$2^{\underline{o}}$-GQ-Matemática

Daniel Vital

November 2024

Introdução

Variáveis independentes: São as variáveis inseridas e controladas no modelo/cálculo matemático. São as "entradas" (inputs) do sistema

Variáveis dependentes: variam em função das independentes.

$$\underbrace{y}_{\substack{\text{Var.}\\\text{Depend.}}} = f \underbrace{(x)}_{\substack{\text{Var.}\\\text{Indep.}}}$$

1 Equações diferenciais de primeira ordem

Geralmente, a solução de um cálculo diferencial é a integral da mesma.
A palavra ordem refere-se à mais alta ordem das derivadas (ou diferenciais) que aparecem na equação diferencial.
O grau da equação é dado pelo número que eleva **exclusivamente a maior derivada**
Para que a equação seja **linear**:

- a derivada $\frac{dy}{dt}$ e a variável dependente (y) aparecem apenas no primeiro grau
- não existe nenhum produto na forma $y \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)$

Therefore, em geral, uma equação diferencial linear de primeira ordem assume a seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} + u(t) \cdot y = w(t)$$

Onde:
u, w e y são funções de t
Nenhuma restrição é imposta a variável independente t
u e w podem ser constantes, bem como representar expressões como t^2 e e^t

quando a função u (o coeficiente da variável dependente y) é uma constante, e quando a função w é um termo constante aditivo:
reduz-se ao caso especial de uma equação diferencial linear com coeficiente constante e termo constante. Vamos trabalhar, por enquanto, apenas com esse tipo simples de ED.

O caso homogêneo. se u e w são funções constantes e $w = 0$, fica:

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dt}\frac{1}{y} = -a$$

A solução será:

$$y(t) = Ae^{-at} \qquad \text{[solução geral ; } A = \text{Cte]}$$

ou

$$y(t) = y(0)e^{-at} \qquad \text{[solução definida]}$$

2 E.D.O - Resolvendo

para uma estrutura: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Ex:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 10$$

1. Calcular o fator integrante $\mu(x)$

   Fator integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ $\quad e^{\int 2dx} = e^{2x} \ \rightarrow \ \mu(x) = e^{2x}$

2. Multiplicar os dois lados pelo fator

$$\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right) \cdot e^{2x} = 10 \cdot e^{2x}$$

$$\underbrace{e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y}_{(e^{2x}\cdot y)'} = 10e^{2x}$$

3. Reescrever (fator $\times$ y)' = ... ; para facilitar o cálculo

   (fator $\times$ $y)' = (e^{2x} \cdot y)'$
   substituindo:

$$\underbrace{(e^{2x} \cdot y)'}_{e^{2x}\frac{dy}{dx}+2e^{2x}y} = 10e^{2x}$$

4. Calcular a integral dos dois lados da equação

$$\int (e^{2x} \cdot y)' = \int 10e^{2x}$$

   $\int (e^{2x} \cdot y)' = e^{2x} \cdot y$

$$e^{2x} \cdot y = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

$$\underbrace{\boxed{y = 5 + e^{-2x}C}}_{\substack{\text{Solução} \\ \text{Geral da E.D.O}}}$$

A solução geral é a função que torna a sentença (E.D.O) verdadeira.
$e^{-2\log_e(x)} = \left(e^{\log_e(x)}\right)^{-2}$

3 Equações diferenciais Homogêneas de 2ª ordem com Coeficientes constantes

A equação possui a seguinte estrutura

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'') \\ ay(x)'' + by(x)' + cy(x) = 0 \end{cases}$$

Sendo $a,\ b\ ,c\ \in\ \mathbb{R}$ (São Ctes) ; $a \neq 0$

exemplos de estruturas:
$y'' - y = 0$
$2y'' + 3y' + y = 0$

A solução (que tem a mesma propriedade da solução da EDO) é dada por:

$$y(x) = e^{rx}$$

$e \approx 2,7182$

substituindo na equação:

$$a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + c(e^{rx}) = 0$$

$$a \cdot r^2 e^{rx} + b \cdot re^{rx} + c \cdot e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

se $a \cdot b = 0 \therefore a = 0$ ou $b = 0$
porém, $e^{rx} \neq 0$, logo, $(ar^2 + br + c) = 0$

Para resolver $(ar^2 + br + c) = 0$, usaremos bhaskara. Temos que estudar os casos do Δ, pois para cada caso, temos soluções distintas
c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Isto é: Podem assumir qualquer valor, e são determinadas por informações adicionais. Sem condições iniciais, a Eq. diferencial tem infinitas soluções, representadas pelas constantes.

1. Para o $\Delta > 0$ — Para todo $\Delta > 0$, existem duas raízes reais e distintas
   A solução será:

   $$\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}}$$

   onde r_1 e r_2 são as raízes

   $y'' - 5y' + 6y = 0 \to r^2 - 5r + 6y = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac$
   $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$ $\qquad \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = r_1 = 2 \ ;\ r_2 = 3$
   $\Delta = 1$
   $\Delta > 0 \ \therefore$ $\qquad y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$

2. Para o $\Delta = 0$
   A solução será:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 \cdot x e^{rx}}$$

3. Para o $\Delta < 0$
   A solução será:

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cdot cos(\beta x) + c_2 \cdot sen(\beta x))}$$

sendo: α a parte real ; β a parte imaginária
Os resultados serão duas raízes complexas conjugadas: $r_1 = \lambda + \mu i$ e $r_2 = \lambda - \mu i$
importante: O sinal negativo de $\beta = \pm 1$ é desprezado. Considera-se apenas o valor absoluto (positivo), pois $cos(-x) = cos(x)$ e $sen(-x) = -sen(x)$

Exemplo: $y'' - 2y' + 2y = 0 \therefore \xrightarrow{\text{E.C}} r^2 - 2r + 2 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} - \overbrace{\sqrt{-1}}^{i} = 2i$$

Achado o valor do Δ, podemos resolver com uma diferença apenas na maneira de se escrever:

$$\therefore \quad \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \underbrace{\frac{2}{2} \pm \frac{2i}{2}}_{\text{atenção}} = 1 \pm 1i \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \ ; \ \beta = 1$$

O β não inclui "i"

Ou:

$$\therefore \quad \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow \quad r_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + 1i \ ; \ r_2 = \frac{2 - 2i}{2} = \underbrace{1 - 1i}_{\lambda - \mu i}$$

Independentemente, o resultado será:

$$\therefore \ y(x) = e^{1x}(c_1 \cdot cos 1x + c_2 \cdot sen 1x)$$

4 Números Complexos

Todo número real é complexo, mas nem todo complexo é real

determinaremos $\sqrt{-1}$ como i, sendo $i \Rightarrow$ unidade imaginária de número complexo

exemplo:

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \overbrace{\sqrt{-1}}^{i} = \boxed{2i}$
$i \Rightarrow$ unidade imaginária de número complexo

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \overbrace{\sqrt{-1}}^{i} = \boxed{6i}$$

5 Problema do Valor Inicial

Para resolver o P.V.I, devemos seguir os seguintes passos:

1. Resolver a equação diferencial
2. Calcular a primeira derivada da solução (Apenas na EDO de segunda ordem)
3. Substituir valores iniciais (Nos casos de EDOs de 2ª ordem, obtêm-se sistemas de equação)
4. Resolver a equação/equações para achar a(s) contante(s)
5. Aplicar a(s) constante(s) encontrada(s) na solução geral

Exemplo: Resolva o PVI:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

1. Achando a solução geral
   $y'' - 5y' + 6y \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$
   $r_1 = 2$
   $r_2 = 3$
   $\therefore$ A solução geral será $y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$

2. Derivando a solução Geral
   $y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$
   $y'(x) = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x}$

3. Substituindo os valores iniciais:
   $y(0) = 2$
   $y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} \longleftarrow$ Se o valor inicial se refere a função não derivada, usamos ela
   $y(0) = c_1 \cdot e^{2\cdot 0} + c_2 \cdot e^{2\cdot 0}$
   $y(0) = c_1 + c_2$
   $y(0) = 2 \ \therefore \ \boxed{c_1 + c_2 = 2}$

   $y'(0) = 5$
   $y'(x) = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} \longleftarrow$ Usando, agora, a função derivada
   $y'(0) = 2c_1e^{2\cdot 0} + 3c_2e^{3\cdot 0}$
   $y'(0) = 2c_1 + 3c_2$
   $y'(0) = 5 \ \therefore \ \boxed{2c_1 + 3c_2 = 5}$

4. Montando o sistema com as equações que achamos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases}$$

   $\therefore c_1 = 1 \ ; \ c_2 = 1$

5. Aplicando na solução geral que achamos
   Sendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x}$$

$$\therefore \underbrace{\boxed{y(x) = e^{2x} + e^{3x}}}_{\text{Solução do P.V.I}}$$

6 Integrais

6.1 Integral Por Substituição

relembre a regra da cadeia

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrando essa função:

$$\int [F(g(x))]'dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

$$F(g(x)) + C = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

aplicando a substituição:

$$\int F'(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)}_{du} dx = F(g(x)) + C$$

$$\therefore \int F'(u) \cdot du = F(u) + C$$

Ou seja, para aplicar a substituição, precisamos obter uma integral que possua: Uma função e sua respectiva derivada.

Exemplo:

$$\int 6x^2(2x^3-1)^{99}dx \quad = \quad \int du \cdot u^{99} = \frac{u^{100}}{100} + C = \frac{(2x^3-1)^{100}}{100} + C$$

$u = 2x^3 - 1$
$\frac{du}{dx} = 6x^2$
$du = 6x^2dx$

Exemplo 2:

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \underbrace{\int \frac{du}{u} = ln(u) + C}_{\text{Regra}} = ln(1+x^2) + C$$

$u = 1 + x^2$
$\frac{du}{dx} = 2x$
$du = 2x \cdot dx$

Exemplo 3: $\int cos(x+7)dx = cos(u)du = sen(u) + C = \sin(x+7) + C$

Exemplo 4:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)^8} = \int \frac{\frac{du}{3}}{u^8} = \int \frac{du}{3} \cdot \frac{1}{u^8} = \frac{1}{3}\int u^{-8}du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-7}}{-7} + C = \frac{-(3x-5)^{-7}}{21} + C$$

$u = 3x - 5$
$\frac{du}{dx} = 3$
$du = 3dx$
$\frac{du}{3} = dx$

7 Integral por partes

Podemos lembrar a regra do produto, nas derivadas, para fixar:
Prestar atenção ao escolher "dv" e "u" para simplificar a resolução.

$$(u \cdot v)' = du \cdot v \ + \ u \cdot dv$$

integrando os dois lados:

$$u \cdot v = \int du \cdot v \ + \ \int u \cdot dv$$

Reorganizando a equação:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v \ - \ \int v \cdot du}$$

Exemplo:
$\int xe^x \, dx$
$\int u \cdot dv = u \cdot v \ - \ \int v \cdot du$
$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx$

O resultado será:

$$\therefore \int xe^x dx = xe^x \ - \ e^x + C$$

$u = x$
$\frac{du}{dx} = 1$
$du = dx$

$dv = e^x dx$
$v = e^x \longleftarrow$ Se a derivada é e^x, qual a função que ao ser derivada, é e^x?