eje horizontal.

Si no se dispone de datos obtenidos directamente de ensayos de fatiga, una aproximación para S'_n es

$$S'_n \approx 0,5\sigma_u. \quad (13.1)$$

Para diseño no se puede trabajar directamente con S'_n , pues ya se ha indicado que el fenómeno de fatiga depende no solo del material, sino también de la geometría y de la forma como el cuerpo está siendo cargado. Por este motivo es tan complejo obtener modelos con un buen grado de aproximación para predecir fatiga en problemas de diseño. Ahora mostraremos un método simple, pero aproximado, en donde la resistencia a la fatiga en diseño, que denominaremos S_n , se determina como

$$S_n = C_s C_L C_k S'_n, \quad (13.2)$$

donde C_s , C_L y C_k son constantes, en donde

	Pulido espejo	1	
C_s : Coeficiente de acabado superficial	Pulido	0,9	(13.3)
	Maquinado	0,8	
	Laminado	0,7	

	Flexión	1	
C_L : Coeficiente de tipo de carga	Axial pura	0,9	(13.4)
	Torsión (material dúctil)	0,8	

C_k : Coeficiente del tipo de geometría	$0,3 \leq C_k \leq 0,6$	(13.5)
---	-------------------------	--------

Hay un caso importante que es necesario estudiar de forma adicional, que corresponde a la situación en la que se está aplicando una carga constante σ_m más una carga alternante σ_a , tal como se muestra en la Figura 13.7. ¿Sería

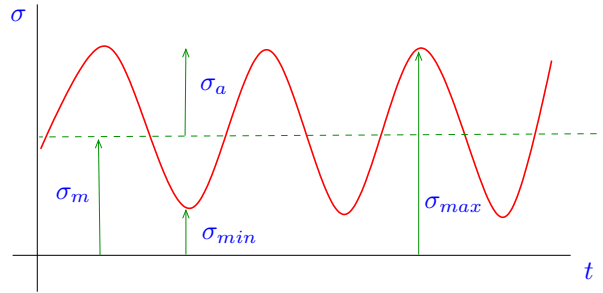


Figura 13.7: Esfuerzo uniforme mas variable.

importante estudiar el caso $\sigma_m < 0$? Ya hemos indicado que para el modo I de falla en fractura, solo importan los esfuerzos de tracción, luego si se aplicase $\sigma_m < 0$ (esfuerzo medio de compresión), este esfuerzo tendería a retrasar el inicio de la falla por fatiga, pues esfuerzos de compresión causan que las grietas no se propaguen y se cierran.

Por lo anterior solo consideraremos el caso $\sigma_m > 0$. De la figura podemos ver que

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}. \quad (13.6)$$

Lo que se podría hacer aquí es realizar varios ensayos de fatiga para determinar S'_n para distintos niveles de $\sigma_m \geq 0$. Si se hace eso se obtendría un gráfico como el mostrado en la Figura 13.8. Lamentablemente la relación entre S'_n y

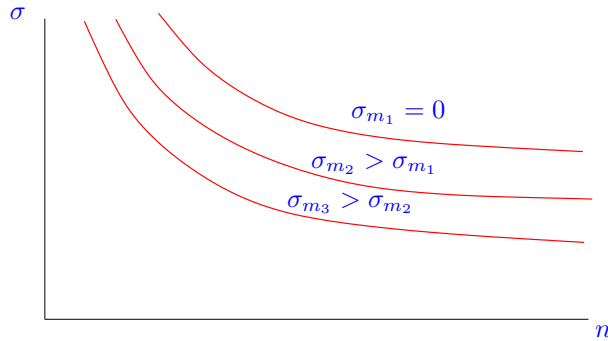


Figura 13.8: Diagrama experimental para obtener la resistencia a la fatiga cuando se aplica esfuerzos constante y variables.

σ_m no es simple de obtener a partir de un gráfico como este.

En su lugar se hace un gráfico como el mostrado en la Figura 13.9, en donde en un eje se tiene la parte alternante σ_a del esfuerzo, en tanto que en el otro eje se tiene la parte constante del mismo σ_m que producen falla por fatiga. Lo que se

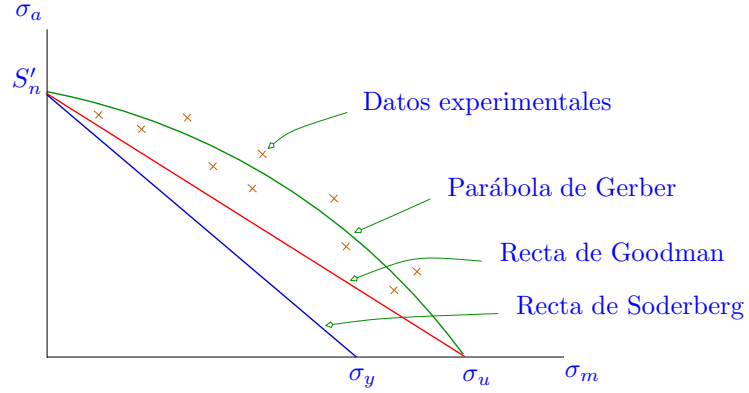


Figura 13.9: Diagrama experimental para obtener la resistencia a la fatiga cuando se aplica esfuerzos constante y variables.

hace aquí es realizar un ensayo de fatiga y para cada σ_m buscar σ_a (o viceversa), que produce la falla por fatiga. Los resultados experimentales quedarían como una nube de puntos como los mostrados en la figura.

Se sabe que si $\sigma_m = 0$ entonces para tener falla por fatiga se requiere $\sigma_a = S'_n$. Por otra parte si $\sigma_a = 0$, para tener falla se requiere simplemente $\sigma_m = \sigma_u$, tal como se aprecia en la misma figura.

Hay varios modelos para obtener de forma aproximada la relación entre σ_a y σ_m en fatiga, tal como se ve en la figura. De estos modelos estudiaremos en detalle la 'recta de Goodman'.

En dicha recta se asume una relación lineal entre σ_a y σ_m , en donde se tiene una recta que parte en el punto $(0, S'_n)$ y llega a $(\sigma_u, 0)$.

Interesa determinar algún tipo de factor de seguridad para evitar falla por fatiga cuando se tenga aplicado una carga media más una alternante, para ello observemos la Figura 13.10 en donde tenemos solo la recta de Goodman.

Imaginemos que el esfuerzo medio σ_m es un dato fijo, es decir en general no lo podremos variar, en tanto que σ_a es un dato que puede ser variado³, luego el factor de seguridad para la recta de Goodman FS podría ser definido como

$$FS = \frac{\overline{OP}}{\sigma_{adm}}, \quad (13.7)$$

³El esfuerzo alternante σ_a podría estar relacionado con el efecto de las vibraciones en un máquina, las cuales se podrían regular de alguna forma, en tanto que σ_m estaría asociado a las cargas 'estáticas' actuando en el cuerpo, las cuales probablemente dependan del diseño del mecanismo, y por tanto sea más difícil variarlas.

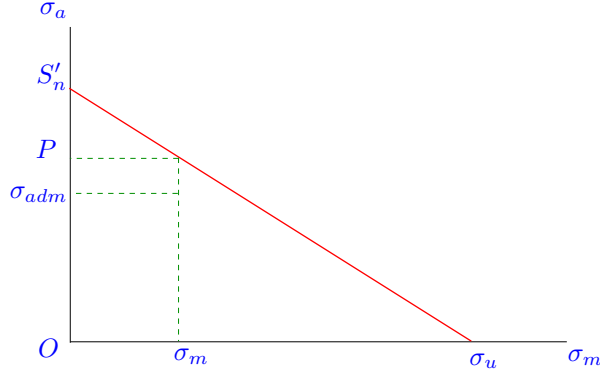


Figura 13.10: Factor de seguridad de Goodman.

en donde aquí \overline{OP} sería el valor del esfuerzo alternante que produciría falla por fatiga y σ_{adm} sería el esfuerzo alternante admisible en nuestra aplicación particular.

Si se ve la figura se puede apreciar la igualdad de triángulos que se expresa matemáticamente como

$$\frac{\overline{OP}}{\sigma_u - \sigma_m} = \frac{S'_n}{\sigma_u},$$

obtenemos

$$\overline{OP} = \frac{S'_n}{\sigma_u}(\sigma_u - \sigma_m). \quad (13.8)$$

Reemplazando en (13.7) se llega finalmente a

$$FS = \frac{S'_n}{\sigma_{adm}} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right). \quad (13.9)$$

La expresión anterior se puede usar de la siguiente forma. Si se conoce σ_u y S'_n , y si además queremos tener un factor de seguridad $FS \geq 1$, de (13.9) podríamos obtener σ_{adm} para la parte alternante del esfuerzo actuando en el cuerpo. Otra forma de usarla es que si se conoce $\sigma_{adm} \leq \overline{OP}$, de (13.9) podemos obtener el factor de seguridad FS de nuestro problema. Una aplicación menos común es tener como datos FS , σ_{adm} y σ_m , y buscar un material (es decir buscar σ_u y S'_n) para el cual de forma aproximada (13.9) se cumpla.